



Universidade Federal de Goiás
Departamento de Matemática
Regional Catalão
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



TÉCNICA DE PERTURBAÇÃO UTILIZADA PARA SOLUÇÃO NUMÉRICA DE
EQUAÇÕES DO 2^o E 3^o GRAUS

Eduardo Koiti Hirota

Catalão

2014

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Dissertação

Autor:	Eduardo Koiti Hirota		
E-mail:	eduhirota@yahoo.com.br		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor	Professor da Rede Privada de Educação		
Agência de fomento:	-----	Sigla:	---
País:	-----	UF:	- CNPJ:
Título:	Técnica de perturbação utilizada para solução numérica de equações do 2 ^o e 3 ^o graus		
Palavras-chave:	Sistemas dinâmicos não lineares, Método da expansão, Equações algébricas, Raízes de equações.		
Título em outra língua:	Perturbation technique used for numerical solution of the 2 nd and 3 rd degree equations.		
Palavras-chave em outra língua:	Nonlinear Dynamical Systems, Expansion Method, Algebraic Equations, Roots of Equations.		
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	09/10/2014		
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT		
Orientador (a):	Dr. Romes Antonio Borges		
E-mail:	kvborges@gmail.com; romes@pq.cnpq.br; romes@ufg.br		
Co-orientador (a):*			
E-mail:			


*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.



Assinatura do (a) autor (a)

Data: 24 / 11 / 2014.

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Eduardo Koiti Hirota

TÉCNICA DE PERTURBAÇÃO UTILIZADA PARA SOLUÇÃO NUMÉRICA DE
EQUAÇÕES DO 2^o E 3^o GRAUS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Romes Antonio Borges

Catalão

2014

Ficha catalográfica elaborada
automaticamente com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Hirota, Eduardo Koiti
[manuscrito] / Eduardo Koiti Hirota. - 2014.
XIII, 64 f.: il.

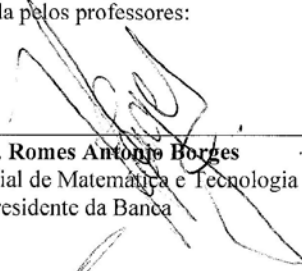
Orientador: Prof. Dr. Romes Antonio Borges.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional
Catalão, Catalão, Programa de Pós-Graduação em Matemática
(PROFMAT - profissional), Catalão, 2014.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui lista de figuras.

1. Sistemas dinâmicos não lineares. 2. Método da expansão. 3.
Equações algébricas. 4. Raízes de equações. I. Borges, Dr. Romes
Antonio, orient. II. Título.

Eduardo Koiti Hirota

**Técnica de Perturbação Utilizada para Solução
Numérica de Equações do 2º e 3º Graus**

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 09 de Outubro de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



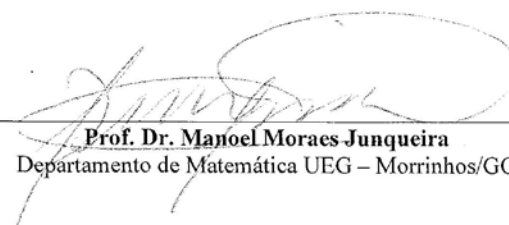
Prof. Dr. Romes Antonio Borges

Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – UFG/RC
Presidente da Banca



Prof. Dr. Marcelo Henrique Stoppa

Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – UFG/RC



Prof. Dr. Manoel Moraes Junqueira

Departamento de Matemática UEG – Morrinhos/GO

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Eduardo Koiti Hirota graduou-se em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás.

Dedico este trabalho a minha mãe, ao meu pai (in memoriam), a minha esposa, aos amigos por estarem sempre ao meu lado incentivando-me para que nunca desistisse.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado força na conclusão deste trabalho. Obrigado também aos meus amigos de convívio e estudo, Emerson da Silva, Ricardo Soares, Gilmar do Nascimento e todos os demais dessa primeira turma do Profmat-Catalão. Agradecimentos especiais aos professores doutores do curso: Élide Alves da Silva, Fernando Kennedy, Juliana Bernardes, Paulo Bergamaschi, Plínio Oliveira, Porfírio Junior, Márcio Roberto Rocha e Thiago Queiroz que muito contribuíram para minha formação como professor no ensino da Matemática. Por fim, meu agradecimento especial ao meu orientador professor Dr. Romes Antonio Borges pelo incentivo e paciência na orientação, mostrando ser possível a conclusão deste trabalho.

*“Por falta de um prego, perdeu-se a ferradura;
Por falta de uma ferradura, perdeu-se o cavalo;
Por falta do cavalo, perdeu-se o cavaleiro;
Por falta do cavaleiro, perdeu-se a batalha;
Por falta da batalha, perdeu-se o reino!”.*

Folclore Gleik, J.; 1990

RESUMO

Os fenômenos que ocorrem na natureza são essencialmente não lineares e a teoria de sistemas dinâmicos tem como objetivo obter um modelo matemático que represente melhor os sistemas físicos reais, então nada mais coerentes que a descrição ou análise desses fenômenos naturais usando modelos e técnicas não lineares. Nesta dissertação, foi utilizada a técnica da expansão direta para o desenvolvimento de equações diferenciais de ordem dois para resolução de uma equação não linear e na determinação aproximada de raízes de equações algébricas de ordem maior ou igual a dois. Com esse intuito, mostrou-se, inicialmente, o desenvolvimento de uma equação diferencial do movimento sujeito a um amortecimento não linear, que é representado pela equação de Duffing – Van der Pol. Geralmente, não é fácil obter uma solução analítica aproximada para esse tipo de equação, porém, este estudo é feito com a finalidade de ilustrar a técnica empregada no trabalho, resolvendo um tipo de problema no qual essas técnicas são corriqueiramente utilizadas para obter uma solução. Visando a aplicabilidade no ensino básico, apresenta-se uma forma de se obter as raízes aproximadas de equações do segundo e terceiro graus usando a técnica da expansão direta para efeito de comparação uma vez que existem fórmulas resolutivas para isso, provou-se que é possível determinar as raízes de equações de ordem maior por meio da mesma técnica.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos não lineares, Método da expansão, Equações algébricas, Raízes de equações.

ABSTRACT

Phenomenon that occur in the nature are essentially nonlinear and the dynamical systems theory aims to obtain a mathematical model that best represents the real physical systems, then nothing more coherent than the description or analysis of these natural phenomenon using models and techniques. In this dissertation, the technique of direct expansion for the development of two differential equations order to solve a nonlinear equation and the approximate determination of the roots of order algebraic equation higher or equal to two, was used. For this purpose, it was initially shown the development of a differential equation of motion subjected to a nonlinear damping, which is represented by the equation of Duffing – Van der Pol. Generally, it's not easy to obtain an approximated analytical solution for this type equation, but this study was done with the purpose of illustrating the technique used in the work, solving type solving a problem in which these techniques are routinely used to obtain a solution. Studied for application in basic education, it presents a way to obtain the approximate roots of equations of second and third degrees, using the technique of direct expansion for the sake of comparison. Since there are formulas for resolving this, It was proved that is possible to determine the roots of high-order equations by using the same technique.

Keywords: Nonlinear Dynamical Systems, Expansion Method, Algebraic Equations, Roots of Equations.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Trajectoria no espaço de fase	16
2.2	Curva Integral	16
2.3	Órbita no espaço de fase	17
2.4	Fluxo no espaço de fase	17
2.5	Espaço de fase circunferencial	18
2.6	Espaço de fase cilíndrico	18
2.7	Espaço de fase toroidal	19
2.8	Estabilidade	19
2.9	Estabilidade de Lyapunov	21
4.1	Sistema massa mola	30

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
2. INTRODUÇÃO AOS FENÔMENOS NÃO LINEARES	16
2.1 SISTEMAS DINÂMICOS	16
2.1.1 <i>Existência e unicidade de soluções</i>	18
2.2 ESPAÇO DE FASE	18
2.2.1 <i>Tipos de Topologia de um Espaço de Fase</i>	20
2.3 ESTABILIDADE	21
2.3.1 <i>Estabilidade de Lyapunov</i>	23
2.4 LINEARIZAÇÃO	24
2.5 PONTO DE EQUILÍBRIO	25
2.6 LINEARIZAÇÃO EM TORNO DE UM PONTO DE EQUILÍBRIO	25
2.6.1 <i>Cálculo de e^{tA}</i>	26
2.6.2 <i>Relação entre o problema não linear e o linearizado</i>	28
3. EQUAÇÕES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES	29
3.1. TÉCNICA DA EXPANSÃO “STRAIGHTFORWARD”	29
3.2 A EQUAÇÃO DE DUFFING	31
3.3 A EQUAÇÃO DE VAN DER POL	31
4. INTRODUÇÃO AO MÉTODO DA EXPANSÃO	33
4.1 O MÉTODO DA EXPANSÃO APLICADO NA RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA MASSA-MOLA NÃO LINEAR	33
4.2 O MÉTODO DA EXPANSÃO APLICADO NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE DUFFING E VAN DER POL	39
5. SOLUÇÕES NUMÉRICAS DE EQUAÇÕES DO 2^o E 3^o GRAUS	54
5.1 CONCEITOS BÁSICOS	54
5.2 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE ALGUMAS EQUAÇÕES	55
5.3 APLICAÇÕES - RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES	57
5.3.1 <i>Equação do segundo grau</i>	57
5.3.2 <i>Equação do terceiro grau</i>	58
6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	61
6.1 CONCLUSÕES	61
6.2 PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS	62
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	63
ANEXO I	64
DESENVOLVIMENTO DE ALGUMAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	64

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Na natureza a maioria dos fenômenos são essencialmente não lineares, então nada é mais correto que a descrição ou análise desses fenômenos naturais através de modelos ou técnicas não lineares uma vez que serão mais efetivos do que os modelos ou técnicas lineares (SAVI, 2003).

Um sistema físico pode ser definido como um conjunto de objetos agrupados por alguma interação, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto.

Contudo, as dificuldades inerentes ao estudo dos problemas não lineares, e o sucesso do estudo dos problemas lineares, incentivaram cada vez mais o estudo de modelos lineares bem comportados.

Na engenharia moderna, com o contínuo refinamento da precisão da instrumentação e do aumento da capacidade computacional, a teoria de sistemas não lineares vem ganhando mais significado prático. Aplicações da teoria de oscilações não lineares são encontradas não apenas na mecânica clássica, mas também na eletrônica, eletrotécnica, comunicações, mecânica quântica, biologia e em vários outros ramos da ciência (HAGERDON, 1984).

Os sistemas lineares e não lineares, divergem entre si na sua relação de causa e efeito. Na primeira, a resposta a um distúrbio é diretamente proporcional à intensidade deste, já na segunda a resposta não é necessariamente proporcional à intensidade do mesmo, e é essa categoria de sistema que serve de objeto de estudo nos sistemas dinâmicos não lineares.

Esta teoria estuda o comportamento aleatório e imprevisível dos sistemas, mostrando onde poderão ocorrer irregularidades na uniformidade da natureza do sistema como um todo. Isso ocorre a partir de pequenas alterações que aparentemente nada têm a ver com o evento futuro, alterando toda uma previsão física dita precisa.

O estudo de problemas não lineares possui duas abordagens distintas. Uma abordagem é qualitativa e tem como principal objetivo entender o comportamento

global de um dado sistema dinâmico. A outra é quantitativa e procura analisar a evolução do sistema no tempo (SAVI, 2003).

Neste trabalho será feita a análise de um sistema representado por uma equação de Duffing – Van der Pol para contribuir com os estudos sobre sistemas não lineares de uma maneira geral.

O trabalho foi dividido em seis capítulos. No capítulo 2, será apresentado um resumo dos principais tópicos da teoria de sistemas dinâmicos. Já no capítulo 3, tem-se algumas equações não lineares. O capítulo 4 apresenta um sistema não linear, utilizando o método da expansão e a equação analisada neste trabalho buscando uma solução aproximada empregando a teoria de perturbação através do método da expansão.

No capítulo 5 apresenta-se uma aplicação para a educação básica de como o método da expansão pode auxiliar na determinação de raízes de uma equação de segundo e terceiro graus, sendo que nesses casos existem fórmulas definidas para efeitos de comparação de resultados.

Finalmente, no capítulo 6 fazem-se as considerações finais sobre o trabalho desenvolvido e sugestões para trabalhos futuros, e a seguir, são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas.

CAPÍTULO II

2. INTRODUÇÃO AOS FENÔMENOS NÃO LINEARES

O estudo de problemas não lineares possui duas abordagens distintas, sendo uma abordagem qualitativa que tem como objetivo entender o comportamento global de um dado sistema físico através de mapas e espaços de fases e suas topologias. A outra é quantitativa e procura analisar a evolução de um sistema físico no tempo.

O objetivo deste capítulo é introduzir os conceitos básicos para uma análise qualitativa de um sistema dinâmico, essenciais para a análise quantitativa.

2.1 Sistemas Dinâmicos

Considere um sistema dinâmico cujo movimento é descrito por um sistema de equações diferenciais do tipo:

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

Esse sistema pode ser entendido como a evolução do campo vetorial x , que é continuamente transformado pela função $f(x)$. Esse sistema pode ser escrito em forma discreta no tempo, sendo chamado de mapeamentos ou mapas (SAVI,2003).

$$\begin{aligned} X &\mapsto F(X), X \in \mathbb{R}^n \\ X_{n+1} &\mapsto F(X_n), X \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (2.2)$$

Um mapa descreve a evolução no tempo de um sistema dinâmico expressando o seu estado a partir do instante anterior, movendo-se, portanto, de forma discreta.

Tanto em sistemas dinâmicos contínuos quanto em mapas, a função $f(x)$ (ou $F(X)$) define as suas características. Dentre as características fundamentais de um sistema dinâmico está o fato dele ser linear ou não linear.

A definição de linearidade pressupõe o princípio da superposição de efeitos, ou seja, estabelece que um dado efeito possa ser avaliado através da superposição de efeitos decorrentes de várias causas. De um modo geral, isto não pode ser

considerado em sistemas não lineares. A definição formal das condições de linearidade de um sistema pode ser estabelecida se as seguintes condições forem satisfeitas (SAVI,2003):

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y); x, y \in \mathbb{R}^n \\ f(\mu x) &= \mu f(x); x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^p \end{aligned} \quad (2.3)$$

Um sistema é dito autônomo quando não depende explicitamente do tempo. Por outro lado, o sistema é dito não autônomo quando existe uma dependência explícita do tempo. A equação (2.1) mostra um sistema autônomo de dimensão n .

O sistema que se segue é dito não autônomo.

$$\dot{x} = f(x, t); x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

Este sistema não autônomo pode ser visto como:

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^n; U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad (2.5)$$

onde U é um conjunto aberto (GONÇALVES, 2007).

Um sistema dinâmico não autônomo pode ser transformado em um sistema autônomo desde que se aumente de 1 (um) a dimensão do espaço, introduzindo-se para isso uma variável a mais, associada ao tempo. Desta forma, considere o seguinte sistema não autônomo de dimensão n escrita em termos de suas componentes,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x, t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x, t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Introduzindo a variável $x_{n+1} = t$, reescreve-se o sistema não autônomo n -dimensional como um sistema autônomo de dimensão $n+1$, conforme mostrado a seguir:

$$\dot{x} = f(x); x \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (2.7)$$

ou seja

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x, t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x, t) \\ \dot{x}_{n+1} &= t \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.1.1 Existência e unicidade de soluções

Uma consideração importante do ponto de vista de soluções de equações diferenciais é a existência e unicidade de uma determinada solução. Isto é particularmente verdade, quando se fala de um sistema que possui um comportamento imprevisível. De fato, vale destacar que a imprevisibilidade associada a sistemas não lineares não está associada a uma multiplicidade de soluções. Nesse contexto, vale apresentar o teorema da existência e unicidade de soluções, associado a sistemas dinâmicos.

Considere um sistema dinâmico não autônomo, supondo que f é C^r em um conjunto U . Isto é, f é r vezes diferenciável e contínuo em U . Suponha os seguintes conjuntos (SAVI, 2003):

$$I_1 = \{t \in \mathbb{R} / t_0 - \varepsilon_1 < t < t_0 + \varepsilon_1\}$$
$$I_2 = \{t \in \mathbb{R} / t_0 - \varepsilon_2 < t < t_0 + \varepsilon_2\}$$

Considere também que ϕ ou ϕ_1 representem uma solução do sistema dinâmico e que $(X_0, t_0) \in U$ seja uma condição inicial. Com isso temos que:

Teorema: Existência e unicidade de soluções

Existem as soluções: $\phi_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\phi_1(t_0) = X_0$
 $\phi_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\phi_2(t_0) = X_0$

Então, $\phi_1(t) = \phi_2(t) \forall t \in I_3$, onde, $I_3 = \{t \in \mathbb{R} / t_0 - \varepsilon_3 < t < t_0 + \varepsilon_3\}$ onde $\varepsilon_3 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

2.2 Espaço de fase

O Espaço de Fase de um sistema dinâmico é definido como um espaço formado pelas variáveis dependentes de um sistema dinâmico (x).

De um modo geral, o espaço de fase forma um conjunto aberto do \mathbb{R}^n . Todavia, em alguns casos a topologia do espaço pode estar restrita a uma superfície de alguma forma geometricamente particular. Alguns exemplos típicos destas figuras são o cilindro e o toro (SAVI, 2003).

Algumas definições importantes devem ser feitas para um dado espaço de fase. Para isso, considere o seguinte sistema de dimensão 2-dim (SAVI, 2003):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_x(x, y) \\ \dot{y} &= f_y(x, y); x, y \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.9}$$

a partir do qual são apresentadas algumas definições.

a) Trajetória – É o percurso que a solução $\phi_t(X_0, t_0)$ percorre no espaço de fase

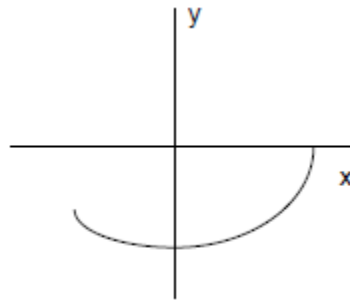


Figura 2.1 – Trajetória no espaço de fase

b) Curva Integral – É a solução $\phi_t(X_0, t_0)$ evoluindo no tempo

$$\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} / x = \phi_t(X_0, t_0), t \in I\}$$

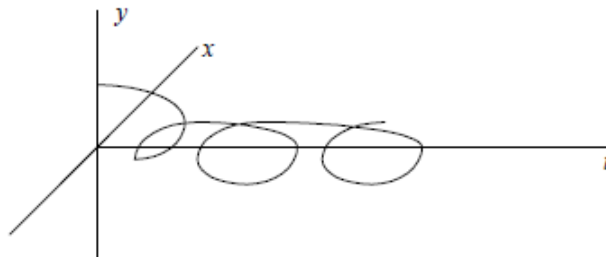


Figura 2.2 – Curva Integral

c) Órbita – É o lugar geométrico no espaço de fase, para uma dada condição inicial, (X_0, t_0) , por onde a solução passa na medida em que o tempo t evolui.

$$\{(x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} / x = \phi_t(X_0, t_0), t \in I\}$$

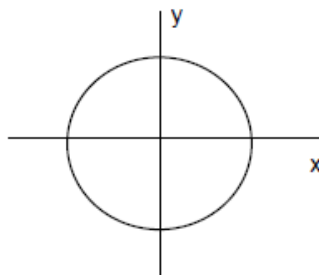


Figura 2.3 – Órbita no espaço de fase

d) Fluxo ou Retrato de Fase (Phase Portrait) – É a totalidade das órbitas representando todas as soluções possíveis $\phi_t(X_0, t_0)$.

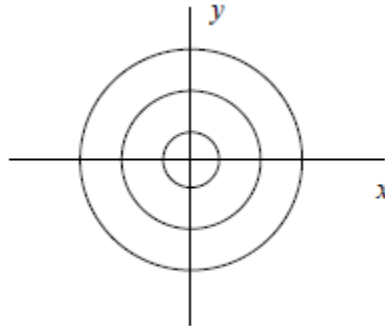


Figura 2.4 – Fluxo no espaço de fase

2.2.1 Tipos de Topologia de um Espaço de Fase

A seguir, apresentam-se alguns tipos de topologia especiais que ocorrem em espaços de fase em sistemas dinâmicos. Para cada um desses sistemas dinâmicos as órbitas evoluem na superfície do espaço de estado (SAVI, 2003).

a) Circunferência

Considere o seguinte sistema dinâmico:

$$\dot{\theta} = \omega, \theta \in (0, 2\pi], \omega > 0 \quad (2.10)$$

O espaço de fase é uma circunferência de comprimento 2π , definido pelo ângulo θ . Diz-se que o espaço é de dimensão 1.

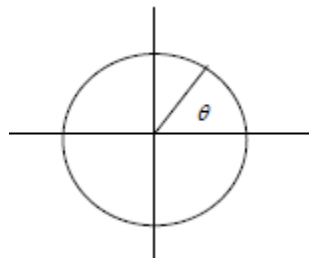


Figura 2.5 – Espaço de fase circunferencial

b) Cilindro

Considere o sistema que representa o movimento de um pêndulo.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\text{sen}(x)\end{aligned}\tag{2.11}$$

O espaço de fase pode ser visto como uma superfície de um cilindro obtido através do produto de uma circunferência e uma reta ($S \times \mathbb{R}$). Observe que no \mathbb{R}^2 os pontos $+\pi$ e $-\pi$ são idênticos, pois representam a mesma posição do pêndulo.

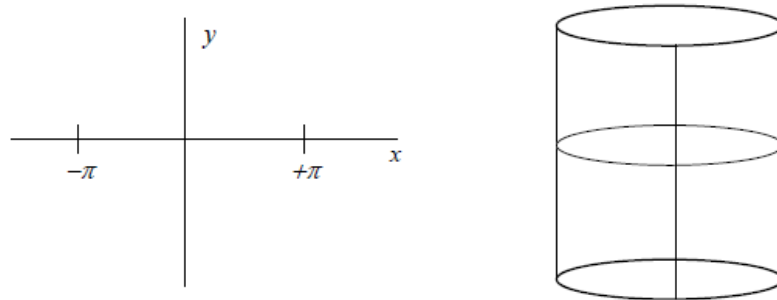


Figura 2.6 – Espaço de fase cilíndrico

c) Toro

Considere o sistema,

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \omega_1 \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2; \theta_1, \theta_2 \in (0, 2\pi]; \omega_1, \omega_2 > 0\end{aligned}\tag{2.12}$$

O espaço de fase pode ser obtido a partir do produto entre duas circunferências ($S^1 \times S^1 = T^2$). Com esse produto, obtém-se a superfície de um toro.

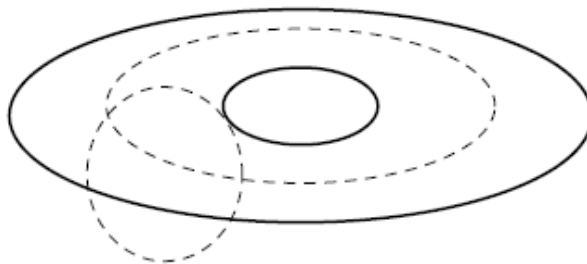


Figura 2.7 – Espaço de fase toroidal

2.3 Estabilidade

O conceito de estabilidade é fundamental no estudo de sistemas dinâmicos. A estabilidade está associada à característica de uma dada solução do sistema e, pode-se considerá-la em termos de alguma perturbação no sistema. Se essa

perturbação não afetar significativamente uma dada solução, então ela é estável. Do contrário, é instável.

A figura 2.8 ilustra o conceito de estabilidade, mostrando três situações:

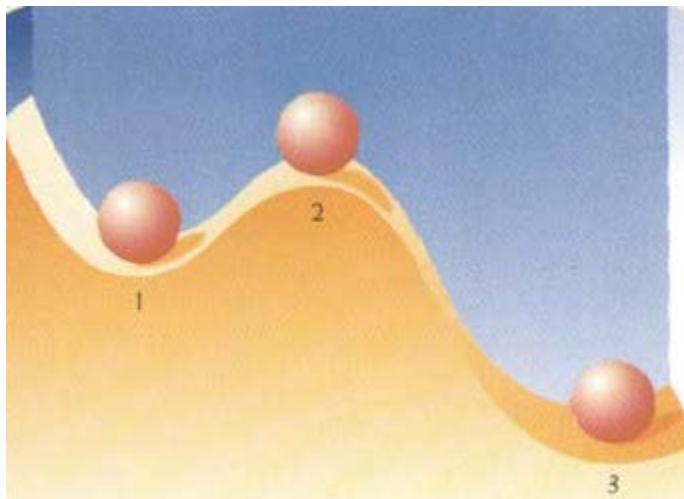


Figura 2.8 – Estabilidade

1. Equilíbrio meta-estável – Após uma pequena perturbação, o corpo retorna a configuração inicial. Entretanto existe uma posição mais estável (3) que dependendo da intensidade da perturbação, o sistema busca atingir esta solução.
2. Equilíbrio instável – Após a perturbação, o corpo não retorna a configuração inicial, assumindo uma nova posição distante da original.
3. Equilíbrio estável – Após uma perturbação, o corpo sempre retorna a configuração inicial.

Vale destacar ainda uma situação não apresentada na figura:

Equilíbrio neutro ou indiferente – Após a perturbação, o corpo tende a permanecer na sua nova configuração.

Em termo de sistemas dinâmicos, a estabilidade de uma dada solução pode ser definida a partir do critério de Lyapunov.

2.3.1 Estabilidade de Lyapunov

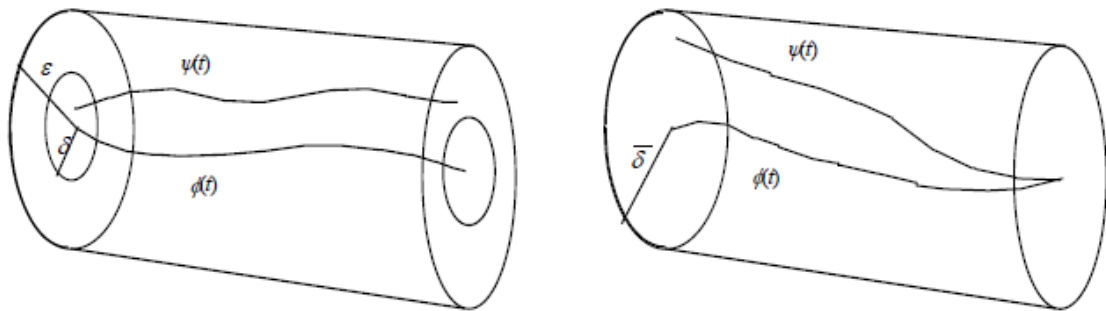
As definições sobre estabilidade de Lyapunov de uma dada solução dizem que uma trajetória que se inicia próxima a outra, permanece próxima a ela indefinidamente se ela for Lyapunov estável. Da mesma forma, uma trajetória é dita assintoticamente estável se iniciar-se próxima a outra trajetória, tendendo a convergir para esta a trajetória original na medida em que $t \rightarrow \infty$ (Figura 2.9). As definições formais são apresentadas a seguir (SAVI, 2003).

- **Solução Lyapunov Estável**

A solução $\phi(t)$ é dita Lyapunov Estável se, dado um $\varepsilon > 0$, pode-se encontrar um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para qualquer outra solução $\psi(t)$ com $|\psi(t_0) - \phi(t_0)| < \delta$ tem-se $|\psi(t) - \phi(t)| < \varepsilon, \forall t \in [t_0, \infty)$.

- **Solução Assintoticamente Estável**

A solução $\phi(t)$ é dita Assintoticamente Estável se ela for Lyapunov Estável e se existir um $\bar{\delta} > 0$ tal que $|\psi(t_0) - \phi(t_0)| < \bar{\delta}$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} |\psi(t) - \phi(t)| = 0, \forall t \in [t_0, \infty)$.



Solução Lyapunov estável

Solução assintoticamente estável

Figura 2.9 – Estabilidade de Lyapunov

2.4 Linearização

Um procedimento bastante instrutivo para avaliar a dinâmica de um sistema, em particular para avaliar a estabilidade de uma dada solução é a linearização do sistema dinâmico em torno de uma solução conhecida (SAVI, 2003).

Nesse contexto, considere a seguinte mudança de coordenadas, a partir da qual é possível estudar a evolução do sistema nas vizinhanças da solução $\phi(t)$.

$$x = \phi(t) + \eta; x, \eta \in \mathbb{R}^n \quad (2.13)$$

onde η é uma pequena variação da solução.

Série de Taylor: definição

Seja f uma função com derivadas de todas as ordens em algum intervalo contendo a como um ponto interior. Então a série de Taylor gerada por f em $x = a$ é:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$$

Utilizando a série de Taylor para escrever a função $f(x)$, tem-se:

$$f(x) = f(\phi(t) + \eta) = f(\phi(t)) + Df(\phi(t))\Big|_{n=0} \eta + \dots \quad (2.14)$$

Tomando-se apenas a parte linear da série e retornando a equação do movimento do sistema dinâmico, temos que:

$$\dot{x} = \dot{\phi}(t) + \dot{\eta} = f(x) = f(\phi(t)) + Df(\phi(t))\Big|_{n=0} \eta \quad (2.15)$$

Mas como $\phi(t)$ é uma solução do sistema, vê-se que,

$$\dot{\phi}(t) = f(\phi(t)) \quad (2.16)$$

E, portanto, chega-se ao segundo sistema linearizado,

$$\dot{\eta} = Df(\phi(t))\Big|_{n=0} \eta \quad (2.17)$$

Deve-se observar que, quando $\eta = 0$, tem-se que a solução correspondente é $\eta = 0$. Isso indica que, se a situação $\eta = 0$ for estável, a solução $x = \phi(t)$ também o é. Com isso, deve-se avaliar o seguinte procedimento;

- (i) Determinar a estabilidade da solução do problema linear quando $\eta = 0$.

- (ii) Concluir que a estabilidade da solução linear para $\eta = 0$ corresponde à estabilidade da solução do problema não linear $\eta = 0$.

Esse procedimento só pode ser considerado se a solução $x = \phi(t)$ não varia com o tempo. Vê-se então que,

$$x = \phi(t) = \bar{x} \quad (2.18)$$

evolui no tempo, mas sua posição permanece a mesma. Trata-se de um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico. Desta forma, para tratar o problema da estabilidade de uma solução deve-se linearizar o sistema em torno de um ponto especial que é o ponto de equilíbrio do sistema.

2.5 Ponto de Equilíbrio

Define-se um ponto de equilíbrio ou ponto fixo de um sistema dinâmico como sendo o ponto em que o sistema pode permanecer estacionário na medida em que o tempo evolui. Assim sendo, um ponto de equilíbrio é um ponto onde a solução não varia com o tempo (SAVI, 2003).

Se $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ for um ponto de equilíbrio ou ponto fixo de um sistema dinâmico do tipo $\dot{x} = f(x); x \in \mathbb{R}^n$, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$f(\bar{x}) = 0 \quad (2.19)$$

De maneira análoga, o ponto de equilíbrio $\bar{X} \in \mathbb{R}^n$ de um mapeamento do tipo $X_{n+1} = F(X_n); X \in \mathbb{R}^n$, deve satisfazer a seguinte condição;

$$\bar{X} = F(\bar{X}) \quad (2.20)$$

2.6 Linearização em torno de um ponto de equilíbrio

Considere um ponto de equilíbrio, tal que em um exemplo que se deseja estudar a estabilidade de uma dada solução, nas vizinhanças desse ponto de equilíbrio. Para isso, lineariza-se o sistema em torno desse ponto, repetindo-se a linearização feita na equação (2.4). Assim, considere a seguinte mudança de coordenadas,

$$x = \bar{x} + \eta ; \quad x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.21)$$

Com isso, chega-se ao seguinte problema linearizado,

$$\dot{\eta} = A\eta \quad (2.22)$$

onde A é a matriz constante dada por,

$$A = Df(\bar{x})\Big|_{n=0} \quad (2.23)$$

O sistema linearizado possui solução fechada (Gonçalves, 2007). Tal solução é apresentada por um teorema que diz:

O problema de condição inicial

$$\dot{\eta} = A\eta ; \quad \eta(0) = \eta_0 \quad (2.24)$$

possui a seguinte solução:

$$\eta = e^{tA}\eta_0 \quad (2.25)$$

2.6.1 Cálculo de e^{tA} .

Por definição tem-se que e^{tA} é dado por:

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k \quad (2.26)$$

onde I é a matriz identidade.

Deve-se notar que a determinação de e^{tA} diretamente de sua definição, implica em avaliar todas as potências A^k ($k = 0, 1, 2, \dots$) e aí efetuar a soma conforme mostra a série. Para evitar tal procedimento, considere a seguinte mudança de coordenadas.

$$\eta = T\xi; \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n \quad (2.27)$$

onde T é uma matriz singular.

Introduzindo a mudança de coordenadas no sistema de equações e pré-multiplicando por T^{-1} , obtém-se o seguinte,

$$(T^{-1}T)\dot{\xi} = (T^{-1}AT)\xi \quad (2.28)$$

O sistema linearizado, pode então ser reescrito,

$$\dot{\xi} = B\xi \quad (2.29)$$

$$\text{onde } B = T^{-1}AT \quad (2.30)$$

A matriz T deve ser escolhida de tal forma que,

$$B = \text{diag}(\lambda_i) \quad (2.31)$$

onde λ_i são os autovalores de A . Para isso, T deve ser a matriz dos autovetores de A . Considere então, que $v_i \in \mathbb{R}^n$ seja o i -ésimo autovetor de A . Desta forma, a matriz T é montada da seguinte maneira:

$$T = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n] \quad (2.32)$$

Com isso o sistema linear $\dot{\xi} = B\xi$, possui a seguinte solução,

$$\xi = e^{tB} \xi_0 \quad (2.33)$$

Mas, como $B = \text{diag}(\lambda_i)$, então $B = \text{diag}(\lambda_i)$ e assim,

$$e^{tB} = \text{diag} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_i^k \right) = \text{diag} \left(e^{t\lambda_i} \right) \quad (2.34)$$

Portanto, a solução é:

$$\xi = \text{diag} \left(e^{t\lambda_i} \right) \xi_0 \quad (2.35)$$

Fazendo agora a transformação inversa para obter η , chega-se a solução desejada:

$$\eta = T \text{diag} \left(e^{t\lambda_i} \right) T^{-1} \eta_0 \quad (2.36)$$

Os dois problemas lineares tratados são similares uma vez que A e B possuem os mesmos autovalores. Portanto, as características de um movimento na vizinhança de um ponto de equilíbrio são definidas pelos autovalores de A . De um modo geral divide-se o espectro de autovalores de A em três conjuntos, σ^s , σ^u e σ^c , que estão associados às características de estabilidade do ponto de equilíbrio em questão, representando as partes estáveis, instáveis e centrais, respectivamente. Conforme pode ser visto na solução do sistema linearizado da eq.(2.37), estes conjuntos são definidos de acordo com a parte real dos autovalores conforme se mostra a seguir.

$$\begin{aligned} \sigma^s &= \{ \lambda \text{ tal que } \text{Re}(\lambda) < 0 \} \\ \sigma^u &= \{ \lambda \text{ tal que } \text{Re}(\lambda) > 0 \} \\ \sigma^c &= \{ \lambda \text{ tal que } \text{Re}(\lambda) = 0 \} \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.6.2 Relação entre o problema não linear e o linearizado

Até o momento, avaliou-se a estabilidade da solução linearizada quando $\eta=0$. Deve-se agora saber se a estabilidade da solução linear corresponde à estabilidade da solução do problema não linear, associado na vizinhança de um dado ponto fixo. Para isso, considere a definição de ponto fixo hiperbólico, a partir da qual é possível estabelecer esta relação (SAVI, 2003).

Considere um sistema dinâmico $\dot{x} = f(x)$; $x \in \mathbb{R}^n$. O ponto fixo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ é dito hiperbólico se $A = Df(\bar{x})|_{\eta=0}$ não possuir nenhum autovalor λ cuja parte real seja nula, isto é, $\text{Re}(\lambda_k) \neq 0$; $\forall k$.

Em linhas gerais, pode-se dizer que a solução do problema linearizado nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio, localmente corresponde à solução do problema não linear, desde que o ponto de equilíbrio seja hiperbólico.

CAPÍTULO III

3. EQUAÇÕES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

Uma análise quantitativa dos sistemas não lineares pode ser aplicada quando as não linearidades podem ser consideradas pequenas, as quais são tratadas como perturbações em relação a um sistema linear. Assim, a resposta de um sistema não linear será uma perturbação da resposta do sistema linear equivalente. A principal característica dessa análise é avaliar o comportamento de um dado sistema nas vizinhanças de uma situação conhecida (SAVI, 2003).

Com essas técnicas é possível introduzir perturbações em um sistema linear e a ideia básica é utilizar séries de potência com um parâmetro pequeno a que representa a grandeza de uma perturbação. Esse procedimento analítico é usado para obter soluções no tempo.

Existem várias técnicas de perturbações e a aplicação de cada uma delas é definida por características específicas de um sistema dinâmico, sendo a mais simples a técnica da expansão, mas, mostra a ideia básica que existe em todas as outras técnicas.

3.1. Técnica da expansão “Straightforward”

Seja a equação não linear:

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = ag(u, \dot{u}) \quad (3.1)$$

Essa técnica assume que a solução do sistema dinâmico é dada pela seguinte série de potência

$$u(t) = u_0 t + au_1(t) + a^2 u_2(t) + \dots \quad (3.2)$$

ou seja, considerando que a resposta $u(t)$ pode ser obtida a partir de uma perturbação da resposta do sistema linear $u_0(t)$, então pode-se escrever a solução dada na equação 3.2 da seguinte maneira,

$$u(t) = u_0 t + \eta(u, a) \quad (3.3)$$

Portanto a função $g(u, \dot{u})$ pode ser expandida em série de Taylor em torno da solução do sistema linear que resulta em,

$$g(u, \dot{u}) = g(u_0 + \eta \dot{u}_0 + \dot{\eta}) = g + \frac{\partial g}{\partial u} \eta + \frac{\partial g}{\partial \dot{u}} \dot{\eta} + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \frac{\eta^2}{2!} + \frac{\partial^2 g}{\partial \dot{u}^2} \frac{\dot{\eta}^2}{2!} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial \dot{u}} \eta \dot{\eta} + \dots \quad (3.4)$$

Na expressão anterior, considerou-se, como notação que $g = g(u_0, \dot{u}_0)$. Desta forma, sabendo-se que η representa a perturbação mostrada na equação 3.3, reescreve-se a expansão da função $g(u, \dot{u})$ da seguinte forma,

$$g(u, \dot{u}) = g + a \left[\frac{\partial g}{\partial u} u_1 + \frac{\partial g}{\partial \dot{u}} \dot{u}_1 \right] + a^2 \left[\frac{\partial g}{\partial u} u_2 + \frac{\partial g}{\partial \dot{u}} \dot{u}_2 + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \frac{u_1^2}{2!} + \frac{\partial^2 g}{\partial \dot{u}^2} \frac{\dot{u}_1^2}{2!} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial \dot{u}} u_1 \dot{u}_1 \right] + \dots \quad (3.5)$$

Usando a solução da equação 3.2 tem-se,

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \ddot{u}_0 + \omega_0^2 u_0 + a(\ddot{u}_1 + \omega_0^2 u_1) + a^2(\ddot{u}_2 + \omega_0^2 u_2) + \dots \quad (3.6)$$

Com isso, igualam-se os dois lados das equações (3.4) e (3.6) para obter uma equação que deve ser satisfeita independentemente do valor de a . Para que seja possível, deve-se satisfazer ao seguinte conjunto de equações, que são encontradas de acordo com o grau de a .

$$\begin{aligned} \text{ordem } a^0 : \ddot{u}_0 + \omega_0^2 u_0 &= 0 \\ \text{ordem } a^1 : \ddot{u}_1 + \omega_0^2 u_1 &= g \\ \text{ordem } a^3 : \ddot{u}_2 + \omega_0^2 u_2 &= \frac{\partial g}{\partial u} u_1 + \frac{\partial g}{\partial \dot{u}} \dot{u}_1 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.7)$$

Deve-se notar que o sistema de equações considerado é linear e pode ser resolvido recursivamente e podemos considerar tantos termos da série quantos sejam necessários. A ordem 1 representa a oscilação do sistema linear equivalente e as demais soluções podem ser vistas como perturbações a esta solução.

As condições iniciais do sistema,

$$\begin{aligned}u(0) &= u_0(0) + au_1(0) + a^2u_2(0) + \dots \\ \dot{u}(0) &= \dot{u}_0(0) + a\dot{u}_1(0) + a^2\dot{u}_2(0) + \dots\end{aligned}\tag{3.8}$$

são normalmente satisfeitas na aproximação do zero, fazendo com que as demais aproximações se anulem

$$\begin{aligned}u(0) &= u_0(0) \quad e \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0(0) \\ u_k(0) &= 0 \quad e \quad \dot{u}_k(0) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)\end{aligned}\tag{3.9}$$

3.2 A Equação de Duffing

A equação de Duffing é usada para escrever a dinâmica não linear de sistemas elétricos e mecânicos, e recebeu esse nome em homenagem aos estudos de G. Duffing na década de 1930. Esta equação descreve uma série de fenômenos físicos importantes, dentre os quais deve-se destacar um circuito elétrico com uma indutância não linear (DiSTEFANO, 1979) e a viga de Moon e Holmes (MOON, 1992), que trata da flambagem de uma viga elástica devida a ação de forças magnéticas (BERGER&NUNES Jr., 1997). A equação de Duffing pode representar inclusive o movimento de um pêndulo.

A equação não linear de Duffing pode ser expressa por:

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0\tag{3.10}$$

onde $u(0) = x_0$ e $\dot{u}(0) = \dot{x}_0$ são as condições iniciais e ε representa uma medida da força de não linearidade.

3.3 A Equação de Van der Pol

Vários problemas de vibrações com amortecimento não linear são modelados dinamicamente pela equação de Van der Pol. A principal característica dos sistemas que permitem essa modelagem é a existência de um ciclo limite para suas trajetórias de movimento. Independentemente da amplitude inicial de movimento desses sistemas, o diagrama de fase sempre tende para uma única curva que corresponde à solução periódica quando o tempo tende ao infinito (Lima, 2008).

A equação diferencial não linear de Van der Pol é dada por:

$$\ddot{x} - \alpha(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (3.11)$$

onde o termo $\alpha(1 - x^2)$ introduz um amortecimento que assume valores negativos para pequenas amplitudes de movimento, e assume valores positivos para grandes amplitudes de movimento.

Exemplos de sistemas que são representados por esse modelo são sistemas elétricos de realimentação (OGATA, 1998).

CAPÍTULO IV

4. INTRODUÇÃO AO MÉTODO DA EXPANSÃO

4.1 O método da expansão aplicado na resolução de um sistema massa-mola não linear

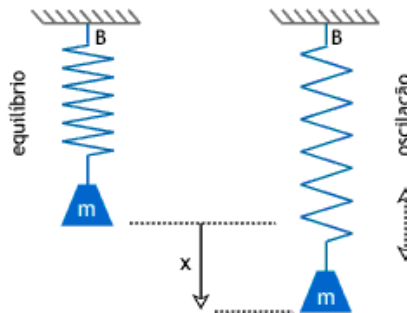


Figura 4.1- Sistema massa mola

Considerando-se a oscilação de uma massa sob uma mola não linear, com a equação do movimento definida por:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + x^3 = 0 \quad (4.1)$$

com condições iniciais $x(0) = A$ e $\dot{x}(0) = 0$.

Sabendo-se que x representa o deslocamento da massa em relação à posição de equilíbrio, $x(0) = A$ significa que no instante $t = 0$, a posição inicial da massa é A , ou seja, a posição inicial da massa no problema considerado é exatamente a amplitude do movimento. Nessas condições \dot{x} corresponde a velocidade da massa, e $\dot{x}(0) = 0$ é a velocidade inicial da massa, que no problema considerado será igual a zero (BORGES, 2008)

O método de perturbação é aplicável a problemas nos quais um pequeno parâmetro a é associado ao termo não linear da equação diferencial:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x + ax^3 = 0 \quad (4.2)$$

A solução é constituída de termos de uma série do parâmetro de perturbação a , sendo o resultado um desenvolvimento na vizinhança da solução do problema linearizado. Se a solução do problema tornado linear é periódica, e se a é pequeno, espera-se que a solução perturbada seja periódica também.

Quando \mathbf{a} é igual a zero, temos que a frequência de oscilação é a do sistema linear, ou seja:

$$f_r = f_e \Rightarrow m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$f_r \rightarrow$ força resultante

onde: $f_e \rightarrow$ força elástica

$\omega_n \rightarrow$ frequência natural

Deverá ser procurada uma solução na forma de uma série infinita do parâmetro de perturbação \mathbf{a} , da seguinte forma:

$$x = x_0(t) + ax_1(t) + a^2x_2(t) + \dots \quad (4.3)$$

Sabe-se também que a frequência de oscilação não-linear dependerá da amplitude de oscilação assim como de \mathbf{a} . Esse fato será também expressado em termos de uma série em \mathbf{a} como escrito abaixo:

$$\omega^2 = \omega_n^2 + a\alpha_1 + a^2\alpha_2 + \dots \quad (4.4)$$

onde os a_j são por enquanto funções indefinidas da amplitude, e ω é a frequência das oscilações não-lineares.

Considerando-se apenas os dois primeiros termos das equações 4.3 e 4.4 acima temos:

$$\begin{aligned} x &= x_0(t) + ax_1(t); \\ \dot{x} &= \dot{x}_0(t) + a\dot{x}_1(t); \\ \ddot{x} &= \ddot{x}_0(t) + a\ddot{x}_1(t); \\ e \\ \omega^2 &= \omega_n^2 + a\alpha_1 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Substituindo-se esses termos na equação (4.2) teremos:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_n^2 x + ax^3 &= 0 \\ \ddot{x}_0 + a\ddot{x}_1 + (\omega^2 - a\alpha_1)(x_0 + ax_1) + a(x_0 + ax_1)^3 &= 0 \\ \ddot{x}_0 + a\ddot{x}_1 + (\omega^2 - a\alpha_1)(x_0 + ax_1) + a(x_0^3 + 3x_0^2ax_1 + 3x_0a^2x_1^2 + a^3x_1^3) &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Desenvolvendo e separando as potências de \mathbf{a} obtemos:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + a\ddot{x}_1 + \omega^2 x_0 + \omega^2 x_1 a - \alpha_1 x_0 a - \alpha_1 x_1 a^2 + x_0^3 a + 3x_0^2 x_1 a^2 + 3x_0 x_1 a^3 + x_1^3 a^4 &= 0 \\ \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 + a(\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 - \alpha_1 x_0 + x_0^3) + a^2(-\alpha_1 x_1 + 3x_0^2 x_1) + 3x_0 x_1^2 a^3 + x_1^3 a^4 &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Considerando-se o parâmetro de perturbações \mathbf{a} , poderia ter sido escolhido arbitrariamente, os coeficientes das várias potências de \mathbf{a} devem ser igualados a

zero. Essa é a técnica de expansão e leva a equação a um sistema de equações que pode ser resolvido recursivamente (THOMSEN, 2003).

Separando as potências do parâmetro a temos:

$$\begin{aligned}
 a^0 : \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 &= 0 \\
 a^1 : \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= \alpha_1 x_0 - x_0^3 \\
 a^2 : -\alpha_1 x_1 + 3x_0^2 x_1 &= 0 \\
 a^3 : 3x_0 x_1^2 &= 0 \\
 a^4 : x_1^3 &= 0 \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

A solução da primeira equação estará sujeita às condições iniciais da equação linear, ou seja, $x(0) = A$ e $\dot{x}(0) = 0$. Observa-se que a primeira equação é uma equação linear de segunda ordem homogênea. Para resolvê-la, serão utilizados raízes complexas da equação característica:

$$\begin{aligned}
 r^2 + \omega^2 &= 0 \\
 r^2 &= -\omega^2 \\
 r &= \pm\sqrt{-\omega^2} \\
 r &= \pm\omega i
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

e a solução geral da equação será $x_0 = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$, e escrevendo na forma trigonométrica temos:

$$x_0 = c_1 (\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) + c_2 (\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t) \tag{4.10}$$

Para encontrar as constantes c_1 e c_2 , deve-se aplicar as condições iniciais, calcularmos a primeira e a segunda derivada da solução geral.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_0 &= c_1 (-\omega \operatorname{sen} \omega t + i \omega \cos \omega t) + c_2 (-\omega \operatorname{sen} \omega t - i \omega \cos \omega t) \\
 \ddot{x}_0 &= c_1 (-\omega^2 \cos \omega t - i \omega \operatorname{sen} \omega t) + c_2 (-\omega^2 \cos \omega t + i \omega \operatorname{sen} \omega t)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Aplicando a primeira condição inicial tem-se:

$$\begin{aligned}
 x(0) &= A \\
 x_0(0) &= c_1 (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) + c_2 (\cos 0 - i \operatorname{sen} 0) = A \\
 c_1 + c_2 &= A
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Aplicando a segunda condição inicial, tem-se:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_0(0) &= 0 \\
\dot{x}_0(0) &= c_1(-\omega \sin 0 + i\omega \cos 0) + c_2(-\omega \sin 0 - i\omega \cos 0) = 0 \\
c_1 i\omega - c_2 i\omega &= 0 \\
i\omega(c_1 - c_2) &= 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

como $\omega i \neq 0$, então $c_1 = c_2$, e da primeira condição inicial, conclui-se que $c_1 = c_2 = \frac{A}{2}$.

A solução geral da equação $\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0$ será:

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{A}{2}(\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) + \frac{A}{2}(\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t) \\
x_0 &= \frac{A}{2} \cos \omega t + \frac{A}{2} i \operatorname{sen} \omega t + \frac{A}{2} \cos \omega t - \frac{A}{2} i \operatorname{sen} \omega t \\
x_0 &= A \cos \omega t
\end{aligned} \tag{4.14}$$

A solução $x_0 = A \cos \omega t$ é chamada de solução geradora, pois para resolver as próximas equações, necessita-se primeiramente da solução da primeira equação.

Para resolver a segunda equação e encontrar x_1 , substitui-se x_0 no lado direito da segunda equação do sistema.

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \alpha_1 x_0 - x_0^3 \Rightarrow \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \alpha_1 A \cos \omega t - A^3 \cos^3 \omega t \tag{4.15}$$

Utilizando-se da relação trigonométrica $\cos^3 \omega t = \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= \alpha_1 A \cos \omega t - \frac{3}{4} A^3 \cos \omega t - \frac{A^3}{4} \cos 3\omega t \\
\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= \left(\alpha_1 - \frac{3}{4} A^3 \right) \cos \omega t - \frac{A^3}{4} \cos 3\omega t
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Nesse ponto, nota-se que será necessário resolver uma equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea, mas o termo $\left(\alpha_1 - \frac{3}{4} A^3 \right) \cos \omega t$, força a solução para uma solução não periódica, o que contradiz a condição inicial de que a solução deverá ser periódica. Por isso, impõe-se a condição de que $\alpha_1 - \frac{3}{4} A^3 = 0$. Assim α_1 como foi dito no início que seria alguma função da amplitude A , tem o valor determinado igual a $\frac{3}{4} A^3$.

Assim, eliminando o termo $\left(\alpha_1 - \frac{3}{4}A^3\right)\cos \omega t$, será necessário resolver a seguinte equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea.

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -\frac{A^3}{4}\cos 3\omega t \quad (4.17)$$

Para isso, será utilizado o método dos coeficientes indeterminados. Como o segundo membro da equação diferencial envolve uma função trigonométrica $\cos 3\omega t$, suponha uma solução particular da forma $x = P \cos 3\omega t + Q \sin 3\omega t$, da qual serão encontrados os coeficientes P e Q.

Derivando a solução particular em primeira e segunda ordem tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3\omega P \sin 3\omega t + 3\omega Q \cos 3\omega t \\ \ddot{x} &= -9\omega^2 P \cos 3\omega t - 9\omega^2 Q \sin 3\omega t \end{aligned} \quad (4.18)$$

Substituindo a equação (4.18) na equação (4.17) temos:

$$\begin{aligned} -9\omega^2 P \cos 3\omega t - 9\omega^2 Q \sin 3\omega t + \omega^2 (P \cos 3\omega t + Q \sin 3\omega t) &= -\frac{A}{4}\cos 3\omega t \\ -8\omega^2 P \cos 3\omega t - 8\omega^2 Q \sin 3\omega t &= -\frac{A}{4}\cos 3\omega t \end{aligned} \quad (4.19)$$

Igualando os coeficientes dos termos com cosseno e seno de ambos os membros da igualdade:

$$-8\omega^2 P = -\frac{A}{4} \Rightarrow P = \frac{A^3}{32\omega^2} \quad (4.20)$$

$$-8\omega^2 Q = 0 \Rightarrow Q = 0$$

Encontrados os coeficientes P e Q, tem-se a seguinte solução particular:

$$x = \frac{A^3}{32\omega^2}\cos 3\omega t \quad (4.21)$$

Conforme o método dos coeficientes indeterminados, a solução geral da equação não homogênea, será a soma da solução geral da equação associada com a solução particular da não homogênea. A solução geral da equação homogênea foi visto na resolução da primeira equação do sistema, da forma $c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$. Portanto a solução geral para x_1 é:

$$x_1 = c_1 \operatorname{sen} \omega t + c_2 \cos \omega t + \frac{A^3}{4} \cos 3\omega t \quad (4.22)$$

Impondo as condições iniciais $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0$, determinam-se as constantes c_1 e c_2 . Primeiramente deve-se derivar x_1 e então substituir nas equações.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= c_1 \cos \omega t - c_2 \operatorname{sen} \omega t - \frac{3A^3}{32\omega^2} \operatorname{sen} 3\omega t \\ \dot{x}_1(0) &= c_1 = 0 \\ x_1(0) &= c_2 + \frac{A^3}{32\omega^2} = 0 \\ c_1 &= 0 \text{ e } c_2 = -\frac{A^3}{32\omega^2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Nessas condições a solução geral para x_1 é:

$$x_1 = \frac{A^3}{32\omega^2} (\cos 3\omega t - \cos \omega t) \quad (4.24)$$

E a solução geral da equação do sistema massa mola será:

$$x = A \cos \omega t + a \frac{A^3}{32\omega^2} (\cos 3\omega t - \cos \omega t) \quad (4.25)$$

Onde o valor de ω pode ser calculado utilizando-se de α_1 como segue:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_n^2 + a\alpha_1 \\ \omega^2 &= \omega_n^2 + a \frac{3}{4} A^2 \\ \omega^2 &= \omega_n^2 \left(1 + \frac{3aA^2}{4\omega_n^2} \right) \\ \omega &= \omega_n \sqrt{1 + \frac{3aA^2}{4\omega_n^2}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

4.2 O método da expansão aplicado na resolução de equações de Duffing e Van der Pol

Considerando a equação (3.10) de Duffing com um pequeno parâmetro $\Rightarrow \ddot{x} + x + \varepsilon ax^3 = 0$ e a equação (3.11) de Van der Pol $\Rightarrow \ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$, podemos obter uma equação do movimento de um oscilador de Duffing - Van der Pol com um amortecimento não linear

$$\ddot{x} + 2\gamma(1 + \beta x^2)\dot{x} + \omega_0^2(1 + kx^2)x = F \cos \omega t \quad (4.27)$$

Considerando β e k como pequenos parâmetros, então:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + 2a\gamma x^2\dot{x} + \omega_0^2 x + a\omega_0^2 x^3 = F \cos \omega t \quad (4.28)$$

Sendo a um pequeno parâmetro pode-se fazer

$$\begin{cases} x = x_0 + ax_1 + \dots \\ \dot{x} = \dot{x}_0 + a\dot{x}_1 + \dots \\ \ddot{x} = \ddot{x}_0 + a\ddot{x}_1 + \dots \end{cases} \quad (4.29)$$

Considerando os dois primeiros termos da equação (4.29) e substituindo na equação (4.28) tem-se:

$$\overset{1^\circ \text{ termo}}{(\ddot{x}_0 + a\ddot{x}_1)} + 2\gamma \overset{2^\circ \text{ termo}}{(\dot{x}_0 + a\dot{x}_1)} + 2a\gamma \overset{3^\circ \text{ termo}}{(x_0 + ax_1)^2} (\dot{x}_0 + a\dot{x}_1) + \omega_0^2 \overset{4^\circ \text{ termo}}{(x_0 + ax_1)} + a\omega_0^2 \overset{5^\circ \text{ termo}}{(x_0 + ax_1)^3} = F \cos \omega t \quad (4.30)$$

Desenvolvendo cada termo tem-se:

$$1^\circ \text{ termo} \Rightarrow \ddot{x}_0 + a\ddot{x}_1$$

$$2^\circ \text{ termo} \Rightarrow 2\gamma\dot{x}_0 + 2a\gamma\dot{x}_1$$

$$3^\circ \text{ termo} \Rightarrow \begin{cases} 2a\gamma(x_0^2 + 2ax_0x_1 + a^2x_1^2)(\dot{x}_0 + a\dot{x}_1) = \\ = 2a\gamma(x_0^2\dot{x}_0 + 2ax_0x_1\dot{x}_0 + a^2x_1^2\dot{x}_0 + ax_0^2\dot{x}_1 + 2a^2x_0x_1\dot{x}_1 + a^3x_1^2\dot{x}_1) \\ = 2a\gamma x_0^2\dot{x}_0 + 4a^2\gamma x_0x_1\dot{x}_0 + 2a^3\gamma x_1^2\dot{x}_0 + 2a^2\gamma x_0^2\dot{x}_1 + 4a^3\gamma x_0x_1\dot{x}_1 + 2a^4\gamma x_1^2\dot{x}_1 \end{cases}$$

$$4^\circ \text{ termo} \Rightarrow \omega_0^2 x_0 + a\omega_0^2 x_1$$

$$5^\circ \text{ termo} \Rightarrow = a\omega_0^2 x_0^3 + 3a^2\omega_0^2 x_0^2 x_1 + 3a^3\omega_0^2 x_0 x_1^2 + a^4\omega_0^2 x_1^3$$

Substituindo os cinco termos na equação (4.30) e separando as potências de a obtém-se:

$$\begin{aligned} & (\ddot{x}_0 + 2\gamma\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0) + a(\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + 2\gamma x_0^2\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_0^3) + a^2(4\gamma x_0x_1\dot{x}_0 + 2\gamma x_0^2\dot{x}_1 + 3\omega_0^2 x_1^2) + \\ & + a^3(2\gamma x_1^2\dot{x}_0 + 4\gamma x_0x_1\dot{x}_1 + 3\omega_0^2 x_0x_1^2) + a^4(2\gamma x_1^2\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1^3) = F \cos \omega t \end{aligned} \quad (4.31)$$

Considerando que o parâmetro de perturbação a poderia ter sido escolhido

arbitrariamente, os coeficientes das várias potências de \mathbf{a} devem ser igualados a zero. Essa é a técnica da expansão e transforma a equação (4.31) num sistema de equações que podem ser resolvidas sucessivamente.

$$a^0 : \ddot{x}_0 + 2\gamma\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = F \cos \omega t \quad (4.32)$$

$$a^1 : \ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + 2\gamma x_0^2 \dot{x}_0 + \omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_0^3 = 0 \quad (4.33)$$

$$a^2 : 4\gamma x_0 x_1 \dot{x}_0 + 2\gamma x_0^2 + 3x_0^2 x_1 = 0 \quad (4.34)$$

$$a^3 : 2\gamma x_1^2 \dot{x}_0 + 4\gamma x_0 x_1 \dot{x}_1 + 3\omega_0^2 x_0 x_1^2 = 0 \quad (4.35)$$

$$a^4 : 2\gamma x_1^2 \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1^3 = 0 \quad (4.36)$$

A solução da primeira equação é linear não homogênea e sua solução geral (x_0) é a soma da solução homogênea (x_{0h}) e da solução particular (x_{0p}). Assim a solução desta equação será:

$$x_0 = x_{0h} + x_{0p}$$

A solução da homogênea (x_{0h}) pode ser encontrada da seguinte forma

$$\begin{aligned} m^2 + 2\gamma m + \omega_0^2 &= 0 \\ \Delta &= 4\gamma^2 - 4\omega_0^2 = 4(\gamma^2 - \omega_0^2) \\ m &= \frac{-2\gamma \pm 2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \\ m_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Considerando os seguintes casos:

- Caso 1: $\gamma^2 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \gamma = \omega_0$ (criticamente amortecido)

Tem-se que $m_1 = m_2$ e a solução da homogênea é:

$$x_{0h} = c_1 e^{-\gamma t} + c_2 t e^{-\gamma t} = (c_1 + c_2 t) e^{-\gamma t} \quad (4.38)$$

- Caso 2: $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0 \Rightarrow \gamma > \omega_0$ (superamortecido)

Tem-se que m_1 e m_2 são reais distintos a solução da homogênea é:

$$x_{0h} = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t} = c_1 e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \quad (4.39)$$

- Caso 3: $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0 \Rightarrow \gamma < \omega_0$ (subamortecido)

Tem-se que m_1 e m_2 são complexas conjugadas, então:

$$m_1 = -\gamma + i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad e \quad m_2 = -\gamma - i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Tendo como solução:

$$x_{0h} = c_1 e^{m_1 t} + c_2 t e^{m_2 t} = c_1 e^{(-\gamma + i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{(-\gamma - i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \quad (4.40)$$

ou

$$x_{0h} = c_1 e^{-\gamma t} e^{i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t} + c_2 e^{-\gamma t} e^{-i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t} \quad (4.41)$$

Pela fórmula de Euler

$$x_{0h} = C_1 e^{-\gamma t} \cos\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t + C_2 e^{-\gamma t} \sin\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t \quad (4.42)$$

Onde: $C_1 = c_1 + c_2$ e $C_2 = i(c_1 - c_2)$

Agora como $f(t) = F \cos \omega t$, tem-se que a solução particular na forma

$$x_{0p} = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (4.43)$$

e pelo método de parâmetros a determinar encontramos os coeficientes A e B.

Derivando (4.43) tem-se:

$$\dot{x}_{0p} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \quad (4.44)$$

$$\ddot{x}_{0p} = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t \quad (4.45)$$

Substituindo as equações (4.43), (4.44) e (4.45) na equação (4.32) tem-se:

$$-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t + 2\gamma(-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t) + \omega_0^2(A \cos \omega t + B \sin \omega t) - F \cos \omega t = 0$$

$$(-A\omega^2 + 2B\gamma\omega + A\omega_0^2 - F) \cos \omega t + (-B\omega^2 - 2A\gamma\omega + B\omega_0^2) \sin \omega t = 0 \quad (4.46)$$

Então:

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)A + 2B\gamma\omega = F \\ -2\gamma\omega A + (\omega_0^2 - \omega^2)B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} (\omega_0^2 - \omega^2) & 2\gamma\omega \\ -2\gamma\omega & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\omega_0^2 - \omega^2) & 2\gamma\omega \\ -2\gamma\omega & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)F}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \\ \frac{2\gamma\omega F}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Substituindo a equação (4.48) na equação (4.43) tem-se que:

$$x_{0p} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)F}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \cos \omega t + \frac{2\gamma\omega F}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \sin \omega t \quad (4.49)$$

Fazendo $P = \frac{F}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$ a equação (4.49) torna-se

$$x_{0p} = (\omega_0^2 - \omega^2)P \cos \omega t + 2\gamma\omega P \sin \omega t \quad (4.50)$$

Para o caso $\gamma < \omega_0$ (subamortecido) a solução geral é:

$$x_0 = x_{0h} + x_{0p} \quad (4.51)$$

onde

$$x_{0h} = C_1 e^{-\gamma t} \cos \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} t + C_2 e^{-\gamma t} \sin \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} t \quad (4.52)$$

$$\begin{cases} \tan \beta = \frac{C_1}{C_2} \Rightarrow \beta = \arctan \frac{C_1}{C_2} \\ C_1 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cos \beta \\ C_2 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin \beta \end{cases} \quad (4.53)$$

Como C_1 e C_2 são constantes reais, a função cosseno é par e a função seno é ímpar podemos considerar $C_1, C_2 < 0$, então:

$$C_1 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cos \beta \quad e \quad C_2 = -\sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin \beta \quad (4.54)$$

$$x_{0h} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} e^{-\gamma t} \cos \beta \cos \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} t - \sqrt{C_1^2 + C_2^2} e^{-\gamma t} \sin \beta \sin \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} t \quad (4.55)$$

$$x_{0h} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} e^{-\gamma t} \left(\cos \beta \cos \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} t - \sin \beta \sin \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} t \right) \quad (4.56)$$

$$x_{0h} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} e^{-\gamma t} \cos \left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} t + \beta \right) \quad (4.57)$$

e

$$x_{0p} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)F}{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t + \frac{2\gamma\omega F}{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t \quad (4.58)$$

$$\begin{cases} \tan \varepsilon = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow \varepsilon = \arctan \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ \omega_0^2 - \omega^2 = \sqrt{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \cos \varepsilon \\ 2\gamma\omega = -\sqrt{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \sin \varepsilon \end{cases} \quad (4.59)$$

$$x_{0p} = \frac{\sqrt{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} F}{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \varepsilon \cos \omega t - \frac{\sqrt{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} F}{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \varepsilon \sin \omega t \quad (4.60)$$

$$x_{0p} = \frac{\sqrt{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} F}{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \varepsilon \cos \omega t - \sin \varepsilon \sin \omega t) \quad (4.61)$$

$$x_{0p} = \frac{\sqrt{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} F}{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t + \varepsilon) \quad (4.62)$$

A solução geral será:

$$x_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} e^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} t + \beta\right) + \frac{\sqrt{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} F}{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t + \varepsilon) \quad (4.63)$$

$$x_0 = \alpha \cos\left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} t + \beta\right) + \mu \cos(\omega t + \varepsilon) \quad (4.64)$$

Onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} e^{-\gamma t} \\ \beta = \arctan \frac{C_1}{C_2} \\ \varepsilon = \arctan \left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \\ \mu = \frac{\sqrt{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)} \end{array} \right. \quad (4.65)$$

Considerando $x = \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} t + \beta$ e $y = \omega t + \varepsilon$ temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \alpha \cos x + \mu \cos y \\ \dot{x}_0 = \dot{\alpha} \cos x - \alpha \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \sin x - \mu \omega \sin y \\ x_0^2 = (\alpha \cos x + \mu \cos y)^2 = \alpha^2 \cos^2 x + 2\alpha\mu \cos x \cos y + \mu^2 \cos^2 y \\ x_0^3 = (\alpha \cos x + \mu \cos y)^3 = \alpha^3 \cos^3 x + 3\alpha^2 \mu \cos^2 x \cos y + 3\alpha \mu^2 \cos x \cos^2 y + \\ \quad + \mu^3 \cos^3 y \\ x_0^2 \dot{x}_0 = \dot{\alpha} \alpha^2 \cos^3 x + 2\dot{\alpha} \alpha \mu \cos^2 x \cos y + \dot{\alpha} \mu^2 \cos x \cos^2 y - \\ \quad - \alpha^3 \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \sin x \cos^2 x - 2\alpha^2 \mu \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \sin x \cos x \cos y - \\ \quad - \alpha \mu^2 \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \sin x \cos^2 y - \alpha^2 \mu \omega \sin y \cos^2 x - \\ \quad - 2\alpha \mu^2 \omega \cos x \sin y \cos y - \mu^3 \omega \cos^3 y \end{array} \right. \quad (4.66)$$

Substituindo a equação (4.66) na equação (4.33) tem-se:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= -2\gamma\dot{x}_0^2 \dot{x}_0 - \omega_0^2 x_0^3 \\ \ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= -2\gamma\dot{\alpha}\alpha^2 \cos^3 x - 4\gamma\dot{\alpha}\alpha\mu \cos^2 x \cos y - 2\gamma\dot{\alpha}\mu^2 \cos x \cos^2 y + \\ &+ 2\gamma\alpha^3 \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \sin x \cos^2 x + 4\gamma\alpha^2 \mu \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \sin x \cos x \cos y + \\ &+ 2\gamma\alpha\mu^2 \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \sin x \cos^2 y + 2\gamma\alpha^2 \mu \omega \sin y \cos^2 x + \\ &+ 4\gamma\alpha\mu^2 \omega \cos x \sin y \cos y + 2\gamma\mu^3 \omega \sin y \cos^2 y - \omega_0^2 \alpha^3 \cos^3 x - \\ &- 3\alpha^2 \mu \omega_0^2 \cos^2 x \cos y - 3\alpha\mu^2 \omega_0^2 \cos x \cos^2 y - \mu^3 \omega_0^2 \cos^3 y\end{aligned}\quad (4.67)$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= \overset{1^\circ \text{ termo}}{-2\gamma\dot{\alpha}\alpha^2 \cos^3 x} - \overset{2^\circ \text{ termo}}{4\gamma\dot{\alpha}\alpha\mu \cos^2 x \cos y} - \overset{3^\circ \text{ termo}}{2\gamma\dot{\alpha}\mu^2 \cos x \cos^2 y} + \\ &+ \overset{4^\circ \text{ termo}}{\gamma\alpha^3 \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \sin 2x \cos x} + \overset{5^\circ \text{ termo}}{2\gamma\alpha^2 \mu \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \sin 2x \cos y} + \\ &+ \overset{6^\circ \text{ termo}}{2\gamma\alpha\mu^2 \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \sin x \cos^2 y} + \overset{7^\circ \text{ termo}}{2\gamma\alpha^2 \mu \omega \sin y \cos^2 x} + \\ &+ \overset{8^\circ \text{ termo}}{2\gamma\alpha\mu^2 \omega \cos x \sin 2y} + \overset{9^\circ \text{ termo}}{\gamma\mu^3 \omega \sin 2y \cos y} - \overset{10^\circ \text{ termo}}{\omega_0^2 \alpha^3 \cos^3 x} - \\ &- \overset{11^\circ \text{ termo}}{3\alpha^2 \mu \omega_0^2 \cos^2 x \cos y} - \overset{12^\circ \text{ termo}}{3\alpha\mu^2 \omega_0^2 \cos x \cos^2 y} - \overset{13^\circ \text{ termo}}{\mu^3 \omega_0^2 \cos^3 y}\end{aligned}\quad (4.68)$$

Desenvolvendo os termos usando identidades trigonométricas temos:

1º Termo

$$\Rightarrow -2\gamma\dot{\alpha}\alpha^2 \cos^3 x = -2\gamma\dot{\alpha}\alpha^2 \left(\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x \right) = -\overset{2.1}{\frac{3}{2}\gamma\dot{\alpha}\alpha^2 \cos x} - \overset{5.5}{\frac{1}{2}\gamma\dot{\alpha}\alpha^2 \cos 3x}\quad (4.69)$$

2º Termo

$$\Rightarrow -4\gamma\dot{\alpha}\alpha\mu \cos^2 x \cos y = -4\gamma\dot{\alpha}\alpha\mu \cos y \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) = -\overset{4.1}{2\gamma\dot{\alpha}\alpha\mu \cos y} - \overset{7.1 \text{ e } 9.1}{2\gamma\dot{\alpha}\alpha\mu \cos y \cos 2x}\quad (4.70)$$

3º Termo

$$\Rightarrow -2\gamma\dot{\alpha}\mu^2 \cos x \cos^2 y = -2\gamma\dot{\alpha}\mu^2 \cos x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2y \right) = -\overset{2.2}{\gamma\dot{\alpha}\mu^2 \cos x} - \overset{11.1 \text{ e } 13.1}{\gamma\dot{\alpha}\mu^2 \cos x \cos 2y}\quad (4.71)$$

4º Termo

$$\Rightarrow +\gamma\alpha^3 \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \sin 2x \cos x = \frac{1}{2} \gamma\alpha^3 \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \left(\overset{1.1}{\sin x} + \overset{5.1}{\sin 3x} \right)\quad (4.72)$$

5º Termo

$$\Rightarrow +2\gamma\alpha^2 \mu \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \sin 2x \cos y = \gamma\alpha^2 \mu \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \overset{6.3}{\sin 2x \cos y} + \gamma\alpha^2 \mu \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \overset{8.3}{\sin 2x \cos y}\quad (4.73)$$

6º Termo

$$\begin{aligned} \Rightarrow +2\gamma\alpha\mu^2\sqrt{|\gamma^2-\omega_0^2|}\sin x\cos^2 y &= 2\gamma\alpha\mu^2\sqrt{|\gamma^2-\omega_0^2|}\sin x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2y\right)= \\ &+ \overset{1.2}{\gamma\alpha\mu^2\sqrt{|\gamma^2-\omega_0^2|}\sin x} + \overset{10.3 \text{ e } 12.3}{\gamma\alpha\mu^2\sqrt{|\gamma^2-\omega_0^2|}\sin x\cos 2y} \end{aligned} \quad (4.74)$$

7º Termo

$$\begin{aligned} \Rightarrow +2\gamma\alpha^2\mu\omega\sin y\cos^2 x &= 2\gamma\alpha^2\mu\omega\sin y\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)= \\ &+ \overset{3.1}{\gamma\alpha^2\mu\omega\sin y} + \overset{6.2 \text{ e } 8.2}{\gamma\alpha^2\mu\omega\sin y\cos 2x} \end{aligned} \quad (4.75)$$

8º Termo

$$\Rightarrow +2\gamma\alpha\mu^2\omega\cos x\sin 2y = \overset{10.2}{\gamma\alpha\mu^2\omega\cos x\sin 2y} + \overset{12.2}{\gamma\alpha\mu^2\omega\cos x\sin 2y} \quad (4.76)$$

9º Termo

$$\Rightarrow +\gamma\mu^3\omega\sin 2y\cos y = \frac{1}{2}\overset{3.2}{\gamma\mu^3\omega\sin y} + \frac{1}{2}\overset{5.3}{\gamma\mu^3\omega\sin 3y} \quad (4.77)$$

10º Termo

$$\Rightarrow -\omega_0^2\alpha^3\cos^3 x = -\omega_0^2\alpha^3\left(\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x\right) = -\frac{3}{4}\overset{2.4}{\omega_0^2\alpha^3\cos x} - \frac{1}{4}\overset{5.2}{\omega_0^2\alpha^3\cos 3x} \quad (4.78)$$

11º Termo

$$\begin{aligned} \Rightarrow -3\alpha^2\mu\omega_0^2\cos^2 x\cos y &= -3\alpha^2\mu\omega_0^2\cos y\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)= \\ &- \overset{4.2}{\frac{3}{2}\alpha^2\mu\omega_0^2\cos y} - \overset{7.3 \text{ e } 9.3}{\frac{3}{2}\alpha^2\mu\omega_0^2\cos y\cos 2x} \end{aligned} \quad (4.79)$$

12º Termo

$$\begin{aligned} \Rightarrow -3\alpha\mu^2\omega_0^2\cos x\cos^2 y &= -3\alpha\mu^2\omega_0^2\cos x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2y\right)= \\ &- \overset{2.3}{\frac{3}{2}\alpha\mu^2\omega_0^2\cos x} - \overset{11.3 \text{ e } 13.3}{\frac{3}{2}\alpha\mu^2\omega_0^2\cos x\cos 2y} \end{aligned} \quad (4.80)$$

13º Termo

$$\Rightarrow -\mu^3\omega_0^2\cos^3 y = -\mu^3\omega_0^2\left(\frac{3}{4}\cos y + \frac{1}{4}\cos 3y\right) = -\frac{3}{4}\overset{4.3}{\mu^3\omega_0^2\cos y} - \frac{1}{4}\overset{5.4}{\mu^3\omega_0^2\cos 3y} \quad (4.81)$$

Os números acima de cada parcela de cada termo acima indicam para qual termo e parcela foi após a reordenação. Exemplo: 4.3 significa que na reordenação abaixo essa parcela está na terceira parcela do quarto termo e vice-versa.

Também foi necessário adicionar parcelas em alguns termos que foram retirados em outros termos para não alterar a equação

Reordenando, acrescentando e subtraindo as expressões têm-se os seguintes novos termos:

1º Termo

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \gamma \alpha^3 \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \sin x + \gamma \mu^2 \alpha \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \sin x \quad (4.82)$$

2º Termo

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} \gamma \alpha^2 \dot{\alpha} \cos x - \gamma \mu^2 \dot{\alpha} \cos x - \frac{3}{2} \omega_0^2 \alpha \mu^2 \cos x - \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha^3 \cos x \quad (4.83)$$

3º Termos

$$\Rightarrow \gamma \alpha^2 \mu \omega \sin y + \frac{1}{2} \gamma \mu^3 \omega \sin y \quad (4.84)$$

4º Termo

$$\Rightarrow -2\gamma \dot{\alpha} \alpha \mu \cos y - \frac{3}{2} \omega_0^2 \alpha^2 \mu \cos y - \frac{3}{4} \omega_0^2 \mu^3 \cos y \quad (4.85)$$

5º Termo

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \gamma \alpha^3 \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \sin 3x - \frac{1}{4} \omega_0^2 \alpha^3 \cos 3x + \frac{1}{2} \gamma \mu^3 \omega \sin 3y - \frac{1}{4} \omega_0^2 \mu^3 \cos 3y - \frac{1}{2} \gamma \dot{\alpha} \alpha^2 \cos 3x \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} 6^\circ \Rightarrow & \frac{1}{2} \gamma \alpha^2 \mu \omega \sin 2x \cos y + \frac{1}{2} \gamma \alpha^2 \mu \omega \sin y \cos 2x + \gamma \alpha^2 \mu \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \sin 2x \cos y + \\ & + \gamma \alpha^2 \mu \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \sin y \cos 2x = \frac{1}{2} \gamma \alpha^2 \mu \omega \sin(2x + y) + \gamma \alpha^2 \mu \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \sin(2x + y) \end{aligned} \quad (4.87)$$

7º Termo

$$\begin{aligned} \Rightarrow & -\gamma \dot{\alpha} \alpha \mu \cos 2x \cos y + \gamma \dot{\alpha} \alpha \mu \sin 2x \sin y - \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha^2 \mu \cos 2x \cos y + \\ & + \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha^2 \mu \sin 2x \sin y = -\gamma \dot{\alpha} \alpha \mu \cos(2x + y) - \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha^2 \mu \cos(2x + y) \end{aligned} \quad (4.88)$$

8º Termo

$$\begin{aligned} \Rightarrow & -\frac{1}{2} \overset{\text{subtração 8}}{\gamma \alpha^2 \mu \omega \sin 2x \cos y} + \frac{1}{2} \overset{7.2}{\gamma \alpha^2 \mu \omega \sin y \cos 2x} + \gamma \alpha^2 \mu \overset{5.2}{\sqrt{|\gamma^2 \omega_0^2|}} \sin 2x \cos y - \\ & - \gamma \alpha^2 \mu \overset{\text{subtração 1}}{\sqrt{|\gamma^2 \omega_0^2|}} \sin y \cos 2x = -\frac{1}{2} \gamma \alpha^2 \mu \omega \sin(2x - y) + \gamma \alpha^2 \mu \overset{5.2}{\sqrt{|\gamma^2 \omega_0^2|}} \sin(2x - y) \end{aligned} \quad (4.89)$$

9º Termo

$$\begin{aligned} \Rightarrow & -\gamma \alpha \overset{2.2}{\dot{\alpha}} \mu \cos 2x \cos y - \gamma \alpha \overset{\text{subtração 2}}{\dot{\alpha}} \mu \sin 2x \sin y - \frac{3}{4} \overset{11.2}{\omega_0^2 \alpha^2 \mu \cos 2x \cos y} - \\ & - \frac{3}{4} \overset{\text{subtração 6}}{\omega_0^2 \alpha^2 \mu \sin 2x \sin y} = -\gamma \alpha \overset{2.2}{\dot{\alpha}} \mu \cos(2x - y) - \frac{3}{4} \overset{11.2}{\omega_0^2 \alpha^2 \mu \cos(2x - y)} \end{aligned} \quad (4.90)$$

10º Termo

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \gamma \alpha \overset{\text{adição 4}}{\mu^2 \omega \sin x \cos 2y} + \gamma \alpha \overset{8.1}{\mu^2 \omega \sin 2y \cos x} + \frac{1}{2} \gamma \mu^2 \alpha \overset{6.2}{\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}} \sin x \cos 2y + \\ & + \frac{1}{2} \gamma \mu^2 \alpha \overset{\text{adição 5}}{\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}} \sin 2y \cos x = \gamma \alpha \mu^2 \omega \sin(x + 2y) + \frac{1}{2} \gamma \mu^2 \alpha \overset{6.2}{\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}} \sin(x + 2y) \end{aligned} \quad (4.91)$$

11º Termo

$$\begin{aligned} \Rightarrow & -\frac{1}{2} \overset{3.2}{\gamma \mu^2 \dot{\alpha} \cos x \cos 2y} + \frac{1}{2} \overset{\text{adição 3}}{\gamma \mu^2 \dot{\alpha} \sin x \sin 2y} - \frac{3}{4} \overset{12.2}{\omega_0^2 \alpha \mu^2 \cos x \cos 2y} + \\ & + \frac{3}{4} \overset{\text{adição 7}}{\omega_0^2 \alpha \mu^2 \sin x \sin 2y} = -\frac{1}{2} \gamma \mu^2 \dot{\alpha} \cos(x + 2y) - \frac{3}{4} \overset{12.2}{\omega_0^2 \alpha \mu^2 \cos(x + 2y)} \end{aligned} \quad (4.92)$$

12º Termo

$$\begin{aligned} \Rightarrow & -\gamma \alpha \overset{\text{subtração 4}}{\mu^2 \omega \sin x \cos 2y} + \gamma \alpha \overset{8.2}{\mu^2 \omega \sin 2y \cos x} + \frac{1}{2} \gamma \mu^2 \alpha \overset{6.2}{\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}} \sin x \cos 2y - \\ & - \frac{1}{2} \gamma \mu^2 \alpha \overset{\text{subtração 5}}{\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}} \sin 2y \cos x = -\gamma \alpha \mu^2 \omega \sin(x - 2y) + \frac{1}{2} \gamma \mu^2 \alpha \overset{6.2}{\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}} \sin(x - 2y) \end{aligned} \quad (4.93)$$

13º Termos

$$\begin{aligned} \Rightarrow & -\frac{1}{2} \overset{3.2}{\gamma \mu^2 \dot{\alpha} \cos x \cos 2y} - \frac{1}{2} \overset{\text{subtração 3}}{\gamma \mu^2 \dot{\alpha} \sin x \sin 2y} - \frac{3}{4} \overset{12.2}{\omega_0^2 \alpha \mu^2 \cos x \cos 2y} - \\ & - \frac{3}{4} \overset{\text{subtração 7}}{\omega_0^2 \alpha \mu^2 \sin x \sin 2y} = -\frac{1}{2} \gamma \mu^2 \dot{\alpha} \cos(x - 2y) - \frac{3}{4} \overset{12.2}{\omega_0^2 \alpha \mu^2 \cos(x - 2y)} \end{aligned} \quad (4.94)$$

Resultando em:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = & \left[\frac{1}{2} \gamma \alpha^3 \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \gamma \mu^2 \alpha \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \right] \sin x + \left[-\frac{3}{2} \gamma \alpha^2 \dot{\alpha} - \gamma \mu^2 \dot{\alpha} - \frac{3}{2} \omega_0^2 \alpha \mu^2 - \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha^3 \right] \cos x + \\
& + \left[\gamma \alpha^2 \mu \omega + \frac{1}{2} \gamma \mu^3 \omega \right] \sin y + \left[-2\gamma \dot{\alpha} \alpha \mu - \frac{3}{2} \omega_0^2 \alpha^2 \mu - \frac{3}{4} \omega_0^2 \mu^3 \right] \cos y + \frac{1}{2} \gamma \alpha^3 \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \sin 3x + \\
& + \left[-\frac{1}{4} \omega_0^2 \alpha^3 - \frac{1}{2} \gamma \dot{\alpha} \alpha^2 \right] \cos 3x + \frac{1}{2} \gamma \mu^3 \omega \sin 3y - \frac{1}{4} \omega_0^2 \mu^3 \cos 3y + \\
& + \left[\frac{1}{2} \gamma \alpha^2 \mu \omega + \gamma \alpha^2 \mu \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \right] \sin(2x + y) + \left[-\gamma \dot{\alpha} \alpha \mu - \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha^2 \mu \right] \cos(2x + y) + \\
& + \left[-\frac{1}{2} \gamma \alpha^2 \mu \omega + \gamma \alpha^2 \mu \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \right] \sin(2x - y) + \left[-\gamma \dot{\alpha} \alpha \mu - \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha^2 \mu \right] \cos(2x - y) + \\
& + \left[\gamma \alpha \mu^2 \omega + \frac{1}{2} \gamma \mu^2 \alpha \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \right] \sin(x + 2y) + \left[-\frac{1}{2} \gamma \mu^2 \dot{\alpha} - \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha \mu^2 \right] \cos(x + 2y) + \\
& + \left[-\gamma \alpha \mu^2 \omega + \frac{1}{2} \gamma \mu^2 \alpha \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \right] \sin(x - 2y) + \left[-\frac{1}{2} \gamma \mu^2 \dot{\alpha} - \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha \mu^2 \right] \cos(x - 2y)
\end{aligned} \tag{4.95}$$

Usando as simplificações trigonométricas abaixo

$$\begin{cases} \tan \theta_i = \frac{b_i}{c_i} \Rightarrow \theta_i = \arctan \frac{b_i}{c_i} \quad \text{onde } i = (1, 2, 3, \dots, 8) \\ b_i = a_i \operatorname{sen} \theta_i \\ c_i = a_i \cos \theta_i \\ b_i \operatorname{sen} x + c_i \cos x = -a_i \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \theta_i + a_i \cos x \cos \theta_i = a_i \cos(x + \theta_i) \end{cases} \tag{4.96}$$

Na equação (4.95) tem-se:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = & a_1 \cos(x + \theta_1) + a_2 \cos(y + \theta_2) + a_3 \cos(3x + \theta_3) + a_4 \cos(3y + \theta_4) + \\
& + a_5 \cos(2x + y + \theta_5) + a_6 \cos(2x - y + \theta_6) + a_7 \cos(x + 2y + \theta_7) + \\
& + a_8 \cos(x - 2y + \theta_8)
\end{aligned} \tag{4.97}$$

onde:

$$a_1 = \left[\gamma^2 \alpha^2 |\gamma^2 - \omega_0^2| \left(\frac{1}{2} \alpha^2 + \mu^2 \right)^2 + \left(-\frac{3}{2} \gamma \alpha^2 \dot{\alpha} - \gamma \mu^2 \dot{\alpha} - \frac{3}{2} \omega_0^2 \alpha \mu^2 - \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha^3 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$a_2 = \left[\left(\gamma \alpha^2 \mu \omega + \frac{1}{2} \gamma \mu^3 \omega \right)^2 + \left(-2\gamma \dot{\alpha} \alpha \mu - \frac{3}{2} \omega_0^2 \alpha^2 \mu - \frac{3}{4} \omega_0^2 \mu^3 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$a_3 = \left[\frac{1}{4} \gamma^2 \alpha^6 |\gamma^2 - \omega_0^2| + \left(-\frac{1}{4} \omega_0^2 \alpha^3 - \frac{1}{2} \gamma \dot{\alpha} \alpha^2 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$a_4 = \left[\frac{1}{4} \gamma^2 \mu^6 \omega^2 + \frac{1}{16} \omega_0^4 \mu^6 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$a_5 = \left[\left(\frac{1}{2} \gamma \alpha^2 \mu \omega + \gamma \alpha^2 \mu \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \right)^2 + \left(\gamma \alpha \dot{\alpha} \mu + \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha^2 \mu \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$a_6 = \left[\left(-\frac{1}{2} \gamma \alpha^2 \mu \omega + \gamma \alpha^2 \mu \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \right)^2 + \left(\gamma \alpha \dot{\alpha} \mu + \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha^2 \mu \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$a_7 = \left[\left(\gamma \alpha \mu^2 \omega + \frac{1}{2} \gamma \mu^2 \alpha \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \gamma \mu^2 \dot{\alpha} + \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha \mu^2 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$a_8 = \left[\left(-\gamma \alpha \mu^2 \omega + \frac{1}{2} \gamma \mu^2 \alpha \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \gamma \mu^2 \dot{\alpha} + \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha \mu^2 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta_1 = \arctan \left(\frac{\frac{1}{2} \gamma \alpha^3 \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \gamma \mu^2 \alpha \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}}{-\frac{3}{2} \gamma \alpha^2 \dot{\alpha} - \gamma \mu^2 \dot{\alpha} - \frac{3}{2} \omega_0^2 \alpha \mu^2 - \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha^3} \right)$$

$$\theta_2 = \arctan \left(\frac{\gamma \alpha^2 \mu \omega + \frac{1}{2} \gamma \mu^3 \omega}{-2 \gamma \dot{\alpha} \alpha \mu - \frac{3}{2} \omega_0^2 \alpha^2 \mu - \frac{3}{4} \omega_0^2 \mu^3} \right)$$

$$\theta_3 = \arctan \left(\frac{\frac{1}{2} \gamma \alpha^3 \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}}{-\frac{1}{4} \omega_0^2 \alpha^3 - \frac{1}{2} \gamma \dot{\alpha} \alpha^2} \right)$$

$$\theta_4 = \arctan \left(\frac{\frac{1}{2} \gamma \mu^3 \omega}{-\frac{1}{4} \omega_0^2 \mu^3} \right)$$

$$\theta_5 = \arctan \left(\frac{\frac{1}{2} \gamma \alpha^2 \mu \omega + \gamma \alpha^2 \mu \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}}{-\gamma \alpha \dot{\alpha} \mu - \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha^2 \mu} \right)$$

$$\theta_6 = \arctan \left(\frac{-\frac{1}{2} \gamma \alpha^2 \mu \omega + \gamma \alpha^2 \mu \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}}{-\gamma \alpha \dot{\alpha} \mu - \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha^2 \mu} \right)$$

$$\theta_7 = \arctan \left(\frac{\gamma\alpha\mu^2\omega + \frac{1}{2}\gamma\mu^2\alpha\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}}{-\frac{1}{2}\gamma\mu^2\dot{\alpha} - \frac{3}{4}\omega_0^2\alpha\mu^2} \right)$$

$$\theta_8 = \arctan \left(\frac{-\gamma\alpha\mu^2\omega + \frac{1}{2}\gamma\mu^2\alpha\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}}{-\frac{1}{2}\gamma\mu^2\dot{\alpha} - \frac{3}{4}\omega_0^2\alpha\mu^2} \right)$$

Resolvendo a equação (4.97) pelo método da superposição, obtemos:

$$x_1 = x_p = x_{p1} + x_{p2} + \dots + x_{p8} \quad (4.98)$$

onde x_{pi} é da forma $x_{pi} = A \cos \omega t + B \sin \omega t$.

Pois, lembrando que:

$$\begin{aligned} a_i \cos(\delta(t)_j + \theta_i) &= a_i \cos \delta(t)_j \cos \theta_i - a_i \sin \delta(t)_j \sin \theta_i \\ &= (a_i \cos \theta_i) \cos \delta(t)_j + (-a_i \sin \theta_i) \sin \delta(t)_j \end{aligned}$$

Onde:

$$\sin \theta_i = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \frac{C_1}{a_i}, \quad \cos \theta_i = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \frac{C_2}{a_i} \quad e$$

$$j = [1(\dot{x}), 2(\dot{y}), 3(3\dot{x}), 4(3\dot{y}), 5(2\dot{x} + \dot{y}), 6(2\dot{x} - \dot{y}), 7(\dot{x} + 2\dot{y}), 8(\dot{x} - 2\dot{y})]$$

então:

$$a_i \cos(\delta(t)_j + \theta_i) = C_1 \sin \delta(t)_j + C_2 \cos \delta(t)_j$$

Resolvendo para o caso geral temos:

$$x_{pi} = A \cos \delta(t)_j + B \sin \delta(t)_j \quad (4.99)$$

$$\dot{x}_{pi} = -A\dot{\delta}(t)_j \sin \delta(t)_j + B\dot{\delta}(t)_j \cos \delta(t)_j \quad (4.100)$$

$$\ddot{x}_{pi} = -A[\dot{\delta}(t)_j]^2 \cos \delta(t)_j - B[\dot{\delta}(t)_j]^2 \sin \delta(t)_j \quad (4.101)$$

Substituindo em:

$$\ddot{x}_{pi} + 2\gamma\dot{x}_{pi} + \omega_0^2 x_{pi} = a_i \cos(\delta(t)_j + \theta_i) \quad (4.102)$$

$$\begin{aligned} &-A[\dot{\delta}(t)_j]^2 \cos \delta(t)_j - B[\dot{\delta}(t)_j]^2 \sin \delta(t)_j + 2\gamma(-A\dot{\delta}(t)_j \sin \delta(t)_j + B\dot{\delta}(t)_j \cos \delta(t)_j) + \\ &+ \omega_0^2 (A \cos \delta(t)_j + B \sin \delta(t)_j) = a_i \cos(\delta(t)_j + \theta_i) \end{aligned} \quad (4.103)$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \dot{\delta}(t)^2)A + 2\gamma\dot{\delta}(t)B = a_i \\ -2\gamma\dot{\delta}(t)A + (\omega_0^2 - \dot{\delta}(t)^2)B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} (\omega_0^2 - \dot{\delta}(t)^2) & 2\gamma\dot{\delta}(t) \\ -2\gamma\dot{\delta}(t) & (\omega_0^2 - \dot{\delta}(t)^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\omega_0^2 - \dot{\delta}_j(t)^2) & 2\gamma\dot{\delta}_j(t) \\ -2\gamma\dot{\delta}_j(t) & (\omega_0^2 - \dot{\delta}_j(t)^2) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a_i \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(\omega_0^2 - \dot{\delta}_j(t)^2)a_i}{(\omega_0^2 - \dot{\delta}_j(t)^2)^2 + 4\gamma^2\dot{\delta}_j(t)^2} \\ \frac{2\gamma\dot{\delta}_j(t)a_i}{(\omega_0^2 - \dot{\delta}_j(t)^2)^2 + 4\gamma^2\dot{\delta}_j(t)^2} \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

Para $i=1 \Rightarrow a_1, x_{p1}, \theta_1$ e $j=1 \Rightarrow \dot{\delta}(t)_1 = \dot{x} = \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}$.

$$x_{p1} = \frac{(\omega_0^2 - |\gamma^2 - \omega_0^2|)a_1}{(\omega_0^2 - |\gamma^2 - \omega_0^2|)^2 + 4\gamma^2|\gamma^2 - \omega_0^2|} \cos(x + \theta_1) + \frac{2\gamma\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}a_1}{(\omega_0^2 - |\gamma^2 - \omega_0^2|)^2 + 4\gamma^2|\gamma^2 - \omega_0^2|} \sin(x + \theta_1) \quad (4.10)$$

Para $i=2 \Rightarrow a_2, x_{p2}, \theta_2$ e $j=2 \Rightarrow \dot{\delta}(t)_2 = \dot{y} = \omega$.

$$x_{p2} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)a_2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \cos(y + \theta_2) + \frac{2\gamma\omega a_2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \sin(y + \theta_2) \quad (4.107)$$

Para $i=3 \Rightarrow a_3, x_{p3}, \theta_3$ e $j=3 \Rightarrow \dot{\delta}(t)_3 = 3\dot{x} = 3\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}$.

$$x_{p3} = \frac{(\omega_0^2 - 9|\gamma^2 - \omega_0^2|)a_3}{(\omega_0^2 - 9|\gamma^2 - \omega_0^2|)^2 + 36\gamma^2|\gamma^2 - \omega_0^2|} \cos(3x + \theta_3) + \frac{6\gamma\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}a_3}{(\omega_0^2 - 9|\gamma^2 - \omega_0^2|)^2 + 36\gamma^2|\gamma^2 - \omega_0^2|} \sin(3x + \theta_3) \quad (4.108)$$

Para $i=4 \Rightarrow a_4, x_{p4}, \theta_4$ e $j=4 \Rightarrow \dot{\delta}(t)_4 = 3\dot{y} = 3\omega$.

$$x_{p4} = \frac{(\omega_0^2 - 9\omega^2)a_4}{(\omega_0^2 - 9\omega^2)^2 + 36\gamma^2\omega^2} \cos(3y + \theta_4) + \frac{6\gamma\omega a_4}{(\omega_0^2 - 9\omega^2)^2 + 36\gamma^2\omega^2} \sin(3y + \theta_4) \quad (4.109)$$

Para $i=5 \Rightarrow a_5, x_{p5}, \theta_5$ e $j=5 \Rightarrow \dot{\delta}(t)_5 = 2\dot{x} + \dot{y} = 2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \omega$.

$$x_{p5} = \frac{\left[\omega_0^2 - \left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \omega \right)^2 \right] a_5}{\left[\omega_0^2 - \left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \omega \right)^2 \right]^2 + 4\gamma^2 \left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \omega \right)^2} \cos(2x + y + \theta_5) + \frac{2\gamma \left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \omega \right)^2 a_5}{\left[\omega_0^2 - \left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \omega \right)^2 \right]^2 + 4\gamma^2 \left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \omega \right)^2} \sin(2x + y + \theta_5) \quad (4.110)$$

Para $i=6 \Rightarrow a_6, x_{p6}, \theta_6$ e $j=6 \Rightarrow \dot{\delta}(t)_6 = 2\dot{x} - \dot{y} = 2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - \omega$.

$$x_{p6} = \frac{\left[\omega_0^2 - \left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - \omega \right)^2 \right] a_6}{\left[\omega_0^2 - \left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - \omega \right)^2 \right]^2 + 4\gamma^2 \left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - \omega \right)^2} \cos(2x - y + \theta_6) + \frac{2\gamma \left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - \omega \right)^2 a_6}{\left[\omega_0^2 - \left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - \omega \right)^2 \right]^2 + 4\gamma^2 \left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - \omega \right)^2} \sin(2x - y + \theta_6) \quad (4.111)$$

Para $i=7 \Rightarrow a_7, x_{p7}, \theta_7$ e $j=7 \Rightarrow \dot{\delta}(t)_7 = \dot{x} + 2\dot{y} = \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + 2\omega$.

$$x_{p7} = \frac{\left[\omega_0^2 - \left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + 2\omega \right)^2 \right] a_7}{\left[\omega_0^2 - \left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + 2\omega \right)^2 \right]^2 + 4\gamma^2 \left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + 2\omega \right)^2} \cos(x + 2y + \theta_7) + \frac{2\gamma \left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + 2\omega \right)^2 a_7}{\left[\omega_0^2 - \left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + 2\omega \right)^2 \right]^2 + 4\gamma^2 \left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + 2\omega \right)^2} \sin(x + 2y + \theta_7) \quad (4.112)$$

Para $i=8 \Rightarrow a_8, x_{p8}, \theta_8$ e $j=8 \Rightarrow \dot{\delta}(t)_8 = \dot{x} - 2\dot{y} = \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - 2\omega$.

$$x_{p8} = \frac{\left[\omega_0^2 - \left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - 2\omega \right)^2 \right] a_8}{\left[\omega_0^2 - \left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - 2\omega \right)^2 \right]^2 + 4\gamma^2 \left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - 2\omega \right)^2} \cos(x - 2y + \theta_8) + \frac{2\gamma \left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - 2\omega \right)^2 a_8}{\left[\omega_0^2 - \left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - 2\omega \right)^2 \right]^2 + 4\gamma^2 \left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - 2\omega \right)^2} \sin(x - 2y + \theta_8) \quad (4.113)$$

Substituindo na equação (4.98) tem-se que

$$\begin{aligned}
x_1 = & \frac{(\omega_0^2 - |\gamma^2 - \omega_0^2|)a_1}{(\omega_0^2 - |\gamma^2 - \omega_0^2|)^2 + 4\gamma^2|\gamma^2 - \omega_0^2|} \cos(x + \theta_1) + \frac{2\gamma\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}a_1}{(\omega_0^2 - |\gamma^2 - \omega_0^2|)^2 + 4\gamma^2|\gamma^2 - \omega_0^2|} \sin(x + \theta_1) + \\
& + \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)a_2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \cos(y + \theta_2) + \frac{2\gamma\omega a_2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \sin(y + \theta_2) + \\
& + \frac{(\omega_0^2 - 9|\gamma^2 - \omega_0^2|)a_3}{(\omega_0^2 - 9|\gamma^2 - \omega_0^2|)^2 + 36\gamma^2|\gamma^2 - \omega_0^2|} \cos(3x + \theta_3) + \frac{6\gamma\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}a_3}{(\omega_0^2 - 9|\gamma^2 - \omega_0^2|)^2 + 36\gamma^2|\gamma^2 - \omega_0^2|} \sin(3x + \theta_3) + \\
& + \frac{(\omega_0^2 - 9\omega^2)a_4}{(\omega_0^2 - 9\omega^2)^2 + 36\gamma^2\omega^2} \cos(3y + \theta_4) + \frac{6\gamma\omega a_4}{(\omega_0^2 - 9\omega^2)^2 + 36\gamma^2\omega^2} \sin(3y + \theta_4) + \\
& + \frac{\left[\omega_0^2 - \left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \omega\right)^2\right]a_5}{\left[\omega_0^2 - \left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \omega\right)^2\right]^2 + 4\gamma^2\left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \omega\right)^2} \cos(2x + y + \theta_5) + \\
& + \frac{2\gamma\left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \omega\right)^2 a_5}{\left[\omega_0^2 - \left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \omega\right)^2\right]^2 + 4\gamma^2\left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \omega\right)^2} \sin(2x + y + \theta_5) + \\
& + \frac{\left[\omega_0^2 - \left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - \omega\right)^2\right]a_6}{\left[\omega_0^2 - \left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - \omega\right)^2\right]^2 + 4\gamma^2\left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - \omega\right)^2} \cos(2x - y + \theta_6) + \\
& + \frac{2\gamma\left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - \omega\right)^2 a_6}{\left[\omega_0^2 - \left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - \omega\right)^2\right]^2 + 4\gamma^2\left(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - \omega\right)^2} \sin(2x - y + \theta_6) + \\
& + \frac{\left[\omega_0^2 - \left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + 2\omega\right)^2\right]a_7}{\left[\omega_0^2 - \left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + 2\omega\right)^2\right]^2 + 4\gamma^2\left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + 2\omega\right)^2} \cos(x + 2y + \theta_7) + \\
& + \frac{2\gamma\left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + 2\omega\right)^2 a_7}{\left[\omega_0^2 - \left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + 2\omega\right)^2\right]^2 + 4\gamma^2\left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + 2\omega\right)^2} \sin(x + 2y + \theta_7) + \\
& + \frac{\left[\omega_0^2 - \left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - 2\omega\right)^2\right]a_8}{\left[\omega_0^2 - \left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - 2\omega\right)^2\right]^2 + 4\gamma^2\left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - 2\omega\right)^2} \cos(x - 2y + \theta_8) + \\
& + \frac{2\gamma\left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - 2\omega\right)^2 a_8}{\left[\omega_0^2 - \left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - 2\omega\right)^2\right]^2 + 4\gamma^2\left(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - 2\omega\right)^2} \sin(x - 2y + \theta_8)
\end{aligned} \tag{4.114}$$

CAPÍTULO V

5. SOLUÇÕES NUMÉRICAS DE EQUAÇÕES DO 2º E 3º GRAUS

O objetivo deste capítulo é apresentar aplicações no ensino básico, das técnicas mostradas anteriormente. Neste sentido, procurou-se encontrar soluções para equações algébricas a partir das técnicas de perturbação.

5.1 Conceitos básicos

A matemática tem sido cada vez mais utilizada pelo homem para criação de modelos de situação reais nas diversas áreas do conhecimento, para que se possa com dados do passado e presente prever o que pode ocorrer no futuro, tão importantes para a sociedade, negócios e governos.

No ensino básico, geralmente o estudo da matemática é feito através de fórmulas diretas para resolver equações do primeiro e segundo graus bem como, até alguns casos do terceiro grau, esses, minimamente, abordado.

Muito se pergunta sobre fórmulas de resolução de equações de grau igual ou superior a três e, que neste caso, existem algumas técnicas para se determinar as raízes como, por exemplo, a relações entre coeficientes e raízes (relações de Girard), propriedades das raízes complexas, teoria das raízes reais e racionais, teorema de Bolzano.

Neste contexto será mostrada a importância do estudo de outros métodos para se determinar as raízes e, dentre eles, o método de perturbação.

O objetivo é mostrar que os métodos de perturbação podem resolver algebricamente essas equações e, apesar de parecer complexo, podem ser aplicados no ensino básico.

5.2 Métodos de resolução de algumas equações

Nas equações de primeiro e segundo graus não serão demonstradas as técnicas clássicas de resolução.

Durante quase três mil anos, buscou-se encontrar um método para solucionar problemas que envolviam equações do terceiro grau. Primeiramente, a dedução do método para equações do tipo $x^2 + px + q = 0$ foi feita pelo matemático Scipione del Ferro em 1505, mas nunca se publicou sua descoberta (LIMA, 1991).

Antônio Maria Fiore, um dos discípulos de Scipione no intuito de adquirir reconhecimento, desafiou Niccoló Tartaglia (1499–1557) para um duelo intelectual, muito comum na época. Tartaglia acabou descobrindo um método para resolução das equações do tipo $x^3 + px + q = 0$ e $x^3 + px^2 + q = 0$ a qual Fiore desconhecia (LIMA, 1991)..

Girolamo Cardano (1501–1576) com ajuda de seu discípulo Ludovico Ferrari conseguiu uma prova para a regra dada por Tartaglia e mostrou um método para resolução de equações do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ (LIMA, 1991)..

O estudo se voltará neste momento para a apresentação do método de Cardano.

Considerando a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$.

Inicialmente vamos dividir a equação pelo coeficiente a ;

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0, \quad a \neq 0 \quad (5.1)$$

Como este procedimento é sempre possível, então podemos considerar as equações do tipo,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (5.2)$$

Fazendo $x = y - \frac{a}{3}$ para eliminar o termo x^2 tem-se:

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0 \quad (5.3)$$

$$y^3 - 3y^2\frac{a}{3} + 3y\frac{a^2}{9} - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2}{3}a^2y + \frac{a^3}{9} + by - \frac{a}{3}b + c = 0 \quad (5.4)$$

$$y^3 + \left(-\frac{a^2}{3} + b\right)y + \left(-\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{a}{3}b + c\right) = 0 \quad (5.5)$$

$$y^3 + py + q = 0 \quad (5.6)$$

onde : $b - \frac{a^2}{3} = p$ e $\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = q$

Fazendo $y = u + v$ obtém:

$$y^3 = u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = u^3 + v^3 + 3uvy \quad (5.7)$$

$$y^3 - 3uvy - (u^3 + v^3) = 0 \quad (5.8)$$

Comparando as equações 5.8 com 5.6 tem-se:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u \cdot v = -\frac{p}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 \cdot v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases} \quad (5.9)$$

Considerando u^3 e v^3 como sendo as soluções da equação, equivale a resolver uma equação do segundo grau da forma:

$$w^2 + pw - \frac{p^3}{27} = 0 \Rightarrow w = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \\ w_2 = v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \end{cases} \quad (5.10)$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad e \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (5.11)$$

Obtendo a fórmula de Cardano - Tartaglia para resolução de equações do terceiro grau.

$$y = u + v \Rightarrow y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (5.12)$$

Observe que a fórmula, diferentemente da de Báskara, fornece apenas uma raiz da equação (5.6). O termo $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ é o discriminante da equação e tem como função de informar o tipo de solução que a equação terá. Para encontrar as outras raízes basta dividir o polinômio $y^3 + py + q$ pelo monômio $(y - y')$, resultando num quociente do segundo grau e resolvê-lo.

5.3 Aplicações - resolução de equações

Apresentamos a seguir exemplos de equações do segundo e terceiro grau, utilizando o método da expansão para determinarmos as raízes a fim de compararmos com as raízes determinadas pelas fórmulas de resolução.

5.3.1 Equação do segundo grau

Partiremos de uma equação do segundo grau contendo o parâmetro ε .

$$x^2 + \varepsilon x - 1 = 0 \quad (5.13)$$

Onde as soluções serão: $x = \frac{-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2} \Rightarrow x = -\frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{4}}$

Para ε pequeno, podemos expandir esta solução na série de potências e essa expansão é convergente quando $|\varepsilon| < 2$.

Utilizando o método da expansão, devemos fixar ε . Fixando $\varepsilon = 0$ cujas raízes não perturbadas são $x = \pm 1$, faremos a expansão de uma dessas raízes, por exemplo, $x = 1$ e a partir disso supõe que a solução passa a ser expressa pela expansão;

$$x(\varepsilon) = 1 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \varepsilon^4 x_4 + \dots \quad (5.14)$$

Onde: $x_i (i = 1, 2, 3, 4, \dots, n)$ são os coeficientes a serem determinados

Truncando a expansão até o quinto termo e substituindo em 5.13 temos:

$$\begin{aligned} & (1 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \varepsilon^4 x_4)^2 + \varepsilon(1 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \varepsilon^4 x_4) - 1 = 0 \\ & (1 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2)^2 + 2(1 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2)(\varepsilon^3 x_3 + \varepsilon^4 x_4) + (\varepsilon^3 x_3 + \varepsilon^4 x_4)^2 + \\ & + \varepsilon + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon^3 x_2 + \varepsilon^4 x_3 + \varepsilon^5 x_4 - 1 = 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} & 1 + 2\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_1^2 + 2\varepsilon^2 x_2 + 2\varepsilon^3 x_3 + 2\varepsilon^3 x_1 x_2 + 2\varepsilon^4 x_1 x_3 + \varepsilon^4 x_2^2 + 2\varepsilon^5 x_2 x_3 + \\ & + \varepsilon^6 x_3^2 + 2\varepsilon^4 x_4 + 2\varepsilon^5 x_1 x_4 + 2\varepsilon^6 x_2 x_4 + 2\varepsilon^7 x_3 x_4 + \varepsilon^8 x_4^2 + \varepsilon + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon^3 x_2 + \\ & + \varepsilon^4 x_3 + \varepsilon^5 x_4 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Considerando que o parâmetro de perturbação ε poderia ter sido escolhido arbitrariamente, os coeficientes das várias potências de ε devem ser igualados a zero. Essa é a técnica da expansão e transforma a equação (5.15) num sistema de equações que podem ser resolvidas sucessivamente.

$$\begin{aligned}
\varepsilon^1 : 2x_1 + 1 = 0 &\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} \\
\varepsilon^2 : x_1^2 + 2x_2 + x_1 = 0 &\Rightarrow x_2 = \frac{1}{8} \\
\varepsilon^3 : 2x_3 + 2x_1x_2 + x_2 = 0 &\Rightarrow x_3 = 0 \\
\varepsilon^4 : 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_4 + x_3 = 0 &\Rightarrow x_4 = -\frac{1}{128}
\end{aligned}
\tag{5.16}$$

A solução será:

$$x = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{128}\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6)
\tag{5.17}$$

Tabela comparativa com alguns valores de ε .

$\varepsilon =$ $x =$	Valor aproximado	Valor real	Diferença
	$1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{8} - \frac{\varepsilon^4}{128}$	$-\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{4}}$	Va - Vr
1,00000	0,617187500000000000	0,618033988749895000	0,000846488749894903
0,10000	0,951242187500000000	0,951249219725039000	0,000007032225039394
0,01000	0,995012492187500000	0,995012499921876000	0,00000007734376029
0,00100	0,999500124992188000	0,999500124999992000	0,000000000007804646
0,00010	0,999950001249992000	0,999950001250000000	0,00000000000007661
0,00001	0,999995000012500000	0,999995000012500000	0,000000000000000000
0,00000	1,000000000000000000	1,000000000000000000	0,000000000000000000

Observe que quanto menor o ε mais próximo o valor aproximado será igual ao valor real em função do número de casas decimais que se queira.

Vale lembrar que com frequência o esforço computacional dispendido nesses pequenos somatórios é muito menor que o esforço computacional para obtenção da solução.

5.3.2 Equação do terceiro grau

Partiremos de uma equação do terceiro grau contendo o parâmetro ε .

$$x^3 + \varepsilon x - 1 = 0
\tag{5.18}$$

Então: $p = \varepsilon$ e $q = -1 \Rightarrow \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon^3}{27}$

A solução será: $y = u + v = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon^3}{27}}}$

Novamente utilizando o método da expansão, devemos fixar ε . Fixando $\varepsilon = 0$ cujas raízes não perturbadas é $x = 1$, faremos a expansão pela expressão:

$$x(\varepsilon) = 1 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \varepsilon^4 x_4 + \dots \quad (5.19)$$

Onde: $x_i (i = 1, 2, 3, 4, \dots, n)$ são os coeficientes a serem determinados

Truncando a expansão até o quarto termo e substituindo na equação 5.18 tem-se:

$$\begin{aligned} & (1 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3)^3 + \varepsilon(1 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3) - 1 = 0 \\ & \left[(1 + \varepsilon x_1) + (\varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3) \right]^3 + \varepsilon + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon^3 x_2 + \varepsilon^4 x_3 - 1 = 0 \\ & (1 + \varepsilon x_1)^3 + 3(1 + \varepsilon x_1)^2 (\varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3) + 3(1 + \varepsilon x_1) (\varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3)^2 + \\ & + (\varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3)^3 + \varepsilon + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon^3 x_2 + \varepsilon^4 x_3 - 1 = 0 \\ & 1 + 3\varepsilon x_1 + 3\varepsilon^2 x_1^2 + \varepsilon^3 x_1^3 + 3(1 + 2\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_1^2) (\varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3) + \\ & + 3(1 + \varepsilon x_1) (\varepsilon^4 x_2^2 + 2\varepsilon^5 x_2 x_3 + \varepsilon^6 x_3^2) + \varepsilon^6 x_2^3 + 3\varepsilon^7 x_2^2 x_3 + 3\varepsilon^8 x_2 x_3^2 + \\ & + \varepsilon^9 x_3^3 + \varepsilon + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon^3 x_2 + \varepsilon^4 x_3 - 1 = 0 \\ & 1 + 3\varepsilon x_1 + 3\varepsilon^2 x_1^2 + \varepsilon^3 x_1^3 + 3\varepsilon^2 x_2 + 3\varepsilon^3 x_3 + 6\varepsilon^3 x_1 x_2 + 6\varepsilon^4 x_1 x_3 + \\ & + 3\varepsilon^4 x_1^2 x_2 + 3\varepsilon^5 x_1^2 x_3 + 3\varepsilon^4 x_2^2 + 6\varepsilon^5 x_2 x_3 + 3\varepsilon^6 x_3^2 + 3\varepsilon^5 x_1 x_2^2 + \\ & + 6\varepsilon^6 x_1 x_2 x_3 + 3\varepsilon^7 x_1 x_3^2 + \varepsilon^6 x_2^3 + 3\varepsilon^7 x_2^2 x_3 + 3\varepsilon^8 x_2 x_3^2 + \varepsilon^9 x_3^3 + \\ & + \varepsilon + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon^3 x_2 + \varepsilon^4 x_3 - 1 = 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Considerando que o parâmetro de perturbação ε poderia ter sido escolhido arbitrariamente, os coeficientes das várias potências de ε devem ser igualados a zero. Essa é a técnica da expansão e transforma a equação (5.20) num sistema de equações que podem ser resolvidas sucessivamente.

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 : 3x_1 + 1 = 0 & \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3} \\ \varepsilon^2 : 3x_1^2 + 3x_2 + x_1 = 0 & \Rightarrow x_2 = 0 \\ \varepsilon^3 : x_1^3 + 3x_3 + 6x_1 x_2 + x_2 = 0 & \Rightarrow x_3 = \frac{1}{81} \end{aligned} \quad (5.21)$$

A solução será:

$$x = 1 - \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{81}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^5) \quad (5.22)$$

Tabela comparativa com alguns valores de ε .

$x =$ $\varepsilon =$	Valor aproximado	Valor real	Diferença
	$1 - \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^3}{81}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon^3}{27}}}$	Vr - Va
1,00000	0,679012345679012000	0,682327803828019000	0,003315458149006910
0,10000	0,966679012345679000	0,951249219725039000	-0,015429792620639700
0,01000	0,996666679012346000	0,995012499921876000	-0,001654179090469720
0,00100	0,99966666679012000	0,99950012499992000	-0,000166541679020193
0,00010	0,99996666666679000	0,999950001250000000	-0,000016665416679107
0,00001	0,999996666666667000	0,999995000012500000	-0,000001666654166677
0,00000	1,000000000000000000	1,000000000000000000	0,000000000000000000

Novamente observamos que quanto menor o ε mais próximo o valor aproximado será igual ao valor real em função do número de casas decimais que se queira.

CAPÍTULO VI

6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

6.1 Conclusões

Com este trabalho, procurou-se apresentar uma síntese dos aspectos fundamentais que envolvem os sistemas não lineares, servindo de embasamento para um estudo mais aprofundado de sistemas deste tipo.

Na parte referente à revisão bibliográfica, procurou-se mostrar uma introdução dos conceitos fundamentais da dinâmica não linear como espaço de fase, estabilidade, linearização, ponto de equilíbrio e linearização em torno de um ponto de equilíbrio. Tais aspectos, apesar de complexos, são abordados para servir de introdução ao emprego das técnicas nos capítulos subsequentes.

Neste trabalho, com o intuito de expor o conteúdo, estuda-se a equação do movimento que descreve um oscilador de Duffing – Van der Pol com amortecimento não linear, e em virtude das dificuldades encontradas na busca de uma solução analítica exata para equações não lineares, procura-se uma solução aproximada com o auxílio do método de perturbação conhecida como método da expansão.

Para que a análise do sistema estudado pudesse ser realizada através de uma abordagem analítica, consideraram-se as não linearidades como sendo pequenas. Desta forma estas não linearidades foram tratadas como uma perturbação em relação a um sistema linear, através de séries de potências relativamente a um pequeno parâmetro a .

Procurou-se mostrar também que é uma aplicação viável para determinar as raízes aproximadas de equações algébricas de segundo e terceiro grau, através de um somatório de uma série de termos, nos quais não existem fórmulas para essas equações, e em parte satisfazendo as curiosidades de alunos da educação básica quando se estudam polinômios e vários métodos de resoluções, mas sempre com algumas informações adicionais a respeito das raízes.

6.2 Perspectivas de trabalhos futuros

Pode-se dar sequência ao trabalho, estudando outros métodos de perturbação mais complexos e que podem vir a contribuir bastante com a solução de equações algébricas. Nesse sentido pode-se estudar esses métodos e comparar seus resultados com o método empregado neste trabalho para vários tipos de funções, visando ter uma ferramenta eficiente para se obter raízes de equações que talvez não seria possível de se encontrar com os métodos tradicionais.

CAPÍTULO VII

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BERGER, J. E. & Nunes Jr, G..; Paper “**A Mechanical Duffing Oscillator for The Undergraduate Laboratory**”, department and astronomy, Dartmouth college, 6127 Wilder Laboratory, Hanover, 1997.

BORGES, R. A.; **Contribuição ao estudo dos absorvedores dinâmicos de vibração não lineares**. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica, 2008.

DiSTEFANO, J. J.; **Sistemas de retroação e controle**. McGraw-Hill do Brasil, 1979.

GONÇALVES, M. B. e Flemming, D. M.; **Cálculo B**. Pearson Prentice-Hall, 2007.

HAGERDOM, Peter; **Oscilações Não Lineares**. Editora Edgard Blücher Ltda, 1984.

LIMA, E. L.; **Meu professor de Matemática e outras histórias**. Coleção do professor de matemática. SBM, Rio de Janeiro, 1991.

LIMA, R. Q.; **Estudo de modelos dinâmicos lineares e não lineares**. Dissertação de Mestrado, DEM – Departamento de Engenharia Mecânica, PUC – Rio de Janeiro, 2008.

MOON, F. C.; **Chaotic and Fractal Dynamics**. John Wiley & Sons, 1992.

OGATA, k.; **Engenharia de controle moderno**. Editora Prentice-Hall do Brasil, 1998.

SAVI, M. A.; **Dinâmica Não-Linear e Caos**. E- papers Serviços Editoriais Ltda, 2003.

THOMSEN, J. J.; **Vibrations and Stability**. Springer-Verlag, 2nd edition, 2003.

ANEXO I

Desenvolvimento de algumas relações trigonométricas

A primeira relação utilizada na equação 4.16 é: $\cos^3 \omega t = \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x &= \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos 3x) = \frac{1}{4} [3 \cos x + \cos(2x+x)] \\ &= \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x) = \frac{1}{4} [3 \cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x] \\ &= \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - 2 \sin^2 x \cos x) = \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x) \\ &= \frac{1}{4} [3 \cos x + \cos^3 x - 3(1 - \sin^2 x) \cos x] = \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x) = \cos^3 x \end{aligned}$$

A segunda relação utilizada na equação 4.72 é: $\sin 2x \cos x = \frac{1}{2} (\sin x + \sin 3x)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\sin x + \sin 3x) &= [\sin x + \sin(2x+x)] = \frac{1}{2} (\sin x + \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x) \\ &= \frac{1}{2} [\sin x + 2 \sin x \cos x \cos x + \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x)] = \frac{1}{2} (\sin x + 2 \sin x \cos^2 x + \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) \\ &= \frac{1}{2} (\sin x + 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) = \frac{\sin x}{2} (1 + 3 \cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{\sin x}{2} [1 + 3(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x] \\ &= \frac{\sin x}{2} (1 + 3 - 4 \sin^2 x) = 2 \sin x (1 - \sin^2 x) = 2 \sin x \cos^2 x = \sin 2x \cos x \end{aligned}$$