



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO



Jéssica Gabriela de Almeida Cunha

COMPARAÇÃO DE MALHAS PARA PROBLEMAS DE CORTE E
EMPACOTAMENTO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CATALÃO – GO, 2018

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Jéssica Gabriela de Almeida Cunha

Título do trabalho: Comparação de Malhas para Problemas de Corte e Empacotamento

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

JÉSSICA GABRIELA DE ALMEIDA CUNHA
Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:

Thiago Alves de Oliveira
Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 28 / 02 / 2018

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

² A assinatura deve ser escaneada.

JÉSSICA GABRIELA DE ALMEIDA CUNHA

COMPARAÇÃO DE MALHAS PARA PROBLEMAS DE CORTE E
EMPACOTAMENTO

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem e Otimização pela Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão.

Orientador:
Thiago Alves de Queiroz

CATALÃO – GO

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Cunha, Jéssica Gabriela de Almeida
Comparação de Malhas para Problemas de Corte e
Empacotamento [manuscrito] / Jéssica Gabriela de Almeida Cunha. -
2018.
139 f.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Alves de Queiroz.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade
Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão,
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização, Catalão, 2018.
Bibliografia.

Inclui gráfico, tabelas, algoritmos, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Problemas de Corte e Empacotamento. 2. Malha de Pontos. 3.
Procedimentos de Redução. 4. Normal Patterns. 5. Reduced Raster
Points. I. Queiroz, Thiago Alves de, orient. II. Título.

CDU 004



Ata de Defesa Pública – Dissertação de Mestrado

Aos vinte e dois dias do mês de fevereiro do ano de 2018, às 09h:00 min, reuniram-se os componentes da banca examinadora, professores(as) Dr.(a) Thiago Alves de Queiroz (presidente e orientador), Dr.(a) Lehilton Lelis Chaves Pedrosa, e Dr.(a) Donald Mark Santee para, em sessão pública realizada no Laboratório de Controle Operacional, Sala 03, Bloco J, da Regional Catalão (RC), da Universidade Federal de Goiás (UFG), procederem com a avaliação do trabalho intitulado: “*Comparação de malhas para problemas de corte e empacotamento*”, em nível de Mestrado, área de concentração *Modelagem e Otimização*, de autoria de Jéssica Gabriela de Almeida Cunha, discente do Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização (PPGMO) da UFG/RC. A sessão foi aberta pelo presidente da banca, que fez a apresentação formal dos membros da banca, sendo que o professor Dr. Lehilton Lelis Chaves Pedrosa teve participação via videoconferência. A seguir, a palavra foi concedida a discente que, dentro do tempo regulamentar, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu a candidata, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação do trabalho. Os membros da banca consideraram o trabalho final: (X) **Aprovado** ou () **Reprovado**. Cumpridas as formalidades de pauta, às 10h:50 min a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu Thiago Alves de Queiroz, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pela discente e, posteriormente, será homologada pelo Colegiado do PPGMO.

Catalão-GO, 22 de fevereiro de 2018.

Prof.(a) Dr. (a): Thiago Alves de Queiroz
Programa de Pós-Graduação em
Modelagem e Otimização, UFG/RC.
(Presidente da Banca)

Prof.(a) Dr. (a): Lehilton Lelis Chaves Pedrosa
Instituto de Computação,
Universidade Estadual de Campinas.

Prof.(a) Dr. (a): Donald Mark Santee
Programa de Pós-Graduação em
Modelagem e Otimização, UFG/RC.

Discente: Jéssica Gabriela de Almeida Cunha
Programa de Pós-Graduação em
Modelagem e Otimização, UFG/RC.

*Aos meus pais, Euripedes e Viviane
e ao meu irmão Jefferson,
com muito amor e carinho.*

Agradecimentos

Agradeço a todos que acreditaram em meu potencial e que contribuíram no desenvolvimento desta pesquisa. Em especial, agradeço:

A Deus, pela minha existência e pela força para vencer os obstáculos e atingir meus objetivos. Sem Ele nada é possível.

Aos meus pais, Euripedes e Viviane, meu irmão, Jefferson, e minha cunhada, Izadora, por sempre me incentivarem a lutar pelos meus ideais, pelo apoio, paciência e amor, até nos momentos mais difíceis.

Ao meu noivo Raphael, por todo amor e companheirismo, estando sempre ao meu lado, apesar da distância que nos separam.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Thiago Alves de Queiroz, pela confiança, dedicação, paciência e, principalmente, pelos ensinamentos que levarei por toda minha vida.

A todos os professores que contribuíram com minha formação e a todos os meus amigos pela amizade e pelos bons momentos compartilhados.

A Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG) pelo auxílio financeiro recebido durante a realização do mestrado.

“Fora da caridade não há salvação.”

Allan Kardec

RESUMO

CUNHA, J. G. A.. *Comparação de Malhas para Problemas de Corte e Empacotamento*. 2018. 139 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem e Otimização) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

Este trabalho traz o uso de malhas de pontos na resolução de problemas de corte e empacotamento para itens com formato retangular. As malhas podem ser consideradas em modelos de programação matemática e heurísticas, sendo independentes do problema tratado. As seguintes malhas definidas pela literatura, *canonical dissections* (também conhecida por *normal patterns*), *reduced raster points*, *useful numbers*, *corner points*, *regular normal patterns*, *extreme points* e *meet-in-the-middle patterns*, são consideradas neste trabalho. O objetivo é apresentar relações que existem entre as malhas e analisar a influência delas sobre o tempo gasto na resolução de problemas de corte e empacotamento, antes e após aplicar procedimentos de redução, como atualizar o tamanho dos itens. Resultados teóricos são obtidos envolvendo relações de conjunto e tamanho entre as malhas, mostrando que a malha de *normal patterns* e *useful numbers* são equivalentes e, assim, permitindo provar formalmente que a malha de *reduced raster points* garante uma solução ótima (resultado que estava em aberto na literatura). Além disso, propõe-se um novo procedimento visando reduzir o tamanho das malhas. Como forma de validar o procedimento proposto e avaliar a redução que ele proporciona nas malhas, executam-se experimentos sobre instâncias da literatura, sendo possível observar que as malhas de *reduced raster points* e *meet-in-the-middle patterns* são as menores. Experimentos também foram realizados sobre um problema de empacotamento bidimensional que utiliza um modelo de programação linear inteira para empacotar os itens em pontos da malha. Os resultados indicam que utilizando os procedimentos de redução é possível obter soluções ótimas mais rapidamente.

Palavras-chaves: Problemas de Corte e Empacotamento, Malha de Pontos, Procedimentos de Redução, *Normal Patterns*, *Reduced Raster Points*.

ABSTRACT

CUNHA, J. G. A.. *Comparison of Grids to Cutting and Packing Problems*. 2018. 139 f. Master Thesis in Modelling and Optimization – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

This work brings the use of grid of points in the resolution of cutting and packing problems that consider rectangular shaped items. The grids can be considered for mathematical programming models and heuristics, and they are independent of the problem. The following grids that are defined by the literature are considered for this work: canonical dissections (also known as normal patterns), reduced raster points, useful numbers, corner points, regular normal patterns, extreme points, and meet-in-the-middle patterns. The objective is to assess the influence of each grid on the resolution of cutting and packing problems, before and after applying reduction procedures, as the one related to update the items size. Theoretical results are obtained from relations of set and size between the grids, showing that the grid of normal patterns and useful numbers are equivalent and, thus, proving formally that the grid of reduced raster points ensures an optimal solution (this result has been formally opened in the literature). In addition, we propose a new procedure to reduce the size of grids. In order to validate the proposed procedure and evaluate the grids, we perform experiments over instances from the literature, where it is possible to observe that the grids of reduced raster points and meet-in-the-middle patterns are the smallest. Experiments were also conducted in a two-dimensional packing problem that uses an integer linear programming model to pack the items in points of a grid. The results indicate that using the reduction procedures it is possible to obtain optimal solutions quicker.

Keywords: Cutting and Packing Problems, Grid of Points, Reduction Procedures, Normal Patterns, Reduced Raster Points.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1.1 – Classificações de uma pesquisa segundo Gil (2009). | 27 |
| Figura 2.1 – Ilustração geral dos tipos de problemas de corte e empacotamento e seus critérios. | 33 |
| Figura 2.2 – Representação da operação de mudança de escala. | 42 |
| Figura 2.3 – Representação de um empacotamento bidimensional. | 43 |
| Figura 3.1 – Linha cronológica do surgimento das malhas. | 45 |
| Figura 3.2 – Representação de uma dissecção sobre um recipiente retangular Q | 48 |
| Figura 3.3 – Representação de uma dissecção canônica sobre um recipiente retangular Q | 49 |
| Figura 3.4 – Representação de uma dissecção canônica homogênea. | 49 |
| Figura 3.5 – Exemplo de simetria ao longo da largura do recipiente. | 50 |
| Figura 3.6 – Exemplo do efeito da ordem dos cortes ao longo da largura do recipiente. | 51 |
| Figura 3.7 – Exemplo de um padrão de corte normal. | 52 |
| Figura 3.8 – Exemplo de um padrão sobre a malha de <i>normal patterns</i> | 53 |
| Figura 3.9 – Empacotamento de itens sobre a malha de <i>raster points</i> | 56 |
| Figura 3.10 – Ilustração do contorno de um padrão de empacotamento P | 58 |
| Figura 3.11 – Exemplo de padrões <i>p-equivalentes</i> | 58 |
| Figura 3.12 – Exemplo de padrões de bloco. | 59 |
| Figura 3.13 – Exemplo de padrões de bloco <i>b-equivalentes</i> | 60 |
| Figura 3.14 – Exemplo de padrões <i>bs-equivalentes</i> | 61 |
| Figura 3.15 – Exemplo de padrões <i>c-simétricos</i> | 61 |
| Figura 3.16 – Exemplo de padrões <i>t-equivalentes</i> | 62 |
| Figura 3.17 – Exemplo de dominância entre padrões. | 63 |
| Figura 3.18 – Exemplo de um padrão <i>f-dominante</i> | 64 |
| Figura 3.19 – Exemplo de um padrão <i>vt-dominante</i> e um <i>ht-dominante</i> | 64 |
| Figura 3.20 – Ilustração do envelope de um empacotamento e dos <i>corner points</i> | 66 |
| Figura 3.21 – Ilustração do método enumerativo para obter a malha de <i>corner points</i> | 67 |
| Figura 3.22 – Ilustração da diferença entre as malhas de <i>corner points</i> e <i>extreme points</i> | 69 |
| Figura 3.23 – Ilustração de empacotamento sobre a malha de <i>MIM</i> | 71 |

| | |
|---|-----|
| Figura 3.24 – Ilustração das malhas para o Exemplo 3. | 75 |
| Figura 3.25 – Sequência de empacotamentos para os itens do Exemplo 3. | 75 |
| Figura 3.26 – Pontos resultantes do ramo do item 1 na malha de <i>corner points</i> | 76 |
| Figura 3.27 – Pontos resultantes do ramo do item 2 na malha de <i>corner points</i> | 76 |
| Figura 3.28 – Pontos resultantes do ramo do item 3 na malha de <i>corner points</i> | 77 |
| Figura 3.29 – Pontos resultantes do ramo do item 4 na malha de <i>corner points</i> | 77 |
| Figura 3.30 – Pontos resultantes do ramo do item 1 na malha de <i>extreme points</i> | 78 |
| Figura 3.31 – Pontos resultantes do ramo do item 2 na malha de <i>extreme points</i> | 78 |
| Figura 3.32 – Pontos resultantes do ramo do item 3 na malha de <i>extreme points</i> | 79 |
| Figura 3.33 – Pontos resultantes do ramo do item 4 na malha de <i>extreme points</i> | 79 |
| Figura 4.1 – Padrão de empacotamento sobre a malha de <i>useful numbers</i> | 82 |
| Figura 4.2 – Garantia de otimalidade ao empacotar sobre a malha de <i>raster points</i> | 83 |
| Figura 4.3 – Relações entre as malhas que podem ser obtidas a <i>priori</i> | 87 |
| Figura 4.4 – Exemplo de um padrão antes e após a atualização dos itens. | 88 |
| Figura 4.5 – Procedimento de atualização aplicado sobre a largura dos itens do Exem- plo 6. | 91 |
| Figura 4.6 – Procedimento de atualização aplicado sobre o comprimento dos itens do Exemplo 6. | 92 |
| Figura 4.7 – Obtenção, ao longo da largura, do conjunto de <i>raster points</i> considerando o procedimento de atualização do tamanho dos itens. | 93 |
| Figura 4.8 – Atualização do valor dos itens para o Exemplo 3 considerando o procedi- mento para eliminar pontos da malha na direção da largura. | 97 |
| Figura 4.9 – Procedimento de eliminação de pontos da malha sobre as coordenadas na direção da largura. | 98 |
| Figura 4.10 – Atualização do valor dos itens para o Exemplo 3 considerando o procedi- mento para eliminar pontos da malha na direção do comprimento. | 99 |
| Figura 4.11 – Procedimento de eliminação de pontos da malha aplicado sobre as coor- denadas na direção do comprimento. | 100 |
| Figura 4.12 – Ilustração das restrições de não sobreposição em (4.5). | 102 |
| Figura 4.13 – Representação das restrições em (4.7) e (4.8) para ajudar com a não sobre- posição de itens. | 102 |
| Figura 4.14 – Representação de um espaço e o empacotamento de um item pela heurís- tica construtiva. | 103 |
| Figura 5.1 – Casos analisados por meio dos experimentos computacionais. | 108 |
| Figura 5.2 – Quantidade média de pontos nas malhas para cada um dos quatro casos. | 110 |
| Figura 5.3 – Redução percentual entre as malhas considerando um mesmo caso. | 116 |
| Figura 5.4 – Redução percentual entre os casos, considerando a mesma malha. | 118 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|---|-----|
| Tabela 5.1 – Dados das instâncias usadas nos experimentos. | 108 |
| Tabela 5.2 – Conjuntos das malhas, ao longo da largura, para as instâncias. | 112 |
| Tabela 5.3 – Conjuntos das malhas, ao longo do comprimento, para as instâncias. | 113 |
| Tabela 5.4 – Malhas totais para as instâncias. | 114 |
| Tabela 5.5 – Média e desvio padrão do tamanho (quantidade de pontos) das malhas para as 45 instâncias. | 115 |
| Tabela 5.6 – Reduções percentuais entre as malhas para um mesmo caso. | 119 |
| Tabela 5.7 – Reduções percentuais entre os diferentes casos para uma mesma malha. | 120 |
| Tabela 5.8 – Reduções percentuais entre os diferentes casos para uma mesma malha. | 121 |
| Tabela 5.9 – Resultados para o problema da mochila 0-1 bidimensional. | 123 |
| Tabela 5.10 – Média, desvio padrão, valor mínimo e máximo dos tempos computacio- nais na Tabela 5.9. | 125 |
| Tabela 5.11 – Resultado do teste de Wilcoxon sobre o tempo computacional das malhas para as 24 instâncias resolvidas na otimalidade. | 126 |

LISTA DE ALGORITMOS

| | | |
|---------------|---|-----|
| Algoritmo 3.1 | Conjuntos de <i>normal patterns</i> | 54 |
| Algoritmo 3.2 | Conjuntos de <i>raster points</i> | 57 |
| Algoritmo 3.3 | Conjuntos de <i>useful numbers</i> | 65 |
| Algoritmo 3.4 | Conjunto de <i>corner points</i> para um dado empacotamento. | 68 |
| Algoritmo 3.5 | Conjunto de coordenadas <i>MIM</i> ao longo da direção da largura. | 73 |
| Algoritmo 4.1 | Procedimento de atualização do tamanho dos itens. | 89 |
| Algoritmo 4.2 | Programação dinâmica para o problema da mochila 0-1 unidimensional. | 90 |
| Algoritmo 4.3 | Heurística para o 2KP. | 104 |
| Algoritmo 4.4 | Heurística construtiva. | 105 |
| Algoritmo 4.5 | Função de aptidão. | 106 |

SUMÁRIO

| | | |
|-------|---|-----|
| 1 | INTRODUÇÃO | 23 |
| 1.1 | Objetivos e Justificativa | 25 |
| 1.2 | Metodologia | 26 |
| 1.3 | Organização do Trabalho | 28 |
| 2 | REVISÃO BIBLIOGRÁFICA | 31 |
| 2.1 | Tipologia de Problemas de Corte e Empacotamento | 31 |
| 2.2 | Malhas em Problemas de Corte e Empacotamento | 35 |
| 2.3 | Modelo Básico de Programação Linear Inteira | 41 |
| 3 | MALHAS DE PONTOS | 45 |
| 3.1 | <i>Canonical Dissections e Normal Patterns</i> | 46 |
| 3.1.1 | Discretização de Herz (1972) | 46 |
| 3.1.2 | Discretização de Christofides e Whitlock (1977) | 50 |
| 3.1.3 | Conjuntos de <i>normal patterns</i> | 52 |
| 3.2 | Discretização de Terno, Lindemann e Scheithauer (1987) | 54 |
| 3.3 | Discretização de Carnieri, Mendoza e Gavinho (1994) | 64 |
| 3.4 | Discretização de Martello, Pisinger e Vigo (2000) | 66 |
| 3.5 | Discretização de Boschetti, Mingozzi e Hadjiconstantinou (2002) | 68 |
| 3.6 | Discretização de Crainic, Perboli e Tadei (2008) | 69 |
| 3.7 | Discretização de Côté e Iori (2016) | 70 |
| 3.8 | Exemplo das Malhas sobre uma Instância | 73 |
| 4 | RESULTADOS SOBRE AS MALHAS | 81 |
| 4.1 | Relações entre as Malhas | 81 |
| 4.2 | Procedimentos de Redução | 87 |
| 4.2.1 | Atualização do tamanho dos itens | 88 |
| 4.2.2 | Eliminação de pontos da malha | 94 |
| 4.3 | Problema da Mochila 0-1 Bidimensional | 101 |
| 4.3.1 | Formulação por programação linear inteira | 101 |
| 4.3.2 | Heurística construtiva | 102 |
| 5 | RESULTADOS COMPUTACIONAIS | 107 |

| | | |
|------------|---|------------|
| 5.1 | Resultados das Malhas | 108 |
| 5.2 | Resultados do 2KP | 122 |
| 6 | CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS | 127 |
| | REFERÊNCIAS | 131 |

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Em linhas gerais, uma instância de problemas de empacotamento possui um conjunto de recipientes e um conjunto de tipos de itens que devem ser empacotados nesses recipientes. De forma similar, problemas de corte possuem um conjunto de itens que devem ser cortados a partir de um conjunto de recipientes. Apesar de problemas de corte e empacotamento possuírem entendimentos práticos diferentes, eles podem ser tratados de forma igual do ponto de vista teórico. Assim, considera-se, por simplicidade, que os termos corte e empacotamento são sinônimos neste trabalho.

Aplicações desses problemas podem ser encontradas: no corte de chapas de madeira na indústria de móveis (MORÁBITO, 1994; MORABITO; ARENALES, 2000; RANGEL; FIGUEIREDO, 2008; ROCHA; ARAUJO; RANGEL, 2016); no carregamento de paletes em centros de distribuição (SCHEITHAUER; TERNO, 1996; TERNO *et al.*, 2000; ALVAREZ-VALDES; PARRERO; TAMARIT, 2005); no carregamento de contêineres (BORTFELDT; GEHRING, 2001; BORTFELDT; GEHRING; MACK, 2003; JUNQUEIRA; MORABITO; YAMASHITA, 2012); no corte de itens de formato irregular em indústrias de vestuário e de fabricação de sapatos (VALLE *et al.*, 2012); no corte de couro em indústria automotiva (ALVES *et al.*, 2012); no corte de tecido para a confecção de aventais e forros de luva (JORGE *et al.*, 2016); em indústrias de papel (LEAO; FURLAN; TOLEDO, 2017); entre outras.

Os problemas de corte e empacotamento podem ser encontrados em diversas dimensões, como unidimensional, bidimensional, tridimensional, ou até dimensões superiores (WÄSCHER; HAUSSNER; SCHUMANN, 2007). Nesses problemas, deseja-se otimizar uma função objetivo, que pode ser de maximizar ou minimizar algum critério, como a ocupação do recipiente, número de recipientes utilizados, o desperdício gerado, o aproveitamento de sobras, entre outros. Também há problemas que não possuem função objetivo e caracterizam problemas de decisão. Nos problemas de decisão, geralmente, busca-se verificar se é possível ou não empacotar itens dentro dos recipientes.

Os problemas de corte e empacotamento devem obedecer algumas restrições, em

particular, a não sobreposição entre os itens e a não extrapolação do tamanho do recipiente após os itens serem empacotados. Em algumas situações, os itens são valorados, de modo que esse valor pode representar o seu custo, lucro, peso ou representar seu tamanho (comprimento, área ou volume, por exemplo). Além disso, os itens geralmente possuem número mínimo e máximo de cópias que podem ser empacotadas. A partir disso, nota-se que existem diferentes critérios para problemas de corte e empacotamento. Como forma de uniformizar e classificar essas diferenças, uma tipologia foi proposta por [Dyckhoff \(1990\)](#), sendo depois melhorada por [Wäscher, Haußner e Schumann \(2007\)](#).

Além das restrições usuais (não sobreposição e não extrapolação das dimensões do recipiente), [Bischoff e Ratcliff \(1995\)](#) apresentaram restrições práticas que podem ser levadas em consideração com o intuito de deixar o problema mais próximo da realidade. Essas restrições incluem: orientação, empilhamento, estabilidade, agrupamento, múltiplos destinos, separação de itens, carregamento completo de grupos de itens, limite de peso, distribuição de peso, entre outras. É importante destacar que neste trabalho consideram-se problemas cujos itens e recipientes são regulares, em particular, barras, retângulos, ou paralelepípedos retângulos. Além disso, não são consideradas restrições práticas, apenas as restrições usuais.

O principal interesse deste trabalho é investigar as estratégias de discretização do recipiente em malhas, as quais indicam pontos onde os itens podem ser empacotados, o que de modo geral é independente do problema sendo tratado. Assim, as contribuições obtidas podem ser aplicadas em qualquer problema de corte e empacotamento com itens regulares, em particular, com formato retangular. Na literatura existem várias estratégias para discretizar o recipiente em uma malha, a saber: *canonical dissections* de [Herz \(1972\)](#), que são os mesmos *normal patterns* de [Christofides e Whitlock \(1977\)](#); *reduced raster points* de [Terno, Lindemann e Scheithauer \(1987\)](#); *useful numbers* de [Carnieri, Mendoza e Gavinho \(1994\)](#); *corner points* de [Martello, Pisinger e Vigo \(2000\)](#); *regular normal patterns* de [Boschetti, Mingozzi e Hadjiconstantinou \(2002\)](#); *extreme points* de [Crainic, Perboli e Tadei \(2008\)](#); e, *meet-in-the-middle patterns* de [Côté e Iori \(2016\)](#).

A partir disso, pretende-se obter e formalizar relações de conjunto e tamanho entre as diferentes malhas apresentadas no parágrafo anterior. Em particular, para as malhas que podem ser computadas *a priori*, de forma a se ter malhas que não perdem a solução ótima e que possuam menos pontos. Interessa-se também por procedimentos que visam reduzir as malhas, todavia, preservando a otimalidade. Por exemplo, [Boschetti, Mingozzi e Hadjiconstantinou \(2002\)](#) e [Boschetti e Mingozzi \(2003\)](#) observaram que se um dado empacotamento contém um espaço não utilizável (desperdício), que não suporta o empacotamento de qualquer item, tem-se que esse espaço pode ser acrescentado ao tamanho de itens já empacotados. Com base no procedimento de atualização do tamanho dos itens, propõe-se um procedimento para eliminar pontos da malha dominados por outros em problemas que consideram a maximização do valor empacotado. Em linhas gerais, o novo procedimento

verifica se um ponto produz uma solução melhor do que um dado limitante inferior para a solução ótima, de forma que pontos que geram soluções piores do que o limitante são eliminados da malha sem perda de generalidade, isto é, da solução ótima.

Para avaliar os diferentes tipos de malha, apresentam-se experimentos sobre instâncias da literatura. Esses experimentos fornecem o tamanho das malhas, sendo possível comparar o número de pontos e, assim, concluir se os procedimentos de redução são satisfatórios ou não na redução do tamanho das instâncias. Além disso, considera-se uma aplicação sobre o problema da mochila 0-1 bidimensional (do inglês *Two-dimensional 0-1 Knapsack Problem - 2KP*), que busca um subconjunto de itens retangulares de máximo valor que pode ser empacotado em um único recipiente retangular. No 2KP, os itens podem ter uma ou nenhuma cópia empacotada e a solução é obtida pela resolução de um modelo de programação linear inteira que considera o recipiente discretizado em uma malha de pontos.

1.1 Objetivos e Justificativa

O objetivo geral deste trabalho consiste em apontar relações entre as malhas de pontos geradas pelas diferentes estratégias de discretização do recipiente, bem como analisar a influência que cada uma tem no tempo gasto na resolução de problemas de corte e empacotamento de itens com formato retangular. Com base nisso, surgem os seguintes objetivos específicos:

- revisar a literatura sobre estudos que utilizaram alguma estratégia de discretização do recipiente em malhas para resolver problemas de corte e empacotamento;
- formalizar e caracterizar as principais estratégias de discretização do recipiente em malhas que estão descritas na literatura, além de estabelecer relações de conjunto e de tamanho entre elas;
- apresentar e propor procedimentos de eliminação de pontos, visando diminuir o tamanho das malhas;
- realizar experimentos computacionais sobre instâncias da literatura de problemas de corte e empacotamento;
- analisar as malhas a partir dos experimentos computacionais para confirmar se os procedimentos de redução são eficazes.

Um dos motivos para a realização deste trabalho é que a maioria dos problemas de corte e empacotamento pertencem a classe NP-Difícil (GAREY; JOHNSON, 1979). De acordo com isso, é pouco provável que existam algoritmos ótimos de tempo polinomial no tamanho

da entrada. Assim, surge a importância de se realizar estudos sobre as estratégias de discretização do recipiente em malhas, uma vez que a malha usada na resolução do problema geralmente impacta no tempo gasto para se obter uma solução ótima. Nota-se também que ainda existem relativamente poucas pesquisas na literatura relacionadas a formalização e análise das diferentes malhas existentes.

Vale destacar que o estudo de problemas de corte e empacotamento se justifica também pela grande aplicabilidade prática. As empresas visam reduzir os custos relacionados com as suas atividades logísticas ou de manufatura a fim de serem competitivas no mercado. Esses custos estão relacionados com a redução do desperdício no processo de corte de material, como madeira, chapas de metal, vidro e tecidos; redução do desperdício durante o carregamento de paletes e contêineres, realizando um melhor aproveitamento do recipiente; entre outras.

1.2 Metodologia

Pesquisas são procedimentos que objetivam responder questões, ou problemas, através da realização de atividades, com o intuito de atingir novos conhecimentos. Uma possível solução é apresentada pela hipótese da pesquisa, que é uma proposição que deve ser verificada como sendo verdadeira ou falsa (GIL, 2009). Nesta pesquisa, busca-se responder a seguinte questão: quais relações existem entre as principais estratégias descritas na literatura para a discretização do recipiente computadas *a priori*, e qual a influência que elas exercem sobre o tempo gasto na resolução de problemas de corte e empacotamento de itens com formato retangular? Sobre essa questão, levanta-se a hipótese de que existem malhas que são subconjuntos de outras, enquanto para outras não é possível apontar uma relação direta, além de que há malhas que permitem obter uma solução ótima do problema em bem menos tempo quando comparada com outras malhas, sendo possível aplicar procedimentos visando reduzir ainda mais o seu tamanho.

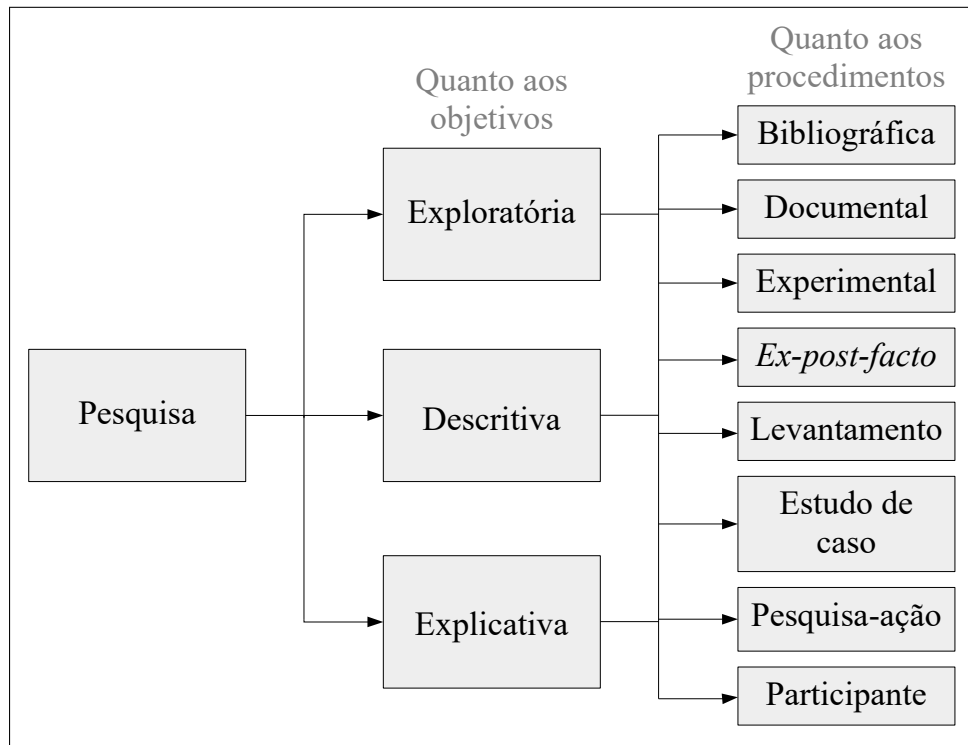
As pesquisas podem ser classificadas, de acordo com vários critérios, em diferentes tipos. Segundo Gil (2009), as pesquisas podem ser classificadas de acordo com os objetivos pretendidos e com os procedimentos utilizados, conforme ilustrado pela Figura 1.1. Com relação aos objetivos, Gil (2009) classifica em exploratórias, descritivas e explicativas.

Pesquisa exploratória: visa realizar uma investigação sobre o problema considerado, de modo a construir hipóteses, podendo envolver um levantamento bibliográfico e até entrevistas com pessoas que possuem experiências sobre o problema;

Pesquisa descritiva: visa realizar a descrição de características do problema investigado, estabelecendo relações entre variáveis, podendo envolver procedimentos de coleta de dados;

Pesquisa explicativa: visa dar uma explicação mais profunda sobre o problema em estudo, podendo envolver experimentos computacionais.

Figura 1.1 – Classificações de uma pesquisa segundo Gil (2009).



Fonte: o autor.

Com relação aos procedimentos utilizados para atingir os objetivos, Gil (2009) classifica as pesquisas em: bibliográficas, documentais, experimentais, *ex-post-facto* (experimentos realizados após os fatos), levantamentos, estudos de caso, pesquisa-ação e participante.

Com base nas classificações da Figura 1.1, tem-se que a pesquisa desenvolvida neste trabalho é, quanto ao objetivo, uma pesquisa descritiva e, quanto ao procedimento utilizado para atingir o objetivo, uma pesquisa bibliográfica e experimental. De forma geral, pretende-se analisar a influência das principais malhas descritas na literatura sobre a resolução de problemas de corte e empacotamento. Busca-se também apontar possíveis relações existentes entre essas malhas, bem como analisar a influência de procedimentos de redução sobre elas.

Este trabalho iniciou com uma revisão sobre problemas de corte e empacotamento baseando-se na tipologia proposta por Wäscher, Haußner e Schumann (2007). Em seguida, realizou-se uma revisão sobre trabalhos que utilizaram o recipiente discretizado em uma malha de pontos, de modo que os itens são associados a pontos dessa malha. Também, revisaram-se trabalhos que aplicaram algum procedimento de redução sobre as malhas.

A revisão da literatura considerou artigos das bases *Scielo*, *Scopus* e *Google Scholar*. Para a busca nessas bases foram utilizadas as palavras-chave: *cutting and packing problems*,

knapsack problem, mesh points, grid for packing, normal patterns, reduced raster points, corner points, meet-in-the-middle patterns, reduction procedures, problemas de corte e empacotamento, problema da mochila, malha de pontos e procedimentos de redução. Por meio da revisão da literatura foi possível notar que ainda há poucos trabalhos que consideram o emprego de malhas para resolver problemas de corte e empacotamento.

Com relação às malhas, apresentam-se resultados envolvendo relações de conjunto e tamanho considerando as malhas que podem ser computadas *a priori*. Além disso, como forma de exemplificar cada malha, um exemplo simples é apresentado, no qual se observa a quantidade de pontos em cada uma. Como forma de reduzir as malhas, foram considerados dois procedimentos de redução, um proposto neste trabalho e outro já existente na literatura, também aplicados sobre exemplos simples e depois na fase de realização dos experimentos computacionais.

Como forma de analisar o impacto das malhas em problemas de corte e empacotamento, considera-se um modelo de programação matemática, como o desenvolvido por [Beasley \(1985b\)](#) e [Junqueira, Morabito e Yamashita \(2012\)](#), que pode ser adaptado para solucionar diferentes problemas de corte e empacotamento. Com base nesse modelo, apresentou-se um modelo de programação linear inteira para o problema da mochila 0-1 bidimensional, o qual foi resolvido utilizando o pacote de otimização *Gurobi Optimizer* na versão 7.0. Com os experimentos computacionais, buscou-se analisar as malhas com relação a quantidade de pontos, eficácia de cada uma durante a resolução do modelo e influência dos procedimentos de redução sobre os seus tamanhos. Apesar de considerar experimentos computacionais sobre o problema da mochila 0-1 bidimensional, os resultados obtidos são válidos ou podem ser estendidos facilmente para outros problemas de corte e empacotamento de itens com formato retangular.

1.3 Organização do Trabalho

Este trabalho está organizado em seis capítulos, sendo que o primeiro capítulo apresentou brevemente sobre problemas de corte e empacotamento, os diferentes tipos de malha, a metodologia e a estratégia de ação, os objetivos e as justificativas para a execução da pesquisa. Os demais capítulos são:

Capítulo 2: sumariza a tipologia de [Wäscher, Haußner e Schumann \(2007\)](#) sobre problemas de corte e empacotamento, bem como apresenta um levantamento sobre trabalhos que utilizaram alguma estratégia de discretização na resolução desses problemas. Como se busca pela solução ótima de problemas de corte e empacotamento, apresentam-se modelos de programação linear inteira que usam uma malha para empacotar os itens.

Capítulo 3: descreve detalhadamente cada estratégia de discretização do recipiente sob estudo e traz uma aplicação de cada tipo de malha em um exemplo básico, a fim de ilustrar a obtenção das malhas e possíveis relações que existem entre elas.

Capítulo 4: apresenta alguns resultados novos envolvendo relações de conjunto e tamanho existentes entre as malhas, bem como provas formais para questões que estavam em aberto na literatura. Além disso, apresentam-se dois procedimentos visando a redução das malhas sem perda de generalidade. O primeiro é um procedimento de atualização do tamanho dos itens e o segundo é um procedimento que reduz as malhas observando um limitante inferior para a solução ótima do problema. Por fim, apresenta-se um modelo de programação linear inteira e uma heurística para resolver o problema da mochila 0-1 bidimensional.

Capítulo 5: apresenta experimentos sobre instâncias da literatura para problemas de corte e empacotamento, em que foram implementados os algoritmos para obter as malhas de *normal patterns*, *reduced raster points*, *regular normal patterns* e *meet-in-the-middle patterns*, além dos procedimentos de redução. Experimentos computacionais também são feitos envolvendo as malhas para a resolução do problema da mochila 0-1 bidimensional e os resultados são discutidos a fim de mostrar os ganhos com o uso de cada malha.

Capítulo 6: traz as conclusões deste trabalho e as perspectivas para pesquisas futuras.

Capítulo 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo contém uma breve descrição da tipologia de [Wäscher, Haußner e Schumann \(2007\)](#) para problemas de corte e empacotamento, bem como uma revisão bibliográfica sobre trabalhos que consideraram alguma estratégia de discretização do recipiente em malhas. Além disso, apresentam-se dois modelos de programação linear inteira baseados em malhas de pontos, os quais permitem encontrar a solução ótima de problemas básicos de corte e empacotamento.

2.1 Tipologia de Problemas de Corte e Empacotamento

Uma tipologia para categorizar problemas de corte e empacotamento foi proposta por [Dyckhoff \(1990\)](#). Com o passar dos anos, surgiram na literatura diversas novas características para esses problemas que não se encaixavam nessa tipologia. Com isso, [Wäscher, Haußner e Schumann \(2007\)](#) apresentaram uma nova tipologia, baseada na proposta por [Dyckhoff \(1990\)](#), que caracteriza os problemas de corte e empacotamento a partir de cinco critérios, a saber:

Dimensionalidade: os problemas podem ser considerados unidimensionais (com apenas uma dimensão), bidimensionais (com duas dimensões), tridimensionais (com três dimensões) ou N -dimensionais (com N dimensões). Consideram-se variantes os problemas que são do tipo N -dimensionais, com $N > 3$.

Tipo de designação: determina o tipo de objetivo que o problema possui, podendo ser:

- maximização da saída, ou seja, maximização do valor total de itens empacotados nos recipientes, de modo que o máximo valor de itens deve ser empacotado utilizando todos os recipientes disponíveis. Além disso, não é necessário que sejam utilizados todos itens disponíveis para o empacotamento;

- minimização da entrada, isto é, minimização do tamanho total não utilizado nos recipientes. Assim, todos os itens disponíveis para o empacotamento devem ser alocados dentro do menor número possível de recipientes;
- mais de uma função objetivo, representando os problemas variantes.

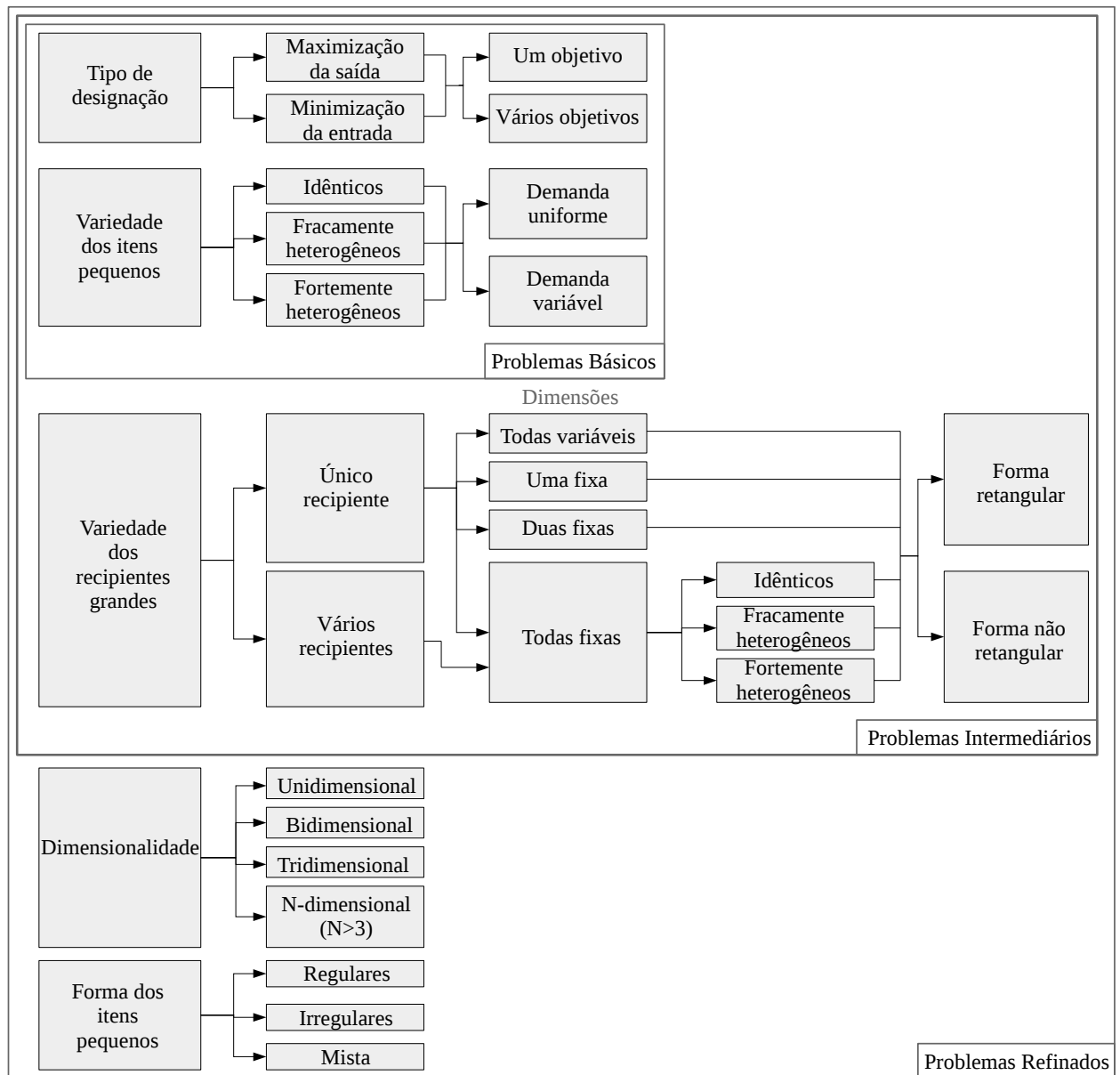
Variedade dos recipientes: pode-se considerar um único recipiente grande, que pode ter todas as dimensões fixas, apenas uma, duas ou, por outro lado, todas as dimensões variáveis. Há também o caso de vários recipientes, que possuem todas as dimensões fixas e, além disso, pode-se considerar: recipientes idênticos, em que todos os recipientes possuem as mesmas dimensões, com tamanhos e formas iguais; recipientes fracamente heterogêneos, isto é, a maioria dos recipientes são iguais, sendo relativamente poucos com formas e/ou tamanhos diferentes; e, recipientes fortemente heterogêneos, isto é, a maioria dos recipientes são diferentes, sendo poucos com formas e tamanhos iguais. Os problemas que consideram recipientes não retangulares são considerados como variantes.

Variedade dos itens: pode-se considerar o caso de itens com demandas uniformes, isto é, itens com aproximadamente as mesmas demandas, podendo ainda se dividir em: itens idênticos, em que todos os itens possuem as mesmas dimensões; itens fracamente heterogêneos; e itens fortemente heterogêneos. Os problemas variantes consideram itens com demandas não uniformes, isto é, alguns itens com demandas grandes e outros com demandas bem pequenas.

Forma dos itens: aplica-se apenas aos problemas bi- e tridimensionais. Com isso, têm-se itens regulares, como: retângulos e círculos para o caso bidimensional, caixas e esferas para o caso tridimensional, e itens irregulares, que possuem uma forma não regular. Os problemas com itens mistos, isto é, que consideram itens regulares e irregulares, são considerados como variantes.

Wäscher, Haußner e Schumann (2007) classificaram os problemas de corte e empacotamento basicamente em três tipos: básicos, que envolvem os critérios de tipo de designação e variedade dos itens; intermediários, que além dos critérios básicos, engloba a variedade dos recipientes; e refinados, que abrange todos os cinco critérios. Além disso, têm-se os problemas considerados como variantes, por exemplo, aqueles com: função objetivo multidimensional; demanda dos itens variável; recipiente não retangular; mais de três dimensões; e, itens de forma mista. Os tipos de problemas e seus respectivos critérios são ilustrados, de modo geral, na Figura 2.1.

Figura 2.1 – Ilustração geral dos tipos de problemas de corte e empacotamento e seus critérios.



Fonte: o autor.

Para [Wäscher, Haußner e Schumann \(2007\)](#), os seguintes problemas de corte e empacotamento são classificados como básicos:

Problema de Empacotamento de Itens Idênticos (*Identical Item Packing Problem*): há um número limitado de recipientes e um conjunto de itens idênticos disponíveis para o empacotamento. O objetivo é maximizar a quantidade de itens empacotados nesses recipientes. Um exemplo que se encaixa neste tipo de problema é o problema de carregamento de paletes, estudado, por exemplo, por [Dowsland \(1987\)](#), [Bhattacharya, Roy e Bhattacharya \(1998\)](#), [Morabito e Morales \(1998\)](#), [Lins, Lins e Morabito \(2002\)](#), [Alvarez-](#)

Valdes, Parreño e Tamarit (2005), Pureza e Morabito (2006), Ribeiro e Lorena (2007), Birgin, Lobato e Morabito (2010), Lu e Cha (2014) e Ahn, Park e Yoon (2015).

Problema de Alocação (*Placement Problem*): consiste em maximizar o empacotamento de itens considerando um número limitado de recipientes, tal que os itens são fracamente heterogêneos. Morabito e Arenales (1994), Morabito e Arenales (1997), Bortfeldt, Gehring e Mack (2003), Araújo e Armentano (2007), Fanslau e Bortfeldt (2010), Liu *et al.* (2011) e Ren, Tian e Sawaragi (2011) investigaram problemas que envolvem este tipo, considerando os itens e recipientes de três dimensões.

Problema da Mochila (*Knapsack Problem*): consiste em maximizar o valor do empacotamento de itens em um número limitado de recipientes, no qual os itens são fortemente heterogêneos. Uma versão deste problema, em que é dado um único recipiente para realizar o empacotamento, é conhecida como problema da mochila 0-1. Na literatura existem vários estudos que abrangem problemas da mochila, abordando diferentes dimensões, a saber: unidimensional, em Martello e Toth (1990), Martello, Pisinger e Toth (2000), Akeb, Hifi e Mounir (2011), Hifi (2014) e Hifi, Saleh e Wu (2015); bidimensional, em Beasley (1985a), Fayard e Zissimopoulos (1995), Hadjiconstantinou e Christofides (1995), Caprara e Monaci (2004), Dolatabadi, Lodi e Monaci (2012), Leung *et al.* (2012), Queiroz, Miyazawa e Wakabayashi (2015) e Queiroz *et al.* (2017); e tridimensional, em Bortfeldt e Gehring (2001), Pisinger (2002), Diedrich *et al.* (2008), Junqueira, Morabito e Yamashita (2010), Baldi, Perboli e Tadei (2012) e Junqueira, Morabito e Yamashita (2012).

Problema de Dimensão Aberta (*Open Dimension Problem*): busca minimizar o tamanho total não utilizado nos recipientes, dado o empacotamento dos itens. Os recipientes possuem pelo menos uma dimensão variável e a variedade dos itens é arbitrária. Um exemplo que se encaixa neste tipo de problema é o problema de empacotamento em faixa, em que a largura do recipiente é fixa, mas a altura é variável e se busca minimizá-la. Alguns trabalhos envolvendo a resolução de problemas de dimensão aberta são Hopper e Turton (2001), Martello, Monaci e Vigo (2003), Bortfeldt e Mack (2007), Boschetti e Montaletti (2010), Arahori, Imamichi e Nagamochi (2012), Akeb e Hifi (2013), Bansal *et al.* (2013), Queiroz e Miyazawa (2013), Silveira, Miyazawa e Xavier (2013), Côté, Dell'Amico e Iori (2014), Wei *et al.* (2014), Delorme, Iori e Martello (2017) e Wei *et al.* (2017).

Problema de Corte de Estoque (*Cutting Stock Problem*): considera minimizar a quantidade total (ou o tamanho total não utilizado) de recipientes para o empacotamento de itens. Os recipientes possuem dimensões fixas e variedade arbitrária, enquanto que os itens são fracamente heterogêneos, possuindo demanda grande. Problemas ligados a este tipo foram investigados em sua versão unidimensional por Gilmore e Gomory (1963),

Carvalho (1999), Carvalho (2002), Cherri *et al.* (2014), Kallrath *et al.* (2014), Cui, Zhong e Yao (2015), Delorme, Iori e Martello (2016) e Leao, Furlan e Toledo (2017), enquanto a bidimensional por Gilmore e Gomory (1965), Herz (1972), Alvarez-Valdes, Parajon e Tamarit (2002), Boschetti, Mingozzi e Hadjiconstantinou (2002), Cintra *et al.* (2008), Macedo, Alves e Carvalho (2010), Cui *et al.* (2013), Cui, Cui e Yang (2014) e Dusberger e Raidl (2015).

Problema de Empacotamento em Recipientes (*Bin Packing Problem*): busca minimizar o tamanho total não utilizado dos recipientes, ou o número total de recipientes utilizados, dado o empacotamento dos itens. Os recipientes possuem dimensões fixas e variedade arbitrária, enquanto que os itens são fortemente heterogêneos, sem demanda. Carvalho (2002), Delorme, Iori e Martello (2016) e Pereira (2016) investigaram problemas deste tipo na versão unidimensional. Por outro lado, Chung, Garey e Johnson (1982), Lodi, Martello e Vigo (1999), Boschetti, Mingozzi e Hadjiconstantinou (2002), Lodi, Martello e Vigo (2002), Epstein (2010) e Lodi, Monaci e Pietrobuoni (2015) consideraram a versão bidimensional, enquanto Martello, Pisinger e Vigo (2000), Crainic, Perboli e Tadei (2008), Almeida e Figueiredo (2010) e Hifi *et al.* (2010) estudaram a versão tridimensional.

2.2 Malhas em Problemas de Corte e Empacotamento

Alguns trabalhos que resolveram problemas de corte e empacotamento usando malhas para empacotar os itens são revisados adiante, focando apenas em problemas que consideram o empacotamento de itens de formato retangular. Observando tais trabalhos, nota-se que a preocupação de grande parte dos autores foi utilizar as malhas visando diminuir a quantidade de pontos para empacotar os itens. Em alguns casos, houve também a aplicação de procedimentos de redução visando diminuir o tamanho das malhas. Em quase todos esses trabalhos não há questões envolvendo análises entre os conjuntos gerados pelas diferentes estratégias de discretização.

Herz (1972) resolveu um problema de corte ortogonal bidimensional por meio de um algoritmo recursivo que testa todas as possíveis formas de cortar o recipiente e obter uma solução ótima. Visando diminuir o número de testes do algoritmo, Herz (1972) desenvolveu a malha de *canonical dissections* e estabeleceu propriedades para evitar soluções simétricas. De forma independente, Christofides e Whitlock (1977) também resolveram um problema de corte ortogonal bidimensional, propondo a malha de *normal patterns*, que são os mesmos *canonical dissections*. Esses autores mostraram que essas malhas não perdem a solução ótima, uma vez que seguem o princípio de que os itens podem ser empacotados mais a esquerda e mais abaixo possível dentro do recipiente. Ao melhor do nosso conhecimento, elas foram as primeiras malhas formalizadas na literatura de problemas de corte e empacota-

mento. De agora em diante, adota-se o termo *normal patterns* para referenciar ambas as malhas.

A malha de *normal patterns* foi aplicada na resolução do problema de corte bidimensional considerando cortes guilhotinados por Beasley (1985a) e cortes não guilhotinados por Beasley (1985b). Para a resolução do problema, Beasley (1985a) utilizou programação dinâmica em instâncias com até 50 itens, enquanto Beasley (1985b) utilizou um procedimento de busca em árvores capaz de resolver instâncias com até 10 itens.

Terno, Lindemann e Scheithauer (1987) definiram uma nova estratégia para discretizar o recipiente, sendo caracterizada como a malha de *reduced raster points*, com resultados publicados no artigo de Scheithauer e Terno (1996). Essa nova discretização parte da malha de *normal patterns* e até o presente momento não há uma prova formal publicada de que ela preserva a solução ótima nos problemas de corte e empacotamento, sendo que Scheithauer (1997) apresentou apenas uma ideia de como prová-la e Birgin, Lobato e Morabito (2010) limitaram a prova dessa afirmação para um problema de empacotamento particular de carregamento de paletes. Deste modo, nós provamos formalmente que há preservação da solução ótima ao usar os *reduced raster points* em problemas de corte e empacotamento. Por simplicidade, de agora em diante, refere-se a essa malha apenas por *raster points*.

A malha de *normal patterns* foi utilizada em heurísticas para resolver o problema de corte bidimensional irrestrito por Morabito, Arenales e Arcaro (1992), o problema de carregamento de contêineres por Morabito e Arenales (1994), considerando instâncias com até 30 itens, e o problema da mochila bidimensional por Fayard e Zissimopoulos (1995), considerando instâncias de até 60 itens. Morabito e Arenales (1997) realizaram um estudo utilizando a malha de *normal patterns* sobre o problema de carregamento de contêineres considerando restrições de estabilidade, aplicando diversas abordagens para a sua resolução.

Carnieri, Mendoza e Gavinho (1994) definiram a malha de *useful numbers* afirmando que ela é similar a malha de *normal patterns*, porém não foi apresentada uma prova formal dessa afirmação. Segundo os autores, a geração dos *useful numbers* é mais intuitiva, uma vez que os itens são empacotados mais a direita e acima possível, quando comparada com a geração da malha de *normal patterns*. Diante disso, nós provamos formalmente a garantia de otimalidade da malha de *useful numbers* em problemas de corte e empacotamento.

Hifi (1998) propôs dois métodos exatos, baseados em programação dinâmica e no algoritmo *branch-and-bound*, para resolver um problema de empacotamento em faixa bidimensional. O método *branch-and-bound* é um método enumerativo que busca as soluções sobre uma árvore por meio de ramificação e poda de seus nós. Uma heurística é utilizada inicialmente para fornecer um limitante para os algoritmos exatos. O autor considerou que os algoritmos realizam o empacotamento dos itens sobre a malha de *normal patterns*. Os experimentos computacionais foram realizados em instâncias com até 22 itens.

A malha de *corner points*, desenvolvida por [Martello, Pisinger e Vigo \(2000\)](#), é composta pelos pontos de canto gerados no decorrer do empacotamento dos itens. Os pontos de canto são obtidos observando o envelope, que se refere ao contorno do empacotamento, e consistem nos pontos extremos dos segmentos na direção vertical que interceptam com os segmentos na direção horizontal. Esses segmentos são parte de retas adjacentes aos lados dos itens empacotados ou aos lados do recipiente. Os *corner points* são calculados à medida que os itens são empacotados dentro do recipiente. Por isso, [Martello, Pisinger e Vigo \(2000\)](#) utilizaram um procedimento enumerativo para resolver o problema de empacotamento em recipientes tridimensional.

Baseado no princípio da malha de *normal patterns*, [Boschetti, Mingozi e Hadjiconstantinou \(2002\)](#) introduziram a malha de *regular normal patterns*, que calcula os *normal patterns* para cada item individualmente. Para tanto, os autores adaptaram as funções recursivas de [Christofides e Whitlock \(1977\)](#) para obter os *normal patterns* que cada item pode ser empacotado.

Para o problema de empacotamento em faixa bidimensional, [Martello, Monaci e Vigo \(2003\)](#) utilizaram o *branch-and-bound* juntamente com a malha de *corner points* para resolver instâncias com até 200 itens. Utilizando também a malha de *corner points*, [Caprara e Monaci \(2004\)](#), considerando o problema da mochila bidimensional, propuseram algoritmos exatos para resolver instâncias com até 97 itens. Os algoritmos exatos ainda consideram limitantes superiores obtidos através de uma relaxação desenvolvida para o problema.

Para a resolução do problema de carregamento de paletes, [Alvarez-Valdes, Parreño e Tamarit \(2005\)](#) utilizaram as malhas de *normal patterns* e *raster points* junto a um algoritmo exato, desenvolvido com base no método *branch-and-cut*, para a resolução de um modelo de programação linear inteira adaptado de [Beasley \(1985b\)](#). Segundo [Wolsey \(1998\)](#), o método *branch-and-cut* considera o *branch-and-bound* com a inserção de planos de corte para acelerar a poda de nós da árvore de enumeração. Nos experimentos computacionais, os autores consideraram instâncias com até 100 itens.

O problema de corte ortogonal bidimensional foi resolvido por [Baldacci e Boschetti \(2007\)](#). Nesse problema, busca-se empacotar o máximo valor total de itens em um recipiente. Os autores propuseram uma abordagem de duas fases. Na primeira fase é utilizado um limitante superior, obtido através de um procedimento de planos de corte para a geração de possíveis soluções, em que um subconjunto de itens é selecionado para ser empacotado dentro do recipiente. Na segunda fase, testa-se se o subconjunto de itens, obtido na primeira fase, pode ser empacotado no recipiente sem sobreposição e sem exceder as dimensões do recipiente. O empacotamento é realizado considerando a malha de *normal patterns* e experimentos foram realizados sobre instâncias com até 97 itens.

[Crainic, Perboli e Tadei \(2008\)](#) introduziram a malha de *extreme points*, que estende o conceito de pontos de canto de [Martello, Pisinger e Vigo \(2000\)](#). Basicamente, busca-se

gerar novos pontos extremos, além dos pontos de canto. Nessa nova malha, os pontos de áreas não utilizáveis da malha de *corner points* são considerados após empacotar um dado item. Em Cintra *et al.* (2008) foi apresentado dois algoritmos para calcular a malha de *normal patterns* considerando o problema da mochila 0-1 unidimensional, um algoritmo que usa a ideia de enumeração e um de programação dinâmica.

Almeida e Figueiredo (2010) resolveram o problema de empacotamento em recipientes tridimensional por heurísticas que empacotavam os itens sobre a malha de *corner points*, considerando instâncias de até 200 itens. Enquanto, Junqueira, Morabito e Yamashita (2010) e Junqueira, Morabito e Yamashita (2012) desenvolveram um modelo de programação linear inteira para o problema de carregamento de um único contêiner, que considera os itens e recipiente tridimensionais. A fim de tornar o problema mais próximo do real, os autores consideraram algumas restrições práticas, como: empilhamento de caixas e estabilidade de carga. Além disso, o modelo considera o recipiente discretizado na malha de *normal patterns*, o que permitiu resolver instâncias com até 20 tipos diferentes de itens.

Birgin, Lobato e Morabito (2010) resolveram o problema de carregamento de paletes. Os autores propuseram um método de particionamento recursivo, o qual utiliza a integração da heurística recursiva de cinco-blocos, apresentada inicialmente por Morabito e Morales (1998), com a abordagem *L*, descrita por Lins, Lins e Morabito (2003). Para obter uma solução, Birgin, Lobato e Morabito (2010) utilizaram a malha de *raster points* visando resolver instâncias de grande porte do problema. Os autores ainda mostraram que o uso da malha de *raster points* não traz perda de generalidade, isto é, da solução ótima, para o problema em questão. Birgin, Lobato e Morabito (2012) estenderam os métodos de Birgin, Lobato e Morabito (2010) para o problema da mochila ilimitado bidimensional com e sem rotação ortogonal dos itens. Os autores usaram uma malha de *raster points* na resolução de instâncias com até 200 itens.

Um estudo sobre o problema de empacotamento em faixa foi realizado por Arahori, Imamichi e Nagamochi (2012), considerando que os itens podem ser rotacionados ortogonalmente durante o empacotamento. Os autores utilizaram a malha de *corner points* dentro de um método *branch-and-bound*. Eles levaram em consideração um novo limitante inferior obtido através da relaxação do modelo desenvolvido. Nos experimentos computacionais foram consideradas instâncias com até 200 itens.

Baldi, Perboli e Tadei (2012) usaram as malhas de *corner points* e *extreme points* em uma heurística para a resolução do problema da mochila tridimensional. Os autores consideraram que os itens podem ser rotacionados ortogonalmente. Além disso, eles consideraram a restrição prática de balanceamento de carga, com a resolução de instâncias com até 60 itens.

Problemas de corte e empacotamento bidimensionais, que consideram itens de forma irregular, foram estudados por Valle *et al.* (2012). Os itens de forma irregular adotados pelos

autores compreendem polígonos convexos e não-convexos. Os autores resolveram a versão limitada e ilimitada do problema da mochila bidimensional. Na resolução da versão limitada, os autores utilizaram uma heurística *GRASP* (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*) que utiliza um método guloso para obter uma solução inicial para o problema. Essa solução é melhorada por um método de busca local, o qual rearranja, exclui e adiciona itens no empacotamento. Já para a resolução da versão ilimitada, os autores utilizaram uma estratégia de duas fases. A primeira fase consiste em aplicar um algoritmo visando maximizar a utilização de pequenos recipientes retangulares dado o empacotamento de um subconjunto de itens irregulares. A segunda fase consiste em utilizar um algoritmo exato de programação dinâmica, proposto por Cintra *et al.* (2008), para empacotar sobre uma malha de *raster points* os pequenos retângulos dentro do recipiente. No geral, os autores consideraram instâncias com até 99 itens.

Queiroz *et al.* (2012) propuseram algoritmos para diversos problemas de corte e empacotamento tridimensionais que permitem a rotação ortogonal dos itens. Os problemas resolvidos foram o da mochila ilimitada, corte de estoque e de empacotamento em faixa. Os autores apresentaram um algoritmo de programação dinâmica sobre a malha de *raster points* para resolver o problema da mochila ilimitada. Para resolver os problemas de corte de estoque e empacotamento em faixa, os autores usaram o método de geração de colunas combinado com heurísticas para empacotar em níveis. Através dos experimentos computacionais, os autores verificaram que a malha de *raster points* permitiu obter a solução ótima das instâncias.

Dolatabadi, Lodi e Monaci (2012) realizaram um estudo sobre o problema da mochila bidimensional, utilizando algoritmos exatos junto a malha de *normal patterns*, considerando instâncias de até 59 itens. Essa malha também foi aplicada por Queiroz e Miyazawa (2013) na resolução do problema de empacotamento em faixa bidimensional, utilizando heurísticas combinadas com modelos inteiros. Os autores consideraram restrições práticas na modelagem do problema, como balanceamento de carga. Em Gonçalves e Queiroz (2014), o problema da mochila irrestrita bidimensional foi modelado via programação linear inteira sobre uma malha de *raster points*. Os autores também consideraram algumas restrições práticas, como estabilidade vertical de carga, balanceamento e fragilidade dos itens, resolvendo instâncias com até 50 itens.

Propriedades envolvendo o uso da malha de *raster points* dentro da abordagem *L*, de Lins, Lins e Morabito (2003), foram investigadas em Queiroz, Miyazawa e Wakabayashi (2015). Os autores responderam formalmente que o uso dos *raster points* na abordagem *L* não ocasiona perda de generalidade (isto é, da solução ótima) em problemas de corte e empacotamento, além de mostrarem que a abordagem *L*, por outro lado, não é sempre capaz de resolver instâncias na otimalidade. Os autores ainda discutiram que é possível diminuir o tamanho de malhas utilizando procedimentos para aumentar o tamanho dos itens, como

o proposto por [Boschetti, Mingozi e Hadjiconstantinou \(2002\)](#).

A malha de *meet-in-the-middle patterns* foi desenvolvida por [Côté e Iori \(2016\)](#), sendo calculada para cada item individualmente, como feito na malha de *regular normal patterns*, porém utilizando um parâmetro para identificar se o item vai ser empacotado do lado esquerdo, direito, na parte de baixo ou de cima do recipiente. Os autores mostraram que essa malha preserva a solução ótima, além de generalizar a ideia da malha de *regular normal patterns*. Aplicações sobre alguns problemas de corte e empacotamento foram feitas visando mostrar sua eficácia frente algumas das malhas existentes na literatura.

O problema de empacotamento ortogonal, que é um problema de decisão, visa verificar se itens podem ser empacotados dentro de um recipiente. Se sim, tem-se que o problema é viável, caso contrário, inviável. Este problema foi estudado em suas versões bi- e tri-dimensionais por [Nascimento, Cunha e Queiroz \(2016\)](#), considerando também a inclusão de restrições práticas, como balanceamento de carga e ordem de entrega. Os autores consideraram um modelo de programação por restrições sobre as malhas de *normal patterns* e *raster points*. Através dos experimentos computacionais em instâncias com até 23 itens, os autores observaram que ambas as malhas permitiram obter soluções ótimas.

[Schenekemberg et al. \(2016\)](#) apresentaram um modelo de programação linear inteira para resolver o problema de carregamento de contêineres levando em consideração restrições práticas de separação de itens, orientação das caixas e estabilidade vertical da carga. A malha de *normal patterns* foi utilizada para obter a solução de instâncias com até 6 tipos distintos de itens, com até 200 unidades disponível para cada tipo, e até 3 tipos distintos de recipientes, com até 15 unidades disponível para cada tipo. Para calcular a malha de *normal patterns*, os autores propuseram uma adaptação ao algoritmo que calcula a malha de *useful numbers* proposto originalmente por [Carnieri, Mendoza e Gavinho \(1994\)](#).

Com relação ao procedimento de atualização do tamanho dos itens, [Baldacci e Boschetti \(2007\)](#) fizeram seu uso na resolução do problema de corte ortogonal bidimensional, dada a aplicação sobre uma malha de *normal patterns*, para a resolução de instâncias com até 97 itens. [Boschetti e Montaletti \(2010\)](#) e [Côté, Dell'Amico e Iori \(2014\)](#) consideraram esse procedimento de redução sobre essa mesma malha durante a resolução do problema de empacotamento em faixa bidimensional. [Côté, Gendreau e Potvin \(2014\)](#) também utilizaram um procedimento de atualização do tamanho dos itens, considerando a malha de *normal patterns*, na resolução do problema de empacotamento ortogonal bidimensional. Os autores propuseram uma relaxação para o problema e aplicaram um *branch-and-cut* para resolvê-la.

[Côté e Iori \(2016\)](#) apresentaram um procedimento de atualização do tamanho dos itens sobre a malha de *meet-in-the-middle patterns*, com aplicação sobre o problema de corte de estoque e de empacotamento em recipientes. [Queiroz et al. \(2017\)](#) consideraram a atualização do tamanho dos itens ao resolver o problema da mochila 0-1 bidimensional com

a restrição de grafo de conflitos, em que alguns itens não podem ser empacotados dentro do mesmo recipiente. Os autores utilizaram as malhas de *normal patterns* e de *raster points* para a resolução de instâncias com até 60 itens.

A partir disso, notamos na literatura a falta de uma discussão mais profunda, no sentido teórico, e mais abrangente, no sentido experimental, envolvendo propriedades e comparações entre as diferentes formas de discretizar o recipiente em uma malha, em particular, quando se trata de problemas com itens no formato retangular. Com isso, investigam-se as diferentes malhas que podem ser computadas *a priori*, apontando novas propriedades de conjunto e tamanho entre elas, além de responder questões em aberto na literatura. Com uma ampla variedade de experimentos computacionais, comparam-se as malhas com relação à quantidade de pontos, sobre à influência dos procedimentos de redução, do qual se propõe um procedimento baseado na eliminação de pontos, e analisa-se a eficácia das malhas para resolver na otimalidade o problema da mochila 0-1 bidimensional. É importante mencionar que os resultados obtidos neste trabalho seguem válidos para problemas de qualquer outra dimensão, desde que os itens e recipientes sejam de formato retangular.

2.3 Modelo Básico de Programação Linear Inteira

Na literatura existem vários modelos de programação matemática para problemas de corte e empacotamento, sendo um deles o modelo de programação linear inteira apresentado em [Beasley \(1985b\)](#) para um problema de corte bidimensional. O autor considerou o empacotamento dos itens sobre pontos de uma malha associada ao recipiente. Com base nos diferentes tipos básicos de problemas de corte e empacotamento definidos por [Wäscher, Haußner e Schumann \(2007\)](#), adapta-se adiante o modelo de [Beasley \(1985b\)](#) conforme esses tipos, visando obter uma solução ótima.

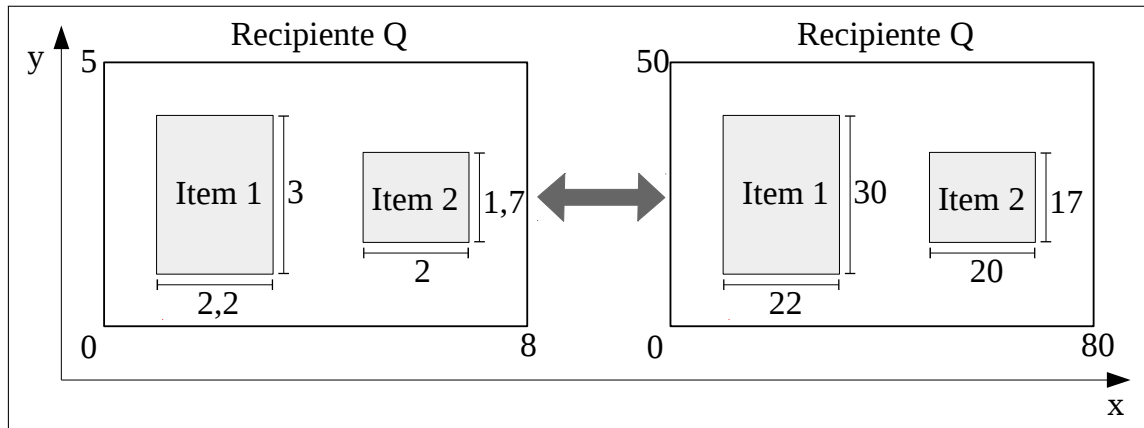
Seja um conjunto I de n itens N -dimensionais (no qual N define quantas dimensões o problema tem) e regulares, em particular, com formato retangular (barras, retângulos ou paralelepípedos retângulos) e um recipiente Q , N -dimensional e regular. Cada item $i \in I$ possui um valor v_i e um número máximo b_i de cópias que podem ser empacotadas.

Definição 1. Um padrão de empacotamento, ou padrão de corte, consiste de um empacotamento de itens do conjunto I no recipiente Q . Por definição, um empacotamento atende as restrições básicas de não sobreposição e de itens estarem inteiramente contidos no recipiente, além do número de cópias permitido para cada item. Considera-se ainda que os itens são empacotados de forma ortogonal aos lados do recipiente e sem rotação.

Neste estudo, leva-se em consideração as dimensões dos recipientes e dos itens como sendo valores inteiros, de modo que se forem um valor não inteiro, obtém-se um valor inteiro correspondente através de uma mudança de escala. A Figura 2.2 ilustra uma mudança

de escala considerando um problema bidimensional, com largura associada ao eixo de referência x e comprimento ao eixo de referência y , no plano Cartesiano, para o recipiente com origem no ponto $(0,0)$.

Figura 2.2 – Representação da operação de mudança de escala.



Fonte: o autor.

Para obter o padrão de empacotamento ótimo de um problema de corte e empacotamento, assumindo um objetivo de maximização do valor total empacotado, considera-se o modelo de programação linear inteira em (2.1) a (2.4). Para tanto, adotam-se os seguintes índices, parâmetros, conjuntos e variáveis:

i : índice para os tipos de itens no conjunto I ;

k, u : pontos N -dimensionais pertencentes a malha;

W : conjunto com todos os pontos N -dimensionais da malha;

H_{iku} : função binária, que assume valor 1 quando o item i , empacotado com seu canto inferior esquerdo no ponto k , não permite que qualquer outro item ocupe o ponto u coberto pelo item i ; caso contrário, assume valor 0;

z_{ik} : variável de decisão binária, que assume valor 1 se o item i tiver o seu canto inferior esquerdo empacotado no ponto k ; caso contrário, assume valor 0. Um empacotamento de um item $i \in I$ dentro do recipiente Q é ilustrado na Figura 2.3, considerando um problema bidimensional, isto é, $N = 2$, com $k = (p, q)$ e com as dimensões da largura no eixo x , L para o recipiente e l_i para o item i , e comprimento no eixo y , C para o recipiente e c_i para o item i .

$$\text{Maximizar } \sum_{i \in I} \sum_{k \in W} v_i z_{ik}, \quad (2.1)$$

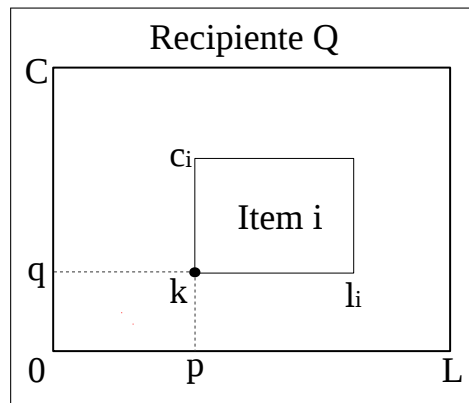
Sujeito a:

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in W} H_{iku} z_{ik} \leq 1, \quad \text{para todo } u \in W; \quad (2.2)$$

$$\sum_{k \in W} z_{ik} \leq b_i, \quad \text{para todo } i \in I; \quad (2.3)$$

$$z_{ik} \in \{0, 1\}, \quad \text{para todo } i \in I; k \in W. \quad (2.4)$$

Figura 2.3 – Representação de um empacotamento bidimensional.



Fonte: o autor.

O modelo é composto por (2.1), que é a função objetivo relacionada a solução de máximo valor total empacotado, e as suas restrições em (2.2) a (2.4). As restrições de não sobreposição entre itens são representadas em (2.2), utilizando a função binária H_{iku} . As restrições de limite de cópias que cada item pode ter no empacotamento são dadas em (2.3). Por fim, o domínio das variáveis é apresentado em (2.4). Esse modelo pode ser aplicado à diversos outros problemas de corte e empacotamento, em que se deseja maximizar o valor empacotado e com as restrições de demanda dos itens adaptadas de acordo com o problema considerado. Logo, consegue-se resolver com esse modelo os seguintes problemas básicos de Wäscher, Haußner e Schumann (2007): problema de empacotamento de itens idênticos, problema de alocação e problema da mochila.

Ao considerar outros problemas básicos de Wäscher, Haußner e Schumann (2007), como corte de estoque e empacotamento em recipientes, deve-se alterar o modelo em (2.1) a (2.4). Para tanto, ao considerar um grande número de recipientes e visando minimizar a quantidade deles utilizada no empacotamento de todos os itens, define-se os recipientes disponíveis no conjunto \mathcal{M} , a variável de decisão \mathcal{X}_{ijk} , que assume valor 1 se o item i for empacotado no ponto k do recipiente j , e a função \mathcal{H}_{ijk_u} que assume valor 1 quando o

item i , empacotado no ponto k do recipiente j , não permite que qualquer outro item ocupe o ponto u do recipiente j coberto pelo item i .

$$\text{Minimizar } \sum_{i \in I} \sum_{j \in \mathcal{M}} \sum_{k \in W} j \mathcal{Z}_{ijk}, \quad (2.5)$$

sujeito a:

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in W} \mathcal{H}_{ijk} \mathcal{Z}_{ijk} \leq 1, \quad \text{para todo } u \in W; j \in \mathcal{M}; \quad (2.6)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{M}} \sum_{k \in W} \mathcal{Z}_{ijk} = b_i, \quad \text{para todo } i \in I; \quad (2.7)$$

$$\mathcal{Z}_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \text{para todo } i \in I; j \in \mathcal{M}; k \in W. \quad (2.8)$$

No modelo de programação linear inteira definido em (2.5) a (2.8), a função objetivo (2.5) está relacionada ao mínimo número de recipientes, além de ajudar com a eliminação de possíveis soluções simétricas, enquanto as restrições (2.6) estabelecem a não sobreposição entre itens empacotados em um mesmo recipiente j , as restrições (2.7) indicam o número de cópias de cada item que devem ser empacotadas e as restrições (2.8) impõem o domínio das variáveis de decisão.

O tamanho (cardinalidade) do conjunto W muda conforme a estratégia de discretização utilizada. Naturalmente, quanto mais pontos existir na malha W , mais variáveis e restrições vão existir nos modelos para realizar o empacotamento dos itens, embora muitas possam ser desnecessárias. Deste modo, a definição de malhas menores, isto é, com menos pontos, torna-se um aspecto muito importante na busca da solução ótima de problemas de corte e empacotamento.

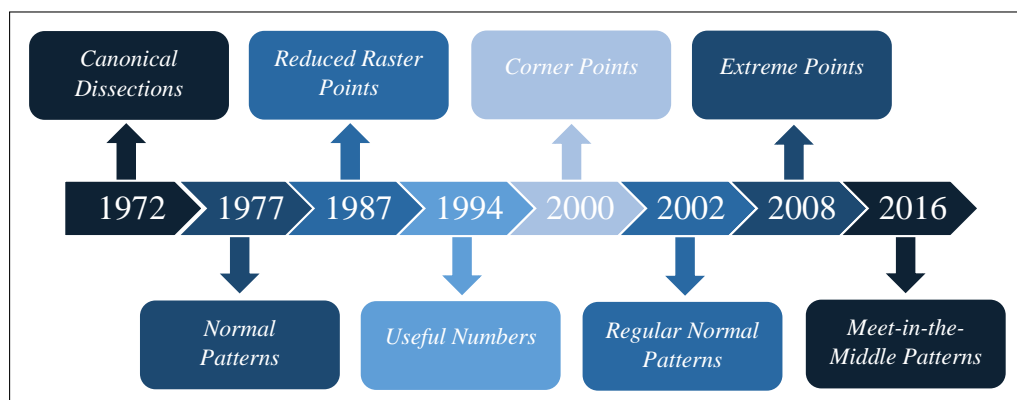
Capítulo 3

MALHAS DE PONTOS

O desenvolvimento deste capítulo e do restante do trabalho está relacionado com problemas de corte e empacotamento bidimensionais, que envolve a largura e o comprimento dos itens e recipientes dados, respectivamente, por l_i , c_i , L e C , no plano Cartesiano com origem em $(0,0)$. Todavia, os resultados obtidos sobre as malhas seguem válidos para problemas de qualquer outra dimensão conquanto que os itens e recipientes sejam de formato retangular (CÔTÉ; IORI, 2016).

As malhas de pontos para realizar o empacotamento dos itens são calculadas com base nas dimensões inteiras dos n itens pertencentes ao conjunto I e do recipiente Q . Quanto mais heterogênea for a variedade de itens do conjunto e maior as dimensões do recipiente, espera-se que a malha possua mais pontos, conseqüentemente, mais variáveis de decisão devem existir em modelos de programação matemática baseados em malha (QUEIROZ *et al.*, 2017). Na literatura são propostas diversas estratégias de discretização do recipiente em malhas, sendo algumas menores, isto é, com menos pontos, enquanto outras não podem ser relacionadas diretamente. A linha cronológica do surgimento das malhas investigadas é apresentada na Figura 3.1, a qual traz o nome da malha e o seu ano de surgimento.

Figura 3.1 – Linha cronológica do surgimento das malhas.



Fonte: o autor.

No geral, as malhas apresentam conjuntos de coordenadas independentes conforme a dimensão do problema, sendo a malha final obtida através do produto cartesiano entre tais conjuntos. Além disso, as malhas possuem em seus conjuntos coordenadas calculadas até o fim do recipiente, porém, no momento do empacotamento considera-se apenas até a última coordenada dentro do recipiente que cabe inteiramente o menor item do conjunto quando empacotado. Em outras palavras, desconsideram-se no momento do empacotamento as coordenadas posteriores a $L - \min_{1 \leq i \leq n} (l_i)$ e a $C - \min_{1 \leq i \leq n} (c_i)$, referentes, respectivamente, a largura e ao comprimento do recipiente. É fácil notar que as coordenadas posteriores a essas limites são inválidas, pois não suportam o empacotamento de qualquer item sem extrapolar as dimensões do recipiente. Esse mesmo raciocínio pode ser aplicado para cada item $i \in I$, no qual é viável considerar as coordenadas apenas até $L - l_i$ e $C - c_i$, respectivamente, para a largura e para o comprimento do recipiente.

A malha mais comum é a unitária, que pode ser calculada por meio de (3.1) e (3.2). Basicamente, essa malha considera todas as coordenadas inteiras, do início do recipiente até o fim, com distância unitária entre coordenadas subsequentes.

$$X_g = \{p \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq p \leq L\}; \quad (3.1)$$

$$Y_g = \{q \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq q \leq C\}. \quad (3.2)$$

Na literatura surgiram algumas estratégias para gerar malhas menores, isto é, com menos pontos, para empacotar os itens. Algumas dessas malhas ainda não apresentam provas formais sobre a garantia de manter a solução ótima do problema, de forma que se prova formalmente alguns dessas questões neste trabalho.

3.1 *Canonical Dissections e Normal Patterns*

Esta seção apresenta como as malhas de *canonical dissections* e *normal patterns* foram definidas na literatura. É importante destacar que elas são as mesmas malhas e surgiram de forma independente na literatura.

3.1.1 Discretização de Herz (1972)

Herz (1972) investigou um problema de corte ortogonal bidimensional, considerando que cada item i pode ter um número ilimitado de cópias no padrão de corte do recipiente Q . A partir disso, visa-se encontrar as dissecções de Q , geradas por meio de cortes, que resultem no maior valor de itens empacotados do conjunto I . Uma dissecção do recipiente Q representa a sua separação em recipientes menores e busca também pela otimização do desperdício, que são áreas de Q geradas após a realização dos cortes que não podem ser utilizadas para empacotar qualquer item, ou seja, áreas não utilizáveis.

No desenvolvimento adiante, o termo *abscissa* refere-se à coordenada na dimensão horizontal (eixo x) e *ordenada* é usado para a coordenada referente à dimensão vertical (eixo y). Assim, o corte realizado ao longo da largura de Q (eixo x) é designado por $x = \hat{x}$, sendo \hat{x} o valor inteiro não negativo da abscissa do corte. Do mesmo modo, o corte realizado ao longo do comprimento do retângulo (eixo y) é dado por $y = \hat{y}$, em que \hat{y} é o valor inteiro não negativo da ordenada do corte.

A fim de encontrar a solução ótima do seu problema de estudo, Herz (1972) propôs um algoritmo recursivo que testa os possíveis padrões de corte para Q . O número de possíveis cortes realizado pelo algoritmo é limitado conforme o Teorema 1. Esse algoritmo pode ser aplicado apenas quando se pode cortar um número ilimitado de cópias de cada tipo de item do conjunto I independente da orientação, isto é, os itens podem ser cortados tanto na posição vertical como na horizontal. Deste modo, cada item i se torna dois itens com dimensões trocadas (rotação ortogonal de 90 graus).

Com o interesse de reduzir a busca do algoritmo, Herz (1972) desenvolveu o conjunto de coordenadas de corte definido como *canonical dissections* e fez as seguintes considerações: os vetores colunas que contêm as coordenadas l_i e c_i de todos itens do conjunto I são denotados, respectivamente, por l e c . Um vetor linha de n coordenadas inteiras não-negativas é representado por w . Deste modo, tem-se um número finito de vetores w satisfazendo $wl \leq L$ e $wc \leq C$, em que wl é o produto escalar entre os vetores w e l (e similarmente para wc). A partir disso, denota-se X_h e Y_h como os conjuntos finitos que possuem, respectivamente, os valores de wl e de wc , sendo denominados de conjuntos de coordenadas *canonical dissections*. Vale comentar que os conjuntos X_h e Y_h contêm todas as coordenadas obtidas a partir de combinações lineares inteiras não negativas, também conhecidas como combinações cônicas, obtidas sobre as respectivas dimensões dos itens.

Teorema 1. Seja qual for a dissecção aplicada no retângulo Q , há uma outra que possui valor maior ou igual a ela e que contém todas as abscissas no conjunto X_h e todas as ordenadas no conjunto Y_h .

Demonstração. A fim de realizar a demonstração do Teorema 1, aplica-se o princípio de indução matemática em três passos básicos: estabelecer uma base para a realização da indução, estabelecer a hipótese de indução e concluir sobre a tese.

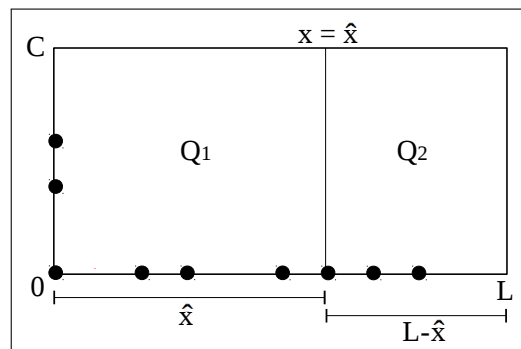
Aplica-se a indução sobre as dimensões L e C do recipiente Q . A base consiste no caso trivial de corte em que os valores das dimensões L e C de Q são menores, respectivamente, que quaisquer valores de l_i e c_i presentes nos respectivos conjuntos l e c . Desse modo, Q não precisa de cortes, pois ao realizar qualquer corte sobre Q , a dissecção gerada não possui dimensões suficientes para empacotar qualquer item (ou soma de itens) do conjunto I , gerando um recipiente não utilizável. Agora, faz-se a hipótese de indução: admite-se que

para todo recipiente \bar{Q} , que possui as dimensões dadas por \bar{L} e \bar{C} , o Teorema 1 é satisfeito, de modo que tais dimensões satisfazem: $\bar{L} \leq L$, $\bar{C} \leq C$ e $\bar{L} + L < \bar{C} + C$.

Considere uma dissecção G do recipiente Q : seja um primeiro corte $x = \hat{x}$, corte vertical de Q sobre a abscissa \hat{x} , o qual gera dois recipientes menores Q_1 e Q_2 . Utilizando a hipótese de indução, tem-se que a esquerda de \hat{x} , no recipiente Q_1 , existe um corte $x_1 = \hat{x}_1$ que gera a dissecção G_1 de valor maior ou igual que o lado esquerdo da dissecção G , possuindo todas as abscissas presentes em X_h e todas as ordenadas em Y_h . Do mesmo modo, tem-se que a direita de \hat{x} , no recipiente Q_2 existe um corte $x = \hat{x}_2$ que gera a dissecção G_2 de valor maior ou igual ao lado direito da dissecção G , possuindo todas as abscissas em X_h e todas as ordenadas em Y_h .

A partir disso, surgem dois casos que devem ser analisados. Caso a abscissa do corte $x = \hat{x}$ esteja no conjunto X_h , tem-se então que $\hat{x} \leq L$, para Q_1 e $L - \hat{x} \leq L$, para Q_2 . Portanto, aplicando a hipótese de indução, existe uma dissecção para cada recipiente Q_1 e Q_2 . Esse resultado é ilustrado na Figura 3.2, em que os pontos pretos, ao longo da abscissa, são as coordenadas pertencentes ao conjunto X_h . Do mesmo modo, os pontos pretos ao longo da ordenada são as coordenadas pertencentes ao conjunto Y_h .

Figura 3.2 – Representação de uma dissecção sobre um recipiente retangular Q .

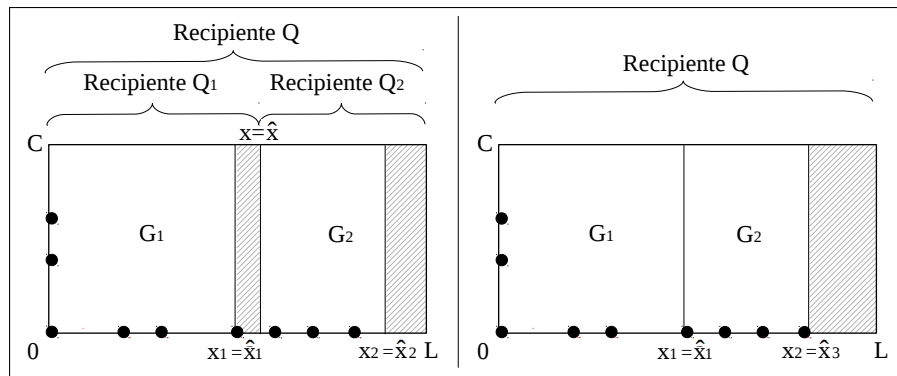


Fonte: o autor.

Por outro lado, se a abscissa do corte $x = \hat{x}$ não estiver no conjunto X_h , tem-se que a partir de qualquer dissecção de Q_1 , o recipiente gerado com o lado direito sobre a linha de corte $x = \hat{x}$ é não utilizável. Segue pela hipótese de indução que existe uma dissecção para cada recipiente Q_1 e Q_2 , de forma a obter o corte $x_1 = \hat{x}_1$ no recipiente Q_1 , e o corte $x_2 = \hat{x}_2$ no recipiente Q_2 . Como a dissecção em Q_1 tem $\hat{x}_1 \in X_h$, faz-se a troca da abscissa do corte x para x_1 , $x = x_1 = \hat{x}_1$, e translada-se a abscissa do corte x_2 para $x_2 = \hat{x}_3 = \hat{x}_2 - (\hat{x} - \hat{x}_1)$. Nota-se que o retângulo Q_2 pode ser realocado mais a esquerda começando na nova abscissa do corte x , tal que deixa de existir um retângulo não utilizável entre Q_1 e Q_2 . Esse caso está ilustrado na Figura 3.3, em que as partes cinza são as áreas não utilizáveis.

□

Figura 3.3 – Representação de uma dissecção canônica sobre um recipiente retangular Q .

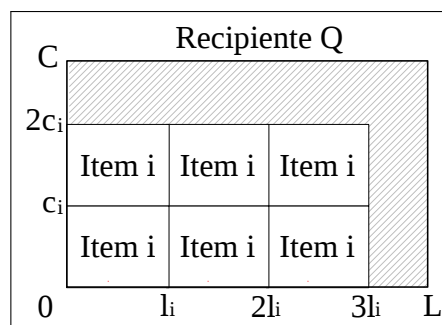


Fonte: o autor.

Todas as considerações feitas na prova do Teorema 1 com relação as abscissas sobre o eixo x são realizadas de modo análogo para as ordenadas sobre o eixo y . O procedimento realizado pelo Teorema 1 resume em impor que todos os recipientes utilizáveis sejam realocados mais a esquerda e mais abaixo possível dentro do recipiente Q . Nota-se que os recipientes utilizáveis são aqueles que possuem as dimensões obtidas como combinações lineares inteiras não negativas das dimensões de itens que estão no conjunto I . Assim, o Teorema 1 permite reduzir os testes do algoritmo de Herz (1972) para os cortes somente sobre coordenadas nos conjuntos X_h e Y_h , originando o padrão de corte canônico. Além disso, o autor também provou que as dissecções poderiam ocorrer para coordenadas até a metade das respectivas dimensões do recipiente a fim de evitar soluções simétricas e, assim, melhorar a performance do algoritmo.

Herz (1972) também denominou que uma dissecção que abrange apenas um tipo de item i do conjunto I , ou seja, um corte que gera várias cópias do item i , é chamado de corte canônico homogêneo. Nota-se que este tipo de dissecção é obtida geralmente se o problema for do tipo que não restringe a quantidade de cópias de cada item. A Figura 3.4 exemplifica o conjunto das abscissas, sendo dado por $\{l_i, 2l_i, 3l_i, \dots\}$, e das ordenadas, sendo dado por $\{c_i, 2c_i, \dots\}$.

Figura 3.4 – Representação de uma dissecção canônica homogênea.



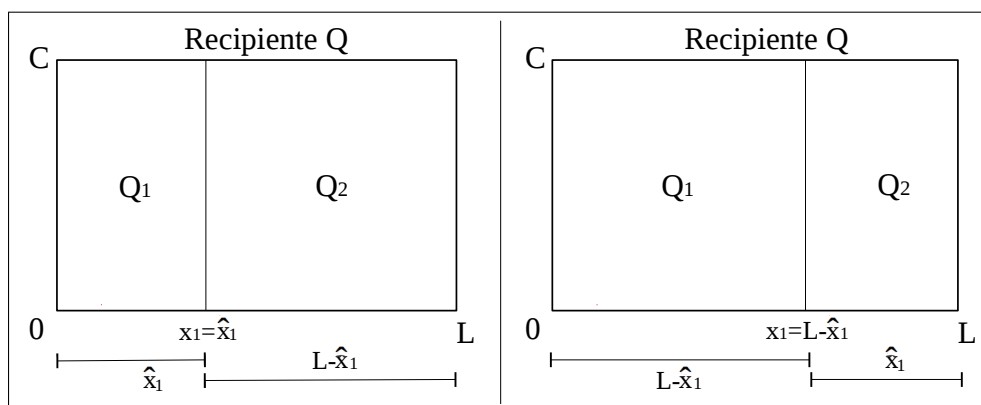
Fonte: o autor.

3.1.2 Discretização de Christofides e Whitlock (1977)

O trabalho de Christofides e Whitlock (1977) trata da versão limitada do problema de corte ortogonal bidimensional, em que cada item $i \in I$ possui um número máximo de cópias b_i . Considerando que a orientação dos itens é fixa, busca-se uma série de cortes sobre o recipiente Q que resulte no máximo valor empacotado, dados os itens de I . Os autores propuseram um algoritmo de busca em árvore que percorre todos os cortes possíveis para Q , a fim de achar uma solução ótima para o problema. Cada ramo da árvore representa um corte ao longo do eixo x ou y aplicado sobre Q , gerando nós contendo os recipientes menores oriundos do corte. Os cortes ao longo da largura, na coordenada x , e do comprimento, na coordenada y , são delimitados, respectivamente, por $1 \leq x \leq L - 1$ e $1 \leq y \leq C - 1$.

Com o propósito de diminuir a quantidade de cortes que o algoritmo testa, Christofides e Whitlock (1977) buscaram eliminar cortes simétricos. Ao analisar cortes na direção da largura L e igualmente no comprimento C do recipiente Q , tem-se que um corte $x_1 = \hat{x}_1$, na coordenada \hat{x}_1 ao longo da largura resulta em dois recipientes menores, Q_1 e Q_2 , em que o Q_1 possui as dimensões dadas por \hat{x}_1 com relação a largura e C com relação ao comprimento, enquanto Q_2 possui as dimensões dadas por $L - \hat{x}_1$ com relação a largura e C com relação ao comprimento. Nota-se que ao considerar o corte x_1 realizado na coordenada $L - \hat{x}_1$, obtém-se os mesmos dois recipientes Q_1 e Q_2 . Isso acontece pois o corte na coordenada \hat{x}_1 é simetricamente oposto ao corte considerado na coordenada $L - \hat{x}_1$ para o recipiente Q . Logo é suficiente considerar os cortes realizados em coordenadas que vão até a metade de cada dimensão do recipiente devido a simetria. Observa-se que as mesmas considerações podem ser estendidas para cortes na direção do comprimento de Q . A Figura 3.5 exemplifica a simetria ocorrida para um corte ao longo da largura do recipiente.

Figura 3.5 – Exemplo de simetria ao longo da largura do recipiente.

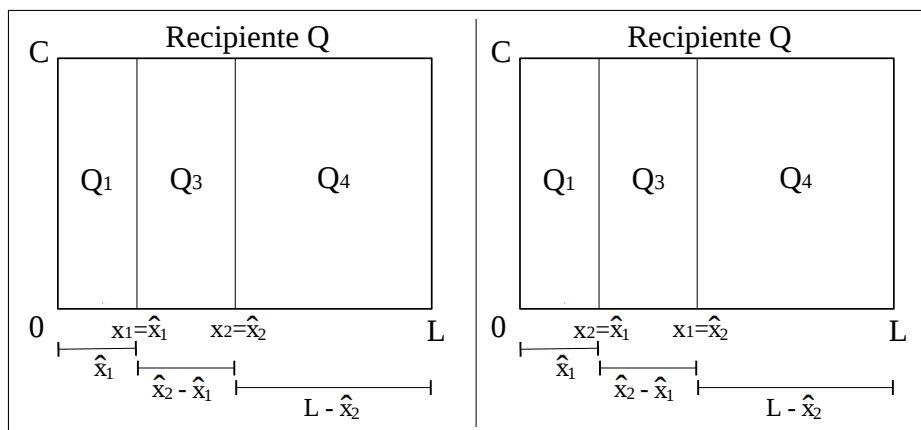


Fonte: o autor.

Christofides e Whitlock (1977) também investigaram o efeito da ordem dos cortes sobre o recipiente Q . Seja um corte x_1 efetuado na coordenada \hat{x}_1 ao longo da largura e que gera dois recipientes menores Q_1 de dimensões (\hat{x}_1, C) e Q_2 de dimensões $(L - \hat{x}_1, C)$. Seja um

segundo corte x_2 efetuado na coordenada \hat{x}_2 ao longo da largura do recipiente Q_2 . Assim, tem-se $1 \leq \hat{x}_1 \leq \frac{L}{2}$ e $\hat{x}_1 < \hat{x}_2 \leq \frac{L-\hat{x}_1}{2}$ de forma que esses dois cortes permitem obter três recipientes, quais sejam: Q_1 de dimensões (\hat{x}_1, C) , Q_3 de dimensões $(\hat{x}_2 - \hat{x}_1, C)$ e Q_4 de dimensões $(L - \hat{x}_2, C)$. Nota-se que ao considerar a ordem inversa dos cortes, $x_1 = \hat{x}_2$ sendo o primeiro e $x_2 = \hat{x}_1$ sendo o segundo, chega-se nos mesmos retângulos Q_1 , Q_3 e Q_4 . A fim de evitar o efeito da ordem dos cortes, realiza-se a ordenação dos cortes executados sobre o recipiente, de modo que os cortes efetuados após um corte qualquer $x = \hat{x}$ devem ocorrer em coordenadas maiores ou iguais a \hat{x} . Analogamente, tais considerações podem ser estendidas para cortes ao longo do eixo y . O efeito da ordem do corte, ao longo da largura do recipiente, é ilustrado na Figura 3.6.

Figura 3.6 – Exemplo do efeito da ordem dos cortes ao longo da largura do recipiente.



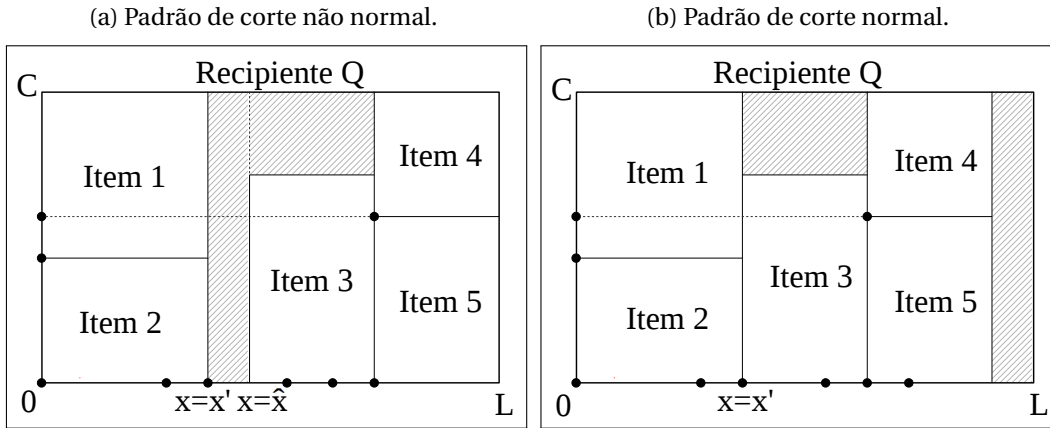
Fonte: o autor.

A partir disso, [Christofides e Whitlock \(1977\)](#) definiram os *normal patterns* ou padrões normais. Nesse caso, um corte sobre um recipiente Q ao longo da largura é realizado em uma coordenada $x = \hat{x}$ que é a combinação cônica das larguras l_i de itens no conjunto I e, tal que, para cada um desses itens, tem-se o seu comprimento menor ou igual ao comprimento do recipiente Q . Tal padrão de corte é denominado *normal pattern*, ou padrão normal, sendo ilustrado na Figura 3.7b, em que os pontos pretos marcam os pontos pertencentes ao conjunto de *normal patterns*. Nota-se que nos padrões normais os itens são organizados mais à esquerda e mais abaixo possível dentro do recipiente, o que diminui a quantidade de áreas não utilizáveis no meio do padrão.

Para obter apenas padrões de corte normais, os cortes são limitados a serem realizados sobre coordenadas nos conjuntos X_p e Y_p , respectivamente. Os conjuntos X_p e Y_p são formados a partir das combinações lineares inteiras não negativas das dimensões dos itens em I . Esses conjuntos são obtidos conforme [Fayard e Zissimopoulos \(1995\)](#), respectivamente, pelas funções $g_i(x)$ e $g_i(y)$ em (3.3) e (3.4), que recursivamente geram os pontos da malha. Tais funções consideram um recipiente retangular de dimensões (x, y) , para $0 \leq x \leq L$ e $0 \leq y \leq C$, e cada item $i \in I$. Além disso, essas funções requerem que os itens em I sejam ordenados de forma crescente conforme a dimensão que está sendo analisada, consistindo na largura para a $g_i(x)$ e no comprimento para a $g_i(y)$. Assim, se $g_n(x) = 1$, tem-

se que a coordenada x pertence ao conjunto de *normal patterns* ($x \in X_p$), caso contrário, ela não pertence. Da mesma forma ao longo do comprimento, tal que se $g_n(y) = 1$, então $y \in Y_p$.

Figura 3.7 – Exemplo de um padrão de corte normal.



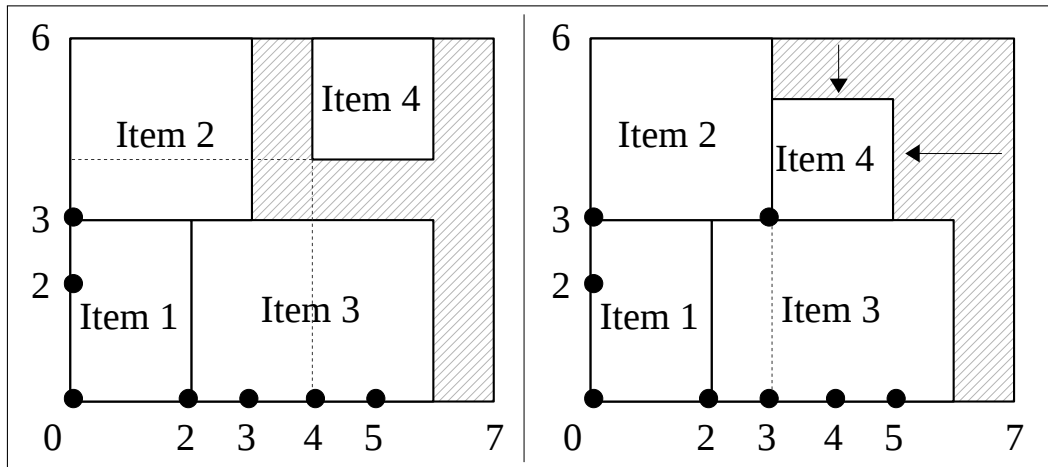
Fonte: o autor.

$$g_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } i = 0 \text{ e } x = 0; \\ \infty, & \text{para } i = 0 \text{ e } x \neq 0; \\ g_{i-1}(x), & \text{para } x < l_i, i \in I; \\ \min \{g_{i-1}(x), \max \{1, \min_J \{g_{i-1}(x - J l_i)\}\}\}, & \text{para } 1 \leq J \leq \min \left\{ \left\lfloor \frac{x}{l_i} \right\rfloor, b_i \right\}, J \in \mathbb{Z}, x \geq l_i, i \in I. \end{cases} \quad (3.3)$$

$$g_i(y) = \begin{cases} 0, & \text{para } i = 0 \text{ e } y = 0; \\ \infty, & \text{para } i = 0 \text{ e } y \neq 0; \\ g_{i-1}(y), & \text{para } y < c_i, i \in I; \\ \min \{g_{i-1}(y), \max \{1, \min_K \{g_{i-1}(y - K c_i)\}\}\}, & \text{para } 1 \leq K \leq \min \left\{ \left\lfloor \frac{y}{c_i} \right\rfloor, b_i \right\}, K \in \mathbb{Z}, y \geq c_i, i \in I. \end{cases} \quad (3.4)$$

3.1.3 Conjuntos de *normal patterns*

Como observado nos trabalhos de Herz (1972) e Christofides e Whitlock (1977), as discretizações efetuadas geram as mesmas malhas baseando-se no princípio de que os itens podem ser realocados mais a esquerda e mais abaixo possível dentro do recipiente. Esse posicionamento dos itens ocorre até que os seus lados estejam encostados no recipiente ou em outros itens. Por simplicidade, a malha é referenciada como *normal patterns* e a Figura 3.8 ilustra um empacotamento sobre ela.

Figura 3.8 – Exemplo de um padrão sobre a malha de *normal patterns*.

Fonte: o autor.

Os conjuntos de *normal patterns* são representados de uma maneira mais simples em (3.5) e (3.6), com base em Beasley (1985a). Nota-se que o uso dos *normal patterns* permite reduzir o número de coordenadas presentes nos conjuntos X_g e Y_g da malha unitária, sem que ocorra perda de generalidade conforme mostrado por Herz (1972). Uma prova mais simples dessa afirmação pode ser encontrada em Lins, Lins e Morabito (2003).

$$X_d = \left\{ p \in \mathbb{Z} \mid p = \sum_{i \in I} \varepsilon_i l_i, 0 \leq p \leq L, \text{ com } 0 \leq \varepsilon_i \leq b_i, \varepsilon_i \in \mathbb{Z}, i \in I \right\}; \quad (3.5)$$

$$Y_d = \left\{ q \in \mathbb{Z} \mid q = \sum_{i \in I} \varepsilon_i c_i, 0 \leq q \leq C, \text{ com } 0 \leq \varepsilon_i \leq b_i, \varepsilon_i \in \mathbb{Z}, i \in I \right\}. \quad (3.6)$$

A malha de *normal patterns* consiste basicamente das possíveis combinações cônicas (isto é, combinações lineares inteiras não negativas) envolvendo as dimensões dos itens, considerando somente até as coordenadas limites para o empacotamento. O Algoritmo 3.1, definido em Côté e Iori (2016), permite obter o conjunto de coordenadas *normal patterns* para um dado conjunto de itens I e recipiente. Ao assumir o uso dessa malha na resolução do problema, os itens passam a ser alocados em coordenadas $p \in X_d$ e $q \in Y_d$.

Algoritmo 3.1- Conjuntos de *normal patterns*.

Entrada: Conjunto I de n itens com as dimensões (l_i, c_i) para $i \in I$ e as dimensões (L, C) do recipiente.

Saída: Conjunto de coordenadas *normal patterns* ao longo da largura e do comprimento, respectivamente, X_d e Y_d .

```

1  $T_x[0 \dots L] \leftarrow 0; T_y[0 \dots C] \leftarrow 0; T_x[0] \leftarrow 1; T_y[0] \leftarrow 1.$ 
2 para cada  $i \in I$  faça
3   para  $p \leftarrow L - l_i$  até 0 faça
4     se  $T_x[p] = 1$  então
5        $T_x[p + l_i] \leftarrow 1.$ 
6   para  $q \leftarrow C - c_i$  até 0 faça
7     se  $T_y[q] = 1$  então
8        $T_y[q + c_i] \leftarrow 1.$ 
9  $X_d \leftarrow \emptyset; Y_d \leftarrow \emptyset.$ 
10 para  $p \leftarrow L$  até 0 faça
11   se  $T_x[p] = 1$  então
12      $X_d \leftarrow X_d \cup \{p\}.$ 
13 para  $q \leftarrow C$  até 0 faça
14   se  $T_y[q] = 1$  então
15      $Y_d \leftarrow Y_d \cup \{q\}.$ 
16 retorna  $X_d$  e  $Y_d.$ 

```

3.2 Discretização de Terno, Lindemann e Scheithauer (1987)

Terno, Lindemann e Scheithauer (1987) definiram uma nova estratégia para discretizar o recipiente, sendo caracterizada como a malha de *reduced raster points*, com resultados sobre um problema de corte bidimensional publicados em Scheithauer e Terno (1996). Essa estratégia de discretização é obtida da malha de *normal patterns* excluindo pontos que não trazem a máxima ocupação do recipiente após uma dada combinação cônica. Por simplicidade, esta malha é referenciada por *raster points*.

A malha de *raster points* visa reduzir ainda mais o número de pontos e é descrita pelos conjuntos de coordenadas X_r e Y_r em (3.7) e (3.8), respectivamente. Observa-se que caso a soma das larguras l_i de todos itens $i \in I$ seja menor ou igual a L ou a soma dos comprimentos seja menor ou igual a C , a malha de *raster points* não pode ser gerada corretamente,

conforme se mostra no Exemplo 1. Isso ocorre devido as funções $\langle L - p \rangle_x$ e $\langle C - q \rangle_y$ sempre retornarem a maior combinação cônica que é menor ou igual a tal diferença das larguras ou comprimentos, respectivamente. Claramente, uma solução trivial é empacotar todos os itens lado a lado e não seria preciso uma malha de pontos.

$$X_r = \{\langle L - p \rangle_x \mid p \in X_d\}, \text{ sendo } \langle L - p \rangle_x = \max\{s \in X_d \mid s \leq L - p\}; \quad (3.7)$$

$$Y_r = \{\langle C - q \rangle_y \mid q \in Y_d\}, \text{ sendo } \langle C - q \rangle_y = \max\{t \in Y_d \mid t \leq C - q\}. \quad (3.8)$$

Exemplo 1. Considere uma instância para um problema de corte e empacotamento bidimensional, que possui um único recipiente e um conjunto I de três itens, cada item $i \in I$ com demanda $b_i = 1$ e valor dado pela respectiva área. As dimensões do recipiente são dadas por $(30, 9)$ e a dos itens por: $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$. Nota-se que a soma da largura dos itens resulta em 10, que é menor do que a largura $L = 30$ do recipiente. Com isso, para a obtenção do conjunto de coordenadas referente a direção da largura na malha de *raster points*, deve-se fazer $L = 10$ em (3.7). Deste modo, a malha de *normal patterns* resulta em: $X_d = \{0, 2, 3, 5, 7, 8, 10\}$ e $Y_d = \{0, 3, 5, 6, 8\}$, enquanto que, após efetuar a mudança em L , tem-se a malha de *raster points* como $X_r = \{0, 2, 3, 5, 7, 8, 10\}$ e $Y_r = \{0, 3, 6, 8\}$, em que a coordenada 8 em Y_d e Y_r pode ser excluída, pois é inválida para o empacotamento de qualquer item. Caso o valor de L não fosse corrigido em (3.7), o conjunto de *raster points* X_r resultaria em $\{10\}$.

Com relação a malha de *raster points* garantir a solução ótima, Scheithauer (1997) apresentou a Afirmação 1 e deu uma ideia de como prová-la (“*give an impression how to prove*”), todavia não se conhece qualquer prova formal sobre a garantia dessa malha preservar a solução ótima independente do problema de corte e empacotamento de itens com formato retangular.

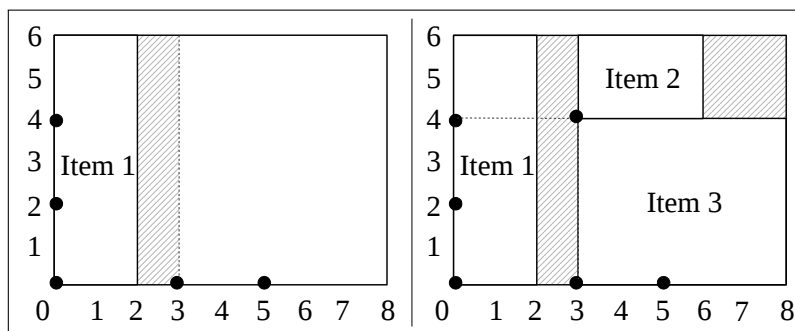
Afirmação 1. Dado um padrão de empacotamento do conjunto J , tal que $J \subseteq I$, existe um outro padrão com o mesmo conjunto J tendo seus itens empacotados somente na malha de *raster points*.

Segundo Scheithauer (1997), caso já tenha sido utilizado L_0 unidades de largura e C_0 unidades de comprimento para empacotar itens, então ainda restam $L - L_0$ e $C - C_0$ unidades no recipiente, mas na verdade apenas $\langle L - L_0 \rangle_x$ e $\langle C - C_0 \rangle_y$ podem ser usadas. Com isso, as próximas coordenadas ao longo da largura e do comprimento do recipiente disponíveis para empacotar um item são $\hat{x} = \langle L - \langle L - L_0 \rangle_x \rangle_x$ e $\hat{y} = \langle C - \langle C - C_0 \rangle_y \rangle_y$.

Na malha de *raster points*, o desperdício que está sendo gerado ao empacotar um item é associado para os itens já empacotados, ao invés de ser considerado no final do empacotamento como se faz na malha de *normal patterns*. A Figura 3.9 ilustra uma ideia do que acontece quando os itens vão sendo empacotados na malha de *raster points* (pontos pretos), seguindo a instância do Exemplo 2.

Exemplo 2. Considere uma instância de um problema de corte e empacotamento bidimensional com um único recipiente de dimensões dadas por $(8, 6)$ e três itens: item 1 de dimensões $(2, 6)$, item 2 de dimensões $(3, 2)$ e item 3 de dimensões $(5, 4)$. Cada item possui valor igual a área e pode possuir uma ou nenhuma cópia empacotada dentro do recipiente. Assim, não levando em consideração as coordenadas inválidas, tem-se a malha de *normal patterns* com $X_d = \{0, 2, 3, 5\}$ e $Y_d = \{0, 2, 4\}$ e a malha de *raster points* com $X_r = \{0, 3, 5\}$ e $Y_r = \{0, 2, 4\}$.

Figura 3.9 – Empacotamento de itens sobre a malha de *raster points*.



Fonte: o autor.

No Exemplo 2, ao considerar o empacotamento do item 1 no ponto $(0, 0)$, a próxima coordenada que surge ao longo da largura é em $x = 3$, pois a coordenada $x = 2$ não pertence ao conjunto X_r da malha de *raster points*.

Ao melhor do nosso conhecimento, Birgin, Lobato e Morabito (2012) afirmaram que qualquer padrão de empacotamento sobre a malha de *normal patterns* pode ser substituído por outro sobre a malha de *raster points*, porém eles também não deram uma prova formal dessa afirmação. Recorrendo à Birgin, Lobato e Morabito (2010), o seu primeiro teorema traz uma prova dessa afirmação quando resolvendo um problema de carregamento de paletes, que consiste no empacotamento de itens idênticos. A partir disso, propõe-se neste trabalho uma prova formal (ver Proposição 4) de que a malha de *raster points* preserva a solução ótima para problemas de corte e empacotamento de itens com formato retangular.

Um algoritmo simples para calcular os conjuntos de coordenadas *raster points* consiste em obter os respectivos conjuntos de coordenadas *normal patterns* e, então, aplicar as definições em (3.7) e (3.8) para cada coordenada *normal patterns*, conforme o Algoritmo 3.2.

Scheithauer (1997) apresentou, sobre a malha de *raster points*, resultados envolvendo relações de equivalência e dominância entre padrões de empacotamento. Esses resultados são descritos brevemente adiante, uma vez que alguns deles foram usados como base no Capítulo 4 para estabelecer relações de conjunto e tamanho entre as malhas da literatura.

Algoritmo 3.2- Conjuntos de *raster points*.

Entrada: Conjunto I de n itens com as dimensões (l_i, c_i) para $i \in I$, as dimensões (L, C) do recipiente e os conjuntos X_d e Y_d da malha de *normal patterns*.

Saída: Conjunto de coordenadas *raster points* ao longo da largura e do comprimento, respectivamente, X_r e Y_r .

$$1 \quad S_x \leftarrow \sum_{i=1}^n l_i; S_y \leftarrow \sum_{i=1}^n c_i.$$

2 **se** $S_x < L$ **então**

$$3 \quad \left[\begin{array}{l} L \leftarrow S_x. \end{array} \right.$$

4 **se** $S_y < C$ **então**

$$5 \quad \left[\begin{array}{l} C \leftarrow S_y. \end{array} \right.$$

$$6 \quad X_r \leftarrow \emptyset; Y_r \leftarrow \emptyset.$$

7 **para cada** $p \in X_d$ **faça**

$$8 \quad \left[\begin{array}{l} x \leftarrow \max\{s \in X_d \mid s \leq L - p\}. \end{array} \right.$$

$$9 \quad \left[\begin{array}{l} X_r \leftarrow X_r \cup \{x\}. \end{array} \right.$$

10 **para cada** $q \in Y_d$ **faça**

$$11 \quad \left[\begin{array}{l} y \leftarrow \max\{t \in Y_d \mid t \leq C - q\}. \end{array} \right.$$

$$12 \quad \left[\begin{array}{l} Y_r \leftarrow Y_r \cup \{y\}. \end{array} \right.$$

13 **retorna** X_r e Y_r .

Definição 2. O canto superior direito (\bar{p}_i, \bar{q}_i) de um item i empacotado no ponto (p_i, q_i) é calculado, respectivamente, como:

$$\bar{p} = L - \langle\langle L - l_i - p \rangle\rangle_x, \text{ sendo } \langle\langle L - l_i - p \rangle\rangle_x = \max\{s \in X_r \mid s \leq L - l_i - p\}; \quad (3.9)$$

$$\bar{q} = C - \langle\langle C - c_i - q \rangle\rangle_y, \text{ sendo } \langle\langle C - c_i - q \rangle\rangle_y = \max\{t \in Y_r \mid t \leq C - c_i - q\}. \quad (3.10)$$

Definição 3. O contorno de um padrão de empacotamento P (com um exemplo na Figura 3.10) é dado por:

$$K(P) = cl(A(P) \cap \{(p, q) \mid pq > 0\} \setminus int(A(P))) \cup (\{(p, q) \mid pq = 0, 0 \leq p \leq L, 0 \leq q \leq C\} \setminus A(P)), \quad (3.11)$$

em que $A(P)$ é a região coberta pelo padrão de empacotamento P , que é calculada como:

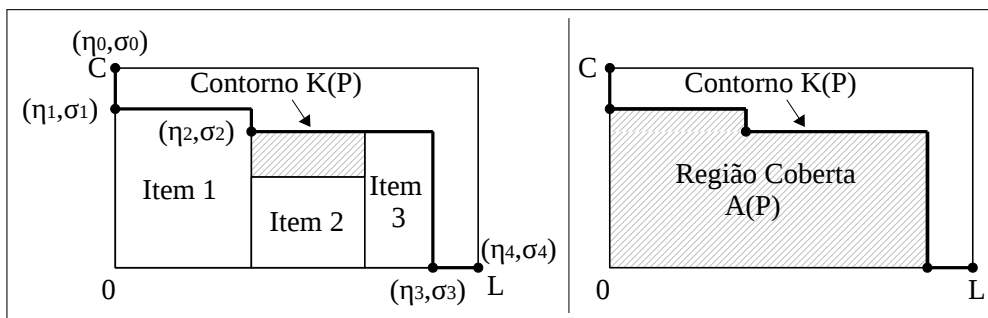
$$A(P) = \{(p, q) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \exists i \in I, \text{ com } p \leq \bar{p}_i \text{ e } q \leq \bar{q}_i\}. \quad (3.12)$$

O termo $cl(S)$ em (3.11) retorna os pontos pertencentes ao conjunto S , enquanto $int(S)$ representa os pontos no interior de S (excluem-se os pontos sobre as laterais de S). Segue

que o contorno do padrão P pode ser representado através de uma sequência de pontos de contorno $\{(\eta_i, \sigma_i) \mid i = 0, 1, \dots, d + 1\}$, tal que:

- $(\eta_0, \sigma_0) = (0, C)$ e $(\eta_{d+1}, \sigma_{d+1}) = (L, 0)$;
- $\eta_0 \leq \eta_1 < \dots < \eta_d \leq \eta_{d+1}$ e $\sigma_0 \geq \sigma_1 > \dots > \sigma_d \geq \sigma_{d+1}$;
- $(\eta_0, \sigma_0) \neq (\eta_1, \sigma_1)$ e $(\eta_d, \sigma_d) \neq (\eta_{d+1}, \sigma_{d+1})$.

Figura 3.10 – Ilustração do contorno de um padrão de empacotamento P .

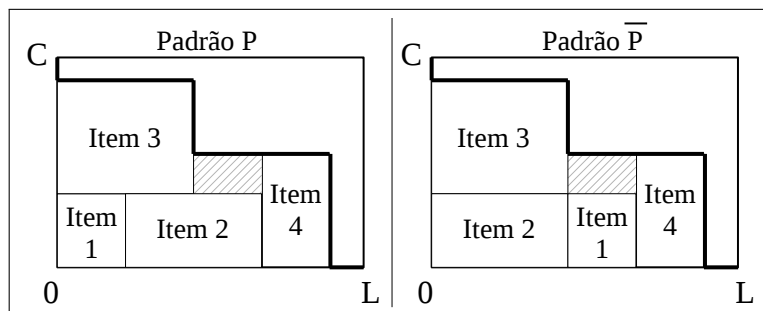


Fonte: o autor.

Definição 4. Dado um padrão de empacotamento P e um \bar{P} com os mesmos conjuntos de itens empacotados, porém com uma sequência de alocação diferente, tem-se que tais padrões são *p-equivalentes* se eles possuírem o mesmo conjunto de pontos de contorno.

Um exemplo da Definição 4 é dado na Figura 3.11, em que o padrão \bar{P} pode ter alguns de seus itens empacotados em outra sequência com relação ao padrão P , porém o contorno dos padrões é mantido.

Figura 3.11 – Exemplo de padrões *p-equivalentes*.



Fonte: o autor.

Definição 5. Dado um padrão de empacotamento P de um conjunto de itens I . Um subpadrão \bar{P} de P consiste em um subconjunto $\bar{I} \subseteq I$, chamado de *padrão de bloco* se existe um

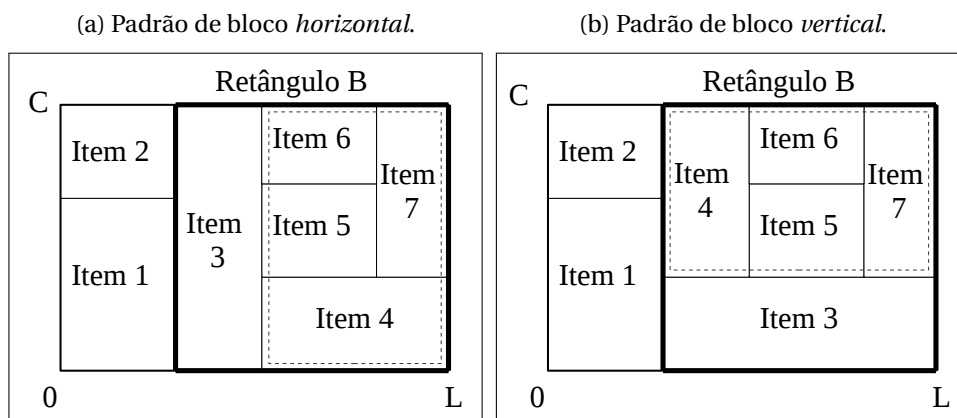
retângulo B que cobre todos os itens de \bar{I} . O menor retângulo que cobre o subpadrão \bar{P} pode ser obtido por:

$$B(\bar{P}) = \left\{ (p, q) \mid \min_{i \in \bar{I}} p_i \leq p \leq \max_{i \in \bar{I}} \bar{p}_i, \min_{i \in \bar{I}} q_i \leq q \leq \max_{i \in \bar{I}} \bar{q}_i \right\}. \quad (3.13)$$

Definição 6. Um padrão de bloco é *horizontal* se dentro dele não existir qualquer outro subpadrão, classificado também como padrão de bloco, que possua a mesma largura (ver exemplo na Figura 3.12a).

Definição 7. Um padrão de bloco é *vertical* se dentro dele não existe qualquer outro subpadrão, classificado também como padrão de bloco, que possua o mesmo comprimento (ver exemplo na Figura 3.12b).

Figura 3.12 – Exemplo de padrões de bloco.



Fonte: o autor.

Definição 8. Dados dois padrões de empacotamento \bar{P} e \hat{P} , em que cada um possui dois padrões de bloco disjuntivos, \bar{P}_1 de dimensões (\bar{e}, \bar{f}) e empacotado no ponto (\bar{p}_1, \bar{q}_1) e \bar{P}_2 de dimensões (\bar{g}, \bar{h}) e empacotado no ponto (\bar{p}_2, \bar{q}_2) de \bar{P} , e \hat{P}_1 de dimensões (\hat{e}, \hat{f}) e empacotado no ponto (\hat{p}_1, \hat{q}_1) e \hat{P}_2 de dimensões (\hat{g}, \hat{h}) e empacotado no ponto (\hat{p}_2, \hat{q}_2) de \hat{P} . O padrão \bar{P}_1 é coberto pelo retângulo \bar{B}_1 , \bar{P}_2 por \bar{B}_2 , \hat{P}_1 por \hat{B}_1 e \hat{P}_2 por \hat{B}_2 . Os padrões \bar{P} e \hat{P} são *vb-equivalentes*, se:

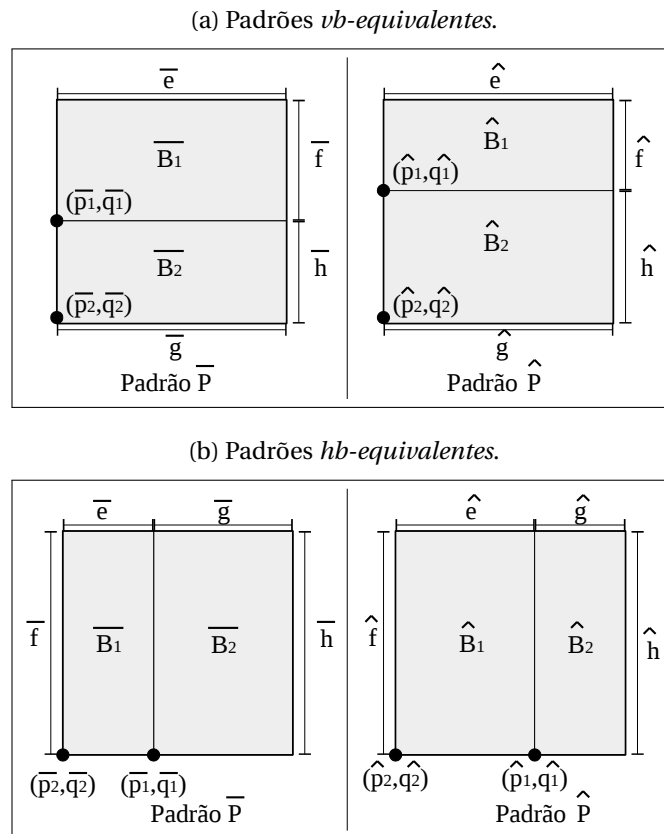
- $\bar{e} = \bar{g}, \bar{p}_1 = \bar{p}_2, \bar{q}_1 = \bar{q}_2 + \bar{h};$
- $\hat{e} = \hat{g}, \hat{p}_1 = \hat{p}_2, \hat{q}_1 = \hat{q}_2 + \hat{h};$
- $\bar{e} = \hat{e}, \bar{f} = \hat{h}, \bar{h} = \hat{f}.$

Os padrões \bar{P} e \hat{P} são *hb-equivalentes* se:

- $\bar{f} = \bar{h}$, $\bar{q}_1 = \bar{q}_2$, $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 + \bar{e}$;
- $\hat{f} = \hat{h}$, $\hat{q}_1 = \hat{q}_2$, $\hat{p}_1 = \hat{p}_2 + \hat{e}$;
- $\bar{f} = \hat{f}$, $\bar{g} = \hat{e}$, $\bar{e} = \hat{g}$.

Assim, dois padrões são *b-equivalentes* se eles forem considerados *vb-* ou *hb-equivalentes*. A Figura 3.13 ilustra os dois casos de padrões *b-equivalentes*.

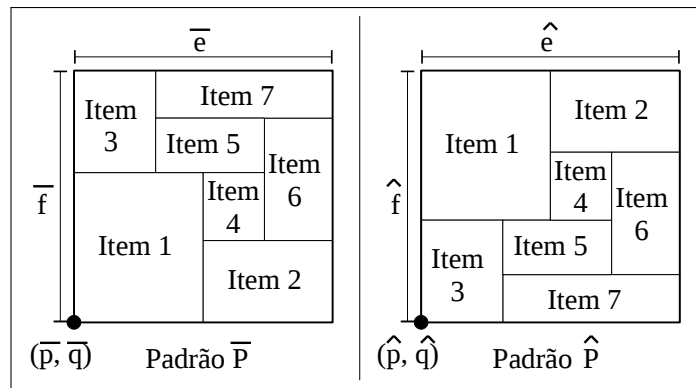
Figura 3.13 – Exemplo de padrões de bloco *b-equivalentes*.



Fonte: o autor.

Definição 9. Sejam dois padrões de bloco \bar{P} e \hat{P} , cada um possuindo mais de um item empacotado. Se os retângulos que cobrem os respectivos padrões \bar{P} e \hat{P} possuem as mesmas dimensões ($\bar{e} = \hat{e}$ e $\bar{f} = \hat{f}$) e estão empacotados no mesmo ponto $(\bar{p}, \bar{q}) = (\hat{p}, \hat{q})$, então eles são padrões *bs-equivalentes* (ver exemplo na Figura 3.14).

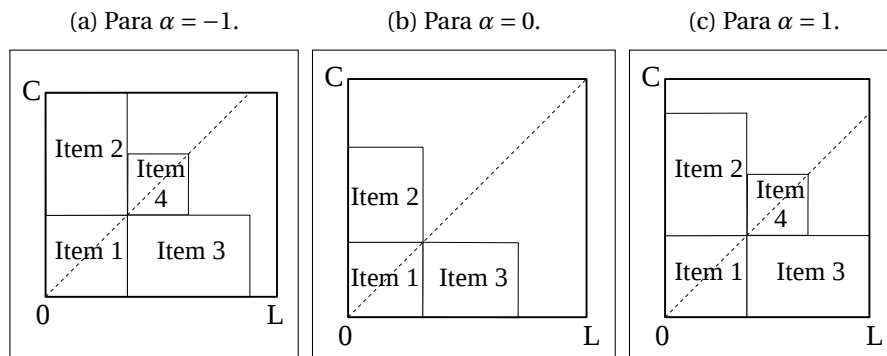
Figura 3.14 – Exemplo de padrões *bs-equivalentes*.



Fonte: o autor.

Definição 10. Se todos itens empacotados em um padrão de empacotamento P podem ser rotacionados ortogonalmente em 90° , então P é *c-simétrico*. Além disso, dado um parâmetro $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$, tal que todos os pontos (η_i, σ_i) da sequência de contorno do empacotamento obedecem $\eta_{i+\alpha} = \sigma_{d+1-i}$ e $\sigma_{i+\alpha} = \eta_{d+1-i}$, para $i = 1, \dots, d$, tem-se que os dois padrões P e \tilde{P} são *cs-equivalentes* se são *c-simétricos* e coincidem-se por reflexão (ver exemplo na Figura 3.15).

Figura 3.15 – Exemplo de padrões *c-simétricos*.



Fonte: o autor.

Definição 11. Dois padrões de empacotamento P e \tilde{P} são *s-equivalentes*, desde que eles sejam *bs-* ou *cs-equivalentes*.

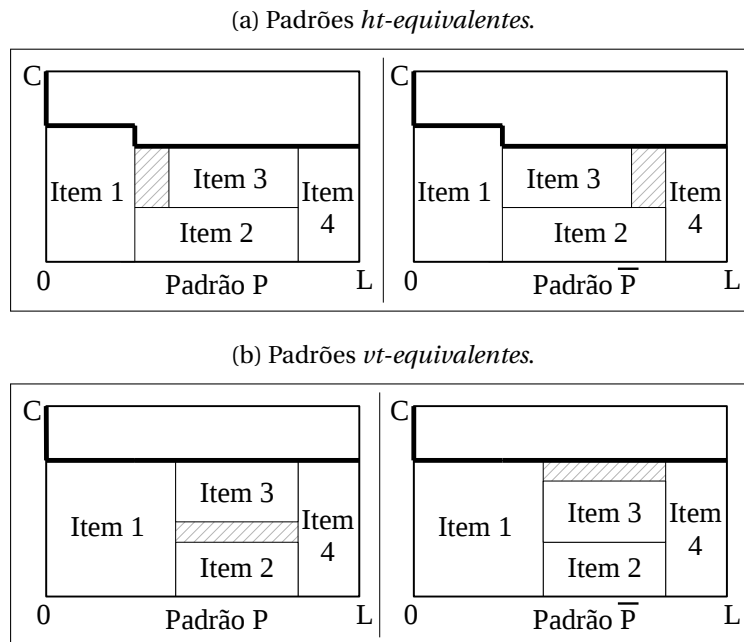
Definição 12. Dados dois padrões de empacotamento P e \tilde{P} que possuem um conjunto de m itens empacotados. O padrão P é *ht-equivalente* ao \tilde{P} se $m - 1$ itens possuem os mesmos pontos de alocação em ambos padrões e um dos itens tem sua coordenada q de alocação igual em ambos padrões, todavia, a coordenada p é diferente (ver exemplo na Figura 3.16a).

De modo análogo, os padrões P e \tilde{P} são considerados *vt-equivalentes*, se, além dos $m - 1$ itens empacotados nas mesmas posições, um dos itens for empacotado na mesma

coordenada p em ambos padrões, porém, em coordenadas q diferentes (ver exemplo na Figura 3.16b).

Se um padrão P é *ht-equivalente* ou *vt-equivalente* a um padrão \bar{P} , então eles são considerados *t-equivalentes*.

Figura 3.16 – Exemplo de padrões *t-equivalentes*.



Fonte: o autor.

Definição 13. Um padrão \bar{P} é *dominante* com relação a outro padrão P caso:

- \bar{P} *c-domina* o P , então ambos padrões possuem a mesma quantidade de itens empacotados, porém a região coberta pelo padrão \bar{P} é menor do que a do P (ver exemplo na Figura 3.17a);
- \bar{P} *p-domina* o P , então ambos padrões possuem a mesma região coberta pelo empacotamento, porém o padrão \bar{P} possui um maior número de itens empacotados do que o P (ver exemplo na Figura 3.17b).

Definição 14. Dados dois padrões de bloco disjuntivos \bar{P}_1 e \bar{P}_2 do padrão de empacotamento \bar{P} e dois padrões de bloco, também disjuntivos, \hat{P}_1 e \hat{P}_2 do padrão de empacotamento \hat{P} . Suponha que os padrões \bar{P} e \hat{P} possuam os mesmos itens empacotados.

Os retângulos que cobrem os padrões de bloco possuem as seguintes características (largura, comprimento, par ordenado de alocação). O retângulo \bar{B}_1 com $(\bar{e}, \bar{f}, \bar{p}_1, \bar{q}_1)$ para o padrão \bar{P}_1 ; retângulo \bar{B}_2 com $(\bar{g}, \bar{h}, \bar{p}_2, \bar{q}_2)$ para o padrão \bar{P}_2 ; retângulo \hat{B}_1 com $(\hat{e}, \hat{f}, \hat{p}_1, \hat{q}_1)$ para o padrão \hat{P}_1 ; e o retângulo \hat{B}_2 com $(\hat{g}, \hat{h}, \hat{p}_2, \hat{q}_2)$ para o padrão \hat{P}_2 .

O padrão \hat{P} *vb-domina* o \bar{P} se:

- $\bar{e} > \bar{g}$, $\bar{p}_1 = \bar{p}_2$, $\bar{q}_1 = \bar{q}_2 + \bar{h}$;
- $\hat{e} < \hat{g}$, $\hat{p}_1 = \hat{p}_2$, $\hat{q}_1 = \hat{q}_2 + \hat{h}$;
- $\bar{e} = \hat{g}$, $\bar{g} = \hat{e}$.

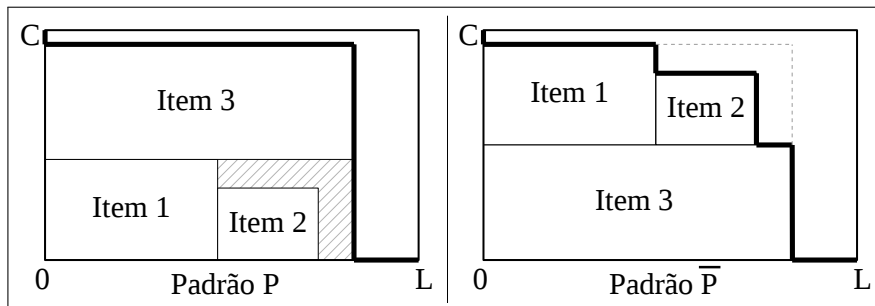
De modo análogo, o padrão \hat{P} *hb-domina* o \bar{P} se:

- $\bar{f} > \bar{h}$, $\bar{q}_1 = \bar{q}_2$, $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 + \bar{e}$;
- $\hat{f} < \hat{h}$, $\hat{q}_1 = \hat{q}_2$, $\hat{p}_1 = \hat{p}_2 + \hat{e}$;
- $\bar{f} = \hat{h}$, $\bar{h} = \hat{f}$.

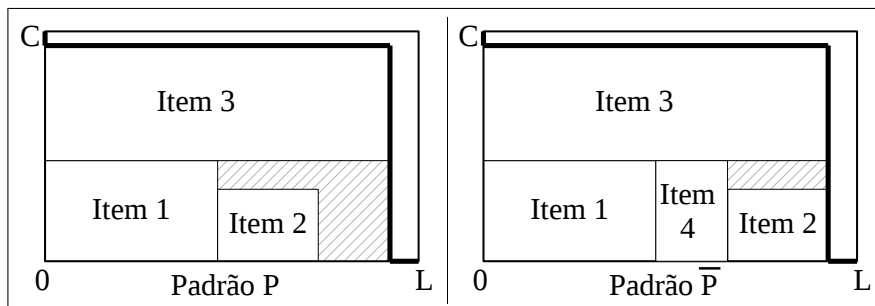
Se o padrão \hat{P} *vb-domina* ou *hb-domina* o padrão \bar{P} , então ele é considerado *b-dominante*.

Figura 3.17 – Exemplo de dominância entre padrões.

(a) Padrão \bar{P} *c-domina* P .



(b) Padrão \bar{P} *p-domina* P .

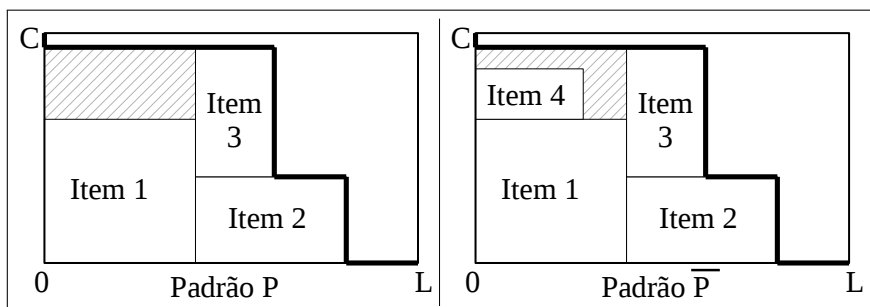


Fonte: o autor.

Definição 15. Dada uma área não utilizada em um padrão de empacotamento P capaz de alocar um item ainda não empacotado, tem-se que o padrão \bar{P} gerado *f-domina* o padrão original P (ver exemplo na Figura 3.18).

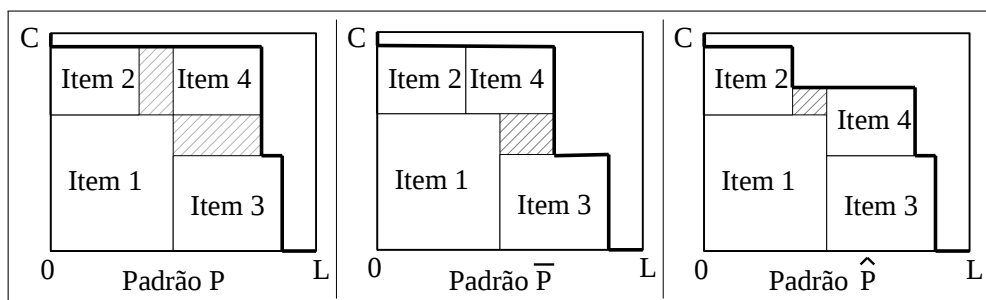
Definição 16. Seja um padrão de empacotamento P que possui uma área não utilizada, mas capaz de alocar um item já empacotado, em que se faz uma translação nele a fim de diminuir esta área. Caso a translação ocorra na horizontal, o padrão \bar{P} gerado *ht-domina* o padrão P . Por outro lado, caso a translação seja na vertical, então o padrão \hat{P} gerado *vt-domina* o padrão P . Segue que um padrão \tilde{P} *t-domina* um padrão P se ele *ht-domina* ou *vt-domina* P (ver exemplo na Figura 3.19).

Figura 3.18 – Exemplo de um padrão *f-dominante*.



Fonte: o autor.

Figura 3.19 – Exemplo de um padrão *vt-dominante* e um *ht-dominante*.



Fonte: o autor.

As relações de equivalência e dominância apresentadas acima foram utilizadas por Scheithauer (1997) para elaborar um algoritmo exato enumerativo. O autor buscou, através dessas relações, eliminar possíveis casos equivalentes e dominados durante a geração dos padrões de empacotamento para, assim, encontrar uma solução ótima mais rapidamente.

3.3 Discretização de Carnieri, Mendoza e Gavinho (1994)

Carnieri, Mendoza e Gavinho (1994) definiram a estratégia de discretização chamada de *useful numbers* e afirmaram que ela é similar a de *normal patterns*, porém com uma forma mais simples de ser descrita. Segundo os autores, a malha de *useful numbers* é calculada através de um algoritmo iterativo que gera os conjuntos de coordenadas de forma mais intuitiva quando comparado com o modo que são gerados os conjuntos de *normal patterns*.

Baseado no algoritmo definido por Carnieri, Mendoza e Gavinho (1994), os conjuntos de coordenadas *useful numbers* podem ser obtidos em (3.14) e (3.15).

$$X_u = \left\{ p' \in \mathbb{Z} \mid p' = L - p, p = \sum_{i \in I} \varepsilon_i l_i, 0 \leq p \leq L, \text{ para } 0 \leq \varepsilon_i \leq b_i, \varepsilon_i \in \mathbb{Z}, i \in I \right\}; \quad (3.14)$$

$$Y_u = \left\{ q' \in \mathbb{Z} \mid q' = C - q, q = \sum_{i \in I} \varepsilon_i c_i, 0 \leq q \leq C, \text{ para } 0 \leq \varepsilon_i \leq b_i, \varepsilon_i \in \mathbb{Z}, i \in I \right\}. \quad (3.15)$$

A partir da definição da malha de *useful numbers*, Carnieri, Mendoza e Gavinho (1994) afirmaram que ela preserva a solução ótima como ocorre na malha de *normal patterns*, embora nenhuma prova formal dessa afirmação tenha sido dada pelos autores. Com isso em mente, fornece-se neste trabalho uma prova formal dessa afirmação (ver Proposição 2). Embora o algoritmo original de Carnieri, Mendoza e Gavinho (1994) considere que os itens possuem cópias ilimitadas, propõe-se neste trabalho uma adaptação para que ele considere um limite de cópias para cada item, sendo apresentado no Algoritmo 3.3.

Algoritmo 3.3- Conjuntos de *useful numbers*.

Entrada: Conjunto I de n itens com as dimensões (l_i, c_i) e número máximo b_i de cópias para $i \in I$ e as dimensões (L, C) do recipiente.

Saída: Conjunto de coordenadas *useful numbers* ao longo da largura e do comprimento, respectivamente, X_u e Y_u .

```

1  $\beta_x \leftarrow 0; \beta_y \leftarrow 0; X_u^{(n+1)} \leftarrow F_x^{(n+1)} \leftarrow \{L\}; Y_u^{(n+1)} \leftarrow F_y^{(n+1)} \leftarrow \{C\}.$ 
2 para  $k \leftarrow n$  até 1 faça
3   para cada  $x_u \in X_u^{(k+1)}$  faça
4     para  $j \leftarrow 1$  até  $b_k$  faça
5       se  $x_u - j l_k \geq \beta_x$  então
6          $F_x^{(k)} \leftarrow \{x_u - j l_k\}.$ 
7      $X_u^{(k)} \leftarrow F_x^{(k)} \cup X_u^{(k+1)}.$ 
8   para cada  $y_u \in Y_u^{(k+1)}$  faça
9     para  $j \leftarrow 1$  até  $b_k$  faça
10      se  $y_u - j c_k \geq \beta_y$  então
11         $F_y^{(k)} \leftarrow \{y_u - j c_k\}.$ 
12      $Y_u^{(k)} \leftarrow F_y^{(k)} \cup Y_u^{(k+1)}.$ 
13 retorna  $X_u$  e  $Y_u.$ 

```

Observação 1. O Algoritmo 3.3 gera os conjuntos de coordenadas da malha de *useful numbers* considerando a discretização indo do fim do recipiente em direção ao início, isto é, de L e C para 0. Como visto anteriormente, a malha de *normal patterns* é discretizada do início

do recipiente em direção ao fim, isto é, de 0 até L e C . Deste modo, as malhas de *normal patterns* e *useful numbers* podem não possuir as mesmas coordenadas em seus conjuntos, porém os conjuntos possuem as mesmas quantidades de coordenadas. Nota-se que é possível obter os conjuntos *normal patterns* através de uma adaptação do Algoritmo 3.3, como fez Schenekemberg *et al.* (2016), em que as linhas 1, 5, 6, 10 e 11 são substituídas por (3.16) a (3.20), respectivamente.

$$\beta_x \leftarrow 0; \beta_y \leftarrow 0; X_u^{(k+1)} \leftarrow F_x^{(k+1)} \leftarrow \{0\}; Y_u^{(k+1)} \leftarrow F_y^{(k+1)} \leftarrow \{0\}. \quad (3.16)$$

$$L - x_u - j l_k \geq \beta_x. \quad (3.17)$$

$$F_x^{(k)} \leftarrow \{x_u + j l_k\}. \quad (3.18)$$

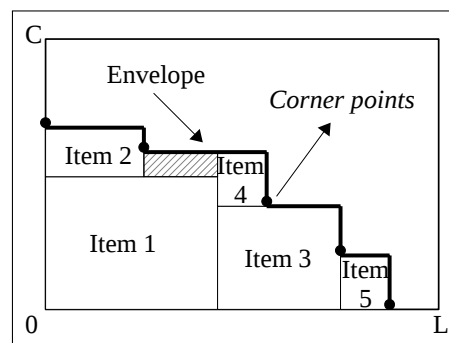
$$C - y_u - j c_k \geq \beta_y. \quad (3.19)$$

$$F_y^{(k)} \leftarrow \{y_u + j c_k\}. \quad (3.20)$$

3.4 Discretização de Martello, Pisinger e Vigo (2000)

A malha de *corner points*, desenvolvida por Martello, Pisinger e Vigo (2000), é composta pelos pontos de canto gerados no decorrer do empacotamento dos itens. Os pontos de canto são obtidos observando o envelope, que é uma parte do contorno do empacotamento. Como ilustrado na Figura 3.20, os *corner points*, representados pelos pontos pretos, são os pontos extremos dos segmentos na direção vertical que interceptam com os segmentos na direção horizontal. Vale destacar que esses segmentos são parte de retas adjacentes aos lados dos itens empacotados ou aos lados do recipiente. Além disso, tem-se que os pontos de canto surgem dos pontos de contorno definido por Scheithauer (1997).

Figura 3.20 – Ilustração do envelope de um empacotamento e dos *corner points*.



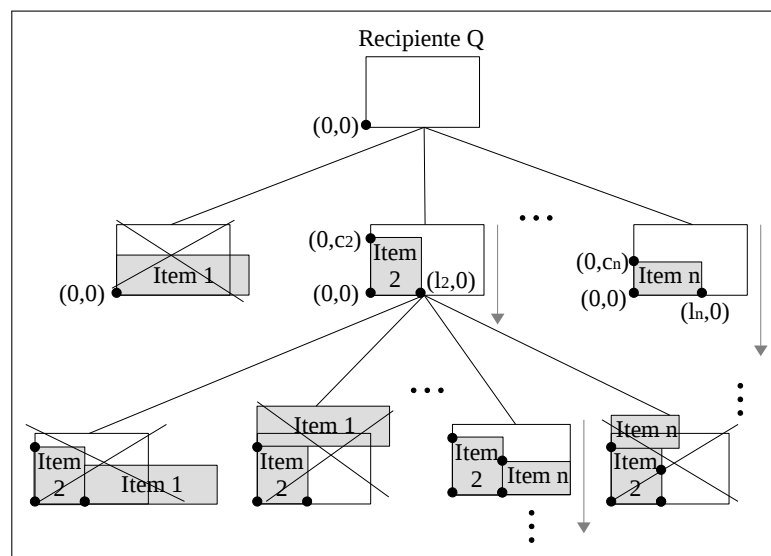
Fonte: o autor.

Para calcular os *corner points*, Martello, Pisinger e Vigo (2000) propuseram um algoritmo que, em conjunto com um método enumerativo de empacotamento, gera os pontos de canto após o empacotamento de um item de I . O processo enumerativo consiste em ramificar todas as possíveis maneiras de empacotar os itens dentro do recipiente (ver um exemplo na Figura 3.21). Inicialmente, a lista de pontos de canto possui apenas o ponto

$(0,0)$ e é gerado um ramo para cada item pertencente a I , sendo associado ao primeiro e único ponto de canto existente, $(0,0)$.

Ao gerar cada ramo, o método enumerativo checa se o item ultrapassa as dimensões do recipiente. Se sim, o item não pode ser empacotado nesse ponto e o ramo desse item é podado, de forma que se realiza um *backtracking* para analisar outro ramo. Caso contrário, o item é empacotado, gerando novos pontos de canto. A lista de pontos de canto é atualizada e os itens a serem empacotados são analisados considerando o empacotamento feito sobre cada ponto de canto existente. Esses passos são repetidos até que se tenham testados todos os diferentes modos possíveis de empacotamento dos itens de I em todos os pontos de canto existentes. No final do método enumerativo, o conjunto com todos os pontos de canto formam a malha de *corner points*.

Figura 3.21 – Ilustração do método enumerativo para obter a malha de *corner points*.



Fonte: o autor.

O Algoritmo 3.4, desenvolvido por Martello, Pisinger e Vigo (2000), obtém os pontos de canto para um dado empacotamento J usando três fases, a saber:

- Fase 1:** os itens do conjunto J são analisados para identificar os que são extremos, isto é, determinam-se os itens que possuem alguns de seus lados sobre o envelope do empacotamento;
- Fase 2:** o empacotamento é analisado de modo a determinar os pontos de canto;
- Fase 3:** os pontos de canto presentes no conjunto $CP(J)$ são analisados de modo a eliminar pontos que ultrapassam as coordenadas limites, calculadas com base nos itens que ainda não foram empacotados e presentes no conjunto $I \setminus J$.

Observação 2. O método enumerativo requer a ordenação dos itens do conjunto J de forma decrescente pelo valor \bar{q}_j , que é o canto inferior direito do item j , isto é, $\bar{q}_j = q_j + c_j$. Caso ocorra empate, o desempate ocorre observando o item que possui maior canto superior esquerdo \bar{p}_j , isto é, $\bar{p}_j = p_j + l_j$.

Algoritmo 3.4- Conjunto de *corner points* para um dado empacotamento.

Entrada: Conjunto I de n itens da instância, conjunto J representando os m itens já empacotados e dimensões (L, C) do recipiente.

Saída: Conjunto $CP(J)$ de *corner points*.

```

1 se  $J = \emptyset$  então
2    $CP(J) \leftarrow \{(0, 0)\}$  e PARE.
3  $x \leftarrow \tau \leftarrow 0$ .
4 para  $j \leftarrow 1$  até  $m$  faça
5   se  $(p_j + l_j > x)$  então
6      $\tau \leftarrow \tau + 1$ ;  $e_\tau \leftarrow j$ ;  $x \leftarrow p_j + l_j$ .
7  $CP(J) \leftarrow \{(0, q_{e_1} + c_{e_1})\}$ .
8 para  $j \leftarrow 2$  até  $\tau$  faça
9    $CP(J) \leftarrow CP(J) \cup \{(p_{e_{j-1}} + l_{e_{j-1}}, q_{e_j} + c_{e_j})\}$ .
10  $CP(J) \leftarrow CP(J) \cup \{(p_{e_\tau} + l_{e_\tau}, 0)\}$ .
11 para cada  $(p_j, q_j) \in CP(J)$  faça
12   se  $p_j + \min_{i \in I \setminus J} \{l_i\} > L$  OU  $q_j + \min_{i \in I \setminus J} \{c_i\} > C$  então
13      $CP(J) \leftarrow CP(J) \setminus \{(p_j, q_j)\}$ .
14 retorna  $CP(J)$ .
```

3.5 Discretização de Boschetti, Mingozzi e Hadjiconstantinou (2002)

Baseado no princípio da malha de *normal patterns*, Boschetti, Mingozzi e Hadjiconstantinou (2002) introduziram a malha de *regular normal patterns* que calcula as coordenadas *normal patterns* para cada item individualmente. Baseando-se em Christofides e Whittlock (1977), nas funções $g_i(x)$ e $g_i(y)$, Boschetti, Mingozzi e Hadjiconstantinou (2002) definiram os conjuntos de *regular normal patterns* para cada item $i \in I$ conforme (3.21) e (3.22). Após obter os conjuntos para cada item, obtém-se a malha de *regular normal patterns* fazendo a união entre os correspondentes conjuntos, isto é, $X_b = \cup_{i \in I} X_{b:i}$ e $Y_b = \cup_{i \in I} Y_{b:i}$.

$$X_{b:i} = \left\{ p \in \mathbb{Z} \mid p = \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \varepsilon_j l_j, 0 \leq p \leq L - l_i, \text{ com } 0 \leq \varepsilon_j \leq b_j, \varepsilon_j \in \mathbb{Z}, j \in I \setminus \{i\} \right\}; \quad (3.21)$$

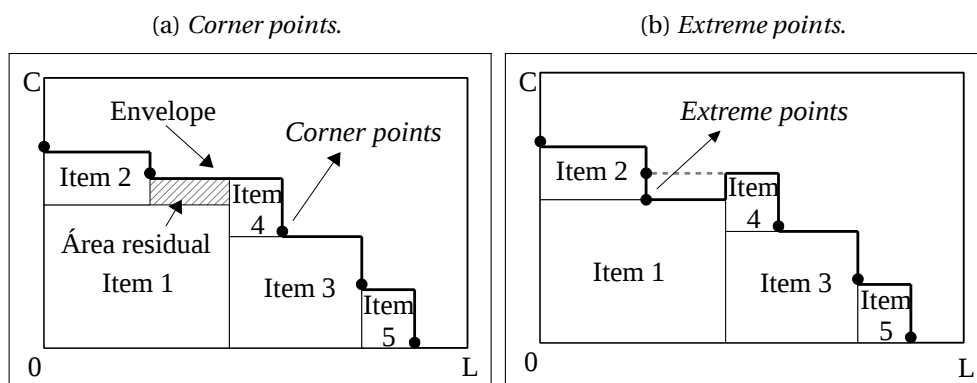
$$Y_{b:i} = \left\{ q \in \mathbb{Z} \mid q = \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \varepsilon_j c_j, 0 \leq q \leq C - c_i, \text{ com } 0 \leq \varepsilon_j \leq b_j, \varepsilon_j \in \mathbb{Z}, j \in I \setminus \{i\} \right\}. \quad (3.22)$$

Um algoritmo para calcular a malha de *regular normal patterns* consiste em aplicar o Algoritmo 3.1 sobre cada conjunto $I \setminus \{i\}$ e recipiente $L - l_i$ e $C - c_i$, a fim de obter os respectivos conjuntos $X_{b:i}$ e $Y_{b:i}$. Em seguida, obtêm-se os conjuntos de coordenadas X_b e Y_b fazendo a união dos correspondentes $X_{b:i}$ e dos $Y_{b:i}$, para todo $i \in I$.

3.6 Discretização de Crainic, Perboli e Tadei (2008)

Crainic, Perboli e Tadei (2008) introduziram uma discretização chamada de *extreme points*, que estende o conceito de pontos de canto de Martello, Pisinger e Vigo (2000). Basicamente, busca-se gerar novos pontos extremos, além dos pontos de canto. Os pontos extremos são obtidos como segue: $(p_i + c_i, q_i)$ ao longo da largura e $(p_i, q_i + l_i)$ ao longo do comprimento, dado o item i já empacotado. Os autores propuseram um algoritmo para calcular os pontos extremos na versão tridimensional, que pode ser facilmente modificado para a versão bidimensional.

Figura 3.22 – Ilustração da diferença entre as malhas de *corner points* e *extreme points*.



Fonte: o autor.

A diferença entre as malhas de *extreme points* e *corner points* está no conjunto $EP(J)$, que para o *extreme points* passa a considerar os pontos em áreas consideradas não utilizáveis da malha de *corner points*. Com isso, a malha de *extreme points* pode gerar mais pontos do que a malha de *corner points* em uma dada iteração, ou seja, um dado empacotamento de itens, embora ambas as malhas acabem fornecendo os mesmos pontos ao final do empacotamento.

Um algoritmo para calcular a malha de *extreme points* consiste numa adaptação do Algoritmo 3.4, que calcula a malha de *corner points*, considerando o conjunto de pontos $EP(J)$ no lugar de $CP(J)$, além de fazer a seguinte modificação na linha 7:

$$EP(J) \leftarrow EP(J) \cup \{(0, q_{e_1} + c_{e_1})\}. \quad (3.23)$$

3.7 Discretização de Côté e Iori (2016)

A malha de *meet-in-the-middle patterns* (*MIM*) foi proposta recentemente por Côté e Iori (2016) e considera conjuntos de coordenadas calculados, conforme um dado parâmetro inteiro t_x e t_y , para cada item $i \in I$. A ideia dessa malha é empacotar os itens antes ou após e acima ou abaixo os parâmetros t_x e t_y , respectivamente, seguindo uma combinação de *normal patterns* com *useful numbers*.

A malha de *MIM*, calculada individualmente para cada $i \in I$, de acordo com parâmetros $t_x \in \{1, 2, \dots, L\}$ e $t_y \in \{1, 2, \dots, C\}$ referentes, respectivamente, a largura e ao comprimento do recipiente, consiste nas combinações cônicas obtidas sobre o conjunto de itens $I \setminus \{i\}$. O conjunto de coordenadas $X_{m:i,t_x}$, ao longo da largura, para um item i e um t_x é dado pela união de dois outros conjuntos de coordenadas, Ex_{i,t_x} e Dx_{i,t_x} . O conjunto Ex_{i,t_x} possui as coordenadas para os itens empacotados do lado esquerdo do recipiente conforme em (3.24), enquanto Dx_{i,t_x} contém as coordenadas para os itens sendo empacotados do lado direito do recipiente conforme em (3.25).

$$\begin{aligned} Ex_{i,t_x} = \{p \in \mathbb{Z} \mid p = \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \varepsilon_j l_j, 0 \leq p \leq \min\{t_x - 1, L - l_i\}, \\ 0 \leq \varepsilon_j \leq b_j, \varepsilon_j \in \mathbb{Z}, j \in I \setminus \{i\}\}; \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} Dx_{i,t_x} = \{p' \in \mathbb{Z} \mid p' = L - l_i - p, p = \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \varepsilon_j l_j, 0 \leq p \leq L - l_i - t_x, \\ 0 \leq \varepsilon_j \leq b_j, \varepsilon_j \in \mathbb{Z}, j \in I \setminus \{i\}\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

O conjunto de coordenadas ao longo da largura, para todo item i e um parâmetro t_x , é dado pela união dos correspondentes conjuntos $X_{m:i,t_x}$, isto é, $X_{m:t_x} = \cup_{i \in I} X_{m:i,t_x}$. O conjunto $X_{m:i,t_x}$ é calculado para todo $t_x \in \{1, 2, \dots, L\}$. Por fim, o conjunto de coordenadas *MIM* de mínima cardinalidade, X_m , referente a largura é dado em (3.26).

$$X_m = \left\{ X_{m:t_x} \mid t_x = \operatorname{argmin}_{s \in \{1, 2, \dots, L\}} \{|X_{m:s}|\} \right\}. \quad (3.26)$$

Observação 3. A função *argmin* em (3.26) seleciona o argumento s que faz com que a cardinalidade (quantidade de elementos) do conjunto $X_{m:s}$ seja mínima entre os conjuntos gerados, para $s \in \{1, 2, \dots, L\}$.

De forma similar, tem-se a definição do conjunto de coordenadas *MIM* de mínima cardinalidade, Y_m , sobre a direção do comprimento, em (3.31).

$$E y_{i,t_y} = \{q \in \mathbb{Z} \mid q = \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \varepsilon_j c_j, 0 \leq q \leq \min\{t_y - 1, C - c_i\},$$

$$0 \leq \varepsilon_j \leq b_j, \varepsilon_j \in \mathbb{Z}, j \in I \setminus \{i\}\}; \quad (3.27)$$

$$D y_{i,t_y} = \{q' \in \mathbb{Z} \mid q' = C - c_i - q, q = \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \varepsilon_j c_j, 0 \leq q \leq C - c_i - t_y,$$

$$0 \leq \varepsilon_j \leq b_j, \varepsilon_j \in \mathbb{Z}, j \in I \setminus \{i\}\}. \quad (3.28)$$

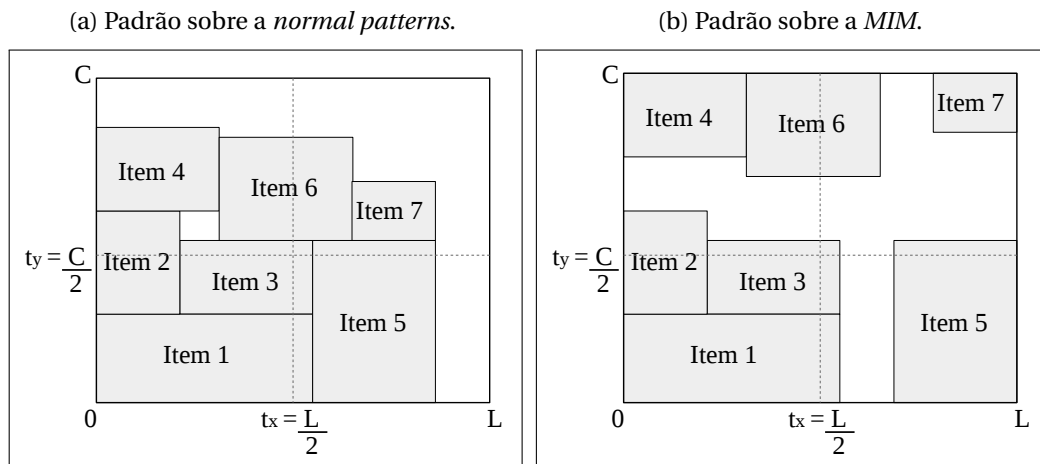
$$Y_{m:i,t_y} = E y_{i,t_y} \cup D y_{i,t_y}; \quad (3.29)$$

$$Y_{m:t_y} = \cup_{i \in I} Y_{m:i,t_y}; \quad (3.30)$$

$$Y_m = \left\{ Y_{m:t_y} \mid t_y = \operatorname{argmin}_{s \in \{1,2,\dots,C\}} \{|Y_{m:s}|\} \right\}. \quad (3.31)$$

Considerando o empacotamento sobre a direção da largura, um item tem sua coordenada p do lado esquerdo quando $p \leq t_x - 1$. Caso $p \geq t_x$, o empacotamento do item é realizado sobre o lado direito do recipiente. Da mesma forma, observando a direção do comprimento, o empacotamento de um item é realizado com a sua coordenada q na parte de baixo do recipiente quando $q \leq t_y - 1$. Caso $q \geq t_y$, o empacotamento do item é realizado na parte de cima do recipiente. A Figura 3.23 exemplifica o empacotamento de um item para os parâmetros $t_x = \frac{L}{2}$ e $t_y = \frac{C}{2}$.

Figura 3.23 – Ilustração de empacotamento sobre a malha de *MIM*.



Fonte: o autor.

Em [Côté e Iori \(2016\)](#) é apresentada uma prova, dada na [Proposição 1](#), de que o uso da malha de *MIM* não perde a solução ótima para problemas de corte e empacotamento de itens com formato retangular.

Proposição 1. O uso da malha de *MIM* na resolução de problemas de corte e empacotamento de itens com formato retangular preserva uma solução ótima.

Demonstração. A demonstração usa o mesmo princípio de indução de [Herz \(1972\)](#) sobre a prova da malha de *canonical dissections*.

Seja um padrão de empacotamento do conjunto J de m itens, tal que $J \subseteq I$. Assim, caso existam itens $j \in J$ que não estão empacotados sobre a malha de *MIM*, basta transladá-los o tanto quanto possível para um dos lados do recipiente, conforme definem os parâmetros t_x e t_y , até que encostem nos lados de outros itens já empacotados ou nos lados do recipiente. Cada um desses itens empacotados em pontos (p, q) são transladados da seguinte forma:

- se $p \leq t_x - 1$, o item é transladado para a esquerda até encostar no lado direito de algum outro item ou no lado esquerdo do recipiente;
- se $p \geq t_x$, o item é transladado para a direita até encostar no lado esquerdo de algum outro item ou no lado direito do recipiente;
- se $q \leq t_y - 1$, o item é transladado para baixo até encostar no lado superior de algum outro item ou no lado inferior do recipiente;
- se $q \geq t_y$, o item é transladado para cima até encostar no lado inferior de algum outro item ou no lado superior do recipiente.

Realiza-se a translação de itens até que todos sejam empacotados em pontos pertencentes a malha de *MIM*. A prova segue por indução e, assim, permite que o padrão de empacotamento ótimo seja feito sobre a malha de *MIM*.

□

Além disso, [Côté e Iori \(2016\)](#) apresentaram o [Algoritmo 3.5](#) para computar o conjunto de coordenadas da malha de *MIM* ao longo da largura. A obtenção do conjunto ao longo do comprimento é feita também pelo [Algoritmo 3.5](#) substituindo L por C , l_i por c_i , $X_{m:i}$ por $Y_{m:i}$ e X_m por Y_m .

Algoritmo 3.5- Conjunto de coordenadas *MIM* ao longo da direção da largura.

Entrada: Conjunto I de n itens da instância, largura L do recipiente e l_i dos itens, tal que $i \in I$.

Saída: Conjunto X_m da malha de *MIM* ao longo da direção da largura.

```

1   $T_E[0 \dots L] \leftarrow 0$ ;  $T_D[0 \dots L] \leftarrow 0$ .
2  para cada  $i \in I$  faça
3       $F_i \leftarrow X_{b:i}$ .
4      para cada  $p \in F_i$  faça
5           $T_E[p] \leftarrow 1$ .
6           $T_D[L - l_i - p] \leftarrow 1$ .
7  para  $p \leftarrow 1$  até  $L$  faça
8       $T_E[p] \leftarrow T_E[p] + T_E[p - 1]$ .
9       $T_D[L - p] \leftarrow T_D[L - p] + T_D[L - (p - 1)]$ .
10  $t_{min} \leftarrow 1$ ;  $min \leftarrow T_E[0] + T_D[1]$ .
11 para  $p \leftarrow 2$  até  $L$  faça
12     se  $T_E[p - 1] + T_D[p] < min$  então
13          $min \leftarrow T_E[p - 1] + T_D[p]$ .
14          $t_{min} \leftarrow p$ .
15  $X_m \leftarrow \emptyset$ .
16 para cada  $i \in I$  faça
17      $X_{m:i} \leftarrow \emptyset$ .
18     para cada  $p \in F_i$  faça
19         se  $p < t_{min}$  então
20              $X_{m:i} \leftarrow X_{m:i} \cup \{p\}$ .
21         se  $L - l_i - p \geq t_{min}$  então
22              $X_{m:i} \leftarrow X_{m:i} \cup \{L - l_i - p\}$ .
23      $X_m \leftarrow X_m \cup X_{m:i}$ .
24 retorna  $X_m$ .

```

3.8 Exemplo das Malhas sobre uma Instância

Nesta seção é apresentado o tamanho das malhas para a instância no Exemplo 3 de um problema de corte e empacotamento bidimensional. O objetivo é ilustrar a malha gerada a partir de cada estratégia de discretização discutida neste capítulo.

Exemplo 3. Seja uma instância de um problema de corte e empacotamento bidimensional com um único recipiente de dimensões (15, 12) e quatro itens: item 1 de dimensões (8, 7), item 2 de dimensões (5, 7), item 3 de dimensões (4, 5) e item 4 de dimensões (8, 3). Cada item

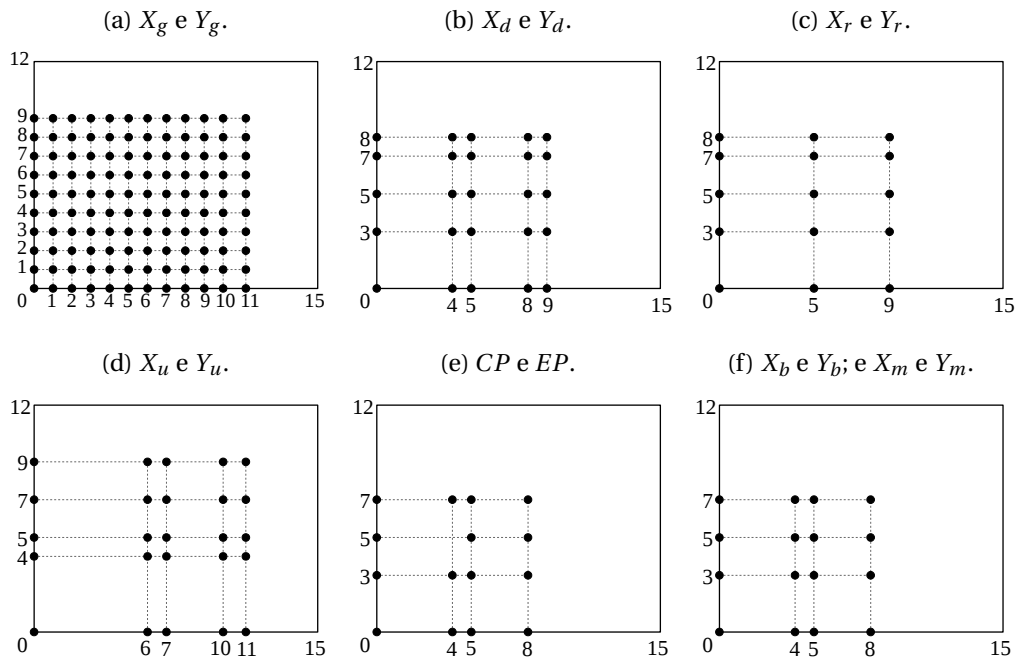
possui valor igual a sua área e pode ter no máximo uma cópia empacotada. Os seguintes conjuntos de malhas, com as coordenadas posteriores a $L - \min_{1 \leq i \leq n} (l_i)$ e a $C - \min_{1 \leq i \leq n} (c_i)$ excluídas, são obtidos para o Exemplo 3:

- malha unitária: $X_g = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ e $Y_g = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, com 120 pontos;
- *normal patterns*: $X_d = \{0, 4, 5, 8, 9\}$ e $Y_d = \{0, 3, 5, 7, 8\}$, com 25 pontos;
- *raster points*: $X_r = \{0, 5, 9\}$ e $Y_r = \{0, 3, 5, 7, 8\}$, com 15 pontos;
- *useful numbers*: $X_u = \{0, 6, 7, 10, 11\}$ e $Y_u = \{0, 4, 5, 7, 9\}$, com 25 pontos;
- *corner points*: $CP = \{(0, 0); (0, 3); (0, 5); (0, 7); (4, 0); (4, 3); (4, 7); (5, 0); (5, 3); (5, 5); (5, 7); (8, 0); (8, 3); (8, 5); (8, 7)\}$, com 15 pontos;
- *regular normal patterns*: $X_b = \{0, 4, 5, 8\}$ e $Y_b = \{0, 3, 5, 7\}$, com 16 pontos;
- *extreme points*: $EP = \{(0, 0); (0, 3); (0, 5); (0, 7); (4, 0); (4, 3); (4, 7); (5, 0); (5, 3); (5, 5); (5, 7); (8, 0); (8, 3); (8, 5); (8, 7)\}$, com 15 pontos;
- *meet-in-the-middle patterns*: $X_m = \{0, 4, 5, 8\}$ e $Y_m = \{0, 3, 5, 7\}$, com 16 pontos.

Ao comparar as malhas para o Exemplo 3, observa-se que a malha unitária foi reduzida cerca de 79,18% comparada as malhas de *normal patterns* e *useful numbers*, e em cerca de 87% para as demais malhas. Já a malha de *normal patterns* foi reduzida cerca de 36% ao considerar a malha de *MIM* e em 40% para a malha de *raster points*. Deste modo, a malha de *raster points* é a menor, seguida da *corner points*, *extreme points* e da *MIM*. Apesar da *corner points* e *extreme points* estarem entre as com menor quantidade de pontos, os algoritmos apresentados não permitem obter os conjuntos de coordenadas *a priori*. Deste modo, neste estudo, a *corner points* e *extreme points* não serão consideradas durante a análise entre as malhas e na resolução do problema da mochila 0-1 bidimensional.

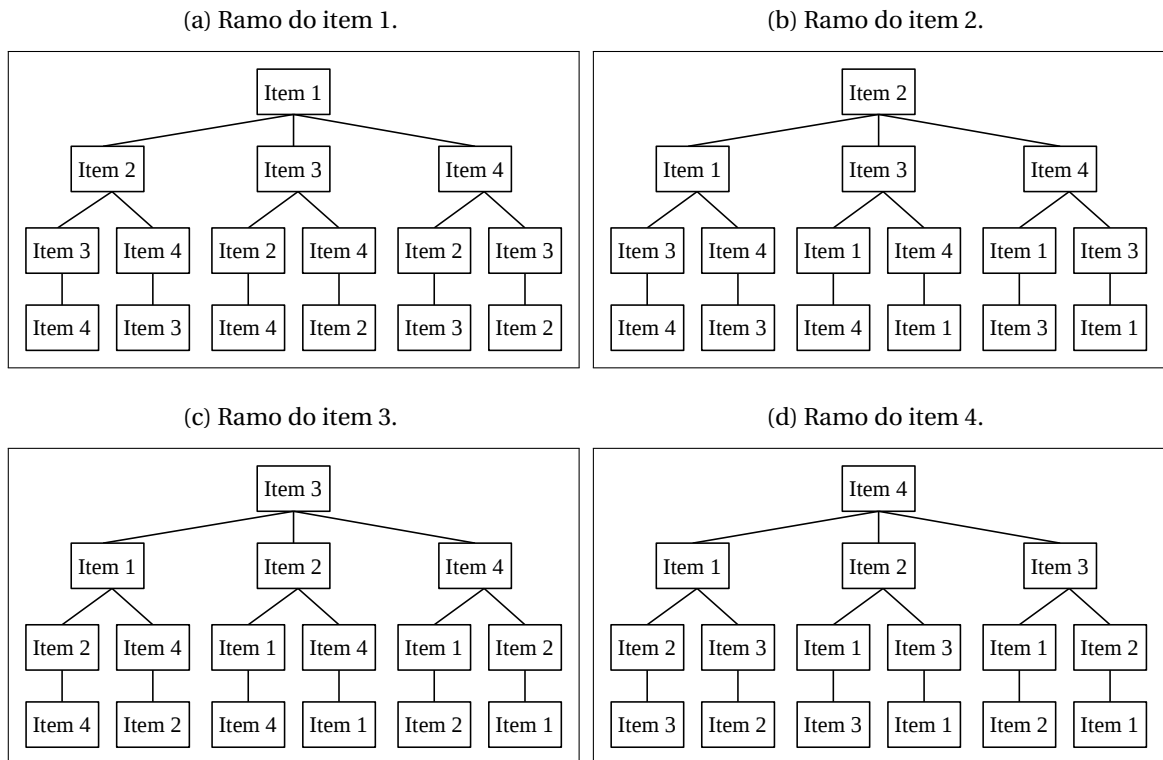
A Figura 3.24 ilustra as malhas obtidas para a instância do Exemplo 3: a Figura 3.24a traz a malha unitária; a 3.24b traz a *normal patterns*; a 3.24c traz a *raster points*; a 3.24d traz a *useful numbers*; a 3.24e traz a *corner points* e *extreme points*; e, a 3.24f traz a *regular normal patterns* e *MIM*. A Figura 3.25 apresenta os quatro ramos da árvore com as possibilidades de empacotamento dos itens do Exemplo 3. Assim, as Figuras 3.26 a 3.29 mostram a obtenção da malha de *corner points*. De forma similar, tem-se as Figuras 3.30 a 3.33 para a obtenção da *extreme points*. Os empacotamentos com soluções inviáveis não são apresentados.

Figura 3.24 – Ilustração das malhas para o Exemplo 3.



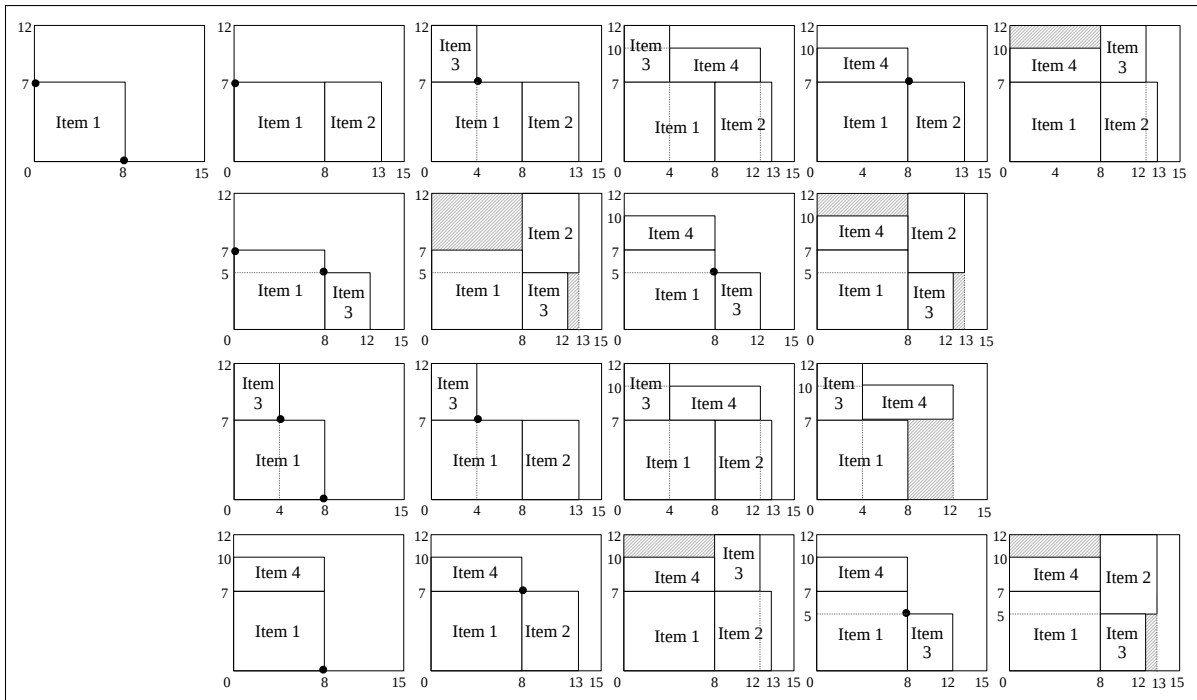
Fonte: o autor.

Figura 3.25 – Sequência de empacotamentos para os itens do Exemplo 3.



Fonte: o autor.

Figura 3.26 – Pontos resultantes do ramo do item 1 na malha de *corner points*.



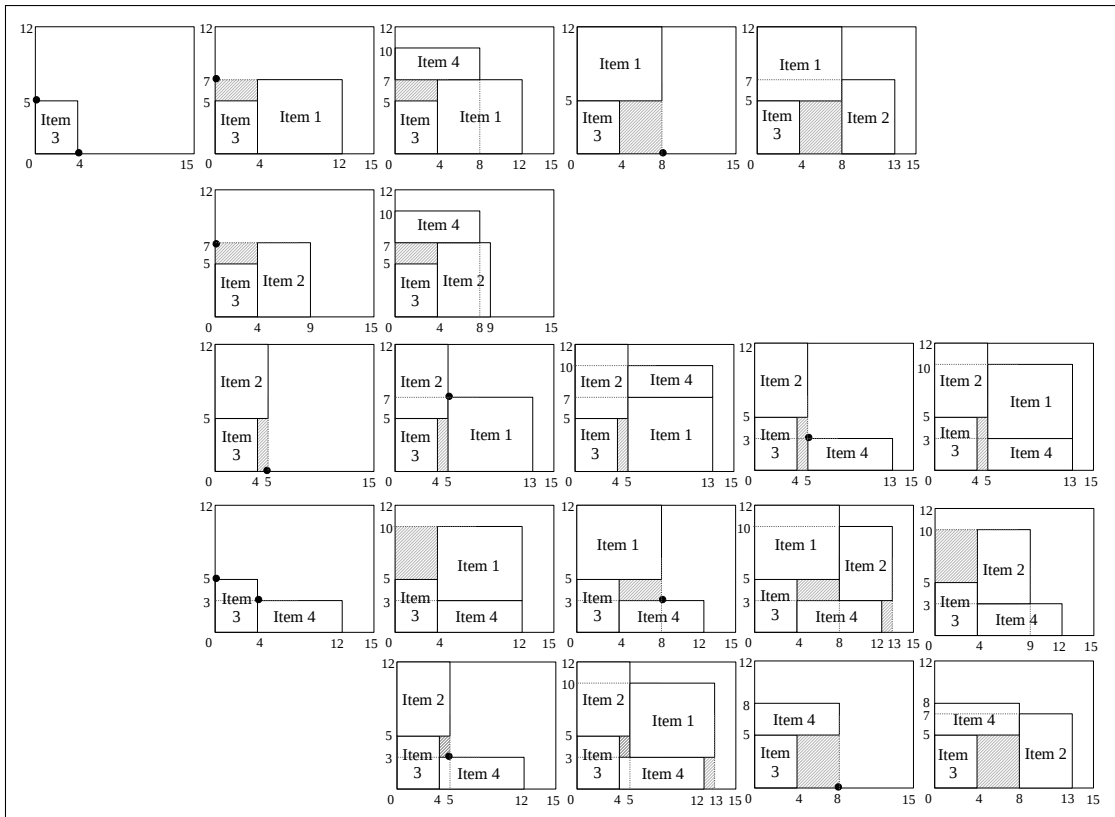
Fonte: o autor.

Figura 3.27 – Pontos resultantes do ramo do item 2 na malha de *corner points*.



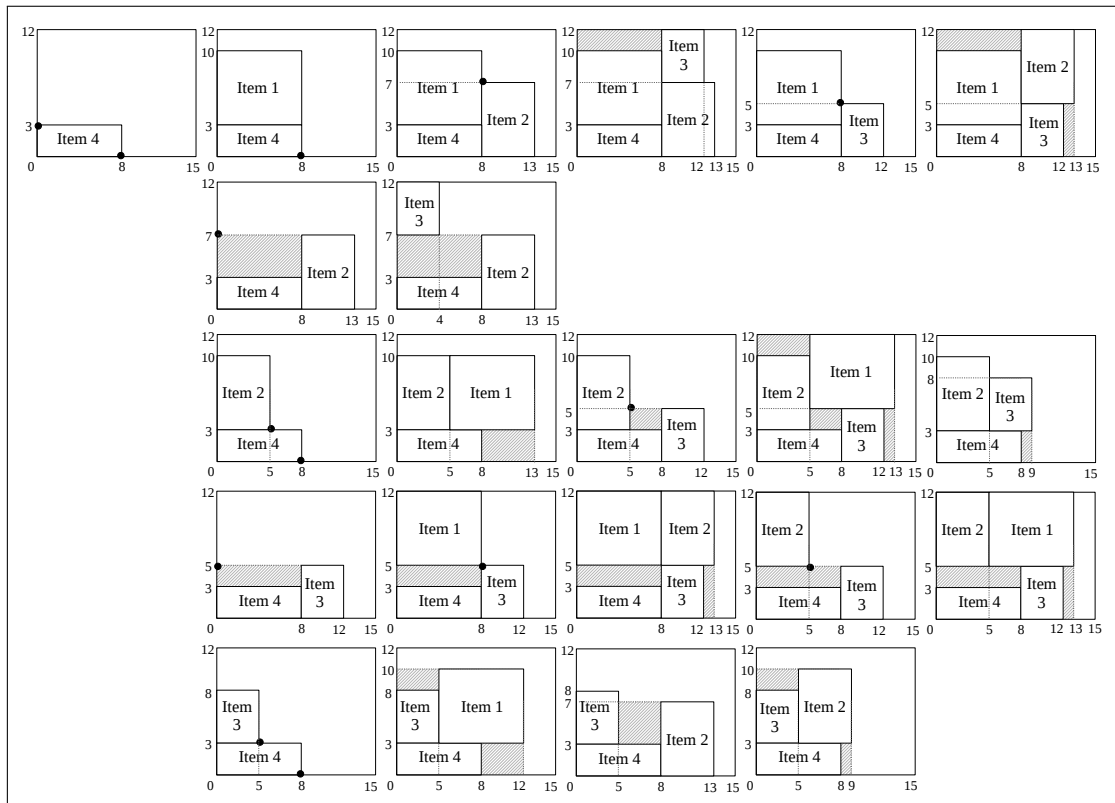
Fonte: o autor.

Figura 3.28 – Pontos resultantes do ramo do item 3 na malha de *corner points*.



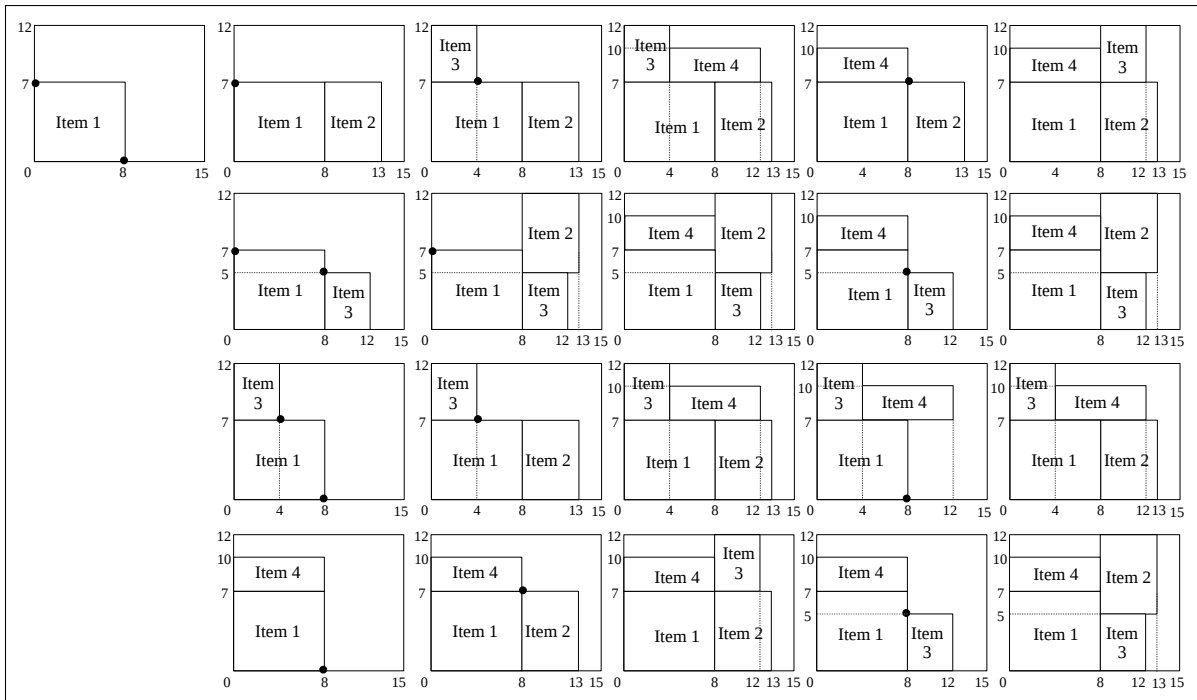
Fonte: o autor.

Figura 3.29 – Pontos resultantes do ramo do item 4 na malha de *corner points*.



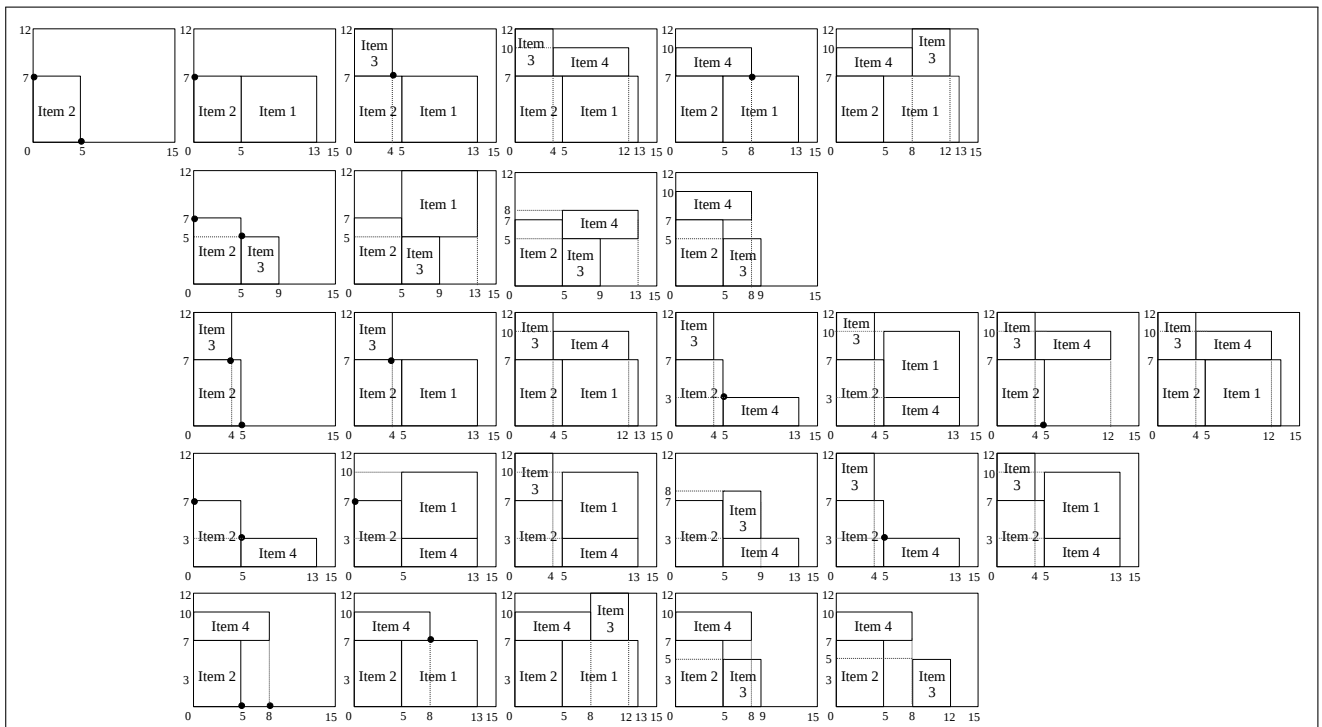
Fonte: o autor.

Figura 3.30 – Pontos resultantes do ramo do item 1 na malha de *extreme points*.



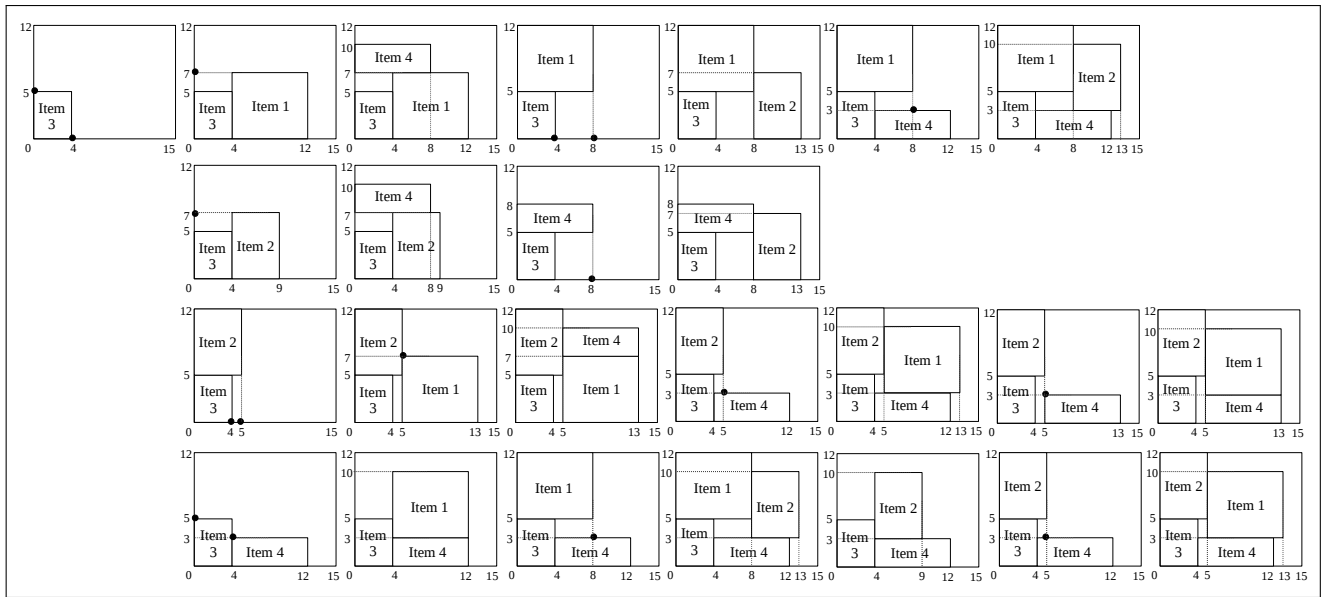
Fonte: o autor.

Figura 3.31 – Pontos resultantes do ramo do item 2 na malha de *extreme points*.



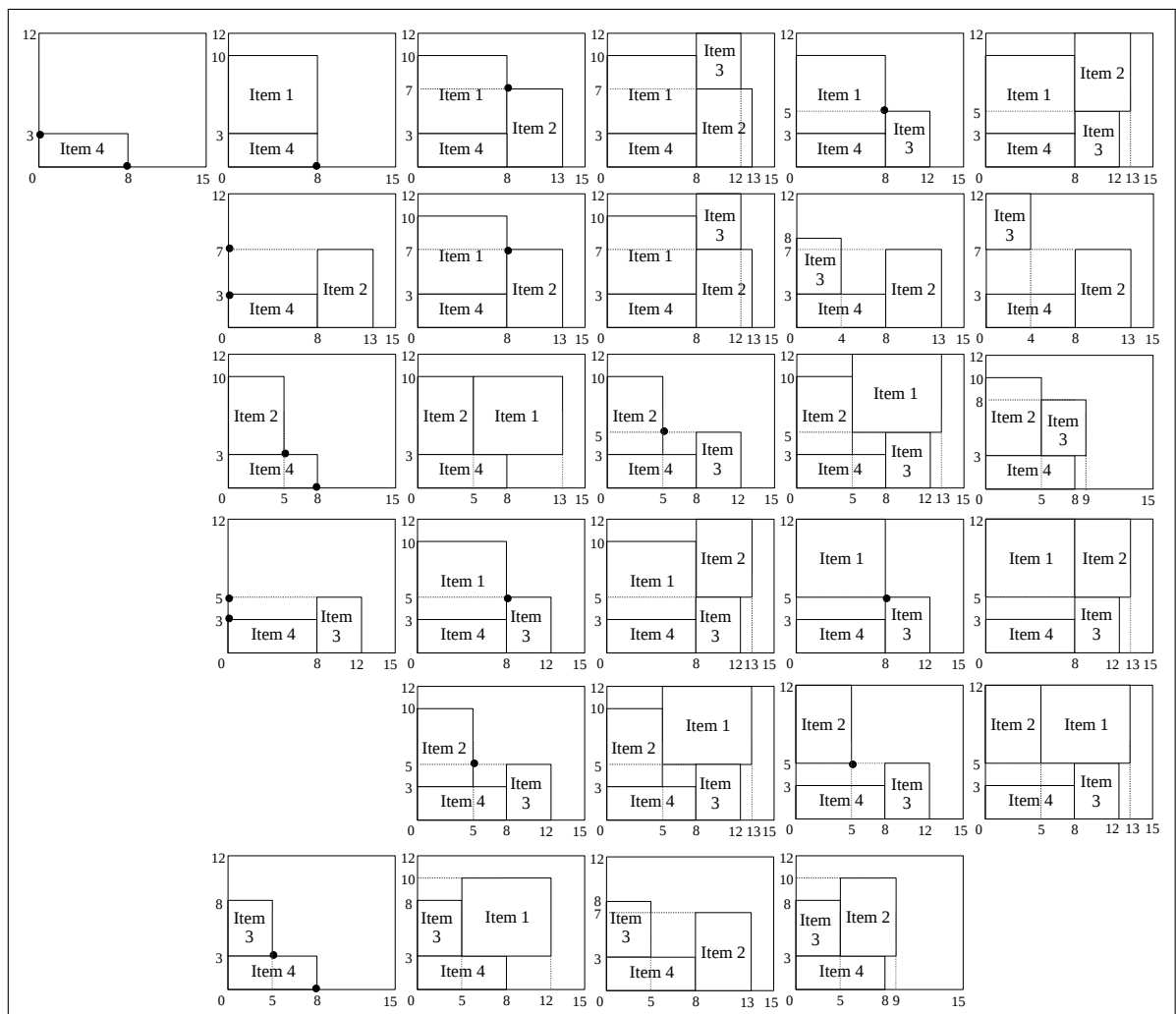
Fonte: o autor.

Figura 3.32 – Pontos resultantes do ramo do item 3 na malha de *extreme points*.



Fonte: o autor.

Figura 3.33 – Pontos resultantes do ramo do item 4 na malha de *extreme points*.



Fonte: o autor.

Capítulo 4

RESULTADOS SOBRE AS MALHAS

Este capítulo traz contribuições relacionando as malhas obtidas *a priori* para os diferentes tipos de discretização do recipiente. Além disso, apresentam-se dois procedimentos para reduzir as malhas, sendo um baseado na atualização do tamanho dos itens e o outro é uma proposta de eliminação de pontos da malha a partir do uso de limitantes. No final do capítulo são apresentados um modelo de programação linear inteira e uma heurística para o problema da mochila 0-1 bidimensional, como forma de aplicar os resultados obtidos e ilustrar a influência das malhas durante a otimização.

4.1 Relações entre as Malhas

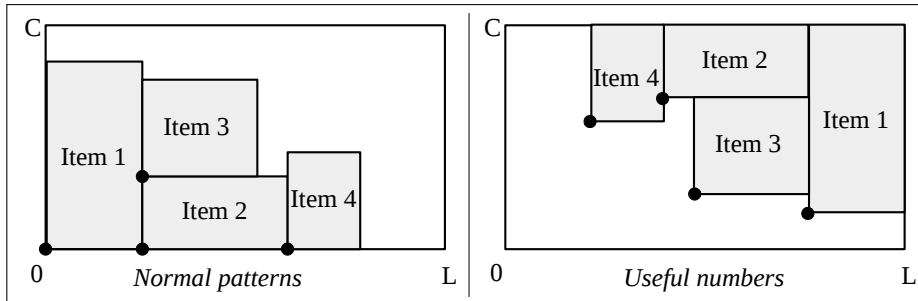
A partir das malhas que podem ser obtidas *a priori* e com base nas relações de equivalência e dominância apresentadas por Scheithauer (1997), apresentam-se adiante resultados envolvendo relações de conjunto e tamanho entre elas. Além disso, apresentam-se também resultados sobre questões que estavam em aberto na literatura, como a prova formal que a malha de *raster points* preserva a otimalidade de problemas de corte e empacotamento de itens com formato retangular.

Proposição 2. Qualquer padrão de empacotamento na malha de *normal patterns* possui um equivalente na malha de *useful numbers*.

Demonstração. A prova segue transformando o padrão de empacotamento sobre a malha de *normal patterns* em um padrão com o empacotamento dos mesmos itens sobre a malha de *useful numbers*. Assim, seja cada item i , de dimensões (l_i, c_i) , empacotado sobre um ponto (p, q) , do recipiente de dimensões (L, C) , pertencente a malha de *normal patterns*. Considere agora o item i empacotado sobre o ponto $(p', q') = (L - p - l_i, C - q - c_i)$, que corresponde a uma reflexão do ponto (p, q) em torno dos respectivos eixos de empacotamento. Nota-se que o ponto (p', q') pertence a malha de *useful numbers*, conforme a definição dos conjuntos

em (3.14) e (3.15). A Figura 4.1 exemplifica como um padrão de empacotamento sobre a malha de *normal patterns* é transformado em outro sobre a malha de *useful numbers*. □

Figura 4.1 – Padrão de empacotamento sobre a malha de *useful numbers*.



Fonte: o autor.

Proposição 3. A malha de *useful numbers* possui o mesmo tamanho da malha de *normal patterns*, isto é, os respectivos conjuntos de coordenadas possuem a mesma cardinalidade.

Demonstração. De acordo com a prova da Proposição 2, a malha de *useful numbers* consiste de uma reflexão dos pontos da malha de *normal patterns* sobre os eixos de empacotamento, então ambas as malhas possuem o mesmo tamanho nos respectivos conjuntos de coordenadas. Nota-se que a malha de *useful numbers* realiza a discretização da direita do recipiente para a esquerda e de cima para baixo, enquanto a malha de *normal patterns* realiza a discretização partindo da esquerda para a direita do recipiente e de baixo para cima. Embora os respectivos conjuntos de coordenadas possuam a mesma cardinalidade, as coordenadas neles são geralmente diferentes. □

Proposição 4. Qualquer padrão de empacotamento na malha de *useful numbers* possui um equivalente na malha de *raster points*.

Demonstração. Seja um padrão de empacotamento com m itens empacotados sobre a malha de *useful numbers*, que preserve a otimalidade conforme a Proposição 2. Nota-se que alguns itens podem estar em pontos que não pertencem a malha de *normal patterns*, conseqüentemente, que também não pertencem a malha de *raster points*. Então, a prova segue por indução sobre o número α de itens que não estão associados a pontos pertencentes a malha de *raster points*, similarmente ao proposto em Lins, Lins e Morabito (2003). A base da prova consiste no caso trivial de $\alpha = 0$, isto é, todos itens do padrão estão sobre pontos da malha de *raster points*. Para a hipótese de indução, a proposição permanece válida para $\alpha < m$.

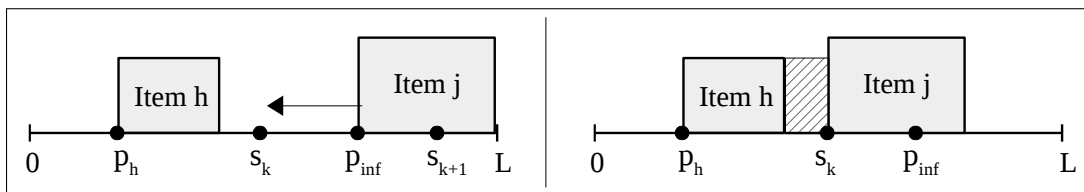
Consideramos agora o caso de $\alpha = m$. Seja j um item empacotado no padrão da malha de *useful numbers*, com seu canto inferior esquerdo associado a menor coordenada p_{inf} , ao longo da largura, que não pertence a malha de *raster points*. O raciocínio se estende

de forma análoga observando um item de coordenada q_{inf} associada ao comprimento. Seja o índice k associado a coordenada *raster point* s_k obtida de $\langle L - \langle L - p_{inf} \rangle_x \rangle_x = \max\{s_k \in X_d \mid s_k \leq L - \langle L - p_{inf} \rangle_x\}$, tal que $s_k < p_{inf} < s_{k+1}$, em que s_{k+1} é o próximo *raster point* após s_k . Assim, o item j pode ser arrastado para a esquerda até que seu canto inferior esquerdo esteja associado a coordenada s_k . O item j somente não pode ser arrastado para a esquerda, caso exista algum item h empacotado em uma coordenada p_h menor do que p_{inf} , com canto inferior direito sob a coordenada $\bar{p}_h = p_h + l_h$ tal que $s_k < \bar{p}_h < p_{inf}$.

As seguintes situações podem surgir com relação a coordenada p_h onde o item h está empacotado: (i) p_h é um *useful number*, entretanto, isto contradiz a escolha de p_{inf} ; (ii) p_h é um *raster point* (ou somente um *normal pattern*) e, então, \bar{p}_h também seria um *normal pattern*, entretanto, isto contradiz a escolha de s_k , visto que s_k é a maior coordenada *raster point* (isto é, *normal pattern*) que é menor do que p_{inf} ; e, (iii) p_h é uma coordenada da malha unitária e, então, pode-se arrastar o item h para a esquerda até ele encostar em outro item ou na lateral esquerda do recipiente, tal que p_h torna-se um *normal pattern* e, assim, \bar{p}_h também seria um *normal pattern*, retornando a situação (ii) no caso de $s_k < \bar{p}_h < p_{inf}$.

Como nenhuma das situações anteriores podem ocorrer, ou se ocorrem, tem-se que $\bar{p}_h \leq s_k$, concluí-se que o item j pode ser arrastado para a esquerda até ficar empacotado sob s_k , diminuindo o valor de α e provando o passo indutivo. A Figura 4.2 traz uma ilustração das situações (ii) e (iii).

Figura 4.2 – Garantia de otimalidade ao empacotar sobre a malha de *raster points*.



Fonte: o autor.

□

Em resumo, a Proposição 4 mostra que todos os itens que estão no padrão sobre a malha de *useful numbers* (ou mesmo na malha de *normal patterns*, uma vez que podemos primeiro aplicar a Proposição 2 para obter um padrão de empacotamento sobre a malha de *useful numbers*) podem ser movidos para a esquerda e para baixo, até que todos estejam associados a pontos pertencentes a malha de *raster points*.

Proposição 5. A malha de *raster points* é um subconjunto da malha de *normal patterns*, isto é, $X_r \subseteq X_d$ e $Y_r \subseteq Y_d$.

Demonstração. A prova é imediata e segue da definição da malha de *raster points* em (3.7) e (3.8) (veja Seção 3.2), que sempre considera as coordenadas dentro do próprio conjunto de

normal patterns. □

Proposição 6. A malha de *regular normal patterns* é um subconjunto da malha de *normal patterns*, isto é, $X_b \subseteq X_d$ e $Y_b \subseteq Y_d$.

Demonstração. A prova é imediata e segue da definição da malha de *regular normal patterns* (veja Seção 3.5), que sempre considera coordenadas que estão dentro do conjunto de *normal patterns* obtido sobre todo o I . Nota-se que as combinações cônicas geradas sobre $I \setminus \{i\}$ para a *regular normal patterns* também aparecem na *normal patterns* para I , bastando usar $\varepsilon_i = 0$ em (3.5) e (3.6). □

Embora as Proposições 5 e 6 indiquem que as malhas de *raster points* e *regular normal patterns* sejam subconjuntos da malha de *normal patterns*, a Proposição 7 induz que não é possível estabelecer relações de inclusão entre a *raster points* e a *regular normal patterns*.

Proposição 7. Não existe relação de inclusão entre as malhas de *raster points* e *regular normal patterns*.

Demonstração. A prova considera que as malhas possuem algum tipo de relação de inclusão, sendo dividida em duas hipóteses:

- Hipótese 1: *regular normal patterns* é um subconjunto da *raster points*, isto é, $X_b \subseteq X_r$ e $Y_b \subseteq Y_r$;
- Hipótese 2: *raster points* é um subconjunto da *regular normal patterns*, isto é, $X_r \subseteq X_b$ e $Y_r \subseteq Y_b$.

Apresenta-se o Exemplo 4 que contraria as duas hipóteses levantadas, concluindo que não é possível estabelecer uma relação de inclusão entre as malhas de *raster points* e *regular normal patterns*.

Exemplo 4. Seja uma instância para um problema de corte e empacotamento bidimensional com três itens de demandas unitárias e valores iguais as suas respectivas áreas. O recipiente possui dimensões (13, 10) e os itens (3, 5), (4, 3) e (8, 4). Com isso, obtém-se os seguintes conjuntos de coordenadas para as malhas de *raster points* e *regular normal patterns*, considerando que as coordenadas posteriores a $L - \min_{1 \leq i \leq n} (l_i)$ e a $C - \min_{1 \leq i \leq n} (c_i)$ foram excluídas:

- *raster points*: $X_r = \{0, 4, 8\}$ e $Y_r = \{0, 3, 5, 7\}$, com 12 pontos;
- *regular normal patterns* e *MIM*: $X_b = \{0, 3, 4, 8\}$ e $Y_b = \{0, 3, 4, 5\}$, com 16 pontos.

No Exemplo 4, percebe-se que existe uma coordenada no conjunto X_b que não está no conjunto X_r (coordenada 3). Da mesma forma, no conjunto Y_b há uma coordenada que não existe em Y_r (coordenada 4). Segue que a malha de *regular normal patterns* não é subconjunto da malha de *raster points*, contrariando a Hipótese 1. Além disso, percebe-se que há uma coordenada no conjunto Y_r que não está no conjunto Y_b (coordenada 7). Então, a malha de *raster points* não é subconjunto da *regular normal patterns*, contrariando a Hipótese 2. \square

Proposição 8. A malha de *regular normal patterns* pode ser obtida pela definição da malha de *MIM* considerando $t_x = L$ e $t_y = C$ (CÔTÉ; IORI, 2016).

Demonstração. Conforme Côté e Iori (2016), dada a definição da malha de *MIM* para um dado item $i \in I$ e considerando o parâmetro $t_x = L$ e $t_y = C$ em (3.24) e (3.27), respectivamente, tem-se que $\min\{L - 1, L - l_i\} = L - l_i$ e $\min\{C - 1, C - c_i\} = C - c_i$, que resulta na definição da malha de *regular normal patterns* em (3.21) e (3.22). Além disso, a escolha de $t_x = L$ e $t_y = C$ faz com que (3.25) e (3.28) resultem em conjuntos vazios, pois $L - l_i - L = -l_i < 0$ e $C - c_i - C = -c_i < 0$. \square

Proposição 9. A malha de *MIM* é sempre menor ou de mesmo tamanho do que a malha de *regular normal patterns*, isto é, $|X_m| \leq |X_b|$ e $|Y_m| \leq |Y_b|$ (CÔTÉ; IORI, 2016).

Demonstração. Conforme Côté e Iori (2016), a malha de *MIM* é formada pelos conjuntos que contêm menos coordenadas entre os conjuntos obtidos, para todo $t_x = \{0, 1, \dots, L\}$ e $t_y = \{0, 1, \dots, C\}$. Como na Proposição 8 a malha de *regular normal patterns* pode ser obtida pela definição da *MIM*, usando $t_x = L$ e $t_y = C$, segue que a malha de *MIM* possuirá, no pior caso, a mesma quantidade de pontos da malha de *regular normal patterns*. \square

Proposição 10. A malha de *MIM* é sempre menor ou de mesmo tamanho do que a malha de *normal patterns*, isto é, $|X_m| \leq |X_d|$ e $|Y_m| \leq |Y_d|$ (CÔTÉ; IORI, 2016).

Demonstração. Pela Proposição 6, a malha de *regular normal patterns* é um subconjunto da *normal patterns*. Além disso, a Proposição 9 diz que a malha de *MIM* é sempre menor ou de mesmo tamanho do que a malha de *regular normal patterns*. Segue naturalmente que a malha de *MIM* é sempre menor ou de mesmo tamanho do que a malha de *normal patterns*, isto é, $|X_m| \leq |X_d|$ e $|Y_m| \leq |Y_d|$. \square

Embora a malha de *MIM* tenha tamanho menor ou igual ao da malha de *regular normal patterns*, afirmação que se estende naturalmente para a malha de *MIM* com a *normal patterns*, nota-se que não há relação de inclusão entre elas e, similarmente, entre a malha de *MIM* e a *raster points*. A Proposição 11 formaliza essa afirmação envolvendo a malha de *MIM* com a *normal patterns* e a *raster points*.

Proposição 11. Não existe relação de inclusão entre as malhas de *MIM* com as de *normal patterns* e *raster points*.

Demonstração. A prova segue através do Exemplo 5, no qual o conjunto X_m da malha de *MIM* tem coordenadas diferentes do respectivo conjunto X_d da malha de *normal patterns* e do X_r da malha de *raster points*. Nota-se ainda que a malha de *MIM* pode ser menor do que a malha de *raster points*, da mesma forma que a malha de *raster points* pode ser menor do que a de *MIM* (por exemplo, no Exemplo 4 apresentado na Proposição 7, em que a malha de *MIM* coincide com a de *regular normal patterns*).

Exemplo 5. Seja uma instância para um problema de corte e empacotamento bidimensional, com três itens, no qual as dimensões do recipiente são (10,6) e as dos itens são (3,2), (3,3) e (6,2). Cada item pode ter no máximo uma cópia empacotada e seus valores são dados pelas suas respectivas áreas. Assim, tem-se os seguintes conjuntos, com as coordenadas posteriores a $L - \min_{1 \leq i \leq n} (l_i)$ e a $C - \min_{1 \leq i \leq n} (c_i)$ excluídas:

- *normal patterns*: $X_d = \{0, 3, 6\}$ e $Y_d = \{0, 2, 3, 4\}$, com 12 pontos;
- *raster points*: $X_r = \{0, 3, 6\}$ e $Y_r = \{0, 2, 3, 4\}$, com 12 pontos;
- *MIM*: $X_m = \{0, 4, 7\}$ e $Y_m = \{0, 2, 3\}$, com 9 pontos.

□

Observa-se que a malha de *MIM* pode ser obtida da união de malhas de *normal patterns* e *useful numbers*, por considerar o empacotamento realizado sobre os *normal patterns*, caso o ponto definido para o item esteja antes do parâmetro t_x (e t_y), ou sobre os *useful numbers*, caso o ponto para o item esteja após t_x (e t_y). Com isso, deriva-se a Proposição 12 que relaciona tais malhas, lembrando que Côté e Iori (2016) não fez qualquer menção da malha de *useful numbers* em seu trabalho.

Proposição 12. A malha de *MIM* é subconjunto de uma malha composta pela união entre as malhas de *normal patterns* e *useful numbers*.

Demonstração. Nota-se que no conjunto Ex_{i,t_x} em (3.24) há a limitação imposta por t_x e os itens são de $I \setminus \{i\}$. Assim, o conjunto em (3.5) para $I \setminus \{i\}$ resulta na definição da *regular normal patterns*, que é um subconjunto da *normal patterns* dada a Proposição 6, enquanto o parâmetro t_x limita as combinações cônicas na *regular normal patterns* para coordenadas $p \leq \min\{t_x - 1, L - l_i\} \leq L$, sendo descartadas coordenadas após $L - \min_{1 \leq i \leq n} (l_i)$. Logo, $Ex_{i,t_x} \subseteq X_{b:i} \subseteq X_d$.

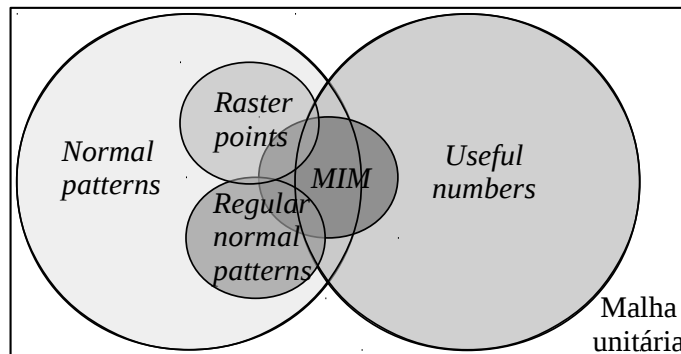
De maneira análoga, o conjunto Dx_{i,t_x} em (3.25) contém as combinações cônicas $p \in [\max\{0, t_x\}, L]$ para os itens em $I \setminus \{i\}$, porém geradas a partir de L em direção a $\max\{0, t_x\}$ e

desconsideradas aquelas após $L - l_i$. Nota-se que a forma de gerar as coordenadas de forma refletida (indo de L para 0) é a mesma dada na definição do conjunto de *useful numbers* em (3.14). Além disso, as coordenadas geradas em (3.14) são para I , contendo as geradas para $I \setminus \{i\}$, e as coordenadas eliminadas após $L - \min_{1 \leq i \leq n} (l_i)$ contemplam algum dos i no caso de $L - l_i$. Assim, Dx_{i,t_x} pode ser obtido através da definição da malha de *useful numbers* em (3.14), impondo $l_i \leq p \leq \max\{0, L - l_i - t_x\}$ e considerando $\varepsilon_i = 0$. Logo, $Dx_{i,t_x} \subseteq X_u$.

Como as coordenadas *MIM* para um dado i são obtidas fazendo $X_{m:i,t_x} = Ex_{i,t_x} \cup Dx_{i,t_x}$, então $X_{m:t_x} = \cup_{i \in I} (Ex_{i,t_x} \cup Dx_{i,t_x}) \subseteq (X_d \cup X_u)$, que segue naturalmente válido, independente do valor de t_x escolhido, para X_m em (3.26). Então, $X_m \subseteq (X_d \cup X_u)$. O raciocínio se estende analogamente para o conjunto de coordenadas ao longo do comprimento. \square

Por meio dos resultados obtidos nesta seção, a Figura 4.3 esquematiza as relações existentes entre os diferentes tipos de malhas apresentadas. Nota-se que algumas malhas são subconjuntos de outras, enquanto certas malhas possuem apenas um subconjunto de coordenadas da união no que tange as relações de conjunto.

Figura 4.3 – Relações entre as malhas que podem ser obtidas *a priori*.



Fonte: o autor.

4.2 Procedimentos de Redução

Esta seção traz dois procedimentos de redução que podem ser aplicados em problemas de corte e empacotamento para reduzir o tamanho das malhas. O primeiro procedimento foi definido na literatura e envolve aumentar o tamanho dos itens, enquanto o segundo é um procedimento de melhoria proposto neste trabalho e está relacionado com a eliminação de pontos da malha. Tais procedimentos são aplicados em exemplos, a fim de ilustrar os seus desenvolvimentos. É importante comentar que, de agora em diante, as malhas de *useful numbers*, *corner points* e *extreme points* não serão consideradas, uma vez que a *useful numbers* é uma reflexão em torno dos eixos da malha de *normal patterns*, e a *corner points* e *extreme points* têm os seus conjuntos de pontos obtidos no decorrer do empacotamento.

4.2.1 Atualização do tamanho dos itens

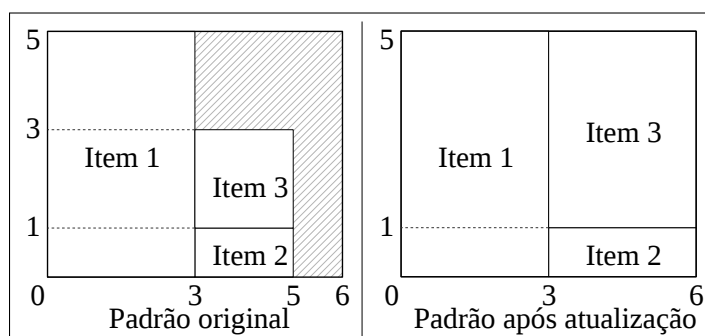
Em Boschetti, Mingozzi e Hadjiconstantinou (2002) e Boschetti e Mingozzi (2003) foi proposto um procedimento que diz que itens podem ter a largura e/ou comprimento atualizados sem que haja perda de solução ótima para a instância original. Embora os autores trabalhem sobre essa afirmação e apresentem um algoritmo para atualizar o tamanho dos itens, considera-se a Proposição 13 visando formalizar o resultado desses autores.

Proposição 13. Dado um padrão de empacotamento P de m itens do conjunto J , tal que $J \subseteq I$, contendo uma área não utilizável. Então, pode-se obter um outro padrão \tilde{P} com o mesmo conjunto J empacotado, tal que itens podem ter suas dimensões atualizadas visando ocupar a área não utilizável de P .

Demonstração. A área não utilizável é aquela que não suporta o empacotamento de outros itens de $I \setminus J$, caso contrário, algum item de $I \setminus J$ poderia ser empacotado lá. Obviamente, os itens de J podem ter as suas dimensões atualizadas de forma a englobar áreas não utilizáveis. Se há área não utilizável de algum dos lados de um dado item $i \in J$, então basta aumentar a correspondente dimensão de i até ele encostar em outro item ou nas laterais do recipiente. Esse processo pode ser repetido até que não haja mais área não utilizável ou que qualquer item possa ter alguma de suas dimensões atualizada. \square

A Figura 4.4 ilustra um exemplo da Proposição 13, no qual o recipiente possui dimensões (6, 5), o item 1 de dimensões (3, 5), o item 2 de dimensões (2, 1) e o item 3 de dimensões (2, 2). Observe que o item 2 pode aumentar de tamanho, passando a ter largura 3, enquanto o item 3 passa a ter dimensões (3, 4). Nota-se que a coordenada 5 ao longo da largura não é mais necessária, do mesmo modo com a coordenada 3 ao longo do comprimento. Outra possibilidade é aumentar o tamanho dos itens 1 e 3. Em qualquer uma delas, manteve-se o empacotamento dos mesmos itens, porém cobrindo toda a área do recipiente.

Figura 4.4 – Exemplo de um padrão antes e após a atualização dos itens.



Fonte: o autor.

O procedimento para atualizar o tamanho de um item $i \in I$ pode ser realizado ao longo da largura e do comprimento, resultando em novas dimensões para i , isto é, em $l_i +$

$(L - L_i^*)$ e $c_i + (C - C_i^*)$, respectivamente. Os valores de L_i^* e C_i^* são calculados através de (4.1) e (4.2), e correspondem à solução obtida ao longo de cada dimensão, para o problema da mochila 0-1 unidimensional, usando o clássico algoritmo de programação dinâmica (MARTELLO; TOTH, 1990). Vale destacar que os itens que foram usados na solução do referido problema da mochila não podem ter o seu tamanho mais aumentado.

$$L_i^* = \max \left\{ l = \sum_{k \in I \setminus \{i\}} \varepsilon_k l_k + l_i \mid l \leq L, \varepsilon_k \in \{0, 1\}, k \in I \setminus \{i\} \right\}, \quad (4.1)$$

$$C_i^* = \max \left\{ c = \sum_{k \in I \setminus \{i\}} \varepsilon_k c_k + c_i \mid c \leq C, \varepsilon_k \in \{0, 1\}, k \in I \setminus \{i\} \right\}. \quad (4.2)$$

O procedimento de atualização do tamanho dos itens, descrito no Algoritmo 4.1, proposto por Boschetti, Mingozzi e Hadjiconstantinou (2002), deve ser aplicado ao longo de cada dimensão. Em linhas gerais, para a direção da largura, os itens do conjunto I são ordenados de maneira decrescente de acordo com a largura. A partir disso, seleciona-se o primeiro item na dada ordenação e resolve-se (4.1), que consiste no problema da mochila 0-1 unidimensional, para obter a máxima ocupação da largura restante do recipiente. A largura do recipiente que não for ocupada conforme a solução do problema da mochila é adicionada a largura do item selecionado inicialmente. Além disso, o item que tem o valor da sua largura atualizado e os itens pertencentes a solução obtida para o problema da mochila 0-1 não podem ter as suas larguras posteriormente atualizadas. Em seguida, seleciona-se o próximo item observando a ordem dada e que ainda não foi utilizado na solução do problema da mochila 0-1, continuando até que todos os itens tenham sido analisados ou usados em alguma solução.

Algoritmo 4.1 - Procedimento de atualização do tamanho dos itens.

- 1 Seja J o conjunto com os itens de I ordenados de forma decrescente com relação a largura ($l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_n$).
 - 2 Seja o primeiro item $i \in J$. Resolva (4.1) para o item i , de forma a obter a solução em ε^* e seu valor por L_i^* .
 - 3 Atualize $l_i \leftarrow l_i + (L - L_i^*)$. E, faça $J \leftarrow J \setminus (\{i\} \cup \{k \in J \setminus \{i\} \mid \varepsilon_k^* = 1\})$.
 - 4 Se $J \neq \emptyset$, então volte à linha 2.
 - 5 Seja J o conjunto com os itens de I ordenados de forma decrescente com relação ao comprimento ($c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n$).
 - 6 Seja o primeiro item $i \in J$. Resolva (4.2) para o item i , de forma a obter a solução em ε^* e seu valor por C_i^* .
 - 7 Atualize $c_i \leftarrow c_i + (C - C_i^*)$. E, faça $J \leftarrow J \setminus (\{i\} \cup \{k \in J \setminus \{i\} \mid \varepsilon_k^* = 1\})$.
 - 8 Se $J \neq \emptyset$, então volte à linha 6.
-

A solução para o problema da mochila 0-1 unidimensional é obtida usando o Algoritmo 4.2. A matriz binária D representa a solução do problema, em que o valor ótimo é dado em $F(m, L')$. Ao relacionar com (4.1), tem-se ao longo da largura que $\varepsilon^* = D$ e $L_i^* = F(m, L')$ para um dado $i \in I$. O Algoritmo 4.2 também é usado para (4.2), na direção do comprimento, em que se troca L por C e l_i por c_i , sendo $C_i^* = F(m, C')$.

Algoritmo 4.2- Programação dinâmica para o problema da mochila 0-1 unidimensional.

Entrada: Conjunto J' de m itens e suas larguras, tal que $J' \leftarrow J \setminus \{j\}$ e $m \leftarrow n - 1$, e largura restante do recipiente L' , tal que $L' \leftarrow L - l_j$.

Saída: Solução ótima $F(m, L')$.

```

1 para  $k \leftarrow 0$  até  $L'$  faça
2    $F(0, k) \leftarrow 0$ .
3 para  $i \leftarrow 1$  até  $m$  faça
4   para  $k \leftarrow 0$  até  $L'$  faça
5     se  $((l_i \leq k) \wedge (l_i + F(i-1, k-l_i) > F(i-1, k)))$  então
6        $F(i, k) \leftarrow l_i + F(i-1, k-l_i)$ .
7        $D(i, k) \leftarrow 1$ .
8     senão
9        $F(i, k) \leftarrow F(i-1, k)$ .
10       $D(i, k) \leftarrow 0$ .
11  $k \leftarrow L'$ .
12 para  $i \leftarrow m$  até 1 faça
13   se  $D(i, k) = 1$  então
14      $k \leftarrow k - l_i$ .
15 retorna  $F(m, L')$ .
```

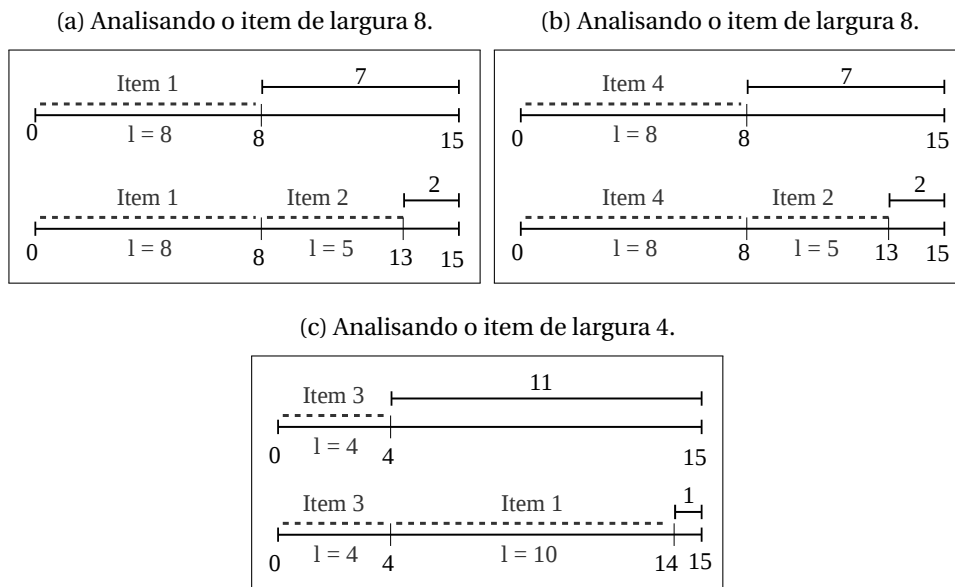
Uma aplicação do procedimento de atualização do tamanho dos itens é ilustrada no Exemplo 6.

Exemplo 6. Seja uma instância para um problema de corte e empacotamento bidimensional com quatro itens, no qual as dimensões do recipiente são (15, 12) e as dos itens são (8, 7), (5, 7), (4, 5) e (8, 3). Ordenando as larguras e os comprimentos dos itens de forma decrescente, tem-se, respectivamente, os vetores $l = (8, 8, 5, 4)$ e $c = (7, 7, 5, 3)$.

Ao realizar o procedimento com relação à largura, considerando o vetor l , usa-se o primeiro item do vetor, com largura igual a 8, restando 7 unidades de largura. Aplicando o Algoritmo 4.2, tem-se como solução o item de largura 5, restando ainda duas unidades de largura dentro do recipiente (ver Figura 4.5a). Deste modo, o item tem a largura 8 sendo atualizada para 10 e o item de largura 5 não pode ter o seu tamanho atualizado. O próximo item do vetor a ser analisado possui a largura também igual a 8. Da mesma forma feita para o item anterior, tem-se a sua largura indo de 8 para 10, uma vez que a solução é o item de largura 5 (ver Figura 4.5b). Analisando o próximo item do vetor que ainda não foi utilizado,

tem-se o item de largura 4, restando 11 unidades de largura do recipiente. Após resolver (4.1), tem-se como solução o primeiro item, que tem agora a sua largura igual a 10 (antes de atualizar era 8, porém se usa sempre a dimensão atualizada dos itens), restando 1 unidade não utilizável, tal que o item de largura 4 passa a ter largura 5 (ver Figura 4.5c).

Figura 4.5 – Procedimento de atualização aplicado sobre a largura dos itens do Exemplo 6.



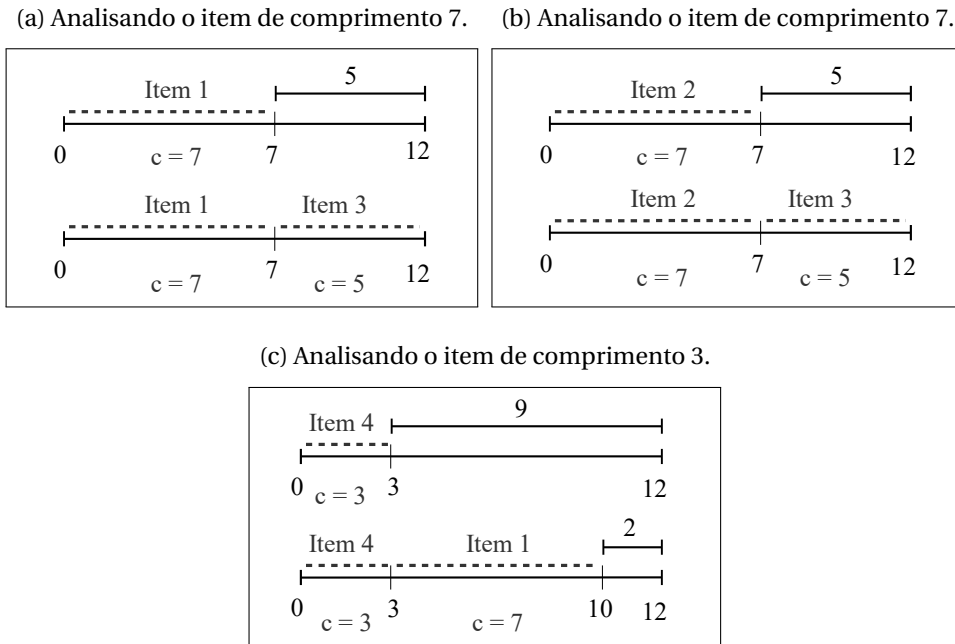
Fonte: o autor.

Aplicando o procedimento de atualização com relação ao comprimento, tem-se o primeiro item do vetor, de comprimento 7, restando 5 unidades de comprimento no recipiente. Após resolver (4.2), tem-se como solução o item de comprimento 5, ocupando todo o comprimento do recipiente (ver Figura 4.6a). Deste modo, esse item de comprimento 7 e o item de comprimento 5, usados na solução do problema da mochila 0-1 unidimensional, não podem ter os seus comprimentos atualizados.

O próximo item a ser analisado possui o comprimento também igual a 7. Da mesma forma como feito para o item anterior, tem-se o item de comprimento 5 como solução e não há atualização de tamanho (ver Figura 4.6b). Analisando o próximo item do vetor que ainda não foi utilizado, tem-se o item de comprimento 3, restando 9 unidades de comprimento. Assim, a solução de (4.2) possui o item de comprimento 7, restando ainda duas unidades de comprimento não usadas (ver Figura 4.6c). Deste modo, o item tem seu comprimento atualizado de 3 para 5.

Após aplicar o procedimento de atualização do tamanho dos itens, eles passam a ter as seguintes dimensões: (10, 7), (5, 7), (5, 5) e (10, 5), e as malhas resultantes são, já com as coordenadas posteriores a $L - \min_{1 \leq i \leq n} (l_i)$ e a $C - \min_{1 \leq i \leq n} (c_i)$ excluídas:

Figura 4.6 – Procedimento de atualização aplicado sobre o comprimento dos itens do Exemplo 6.



Fonte: o autor.

- *normal patterns*: $X_d = \{0, 5, 10\}$ e $Y_d = \{0, 5, 7\}$, com 9 pontos (originalmente haviam 25 pontos);
- *raster points*: $X_r = \{0, 5, 10\}$ e $Y_r = \{0, 5, 7\}$, com 9 pontos (originalmente haviam 15 pontos);
- *regular normal patterns*: $X_b = \{0, 5, 10\}$ e $Y_b = \{0, 5, 7\}$, com 9 pontos (originalmente haviam 16 pontos);
- *meet-in-the-middle patterns*: $X_m = \{0, 5, 10\}$ e $Y_m = \{0, 5, 7\}$, com 9 pontos (originalmente haviam 16 pontos).

Observe que a instância usada no Exemplo 6 é a mesma do Exemplo 3. Com isso, o procedimento de atualização do tamanho dos itens permitiu reduzir a malha de *normal patterns* em 64%; as malhas de *regular normal patterns* e *MIM* em aproximadamente 44%; e a malha de *raster points* em 40%, ao se comparar com as malhas no Exemplo 3, geradas para a instância antes da atualização. Todavia, nota-se que aumentar o tamanho dos itens nem sempre é vantajoso, em particular, para a malha de *raster points*, conforme a Proposição 14.

Proposição 14. O procedimento de atualização do tamanho dos itens pode aumentar o tamanho da malha de *raster points*.

Demonstração. O Exemplo 7 apresenta uma instância em que a malha de *raster points*, após a atualização do tamanho dos itens, possui mais pontos do que antes de aplicar tal procedimento. Nota-se que a malha de *raster points* considera que áreas não utilizáveis são movidas do final do recipiente para entre os itens. Assim, quando os itens têm seus tamanhos aumentados, eles ocupam essas áreas não utilizáveis e os pontos que antes eram desconsiderados pela *raster points* agora passam a ser importantes.

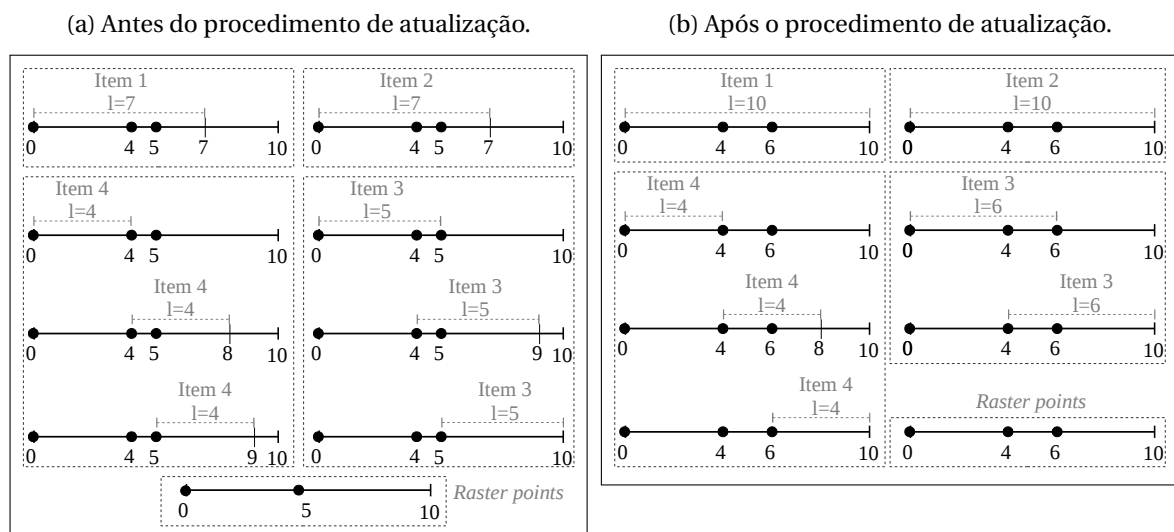
Exemplo 7. Seja uma instância de um problema de corte e empacotamento bidimensional, com um único recipiente de dimensões dadas por (10, 8) e quatro itens: item 1 de dimensões (7, 5), item 2 de dimensões (7, 2), item 3 de dimensões (5, 3) e item 4 de dimensões (4, 2). Cada item possui valor igual a área e pode possuir no máximo uma cópia empacotada dentro do recipiente. Assim, tem-se os seguintes conjuntos para as malhas, já com as coordenadas posteriores a $L - \min_{1 \leq i \leq n} (l_i)$ e a $C - \min_{1 \leq i \leq n} (c_i)$ excluídas:

- *normal patterns*: $X_d = \{0, 4, 5\}$ e $Y_d = \{0, 2, 3, 4, 5\}$, com 15 pontos;
- *raster points*: $X_r = \{0, 5\}$ e $Y_r = \{0, 3, 4, 5\}$, com 8 pontos.

Após aplicar o procedimento de atualização do tamanho dos itens, tem-se: item 1 com dimensões (10, 5), item 2 com dimensões (10, 3), item 3 com dimensões (6, 3) e item 4 com dimensões (4, 2). Os conjuntos obtidos para as malhas sobre essa nova instância são:

- *normal patterns*: $X_d = \{0, 4, 6\}$ e $Y_d = \{0, 2, 3, 5, 6\}$, com 15 pontos;
- *raster points*: $X_r = \{0, 4, 6\}$ e $Y_r = \{0, 2, 3, 5, 6\}$, com 15 pontos.

Figura 4.7 – Obtenção, ao longo da largura, do conjunto de *raster points* considerando o procedimento de atualização do tamanho dos itens.



A Figura 4.7 exemplifica como o conjunto de *raster points* é obtido ao longo da largura para antes e depois de atualizar o tamanho dos itens. Os pontos em preto representam os *normal patterns*. Observe que antes de atualizar os itens, o conjunto de *raster points* não considerava a coordenada 4.

□

4.2.2 Eliminação de pontos da malha

Ao observar os conjuntos gerados pelas estratégias de discretização apresentadas anteriormente, nota-se que algumas coordenadas podem ser eliminadas sem perda de generalidade. Essas coordenadas, quando escolhidas para o empacotamento de itens, não produzem uma solução com um bom valor, isto é, um valor maior do que um dado limitante inferior para problemas relacionados com o objetivo de maximização do valor empacotado. Diante disso, propõe-se neste trabalho um procedimento de eliminação de pontos da malha que pode ser aplicado nos seguintes problemas básicos definidos em [Wäscher, Haußner e Schumann \(2007\)](#), quais sejam: o problema de empacotamento de itens idênticos, problema de alocação e o problema da mochila.

O procedimento para eliminar pontos da malha analisa o valor do empacotamento, considerando coordenada por coordenada dos conjuntos da malha que se deseja reduzir. Para tanto, precisa-se de um limitante inferior, gerado por uma heurística qualquer, para a solução ótima do problema original. Claramente, quanto melhor for o valor do limitante inferior, mais pontos devem ser eliminados.

O procedimento para eliminar pontos da malha é descrito em seguida. Considera-se que os conjuntos de coordenadas já foram obtidos por alguma discretização e o procedimento para eliminar pontos da malha é aplicado sobre cada um desses conjuntos individualmente. Inicialmente, calcula-se a razão do valor do item pela sua respectiva área, obtendo o valor do item por unidade de área. Esse valor é usado para atualizar o valor dos itens, dado que para cada item i , considera-se o recipiente de dimensões (l_i, C) com i empacotado na origem $(0,0)$. Nota-se que resta um outro recipiente de dimensões $(l_i, C - c_i)$, para o qual se considera a resolução de um problema da mochila 0-1 unidimensional visando obter o melhor subconjunto de itens, em termos de valor, que pode ser empacotado na direção do comprimento, dado o item i já empacotado. Após determinar o subconjunto de itens na direção do comprimento, eles têm as suas larguras aumentadas/diminuídas até atingir a largura l_i . Assim, o valor v_i é atualizado para ser a soma dos valores por unidade de área dos itens empacotados (possivelmente, redimensionados) no recipiente (l_i, C) .

Após a atualização do valor de todos os itens, realiza-se a análise de cada coordenada dos conjuntos que formam a malha de pontos sendo analisada. Considerando a aplicação ao longo da largura (similarmente se faz para o conjunto de coordenadas na direção do com-

primento), seleciona-se cada uma das coordenadas p do conjunto e resolve-se o problema de múltiplas mochilas 0-1 unidimensional (MARTELLO; TOTH, 1990), neste caso considerando duas mochilas, uma de capacidade p e a outra de capacidade $L - p$, para obter os melhores valores que podem ser empacotados nessas duas mochilas. O valor da coordenada p é igual a solução encontrada para esse problema de múltiplas mochilas, dado pela soma das soluções encontradas para cada uma das mochilas. Se o valor da coordenada for maior ou igual ao do limitante inferior obtido resolvendo o problema com a instância original, tem-se que a coordenada é mantida no conjunto. Caso contrário, ela pode ser excluída, sem perda de generalidade, conforme dado na Proposição 15.

Proposição 15. As coordenadas eliminadas pelo procedimento de eliminação de pontos da malha não eliminam a solução ótima de problemas que exigem uma solução de máximo valor.

Demonstração. Inicialmente, o procedimento atualiza o valor dos itens calculando um novo valor observando a direção oposta a do conjunto de coordenadas sendo analisado. O novo valor v_i^* para cada item i é o melhor valor que pode ser obtido ao empacotar i em um recipiente de dimensões (l_i, C) , considerando que os itens na direção do comprimento são redimensionados para ter largura l_i (consequentemente, os itens redimensionados têm seus valores atualizados), conforme (4.3), no qual a_k é a área do item $k \in I$.

$$v_i^* = v_i + \max \left\{ \sum_{k \in I \setminus \{i\}} \frac{v_k}{a_k} l_i c_k \varepsilon_k \mid \sum_{k \in I \setminus \{i\}} c_k \varepsilon_k \leq L - c_i, \varepsilon_k \in \{0, 1\}, k \in I \setminus \{i\} \right\}. \quad (4.3)$$

Após atualizar o valor de cada item, o problema se reduz a analisar coordenadas do conjunto da largura que não propiciam um valor de empacotamento melhor do que o limitante inferior \bar{V} fornecido para a solução ótima do problema. As coordenadas p eliminadas são aquelas que não trazem uma solução V_p , conforme (4.4), para o problema de múltiplas mochilas 0-1 unidimensional, para uma mochila de capacidade p e a outra de capacidade $L - p$, na direção da largura, melhor do que o dado valor \bar{V} . Um raciocínio análogo se aplica para as coordenadas no conjunto relacionado ao comprimento.

$$V_p = \max \left\{ \sum_{i \in I} v_i^* (\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2}) \mid \sum_{i \in I} l_i \varepsilon_{i1} \leq p; \sum_{i \in I} l_i \varepsilon_{i2} \leq L - p; (\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2}) \leq 1, i \in I; \text{ para } \varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2} \in \{0, 1\}, i \in I \right\}. \quad (4.4)$$

□

Uma ilustração do procedimento para eliminar pontos da malha está no Exemplo 8.

Exemplo 8. Seja uma instância para um problema de corte e empacotamento bidimensional com recipiente de dimensões (15, 12) e quatro itens, sendo: item 1 de dimensões (8, 7), item 2 de dimensões (5, 7), item 3 de dimensões (4, 5) e item 4 de dimensões (8, 3). Os itens possuem valores dados pelas suas áreas, tal que o valor por unidade de área de cada item é igual a 1. O limitante inferior calculado, por meio de uma heurística, para essa instância é $\bar{V} = 135$. As malhas calculadas para a referida instância, já com as coordenadas posteriores a $L - \min_{1 \leq i \leq n} (l_i)$ e a $C - \min_{1 \leq i \leq n} (c_i)$ excluídas, são:

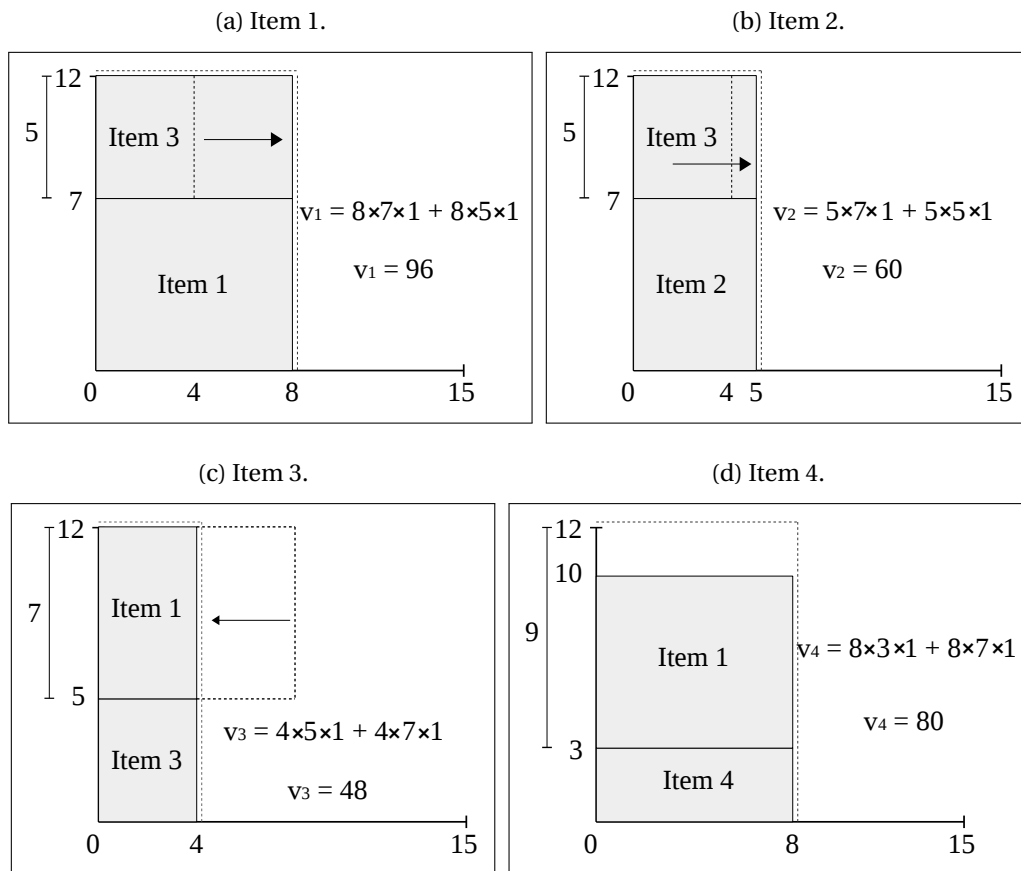
- *normal patterns*: $X_d = \{0, 4, 5, 8, 9\}$ e $Y_d = \{0, 3, 5, 7, 8\}$, com 25 pontos;
- *raster points*: $X_r = \{0, 5, 9\}$ e $Y_r = \{0, 3, 5, 7, 8\}$, com 15 pontos;
- *regular normal patterns*: $X_b = \{0, 4, 5, 8\}$ e $Y_b = \{0, 3, 5, 7\}$, com 16 pontos;
- *meet-in-the-middle patterns*: $X_m = \{0, 4, 5, 8\}$ e $Y_m = \{0, 3, 5, 7\}$, com 16 pontos.

Considera-se a aplicação do procedimento de eliminação de pontos da malha sobre a instância do Exemplo 8, que é a mesma do Exemplo 3, primeiramente com relação a largura. Para o item 1 empacotado, tem-se um recipiente remanescente de dimensões (8, 5), sendo que o item 3 é o melhor (neste caso é o único) que pode ser empacotado na direção do comprimento respeitando o comprimento remanescente de 5 unidades. Em seguida, aumenta-se a largura do item 5 para 8, que é a largura do item 1 já empacotado (nota-se que foram usadas 40 unidades de valor por área do item 3, conforme ilustra a Figura 4.8a). Assim, o valor do item 1 é atualizado para $\nu_1 = 8 \times 7 \times 1 + 8 \times 5 \times 1 = 96$.

Considerando o item 2 empacotado, tem-se um recipiente remanescente de dimensões (5, 5), tal que a solução do problema da mochila 0-1 unidimensional na direção do comprimento resulta no item 3. Após aumentar a largura do item 3 de 4 para 5 unidades, tem-se 25 unidades de área do item 3, tal que o item 2 passa a ter valor $\nu_2 = 5 \times 7 \times 1 + 5 \times 5 \times 1 = 60$ (ver Figura 4.8b). De forma similar, tem-se o item 3 empacotado, com recipiente remanescente de dimensões (4, 7), em que a melhor solução na direção do comprimento tem o item 1 empacotado. Após diminuir sua largura para 4, tem-se $\nu_3 = 4 \times 5 \times 1 + 4 \times 7 \times 1 = 48$ (ver Figura 4.8c).

Para o item 4 empacotado, a solução do problema da mochila 0-1 na direção do comprimento resulta apenas no item 1, ainda sobrando duas unidades de comprimento (como não é possível alocar nenhum outro item nessas duas unidades de comprimento, tem-se uma área não utilizável). Neste caso não é preciso atualizar a largura do item 1, uma vez que ela coincide com a largura do recipiente dado o item 4, tal que $\nu_4 = 8 \times 3 \times 1 + 8 \times 7 \times 1 = 80$ (ver Figura 4.8d).

Figura 4.8 – Atualização do valor dos itens para o Exemplo 3 considerando o procedimento para eliminar pontos da malha na direção da largura.

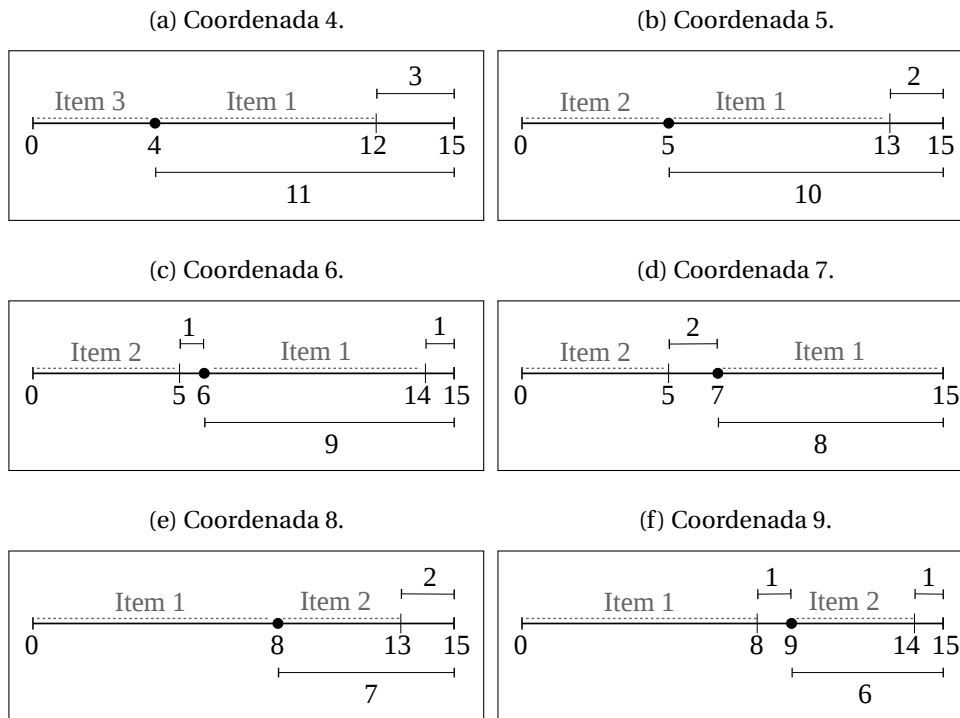


Fonte: o autor.

Após atualizar o valor dos itens, considera-se o conjunto $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ com as coordenadas na direção da largura. Para a coordenada 4, tem-se como solução do problema de múltiplas mochilas 0-1 unidimensional, o item 3 empacotado antes e o item 1 após tal coordenada (ver Figura 4.9a). O valor da coordenada é $V_4 = 144$, que é maior do que o limitante inferior $\bar{V} = 135$, tal que a coordenada é mantida no conjunto. Para as coordenadas 5, 6 e 7, a solução do referido problema da mochila é a mesma, sendo o item 2 empacotado antes e o item 1 após a coordenada (ver Figuras 4.9b, 4.9c e 4.9d). Como o valor dessas coordenadas é $V_5 = V_6 = V_7 = 156$, que é maior do que o limitante inferior \bar{V} , tem-se que elas são mantidas.

Da mesma forma, para as coordenadas 8 e 9, tem-se a mesma solução do problema de múltiplas mochilas 0-1 unidimensional, sendo o item 1 empacotado antes e o item 2 após a dada coordenada (ver Figuras 4.9e e 4.9f). O valor dessas coordenadas é $V_8 = V_9 = 156$, que é maior do que o limitante inferior, logo elas são mantidas.

Figura 4.9 – Procedimento de eliminação de pontos da malha sobre as coordenadas na direção da largura.

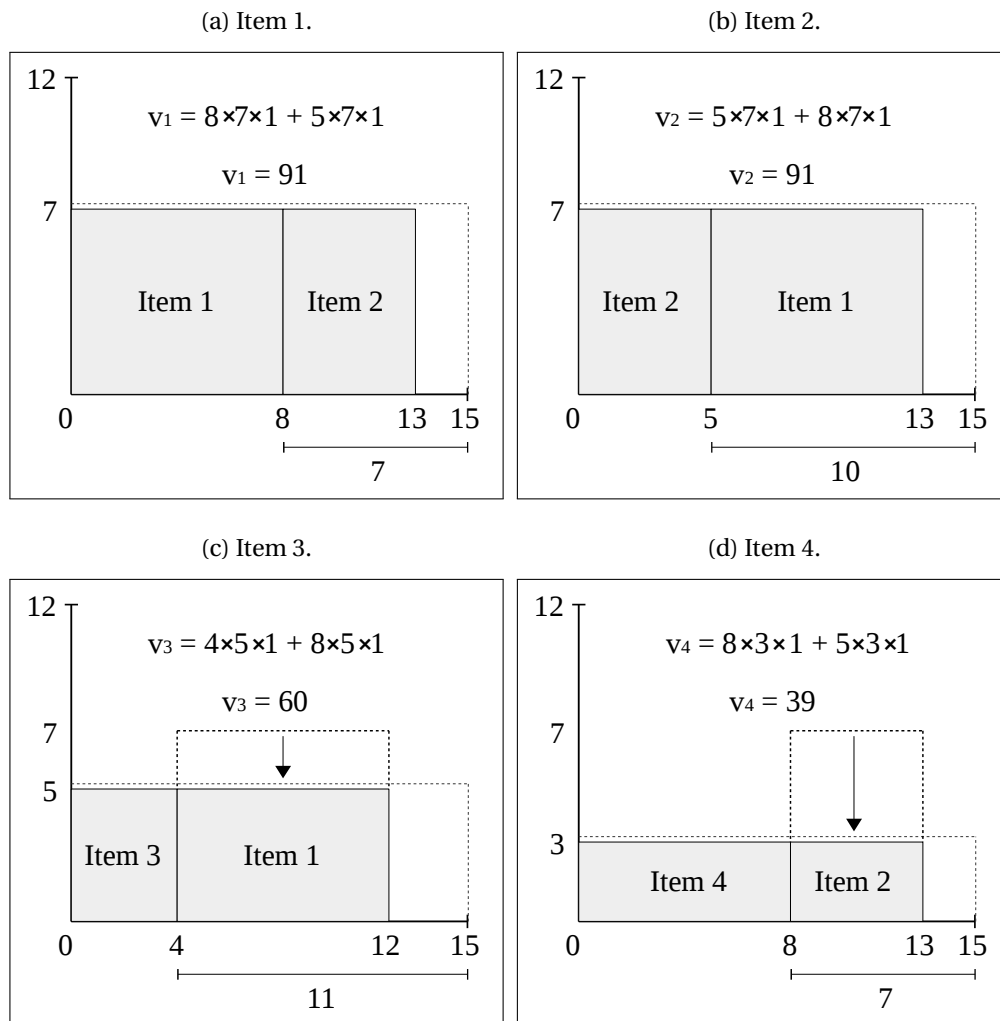


Fonte: o autor.

Realiza-se os mesmos passos anteriores para o conjunto de coordenadas na direção do comprimento. Inicialmente, faz-se a atualização do valor de cada item. Para o item 1, tem-se um recipiente remanescente de dimensões $(7, 7)$, tal que a solução do problema da mochila 0-1 unidimensional na direção da largura resulta apenas no item 2 (ver Figura 4.10a). Deste modo, o valor do item 1 é atualizado para $v_1 = 8 \times 7 \times 1 + 5 \times 7 \times 1 = 91$. Considerando o item 2 empacotado no recipiente, tem-se um recipiente remanescente de dimensões $(10, 7)$, tal que a solução do problema da mochila 0-1 na direção da largura resulta apenas no item 1 (ver Figura 4.10b). Deste modo, o valor do item 2 é atualizado para $v_2 = 5 \times 7 \times 1 + 8 \times 7 \times 1 = 91$. Nota-se que para ambos os itens, a solução do problema da mochila 0-1 resultou numa área não utilizável na direção da largura, embora para nenhum dos itens na solução foi preciso ajustar o comprimento para caber no recipiente remanescente.

Considerando agora o item 3 empacotado, tem-se um recipiente remanescente de dimensões $(11, 5)$, tal que a solução da mochila 0-1 unidimensional resulta no item 1, todavia, tendo seu comprimento reduzido de 8 para 5 unidades (ver Figura 4.10c). Deste modo, o valor do item 3 é atualizado para $v_3 = 4 \times 5 \times 1 + 8 \times 5 \times 1 = 60$. Para o item 4 empacotado, tem-se como solução apenas o item 2, sendo o comprimento do item 4 ajustado conforme o comprimento do recipiente remanescente (ver Figura 4.10d). Deste modo, o valor do item 4 é atualizado para $v_4 = 8 \times 3 \times 1 + 5 \times 3 \times 1 = 39$.

Figura 4.10 – Atualização do valor dos itens para o Exemplo 3 considerando o procedimento para eliminar pontos da malha na direção do comprimento.



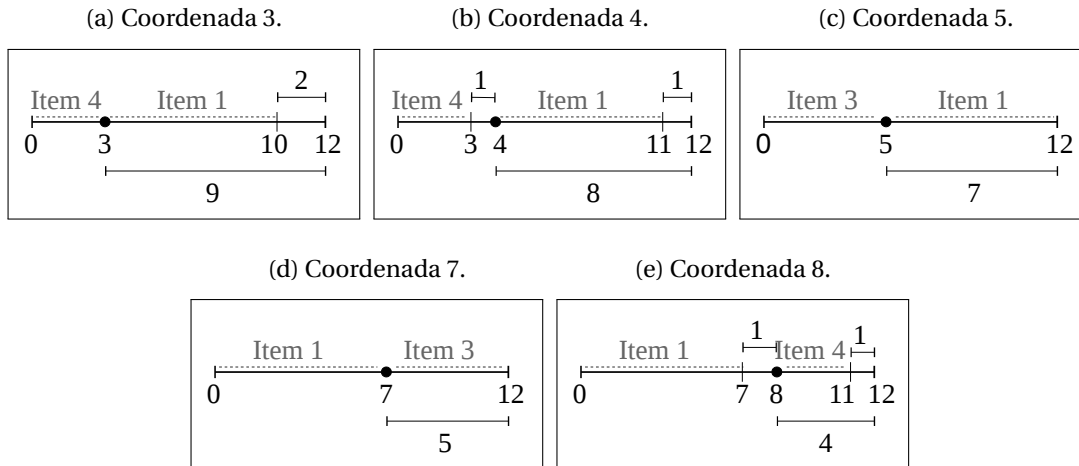
Fonte: o autor.

Dado o conjunto de coordenadas $\{3, 4, 5, 7, 8\}$ ao longo da direção do comprimento, considera-se agora a resolução do problema de múltiplas mochilas 0-1 unidimensional. Para as coordenadas 3 e 4, tem-se a mesma solução para o referido problema da mochila, que é o item 4 empacotado antes e o item 1 após a coordenada (ver Figuras 4.11a e 4.11b). O valor dessas coordenadas é $V_3 = V_4 = 130$, que é menor do que o limitante inferior $\bar{V} = 135$, assim podendo ser excluídas dos conjuntos relativos ao comprimento. Considerando a coordenada 5, a solução do referido problema da mochila tem o item 3 empacotado antes e o item 1 após a coordenada (ver Figura 4.11c). O valor da coordenada é $V_5 = 151$, que é maior do que o limitante inferior $\bar{V} = 135$, assim sendo mantida.

Para a coordenada 7, empacotamos o item 1 antes e o item 3 após a coordenada, como solução do problema de múltiplas mochilas 0-1 unidimensional (ver Figura 4.11d). O valor da coordenada é $V_7 = 151$, que é maior do que $\bar{V} = 135$, assim sendo mantida. Já para a

coordenada 8, temos como solução do referido problema da mochila, o item 1 empacotado antes e o item 4 após a coordenada (ver Figura 4.11e). Segue que o valor da coordenada é $V_8 = 130$, que é pior do que o valor do limitante inferior \bar{V} , tal que ela é excluída do conjunto.

Figura 4.11 – Procedimento de eliminação de pontos da malha aplicado sobre as coordenadas na direção do comprimento.



Fonte: o autor.

Após a aplicação do procedimento para eliminar pontos da malha, os conjuntos de coordenadas passam a ser:

- *normal patterns*: $X_d = \{0, 4, 5, 8, 9\}$ e $Y_d = \{0, 5, 7\}$, com 15 pontos (antes haviam 25 pontos);
- *raster points*: $X_r = \{0, 5, 9\}$ e $Y_r = \{0, 5, 7\}$, com 9 pontos (antes haviam 15 pontos);
- *regular normal patterns*: $X_b = \{0, 4, 5, 8\}$ e $Y_b = \{0, 5, 7\}$, com 12 pontos (antes haviam 16 pontos);
- *meet-in-the-middle patterns*: $X_m = \{0, 4, 5, 8\}$ e $Y_m = \{0, 5, 7\}$, com 12 pontos (antes haviam 16 pontos).

Nota-se que o procedimento para eliminar pontos da malha permitiu, para o Exemplo 3, uma redução de 40% sobre as malhas de *normal patterns* e *raster points* e de 25% para as malhas de *regular normal patterns* e *MIM*, em comparação com as respectivas malhas originais.

4.3 Problema da Mochila 0-1 Bidimensional

O problema da mochila 0-1 bidimensional, denotado por 2KP, considera que existe apenas um recipiente e que alguns itens podem não ser empacotados, todavia, deve ser respeitada a quantidade máxima de cópias permitidas para cada item. Seguindo o desenvolvimento anterior, o problema é considerado na sua forma bidimensional, com recipiente retangular e itens retangulares de orientação fixa, sendo a dimensão da largura associada ao eixo de referência x e do comprimento ao eixo de referência y , para o recipiente representado no plano Cartesiano com origem no ponto $(0,0)$. O objetivo do problema é obter um padrão de empacotamento de valor máximo.

O 2KP vai ser utilizado no próximo capítulo como forma de ilustrar o impacto das diferentes malhas e dos procedimentos de redução quando se utiliza um modelo que considera os itens empacotados sobre uma malha. Para tanto, apresentamos um modelo de programação linear inteira e uma heurística para resolvê-lo. A heurística vai ser utilizada para gerar o limitante inferior requerido pelo procedimento de redução proposto para eliminar pontos da malha.

4.3.1 Formulação por programação linear inteira

Uma formulação para o 2KP pode ser obtida a partir do modelo de [Beasley \(1985b\)](#) em (2.1) a (2.4). Neste caso, a malha é obtida pelo produto cartesiano entre os conjuntos de coordenadas ao longo da largura e do comprimento do recipiente conforme a discretização adotada, de modo que $k = (p, q)$ e $u = (s, t)$ são pontos da malha W . Uma forma mais direta para escrever as restrições que evitam a sobreposição entre itens é dada em [Junqueira, Morabito e Yamashita \(2012\)](#), eliminando a necessidade de computar H_{iku} , sendo apresentada em (4.5) como forma de substituir as restrições em (2.2) (ver a Figura 4.12). Além disso, utilizam-se as restrições (4.6) no lugar da (2.3) para restringir o número de cópias de cada item que podem ser empacotadas.

$$\sum_{i \in I} \sum_{\{k=(p,q) \in W \mid s-l_i+1 \leq p \leq s \text{ e } t-c_i+1 \leq q \leq t\}} z_{ik} \leq 1, \quad \text{para todo } u = (s, t) \in W. \quad (4.5)$$

$$\sum_{k \in W} z_{ik} \leq 1, \quad \text{para todo } i \in I. \quad (4.6)$$

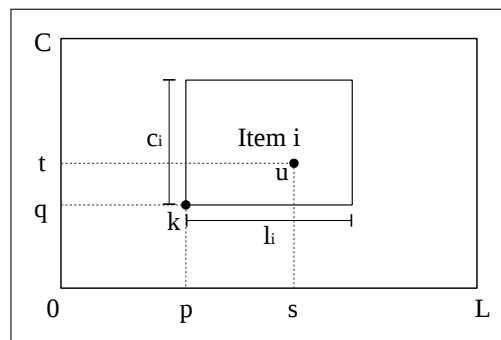
Uma forma de melhorar a convergência da formulação apresentada para o 2KP, com relação a não sobreposição entre itens, é considerar ainda as restrições dadas em (4.7) e (4.8) ([QUEIROZ et al., 2017](#)). Essas novas restrições impõem que a soma das dimensões dos itens em uma dada direção, que cobrem cada coordenada na outra direção, não extrapole a dimensão do recipiente. Para as coordenadas na direção da largura, tem-se as restrições

em (4.7), enquanto para as coordenadas ao longo do comprimento, tem-se as restrições em (4.8). Essas restrições são exemplificadas na Figura 4.13.

$$\sum_{i \in I} \sum_{\{k=(p,q) \in W \mid s-l_i+1 \leq p \leq s \text{ e } q \in Y\}} c_i z_{ik} \leq C, \quad \text{para todo } s \in X; \tag{4.7}$$

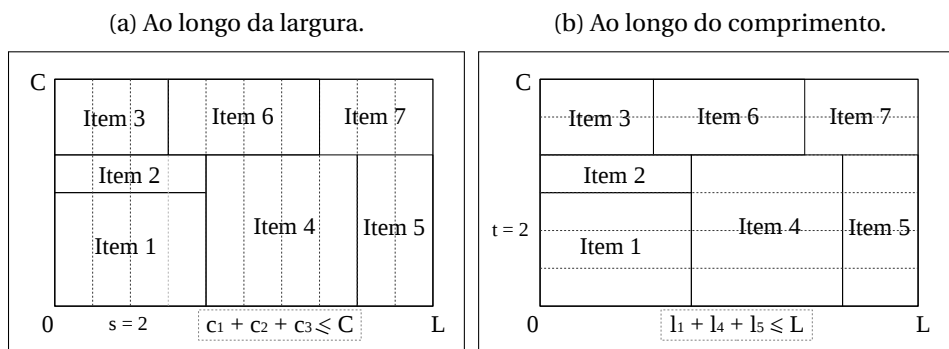
$$\sum_{i \in I} \sum_{\{k=(p,q) \in W \mid p \in X \text{ e } t-c_i+1 \leq q \leq t\}} l_i z_{ik} \leq L, \quad \text{para todo } t \in Y. \tag{4.8}$$

Figura 4.12 – Ilustração das restrições de não sobreposição em (4.5).



Fonte: o autor.

Figura 4.13 – Representação das restrições em (4.7) e (4.8) para ajudar com a não sobreposição de itens.



Fonte: o autor.

4.3.2 Heurística construtiva

Um método heurístico para resolver o 2KP pode ser encontrado no trabalho de [Leung et al. \(2012\)](#). Os autores propuseram uma heurística baseada em recozimento simulado, que usa uma heurística construtiva para realizar o empacotamento dos itens segundo uma dada ordenação. A heurística construtiva seleciona o item que possui melhor aptidão com relação a um espaço vazio no recipiente para realizar o empacotamento. Após empacotar o

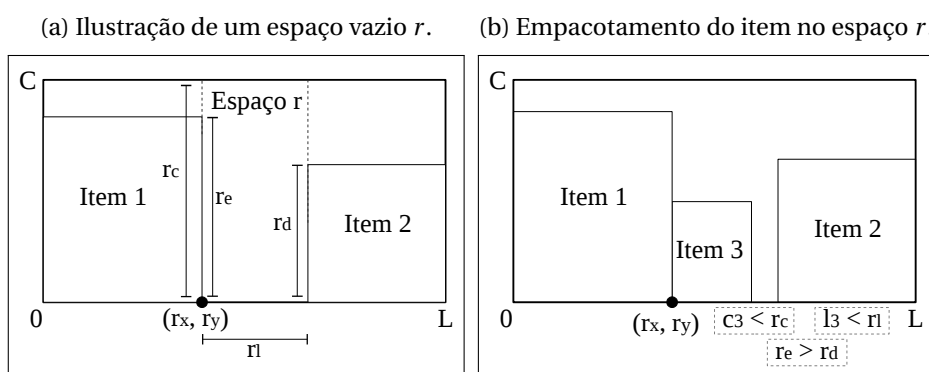
item selecionado, criam-se até dois outros novos espaços vazios, sendo um ao lado direito (ou esquerdo) e o outro acima.

Propõe-se neste trabalho uma combinação dessa heurística construtiva com um fase inicial que gera distintas ordens para empacotar os itens. Considera-se os itens ordenados de forma decrescente pela razão valor por área e também aleatoriamente (até um limite de 20 mil ordens aleatórias), sendo que a cada ordem, chama-se a heurística construtiva. O melhor padrão, isto é, de máximo valor, é retornado ao final como solução para o 2KP.

Na heurística construtiva, os espaços vazios gerados após o empacotamento de um item são determinados observando: horizontalmente, da esquerda para a direita, até um item empacotado ou a lateral do recipiente; e verticalmente, de baixo para cima, até um item empacotado ou a lateral do recipiente. Um espaço vazio r possui canto inferior esquerdo dado por (r_x, r_y) , largura e comprimento dados, respectivamente, por r_l e r_c , e o comprimento da parede do seu lado esquerdo e do seu lado direito dados, respectivamente, por r_e e r_d (ver Figura 4.14a). Os espaços vazios disponíveis para o empacotamento são ordenados, a cada iteração, de forma decrescente por r_y , e guardados em um conjunto R .

Assim, após pegar o primeiro espaço vazio na ordem dada, calcula-se o valor de aptidão dos itens sobre este espaço. O item que melhor ocupar o espaço vazio em termos de largura e comprimento possui o maior valor de aptidão e é empacotado do lado esquerdo do espaço vazio, se $r_e > r_d$; caso contrário, ele é empacotado do lado direito. A Figura 4.14b exemplifica esse processo, sendo o item 3 empacotado no lado esquerdo do espaço r , para $(L, C) = (16, 10)$, $(l_1, c_1) = (6, 8)$, $(l_2, c_2) = (6, 6)$, $(l_3, c_3) = (3, 4)$, $(r_l, r_c) = (4, 10)$, $r_e = 8$ e $r_d = 6$.

Figura 4.14 – Representação de um espaço e o empacotamento de um item pela heurística construtiva.



Fonte: o autor.

A heurística construtiva finaliza após empacotar todos os itens ou checar todos os espaços e não conseguir mais empacotar qualquer item. Vale destacar que, após detectar que um espaço r é inviável para empacotar qualquer item ainda não empacotado, faz-se a união dele com o espaço vazio imediatamente ao seu lado, caso exista, isto é, com o espaço vazio s (a sua direita ou esquerda) que satisfaz $\min |s_y - r_y|$, ou seja, que possui a coordenada

s_y mais próxima de r_y .

A heurística para o 2KP é apresentada no Algoritmo 4.3. Ela contém o Algoritmo 4.4, que é a heurística construtiva que realiza o empacotamento dos itens, e o Algoritmo 4.5, que calcula o valor de aptidão para cada item de acordo com o espaço vazio disponível para empacotamento. Para tanto, considera-se que a variável mC representa a altura corrente do empacotamento, APT_i representa o valor de aptidão do item $i \in I$, SOL representa a solução de um empacotamento e $MAXSOL$ é a melhor solução encontrada, considerando diferentes ordenações do conjunto de itens.

Algoritmo 4.3- Heurística para o 2KP.

Entrada: Conjunto I de n itens com as dimensões (l_i, c_i) para $i \in I$ e as dimensões (L, C) do recipiente.

Saída: Solução para o 2KP.

- 1 Ordene os itens do conjunto I de forma decrescente pela razão valor por área.
 - 2 $MAXSOL \leftarrow$ aplique o Algoritmo 4.4, considerando I na ordenação dada e o recipiente (L, C) .
 - 3 **para** $k \leftarrow 1$ **até** 20000 **faça**
 - 4 Ordene os itens do conjunto I de forma aleatória.
 - 5 $SOL \leftarrow$ aplique o Algoritmo 4.4, considerando I na ordenação dada e o recipiente (L, C) .
 - 6 **se** $SOL > MAXSOL$ **então**
 - 7 $MAXSOL \leftarrow SOL$.
 - 8 **retorna** $MAXSOL$.
-

Algoritmo 4.4- Heurística construtiva.

Entrada: Conjunto I com os itens em uma dada ordem e conjunto J com os itens já empacotados.

Saída: Valor da solução.

```

1   $mC \leftarrow 0$ ;
2   $r \leftarrow$  espaço vazio que corresponde ao recipiente, com  $r_x = 0, r_y = 0, r_e = L$  e  $r_d = L$ ;
3   $R \leftarrow r; J \leftarrow \emptyset$ .
4  enquanto  $mC \leq C$  e  $|R| > 0$  faça
5       $r \leftarrow$  o espaço de  $R$  com menor valor de  $r_y$ .
6      para cada item  $i \in I \setminus J$  faça
7           $APT_i \leftarrow$  aplique o Algoritmo 4.5, considerando o item  $i$  e o espaço  $r$ .
8      Selecione o item  $k$  com maior valor de aptidão  $APT_k$ , para  $k \in I \setminus J$ .
9      se  $APT_k \geq 0$  então
10         se  $r_e \geq r_d$  então
11             Empacote o item  $k$  do lado esquerdo do espaço  $r$ .
12             Atualize o conjunto de espaços  $R$  após ter empacotado  $k$ .
13              $J \leftarrow J \cup \{k\}$ .
14         senão
15             Empacote o item  $k$  do lado direito do espaço  $r$ .
16             Atualize o conjunto de espaços  $R$  após ter empacotado  $k$ .
17              $J \leftarrow J \cup \{k\}$ .
18          $mC \leftarrow \max\{mC, \max\{r_y, r_y + c_i\}\}$ .
19     Selecione espaços em  $R$  que são inviáveis para empacotar qualquer item ainda não
20     empacotado e faça a união deles com o espaço vazio imediatamente ao seu lado.
21 se  $mC > C$  então
22     retorna 0.
23 retorna  $\sum_{k \in J} v_k$ .
```

Algoritmo 4.5- Função de aptidão.

Entrada: Dimensão (l_i, c_i) do item $i \in I$ e espaço r , com: r_l, r_c, r_e e r_d .

Saída: Valor de aptidão do item $i \in I$ para o espaço r .

```

1  se  $r_e > r_d$  então
2    se  $r_l = l_i \ E r_e = c_i$  então
3       $APT_i \leftarrow 4.$ 
4    senão se  $r_l = l_i \ E r_e < c_i \ E r_c \geq c_i$  então
5       $APT_i \leftarrow 3.$ 
6    senão se  $r_l = l_i \ E r_e > c_i$  então
7       $APT_i \leftarrow 2.$ 
8    senão se  $r_l > l_i \ E r_e = c_i$  então
9       $APT_i \leftarrow 1.$ 
10   senão se  $r_l \geq l_i \ E r_c \geq c_i$  então
11      $APT_i \leftarrow 0.$ 
12   senão
13      $APT_i \leftarrow -1.$ 
14 senão
15   se  $r_l = l_i \ E r_d = c_i$  então
16      $APT_i \leftarrow 4.$ 
17   senão se  $r_l = l_i \ E r_d < c_i \ E r_c \geq c_i$  então
18      $APT_i \leftarrow 3.$ 
19   senão se  $r_l = l_i \ E r_d > c_i$  então
20      $APT_i \leftarrow 2.$ 
21   senão se  $r_l > l_i \ E r_d = c_i$  então
22      $APT_i \leftarrow 1.$ 
23   senão se  $r_l \geq l_i \ E r_c \geq c_i$  então
24      $APT_i \leftarrow 0.$ 
25   senão
26      $APT_i \leftarrow -1.$ 
27 retorna  $APT_i.$ 

```

Capítulo 5

RESULTADOS COMPUTACIONAIS

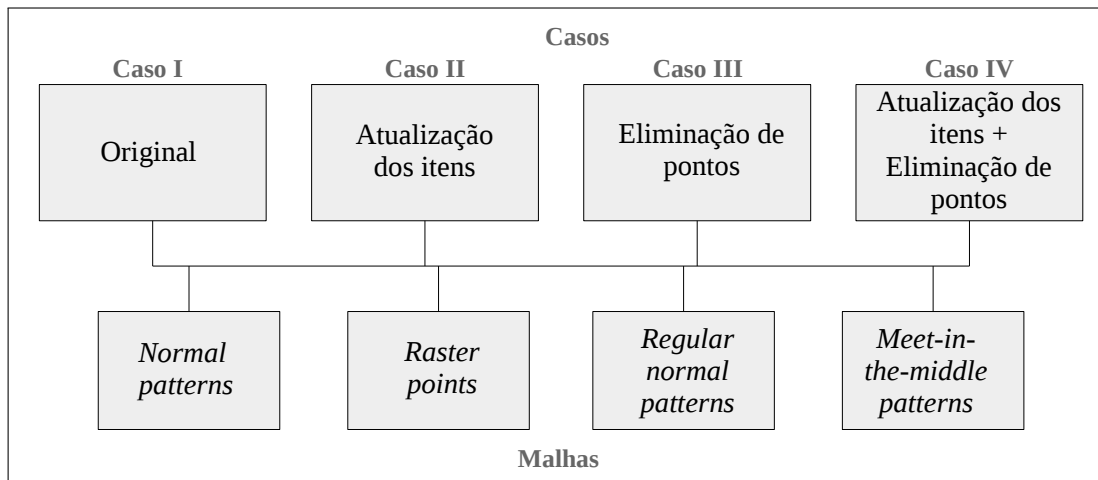
Com o intuito de analisar o tamanho das diferentes malhas e verificar a eficiência dos procedimentos de redução em instâncias de problemas de corte e empacotamento de itens com formato retangular, em particular, de problemas bidimensionais, realizaram-se experimentos computacionais a partir da implementação dos algoritmos para computar as malhas, dos procedimentos de redução e do modelo para o problema da mochila 0-1 bidimensional. Para a realização dos experimentos foi utilizado um computador com sistema operacional Ubuntu 14.04 LTS, processador Intel Core i7-4790k de 4.0 GHz e 32 GB de memória RAM, com os algoritmos implementados na linguagem de programação C/C++. Para resolver o modelo de programação linear inteira foi utilizado o pacote de otimização *Gurobi Optimizer* na versão 7.0.

Nos experimentos computacionais, quatro casos são investigados para quatro das malhas em estudo (ver Figura 5.1), sendo elas: *normal patterns*, *raster points*, *regular normal patterns* e *MIM*. Os casos em análise consideram: malhas originais; malhas após aplicar o procedimento de atualização do tamanho dos itens; malhas após aplicar o procedimento de eliminação de pontos; e, malhas após aplicar os dois procedimentos de redução. As malhas de *useful numbers*, *corner points* e *extreme points* não são consideradas nos experimentos computacionais, primeiro, pela malha de *useful numbers* trazer os mesmos resultados da malha de *normal patterns* e, segundo, por não se conhecer um algoritmo capaz de gerar as malhas de *corner points* e *extreme points* a priori.

Os experimentos consideram 45 instâncias usadas em [Birgin, Lobato e Morabito \(2012\)](#). São elas: GCUT1-GCUT12 de [Beasley \(1985b\)](#); H, HZ1 e HZ2, respectivamente, de [Herz \(1972\)](#), [Hifi e Zissimopoulos \(1996a\)](#) e [Hifi e Zissimopoulos \(1996b\)](#); M1-M5 de [Morabito, Arenales e Arcaro \(1992\)](#); MW1-MW5 de [Hifi \(2001\)](#); UU1-UU8 e UW1-UW11 de [Fayard, Hifi e Zissimopoulos \(1998\)](#); e W2 de [Hifi \(1997\)](#). As instâncias foram usadas assumindo apenas uma cópia para cada item, que pode ter um valor pré-determinado ou ser a sua respectiva área. A Tabela 5.1 apresenta as características das instâncias, sendo: o nome; quantidade n de itens; dimensão L referente a largura do recipiente; e, a dimensão C referente ao compri-

mento do recipiente.

Figura 5.1 – Casos analisados por meio dos experimentos computacionais.



Fonte: o autor.

Tabela 5.1 – Dados das instâncias usadas nos experimentos.

| Nome | <i>n</i> | <i>L</i> | <i>C</i> | Nome | <i>n</i> | <i>L</i> | <i>C</i> | Nome | <i>n</i> | <i>L</i> | <i>C</i> | Nome | <i>n</i> | <i>L</i> | <i>C</i> |
|--------|----------|----------|----------|------|----------|----------|----------|------|----------|----------|----------|------|----------|----------|----------|
| GCUT1 | 10 | 250 | 250 | M1 | 10 | 100 | 156 | H | 5 | 127 | 98 | UW1 | 25 | 500 | 500 |
| GCUT2 | 20 | 250 | 250 | M2 | 10 | 253 | 294 | HZ1 | 6 | 78 | 67 | UW2 | 35 | 560 | 750 |
| GCUT3 | 30 | 250 | 250 | M3 | 10 | 318 | 473 | HZ2 | 5 | 99 | 80 | UW3 | 35 | 700 | 650 |
| GCUT4 | 50 | 250 | 250 | M4 | 10 | 501 | 556 | UU1 | 25 | 500 | 500 | UW4 | 45 | 1245 | 1015 |
| GCUT5 | 10 | 500 | 500 | M5 | 10 | 750 | 806 | UU2 | 30 | 750 | 800 | UW5 | 35 | 1100 | 1450 |
| GCUT6 | 20 | 500 | 500 | MW1 | 10 | 100 | 156 | UU3 | 25 | 1100 | 1000 | UW6 | 47 | 1750 | 1542 |
| GCUT7 | 30 | 500 | 500 | MW2 | 10 | 253 | 294 | UU4 | 38 | 1000 | 1200 | UW7 | 50 | 2250 | 1875 |
| GCUT8 | 50 | 500 | 500 | MW3 | 10 | 318 | 473 | UU5 | 50 | 1450 | 1300 | UW8 | 55 | 2645 | 2763 |
| GCUT9 | 10 | 1000 | 1000 | MW4 | 10 | 501 | 556 | UU6 | 38 | 2050 | 1457 | UW9 | 45 | 3000 | 3250 |
| GCUT10 | 20 | 1000 | 1000 | MW5 | 10 | 750 | 806 | UU7 | 50 | 1465 | 2024 | UW10 | 60 | 3500 | 3650 |
| GCUT11 | 30 | 1000 | 1000 | W2 | 20 | 3427 | 2769 | UU8 | 55 | 2000 | 2000 | UW11 | 30 | 555 | 632 |
| GCUT12 | 50 | 1000 | 1000 | | | | | | | | | | | | |

Fonte: o autor.

5.1 Resultados das Malhas

As Tabelas 5.2 e 5.3 trazem, para cada instância, a quantidade de coordenadas presente nos conjuntos das malhas para os quatro casos considerados. Na Tabela 5.2 são expostos os conjuntos ao longo da largura, enquanto a Tabela 5.3 apresenta os conjuntos ao longo do comprimento do recipiente. O tempo computacional apresentado na Tabela 5.3 refere-se ao tempo gasto em segundos para calcular todos os conjuntos de coordenadas nas duas direções, presentes nas Tabelas 5.2 e 5.3. A Tabela 5.4 traz o número de pontos nas malhas, obtido fazendo o produto cartesiano entre os seus respectivos conjuntos de coordenadas nas Tabelas 5.2 e 5.3. Por outro lado, a Tabela 5.5 apresenta a média do tamanho das malhas considerando todas as instâncias, bem como o valor do desvio padrão para cada

malha e cada caso. Os resultados resumidos dessas tabelas podem ser encontrados na Figura 5.2, que traz o gráfico de barras da média da quantidade de pontos da malha total, envolvendo as 45 instâncias e cada malha.

De acordo com as Tabelas 5.2 e 5.3 é possível observar, com relação as malhas em estudo, que:

- a *raster points*, para o caso original e para o procedimento que elimina pontos, tem o menor conjunto de coordenadas ao longo da largura para 42 instâncias. Nas 3 instâncias restantes, a malha de *raster points* tem o mesmo tamanho de conjunto que a malha de *MIM*;
- ao longo do comprimento, a *raster points*, para o caso original e para o procedimento que elimina pontos, tem o menor conjunto de coordenadas para 39 instâncias. Nas 6 instâncias restantes, a malha de *raster points* tem o mesmo tamanho de conjunto que a malha de *MIM*;
- para o caso das malhas após a atualização do tamanho dos itens e para o caso de aplicação dos dois procedimentos sobre as malhas, tem-se que a *raster points* tem o menor conjunto de coordenadas ao longo da largura e ao longo do comprimento para 27 instâncias. Nas 18 instâncias restantes, a malha de *raster points* tem o mesmo tamanho de conjunto que a malha de *MIM*;
- deste modo, no geral, a malha de *raster points* é a que possui menor tamanho em comparação com as outras malhas em estudo, com a malha de *MIM* sendo a segunda menor e a malha de *regular normal patterns* a terceira.

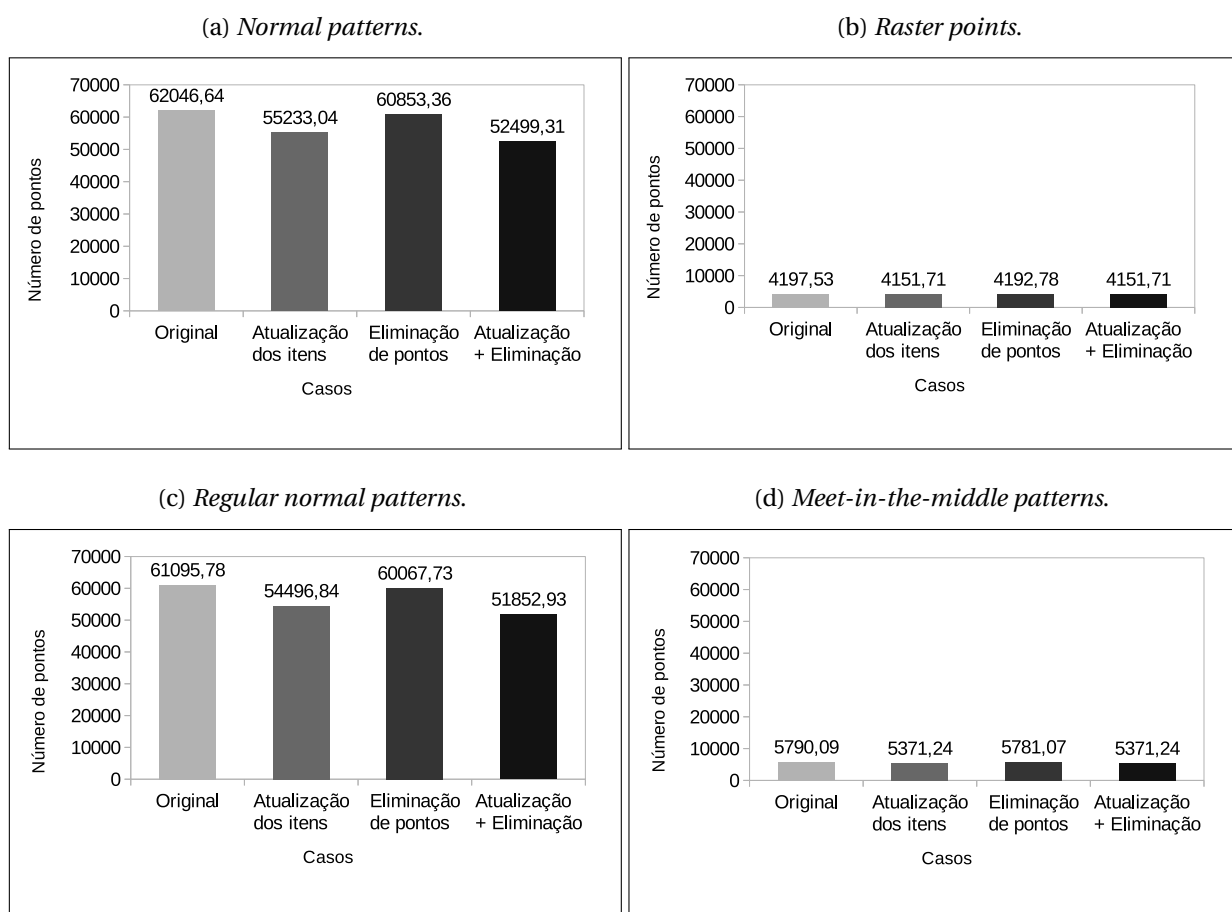
Com relação ao procedimento de atualização do tamanho dos itens, observa-se que:

- ao longo da largura, a cardinalidade dos conjuntos foi reduzida para 42 instâncias. No entanto, uma exceção ocorreu para a malha de *raster points*, a qual teve aumento no número de coordenadas para 8 dessas instâncias;
- ao longo do comprimento, a cardinalidade dos conjuntos foi reduzida para 43 instâncias. No entanto, para a malha de *raster points* houve um aumento no número de coordenadas para 11 dessas instâncias;
- então, o procedimento de atualização do tamanho dos itens é eficaz para reduzir o número de pontos das malhas (além de ainda manter uma solução ótima). O que deve ser observado com cuidado é que esse procedimento não é tão satisfatório com relação a malha de *raster points*, podendo ser preferível não aplicá-lo sobre essa malha.

Considerando o procedimento que elimina pontos da malha, tem-se que ele permitiu reduzir a cardinalidade dos conjuntos para várias instâncias. No entanto, não foi tão eficiente em comparação com o procedimento de atualização do tamanho dos itens. Em geral:

- para 20 instâncias, ao longo da largura e do comprimento, houve redução no número de coordenadas em comparação com as malhas originais;
- para 6 instâncias ao longo da largura e 8 instâncias ao longo do comprimento, houve redução no número de coordenadas em comparação com as malhas após a atualização do tamanho dos itens;
- para 12 instâncias ao longo da largura e 9 instâncias ao longo do comprimento, considerando o procedimento para eliminação de pontos sendo aplicado logo após o procedimento de atualização do tamanho dos itens, houve redução no número de coordenadas em comparação com as malhas após apenas a aplicação do procedimento de atualização do tamanho dos itens.

Figura 5.2 – Quantidade média de pontos nas malhas para cada um dos quatro casos.



Fonte: o autor.

Com relação aos casos em estudo, para as malhas, ao longo da largura, tem-se os menores conjuntos de coordenadas para:

- 3 instâncias, considerando o procedimento de eliminar pontos proposto;
- 11 instâncias, considerando a aplicação de ambos os procedimentos de redução;
- 29 instâncias tiveram empate para dois casos: considerando apenas a atualização dos itens e considerando a aplicação de ambos os procedimentos de redução;
- 2 instâncias tiveram empate para três casos: considerando a aplicação somente da atualização dos itens, somente da eliminação de pontos proposta e considerando os dois procedimentos de redução em conjunto.

Com relação aos casos em estudo, para as malhas, ao longo do comprimento, tem-se os menores conjuntos para:

- 4 instâncias, considerando o procedimento de eliminação de pontos proposto;
- 9 instâncias, considerando a aplicação de ambos os procedimentos de redução;
- 31 instâncias tiveram empate para dois casos: considerando a aplicação apenas da atualização dos itens e considerando a aplicação de ambos os procedimentos de redução;
- 1 instância teve empate para três casos: considerando a aplicação somente da atualização dos itens, somente da eliminação de pontos proposta e considerando os dois procedimentos de redução juntos.

Com isso, para algumas instâncias é interessante utilizar o procedimento de eliminação de pontos proposto a fim de obter malhas com menos pontos do que considerar apenas o procedimento de atualização do tamanho dos itens. No geral, as malhas com menos pontos são as geradas após a aplicação de ambos os procedimentos, primeiro a atualização dos itens e depois a eliminação de pontos proposta, como também pode ser visualizado na Figura 5.2. Ademais, observa-se que o tempo computacional gasto para gerar os conjuntos de coordenadas e aplicar os procedimentos de redução é relativamente pequeno, sendo no pior caso de aproximadamente 16 segundos.

Tabela 5.2 – Conjuntos das malhas, ao longo da largura, para as instâncias.

| Instância | Original | | | | | Atualização dos itens | | | | | Eliminação de pontos | | | | | Atualização + Eliminação | | | | | |
|-----------|----------|---------|---------|------------|------------|-----------------------|---------|---------|------------|------------|----------------------|---------|---------|------------|------------|--------------------------|---------|---------|------------|------------|-----|
| | $ X_d $ | $ X_r $ | $ X_b $ | $ X_{m1} $ | $ X_{m2} $ | $ X_d $ | $ X_r $ | $ X_b $ | $ X_{m1} $ | $ X_{m2} $ | $ X_d $ | $ X_r $ | $ X_b $ | $ X_{m1} $ | $ X_{m2} $ | $ X_d $ | $ X_r $ | $ X_b $ | $ X_{m1} $ | $ X_{m2} $ | |
| GCUT1 | 22 | 12 | 22 | 14 | 14 | 16 | 11 | 16 | 11 | 11 | 22 | 12 | 22 | 14 | 14 | 16 | 11 | 16 | 16 | 11 | 11 |
| GCUT2 | 34 | 14 | 33 | 19 | 19 | 16 | 13 | 16 | 13 | 13 | 29 | 13 | 28 | 17 | 16 | 13 | 16 | 16 | 13 | 13 | 13 |
| GCUT3 | 77 | 43 | 77 | 43 | 43 | 77 | 43 | 77 | 43 | 43 | 66 | 41 | 66 | 41 | 77 | 43 | 77 | 43 | 77 | 43 | 43 |
| GCUT4 | 84 | 44 | 84 | 45 | 45 | 83 | 45 | 83 | 45 | 45 | 69 | 44 | 69 | 45 | 69 | 45 | 69 | 45 | 69 | 45 | 45 |
| GCUT5 | 15 | 9 | 15 | 9 | 9 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 15 | 9 | 15 | 9 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| GCUT6 | 32 | 11 | 30 | 16 | 16 | 18 | 11 | 17 | 11 | 11 | 29 | 11 | 27 | 16 | 18 | 11 | 17 | 11 | 17 | 11 | 11 |
| GCUT7 | 62 | 22 | 62 | 31 | 31 | 45 | 25 | 45 | 25 | 25 | 57 | 22 | 57 | 31 | 45 | 25 | 45 | 25 | 45 | 25 | 25 |
| GCUT8 | 94 | 43 | 94 | 44 | 44 | 88 | 43 | 88 | 43 | 43 | 85 | 43 | 85 | 44 | 88 | 43 | 88 | 43 | 88 | 43 | 43 |
| GCUT9 | 25 | 14 | 25 | 16 | 16 | 18 | 13 | 18 | 13 | 13 | 23 | 13 | 23 | 15 | 18 | 13 | 18 | 13 | 18 | 13 | 13 |
| GCUT10 | 27 | 11 | 21 | 15 | 15 | 14 | 11 | 11 | 11 | 11 | 24 | 11 | 19 | 15 | 14 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 |
| GCUT11 | 62 | 17 | 62 | 26 | 26 | 25 | 17 | 25 | 17 | 17 | 54 | 17 | 59 | 26 | 25 | 17 | 25 | 17 | 25 | 17 | 17 |
| GCUT12 | 147 | 46 | 146 | 51 | 51 | 137 | 47 | 136 | 47 | 47 | 128 | 46 | 127 | 50 | 116 | 47 | 124 | 47 | 124 | 47 | 47 |
| H | 21 | 12 | 20 | 20 | 20 | 21 | 15 | 20 | 17 | 17 | 21 | 12 | 20 | 20 | 21 | 15 | 20 | 20 | 20 | 17 | 17 |
| HZ1 | 47 | 34 | 45 | 43 | 43 | 37 | 30 | 36 | 33 | 33 | 47 | 34 | 45 | 43 | 37 | 30 | 36 | 33 | 33 | 33 | 33 |
| HZ2 | 16 | 15 | 16 | 15 | 15 | 16 | 15 | 16 | 15 | 15 | 16 | 15 | 16 | 15 | 16 | 15 | 16 | 15 | 16 | 15 | 15 |
| M1 | 27 | 16 | 27 | 17 | 17 | 24 | 15 | 23 | 16 | 16 | 27 | 16 | 27 | 17 | 24 | 15 | 23 | 16 | 16 | 16 | 16 |
| M2 | 83 | 41 | 82 | 45 | 45 | 64 | 41 | 64 | 45 | 45 | 83 | 41 | 82 | 45 | 64 | 41 | 64 | 45 | 64 | 45 | 45 |
| M3 | 23 | 10 | 21 | 14 | 14 | 10 | 9 | 10 | 9 | 9 | 23 | 10 | 21 | 14 | 10 | 9 | 10 | 9 | 10 | 9 | 9 |
| M4 | 42 | 16 | 39 | 20 | 20 | 29 | 15 | 27 | 17 | 17 | 40 | 16 | 38 | 20 | 27 | 15 | 26 | 17 | 17 | 17 | 17 |
| M5 | 43 | 16 | 40 | 20 | 20 | 29 | 15 | 27 | 17 | 17 | 41 | 16 | 39 | 20 | 27 | 15 | 26 | 17 | 17 | 17 | 17 |
| MW1 | 27 | 16 | 27 | 17 | 17 | 24 | 15 | 23 | 16 | 16 | 27 | 16 | 27 | 17 | 24 | 15 | 23 | 16 | 16 | 16 | 16 |
| MW2 | 83 | 41 | 82 | 45 | 45 | 64 | 41 | 64 | 45 | 45 | 83 | 41 | 82 | 45 | 64 | 41 | 64 | 45 | 64 | 45 | 45 |
| MW3 | 23 | 10 | 21 | 14 | 14 | 10 | 9 | 10 | 9 | 9 | 23 | 10 | 21 | 14 | 10 | 9 | 10 | 9 | 10 | 9 | 9 |
| MW4 | 42 | 16 | 39 | 20 | 20 | 29 | 15 | 27 | 17 | 17 | 42 | 16 | 39 | 20 | 29 | 15 | 27 | 17 | 17 | 17 | 17 |
| MW5 | 43 | 16 | 40 | 20 | 20 | 29 | 15 | 27 | 17 | 17 | 41 | 16 | 39 | 20 | 29 | 15 | 27 | 17 | 17 | 17 | 17 |
| UU1 | 67 | 26 | 67 | 32 | 32 | 34 | 21 | 34 | 21 | 21 | 44 | 26 | 44 | 30 | 26 | 21 | 26 | 21 | 26 | 21 | 21 |
| UU2 | 166 | 54 | 165 | 58 | 58 | 163 | 54 | 163 | 59 | 59 | 132 | 54 | 131 | 58 | 129 | 54 | 129 | 59 | 59 | 59 | 59 |
| UU3 | 157 | 41 | 156 | 49 | 49 | 130 | 41 | 127 | 45 | 45 | 137 | 41 | 136 | 49 | 113 | 41 | 112 | 45 | 112 | 45 | 45 |
| UU4 | 204 | 58 | 204 | 74 | 74 | 199 | 58 | 199 | 74 | 74 | 203 | 58 | 203 | 74 | 195 | 58 | 193 | 74 | 193 | 74 | 74 |
| UU5 | 379 | 104 | 379 | 112 | 112 | 372 | 100 | 372 | 108 | 108 | 374 | 104 | 373 | 112 | 272 | 100 | 272 | 108 | 108 | 108 | 108 |
| UU6 | 242 | 54 | 240 | 71 | 71 | 166 | 54 | 164 | 54 | 54 | 200 | 54 | 208 | 71 | 139 | 54 | 144 | 54 | 144 | 54 | 54 |
| UU7 | 428 | 133 | 428 | 167 | 167 | 421 | 133 | 421 | 166 | 166 | 408 | 133 | 412 | 167 | 379 | 133 | 376 | 166 | 166 | 166 | 166 |
| UU8 | 487 | 105 | 486 | 119 | 119 | 468 | 105 | 465 | 117 | 117 | 487 | 105 | 486 | 119 | 455 | 105 | 462 | 117 | 117 | 117 | 117 |
| UW1 | 90 | 28 | 88 | 39 | 39 | 65 | 27 | 65 | 27 | 27 | 90 | 28 | 88 | 39 | 65 | 27 | 65 | 27 | 65 | 27 | 27 |
| UW2 | 191 | 76 | 191 | 84 | 84 | 190 | 76 | 190 | 84 | 84 | 191 | 76 | 191 | 84 | 190 | 76 | 190 | 84 | 84 | 84 | 84 |
| UW3 | 142 | 46 | 140 | 54 | 54 | 117 | 41 | 114 | 47 | 47 | 142 | 46 | 140 | 54 | 117 | 41 | 114 | 47 | 47 | 47 | 47 |
| UW4 | 350 | 108 | 350 | 121 | 121 | 349 | 108 | 349 | 122 | 122 | 350 | 108 | 350 | 121 | 349 | 108 | 349 | 122 | 122 | 122 | 122 |
| UW5 | 200 | 54 | 198 | 66 | 66 | 185 | 55 | 181 | 63 | 63 | 200 | 54 | 198 | 66 | 185 | 55 | 181 | 63 | 63 | 63 | 63 |
| UW6 | 380 | 91 | 380 | 103 | 103 | 356 | 90 | 355 | 102 | 102 | 380 | 91 | 380 | 103 | 356 | 90 | 355 | 102 | 102 | 102 | 102 |
| UW7 | 407 | 88 | 407 | 100 | 100 | 387 | 89 | 386 | 96 | 96 | 407 | 88 | 407 | 100 | 387 | 89 | 386 | 96 | 96 | 96 | 96 |
| UW8 | 549 | 112 | 547 | 135 | 135 | 524 | 112 | 522 | 131 | 131 | 549 | 112 | 547 | 135 | 524 | 112 | 522 | 131 | 131 | 131 | 131 |
| UW9 | 411 | 73 | 406 | 89 | 89 | 351 | 75 | 348 | 83 | 83 | 411 | 73 | 406 | 89 | 351 | 75 | 348 | 83 | 83 | 83 | 83 |
| UW10 | 774 | 166 | 774 | 191 | 191 | 767 | 164 | 767 | 190 | 190 | 774 | 166 | 774 | 191 | 767 | 164 | 767 | 190 | 190 | 190 | 190 |
| UW11 | 267 | 161 | 267 | 167 | 167 | 267 | 161 | 267 | 167 | 167 | 267 | 161 | 267 | 167 | 267 | 161 | 267 | 167 | 167 | 167 | 167 |
| W2 | 756 | 135 | 737 | 169 | 169 | 719 | 133 | 702 | 163 | 163 | 756 | 135 | 737 | 169 | 719 | 133 | 702 | 163 | 163 | 163 | 163 |

Fonte: o autor.

Tabela 5.3 – Conjuntos das malhas, ao longo do comprimento, para as instâncias.

| Instância | Original | | | Atualização dos itens | | | Eliminação de pontos | | | Atualização + Eliminação | | | Tempo (s) | | | |
|-----------|----------|---------|---------|-----------------------|---------|---------|----------------------|---------|---------|--------------------------|---------|---------|-----------|-----|------|-------|
| | $ Y_d $ | $ Y_r $ | $ Y_m $ | $ Y_d $ | $ Y_r $ | $ Y_m $ | $ Y_d $ | $ Y_r $ | $ Y_m $ | $ Y_d $ | $ Y_r $ | $ Y_m $ | | | | |
| GCUT1 | 8 | 4 | 8 | 4 | 3 | 3 | 3 | 8 | 4 | 8 | 4 | 3 | 3 | 3 | 0,40 | |
| GCUT2 | 47 | 23 | 47 | 25 | 42 | 42 | 23 | 41 | 23 | 41 | 25 | 42 | 23 | 42 | 23 | 1,04 |
| GCUT3 | 40 | 25 | 40 | 25 | 35 | 35 | 25 | 29 | 25 | 29 | 25 | 35 | 25 | 35 | 25 | 1,76 |
| GCUT4 | 80 | 48 | 80 | 50 | 76 | 76 | 47 | 78 | 47 | 78 | 49 | 75 | 47 | 75 | 47 | 2,86 |
| GCUT5 | 22 | 10 | 22 | 16 | 21 | 21 | 15 | 22 | 10 | 22 | 16 | 21 | 15 | 21 | 15 | 0,52 |
| GCUT6 | 37 | 17 | 37 | 21 | 22 | 22 | 15 | 35 | 17 | 35 | 21 | 22 | 15 | 22 | 15 | 0,88 |
| GCUT7 | 32 | 18 | 27 | 23 | 21 | 17 | 17 | 28 | 17 | 25 | 23 | 21 | 17 | 17 | 17 | 1,27 |
| GCUT8 | 132 | 58 | 132 | 58 | 129 | 57 | 129 | 120 | 57 | 120 | 57 | 129 | 57 | 129 | 57 | 3,16 |
| GCUT9 | 10 | 6 | 10 | 10 | 7 | 7 | 7 | 8 | 4 | 8 | 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 0,49 |
| GCUT10 | 48 | 17 | 46 | 21 | 35 | 17 | 35 | 43 | 17 | 41 | 19 | 35 | 17 | 35 | 17 | 0,85 |
| GCUT11 | 103 | 35 | 103 | 39 | 91 | 35 | 91 | 99 | 35 | 101 | 38 | 91 | 35 | 91 | 35 | 1,73 |
| GCUT12 | 114 | 41 | 114 | 41 | 106 | 41 | 106 | 99 | 41 | 99 | 41 | 92 | 41 | 95 | 41 | 3,38 |
| H | 20 | 13 | 19 | 18 | 12 | 10 | 12 | 20 | 13 | 19 | 18 | 12 | 10 | 12 | 10 | 0,54 |
| HZ1 | 14 | 9 | 12 | 12 | 6 | 5 | 5 | 14 | 9 | 12 | 12 | 6 | 5 | 5 | 5 | 0,80 |
| HZ2 | 27 | 18 | 26 | 25 | 19 | 17 | 19 | 27 | 18 | 26 | 25 | 19 | 17 | 19 | 17 | 0,62 |
| M1 | 34 | 14 | 32 | 18 | 31 | 16 | 31 | 33 | 14 | 31 | 18 | 31 | 16 | 31 | 17 | 0,86 |
| M2 | 33 | 14 | 31 | 17 | 24 | 15 | 23 | 33 | 14 | 31 | 17 | 24 | 15 | 23 | 16 | 1,35 |
| M3 | 65 | 25 | 53 | 27 | 60 | 25 | 50 | 61 | 25 | 50 | 27 | 56 | 25 | 48 | 27 | 0,97 |
| M4 | 46 | 12 | 42 | 21 | 35 | 17 | 33 | 45 | 12 | 41 | 21 | 35 | 17 | 33 | 18 | 1,00 |
| M5 | 46 | 13 | 42 | 21 | 34 | 17 | 32 | 45 | 13 | 41 | 21 | 34 | 17 | 32 | 18 | 0,97 |
| MW1 | 34 | 14 | 32 | 18 | 31 | 16 | 31 | 34 | 14 | 32 | 18 | 31 | 16 | 31 | 17 | 0,89 |
| MW2 | 33 | 14 | 31 | 17 | 24 | 15 | 23 | 33 | 14 | 31 | 17 | 24 | 15 | 23 | 16 | 1,40 |
| MW3 | 65 | 25 | 53 | 27 | 60 | 25 | 50 | 65 | 25 | 53 | 27 | 60 | 25 | 50 | 27 | 0,95 |
| MW4 | 46 | 12 | 42 | 21 | 35 | 17 | 33 | 46 | 12 | 42 | 21 | 35 | 17 | 33 | 18 | 0,98 |
| MW5 | 46 | 13 | 42 | 21 | 34 | 17 | 32 | 46 | 13 | 42 | 21 | 34 | 17 | 32 | 18 | 0,98 |
| UU1 | 95 | 36 | 95 | 40 | 76 | 33 | 76 | 72 | 36 | 72 | 40 | 64 | 33 | 64 | 35 | 2,15 |
| UU2 | 142 | 35 | 138 | 42 | 107 | 35 | 104 | 100 | 35 | 99 | 42 | 76 | 35 | 75 | 36 | 5,44 |
| UU3 | 110 | 34 | 109 | 40 | 88 | 34 | 88 | 108 | 34 | 107 | 40 | 88 | 34 | 88 | 38 | 4,76 |
| UU4 | 306 | 76 | 304 | 84 | 278 | 76 | 275 | 306 | 76 | 304 | 84 | 271 | 76 | 266 | 81 | 7,86 |
| UU5 | 367 | 111 | 367 | 133 | 366 | 111 | 366 | 365 | 111 | 362 | 133 | 280 | 111 | 280 | 135 | 11,77 |
| UU6 | 180 | 49 | 179 | 49 | 172 | 49 | 172 | 177 | 49 | 179 | 49 | 172 | 49 | 172 | 49 | 4,89 |
| UU7 | 505 | 128 | 505 | 146 | 498 | 128 | 498 | 493 | 128 | 500 | 146 | 458 | 128 | 457 | 144 | 13,70 |
| UU8 | 347 | 84 | 347 | 93 | 320 | 81 | 320 | 347 | 84 | 347 | 93 | 319 | 81 | 320 | 86 | 13,13 |
| UW1 | 103 | 32 | 102 | 40 | 78 | 31 | 78 | 103 | 32 | 102 | 40 | 78 | 31 | 78 | 31 | 2,41 |
| UW2 | 187 | 57 | 187 | 65 | 184 | 59 | 183 | 187 | 57 | 187 | 65 | 184 | 59 | 183 | 65 | 4,55 |
| UW3 | 174 | 54 | 174 | 68 | 165 | 55 | 165 | 174 | 54 | 174 | 68 | 165 | 55 | 165 | 66 | 3,82 |
| UW4 | 314 | 117 | 314 | 122 | 318 | 117 | 318 | 314 | 117 | 314 | 122 | 318 | 117 | 318 | 124 | 8,63 |
| UW5 | 172 | 48 | 170 | 58 | 150 | 47 | 150 | 172 | 48 | 170 | 58 | 150 | 47 | 150 | 55 | 4,15 |
| UW6 | 371 | 86 | 371 | 100 | 369 | 86 | 368 | 371 | 86 | 371 | 100 | 369 | 86 | 368 | 102 | 8,98 |
| UW7 | 442 | 108 | 442 | 131 | 425 | 108 | 424 | 442 | 108 | 442 | 131 | 425 | 108 | 424 | 128 | 9,71 |
| UW8 | 667 | 161 | 667 | 190 | 664 | 161 | 664 | 667 | 161 | 667 | 190 | 664 | 161 | 664 | 191 | 15,23 |
| UW9 | 437 | 78 | 436 | 108 | 389 | 78 | 389 | 437 | 78 | 436 | 108 | 389 | 78 | 389 | 99 | 9,01 |
| UW10 | 761 | 125 | 761 | 217 | 685 | 125 | 685 | 761 | 125 | 761 | 217 | 685 | 125 | 685 | 186 | 15,98 |
| UW11 | 319 | 202 | 319 | 202 | 319 | 202 | 319 | 319 | 202 | 319 | 202 | 319 | 202 | 319 | 202 | 9,29 |
| W2 | 381 | 73 | 348 | 87 | 327 | 67 | 301 | 381 | 73 | 348 | 87 | 327 | 67 | 301 | 81 | 11,85 |

Fonte: o autor.

Tabela 5.4 – Malhas totais para as instâncias.

| Instância | Original | | | Atualização dos itens | | | Eliminação de pontos | | | Atualização + Eliminação | | | |
|-----------|----------|--------|---------|-----------------------|--------|---------|----------------------|--------|---------|--------------------------|--------|---------|-------|
| | Normal | Raster | Regular | Normal | Raster | Regular | Normal | Raster | Regular | Normal | Raster | Regular | MIM |
| GCUT1 | 176 | 48 | 176 | 48 | 33 | 48 | 176 | 48 | 176 | 48 | 33 | 48 | 33 |
| GCUT2 | 1598 | 322 | 1551 | 672 | 299 | 672 | 1189 | 299 | 1148 | 425 | 672 | 299 | 299 |
| GCUT3 | 3080 | 1075 | 3080 | 2695 | 1075 | 2695 | 1914 | 1025 | 1914 | 1025 | 2695 | 1075 | 1075 |
| GCUT4 | 6720 | 2112 | 6720 | 6308 | 2115 | 6308 | 5382 | 2068 | 5382 | 2205 | 5175 | 2115 | 2115 |
| GCUT5 | 330 | 90 | 330 | 147 | 105 | 147 | 330 | 90 | 330 | 144 | 147 | 105 | 105 |
| GCUT6 | 1184 | 187 | 1110 | 396 | 165 | 374 | 1015 | 187 | 945 | 336 | 396 | 165 | 165 |
| GCUT7 | 1984 | 396 | 1674 | 945 | 425 | 765 | 1596 | 374 | 1425 | 713 | 945 | 425 | 425 |
| GCUT8 | 12408 | 2494 | 12408 | 11352 | 2451 | 11352 | 10200 | 2451 | 10200 | 2508 | 11352 | 2451 | 2451 |
| GCUT9 | 250 | 84 | 250 | 126 | 91 | 126 | 184 | 52 | 184 | 120 | 126 | 91 | 91 |
| GCUT10 | 1296 | 187 | 966 | 490 | 187 | 385 | 1032 | 187 | 779 | 285 | 490 | 187 | 187 |
| GCUT11 | 6386 | 595 | 6386 | 2275 | 595 | 2275 | 5346 | 595 | 5959 | 988 | 2275 | 595 | 595 |
| GCUT12 | 16758 | 1886 | 16644 | 14522 | 1927 | 14416 | 12672 | 1886 | 12573 | 2050 | 10672 | 1927 | 1927 |
| H | 420 | 156 | 380 | 252 | 150 | 240 | 420 | 156 | 380 | 360 | 252 | 150 | 170 |
| HZ1 | 658 | 306 | 540 | 222 | 150 | 180 | 658 | 306 | 540 | 516 | 222 | 150 | 165 |
| HZ2 | 432 | 270 | 416 | 304 | 255 | 304 | 432 | 270 | 416 | 375 | 304 | 255 | 255 |
| M1 | 918 | 224 | 864 | 744 | 240 | 713 | 891 | 224 | 837 | 306 | 744 | 240 | 272 |
| M2 | 2739 | 574 | 2542 | 1536 | 615 | 1472 | 2739 | 574 | 2542 | 765 | 1536 | 615 | 720 |
| M3 | 1495 | 250 | 1113 | 600 | 225 | 500 | 1403 | 250 | 1050 | 378 | 560 | 225 | 243 |
| M4 | 1932 | 192 | 1638 | 1015 | 255 | 891 | 1800 | 192 | 1558 | 420 | 945 | 255 | 306 |
| M5 | 1978 | 208 | 1680 | 986 | 255 | 864 | 1845 | 208 | 1599 | 420 | 918 | 255 | 306 |
| MW1 | 918 | 224 | 864 | 744 | 240 | 713 | 918 | 224 | 864 | 306 | 744 | 240 | 272 |
| MW2 | 2739 | 574 | 2542 | 1536 | 615 | 1472 | 2739 | 574 | 2542 | 765 | 1536 | 615 | 720 |
| MW3 | 1495 | 250 | 1113 | 600 | 225 | 500 | 1495 | 250 | 1113 | 378 | 600 | 225 | 243 |
| MW4 | 1932 | 192 | 1638 | 1015 | 255 | 891 | 1932 | 192 | 1638 | 420 | 1015 | 255 | 306 |
| MW5 | 1978 | 208 | 1680 | 986 | 255 | 864 | 1886 | 208 | 1638 | 420 | 986 | 255 | 306 |
| UU1 | 6365 | 936 | 6365 | 2584 | 693 | 2584 | 3168 | 936 | 3168 | 1200 | 1664 | 693 | 735 |
| UU2 | 23572 | 1890 | 22770 | 17441 | 1890 | 16952 | 13200 | 1890 | 12969 | 2436 | 9804 | 1890 | 2124 |
| UU3 | 17270 | 1394 | 17004 | 11440 | 1394 | 11176 | 14796 | 1394 | 14552 | 1960 | 9944 | 1394 | 1710 |
| UU4 | 62424 | 4408 | 62016 | 55322 | 4408 | 54725 | 62118 | 4408 | 61712 | 6216 | 52845 | 4408 | 5994 |
| UU5 | 139093 | 11544 | 139093 | 136152 | 11100 | 136152 | 136510 | 11544 | 135026 | 14896 | 76160 | 11100 | 14580 |
| UU6 | 43560 | 2646 | 42960 | 28552 | 2646 | 28208 | 35400 | 2646 | 37232 | 3479 | 23908 | 2646 | 2646 |
| UU7 | 216140 | 17024 | 216140 | 209658 | 17024 | 209658 | 201144 | 17024 | 206000 | 24382 | 173582 | 17024 | 23904 |
| UU8 | 168989 | 8820 | 166642 | 149760 | 8505 | 148800 | 169899 | 8820 | 168642 | 11067 | 145145 | 8505 | 10062 |
| UW1 | 9270 | 896 | 8976 | 5070 | 837 | 5070 | 9270 | 896 | 8976 | 1560 | 5070 | 837 | 837 |
| UW2 | 35717 | 4332 | 35717 | 34960 | 4484 | 34770 | 35717 | 4332 | 35717 | 5460 | 34960 | 4484 | 5460 |
| UW3 | 24708 | 2484 | 24360 | 19305 | 2255 | 18810 | 24708 | 2484 | 24360 | 3672 | 19305 | 2255 | 3102 |
| UW4 | 109900 | 12636 | 109900 | 110982 | 12636 | 110982 | 109900 | 12636 | 109900 | 14762 | 110982 | 12636 | 15128 |
| UW5 | 34400 | 2592 | 33660 | 27750 | 2585 | 27150 | 34400 | 2592 | 33660 | 3828 | 27750 | 2585 | 3465 |
| UW6 | 140980 | 7826 | 140980 | 131364 | 7740 | 130640 | 140980 | 7826 | 140980 | 10300 | 131364 | 7740 | 10404 |
| UW7 | 179894 | 9504 | 179894 | 164475 | 9612 | 163664 | 179894 | 9504 | 179894 | 13100 | 164475 | 9612 | 12288 |
| UW8 | 366183 | 18032 | 364849 | 347936 | 18032 | 346608 | 366183 | 18032 | 364849 | 25021 | 347936 | 18032 | 25021 |
| UW9 | 179607 | 5694 | 177016 | 136539 | 5850 | 135372 | 179607 | 5694 | 177016 | 9612 | 136539 | 5850 | 8217 |
| UW10 | 589014 | 20750 | 589014 | 525395 | 20500 | 525395 | 589014 | 20750 | 589014 | 41447 | 525395 | 20500 | 35340 |
| UW11 | 85173 | 32522 | 85173 | 85173 | 32522 | 85173 | 85173 | 32522 | 85173 | 33734 | 85173 | 32522 | 33734 |
| W2 | 288036 | 9855 | 256476 | 235113 | 8911 | 211302 | 288036 | 9855 | 256476 | 14703 | 235113 | 8911 | 13203 |

Fonte: o autor.

Tabela 5.5 – Média e desvio padrão do tamanho (quantidade de pontos) das malhas para as 45 instâncias.

| Caso | Original | | | |
|---------------|---------------------------------|---------------|----------------|------------|
| Malha | <i>Normal</i> | <i>Raster</i> | <i>Regular</i> | <i>MIM</i> |
| Média | 62046,64 | 4197,53 | 61095,78 | 5790,09 |
| Desvio Padrão | 115433,69 | 6740,91 | 114061,74 | 9300,80 |
| Caso | Atualização dos itens | | | |
| Malha | <i>Normal</i> | <i>Raster</i> | <i>Regular</i> | <i>MIM</i> |
| Média | 55233,04 | 4151,71 | 54496,84 | 5371,24 |
| Desvio Padrão | 104312,98 | 6701,23 | 103333,25 | 8756,89 |
| Caso | Eliminação de pontos | | | |
| Malha | <i>Normal</i> | <i>Raster</i> | <i>Regular</i> | <i>MIM</i> |
| Média | 60853,36 | 4192,78 | 60067,73 | 5781,07 |
| Desvio Padrão | 115264,81 | 6742,99 | 113969,68 | 9305,19 |
| Caso | Atualização + Eliminação | | | |
| Malha | <i>Normal</i> | <i>Raster</i> | <i>Regular</i> | <i>MIM</i> |
| Média | 52499,31 | 4151,71 | 51852,93 | 5371,24 |
| Desvio Padrão | 102644,73 | 6701,23 | 101636,74 | 8756,89 |

Fonte: o autor.

Para melhor analisar as reduções entre as malhas, apresentam-se as Tabelas 5.6, 5.7 e 5.8 com as porcentagens de redução, as médias, os desvios padrão, os valores mínimos e máximos. O cálculo das porcentagens foi realizado considerando as malhas totais para todas as 45 instâncias, conforme dado na Tabela 5.4. A Tabela 5.6, com resultados sumarizados na Figura 5.3, traz as reduções entre as malhas para os quatro casos da Figura 5.1, enquanto as Tabelas 5.7 e 5.8, com resultados sumarizados na Figura 5.4, trazem as reduções das malhas entre os quatro casos.

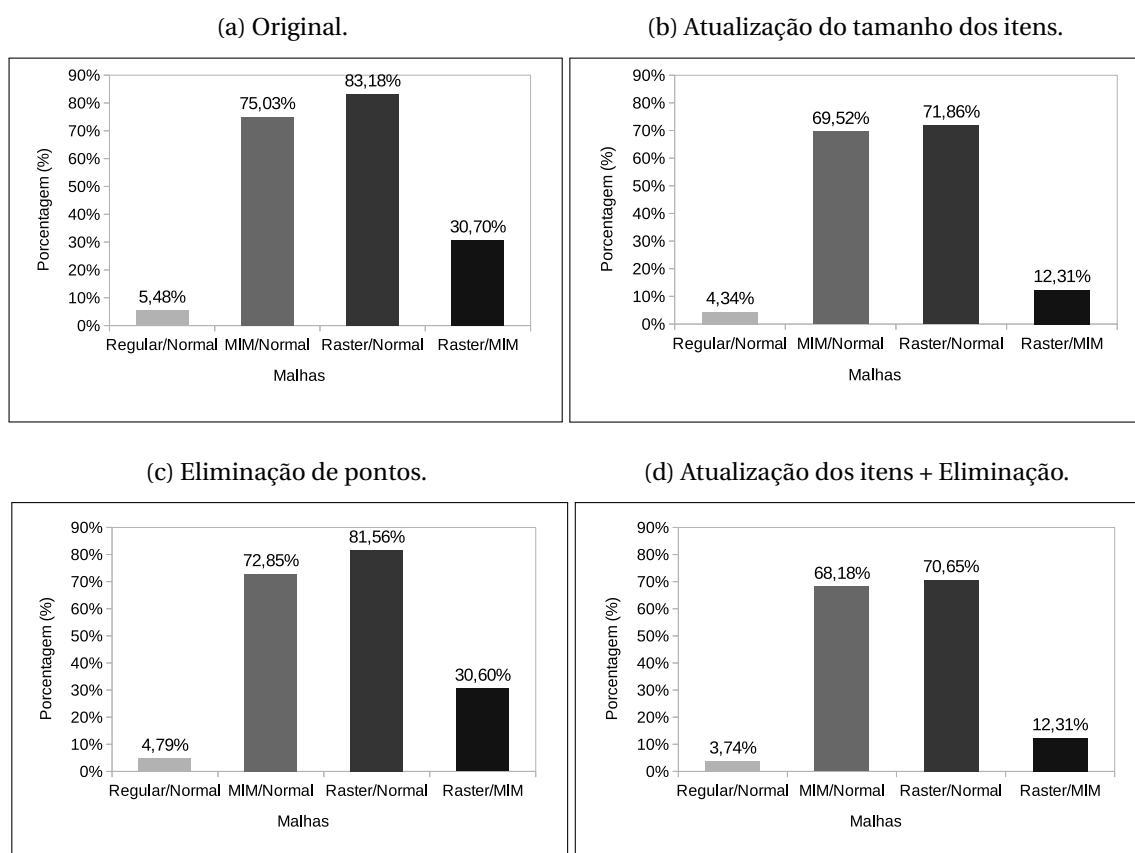
Na Tabela 5.6, os valores de redução foram calculados para uma malha com relação a outra malha, dado um dos casos da Figura 5.1. Por exemplo, para o caso das malhas originais, calcula-se a porcentagem de quanto a malha de *regular normal patterns* é menor do que a *normal patterns*, sendo representado na tabela por *Regular/Normal*. E, de modo análogo, faz-se considerando as outras malhas. Se a porcentagem de redução possuir valor negativo, significa que a primeira malha em análise não é menor do que a segunda malha que está sendo usada para efeitos de comparação.

Observando a Tabela 5.6 e a Figura 5.3, tem-se que:

- a malha de *raster points* é a que possui a maior redução quando comparada com a malha de *normal patterns*. Para o caso das malhas originais, a média de redução é de 83,18%, com desvio padrão de 12,61%, valor mínimo de 37,50% e valor máximo de 96,83%;
- ao considerar a aplicação dos dois procedimentos de redução, tem-se uma menor di-

ferença entre o tamanho das malhas em comparação com os outros casos em estudo. A menor diferença, com relação aos outros casos, ocorre entre a malha de *raster points* e a de *MIM*. Para o caso original, a malha de *raster points* é, em média, 30,70% menor do que a *MIM*, com desvio padrão de 14,03%, valor mínimo nulo e máximo de 56,67%. Para o caso de aplicação de ambos os procedimentos de redução, a malha de *raster points* é, em média, 12,31% menor do que a *MIM*, com desvio padrão de 11,26%, valor mínimo nulo e máximo de 41,99%.

Figura 5.3 – Redução percentual entre as malhas considerando um mesmo caso.



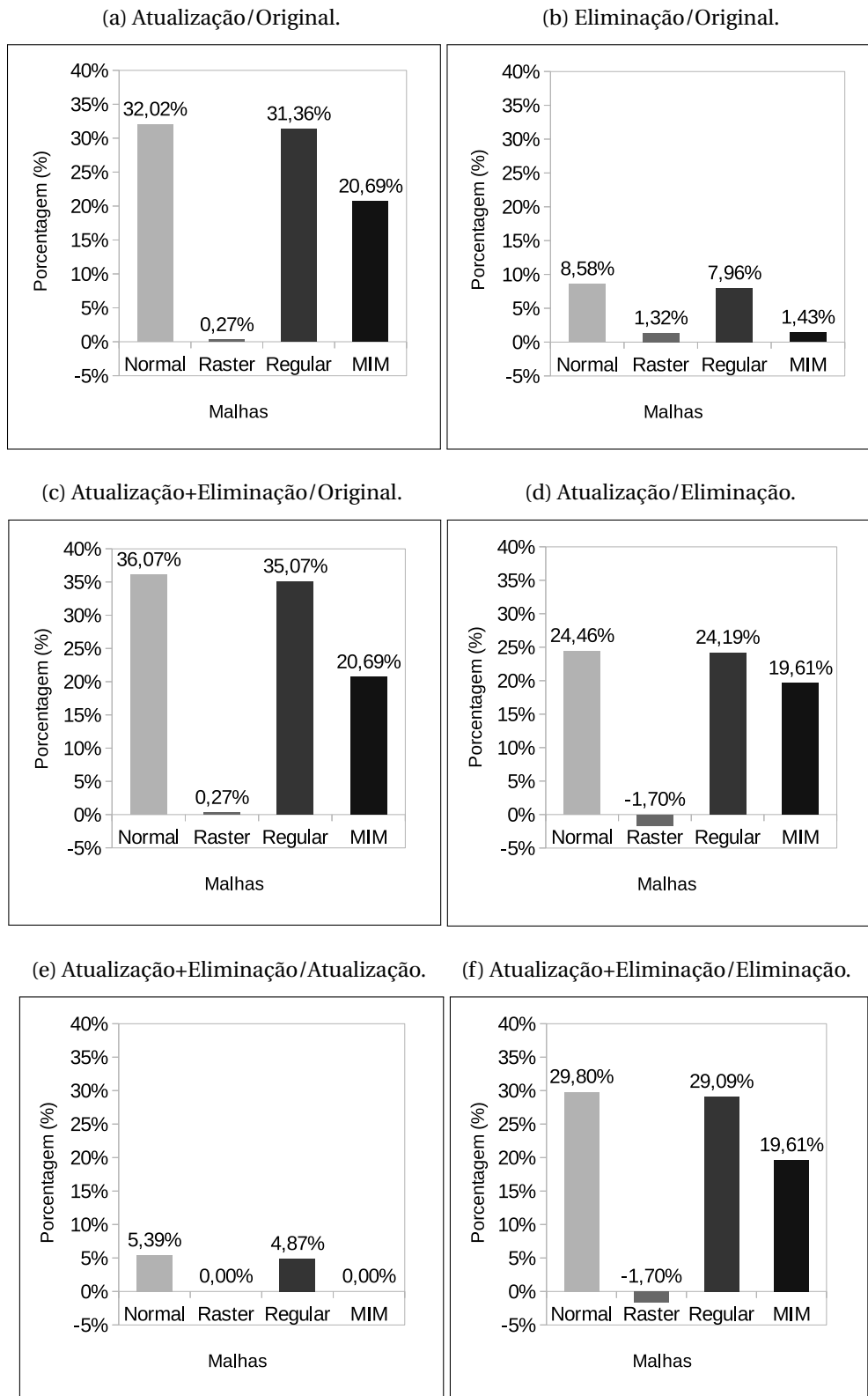
Fonte: o autor.

Nas Tabelas 5.7 e 5.8, com um resumo na Figura 5.4, os valores de redução são calculados para um caso em análise com relação a outro caso, considerando cada malha individualmente. Por exemplo, a análise da porcentagem de quanto a malha de *normal patterns* é menor utilizando a eliminação de pontos em comparação com a respectiva malha no caso original, sendo dado na tabela por *Eliminação/Original*. De forma similar, faz-se a análise para os outros casos e malhas. Se a porcentagem de redução for negativa, então a malha para o caso em análise não é menor do que para o caso em que se está realizando a comparação.

Observando as Tabelas 5.7 e 5.8, e a Figura 5.4, tem-se que:

- o procedimento para eliminar pontos da malha permitiu reduções satisfatórias no tamanho das malhas quando comparado com as malhas originais. Em resumo:
 - para a *normal patterns*, a melhor instância teve cerca de 50% de redução. A redução média foi de 8,58%, com desvio padrão de 12,71%;
 - para a *raster points*, a melhor instância teve cerca de 38% de redução. A redução média foi de 1,32%, com desvio padrão de 5,74%;
 - para a *MIM*, a melhor instância teve cerca de 25% de redução. A redução média foi de 1,43%, com desvio padrão de 4,25%.
- a aplicação de ambos os procedimentos de redução, eliminação de pontos da malha após a atualização do tamanho dos itens, permitiu reduzir as malhas ao comparar com as originais. Em resumo:
 - para a *normal patterns*, a média de redução foi de 36,07%, com desvio padrão de 21,98%, valor mínimo de -0,98% e valor máximo de 73,86%;
 - para a *raster points*, a média de redução foi de 0,27%, com desvio padrão de 13,94%, valor mínimo de -32,81% e valor máximo de 50,98%;
 - para a *regular normal patterns*, a média de redução foi de 35,07%, com desvio padrão de 21,49%, valor mínimo de -0,98% e valor máximo de 73,86%;
 - para a *MIM*, a média de redução foi de 20,69%, com desvio padrão de 17,77%, valor mínimo de -2,48% e valor máximo de 68,02%.
- para a malha de *raster points*, o procedimento de atualização do tamanho dos itens não gerou bons resultados com relação a diminuição do número de pontos na malha. Na média, a redução foi baixa, de apenas 0,27%, com desvio padrão de 13,94%, valor mínimo de -32,81% e valor máximo de 50,98%;
- o procedimento de atualização do tamanho dos itens fez com que a malha de *raster points* tivesse um maior número de pontos ao comparar com a malha obtida após aplicar apenas o procedimento para eliminar pontos. Na comparação entre os procedimentos, a porcentagem de redução média foi negativa, sendo de -1,70%, com desvio padrão de 17,81%, valor mínimo de -75% e máximo de 50,98%. Os resultados ruins se mantêm na comparação entre a aplicação de ambos os procedimentos de redução em relação ao procedimento para eliminar pontos da malha;
- ao comparar a aplicação de ambos os procedimentos de redução em relação ao procedimento de atualização do tamanho dos itens, nota-se que a malha de *MIM* e a de *raster points* não sofreram qualquer modificação em relação ao tamanho. Por outro lado, a malha de *normal patterns* e a de *regular normal patterns* sofreram redução média aproximada de 5%, com desvio padrão de cerca de 11%.

Figura 5.4 – Redução percentual entre os casos, considerando a mesma malha.



Fonte: o autor.

Tabela 5.6 – Reduções percentuais entre as malhas para um mesmo caso.

| Instância | Original | | | Atualização dos itens | | | Eliminação de pontos | | | Atualização + Eliminação | | | | | | | | |
|---------------|----------------|--------------|--------------|-----------------------|-------------|--------------|----------------------|--------------|-------------|--------------------------|--------------|--------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|------|
| | Regular/Normal | MIM/Normal | Raster/MIM | Regular/Normal | MIM/Normal | Raster/MIM | Regular/Normal | MIM/Normal | Raster/MIM | Regular/Normal | MIM/Normal | Raster/MIM | | | | | | |
| GCUT1 | 0,00 | 68,18 | 72,73 | 0,00 | 31,25 | 14,29 | 0,00 | 68,18 | 72,73 | 14,29 | 0,00 | 31,25 | 14,29 | 0,00 | 31,25 | 0,00 | | |
| GCUT2 | 2,94 | 70,28 | 79,85 | 32,21 | 55,51 | 32,21 | 0,00 | 3,45 | 64,26 | 29,65 | 0,00 | 55,51 | 29,65 | 0,00 | 55,51 | 0,00 | | |
| GCUT3 | 0,00 | 65,10 | 65,10 | 0,00 | 60,11 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 46,45 | 0,00 | 0,00 | 60,11 | 0,00 | 0,00 | 60,11 | 0,00 | | |
| GCUT4 | 0,00 | 66,52 | 68,57 | 6,13 | 66,47 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 59,03 | 6,21 | 0,00 | 59,13 | 6,21 | 0,00 | 59,13 | 0,00 | | |
| GCUT5 | 0,00 | 56,36 | 72,73 | 37,50 | 28,57 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 56,36 | 72,73 | 37,50 | 0,00 | 28,57 | 72,73 | 0,00 | 28,57 | 0,00 | |
| GCUT6 | 6,25 | 71,62 | 84,21 | 44,35 | 58,33 | 58,33 | 0,00 | 6,90 | 66,90 | 81,58 | 44,35 | 5,56 | 58,33 | 58,33 | 0,00 | 58,33 | 0,00 | |
| GCUT7 | 15,63 | 64,06 | 80,04 | 44,46 | 55,03 | 55,03 | 0,00 | 10,71 | 55,33 | 76,57 | 47,55 | 19,05 | 55,03 | 55,03 | 0,00 | 55,03 | 0,00 | |
| GCUT8 | 0,00 | 79,43 | 79,90 | 2,27 | 78,41 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 75,41 | 75,97 | 2,27 | 0,00 | 78,41 | 78,41 | 0,00 | 78,41 | 0,00 | |
| GCUT9 | 0,00 | 36,00 | 66,40 | 47,50 | 27,78 | 27,78 | 0,00 | 0,00 | 34,78 | 71,74 | 56,67 | 0,00 | 27,78 | 27,78 | 0,00 | 27,78 | 0,00 | |
| GCUT10 | 25,46 | 75,69 | 85,57 | 40,63 | 61,84 | 61,84 | 0,00 | 24,52 | 72,38 | 81,88 | 34,39 | 21,43 | 61,84 | 61,84 | 0,00 | 61,84 | 0,00 | |
| GCUT11 | 0,00 | 84,12 | 90,68 | 41,32 | 73,85 | 73,85 | 0,00 | -11,47 | 81,52 | 88,87 | 39,78 | 0,00 | 73,85 | 73,85 | 0,00 | 73,85 | 0,00 | |
| GCUT12 | 0,68 | 87,52 | 88,75 | 9,80 | 86,73 | 86,73 | 0,00 | 0,78 | 83,82 | 85,12 | 8,00 | -10,38 | 81,94 | 81,94 | 0,00 | 81,94 | 0,00 | |
| H | 9,52 | 14,29 | 62,86 | 56,67 | 4,76 | 32,54 | 40,48 | 11,76 | 9,52 | 14,29 | 62,86 | 56,67 | 4,76 | 32,54 | 40,48 | 11,76 | 11,76 | 0,00 |
| HZ1 | 17,93 | 21,58 | 53,50 | 40,70 | 18,92 | 25,68 | 32,43 | 9,09 | 17,93 | 21,58 | 53,50 | 40,70 | 18,92 | 25,68 | 32,43 | 9,09 | 9,09 | 0,00 |
| HZ2 | 3,70 | 13,19 | 37,50 | 28,00 | 0,00 | 16,12 | 16,12 | 0,00 | 3,70 | 13,19 | 37,50 | 28,00 | 0,00 | 16,12 | 16,12 | 0,00 | 16,12 | 0,00 |
| M1 | 5,88 | 66,67 | 75,60 | 26,80 | 4,17 | 63,44 | 67,74 | 11,76 | 6,06 | 65,66 | 74,86 | 26,80 | 4,17 | 63,44 | 67,74 | 11,76 | 11,76 | 0,00 |
| M2 | 7,19 | 72,07 | 79,04 | 24,97 | 4,17 | 53,13 | 59,96 | 14,58 | 7,19 | 72,07 | 79,04 | 24,97 | 4,17 | 53,13 | 59,96 | 14,58 | 14,58 | 0,00 |
| M3 | 25,55 | 74,72 | 83,28 | 33,86 | 16,67 | 59,50 | 62,50 | 7,41 | 25,16 | 73,06 | 82,18 | 33,86 | 14,29 | 56,61 | 59,82 | 7,41 | 7,41 | 0,00 |
| M4 | 15,22 | 78,26 | 90,06 | 54,29 | 12,22 | 69,85 | 74,88 | 16,67 | 13,44 | 76,67 | 89,33 | 54,29 | 9,21 | 67,62 | 73,02 | 16,67 | 16,67 | 0,00 |
| M5 | 15,07 | 78,77 | 89,48 | 50,48 | 12,37 | 68,97 | 74,14 | 16,67 | 13,15 | 77,73 | 88,97 | 50,48 | 9,37 | 66,67 | 72,22 | 16,67 | 16,67 | 0,00 |
| MW1 | 5,88 | 66,67 | 75,60 | 26,80 | 4,17 | 63,44 | 67,74 | 11,76 | 5,88 | 66,67 | 75,60 | 26,80 | 4,17 | 63,44 | 67,74 | 11,76 | 11,76 | 0,00 |
| MW2 | 7,19 | 72,07 | 79,04 | 24,97 | 4,17 | 53,13 | 59,96 | 14,58 | 7,19 | 72,07 | 79,04 | 24,97 | 4,17 | 53,13 | 59,96 | 14,58 | 14,58 | 0,00 |
| MW3 | 25,55 | 74,72 | 83,28 | 33,86 | 16,67 | 59,50 | 62,50 | 7,41 | 25,55 | 74,72 | 83,28 | 33,86 | 16,67 | 59,50 | 62,50 | 7,41 | 7,41 | 0,00 |
| MW4 | 15,22 | 78,26 | 90,06 | 54,29 | 12,22 | 69,85 | 74,88 | 16,67 | 15,22 | 78,26 | 90,06 | 54,29 | 12,22 | 69,85 | 74,88 | 16,67 | 16,67 | 0,00 |
| MW5 | 15,07 | 78,77 | 89,48 | 50,48 | 12,37 | 68,97 | 74,14 | 16,67 | 13,15 | 77,73 | 88,97 | 50,48 | 9,37 | 66,67 | 72,22 | 16,67 | 16,67 | 0,00 |
| UU1 | 0,00 | 79,89 | 85,29 | 26,88 | 0,00 | 71,56 | 73,18 | 5,71 | 0,00 | 62,12 | 70,45 | 22,00 | 0,00 | 55,83 | 58,35 | 5,71 | 5,71 | 0,00 |
| UU2 | 3,40 | 89,67 | 91,98 | 22,41 | 2,80 | 87,82 | 89,16 | 11,02 | 1,75 | 81,55 | 85,68 | 22,41 | 1,32 | 78,34 | 80,72 | 11,02 | 11,02 | 0,00 |
| UU3 | 1,54 | 88,65 | 91,93 | 28,88 | 2,31 | 85,05 | 87,81 | 18,48 | 1,65 | 86,75 | 90,58 | 28,88 | 0,88 | 82,80 | 85,98 | 18,48 | 18,48 | 0,00 |
| UU4 | 0,65 | 90,04 | 92,94 | 29,09 | 1,08 | 89,17 | 92,03 | 26,46 | 0,65 | 89,99 | 92,90 | 29,09 | 2,85 | 88,66 | 91,66 | 26,46 | 26,46 | 0,00 |
| UU5 | 0,00 | 89,29 | 91,70 | 22,50 | 0,00 | 89,29 | 91,85 | 23,87 | 1,09 | 89,09 | 91,54 | 22,50 | 0,00 | 80,86 | 85,43 | 23,87 | 23,87 | 0,00 |
| UU6 | 1,38 | 92,01 | 93,93 | 23,94 | 1,20 | 90,73 | 90,73 | 0,00 | -5,18 | 90,17 | 92,53 | 23,94 | -3,60 | 88,93 | 88,93 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| UU7 | 0,00 | 88,72 | 92,12 | 30,18 | 0,00 | 88,60 | 91,88 | 28,78 | -2,41 | 87,88 | 91,54 | 30,18 | 1,01 | 86,23 | 90,19 | 28,78 | 28,78 | 0,00 |
| UU8 | 0,21 | 93,45 | 94,78 | 20,30 | 0,64 | 93,28 | 94,32 | 15,47 | 0,21 | 93,45 | 94,78 | 20,30 | -1,86 | 93,07 | 94,14 | 15,47 | 15,47 | 0,00 |
| UW1 | 3,17 | 83,17 | 90,33 | 42,56 | 0,00 | 83,49 | 83,49 | 0,00 | 3,17 | 83,17 | 90,33 | 42,56 | 0,00 | 83,49 | 83,49 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| UW2 | 0,00 | 84,71 | 87,87 | 20,66 | 0,54 | 84,38 | 87,17 | 17,88 | 0,00 | 84,71 | 87,87 | 20,66 | 0,54 | 84,38 | 87,17 | 17,88 | 17,88 | 0,00 |
| UW3 | 1,41 | 85,14 | 89,95 | 32,35 | 2,56 | 83,93 | 88,32 | 27,30 | 1,41 | 85,14 | 89,95 | 32,35 | 2,56 | 83,93 | 88,32 | 27,30 | 27,30 | 0,00 |
| UW4 | 0,00 | 86,57 | 88,50 | 14,40 | 0,00 | 86,37 | 88,61 | 16,47 | 0,00 | 86,57 | 88,50 | 14,40 | 0,00 | 86,37 | 88,61 | 16,47 | 16,47 | 0,00 |
| UW5 | 2,15 | 88,87 | 92,47 | 32,29 | 2,16 | 87,51 | 90,68 | 25,40 | 2,15 | 88,87 | 92,47 | 32,29 | 2,16 | 87,51 | 90,68 | 25,40 | 25,40 | 0,00 |
| UW6 | 0,00 | 92,69 | 94,45 | 24,02 | 0,55 | 92,08 | 94,11 | 25,61 | 0,00 | 92,69 | 94,45 | 24,02 | 0,55 | 92,08 | 94,11 | 25,61 | 25,61 | 0,00 |
| UW7 | 0,00 | 92,72 | 94,72 | 27,45 | 0,49 | 92,53 | 94,16 | 21,78 | 0,00 | 92,72 | 94,72 | 27,45 | 0,49 | 92,53 | 94,16 | 21,78 | 21,78 | 0,00 |
| UW8 | 0,36 | 93,00 | 95,08 | 29,70 | 0,38 | 92,81 | 94,82 | 27,93 | 0,36 | 93,00 | 95,08 | 29,70 | 0,38 | 92,81 | 94,82 | 27,93 | 27,93 | 0,00 |
| UW9 | 1,44 | 94,65 | 96,83 | 40,76 | 0,85 | 93,98 | 95,72 | 28,81 | 1,44 | 94,65 | 96,83 | 40,76 | 0,85 | 93,98 | 95,72 | 28,81 | 28,81 | 0,00 |
| UW10 | 0,00 | 92,96 | 96,48 | 49,94 | 0,00 | 93,27 | 96,10 | 41,99 | 0,00 | 92,96 | 96,48 | 49,94 | 0,00 | 93,27 | 96,10 | 41,99 | 41,99 | 0,00 |
| UW11 | 0,00 | 60,39 | 61,82 | 3,59 | 0,00 | 60,39 | 61,82 | 3,59 | 0,00 | 60,39 | 61,82 | 3,59 | 0,00 | 60,39 | 61,82 | 3,59 | 3,59 | 0,00 |
| W2 | 10,96 | 94,90 | 96,58 | 32,97 | 10,13 | 94,38 | 96,21 | 32,51 | 10,96 | 94,90 | 96,58 | 32,97 | 10,13 | 94,38 | 96,21 | 32,51 | 32,51 | 0,00 |
| MEDIA | 5,48 | 75,03 | 83,18 | 30,70 | 4,34 | 69,52 | 71,86 | 12,31 | 4,79 | 72,85 | 81,56 | 30,60 | 3,74 | 68,18 | 70,65 | 12,31 | 12,31 | 0,00 |
| DESVIO PADRÃO | 7,55 | 19,77 | 12,61 | 14,03 | 6,23 | 21,26 | 21,17 | 11,26 | 7,75 | 20,28 | 13,55 | 14,43 | 6,46 | 20,92 | 20,92 | 11,26 | 11,26 | 0,00 |
| MÍNIMO | 0,00 | 13,19 | 37,50 | 0,00 | 0,00 | 16,12 | 16,12 | 0,00 | -11,47 | 13,19 | 37,50 | 0,00 | -10,38 | 16,12 | 16,12 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| MÁXIMO | 25,55 | 94,90 | 96,83 | 56,67 | 21,43 | 94,38 | 96,21 | 41,99 | 25,55 | 94,90 | 96,83 | 56,67 | 21,43 | 94,38 | 96,21 | 41,99 | 41,99 | 0,00 |

Fonte: o autor.

Tabela 5.7 – Reduções percentuais entre os diferentes casos para uma mesma malha.

| Instância | Atualização/Original | | | Eliminação/Original | | | Atualização + Eliminação/Original | | |
|---------------|----------------------|-------------|--------------|---------------------|-------------|-------------|-----------------------------------|-------------|--------------|
| | Normal | Raster | Regular | Normal | Raster | Regular | Normal | Raster | Regular |
| GCUT1 | 72,73 | 31,25 | 72,73 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 72,73 | 31,25 | 72,73 |
| GCUT2 | 57,95 | 7,14 | 56,67 | 25,59 | 7,14 | 25,98 | 57,95 | 7,14 | 56,67 |
| GCUT3 | 12,50 | 0,00 | 12,50 | 37,86 | 4,65 | 37,86 | 12,50 | 0,00 | 12,50 |
| GCUT4 | 6,13 | -0,14 | 6,13 | 19,91 | 2,08 | 19,91 | 22,99 | -0,14 | 22,99 |
| GCUT5 | 55,45 | -16,67 | 55,45 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 55,45 | -16,67 | 55,45 |
| GCUT6 | 66,55 | 11,76 | 66,31 | 14,27 | 0,00 | 14,86 | 66,55 | 11,76 | 66,31 |
| GCUT7 | 52,37 | -7,32 | 54,30 | 19,56 | 5,56 | 14,87 | 52,37 | -7,32 | 54,30 |
| GCUT8 | 8,51 | 1,72 | 8,51 | 17,79 | 1,72 | 17,79 | 8,51 | 1,72 | 8,51 |
| GCUT9 | 49,60 | -8,33 | 49,60 | 26,40 | 38,10 | 26,40 | 49,60 | -8,33 | 49,60 |
| GCUT10 | 62,19 | 0,00 | 60,14 | 20,37 | 0,00 | 19,36 | 62,19 | 0,00 | 60,14 |
| GCUT11 | 64,38 | 0,00 | 64,38 | 16,29 | 0,00 | 6,69 | 64,38 | 0,00 | 64,38 |
| GCUT12 | 13,34 | -2,17 | 13,39 | 24,38 | 0,00 | 24,46 | 36,32 | -2,17 | 29,22 |
| H | 40,00 | 3,85 | 36,84 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 40,00 | 3,85 | 36,84 |
| HZ1 | 66,26 | 50,98 | 66,67 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 66,26 | 50,98 | 66,67 |
| HZ2 | 29,63 | 5,56 | 26,92 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 29,63 | 5,56 | 26,92 |
| M1 | 18,95 | -7,14 | 17,48 | 2,94 | 0,00 | 3,13 | 18,95 | -7,14 | 17,48 |
| M2 | 43,92 | -7,14 | 42,09 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 43,92 | -7,14 | 42,09 |
| M3 | 59,87 | 10,00 | 55,08 | 6,15 | 0,00 | 5,66 | 62,54 | 10,00 | 56,87 |
| M4 | 47,46 | -32,81 | 45,60 | 6,83 | 0,00 | 4,88 | 51,09 | -32,81 | 47,62 |
| M5 | 50,15 | -22,60 | 48,57 | 6,72 | 0,00 | 4,82 | 53,59 | -22,60 | 50,48 |
| MW1 | 18,95 | -7,14 | 17,48 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 18,95 | -7,14 | 17,48 |
| MW2 | 43,92 | -7,14 | 42,09 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 43,92 | -7,14 | 42,09 |
| MW3 | 59,87 | 10,00 | 55,08 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 59,87 | 10,00 | 55,08 |
| MW4 | 47,46 | -32,81 | 45,60 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 47,46 | -32,81 | 45,60 |
| MW5 | 50,15 | -22,60 | 48,57 | 4,65 | 0,00 | 2,50 | 50,15 | -22,60 | 48,57 |
| UU1 | 59,40 | 25,96 | 59,40 | 50,23 | 0,00 | 50,23 | 73,86 | 25,96 | 73,86 |
| UU2 | 26,01 | 0,00 | 25,55 | 12,81 | 0,00 | 43,04 | 58,41 | 0,00 | 57,51 |
| UU3 | 33,76 | 0,00 | 34,27 | 14,33 | 0,00 | 14,42 | 42,42 | 0,00 | 42,04 |
| UU4 | 11,38 | 0,00 | 11,76 | 0,49 | 0,00 | 0,49 | 15,35 | 0,00 | 17,22 |
| UU5 | 2,11 | 3,85 | 2,11 | 1,86 | 0,00 | 2,92 | 45,25 | 3,85 | 45,25 |
| UU6 | 34,45 | 0,00 | 34,34 | 18,73 | 0,00 | 13,33 | 45,11 | 0,00 | 42,35 |
| UU7 | 3,00 | 0,00 | 3,00 | 6,94 | 0,00 | 4,69 | 19,69 | 0,00 | 20,50 |
| UU8 | 11,38 | 3,57 | 11,77 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 14,11 | 3,57 | 12,34 |
| UW1 | 45,31 | 6,58 | 43,52 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 45,31 | 6,58 | 43,52 |
| UW2 | 2,12 | -3,51 | 2,65 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 2,12 | -3,51 | 2,65 |
| UW3 | 21,87 | 9,22 | 22,78 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 21,87 | 9,22 | 22,78 |
| UW4 | -0,98 | 0,00 | -0,98 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | -0,98 | 0,00 | -0,98 |
| UW5 | 19,33 | 0,27 | 19,34 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 19,33 | 0,27 | 19,34 |
| UW6 | 6,82 | 1,10 | 7,33 | -1,01 | 0,00 | 0,00 | 6,82 | 1,10 | 7,33 |
| UW7 | 8,57 | -1,14 | 9,02 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 8,57 | -1,14 | 9,02 |
| UW8 | 4,98 | 0,00 | 5,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 4,98 | 0,00 | 5,00 |
| UW9 | 23,98 | -2,74 | 23,53 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 23,98 | -2,74 | 23,53 |
| UW10 | 10,80 | 1,20 | 10,80 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 10,80 | 1,20 | 10,80 |
| UW11 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| W2 | 18,37 | 9,58 | 17,61 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 18,37 | 9,58 | 17,61 |
| MÉDIA | 32,02 | 0,27 | 31,36 | 8,58 | 1,32 | 7,96 | 36,07 | 0,27 | 35,07 |
| DESVIO PADRÃO | 22,46 | 13,94 | 21,98 | 12,71 | 5,74 | 12,48 | 21,98 | 13,94 | 21,49 |
| MÍNIMO | -0,98 | -32,81 | -0,98 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | -0,98 | -32,81 | -0,98 |
| MÁXIMO | 72,73 | 50,98 | 72,73 | 50,23 | 38,10 | 50,23 | 73,86 | 50,98 | 73,86 |

Fonte: o autor.

Tabela 5.8 – Reduções percentuais entre os diferentes casos para uma mesma malha.

| Instância | Atualização/Eliminação | | | Atualização + Eliminação/Atualização | | | Atualização + Eliminação/Eliminação | | |
|---------------|------------------------|--------|--------|--------------------------------------|--------|------|-------------------------------------|--------|--------|
| | Normal | Raster | MIM | Normal | Raster | MIM | Normal | Raster | MIM |
| GCUT1 | 72,73 | 31,25 | 72,73 | 41,07 | 0,00 | 0,00 | 72,73 | 31,25 | 72,73 |
| GCUT2 | 43,48 | 0,00 | 41,46 | 29,65 | 0,00 | 0,00 | 43,48 | 0,00 | 41,46 |
| GCUT3 | -40,80 | -4,88 | -40,80 | -4,88 | 0,00 | 0,00 | -40,80 | -4,88 | -4,88 |
| GCUT4 | -17,21 | -2,27 | -17,21 | 4,08 | 17,96 | 0,00 | 3,85 | -2,27 | 3,85 |
| GCUT5 | 55,45 | -16,67 | 55,45 | 27,08 | 0,00 | 0,00 | 55,45 | -16,67 | 55,45 |
| GCUT6 | 60,99 | 11,76 | 60,42 | 50,89 | 0,00 | 0,00 | 60,99 | 11,76 | 60,42 |
| GCUT7 | 40,79 | -13,64 | 46,32 | 40,39 | 0,00 | 0,00 | 40,79 | -13,64 | 46,32 |
| GCUT8 | -11,29 | 0,00 | -11,29 | 2,27 | 0,00 | 0,00 | -11,29 | 0,00 | -11,29 |
| GCUT9 | 31,52 | -75,00 | 31,52 | 24,17 | 0,00 | 0,00 | 31,52 | -75,00 | 31,52 |
| GCUT10 | 52,52 | 0,00 | 50,58 | 34,39 | 0,00 | 0,00 | 52,52 | 0,00 | 50,58 |
| GCUT11 | 57,44 | 0,00 | 61,82 | 39,78 | 0,00 | 0,00 | 57,44 | 0,00 | 61,82 |
| GCUT12 | -14,60 | -2,17 | -14,66 | 6,00 | 26,51 | 0,00 | 15,78 | -2,17 | 6,31 |
| H | 40,00 | 3,85 | 36,84 | 52,78 | 0,00 | 0,00 | 40,00 | 3,85 | 36,84 |
| HZ1 | 66,26 | 50,98 | 66,67 | 68,02 | 0,00 | 0,00 | 66,26 | 50,98 | 66,67 |
| HZ2 | 29,63 | 5,56 | 26,92 | 32,00 | 0,00 | 0,00 | 29,63 | 5,56 | 26,92 |
| M1 | 16,50 | -7,14 | 14,81 | 11,11 | 0,00 | 0,00 | 16,50 | -7,14 | 14,81 |
| M2 | 43,92 | -7,14 | 42,09 | 5,88 | 0,00 | 0,00 | 43,92 | -7,14 | 42,09 |
| M3 | 57,23 | 10,00 | 52,38 | 35,71 | 6,67 | 0,00 | 60,09 | 10,00 | 54,29 |
| M4 | 43,61 | -32,81 | 42,81 | 27,14 | 6,90 | 0,00 | 47,50 | -32,81 | 44,93 |
| M5 | 46,56 | -22,60 | 45,97 | 27,14 | 6,90 | 0,00 | 50,24 | -22,60 | 47,97 |
| MW1 | 18,95 | -7,14 | 17,48 | 11,11 | 0,00 | 0,00 | 18,95 | -7,14 | 17,48 |
| MW2 | 43,92 | -7,14 | 42,09 | 5,88 | 0,00 | 0,00 | 43,92 | -7,14 | 42,09 |
| MW3 | 59,87 | 10,00 | 55,08 | 35,71 | 0,00 | 0,00 | 59,87 | 10,00 | 55,08 |
| MW4 | 47,46 | -32,81 | 45,60 | 27,14 | 0,00 | 0,00 | 47,46 | -32,81 | 45,60 |
| MW5 | 47,72 | -22,60 | 47,25 | 27,14 | 0,00 | 0,00 | 47,72 | -22,60 | 47,25 |
| UU1 | 18,43 | 25,96 | 18,43 | 38,75 | 35,60 | 0,00 | 47,47 | 25,96 | 47,47 |
| UU2 | -32,13 | 0,00 | -30,71 | 12,81 | 43,79 | 0,00 | 25,73 | 0,00 | 25,40 |
| UU3 | 22,68 | 0,00 | 23,20 | 12,76 | 13,08 | 0,00 | 32,79 | 0,00 | 32,27 |
| UU4 | 10,94 | 0,00 | 11,32 | 3,57 | 4,48 | 0,00 | 14,93 | 0,00 | 16,81 |
| UU5 | 0,26 | 3,85 | -0,83 | 2,12 | 44,06 | 0,00 | 44,21 | 3,85 | 43,60 |
| UU6 | 19,34 | 0,00 | 24,24 | 23,94 | 16,27 | 0,00 | 32,46 | 0,00 | 33,48 |
| UU7 | -4,23 | 0,00 | -1,78 | 1,96 | 17,21 | 0,00 | 13,70 | 0,00 | 16,59 |
| UU8 | 11,38 | 3,57 | 11,77 | 9,08 | 3,08 | 0,00 | 14,11 | 3,57 | 12,34 |
| UW1 | 45,31 | 6,58 | 43,52 | 46,35 | 0,00 | 0,00 | 45,31 | 6,58 | 43,52 |
| UW2 | 2,12 | -3,51 | 2,65 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 2,12 | -3,51 | 2,65 |
| UW3 | 21,87 | 9,22 | 22,78 | 15,52 | 0,00 | 0,00 | 21,87 | 9,22 | 22,78 |
| UW4 | -0,98 | 0,00 | -0,98 | -2,48 | 0,00 | 0,00 | -0,98 | 0,00 | -0,98 |
| UW5 | 19,33 | 0,27 | 19,34 | 9,48 | 0,00 | 0,00 | 19,33 | 0,27 | 19,34 |
| UW6 | 6,82 | 1,10 | 7,33 | -1,01 | 0,00 | 0,00 | 6,82 | 1,10 | 7,33 |
| UW7 | 8,57 | -1,14 | 9,02 | 6,20 | 0,00 | 0,00 | 8,57 | -1,14 | 9,02 |
| UW8 | 4,98 | 0,00 | 5,00 | 2,45 | 0,00 | 0,00 | 4,98 | 0,00 | 5,00 |
| UW9 | 23,98 | -2,74 | 23,53 | 14,51 | 0,00 | 0,00 | 23,98 | -2,74 | 23,53 |
| UW10 | 10,80 | 1,20 | 10,80 | 14,73 | 0,00 | 0,00 | 10,80 | 1,20 | 10,80 |
| UW11 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| W2 | 18,37 | 9,58 | 17,61 | 10,20 | 0,00 | 0,00 | 18,37 | 9,58 | 17,61 |
| MÉDIA | 24,46 | -1,70 | 24,19 | 19,61 | 5,39 | 0,00 | 29,80 | -1,70 | 29,09 |
| DESVIO PADRÃO | 26,46 | 17,81 | 26,02 | 17,29 | 11,30 | 0,00 | 23,25 | 17,81 | 23,02 |
| MÍNIMO | -40,80 | -75,00 | -40,80 | -4,88 | 0,00 | 0,00 | -40,80 | -75,00 | -4,88 |
| MÁXIMO | 72,73 | 50,98 | 72,73 | 68,02 | 44,06 | 0,00 | 72,73 | 50,98 | 72,73 |

Fonte: o autor.

5.2 Resultados do 2KP

Diante dos resultados apresentados na subseção anterior, a resolução do modelo de programação linear inteira para o 2KP considera apenas as malhas de *normal patterns*, *raster points* e *MIM*, uma vez que a malha de *regular normal patterns* foi superada pela *raster points* e *MIM*. Além disso, os casos considerados incluem as malhas originais, após aplicar o procedimento de atualização do tamanho dos itens e após aplicar os dois procedimentos de redução: primeiro fazendo a atualização do tamanho dos itens para, em seguida, eliminar pontos da malha. O objetivo é mostrar a influência que essas malhas e os procedimentos de redução têm durante a resolução de um problema de corte e empacotamento.

A Tabela 5.9 apresenta para cada instância, cada malha e cada caso, a solução obtida e o tempo computacional gasto em segundos. As colunas que possuem a entrada “-” no valor da solução indicam as instâncias para as quais a otimização foi abortada por consumir toda a memória RAM do computador. A Tabela 5.10 traz, para cada malha e cada caso, o tempo médio gasto em segundos para obter a solução das instâncias, bem como o desvio padrão, o valor mínimo e máximo para o tempo. Para o cálculo da média, do desvio padrão, do valor mínimo e máximo, consideramos apenas os resultados das 24 instâncias para as quais foi possível obter solução em todos os casos e malhas, quais sejam: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11 do grupo GCUT; a H; as 1 e 2 do grupo HZ; as cinco do grupo M e do MW; a UU1; e, a UW1.

Assim, observando a Tabela 5.9, nota-se que das 45 instâncias consideradas:

- a malha de *normal patterns* permitiu resolver o seguinte total de instâncias na otimalidade, 24 considerando a malha original e após aplicar o procedimento de atualização do tamanho dos itens e 28 após a aplicação dos dois procedimentos de redução;
- a malha de *raster points* permitiu resolver 37 instâncias na otimalidade;
- a malha de *MIM* permitiu resolver 34 e 35 instâncias na otimalidade, respectivamente, considerando a malha original e após aplicar os dois procedimentos de redução.

Claramente a malha de *raster points* permitiu obter a solução ótima para um maior número de instâncias quando comparada com a *normal patterns* e a *MIM*, sendo possível resolver 13 instâncias a mais que a malha de *normal patterns* original e 3 instâncias a mais que a malha de *MIM* original. Além disso, após a aplicação dos procedimentos de redução sobre as malhas, a *normal patterns* permitiu resolver quatro instâncias a mais e a *MIM* uma instância a mais, quando comparadas com a respectiva malha original. As instâncias para as quais não foi possível obter uma solução são as maiores, possuindo cerca de 50 itens e recipientes de dimensões maiores do que 1000. Por exemplo, na Tabela 5.9, para a instância UW6, que possui 47 itens e recipiente de dimensões (1750, 1542), tem-se que somente com a malha de *raster points* foi possível encontrar uma solução ótima.

Tabela 5.9 – Resultados para o problema da mochila 0-1 bidimensional.

| Instância | Original | | | | | | Atualização dos itens | | | | | | Atualização + Eliminação | | | | | |
|-----------|----------|-----------|---------|-----------|-----------|---------|-----------------------|-----------|---------|----------|-----------|----------|--------------------------|-----------|---------|-----------|-----------|----------|
| | Normal | | | Raster | | | MIM | | | Normal | | | Raster | | | MIM | | |
| | Solução | Tempo (s) | | Solução | Tempo (s) | | Solução | Tempo (s) | | Solução | Tempo (s) | | Solução | Tempo (s) | | Solução | Tempo (s) | |
| GCUT1 | 48368 | 0,04 | 48368 | 0,05 | 48368 | 0,01 | 48368 | 0,04 | 48368 | 0,03 | 48368 | 0,04 | 48368 | 0,01 | 48368 | 0,06 | 48368 | 0,01 |
| GCUT2 | 59798 | 14,13 | 59798 | 1,39 | 59798 | 3,06 | 59798 | 92,55 | 59798 | 1,05 | 59798 | 1,06 | 59798 | 90,89 | 59798 | 1,03 | 59798 | 1,03 |
| GCUT3 | 61275 | 44,86 | 61275 | 7,57 | 61275 | 7,80 | 61275 | 3836,64 | 61275 | 8,19 | 61275 | 8,13 | 61275 | 1494,19 | 61275 | 7,83 | 61275 | 7,73 |
| GCUT4 | - | - | 61380 | 65,60 | 61380 | 74,13 | - | - | 61380 | 69,17 | 61380 | 69,66 | 61380 | 3359,29 | 61380 | 66,58 | 61380 | 66,17 |
| GCUT5 | 195582 | 0,61 | 195582 | 0,12 | 195582 | 0,17 | 195582 | 1,32 | 195582 | 0,07 | 195582 | 0,10 | 195582 | 2,62 | 195582 | 0,11 | 195582 | 0,09 |
| GCUT6 | 236305 | 5,72 | 236305 | 1,02 | 236305 | 1,24 | 236305 | 30,65 | 236305 | 0,40 | 236305 | 0,39 | 236305 | 9,99 | 236305 | 0,39 | 236305 | 0,39 |
| GCUT7 | 240143 | 8,68 | 240143 | 0,92 | 240143 | 2,01 | 240143 | 521,34 | 240143 | 1,03 | 240143 | 1,03 | 240143 | 130,10 | 240143 | 0,98 | 240143 | 0,97 |
| GCUT8 | - | - | 245758 | 102,30 | 245758 | 103,27 | - | - | 245758 | 94,94 | 245758 | 94,33 | - | - | 245758 | 88,20 | 245758 | 88,50 |
| GCUT9 | 939600 | 0,23 | 939600 | 0,04 | 939600 | 0,04 | 939600 | 0,94 | 939600 | 0,04 | 939600 | 0,03 | 939600 | 0,42 | 939600 | 0,03 | 939600 | 0,02 |
| GCUT10 | 937349 | 3,91 | 937349 | 0,27 | 937349 | 0,42 | 937349 | 26,13 | 937349 | 0,28 | 937349 | 0,26 | 937349 | 7,68 | 937349 | 0,25 | 937349 | 0,26 |
| GCUT11 | 969709 | 108,15 | 969709 | 6,29 | 969709 | 14,06 | 969709 | 5758,66 | 969709 | 3,44 | 969709 | 3,44 | 969709 | 6036,84 | 969709 | 3,27 | 969709 | 3,29 |
| GCUT12 | - | - | 979521 | 31,35 | 979521 | 41,10 | - | - | 979521 | 31,56 | 979521 | 31,48 | 979521 | 22543,77 | 979521 | 29,84 | 979521 | 29,91 |
| H | 3783 | 0,55 | 3783 | 0,02 | 3783 | 0,07 | 3783 | 0,29 | 3783 | 0,02 | 3783 | 0,03 | 3783 | 0,28 | 3783 | 0,02 | 3783 | 0,03 |
| HZ1 | 2989 | 0,23 | 2989 | 0,05 | 2989 | 0,09 | 2989 | 0,07 | 2989 | 0,03 | 2989 | 0,03 | 2989 | 0,06 | 2989 | 0,03 | 2989 | 0,03 |
| HZ2 | 2926 | 0,09 | 2926 | 0,05 | 2926 | 0,09 | 2926 | 0,12 | 2926 | 0,05 | 2926 | 0,05 | 2926 | 0,10 | 2926 | 0,05 | 2926 | 0,04 |
| M1 | 14478 | 10,56 | 14478 | 1,51 | 14478 | 2,94 | 14478 | 113,07 | 14478 | 2,27 | 14478 | 3,05 | 14478 | 30,74 | 14478 | 2,24 | 14478 | 2,98 |
| M2 | 67227 | 215,56 | 67227 | 13,06 | 67227 | 17,53 | 67227 | 674,43 | 67227 | 8,88 | 67227 | 13,07 | 67227 | 648,28 | 67227 | 8,66 | 67227 | 12,70 |
| M3 | 133802 | 22,72 | 133802 | 1,76 | 133802 | 1,92 | 133802 | 24,92 | 133802 | 1,59 | 133802 | 1,56 | 133802 | 45,88 | 133802 | 1,59 | 133802 | 1,54 |
| M4 | 250667 | 32,77 | 250667 | 0,93 | 250667 | 2,15 | 250667 | 457,39 | 250667 | 1,19 | 250667 | 1,74 | 250667 | 116,26 | 250667 | 1,20 | 250667 | 1,70 |
| M5 | 545771 | 36,63 | 545771 | 1,10 | 545771 | 1,92 | 545771 | 636,08 | 545771 | 0,96 | 545771 | 1,72 | 545771 | 101,51 | 545771 | 0,95 | 545771 | 1,71 |
| MW1 | 3317 | 8,84 | 3317 | 1,22 | 3317 | 2,04 | 3317 | 90,06 | 3317 | 1,39 | 3317 | 1,64 | 3317 | 101,59 | 3317 | 1,39 | 3317 | 1,62 |
| MW2 | 16432 | 182,52 | 16432 | 29,32 | 16432 | 10,36 | 16432 | 1362,37 | 16432 | 6,84 | 16432 | 11,89 | 16432 | 1359,49 | 16432 | 6,61 | 16432 | 11,40 |
| MW3 | 30359 | 17,42 | 30359 | 1,48 | 30359 | 1,35 | 30359 | 19,10 | 30359 | 1,27 | 30359 | 1,29 | 30359 | 60,29 | 30359 | 1,22 | 30359 | 1,25 |
| MW4 | 49122 | 58,19 | 49122 | 4,92 | 49122 | 2,08 | 49122 | 526,24 | 49122 | 1,45 | 49122 | 2,11 | 49122 | 372,78 | 49122 | 1,42 | 49122 | 2,07 |
| MW5 | 148377 | 36,95 | 148377 | 1,61 | 148377 | 3,09 | 148377 | 379,13 | 148377 | 2,05 | 148377 | 2,31 | 148377 | 287,16 | 148377 | 2,03 | 148377 | 2,29 |
| UU1 | 244153 | 143,41 | 244153 | 12,33 | 244153 | 8,71 | 244153 | 1658,50 | 244153 | 2,63 | 244153 | 2,88 | 244153 | 25,94 | 244153 | 2,50 | 244153 | 2,74 |
| UU2 | - | - | 590395 | 69,04 | 590395 | 104,90 | - | - | 590395 | 71,25 | 590395 | 85,25 | 590395 | 13127,82 | 590395 | 68,10 | 590395 | 81,24 |
| UU3 | - | - | 1070313 | 106,42 | 1070313 | 77,16 | - | - | 1070313 | 95,15 | 1070313 | 46,78 | 1070313 | 11392,49 | 1070313 | 83,88 | 1070313 | 44,90 |
| UU4 | - | - | 1182367 | 1427,88 | 1182367 | 9538,38 | - | - | 1182367 | 2969,06 | 1182367 | 6783,26 | - | - | 1182367 | 2597,10 | 1182367 | 7867,10 |
| UU5 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| UU6 | - | - | 2915611 | 188,46 | 2915611 | 255,62 | - | - | 2915611 | 181,32 | 2915611 | 181,48 | - | - | 2915611 | 170,98 | 2915611 | 170,99 |
| UU7 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| UU8 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| UW1 | 4248 | 2010,61 | 4248 | 28,95 | 4248 | 28,13 | 4248 | 505922,84 | 4248 | 30,33 | 4248 | 42,74 | 4248 | 224961,65 | 4248 | 27,09 | 4248 | 28,50 |
| UW2 | - | - | 5409 | 1129,77 | 5409 | 5799,14 | - | - | 5409 | 1181,44 | 5409 | 6015,80 | - | - | 5409 | 1111,79 | 5409 | 4979,35 |
| UW3 | - | - | 4192 | 297,93 | 4192 | 338,52 | - | - | 4192 | 214,67 | 4192 | 350,39 | - | - | 4192 | 208,22 | 4192 | 344,09 |
| UW4 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| UW5 | - | - | 4653 | 120,20 | 4653 | 261,16 | - | - | 4653 | 205,89 | 4653 | 202,87 | - | - | 4653 | 199,44 | 4653 | 194,14 |
| UW6 | - | - | 5108 | 24181,16 | - | - | - | - | 5108 | 25124,77 | - | - | - | - | 5108 | 29535,43 | - | - |
| UW7 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| UW8 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| UW9 | - | - | 4535 | 3941,87 | - | - | - | - | 4535 | 4742,73 | 4535 | 13816,02 | - | - | 4535 | 4952,80 | 4535 | 14668,02 |
| UW10 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| UW11 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| W2 | - | - | 19148 | 170972,97 | - | - | - | - | 19148 | 76670,96 | - | - | - | - | 19148 | 100018,43 | - | - |

Fonte: o autor.

Para a resolução das 24 instâncias do 2KP, em que todos casos e malhas permitiram apresentar uma solução ótima, observando a Tabela 5.10, destaca-se que:

- para a malha original:
 - com a *normal patterns* foi preciso, em média, de 111,94 segundos, com desvio padrão de 397,87 segundos;
 - com a *raster points* foi preciso, em média, de 4,48 segundos, com desvio padrão de 8,20 segundos;
 - com a *MIM* foi preciso, em média, de 4,52 segundos, com desvio padrão de 6,71 segundos.

- para a malha obtida após a aplicação do procedimento de atualização do tamanho dos itens:
 - com a *normal patterns* foi preciso, em média, de 19483,78 segundos, com desvio padrão de 100964,71 segundos;
 - com a *raster points* foi preciso, em média, de 3,14 segundos, com desvio padrão de 6,18 segundos;
 - com a *MIM* foi preciso, em média, de 4,07 segundos, com desvio padrão de 8,75 segundos.

- para a malha após a aplicação dos dois procedimentos de redução:
 - com a *normal patterns* foi preciso, em média, de 8795,18 segundos, com desvio padrão de 44875,09 segundos;
 - com a *raster points* foi preciso, em média, de 2,96 segundos, com desvio padrão de 5,56 segundos;
 - com a *MIM* foi preciso, em média, de 3,45 segundos, com desvio padrão de 6,18 segundos.

Observa-se que, na média, a malha de *raster points* após a aplicação dos dois procedimentos de redução permitiu encontrar a solução ótima em menor tempo computacional ao comparar com a malha original e após aplicar apenas o procedimento de atualização do tamanho dos itens.

Tabela 5.10 – Média, desvio padrão, valor mínimo e máximo dos tempos computacionais na Tabela 5.9.

| Caso | Original | | |
|---------------|---------------------------------|----------------------|-------------------|
| Malha | <i>Normal</i> | <i>Raster</i> | <i>MIM</i> |
| Média | 111,94 | 4,48 | 4,52 |
| Desvio Padrão | 397,87 | 8,20 | 6,71 |
| Mínimo | 0,04 | 0,02 | 0,01 |
| Máximo | 2010,61 | 29,32 | 28,13 |
| Caso | Atualização dos itens | | |
| Malha | <i>Normal</i> | <i>Raster</i> | <i>MIM</i> |
| Média | 19483,78 | 3,14 | 4,07 |
| Desvio Padrão | 100964,71 | 6,18 | 8,75 |
| Mínimo | 0,04 | 0,02 | 0,03 |
| Máximo | 505922,84 | 30,33 | 42,74 |
| Caso | Atualização + Eliminação | | |
| Malha | <i>Normal</i> | <i>Raster</i> | <i>MIM</i> |
| Média | 8795,18 | 2,96 | 3,45 |
| Desvio Padrão | 44875,09 | 5,56 | 6,18 |
| Mínimo | 0,01 | 0,02 | 0,01 |
| Máximo | 224961,65 | 27,09 | 28,50 |

Fonte: o autor.

O resultado do teste de Wilcoxon é apresentado na Tabela 5.11 (DERRAC *et al.*, 2011). Ele foi realizado visando analisar se há diferença significativa entre o tempo gasto pelas malhas de *normal patterns*, *raster points* e *MIM* na resolução das 24 instâncias do 2KP em comum para todos os casos e malhas, conforme apresentado nas Tabelas 5.9 e 5.10. Para realização do teste levou-se em consideração o nível de significância de 99%. Os resultados desse teste são apresentados na Tabela 5.11, no qual a comparação foi feita para todos os casos e entre todas as malhas, observando a hipótese de que uma malha (da linha da tabela) possui um tempo mediano pior, para a resolução de todas as 24 instâncias, do que outra malha (da coluna da tabela). Caso o valor retornado pelo teste seja menor ou igual a 0,01 (1%), a hipótese pode ser aceita, caso contrário, não há indícios para aceitá-la.

Observando a Tabela 5.11, para todos os casos considerados (malha original, após atualização dos itens e após aplicar ambos os procedimentos de redução), tem-se de fato que a malha de *raster points* é a que obtém a solução ótima das 24 instâncias no menor tempo computacional mediano. Em resumo:

- a hipótese de que a malha de *normal patterns* possui tempo de resolução pior do que as malhas de *raster points* e *MIM* pode ser aceita, pois o valor retornado pelo teste é

menor do que 1%;

- a hipótese de que a malha de *raster points* possui tempo de resolução pior do que as malhas de *normal patterns* e *MIM* não pode ser aceita, pois o valor retornado pelo teste é maior do que 1%;
- a hipótese de que a malha de *MIM* possui tempo de resolução pior do que a malha de *normal patterns* não pode ser aceita, pois o valor retornado pelo teste é maior do que 1%. Por outro lado, a hipótese de que a *MIM* possui tempo pior do que a *raster points* pode ser aceita, pois o valor retornado pelo teste é igual a 1%.

Tabela 5.11 – Resultado do teste de Wilcoxon sobre o tempo computacional das malhas para as 24 instâncias resolvidas na otimalidade.

| Malha | Original | | | Atualização dos itens | | | Atualização + Eliminação | | |
|---------------|---------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|--------------------------|-----------------------|-----------------------|
| | <i>Normal</i> | <i>Raster</i> | <i>MIM</i> | <i>Normal</i> | <i>Raster</i> | <i>MIM</i> | <i>Normal</i> | <i>Raster</i> | <i>MIM</i> |
| <i>Normal</i> | - | $1,19 \times 10^{-7}$ | $1,44 \times 10^{-5}$ | - | $5,96 \times 10^{-8}$ | $1,44 \times 10^{-5}$ | - | $1,79 \times 10^{-7}$ | $1,44 \times 10^{-5}$ |
| <i>Raster</i> | 1,00 | - | 0,99 | 1,00 | - | 1,00 | 1,00 | - | 0,99 |
| <i>MIM</i> | 1,00 | 0,01 | - | 1,00 | 0,01 | - | 1,00 | 0,01 | - |

Capítulo 6

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Problemas de corte e empacotamento têm como objetivo empacotar/cortar itens em recipientes, de modo a otimizar uma função objetivo e obedecer algumas restrições. Uma forma de obter uma solução para estes problemas é considerar o recipiente discretizado em uma malha, no qual os itens são associados a pontos dessa malha. Foi nessa perspectiva que este trabalho buscou estudar e formalizar as diferentes malhas descritas pela literatura e com aplicação sobre problemas de corte e empacotamento de itens com formato retangular. Embora as definições e resultados tenham sido obtidos considerando um problema bidimensional, as malhas são geradas a partir de cada dimensão dos itens e do recipiente, o que permite estender os resultados de forma direta para problemas de corte e empacotamento em outras dimensões.

As seguintes malhas foram investigadas, a saber: *normal patterns*, *raster points*, *useful numbers*, *corner points*, *regular normal patterns*, *extreme points* e *meet-in-the-middle patterns*. As malhas foram discutidas conforme a sua definição e objetivam reduzir a quantidade de pontos disponíveis para realizar o empacotamento dos itens. Assim, foi realizado um estudo teórico envolvendo relações de inclusão e de tamanho entre as malhas que podem ser calculadas *a priori*.

Com o intuito de reduzir ainda mais as malhas, consideraram-se procedimentos de redução, um baseado na atualização do tamanho dos itens e o outro surgiu como uma proposta para eliminar pontos redundantes da malha. Como forma de analisar a influência dos procedimentos no tamanho das malhas, realizaram-se experimentos comparativos sobre o tamanho das malhas e também com aplicação sobre o problema da mochila 0-1 bidimensional, para o qual também se apresentou um modelo de programação linear inteira e uma heurística construtiva para calcular um limitante inferior.

Por meio da análise das relações de inclusão e de tamanho entre as diferentes malhas,

chegou-se que a malha de *raster points* não apresenta relação de inclusão com a malha de *regular normal patterns* e de *meet-in-the-middle patterns*. Também, mostrou-se que a *normal patterns* e *useful numbers* são equivalentes e possuem o mesmo tamanho. Este último resultado permitiu obter uma prova formal sobre a preservação da otimalidade ao usar a *raster points*, possibilitando agora um uso mais intenso dessa malha para resolver problemas de corte e empacotamento, ao invés da comumente adotada malha de *normal patterns*.

Além disso, apresentaram-se exemplos em que a malha de *raster points* é menor do que as *regular normal patterns* e *meet-in-the-middle patterns*, e vice-versa. Outras relações ainda mostraram que as malhas de *raster points* e *regular normal patterns* são sempre subconjuntos da malha de *normal patterns*, embora não haja relação de inclusão da *normal patterns* com a malha de *meet-in-the-middle patterns*. Diante disso, para a resolução de problemas de corte e empacotamento, torna-se preciso computar as malhas que têm sido menores para, de fato, utilizar a que é a menor para a instância sendo resolvida.

Através dos experimentos realizados em instâncias da literatura, observou-se que algumas malhas são equivalentes em termos de tamanho, enquanto entre outras existe uma considerável diferença com relação ao número de pontos para empacotar itens. Claramente os resultados dos experimentos apontaram que malhas menores geram um menor número de possíveis combinações de empacotamento dos itens que, por sua vez, permite obter a solução do problema de forma mais rápida. Com isso, as malhas de *raster points* e *meet-in-the-middle patterns* foram as menores entre as malhas em estudo, sendo as que precisaram de um menor tempo computacional para obter a solução ótima do problema.

Além disso, também foi possível notar que a aplicação dos dois procedimentos de redução permitiram obter malhas menores, gastando um menor tempo na resolução do problema da mochila 0-1 bidimensional, embora o impacto não tenha sido satisfatório sobre a *raster points*. Assim, este trabalho contribui com a literatura ao investigar a influência das diferentes estratégias de discretização do recipiente em malhas, que é um tema com relativamente poucas pesquisas, porém possui extrema importância na resolução dos problemas de corte e empacotamento por meio de métodos exatos e heurísticos.

Trabalhos futuros que podem ser realizados a partir deste estudo são: realizar experimentos sobre a resolução do problema da mochila 0-1 bidimensional, aplicando as malhas de *normal patterns* e *useful numbers*, a fim de analisar se malhas de mesmo tamanho, porém com coordenadas diferentes, gastam o mesmo tempo computacional para obterem a solução ótima. Também, aplicar os pré-processamentos propostos por [Côté e Iori \(2016\)](#) sobre a malha de *MIM*, com o intuito de analisar a redução que tais procedimentos podem proporcionar sobre a quantidade de pontos na malha de *MIM*. Além disso, aplicar a *MIM* com os pré-processamentos na resolução do problema da mochila 0-1 bidimensional com o intuito de analisar o tempo computacional gasto para obter a solução ótima e comparar com o tempo ao usar a malha de *raster points* e a de *MIM* sem a aplicação de tais procedimentos.

Outra linha de investigação inclui o desenvolvimento de modelos de programação linear inteira que consideram os itens empacotados sobre uma malha de pontos. Ademais, pode-se também desenvolver procedimentos de redução para as malhas, mesmo que os procedimentos sejam específicos para certos problemas.

REFERÊNCIAS

- AHN, S.; PARK, C.; YOON, K. An improved best-first branch and bound algorithm for the pallet-loading problem using a staircase structure. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 42, n. 21, p. 7676–7683, 2015. Citado na página 34.
- AKEB, H.; HIFI, M. Solving the circular open dimension problem by using separate beams and look-ahead strategies. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 40, n. 5, p. 1243–1255, 2013. Citado na página 34.
- AKEB, H.; HIFI, M.; MOUNIR, M. E. O. A. Local branching-based algorithms for the disjunctively constrained knapsack problem. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 60, n. 4, p. 811–820, 2011. Citado na página 34.
- ALMEIDA, A. de; FIGUEIREDO, M. B. A particular approach for the three-dimensional packing problem with additional constraints. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 37, n. 11, p. 1968–1976, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 38.
- ALVAREZ-VALDES, R.; PARAJON, A.; TAMARIT, J. M. A computational study of lp-based heuristic algorithms for two-dimensional guillotine cutting stock problems. *OR Spectrum*, Springer, v. 24, n. 2, p. 179–192, 2002. Citado na página 35.
- ALVAREZ-VALDES, R.; PARREÑO, F.; TAMARIT, J. M. A branch-and-cut algorithm for the pallet loading problem. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 32, n. 11, p. 3007–3029, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 23, 34 e 37.
- ALVES, C. *et al.* New constructive algorithms for leather nesting in the automotive industry. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 39, n. 7, p. 1487–1505, 2012. Citado na página 23.
- ARAHORI, Y.; IMAMICHI, T.; NAGAMOCHI, H. An exact strip packing algorithm based on canonical forms. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 39, n. 12, p. 2991–3011, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 38.
- ARAÚJO, O. C. B. d.; ARMENTANO, V. A. A multi-start random constructive heuristic for the container loading problem. *Pesquisa Operacional*, SciELO Brasil, v. 27, n. 2, p. 311–331, 2007. Citado na página 34.
- BALDACCI, R.; BOSCHETTI, M. A. A cutting-plane approach for the two-dimensional orthogonal non-guillotine cutting problem. *European Journal of Operational Research*, v. 183, p. 1136–1149, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 40.

- BALDI, M. M.; PERBOLI, G.; TADEI, R. The three-dimensional knapsack problem with balancing constraints. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 218, n. 19, p. 9802–9818, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 38.
- BANSAL, N. *et al.* A harmonic algorithm for the 3d strip packing problem. *SIAM Journal on Computing*, SIAM, v. 42, n. 2, p. 579–592, 2013. Citado na página 34.
- BEASLEY, J. E. Algorithms for unconstrained two-dimensional guillotine cutting. *Journal of the Operational Research Society*, Springer, v. 36, n. 4, p. 297–306, 1985a. Citado 3 vezes nas páginas 34, 36 e 53.
- _____. An exact two-dimensional non-guillotine cutting tree search procedure. *Operations Research*, INFORMS, v. 33, n. 1, p. 49–64, 1985b. Citado 6 vezes nas páginas 28, 36, 37, 41, 101 e 107.
- BHATTACHARYA, S.; ROY, R.; BHATTACHARYA, S. An exact depth-first algorithm for the pallet loading problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 110, n. 3, p. 610–625, 1998. Citado na página 33.
- BIRGIN, E. G.; LOBATO, R. D.; MORABITO, R. An effective recursive partitioning approach for the packing of identical rectangles in a rectangle. *Journal of the Operational Research Society*, Nature Publishing Group, v. 61, n. 2, p. 306–320, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 34, 36, 38 e 56.
- _____. Generating unconstrained two-dimensional non-guillotine cutting patterns by a recursive partitioning algorithm. *Journal of the Operational Research Society*, Palgrave Macmillan, v. 63, n. 2, p. 183–200, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 38, 56 e 107.
- BISCHOFF, E. E.; RATCLIFF, M. S. W. Issues in the development of approaches to container loading. *Omega*, Elsevier, v. 23, n. 4, p. 377–390, 1995. Citado na página 24.
- BORTFELDT, A.; GEHRING, H. A hybrid genetic algorithm for the container loading problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 131, n. 1, p. 143–161, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 34.
- BORTFELDT, A.; GEHRING, H.; MACK, D. A parallel tabu search algorithm for solving the container loading problem. *Parallel Computing*, Elsevier, v. 29, n. 5, p. 641–662, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 34.
- BORTFELDT, A.; MACK, D. A heuristic for the three-dimensional strip packing problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 183, n. 3, p. 1267–1279, 2007. Citado na página 34.
- BOSCHETTI, M. A.; MINGOZZI, A. The two-dimensional finite bin packing problem. part i: New lower bounds for the oriented case. *Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies*, Springer, v. 1, n. 1, p. 27–42, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 88.
- BOSCHETTI, M. A.; MINGOZZI, A.; HADJICONSTANTINO, E. New upper bounds for the two-dimensional orthogonal non-guillotine cutting stock problem. *IMA Journal of Management Mathematics*, IMA, v. 13, n. 2, p. 95–119, 2002. Citado 8 vezes nas páginas 21, 24, 35, 37, 40, 68, 88 e 89.

- BOSCHETTI, M. A.; MONTALETTI, L. An exact algorithm for the two-dimensional strip-packing problem. *Operations Research*, INFORMS, v. 58, n. 6, p. 1774–1791, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 40.
- CAPRARA, A.; MONACI, M. On the two-dimensional knapsack problem. *Operations Research Letters*, Elsevier, v. 32, n. 1, p. 5–14, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 37.
- CARNIERI, C.; MENDOZA, G. A.; GAVINHO, L. G. Solution procedures for cutting lumber into furniture parts. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 73, n. 3, p. 495–501, 1994. Citado 6 vezes nas páginas 21, 24, 36, 40, 64 e 65.
- CARVALHO, J. M. V. d. Exact solution of bin-packing problems using column generation and branch-and-bound. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 86, p. 629–659, 1999. Citado na página 35.
- _____. Lp models for bin packing and cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 141, n. 2, p. 253–273, 2002. Citado na página 35.
- CHERRI, A. C. *et al.* The one-dimensional cutting stock problem with usable leftovers—a survey. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 236, n. 2, p. 395–402, 2014. Citado na página 35.
- CHRISTOFIDES, N.; WHITLOCK, C. An algorithm for two-dimensional cutting problems. *Operations Research*, INFORMS, v. 25, n. 1, p. 30–44, 1977. Citado 8 vezes nas páginas 21, 24, 35, 37, 50, 51, 52 e 68.
- CHUNG, F. R.; GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. On packing two-dimensional bins. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, SIAM, v. 3, n. 1, p. 66–76, 1982. Citado na página 35.
- CINTRA, G. F. *et al.* Algorithms for two-dimensional cutting stock and strip packing problems using dynamic programming and column generation. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 191, n. 1, p. 61–85, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 35, 38 e 39.
- CÔTÉ, J.-E.; DELL'AMICO, M.; IORI, M. Combinatorial benders' cuts for the strip packing problem. *Operations Research*, INFORMS, v. 62, n. 3, p. 643–661, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 40.
- CÔTÉ, J.-E.; GENDREAU, M.; POTVIN, J.-Y. An exact algorithm for the two-dimensional orthogonal packing problem with unloading constraints. *Operations Research*, INFORMS, v. 62, n. 5, p. 1126–1141, 2014. Citado na página 40.
- CÔTÉ, J.-E.; IORI, M. *The Meet-in-the-Middle Principle for Cutting and Packing Problems*. [S.l.], 2016. Citado 11 vezes nas páginas 21, 24, 40, 45, 53, 70, 71, 72, 85, 86 e 128.
- CRAINIC, T. G.; PERBOLI, G.; TADEI, R. Extreme point-based heuristics for three-dimensional bin packing. *Inform Journal on Computing*, Inform, v. 20, n. 3, p. 368–384, 2008. Citado 5 vezes nas páginas 21, 24, 35, 37 e 69.
- CUI, Y.; CUI, Y.-P.; YANG, L. Heuristic for the two-dimensional arbitrary stock-size cutting stock problem. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 78, p. 195–204, 2014. Citado na página 35.

CUI, Y. *et al.* Sequential grouping heuristic for the two-dimensional cutting stock problem with pattern reduction. *International Journal of production economics*, Elsevier, v. 144, n. 2, p. 432–439, 2013. Citado na página 35.

CUI, Y.; ZHONG, C.; YAO, Y. Pattern-set generation algorithm for the one-dimensional cutting stock problem with setup cost. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 243, n. 2, p. 540–546, 2015. Citado na página 35.

DELORME, M.; IORI, M.; MARTELLO, S. Bin packing and cutting stock problems: Mathematical models and exact algorithms. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 255, n. 1, p. 1–20, 2016. Citado na página 35.

_____. Logic based benders' decomposition for orthogonal stock cutting problems. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 78, p. 290–298, 2017. Citado na página 34.

DERRAC, J. *et al.* A practical tutorial on the use of nonparametric statistical tests as a methodology for comparing evolutionary and swarm intelligence algorithms. *Swarm and Evolutionary Computation*, Elsevier, v. 1, n. 1, p. 3–18, 2011. Citado na página 125.

DIEDRICH, F. *et al.* Approximation algorithms for 3d orthogonal knapsack. *Journal of Computer Science and Technology*, Springer, v. 23, n. 5, p. 749–762, 2008. Citado na página 34.

DOLATABADI, M.; LODI, A.; MONACI, M. Exact algorithms for the two-dimensional guillotine knapsack. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 39, n. 1, p. 48–53, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 39.

DOWSLAND, K. A. An exact algorithm for the pallet loading problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 31, p. 78–84, 1987. Citado na página 33.

DUSBERGER, F.; RAIDL, G. R. Solving the 3-staged 2-dimensional cutting stock problem by dynamic programming and variable neighborhood search. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, Elsevier, v. 47, p. 133–140, 2015. Citado na página 35.

DYCKHOFF, H. A typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 44, n. 2, p. 145–159, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 31.

EPSTEIN, L. Two-dimensional online bin packing with rotation. *Theoretical Computer Science*, Elsevier, v. 411, n. 31, p. 2899–2911, 2010. Citado na página 35.

FANSLAU, T.; BORTFELDT, A. A tree search algorithm for solving the container loading problem. *INFORMS Journal on Computing*, INFORMS, v. 22, n. 2, p. 222–235, 2010. Citado na página 34.

FAYARD, D.; HIFI, M.; ZISSIMOPOULOS, V. An efficient approach for large-scale two-dimensional guillotine cutting stock problems. *Journal of the Operational Research Society*, Springer, v. 49, n. 12, p. 1270–1277, 1998. Citado na página 107.

FAYARD, D.; ZISSIMOPOULOS, V. An approximation algorithm for solving unconstrained two-dimensional knapsack problems. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 84, n. 3, p. 618–632, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 34, 36 e 51.

GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*. [S.l.]: San Francisco: Freeman, 1979. Citado na página 25.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. [S.l.]: São Paulo: Atlas, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 15, 26 e 27.

GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting stock problem-part ii. *Operations research*, INFORMS, v. 11, n. 6, p. 863–888, 1963. Citado na página 34.

_____. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations research*, INFORMS, v. 13, n. 1, p. 94–120, 1965. Citado na página 35.

GONÇALVES, R. F.; QUEIROZ, T. A. The knapsack problem with three practical constraints. *Procedia Computer Science*, Elsevier, v. 29, p. 2192–2200, 2014. Citado na página 39.

HADJICONSTANTINO, E.; CHRISTOFIDES, N. An exact algorithm for general, orthogonal, two-dimensional knapsack problems. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 83, n. 1, p. 39–56, 1995. Citado na página 34.

HERZ, J. C. Recursive computational procedure for two-dimensional stock cutting. *IBM Journal of Research and Development*, IBM, v. 16, n. 5, p. 462–469, 1972. Citado 10 vezes nas páginas 21, 24, 35, 46, 47, 49, 52, 53, 72 e 107.

HIFI, M. The dh/kd algorithm: a hybrid approach for unconstrained two-dimensional cutting problems. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 97, n. 1, p. 41–52, 1997. Citado na página 107.

_____. Exact algorithms for the guillotine strip cutting/packing problem. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 25, n. 11, p. 925–940, 1998. Citado na página 36.

_____. Exact algorithms for large-scale unconstrained two and three staged cutting problems. *Computational Optimization and Applications*, Springer, v. 18, n. 1, p. 63–88, 2001. Citado na página 107.

_____. An iterative rounding search-based algorithm for the disjunctively constrained knapsack problem. *Engineering Optimization*, Taylor & Francis, v. 46, n. 8, p. 1109–1122, 2014. Citado na página 34.

HIFI, M. *et al.* A linear programming approach for the three-dimensional bin-packing problem. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, Elsevier, v. 36, p. 993–1000, 2010. Citado na página 35.

HIFI, M.; SALEH, S.; WU, L. A hybrid guided neighborhood search for the disjunctively constrained knapsack problem. *Cogent Engineering*, Taylor & Francis, v. 2, n. 1, p. 1068969, 2015. Citado na página 34.

HIFI, M.; ZISSIMOPOULOS, V. A recursive exact algorithm for weighted two-dimensional cutting. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 91, n. 3, p. 553–564, 1996a. Citado na página 107.

_____. Une amélioration de l'algorithme récursif de herz pour le problème de découpe à deux dimensions. *Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle*, v. 30, n. 2, p. 111–125, 1996b. Citado na página 107.

HOPPER, E.; TURTON, B. C. H. A review of the application of meta-heuristic algorithms to 2d strip packing problems. *Artificial Intelligence Review*, Springer, v. 16, n. 4, p. 257–300, 2001. Citado na página 34.

JORGE, A. R. *et al.* O problema de corte de itens irregulares: aplicação na indústria de corte de aventais e forros de luva. *Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, v. 8, n. 3, p. 214–235, 2016. Citado na página 23.

JUNQUEIRA, L.; MORABITO, R.; YAMASHITA, D. S. Modelos de otimização para problemas de carregamento de contêineres com considerações de estabilidade e de empilhamento. *Pesquisa Operacional*, SciELO Brasil, v. 30, n. 1, p. 73–98, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 38.

_____. Three-dimensional container loading models with cargo stability and load bearing constraints. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 39, n. 1, p. 74–85, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 23, 28, 34, 38 e 101.

KALLRATH, J. *et al.* Solving real-world cutting stock-problems in the paper industry: Mathematical approaches, experience and challenges. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 238, n. 1, p. 374–389, 2014. Citado na página 35.

LEAO, A. A.; FURLAN, M. M.; TOLEDO, F. M. Decomposition methods for the lot-sizing and cutting-stock problems in paper industries. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 48, p. 250–268, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 35.

LEUNG, S. C. *et al.* A hybrid simulated annealing metaheuristic algorithm for the two-dimensional knapsack packing problem. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 39, n. 1, p. 64–73, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 102.

LINS, L.; LINS, S.; MORABITO, R. An n-tet graph approach for non-guillotine packings of n-dimensional boxes into an n-container. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 141, n. 2, p. 421–439, 2002. Citado na página 33.

_____. An L-approach for packing (ℓ, w) -rectangles into rectangular and l-shaped pieces. *Journal of the Operational Research Society*, Nature Publishing Group, v. 54, n. 7, p. 777–789, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 38, 39, 53 e 82.

LIU, J. *et al.* A novel hybrid tabu search approach to container loading. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 38, n. 4, p. 797–807, 2011. Citado na página 34.

LODI, A.; MARTELLO, S.; VIGO, D. Approximation algorithms for the oriented two-dimensional bin packing problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 112, n. 1, p. 158–166, 1999. Citado na página 35.

_____. Recent advances on two-dimensional bin packing problems. *Discrete Applied Mathematics*, Elsevier, v. 123, n. 1, p. 379–396, 2002. Citado na página 35.

LODI, A.; MONACI, M.; PIETROBUONI, E. Partial enumeration algorithms for two-dimensional bin packing problem with guillotine constraints. *Discrete Applied Mathematics*, Elsevier, 2015. Citado na página 35.

LU, Y.; CHA, J. A fast algorithm for identifying minimum size instances of the equivalence classes of the pallet loading problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 237, n. 3, p. 794–801, 2014. Citado na página 34.

- MACEDO, R.; ALVES, C.; CARVALHO, J. M. V. de. Arc-flow model for the two-dimensional guillotine cutting stock problem. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 37, n. 6, p. 991–1001, 2010. Citado na página 35.
- MARTELLO, S.; MONACI, M.; VIGO, D. An exact approach to the strip-packing problem. *Journal on Computing*, INFORMS, v. 15, n. 3, p. 310–319, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 37.
- MARTELLO, S.; PISINGER, D.; TOTH, P. New trends in exact algorithms for the 0–1 knapsack problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 123, n. 2, p. 325–332, 2000. Citado na página 34.
- MARTELLO, S.; PISINGER, D.; VIGO, D. The three-dimensional bin packing problem. *Operations Research*, INFORMS, v. 48, n. 2, p. 256–267, 2000. Citado 7 vezes nas páginas 21, 24, 35, 37, 66, 67 e 69.
- MARTELLO, S.; TOTH, P. *Knapsack problems: algorithms and computer implementations*. Chichester: John Wiley & Sons, Inc., 1990. Citado 3 vezes nas páginas 34, 89 e 95.
- MORÁBITO, R. Modelos de otimização para o problema de corte nas indústrias de papel e papelão e de móveis. *Gestão & Produção*, SciELO Brasil, v. 1, n. 1, p. 59–76, 1994. Citado na página 23.
- MORABITO, R.; ARENALES, M. An and/or-graph approach to the container loading problem. *International Transactions in Operational Research*, Wiley Online Library, v. 1, n. 1, p. 59–73, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 36.
- _____. Abordagens para o problema do carregamento de contêineres. *Pesquisa Operacional*, v. 17, n. 1, p. 29–56, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 36.
- _____. Optimizing the cutting of stock plates in a furniture company. *International Journal of Production Research*, Taylor & Francis, v. 38, n. 12, p. 2725–2742, 2000. Citado na página 23.
- MORABITO, R.; ARENALES, M.; ARCARO, V. An and—or-graph approach for two-dimensional cutting problems. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 58, n. 2, p. 263–271, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 107.
- MORABITO, R.; MORALES, S. A simple and effective recursive procedure for the manufacturer's pallet loading problem. *Journal of the Operational Research Society*, Springer, v. 49, n. 8, p. 819–828, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 38.
- NASCIMENTO, O. X.; CUNHA, J. G. d. A.; QUEIROZ, T. A. Resolução do problema de empacotamento ortogonal com diferentes malhas e restrições reais. *Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, v. 8, n. 3, p. 236–264, 2016. Citado na página 40.
- PEREIRA, J. Procedures for the bin packing problem with precedence constraints. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 250, n. 3, p. 794–806, 2016. Citado na página 35.
- PISINGER, D. Heuristics for the container loading problem. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 141, n. 2, p. 382–392, 2002. Citado na página 34.
- PUREZA, V.; MORABITO, R. Some experiments with a simple tabu search algorithm for the manufacturer's pallet loading problem. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 33, n. 3, p. 804–819, 2006. Citado na página 34.

- QUEIROZ, T. A. *et al.* Two-dimensional disjunctively constrained knapsack problem: Heuristic and exact approaches. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 105, p. 313–328, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 34, 40, 45 e 101.
- QUEIROZ, T. A.; MIYAZAWA, F. K. Two-dimensional strip packing problem with load balancing, load bearing and multi-drop constraints. *International Journal of Production Economics*, Elsevier, v. 145, n. 2, p. 511–530, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 39.
- QUEIROZ, T. A.; MIYAZAWA, F. K.; WAKABAYASHI, Y. On the l-approach for generating unconstrained two-dimensional non-guillotine cutting patterns. *4OR*, Springer, v. 13, n. 2, p. 199–219, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 39.
- QUEIROZ, T. A. *et al.* Algorithms for 3d guillotine cutting problems: Unbounded knapsack, cutting stock and strip packing. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 39, n. 2, p. 200–212, 2012. Citado na página 39.
- RANGEL, S.; FIGUEIREDO, A. G. d. O problema de corte de estoque em indústrias de móveis de pequeno e médio portes. *Pesquisa Operacional*, SciELO Brasil, v. 28, n. 3, p. 451–472, 2008. Citado na página 23.
- REN, J.; TIAN, Y.; SAWARAGI, T. A tree search method for the container loading problem with shipment priority. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 214, n. 3, p. 526–535, 2011. Citado na página 34.
- RIBEIRO, G. M.; LORENA, L. A. N. Lagrangean relaxation with clusters and column generation for the manufacturer's pallet loading problem. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 34, n. 9, p. 2695–2708, 2007. Citado na página 34.
- ROCHA, R. F.; ARAUJO, S. A. d.; RANGEL, S. Um estudo computacional sobre a geração de padrões de corte 2-estágios em uma fábrica de móveis de pequeno porte. *Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, v. 8, n. 3, p. 181–213, 2016. Citado na página 23.
- SCHEITHAUER, G. Equivalence and dominance for problems of optimal packing of rectangles. *Ricerca Operativa*, v. 27, p. 3–34, 1997. Citado 6 vezes nas páginas 36, 55, 56, 64, 66 e 81.
- SCHEITHAUER, G.; TERNO, J. The g4-heuristic for the pallet loading problem. *Journal of the Operational Research Society*, JSTOR, v. 47, p. 511–522, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 23, 36 e 54.
- SCHENEKEMBERG, C. M. *et al.* Uma proposta de resolução para o problema de carregamento de múltiplos contêineres heterogêneos com restrições adicionais de separação de itens, orientação das caixas e estabilidade vertical da carga. *Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, v. 8, n. 3, p. 163–180, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 66.
- SILVEIRA, J. L. M. d.; MIYAZAWA, F. K.; XAVIER, E. C. Heuristics for the strip packing problem with unloading constraints. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 40, n. 4, p. 991–1003, 2013. Citado na página 34.
- TERNO, J.; LINDEMANN, R.; SCHEITHAUER, G. *Zuschnittprobleme and ihre praktische lösung*. [S.l.], 1987. Citado 9 vezes nas páginas 21, 24, 36, 54, 55, 57, 59, 61 e 63.
- TERNO, J. *et al.* An efficient approach for the multi-pallet loading problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 123, n. 2, p. 372–381, 2000. Citado na página 23.

VALLE, A. M. D. *et al.* Heuristics for two-dimensional knapsack and cutting stock problems with items of irregular shape. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 39, n. 16, p. 12589–12598, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 38.

WÄSCHER, G.; HAUSSNER, H.; SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 183, n. 3, p. 1109–1130, 2007. Citado 10 vezes nas páginas 23, 24, 27, 28, 31, 32, 33, 41, 43 e 94.

WEI, L. *et al.* An improved skyline based heuristic for the 2d strip packing problem and its efficient implementation. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 80, p. 113–127, 2017. Citado na página 34.

_____. A block-based layer building approach for the 2d guillotine strip packing problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 239, n. 1, p. 58–69, 2014. Citado na página 34.

WOLSEY, L. A. *Integer programming*. New York: Wiley, 1998. Citado na página 37.