



Universidade Federal de Goiás  
Regional Catalão  
Unidade Acadêmica Especial de  
Matemática e Tecnologia  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional



# Resolução de Problemas Envolvendo Cálculo de Áreas de Figuras Planas via Polígonos Equidecomponíveis

*GILSIMAR FRANCISCO DE SOUZA*

Catalão/GO

2016

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:**       **Dissertação**       **Tese**

**2. Identificação da Tese ou Dissertação**

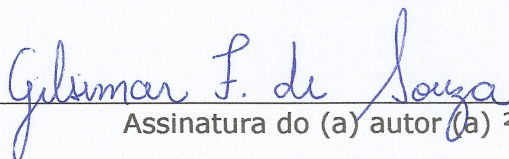
Nome completo do autor: Gilsimar Francisco de Souza

Título do trabalho: Resolução de Problemas Envolvendo o Cálculo de Áreas de Figuras Planas via Polígonos Equidecomponíveis.

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento  SIM       NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

  
Assinatura do (a) autor (a) <sup>2</sup>

Data: 17 / 09 / 16

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

<sup>2</sup>A assinatura deve ser escaneada.

Gilsimar Francisco de Souza

**Resolução de Problemas Envolvendo  
Cálculo de Áreas de Figuras Planas via  
Polígonos Equidecomponíveis**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

**Área de Concentração:** Matemática do Ensino Básico.

**Orientador:** Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi.

Catalão/GO

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Souza, Gilsimar Francisco de  
Resolução de Problemas Envolvendo o Cálculo de Áreas de Figuras Planas via Polígonos Equidecomponíveis [manuscrito] / Gilsimar Francisco de Souza. - 2016.  
v, 66 f.: il.

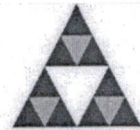
Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - profissional), Catalão, 2016.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras.

1. Polígonos equidecomponíveis. 2. Resolução de problemas. 3. Áreas de figuras planas. 4. Ensino básico. I. Bergamaschi, Paulo Roberto, orient. II. Título.

CDU 51



Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Gilsimar Francisco de Souza. Aos vinte e cinco dias do mês de agosto do ano de dois mil e dezesseis, (25/08/2016), às 10h00min, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora, **Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi – Orientador, Prof. Dr. Glen César Lemos e Prof. Dr. Donald Mark Santee** para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Laboratório de Controle Operacional, Bloco J, do Câmpus I da Regional Catalão, procederem a avaliação da defesa do trabalho intitulado: **“Resolução de Problemas Envolvendo Cálculo de Áreas de Figuras Planas Via Polígonos Equidecomponíveis”**, em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Gilsimar Francisco de Souza, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da banca, Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em quarenta minutos, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução n.º. 1075/2012 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o trabalho de conclusão foi APROVADO por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de MESTRE EM MATEMÁTICA, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 12h05min, a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, eu Elizângela Maria Marques Nahas, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

---

**Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi**  
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG  
Presidente da Banca

---

**Prof. Dr. Glen César Lemos**  
Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologias de Goiás – IFG

---

**Prof. Dr. Donald Mark Santee**  
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Gilsimar Francisco de Souza** graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Goiás - Campus Avançado de Catalão em 2005 e especializou-se em Matemática pela Universidade Cândido Mendes 2012. Atualmente é professor da educação básica, da rede Estadual de ensino em Goiás.

*Dedico este trabalho a todos que ajudaram no decorrer do curso e também na elaboração do TCC.*

# Agradecimentos

Sou grato primeiramente a Deus pela saúde, que possibilitou que frequentasse as aulas e tivesse forças para terminar o curso sem nenhuma eventualidade.

Agradeço também aos meus pais Lourival e Sônia e irmãs Alessandra e Lauriene, que sempre me apoiaram em todos os projetos que me envolvi, inclusive nesse, dando apoio afetivo nas horas mais difíceis .

Quero deixar um agradecimento especial também a Paulo Roberto Boz pelo companheirismo e por toda a compreensão de sempre.

Ao meu orientador, professor Dr. Paulo Roberto Bergamaschi, pelas importantes correções feitas ao trabalho e pela possibilidade de adquirir mais conhecimento em matemática.

Aos meus colegas de turma, pela ajuda nos estudos, pelas brigas, pelas opiniões, enfim por toda a caminhada juntos e pelo crescimento intelectual e pessoal que tivemos ao final dessa jornada.

Agradeço principalmente aos colegas que se tornaram amigos: Hawley me recebendo no seio de sua família, com hospedagens em sua casa que facilitaram a logística de deslocamento para estudar em Catalão , Celmo que juntamente com o Hawley fizemos todas as viagens para estudar em segurança. E também Davi e Fábio pelos ótimos momentos fazendo nossos almoços mais descontraídos para aliviamos as manhãs de pesado conhecimento.

Aos meus colegas de trabalho do Colégio Estadual José Flávio Soares por terem compreendido os momentos de estresse. Em especial, gostaria de agradecer a professora de português Sirlene Ribeiro pelas valiosas correções no trabalho final que contribuíram muito e por sua amizade tão verdadeira.

Aos meus alunos, principalmente a minha querida aluna Thaís Carneiro que sempre me inspirou a querer crescer profissionalmente e melhorar minha prática docente.

À coordenação nacional do PROFMAT, por oportunizar esse curso de mestrado.



Aos professores e funcionários da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, pela implantação e empenho na realização do PROFMAT. Agradeço principalmente aos professores que ministraram disciplinas durante esses dois anos, pelo comprometimento e conhecimento oportunizado.

A Todos os meus queridos amigos, Thiago, Marcelo, Wygny, Donnata, Fabrício, Luciana, Blenda, Rosana. Muito obrigado por me apoiarem e torcerem pelo meu sucesso.

Em especial ao meu grande amigo Ricardo G. Assunção pela contribuição de propor um tema para o trabalho e por todo o apoio em sua realização e durante o curso. Ele foi fundamental para conseguir essa conquista.

Agradeço também a minhas amigas Michele Cristina e Aline Duarte pela contribuição na tradução do resumo.

Agradeço ainda à amiga Adriana Rosa pelo seu material de estudos e caderno de resoluções, porque sem eles teria sido mais difícil. E também pela grande superação que essa amiga me ensinou tanto nos estudos, quanto na vida. Obrigado vencedora.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

*“A Matemática é a mais simples, a mais perfeita e a mais antiga de todas as ciências.”*

*Jacques Hadamard*

# Resumo

O estudo de geometria é importante porque permite às pessoas pensar com mais lógica e abre a mente para um novo nível de pensamento e capacidade de raciocínio. No entanto, por diversos motivos, essa área da matemática é pouca explorada nas aulas do ensino básico. Neste sentido, despertou-se o interesse em desenvolver estudos que poderiam ser interessantes e relevantes para o ensino de geometria na educação básica, de modo a colaborar com as aulas. E o tema escolhido foi área de figuras planas e polígonos equidecomponíveis. Assim, o objetivo principal deste trabalho é a proposta de problemas que possam ser resolvidos com a decomposição de polígonos, como sugestões de atividades para que o professor do ensino básico possa aplicá-las em sua prática pedagógica. A metodologia utilizada foi o desenvolvimento de pesquisa bibliográfica referentes a conceitos fundamentais de geometria, bem como de equidecomposição de polígonos, seguidos da apresentação de atividades que envolvem área de figuras planas e decomposição de polígonos. Espera-se, com este trabalho, auxiliar o trabalho do professor do ensino básico e, conseqüentemente, contribuir para a melhoria do ensino de geometria na escola básica.

**Palavras-chave:** polígonos equidecomponíveis; resolução de problemas; áreas de figuras planas; ensino básico.

# Abstract

The geometry study is important because it allows people to think more logically and opens the mind to a new level of thinking and reasoning skills. However, for various reasons, this area of mathematics is little explored in the classes of basic education. In this sense, it woke up the interest in developing studies that could be interesting and relevant to the geometry teaching in basic education, in order to collaborate with the classes. And the theme was the area of plane figures and equidecomposable polygons. Thus, the main objective of this work is the proposal of problems that can be solved with the decomposition of polygons, as suggested activities for the general education teacher can apply them in their practice. The methodology used was the development of bibliographic research relating to fundamental concepts of geometry, as well as equidecomposable polygons, followed the presentation of activities involving area of plane figures and decomposition of polygons. It is expected this work, assisting the work of teachers of basic education and thus contribute to the improvement of geometry teaching in basic school.

**Keywords:** equidecomposable polygons; problem solving; areas of plane figures; basic education.

# Lista de Figuras

1.1	Semirreta de origem em $A$ e que contém o ponto $B$ . . . . .	6
1.2	Representação do ângulo $A\hat{O}B$ . . . . .	7
1.3	Ângulos opostos pelo vértice. . . . .	7
1.4	Polígono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ . . . . .	8
1.5	Região poligonal $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ . . . . .	8
1.6	Triângulo acutângulo $ABC$ . . . . .	9
1.7	Triângulo obtusângulo $ABC$ . . . . .	9
1.8	Triângulo retângulo $ABC$ . . . . .	10
1.9	Retas $r$ e $s$ paralelas. . . . .	10
1.10	Triângulos retângulos $ABC$ e $DB_1C_1$ transformados em um retângulo $BACD$ . . . . .	12
1.11	Triângulo $ABC$ dividido pela altura $\overline{BH}$ em dois triângulos retângulos $ABH$ e $CBH$ . . . . .	12
1.12	Triângulos $ABC$ e $A'BC$ com lado $\overline{BC}$ iguais e mesma altura $d$ . . . . .	13
1.13	Ângulo externo $B\hat{C}D$ . . . . .	14
1.14	A desigualdade do ângulo externo. . . . .	15
1.15	Ângulos $\alpha$ e $\beta$ alternos internos, $\alpha$ e $\gamma$ colaterais internos e $\alpha$ e $\theta$ correspondentes. . . . .	16
1.16	Construção do triângulo $ABM$ ilustrando que $\alpha = \beta \Rightarrow r$ paralela a $s$ . . . . .	16
1.17	Construção da reta $r'$ . . . . .	17
1.18	Reta $\overleftrightarrow{XY}$ paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$ passando pelo vértice $A$ . . . . .	18

1.19	Ilustração para a demonstração da Proposição 1.7. . . . .	18
1.20	caso de congruência $LAL$ . . . . .	20
1.21	caso de congruência $ALA$ . . . . .	21
1.22	Ilustração para a demonstração da Proposição 1.10. . . . .	21
1.23	Caso de congruência $LLL$ . . . . .	22
1.24	Construção do triângulo $ABD$ . . . . .	22
1.25	Triângulo isósceles $ABC$ com ponto médio $M$ do segmento $\overline{BC}$ . . . . .	23
1.26	caso de congruência $LAA_o$ . . . . .	24
1.27	Caso especial de congruência de triângulos retângulos. . . . .	25
1.28	Construção do triângulo $A'DC'$ . . . . .	25
1.29	Triângulo $ABC$ semelhante ao triângulo $A'B'C'$ . . . . .	26
1.30	Caso de semelhança $AA$ . . . . .	27
1.31	Construção do triângulo $A'DE$ . . . . .	27
1.32	Caso de semelhança $LAL$ . . . . .	28
1.33	Construção do triângulo $DEF$ para o caso $LAL$ de semelhança de triângulos. . . . .	28
1.34	Caso de semelhança $LLL$ . . . . .	29
1.35	Construção do triângulo $DEF$ para o caso $LLL$ de semelhança de triângulos. . . . .	30
1.36	Relações métricas em um triângulo retângulo. . . . .	31
2.1	Polígono $ABCDEF$ decomposto em vários polígonos menores. . . . .	33
2.2	Polígonos Equidecomponíveis. . . . .	33
2.3	Triângulo $ABC$ equidecomposto em retângulo $GJLK$ . . . . .	37
2.4	Retângulo sobreposto ao triângulo. . . . .	37
2.5	Triângulo retângulo $ABC$ decomposto em retângulo $FGHJ$ . . . . .	38
2.6	Sobreposição do retângulo no triângulo $ABC$ . . . . .	38
2.7	Decomposição do triângulo $ABC$ no retângulo $GHIL$ . . . . .	39
2.8	Sobreposição do paralelogramo $ABDF$ no triângulo $ABC$ . . . . .	39
2.9	Recomposição do triângulo $ABC$ em um retângulo. . . . .	40

2.10	Retângulo $ABCD$ e segmento $\overline{EG}$ formado pela altura e base do retângulo alinhados. . . . .	40
2.11	Construção da medida do lado do quadrado $JKLM$ . . . . .	41
2.12	Retângulo $ABCD$ de lados $a$ e $b$ e retângulos sobrepostos de lados $a$ e $\frac{b}{2}$ . . . . .	42
2.13	Quadrado $ABCD$ sobreposto ao retângulo $BEFG$ . . . . .	42
2.14	Quadrado $DEFG$ colocado acima do quadrado $ABCD$ . . . . .	44
2.15	Trasformação dos quadrados $ABCD$ e $DEFG$ no quadrado $AGIH$ . . . . .	44
2.16	Transformação de um polígono em um quadrado. . . . .	46
3.1	Ilustração utilizada na demonstração do Teorema de Pitágoras via decomposição de polígonos. . . . .	49
3.2	Sugestão de solução da atividade 1, com encaixe das peças 1,2,3,4 e 5 no quadrado $ACHI$ . . . . .	50
3.3	Ilustração utilizada na demonstração que $J$ é ponto médio de $\overline{KL}$ e de $\overline{MN}$ . . . . .	50
3.4	Construção do lado de um quadrado de mesma área de um triângulo equilátero $ABC$ . . . . .	52
3.5	Recortes das peças do triângulo $ABC$ para formar o quadrado de mesma área. . . . .	53
3.6	Numeração das peças de recorte do triângulo $ABC$ . . . . .	53
3.7	Rotação de $180^\circ$ do triângulo $ABC$ . . . . .	54
3.8	Rotação e encaixe da peça 1. . . . .	54
3.9	Translação e encaixe da peça 2. . . . .	54
3.10	Quadrado equidecomponível com triângulo equilátero $ABC$ . . . . .	55
3.11	Trapézio da atividade 3. . . . .	55
3.12	Divisão do trapézio $ABCD$ em dois outros trapézios: $ABEF$ e $CDFE$ . . . . .	56
3.13	Hexágono com os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{CG}$ . . . . .	57
3.14	Recorte das peças do hexágono $ABCDEF$ para formar o quadrado de mesma área. . . . .	57

3.15	Numeração das peças de recorte hexágono $ABCDEF$ . . . . .	58
3.16	Translação da peça 1. . . . .	58
3.17	Translação da peça 2. . . . .	58
3.18	Movimento feito com a peça 4. . . . .	59
3.19	Encaixe da peça 5. . . . .	59
3.20	Paralelogramo $ABCD$ com altura $\overline{DE}$ . . . . .	60
3.21	Obtenção do retângulo $FCDE$ após a translação do triângulo $ADE$ . . .	60
3.22	Trapézio $ABCD$ com base maior $\bar{b}$ , base menor $b$ e altura $h$ . . . . .	61
3.23	Trapézio $ABCD$ com construção de $\overline{BG}$ e $\overline{CH}$ perpendiculares a $\overline{EF}$ . . .	62
3.24	Retângulo $AILK$ sobreposto ao trapézio $ABCD$ . . . . .	62



# Índice

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Conceitos Geométricos Básicos, Congruência e Semelhança de Triângulos</b>	<b>5</b>
1.1 Congruência de Triângulos . . . . .	19
1.2 Semelhança de Triângulos . . . . .	26
<b>2 Polígonos Equidecomponíveis</b>	<b>32</b>
<b>3 Propostas de Atividades Envolvendo a Decomposição de Polígonos</b>	<b>47</b>
3.1 Atividade 1- Teorema de Pitágoras através da Decomposição de Áreas. . . . .	48
3.2 Atividade 2 - Triângulo Equilátero Transformado em Quadrado. . . . .	51
3.3 Atividade 3 - Relação Entre Áreas. . . . .	55
3.4 Atividade 4 - Transformação de um Hexágono Regular em um Quadrado. . . . .	56
3.5 Atividade 5 - Calculando a Área do Paralelogramo. . . . .	59
3.6 Atividade 6 - Calculando a Área do Trapézio. . . . .	61
<b>Considerações Finais</b>	<b>64</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>65</b>

# Introdução

A construção histórica da geometria é muito antiga, diz-se que os egípcios antigos conheciam o teorema de Pitágoras e também de acordo com papiros antigos, sabe-se que os egípcios calculavam a área de figuras como triângulo isósceles que era achada tomando a metade da base e multiplicando pela altura. No papiro de Ahmes é justificado o método para achar a área sugerindo que o triângulo isósceles pode ser pensado como dois triângulos retângulos, um dos quais pode ser deslocado de modo que os dois juntos formem um retângulo. O trapézio isósceles é tratado de modo semelhante sendo transformado em um retângulo. Em transformações como essa, em que triângulos e trapézios isósceles são transformados em retângulos, vemos o início de uma teoria de congruência e da idéia de demonstração em geometria, mas nada não dá muitas evidências de os egípcios terem ido além disso, conforme encontra-se em BOYER(2012).

Muitas vezes na falta de teorias de cálculos exatos de áreas e volumes, faziam-se aproximações para entender os problemas, mas o grau de precisão na aproximação não é uma boa característica de medida em matemática, então não se deve dar ênfase a esse aspecto da obra dos egípcios. A percepção pelos egípcios de inter-relações entre figuras geométricas foi, por outro lado, muito frequentemente esquecida. No entanto, é aqui que eles mais se aproximaram da atitude de seus sucessores, os gregos. Não se conhece teorema ou demonstração formal na matemática egípcia, mas algumas comparações geométricas feitas no vale do Nilo, como essas sobre perímetros e áreas de círculos e quadrados, estão entre as primeiras afirmações históricas feitas referentes a essas figuras.

BOYER(2012) diz ainda que os egípcios também conseguiam calcular o volume

do tronco de pirâmides, mas como se chegaram a esses resultados não se sabe. Uma origem empírica para a regra sobre esse volume pode ter sido obtida como no caso de triângulos isósceles e trapézios, onde mentalmente podem ter decomposto o tronco em paralelepípedos, prismas e pirâmides, substituindo as pirâmides e prismas por blocos retangulares iguais.

A geometria foi evoluindo, depois os babilônios conseguiram conectar a álgebra e a aritmética elementar em que os números são ligados a figuras. Euclides deu um salto para o conhecimento geométrico e físico. Tem-se cinco obras de Euclides que sobrevivem até hoje: Os Elementos, Os dados, Divisão de Figuras, Os fenômenos e Óptica. Mas, é com o conhecimento primordial egípcio que já se conseguia calcular área de figuras com decomposições conhecidas, assunto que é base para esse trabalho.

Desde o início do mestrado já estava decidido que o trabalho final ou a dissertação seria relacionado a algum assunto de geometria. Mas porque geometria? Pelo fato dessa área da matemática ser negligenciada nas aulas do ensino básico, seja porque os conteúdos ficam no final do livro didático, ou pela falta de interesse e de materiais disponíveis aos professores, que auxiliem nas aulas desses conteúdos. Este trabalho de alguma forma deveria conter sugestões de atividades para que professores trabalhassem com geometria em sala de aula, porém essas sugestões deveriam ser de fácil aplicação nas aulas e que trouxessem métodos e técnicas diferentes do tradicional que já é utilizado.

Então, chegado o momento de escrever o trabalho, uma dúvida: qual tema poderia ser interessante e relevante para o ensino de geometria na educação básica?

Através de pesquisa de alguns temas e sugestões, o mais interessante foi dado por um amigo, que indicou os polígonos equidecomponíveis. Na pesquisa sobre esse assunto despertou-se uma curiosidade e uma vontade de desenvolver algo nesse tema, pois muitas vezes os professores trabalham com exercícios que utilizam-se da decomposição ou recomposição de polígonos para calcular áreas, e nem se dá conta que existe toda uma teoria matemática que embasa essa prática já utilizada. Assim, surgiu esse trabalho que

está estruturado em três capítulos.

No primeiro capítulo são apresentados os conceitos iniciais, definições, notações e termos de geometria que são usados no decorrer de todo o trabalho, como: segmentos de retas, medidas de segmentos de retas, ângulos, medidas e representação de ângulos. Nesse capítulo também é apresentado o conceito de polígono, classificação de triângulos quanto a seus ângulos e ainda apresentados alguns postulados que servem de base para o capítulo 2.

Continuando o capítulo 1, são apresentados na sequência os casos de congruências de triângulos: *LAL* (Lado Ângulo Lado), *ALA* (Ângulo Lado Ângulo), *LLL* (Lado Lado Lado), *LAA<sub>o</sub>* (Lado Ângulo Ângulo Oposto) e o caso especial de congruência de triângulos retângulos. Ainda são apresentados os casos de semelhança de triângulos e as relações métricas no triângulo retângulo. Esses casos são de extrema importância na demonstração dos resultados do capítulo 2 e também nas resoluções das atividades propostas do capítulo 3.

No segundo capítulo é apresentada a teoria de polígonos equidecomponíveis, e mostrado que dois polígonos que são equidecomponíveis possuem a mesma área. Na sequência é apresentada uma teoria que serve de suporte para o último teorema de Bolyai-Gerwien: dois polígonos que possuem a mesma área são equidecomponíveis.

No terceiro e último capítulo, são propostas atividades envolvendo cálculo de áreas de figuras planas, que se utilizam de equidecomposição de polígonos em suas soluções. A atividade 1 é a demonstração do famoso Teorema de Pitágoras através da equidecomposição de polígonos, a atividade 2 é a transformação de um triângulo equilátero em um quadrado, a atividade 3 é um exercício de relações entre áreas muito utilizado em provas de olimpíadas de matemática, a atividade 4 é a transformação de um hexágono regular em um quadrado, a atividade 5 é estabelecer através da decomposição do paralelogramo uma relação para o cálculo de sua área e finalmente a atividade 6 que é o cálculo da área de um trapézio qualquer.

Todo o texto é repleto de figuras que foram construídas com a ajuda do software de geometria dinâmica *GeoGebra*.

Por fim, são feitas algumas considerações finais.

# Capítulo 1

## Conceitos Geométricos Básicos, Congruência e Semelhança de Triângulos

Neste capítulo, apresenta-se uma base teórica necessária para os outros capítulos do trabalho como definições, conceitos iniciais e teoremas de congruência de triângulos. São apresentadas algumas notações usadas no decorrer do texto.

Inicialmente, admite-se ponto, reta e plano como objetos indefinidos. Utiliza-se letras maiúsculas do alfabeto para designar pontos e letras minúsculas para nomear as retas, e as letras minúsculas do alfabeto grego para representar os planos e os ângulos.

As retas são representadas por dois de seus pontos com uma seta dupla em cima, por exemplo a reta originada pelos pontos  $A$  e  $B$  será denotada por  $\overleftrightarrow{AB}$ .

Toda reta determina no plano exatamente duas regiões que são denominadas *semiplanos*.

Dados dois pontos quaisquer. Considere a reta que os contém. A reunião desses pontos com os pontos da reta que se situam entre eles é chamada *segmento de reta*. Os dois pontos em questão são chamados *extremos do segmento*.

Os segmentos de retas são representados pelos seus extremos com um traço em cima. Por exemplo, o segmento de reta determinado pelos pontos  $A$  e  $B$  será denotado

por  $\overline{AB}$ . Quando se tratar da medida do comprimento de um segmento de reta a notação empregada será simplesmente os extremos do segmento, por exemplo,  $AB$  indicando o comprimento do segmento  $\overline{AB}$ .

Dois ou mais segmentos são *congruentes* quando eles possuem a mesma medida. A notação do segmento  $\overline{AB}$  ser congruente ao segmento  $\overline{CD}$  é  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ .

Chama-se de *ponto médio* do segmento  $\overline{AB}$  a um ponto  $C$  deste segmento tal que  $AC = CB$ .

Considere um ponto qualquer sobre uma dada reta. A partir deste ponto, pode-se percorrer indefinidamente sobre a reta em ambos os sentidos. Escolhendo um sentido, tem-se uma *semirreta*. O ponto de partida recebe a denominação de origem da semirreta. Assim, se  $A$  e  $B$  são pontos de uma reta,  $\overrightarrow{AB}$  é a semirreta de origem  $A$  e que contém o ponto  $B$ , conforme figura 1.1.

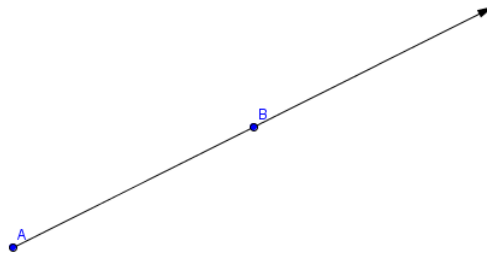


Figura 1.1: Semirreta de origem em  $A$  e que contém o ponto  $B$ .

Dispondo-se no plano, duas semirretas de mesma origem, denotadas por  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ , a união delas determina um conjunto no plano denominado ângulo  $A\hat{O}B$ , conforme figura 1.2. As duas semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  são chamadas de *lados* do ângulo  $A\hat{O}B$ .

Esse ângulo divide o plano em três regiões: o próprio ângulo, uma interna ao ângulo e outra externa ao ângulo. Para a medida desse ângulo emprega-se a notação  $A\hat{O}B$  ou simplesmente  $\hat{O}$ .

Dois ou mais ângulos são ditos *congruentes* quando possuírem a mesma medida.

Por exemplo, os ângulos  $A\hat{O}B$  e  $C\hat{O}D$  sendo congruentes denota-se por  $A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$ .

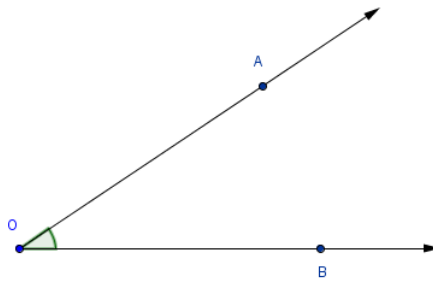


Figura 1.2: Representação do ângulo  $\widehat{AOB}$ .

$\widehat{COD}$ , e a igualdade das medidas desses ângulos é denotada por  $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ .

Um conceito importante que é utilizado neste trabalho é o de *ângulos opostos pelo vértice*. Dois ângulos  $\widehat{AOB}$  e  $\widehat{COD}$  são opostos pelo vértice (OPV) se seus lados forem semirretas opostas. Duas semirretas são opostas quando pertencem a uma mesma reta, ambas têm a mesma origem e têm sentidos opostos. Na situação ilustrada na figura 1.3, a semirreta  $\overrightarrow{OB}$  é oposta à semirreta  $\overrightarrow{OC}$ , assim como  $\overrightarrow{OA}$  é oposta a  $\overrightarrow{OD}$ . E, assim, os ângulos  $\widehat{AOB}$  e  $\widehat{COD}$  são opostos pelo vértice, bem como  $\widehat{AOC}$  e  $\widehat{BOD}$  também o são.

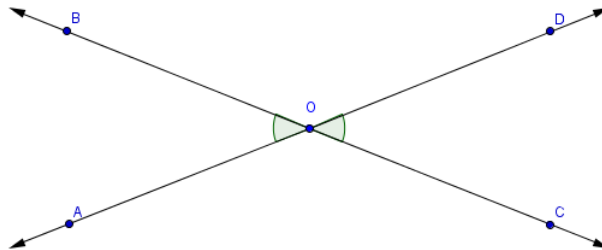


Figura 1.3: Ângulos opostos pelo vértice.

A definição de polígono é importante no trabalho. Conceituando então, sejam  $n \geq 3$  um número natural e  $A_1, A_2, \dots, A_n$  pontos distintos do plano.  $A_1A_2\dots A_n$  é um *polígono* se, para  $2 \leq i \leq n$ , os segmentos consecutivos  $\overline{A_{i-1}A_i}$  e  $\overline{A_iA_{i+1}}$  não estão sobre a mesma reta, sendo  $A_{n+1} = A_1$ .

Na figura 1.4, está exibido um polígono para o caso  $n=6$ .

Nesta definição, os pontos  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  são os *vértices* do polígono, os seg-



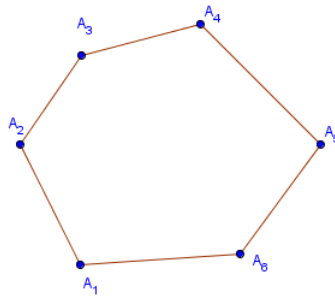


Figura 1.4: Polígono  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ .

mentos  $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$  são os *lados* do polígono. A *região poligonal* compreende o polígono, juntamente com o seu interior, como exibido na figura 1.5 para o caso  $n=6$ .

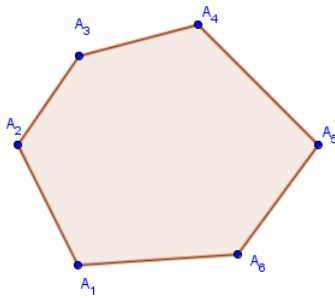


Figura 1.5: Região poligonal  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ .

Neste trabalho, toda vez que se referir a polígonos, será considerada também a sua região poligonal.

Um caso particular de polígonos é o triângulo. Considera-se três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  no plano, se esses pontos estão sobre uma mesma reta são ditos *colineares*, mas se não forem colineares formam um triângulo. A região triangular correspondente é delimitada pelos segmentos que unem os três pontos, dois a dois, e que será representado pelas letras maiúsculas de seus vértices  $ABC$  ou também pela forma  $\triangle ABC$ .

Classificam-se os triângulos em relação às medidas de seus ângulos, assim um triângulo pode ser:

(a) *Acutângulo*: todos os ângulos internos são menores que  $90^\circ$ , ou seja, agudos.  $\widehat{ABC}$ ,

$\widehat{ACB}$  e  $\widehat{BAC}$  menores que  $90^\circ$ . Veja figura 1.6.

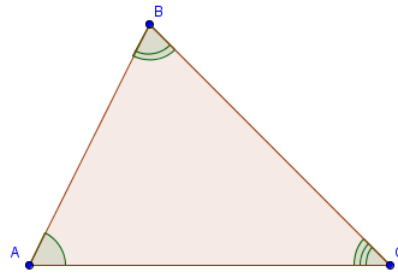


Figura 1.6: Triângulo acutângulo  $ABC$ .

- (b) *Obtusângulo*: possui um ângulo obtuso, ou seja, maior que  $90^\circ$ , e os outros ângulos agudos. Por exemplo, no triângulo exibido na figura 1.7,  $\widehat{ABC} > 90^\circ$ ,  $\widehat{BAC}$  e  $\widehat{BCA}$  menores que  $90^\circ$ .

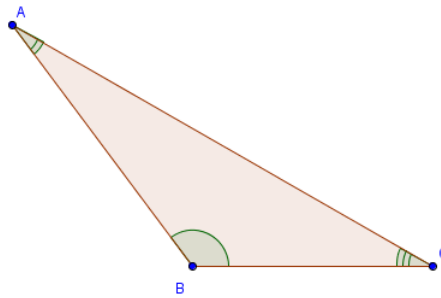


Figura 1.7: Triângulo obtusângulo  $ABC$ .

- (c) *Retângulo*: possui um ângulo reto (igual a  $90^\circ$ ) e os outros ângulos agudos. A figura 1.8 ilustra a situação em que o triângulo  $ABC$  possui  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ ,  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{ACB}$  menores que  $90^\circ$ . O lado oposto ao ângulo reto chama-se *hipotenusa* e os outros dois lados do triângulo retângulo são chamados de *catetos*.

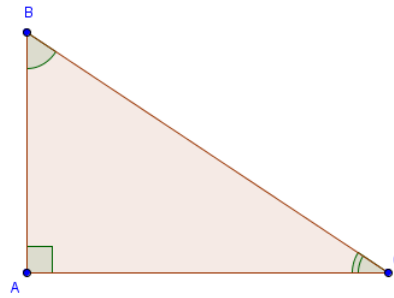


Figura 1.8: Triângulo retângulo  $ABC$ .

Duas retas são *paralelas* se elas estão em um mesmo plano e não apresentam ponto em comum, ou seja, não se tocam e nem se cruzam. A figura 1.9 exibe duas retas paralelas  $r$  e  $s$ .

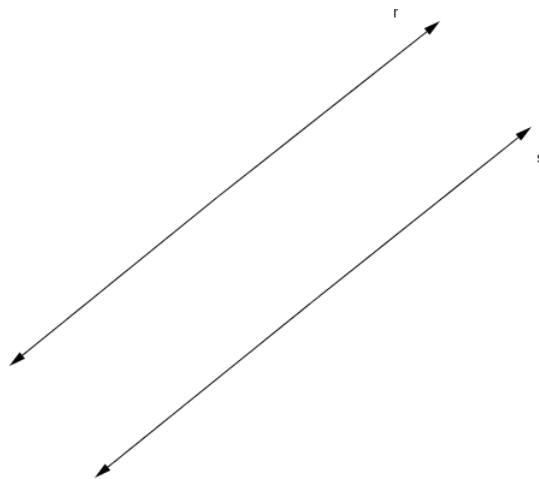


Figura 1.9: Retas  $r$  e  $s$  paralelas.

São usados no texto termos como: postulados, axiomas e proposições. *Postulados* são sentenças que não são provadas ou demonstradas, e por isso se tornam óbvias ou se tornam um consenso inicial para a aceitação de uma determinada teoria. *Axiomas* são premissas que fundamentam uma demonstração ou uma teoria, não podendo, no entanto, o próprio axioma ser demonstrado. É uma verdade tida como óbvia, que não necessita de demonstração, servindo de base para deduções. *Proposições* são sentenças que podem ser demonstradas de maneira lógica a partir de um axioma ou de outras proposições que

tenham sido previamente demonstrados. Este processo de demonstração é levado a cabo através de determinadas regras de inferência.

São apresentados alguns postulados que servem de auxílio inicial para a teoria.

*Postulado 1.* Todo polígono pode ser expresso como a união de um número finito de triângulos, ou seja, o polígono pode ser dividido em triângulos.

*Postulado 2.* A área de um polígono é representada por um número real positivo.

*Postulado 3.* Dois polígonos são congruentes quando um deles pode ser deslocado no espaço, sem deformá-lo, até coincidir com o outro.

*Postulado 4.* A área de um polígono é a soma das áreas dos polígonos menores em que foi particionado.

*Postulado 5.* Polígonos congruentes possuem a mesma área.

*Postulado 6.* A área de um retângulo é o produto de um de seus lados (comumente chamado de base) pelo lado adjacente a este lado (comumente chamado de altura).

*Postulado 7.* Dados, no plano, uma reta  $r$  e um ponto  $A$  não pertencente a  $r$ , existe uma única reta  $s$ , paralela a  $r$  e passando por  $A$ .

**Proposição 1.1.** *A área de um triângulo retângulo é a metade do produto de seus catetos.*

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo retângulo, cujo ângulo reto é o vértice  $A$ . Reproduza este triângulo e chame de  $D$  o vértice contendo o ângulo reto deste novo triângulo retângulo e de  $B_1$  e  $C_1$  os vértices correspondentes a  $B$  e  $C$ , respectivamente. Junte este novo triângulo retângulo  $DB_1C_1$  ao triângulo original  $ABC$  de modo que a hipotenusa  $\overline{BC}$  coincida com a hipotenusa  $\overline{B_1C_1}$  e que formem um retângulo  $BACD$ , como exibido na figura 1.10.

Pelo Postulado 3, os triângulos retângulos  $ABC$  e  $DB_1C_1$  são congruentes e, portanto, pelo Postulado 5, possuem a mesma área. Assim, pelo Postulado 4, a área do

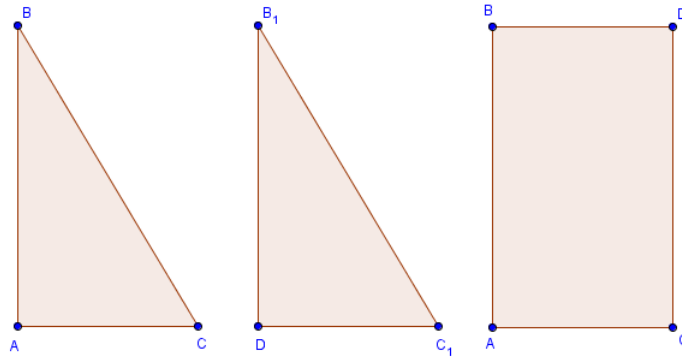


Figura 1.10: Triângulos retângulos  $ABC$  e  $DB_1C_1$  transformados em um retângulo  $BACD$ .

retângulo  $BACD$  é o dobro da área do triângulo retângulo  $ABC$ , ou seja,  $2A(ABC) = A(BACD)$ . Como, pelo Postulado 6, a área do retângulo é o produto da base pela altura, então:

$$2A(ABC) = AB.AC$$

Logo, a área do triângulo  $ABC$  é a metade do produto de seus catetos.

□

**Proposição 1.2.** *A área de qualquer triângulo é a metade do produto de um de seus lados (normalmente chamado de base) pela altura correspondente a este lado.*

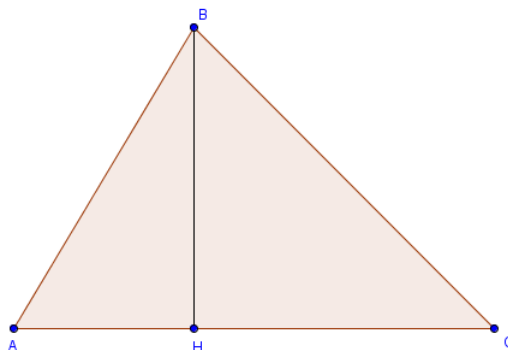


Figura 1.11: Triângulo  $ABC$  dividido pela altura  $\overline{BH}$  em dois triângulos retângulos  $ABH$  e  $CBH$ .

*Demonstração.* Dado um triângulo qualquer  $ABC$ , seja a altura desse triângulo o segmento  $\overline{BH}$ . Essa altura  $\overline{BH}$  divide o triângulo  $ABC$  em dois triângulos retângulos  $ABH$  e  $CBH$  retos em  $H$ , conforme figura 1.11. Para as outras situações, a demonstração segue a mesma linha de raciocínio que se apresenta a seguir, com as devidas adequações.

Então com o auxílio da Proposição 1.1 as áreas desses triângulos retângulos  $ABH$  e  $CBH$  são a metade dos produtos de seus catetos:

$$A(ABH) = \frac{AH \cdot BH}{2} \text{ e } A(CBH) = \frac{CH \cdot BH}{2}$$

Pelo Postulado 4 tem-se:

$$A(ABC) = A(ABH) + A(CBH)$$

$$A(ABC) = \frac{AH \cdot BH}{2} + \frac{CH \cdot BH}{2}$$

$$A(ABC) = \frac{(AH + CH) \cdot BH}{2}$$

$$A(ABC) = \frac{AC \cdot BH}{2}$$

□

Uma proposição importante que é usada na atividade 3 do capítulo 3 sobre equivalência de triângulos é apresentada a seguir:

**Proposição 1.3.** *A área de um triângulo não se altera quando um de seus lados permanece fixo e o terceiro vértice percorre uma reta paralela a esse lado.*

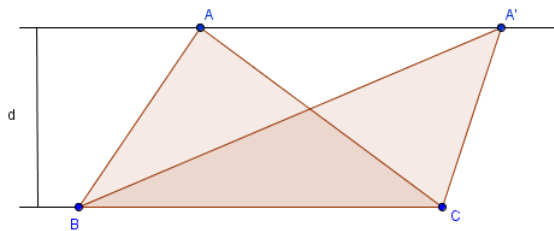


Figura 1.12: Triângulos  $ABC$  e  $A'BC$  com lado  $\overline{BC}$  iguais e mesma altura  $d$ .

*Demonstração.* Sejam  $ABC$  e  $A'BC$  triângulos tais que  $\overleftrightarrow{AA'}$  é paralela a  $\overleftrightarrow{BC}$ , conforme figura 1.12.

Seja  $d$  a distância entre as retas  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{AA'}$ , de modo que  $d$  é o comprimento das alturas de  $ABC$  e  $A'BC$  relativas ao lado  $\overline{BC}$ . Chamando então de  $A(ABC)$  e  $A(A'BC)$  as áreas dos triângulos  $ABC$  e  $A'BC$ , respectivamente, tem-se:

$$A(ABC) = \frac{1}{2}\overline{BC}.d = A(A'BC)$$

□

Se  $ABC$  é um triângulo, os seus ângulos  $\widehat{BAC}$ ,  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{ACB}$  são chamados de *ângulos internos* ao triângulo ou simplesmente ângulos do triângulo. Para cada um dos ângulos internos, mantendo um de seus lados e prolongando o outro lado no sentido contrário, obtém-se um outro ângulo, que é chamado de *ângulo externo* ao triângulo.

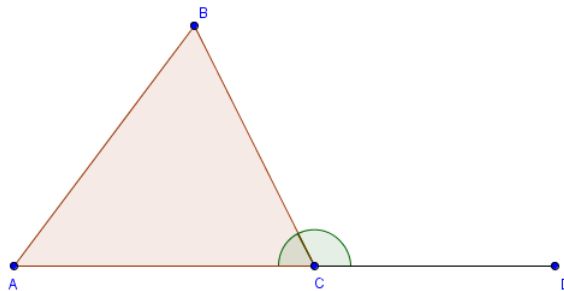


Figura 1.13: Ângulo externo  $\widehat{BCD}$ .

Na figura 1.13  $\widehat{BCD}$  é um dos ângulos externos do triângulo  $ABC$ .

**Proposição 1.4.** *Em todo triângulo, a medida de cada ângulo externo é maior que as medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.*

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo qualquer e considere  $X$  um ponto tal que  $C$  está entre  $B$  e  $X$ , de modo que  $\widehat{ACX}$  é um ângulo externo ao triângulo  $ABC$  adjacente ao ângulo  $\widehat{ACB}$ . Seja  $M$  o ponto médio do lado  $\overline{AC}$ , conforme figura 1.14.

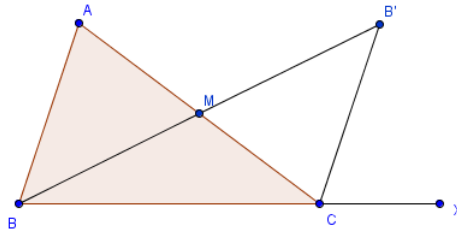


Figura 1.14: A desigualdade do ângulo externo.

Prolongando a semirreta  $\overrightarrow{BM}$  até o ponto  $B'$ , tal que  $BM = MB'$ , e considere os triângulos  $ABM$  e  $CB'M$ . Tem-se que  $AM = CM$ ,  $BM = B'M$  e  $\widehat{AMB} = \widehat{CMB'}$ , ângulos opostos pelo vértice. Portanto, pelo caso *LAL*, tem-se que  $\triangle AMB \equiv \triangle CMB'$  e daí,  $B'\widehat{CM} = B\widehat{AM}$ . Logo,

$$X\widehat{CA} \geq B'\widehat{CM} = B\widehat{AM} = B\widehat{AC}$$

Analogamente, prova-se que  $X\widehat{CA} \geq A\widehat{BC}$ . □

Dados no plano retas  $r$ ,  $s$  e  $t$ , com  $t$  intersectando  $r$  e  $s$  nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente, conforme figura 1.15, os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são chamados de *alternos internos*,  $\alpha$  e  $\gamma$  são chamados *colaterais internos* e os ângulos  $\alpha$  e  $\theta$  são chamados *correspondentes*.

O próximo teorema estabelece um critério para o paralelismo de duas retas.

**Proposição 1.5.** *As retas  $r$  e  $s$  são paralelas se, e somente se,  $\alpha = \beta$  e  $\alpha + \beta = 180^\circ$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, note que, como  $\beta + \gamma = 180^\circ$ , tem-se  $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = 180^\circ$ .

Portanto, basta provar que a reta  $r$  é paralela a reta  $s$  se, e somente se,  $\alpha = \beta$ .

Primeiro é provado: se  $\alpha = \beta$ , então a reta  $r$  é paralela à reta  $s$ .

Suponha por contradição que as retas  $r$  e  $s$  se encontram no ponto  $M$  formando o triângulo  $ABM$ , conforme figura 1.16. Por hipótese  $\alpha = \beta$ , mas  $\alpha$  também é ângulo externo do triângulo  $ABM$ , então de acordo com a Proposição 1.4,  $\beta < \alpha$ , o que é uma contradição. Logo, as retas  $r$  e  $s$  são paralelas.



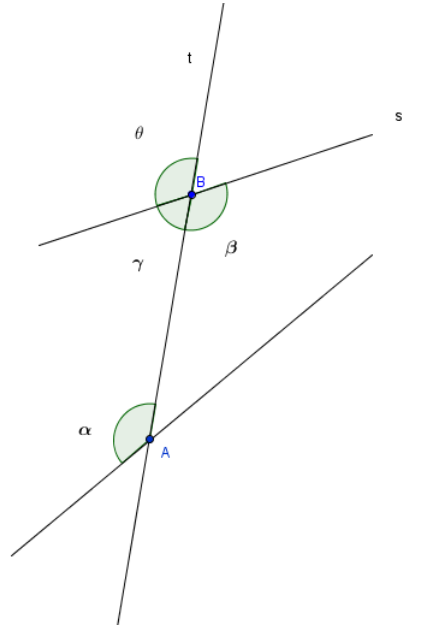


Figura 1.15: Ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  alternos internos,  $\alpha$  e  $\gamma$  colaterais internos e  $\alpha$  e  $\theta$  correspondentes.

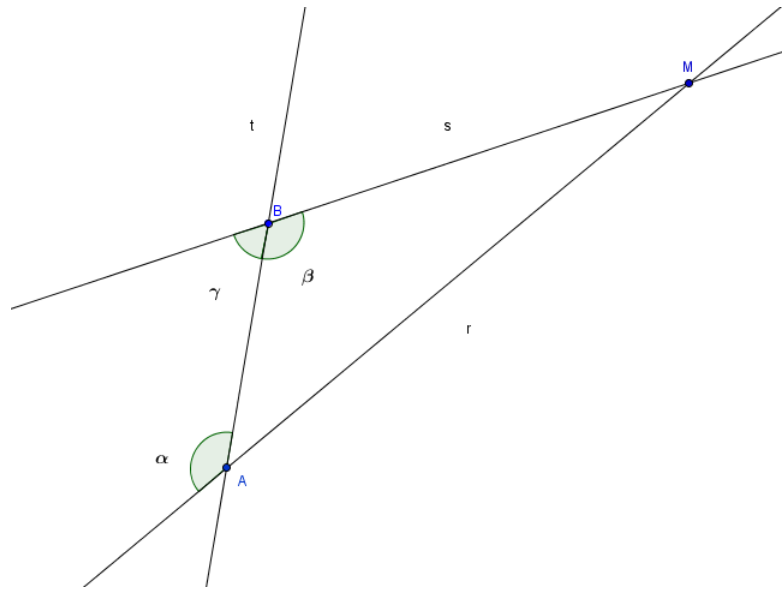


Figura 1.16: Construção do triângulo  $ABM$  ilustrando que  $\alpha = \beta \Rightarrow r$  paralela a  $s$ .

Perceba-se que isto acontece na configuração da figura 1.16. Caso a interseção das retas  $r$  e  $s$  ocorra do outro lado da reta  $t$ , então  $\beta$  é ângulo externo ao triângulo e  $\alpha$  interno e também pela Proposição 1.4  $\alpha < \beta$ , o que novamente provoca uma contradição, já que  $\alpha = \beta$  por hipótese. Logo, as retas  $r$  e  $s$  são paralelas também neste caso.

Basta agora provar que se  $r$  e  $s$  são retas paralelas, então  $\alpha = \beta$ .

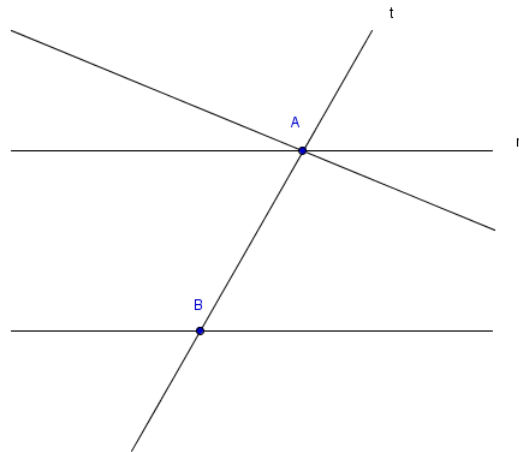


Figura 1.17: Construção da reta  $r'$ .

Suponha por contradição que  $\alpha \neq \beta$ , ou seja, não são iguais os ângulos alternos internos formados pelas retas  $r$  e  $s$  cortadas por uma transversal  $t$  interceptando essas retas nos pontos  $A$  e  $B$ . Considere uma reta  $r'$  passando por  $A$  formando com a reta  $s$  cortada pela reta  $t$  ângulos alternos internos congruentes, conforme figura 1.17.

Como se está supondo que  $r'$  e  $s$  possuem ângulos alternos internos iguais então, pela primeira parte da demonstração,  $r'$  e  $s$  são paralelas e, pelo postulado 7,  $r$  e  $r'$  são coincidentes. Portanto, as retas  $r$  e  $s$  cortadas pela transversal  $t$  formam ângulos alternos internos iguais.

□

Antes de seguir para os casos de congruência de triângulos é demonstrada a proposição 1.6 que trata da soma dos ângulos internos de um triângulo.

**Proposição 1.6.** *A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a  $180^\circ$ .*

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo qualquer e  $\overleftrightarrow{XY}$  a reta paralela a  $\overleftrightarrow{BC}$  e passando por  $A$ , conforme figura 1.18.

Pela proposição 1.5, tem-se que  $\widehat{ABC} = \widehat{BAX}$  e  $\widehat{ACB} = \widehat{CAY}$ , assim:

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{BAC} + \widehat{BAX} + \widehat{CAY} = 180^\circ$$

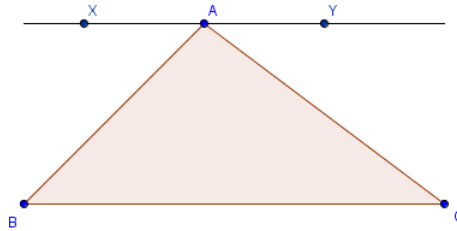


Figura 1.18: Reta  $\overleftrightarrow{XY}$  paralela à reta  $\overleftrightarrow{BC}$  passando pelo vértice  $A$ .

□

**Proposição 1.7.** *Sejam  $ABC$  um triângulo qualquer e  $D$  um ponto entre  $A$  e  $B$ . Seja, ainda, uma reta  $r$  paralela ao lado  $\overline{BC}$ , pelo ponto  $D$ , que corta o lado  $\overline{AC}$  em um ponto  $E$ . Então,  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$  e  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ .*

*Demonstração.* A figura 1.19 representa o enunciado da proposição 1.7.

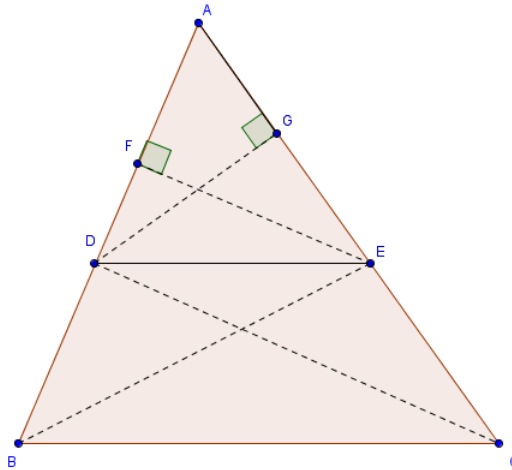


Figura 1.19: Ilustração para a demonstração da Proposição 1.7.

A área do triângulo  $ADE$  pode ser calculada de duas formas:  $\frac{AD \cdot EF}{2}$  ou  $\frac{AE \cdot DG}{2}$ .

Da igualdade das duas expressões tem-se que  $AD \cdot EF = AE \cdot DG$ .(1)

Como os triângulos  $BDE$  e  $CED$  possuem o mesmo lado  $\overline{DE}$  e mesma altura então, pela proposição 1.3, esses triângulos possuem a mesma área. Sejam  $\overline{EF}$  e  $\overline{DG}$  as alturas, respectivamente, dos triângulos  $BDE$  e  $CED$ . Logo, as áreas desses triângulos

são  $\frac{DB.EF}{2}$  e  $\frac{EC.DG}{2}$ . Daí segue que  $DB.EF = EC.DG$ .(2)

De (1) e (2) vem:

$$AD.EF = AE.DG \implies AD \cdot \frac{EC.DG}{DB} = AE.DG \implies \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Como os triângulos  $BDE$  e  $CED$  tem a mesma área então  $A(ABE) = A(ADE) + A(BDE) = A(ADE) + A(CED) = A(ACD)$ . Daí:  $\frac{AB.EF}{2} = \frac{AC.DG}{2}$ , assim:  $AB.EF = AC.DG$ .(3)

De (1) e (3) vem:

$$AD.EF = AE.DG \implies AD \cdot \frac{AC.DG}{AB} = AE.DG \implies \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

□

## 1.1 Congruência de Triângulos

O início desta sessão é a seguinte definição formal de congruência de triângulos:

**Definição 1.8.** Se dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  forem congruentes, deve existir uma correspondência entre seus vértices, de modo que tanto os ângulos em vértices correspondentes como os lados opostos aos vértices correspondentes sejam iguais, representa-se  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .

Os critérios para decidir se dois triângulos dados são congruentes facilita a verificação da congruência pois, diferente da definição 1.8, eles não exigem a verificação dos três pares de ângulos e dos três pares de lados. Eles são apresentados na sequência como casos de congruência de triângulos.

**Axioma 1.9.** *Caso de congruência LAL.* Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \end{array} \right\} \xRightarrow{LAL} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

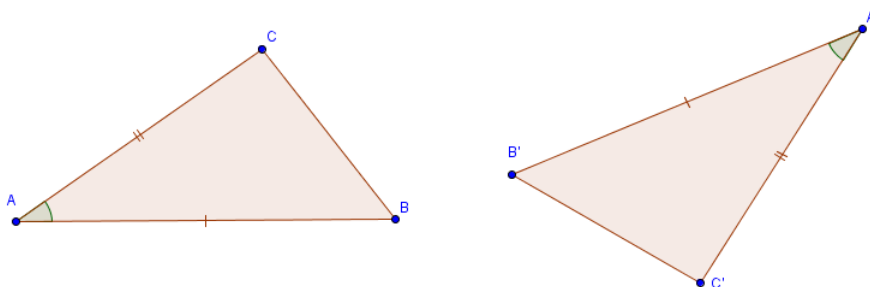


Figura 1.20: caso de congruência  $LAL$ .

Para constatar pela definição 1.8 que dois triângulos são congruentes é necessário examinar a congruência dos três pares de lados e dos três pares de ângulos correspondentes. O axioma anterior diz que é necessário verificar somente três dessas relações. Assim nos triângulos da figura 1.20 tem-se  $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ ,  $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$  e  $\widehat{A} = \widehat{A'}$  e devido a congruência dos triângulos implica em  $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ ,  $\widehat{C} = \widehat{C'}$  e  $\widehat{B} = \widehat{B'}$ . Este axioma é o primeiro caso de congruência de triângulos, os outros casos de congruência de triângulos são apresentados nas proposições seguintes.

**Proposição 1.10.** *Caso de congruência ALA. Se dois ângulos de um triângulo e o lado adjacente a esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado adjacente a esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.*

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{array} \right\} \xRightarrow{ALA} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

*Demonstração.* Sejam dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  tais que  $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ ,  $\widehat{A} = \widehat{A'}$  e  $\widehat{B} = \widehat{B'}$ . Seja  $D$  um ponto em  $\overrightarrow{AC}$  tal que  $\overline{AD} \equiv \overline{A'C'}$ . A figura 1.22 exibe a situação em que  $D$  pertence ao segmento  $\overline{AC}$ .

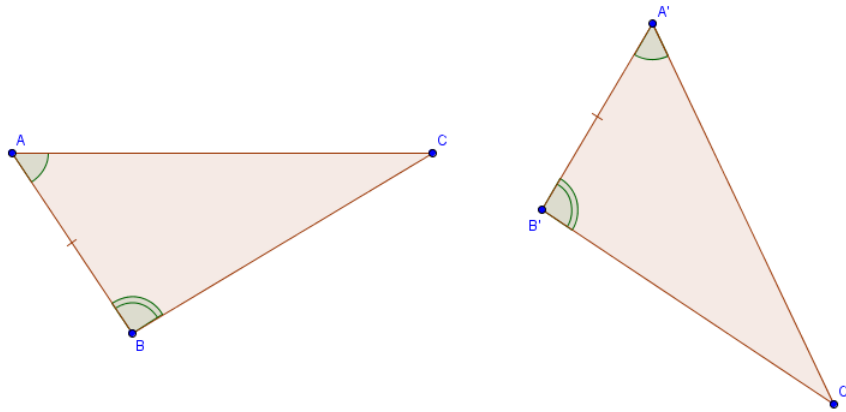


Figura 1.21: caso de congruência  $ALA$ .

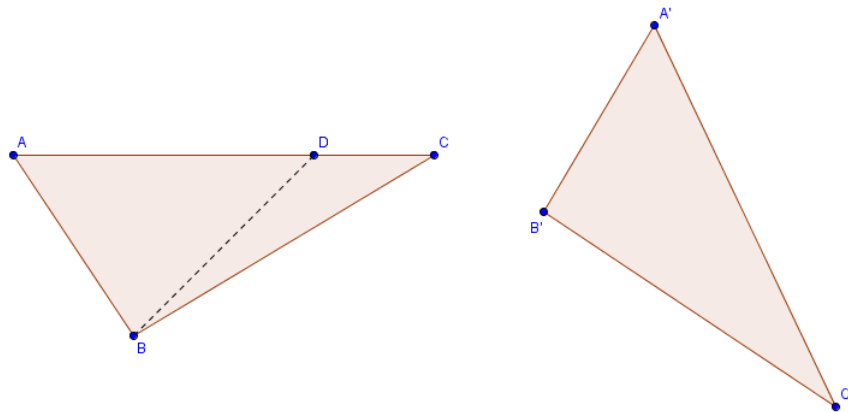


Figura 1.22: Ilustração para a demonstração da Proposição 1.10.

Levando em consideração os triângulos  $ABD$  e  $A'B'C'$ , como  $\overline{AD} \equiv \overline{A'C'}$  e por hipótese  $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$  e  $\widehat{A} = \widehat{A'}$  então, pelo axioma 1.9 (caso de congruência LAL),  $\triangle ABD \equiv \triangle A'B'C'$ , como consequência  $\widehat{ABD} = \widehat{B'}$ , mas  $\widehat{B'} = \widehat{ABC}$ , logo os ângulos  $\widehat{ABD}$  e  $\widehat{ABC}$  são iguais, o que faz os pontos  $C$  e  $D$  coincidirem e, conseqüentemente  $\triangle ABD$  e  $\triangle ABC$  serem coincidentes. Comprovado que  $\triangle ABD \equiv \triangle A'B'C'$ , conclui-se que  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .

□

**Proposição 1.11.** *Caso de congruência LLL. Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os*

dois triângulos são congruentes.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \end{array} \right\} \xrightarrow{LLL} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

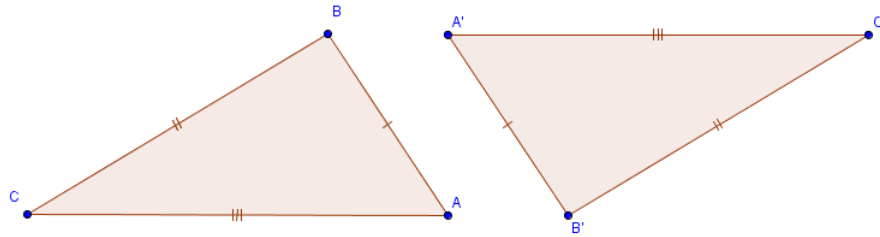


Figura 1.23: Caso de congruência *LLL*.

*Demonstração.* Sejam  $ABC$  e  $A'B'C'$  dois triângulos tais que  $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ ,  $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$  e  $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ . Construa a partir do ponto  $A$  e no semiplano determinado pela reta  $\overleftrightarrow{AC}$  e oposto ao que contém o ponto  $B$ , uma semirreta  $\overrightarrow{AX}$  de tal modo que o ângulo  $C\hat{A}X$  seja congruente ao ângulo  $\hat{A}'$ , marque o ponto  $D$  sobre a semirreta  $\overrightarrow{AX}$  tal que  $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$  e ligue  $D$  a  $B$  e também  $D$  a  $C$ . Veja a figura 1.24.

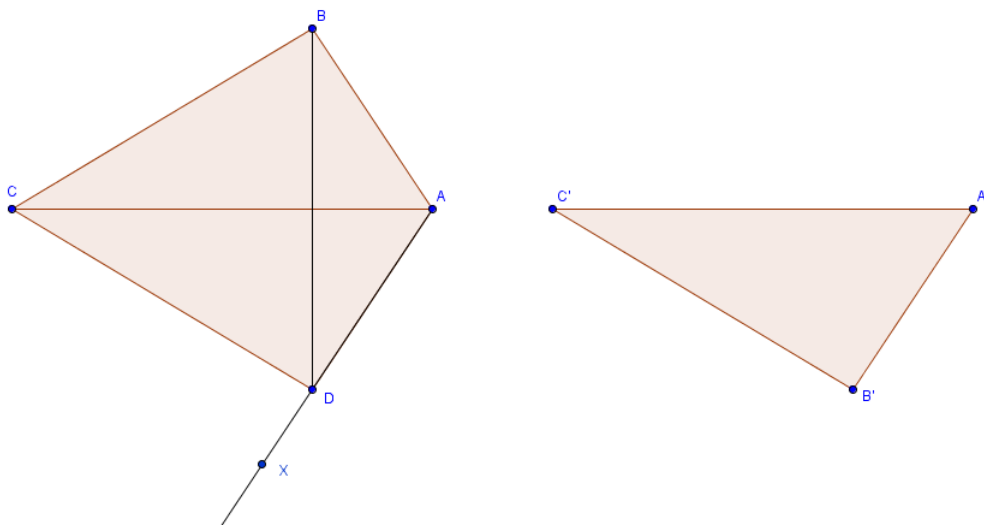


Figura 1.24: Construção do triângulo  $ABD$ .

Como  $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$  (por hipótese),  $\widehat{CAD} = \widehat{A'}$  e  $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$  (por construção), então  $\triangle ADC \equiv \triangle A'B'C'$  pelo caso de congruência *LAL*. Mostra-se agora que  $\triangle ABC$  e  $\triangle ADC$  são congruentes. Como  $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'} \equiv \overline{AB}$  e  $\overline{CD} \equiv \overline{B'C'} \equiv \overline{BC}$ , os triângulos  $ABD$  e  $BCD$  são isósceles, segue-se que  $\widehat{ADB} = \widehat{ABD}$  e  $\widehat{CDB} = \widehat{BCD}$ , logo pela adição de ângulos,  $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ . Então pelo caso de congruência *LAL* os triângulos  $ADC$  e  $ABC$  são congruentes. Como comprovado anteriormente que  $\triangle ADC \equiv \triangle A'B'C'$ , conclui-se que  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .  $\square$

Um triângulo é dito *isósceles* se possui dois lados iguais. Neste caso, o terceiro lado é denominado *base*. A proposição a seguir está relacionada a estes triângulos.

**Proposição 1.12.** *Todo triângulo isósceles tem os ângulos da base iguais.*

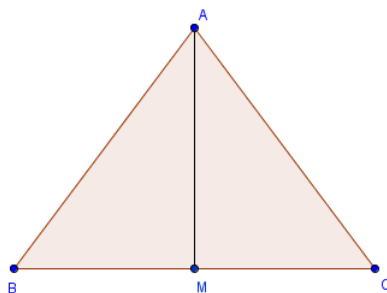


Figura 1.25: Triângulo isósceles  $ABC$  com ponto médio  $M$  do segmento  $\overline{BC}$ .

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo isósceles de base  $\overline{BC}$  e  $M$  é o ponto médio do lado  $\overline{BC}$ , conforme figura 1.25.

Como  $\overline{BM} \equiv \overline{CM}$  e  $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$  e  $\overline{AM}$  é lado comum dos triângulos  $\triangle AMB$  e  $\triangle AMC$ , segue do caso de congruência *LLL* que tais triângulos são congruentes. Logo,  $\widehat{ABM} = \widehat{ACM}$ .  $\square$

**Proposição 1.13.** *Caso de congruência  $LAA_0$ . Se dois ângulos de um triângulo e o lado oposto a um desses ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado oposto ao ângulo correspondente nesse outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes. Em símbolos, dados triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  temos:*



$$\left. \begin{array}{l} BC = B'C' \\ \widehat{A} = \widehat{A}' \\ \widehat{B} = \widehat{B}' \end{array} \right\} \xrightarrow{LAA_o} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

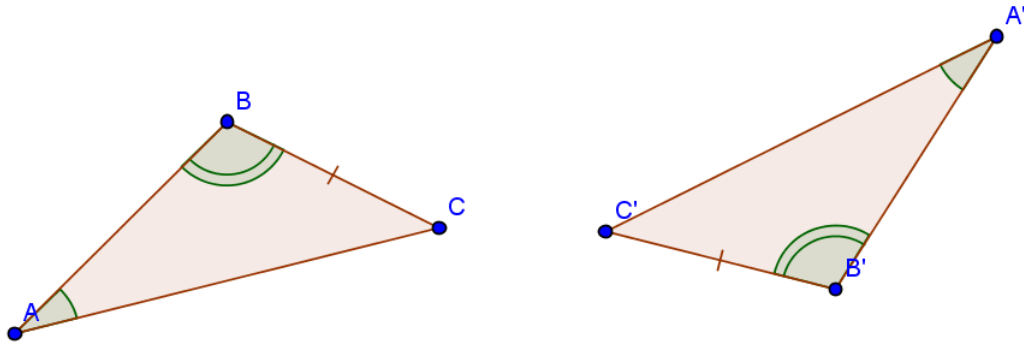


Figura 1.26: caso de congruência  $LAA_o$ .

*Demonstração.* Observando os triângulos tem-se:  $\widehat{A} = \widehat{A}'$  e  $\widehat{B} = \widehat{B}'$ , o que fornece:

$$\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A}' - \widehat{B}' = \widehat{C}'$$

Portanto, para os triângulos em questão, tem-se que:

$$\overline{BC} = \overline{B'C'}; \widehat{B} = \widehat{B}'; \widehat{C} = \widehat{C}'$$

Então, pelo caso de congruência  $ALA$ , os triângulos são congruentes.  $\square$

**Proposição 1.14.** *Caso especial de congruência de triângulos retângulos. Se dois triângulos retângulos são tais que a hipotenusa e um dos catetos do primeiro são respectivamente congruentes à hipotenusa e a um dos catetos do outro, então os triângulos são congruentes.*

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A}' = 90^\circ \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

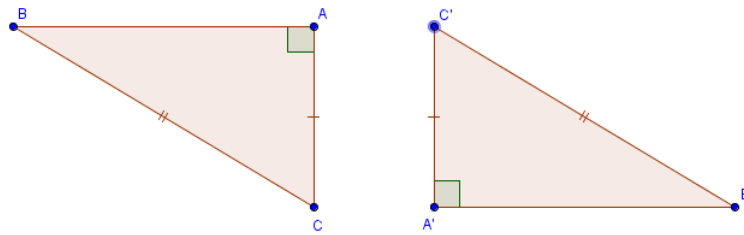


Figura 1.27: Caso especial de congruência de triângulos retângulos.

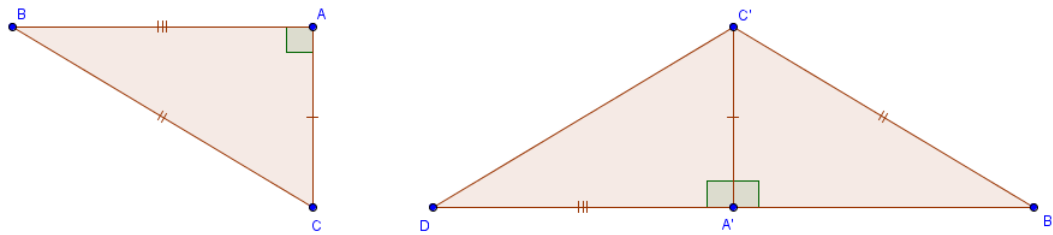


Figura 1.28: Construção do triângulo  $A'DC'$ .

*Demonstração.* Sejam  $ABC$  e  $A'B'C'$  dois triângulos retângulos tais que  $\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$ ,  $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$  e  $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ . Toma-se o ponto  $D$  no mesmo alinhamento do segmento  $\overline{A'B'}$  de modo que  $A'$  esteja entre  $B'$  e  $D$  e tal que  $\overline{A'D} \equiv \overline{AB}$ , conforme figura 1.28.

Por hipótese  $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ ,  $\hat{A} = \hat{C}'\hat{A}'D = 90^\circ$  e por construção  $\overline{AB} \equiv \overline{A'D}$  então, pelo caso de congruência LAL (lado-ângulo-lado),  $\triangle ABC \equiv \triangle A'DC'$ . E tem-se também que  $\overline{DC'} \equiv \overline{BC}$  e  $\hat{D} = \hat{B}$ .

Assim,  $\overline{DC'} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$  o que mostra que o triângulo  $C'B'D$  é isósceles de base  $\overline{DB'}$  e, conseqüentemente, tem-se  $\hat{D} = \hat{B}'$ .

Mas como  $\hat{D} = \hat{B}$  e  $\hat{D} = \hat{B}'$ , então  $\hat{B} = \hat{B}'$ . Tendo pela hipótese inicial  $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ ,  $\hat{A} = \hat{A}'$  e do fato  $\hat{B} = \hat{B}'$ , conclui-se pelo caso de congruência  $LAA_o$  (lado-ângulo-ângulo oposto) que  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .

□

## 1.2 Semelhança de Triângulos

Apresenta-se a definição de semelhança dada por Muniz Neto (2013): “Dois triângulos são *semelhantes* quando existir uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e do outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma” (p. 148). Usa-se o símbolo ( $\sim$ ) para representar semelhança de triângulos.

De acordo com esse autor, outra forma de dizer que dois triângulos são semelhantes é quando pode-se dilatar e/ou girar e/ou refletir e/ou transladar um deles de modo a coincidir com o outro.

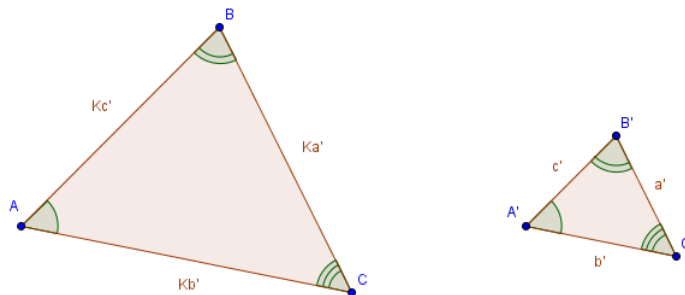


Figura 1.29: Triângulo  $ABC$  semelhante ao triângulo  $A'B'C'$ .

Dos triângulos da figura 1.29 tira-se a seguinte relação de proporcionalidade:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{kc'}{c'} = \frac{kb'}{b'} = \frac{kc'}{c'} = k$$

Esse número real positivo  $k$  é chamado de razão de semelhança entre os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ . Tomada a semelhança entre os triângulos  $A'B'C'$  e  $ABC$  a razão de semelhança é  $\frac{1}{k}$ .

As proposições apresentadas na sequência são condições de semelhança de triângulo que serão chamadas casos de semelhança de triângulos. O caso a seguir é conhecido como caso  $AA$  (Ângulo-Ângulo) de semelhança de triângulos.

**Proposição 1.15.** *Dados dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , se  $\widehat{A} = \widehat{A'}$  e  $\widehat{B} = \widehat{B'}$  então os triângulos são semelhantes.*

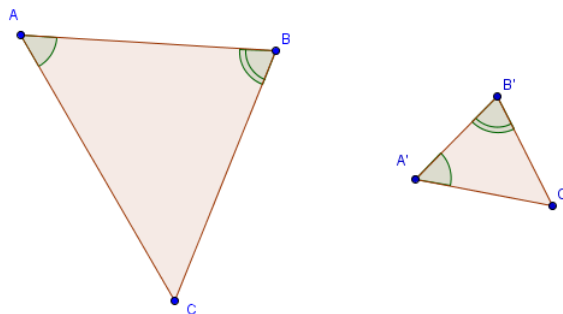
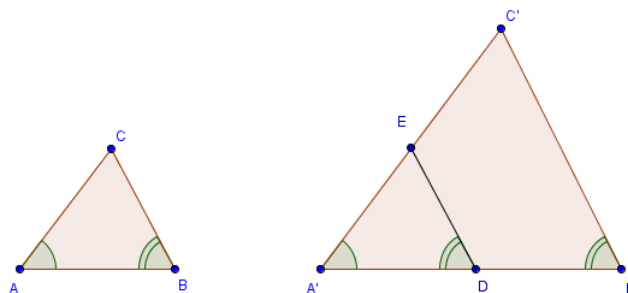


Figura 1.30: Caso de semelhança AA.

*Demonstração.* Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$  e por hipótese  $\widehat{A} = \widehat{A}'$  e  $\widehat{B} = \widehat{B}'$ , tem-se que  $\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180^\circ - (\widehat{A}' + \widehat{B}') = \widehat{C}'$ .

Figura 1.31: Construção do triângulo  $A'DE$ .

Toma-se o ponto  $D$  sobre a semirreta  $\overrightarrow{A'B'}$  de modo que  $\overline{AB} \equiv \overline{A'D}$  e pelo ponto  $D$  traça-se uma paralela a  $\overline{B'C'}$  que corta  $\overrightarrow{A'C'}$  em  $E$ . A figura 1.31 exibe a situação em que o ponto  $D$  pertence ao segmento  $\overline{A'B'}$ . Para o caso em que  $B'$  está entre  $A'$  e  $D$  a demonstração é análoga.

Tem-se então  $\widehat{A'DE} = \widehat{B'}$ , pois são ângulos correspondentes de retas paralelas,  $\widehat{A} = \widehat{A}'$  e  $\overline{AB} \equiv \overline{A'D}$  por construção, assim os triângulos  $ABC$  e  $A'DE$  são congruentes pelo caso de congruência  $ALA$ .

Segue da proposição 1.7 que:

$$\frac{A'D}{A'B'} = \frac{A'E}{A'C'} \implies \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Com um raciocínio análogo tem-se que  $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ , concluindo a demonstração.

□

O critério de semelhança de dois triângulos da próxima proposição é conhecido como caso *LAL* de semelhança de triângulos.

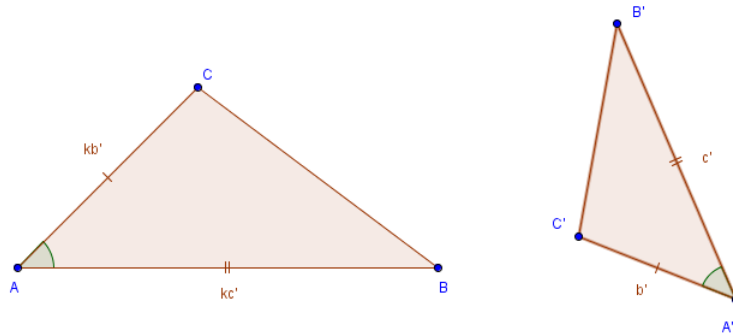


Figura 1.32: Caso de semelhança *LAL*.

**Proposição 1.16.** *Se, em dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  tem-se  $\hat{A} = \hat{A}'$  e  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = k$ , então os triângulos são semelhantes.*

*Demonstração.* Constrói-se o triângulo  $DEF$  que tenha  $\overline{A'B'} \equiv \overline{DE}$ ,  $\hat{A} = \hat{D}$  e  $\hat{B} = \hat{E}$ , conforme figura 1.33. Como os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  tem dois ângulos iguais, eles são semelhantes de acordo com a proposição 1.15 (caso de semelhança de triângulos AA).

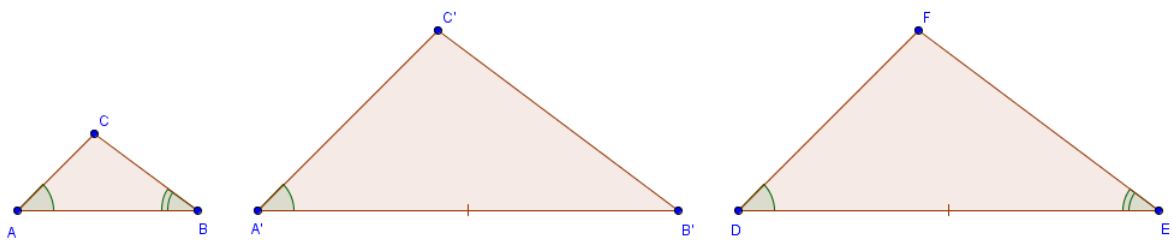


Figura 1.33: Construção do triângulo  $DEF$  para o caso *LAL* de semelhança de triângulos.

Assim:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

Como  $\overline{A'B'} \equiv \overline{DE}$  tem-se que:

$$\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Implicando em  $\overline{DF} \equiv \overline{A'C'}$

Como por construção tem-se que  $\overline{A'B'} \equiv \overline{DE}$ ,  $\widehat{D} = \widehat{A} = \widehat{A'}$  e  $\overline{DF} \equiv \overline{A'C'}$ , conclui-se pelo caso de congruência *LAL* que  $\triangle A'B'C' \equiv \triangle DEF$ . E como  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ , finaliza-se dizendo que  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .  $\square$

O terceiro e último é conhecido como caso *LLL* de semelhança de triângulos.

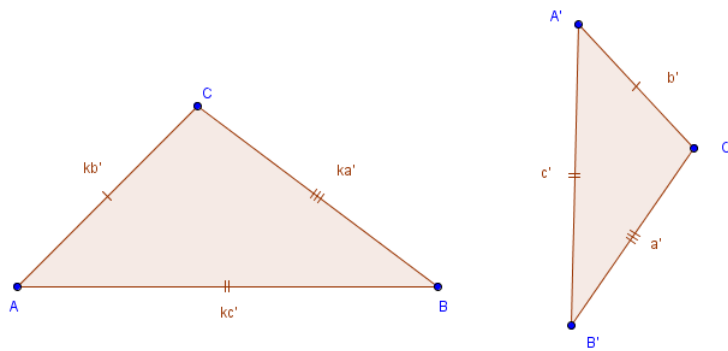


Figura 1.34: Caso de semelhança *LLL*.

**Proposição 1.17.** *Se, em dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  tem-se:*

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

*então os dois triângulos são semelhantes.*

*Demonstração.* Constrói-se um triângulo  $DEF$  que tenha  $\widehat{A} = \widehat{D}$ ,  $\overline{DE} \equiv \overline{A'B'}$  e  $\overline{DF} \equiv \overline{A'C'}$ , conforme figura 1.35.

Segue que:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \implies \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

Portanto, de acordo com o proposição 1.16 (caso de semelhança de triângulos *LAL*) os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são semelhantes. Então, também ocorre que:  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ .

Desse fato e da hipótese tem-se:

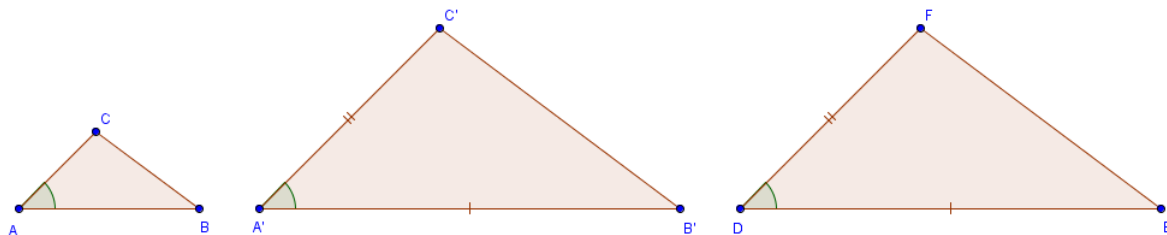


Figura 1.35: Construção do triângulo  $DEF$  para o caso  $LLL$  de semelhança de triângulos.

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

O que implica  $\overline{EF} \equiv \overline{B'C'}$ . E como já se tinha por construção que  $\overline{DE} \equiv \overline{A'B'}$  e  $\overline{DF} \equiv \overline{A'C'}$  então, pelo caso de congruência de triângulos  $LLL$  tem-se  $\triangle A'B'C' \equiv \triangle DEF$ . Como os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são semelhantes, conclui-se que  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

□

A proposição 1.18 a seguir, chamada de *relações métricas em triângulos retângulos* será utilizada nos próximos capítulos, por ser de grande importância para demonstrações de teoremas e também em sugestões de atividades.

**Proposição 1.18.** *Seja  $ABC$  um triângulo retângulo em  $A$ , com catetos  $AB = c$ ,  $AC = b$ , e hipotenusa  $BC = a$ . Sendo  $H$  o pé da altura relativa à hipotenusa,  $CH = x$ ,  $BH = y$  e  $AH = h$ , tem-se:*

- i)  $ah = bc$ .
- ii)  $ax = b^2$  e  $ay = c^2$ .
- iii)  $a^2 = b^2 + c^2$ .
- iv)  $xy = h^2$ .

*Demonstração.* i) e ii). Como  $\widehat{AHB} = \widehat{CAB} = 90^\circ$ ,  $\widehat{ABH} = \widehat{CBA}$ , os triângulos  $BAH$  e  $BCA$  são semelhantes pelo caso  $AA$ , com a correspondência de vértices  $A \leftrightarrow C$ ,  $H \leftrightarrow A$

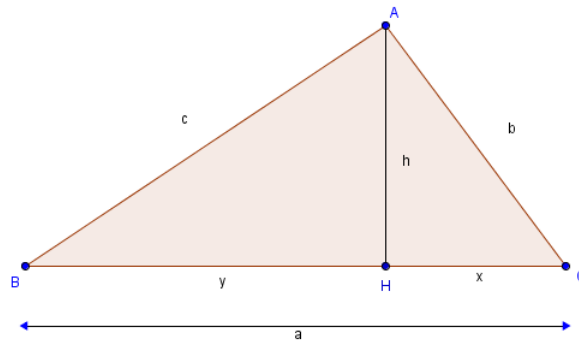


Figura 1.36: Relações métricas em um triângulo retângulo.

e  $B \leftrightarrow B$ . Assim:

$$\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC} \text{ e } \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC},$$

ou, ainda,

$$\frac{y}{c} = \frac{c}{a} \text{ e } \frac{h}{b} = \frac{c}{a}.$$

Chegando em  $ay = c^2$  e  $ah = bc$ . A relação  $ax = b^2$  é provada de forma análoga.

iii). Somando membro a membro as duas equações do item ii), obtém-se a igualdade  $a(x + y) = b^2 + c^2$ . Mas, como  $x + y = a$ , tem-se que:

$$a(x + y) = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a \cdot a = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Vale ressaltar que o item iii) acima demonstrado, é o conteúdo do famoso *teorema de Pitágoras*.

iv). Multiplicando membro a membro as duas relações do item ii), obtém-se:

$$a^2 \cdot xy = (ax) \cdot (ay) = (bc)^2 \Leftrightarrow xy = \left(\frac{bc}{a}\right)^2 = h^2$$

Sendo que na última igualdade foi utilizada a seguinte relação:

$$ah = bc \Leftrightarrow h = \left(\frac{bc}{a}\right) \Leftrightarrow h^2 = \left(\frac{bc}{a}\right)^2.$$

□



## Capítulo 2

# Polígonos Equidecomponíveis

As expressões que calculam áreas de figuras planas, como por exemplo a área de paralelogramos ( $Base \times Altura$ ), área de losangos ( $(Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor)/2$ ) são obtidas, em geral, com processo de decomposição em figuras menores que possuem áreas conhecidas. Assim, essa teoria se torna interessante para o ensino de geometria, pois pode-se calcular áreas de figuras complexas, com divisão em figuras mais simples, e também apresentar atividades lúdicas para analisar áreas de figuras planas utilizando manipulação dos recortes das mesmas.

Nesse capítulo apresenta-se a teoria que envolve a decomposição de polígonos, demonstrando os principais fatos que garantem que um polígono pode ser decomposto e depois recomposto formando outra figura de mesma área.

Mostra-se que um polígono pode ser decomposto e reorganizado produzindo um quadrado de lado unitário e também demonstra-se o Teorema de Bolyai-Gerwien. Esse teorema afirma que dois polígonos que possuem a mesma área são equidecomponíveis, ou seja, pode-se cortar o primeiro polígono em finitas peças poligonais e rearranjá-las para formar o outro polígono.

**Definição 2.1.** Um polígono é decomposto quando acontecem várias subdivisões (recortes) do polígono original em polígonos menores.

A figura 2.1 exhibe um polígono  $ABCDEF$  decomposto em polígonos menores

$K_1, K_2, K_3, \dots, K_{10}$ .

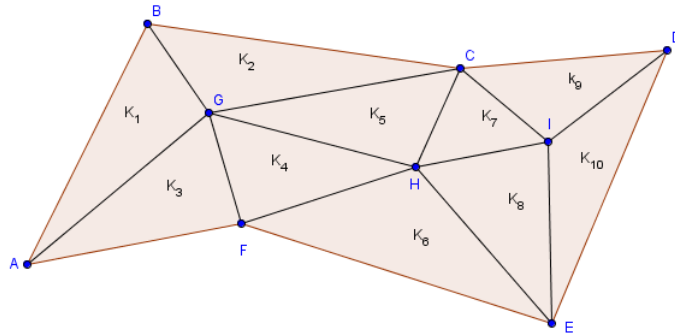


Figura 2.1: Polígono  $ABCDEF$  decomposto em vários polígonos menores.

**Definição 2.2.** Dois polígonos  $P$  e  $P'$  são equidecomponíveis quando existem decomposições:

$$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \dots \cup P_n \text{ e } P' = P'_1 \cup P'_2 \cup P'_3 \cup \dots \cup P'_n$$

de tal modo que, cada polígono  $P_i$  é congruente ao polígono  $P'_i$ , com  $1 \leq i \leq n$ . Além disso exige-se que os polígonos  $P_i$  tenham seus interiores dois a dois disjuntos, o mesmo ocorrendo com os  $P'_i$ .

A figura 2.2 mostra um exemplo de polígonos equidecomponíveis: uma cruz grega formada por 5 quadrados iguais dispostos em forma de “+” transformada em um quadrado.

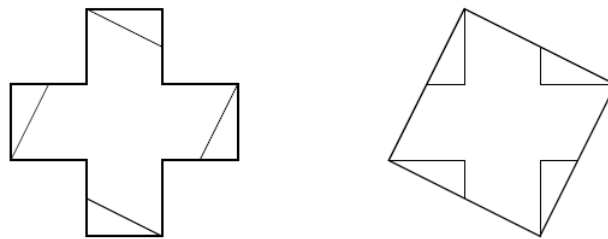


Figura 2.2: Polígonos Equidecomponíveis.

Outra forma de definição seria dizer que dois polígonos são equidecompostos se é possível decompor um dos polígonos em um número finito de partes, e por meio de rearranjos dessas partes compor o outro polígono (BOLTIANSKI, 1996).

Pode-se fazer duas considerações acerca da definição de Boltianski, menos formal: a primeira é o fato de se decompor um polígono em um número finito de partes, ou seja, dividi-lo em polígonos menores, realizando esse processo de divisões sem necessitar de cálculos complexos. E a segunda consideração é que esses rearranjos são entendidos como a formação do segundo polígono apenas com as peças do primeiro polígono com rotações, translações e reflexões.

Tem-se ainda a definição de grande valor feita por Hilbert em Fundamentos de Geometria(2003): “dois polígonos dizem-se equidecomponíveis se puderem decompor num número finito de triângulos congruentes entre si dois a dois.”(p.68)

Uma propriedade importante que é apresentada agora é que a equidecomposição de polígonos é uma relação de equivalência.

**Proposição 2.3.** *Sejam  $P$ ,  $P'$  e  $M$  polígonos quaisquer equidecompostos, então as seguintes relações são satisfeitas:*

- i) *Reflexiva:  $P$  é equidecomposto a  $P$ ;*
- ii) *Simétrica: Se  $P$  é equidecomposto a  $P'$ , então  $P'$  é equidecomposto a  $P$ ;*
- iii) *Transitiva: Se  $P$  é equidecomposto a  $M$  e  $M$  é equidecomposto a  $P'$ , então  $P$  é equidecomposto a  $P'$ .*

*Demonstração.*

- i) Suponha que o polígono  $P$  é decomposto nos polígonos  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ . É trivial que todo  $P_i$  é congruente a ele mesmo para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Assim  $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \dots \cup P_n = P$ .
- ii) Como  $P$  é equidecomposto a  $P'$  então por definição,  $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \dots \cup P_n$  e  $P' = P'_1 \cup P'_2 \cup P'_3 \cup \dots \cup P'_n$ , tal que  $P_i$  congruente a  $P'_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Assim, tem-se também que  $P'_i$  congruente a  $P_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , que nos leva a  $P'$  equidecomposto a  $P$ . O que mostra a simetria da equidecomposição de polígonos.

iii) Seja  $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \dots \cup P_n$  uma decomposição de  $P$  em polígonos menores os quais reagrupados formam  $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \dots \cup M_n$  para cada  $P_i$  congruente a  $M_i$ , com  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Por hipótese  $M$  é equidecomposto a  $P'$ . Tem-se duas possibilidades. A primeira é: se  $P'$  admite a decomposição  $P' = P'_1 \cup P'_2 \cup P'_3 \dots \cup P'_n$  de tal modo que  $M_i$  é congruente a  $P'_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , então, devido a  $P_i$  ser congruente a  $M_i$ , pela transitividade da congruência de polígonos, tem-se  $P_i$  congruente a  $P'_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$  e, assim,  $P$  é equidecomposto a  $P'$ , o que encerra a demonstração. A segunda possibilidade é para o caso em que  $P'$  não admite a decomposição descrita acima. Neste caso, necessita-se de um refinamento na decomposição de  $M$ , ou seja, os polígonos  $M_i$  são decompostos em polígonos ainda menores, de modo que se tem  $M_i = M'_{i1} \cup M'_{i2} \cup \dots \cup M'_{im_i}$  ( $m_i$  indica a quantidade de polígonos em que  $M_i$  foi decomposto) e, assim,  $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n = (M_{11} \cup M_{12} \cup \dots \cup M_{1m_1}) \cup (M_{21} \cup M_{22} \cup \dots \cup M_{2m_2}) \cup \dots \cup (M'_{n1} \cup M'_{n2} \cup \dots \cup M'_{nm_n})$ . Da hipótese de  $M$  ser equidecomposto a  $P'$  acarreta que  $P'$  admite a decomposição  $P' = (P'_{11} \cup P'_{12} \cup \dots \cup P'_{1n}) \cup (P'_{21} \cup P'_{22} \cup \dots \cup P'_{2n}) \cup \dots \cup (P'_{n1} \cup P'_{n2} \cup \dots \cup P'_{nm_n})$  tal que o polígono  $M_{ij}$  é congruente ao polígono  $P'_{ij}$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  e  $j = 1, 2, 3, \dots, m_i$ . Agora, em decorrência da hipótese,  $M_i$  é congruente a  $P_i$ ; e devido a isso,  $P_i$  pode ser decomposto em  $m_i$  polígonos  $P_i = P_{i1} \cup P_{i2} \cup P_{i3} \cup \dots \cup P_{im_i}$  com o polígono  $P_{ij}$  congruente ao polígono  $M_{ij}$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  e  $j = 1, 2, 3, \dots, m_i$ . Como o polígono  $M_{ij}$  também é congruente ao polígono  $P'_{ij}$ , por transitividade de congruência de polígonos, tem-se que  $P_{ij}$  é congruente a  $P'_{ij}$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  e  $j = 1, 2, 3, \dots, m_i$ . Logo, conclui-se que  $P$  é equidecomposto a  $P'$ , finalizando a demonstração.

□

A seguir demonstra-se alguns teoremas que serão de grande utilidade quando se realizar atividades de decompor figuras e recompor em outras. Percebe-se que se dois polígonos são equidecomponíveis então eles possuem a mesma área, essa será a proposição seguinte.

**Proposição 2.4.** *Dois polígonos equidecomponíveis possuem a mesma área.*

*Demonstração.* Sejam  $P$  e  $P'$  polígonos equidecomponíveis, então por definição existem decomposições  $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \dots \cup P_n$  e  $P' = P'_1 \cup P'_2 \cup P'_3 \cup \dots \cup P'_n$ , sendo  $P_i$  congruente a  $P'_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Como figuras congruentes possuem a mesma área e convencionando  $A(P)$  e  $A(P')$  as áreas de  $P$  e  $P'$  respectivamente, tem-se que  $A(P) = A(P_1) + \dots + A(P_n) = A(P'_1) + \dots + A(P'_n) = A(P')$ . Portanto a área do polígono  $P$  é igual a área do polígono  $P'$ .  $\square$

Uma pergunta que surge é: a recíproca dessa proposição é verdadeira? Ou seja, dois polígonos de mesma área são equidecomponíveis? A resposta a essa pergunta é sim, sendo também o Teorema de Bolyai-Gerwien. Ele foi demonstrado em 1832 por F. Bolyai e independentemente, por P. Gerwien. Farkas Bolyai foi o pai do famoso matemático húngaro Janos Bolyai, descobridor da geometria hiperbólica (que também teve contribuição de Lobatchevski e Gauss). Gerwien foi um matemático amador alemão.

Na sequência são apresentados algumas proposições que são úteis na demonstração de tal teorema.

**Proposição 2.5.** *Todo triângulo é equidecomponível a um retângulo.*

*Demonstração.* A prova será dividida em três casos:

- i) Quando o triângulo é acutângulo;
- ii) Quando o triângulo é retângulo;
- iii) Quando o triângulo é obtusângulo.

O item i) é o primeiro a ser demonstrado:

A figura 2.3 representa a decomposição de um triângulo acutângulo  $ABC$  em um retângulo  $GJLK$ :

No triângulo  $ABC$  marcam-se  $D$  e  $E$ , pontos médios respectivos aos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  formando o segmento  $\overline{DE}$ . Demarca-se o ponto  $F$ , de modo que o segmento  $\overline{AF}$  seja perpendicular a  $\overline{DE}$ . Atribui-se (1) ao  $\triangle ADF$ , (2) ao  $\triangle AEF$  e (3) ao trapézio  $BCED$ ,

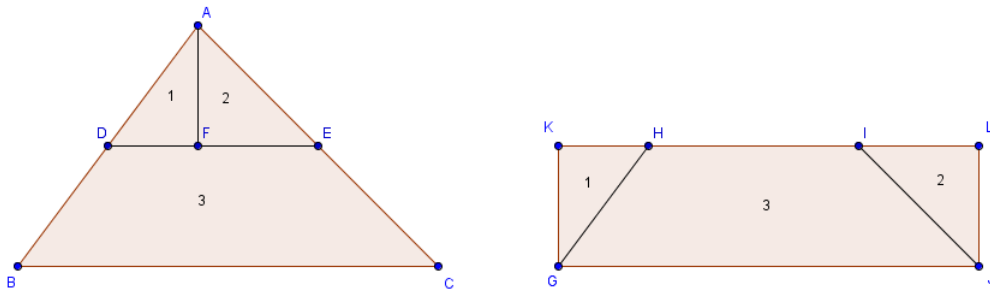


Figura 2.3: Triângulo  $ABC$  equidecomposto em retângulo  $GJLK$ .

assim, usando o trapézio (3), e os triângulos (1) e (2) construímos o retângulo  $GJLK$  com a mesma área do triângulo.

Para melhor visualização, a figura 2.4 traz o retângulo sobreposto ao triângulo.

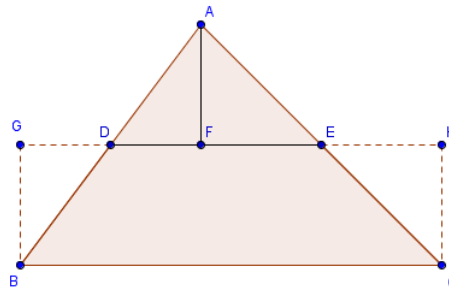


Figura 2.4: Retângulo sobreposto ao triângulo.

Como  $\overline{AD} = \overline{BD}$ , pois  $D$  é ponto médio de  $\overline{AB}$ , e ainda  $\widehat{ADF} = \widehat{GDB}$ , por serem opostos pelo vértice, e também  $\widehat{BGD} = \widehat{AFD} = 90^\circ$ , pelo caso de congruência  $LAA_o$ ,  $\triangle ADF \equiv \triangle BDG$ .

Com um raciocínio análogo podemos concluir-se que  $\triangle AEF \equiv \triangle CEH$ .

Dessa forma as peças do triângulo  $ABC$  se encaixam no retângulo construído. Logo, o triângulo acutângulo  $ABC$  pode ser decomposto em um retângulo de mesma área.

Agora demonstrar-se-á ii), ou seja, a decomposição de um triângulo  $ABC$  reto em  $\widehat{B}$  em um retângulo de mesma área, conforme figura 2.5.

Marca-se o ponto médio  $D$  de  $\overline{AB}$  e  $E$  ponto médio de  $\overline{AC}$  e indica-se o trapézio

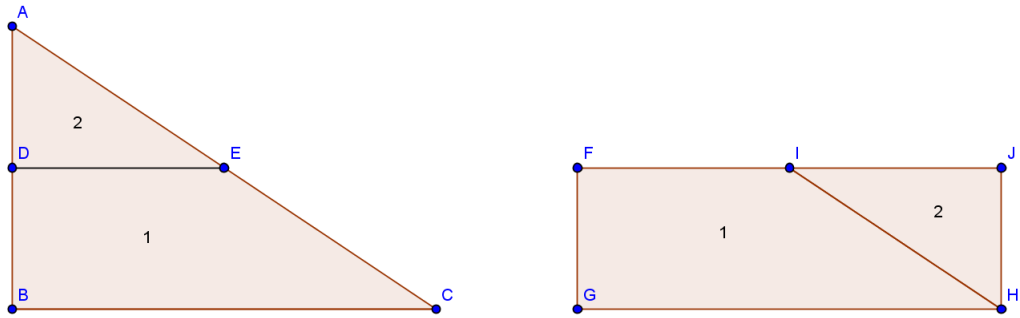


Figura 2.5: Triângulo retângulo  $ABC$  decomposto em retângulo  $FGHI$ .

$BCED$  e o triângulo  $ADE$  por (1) e (2) respectivamente. Então o trapézio(1) e o triângulo(2) são recompostos para formar o retângulo  $FGHI$ .

Para melhor compreensão considere a sobreposição do retângulo no triângulo  $ABC$ , exibida na figura 2.6.

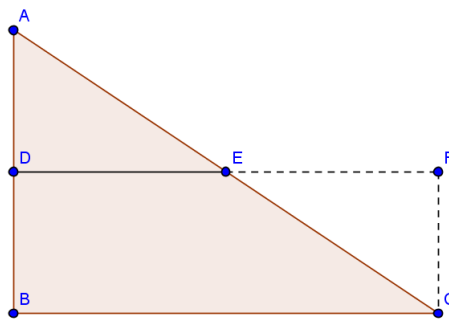


Figura 2.6: Sobreposição do retângulo no triângulo  $ABC$ .

O segmento  $\overline{AE}$  é congruente ao segmento  $\overline{CE}$ , pois  $E$  é ponto médio de  $\overline{AC}$ , tem-se ainda que  $\widehat{AED} = \widehat{CEF}$ , ângulos opostos pelo vértice, e  $\widehat{ADE} = \widehat{CFE} = 90^\circ$ , dessa forma, pelo caso de congruência  $LAA_o$ , os triângulos  $ADE$  e  $CEF$  são congruentes. Assim, o triângulo  $ABC$  e o retângulo  $BCFD$  são equidecomponíveis, de modo que se conclui que o triângulo retângulo  $ABC$  é decomposto em um retângulo de mesma área.

Agora finalizando a demonstração, o item iii):

Também pode-se decompor um triângulo obtusângulo em um retângulo de mesma área, conforme figura 2.7.

A demonstração será feita em duas partes: primeiro mostrando a congruência do

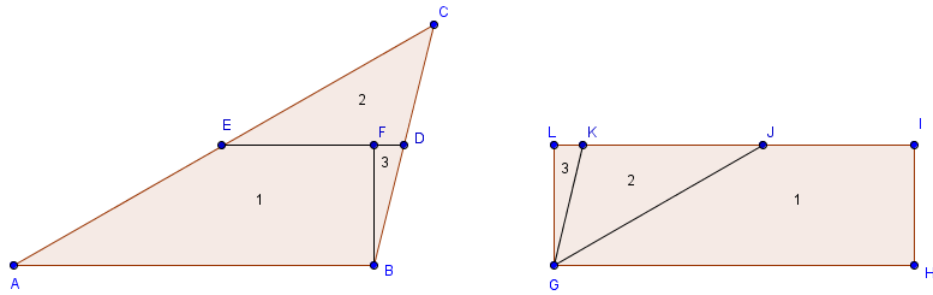


Figura 2.7: Decomposição do triângulo  $ABC$  no retângulo  $GHIL$ .

triângulo  $CDE$  com o triângulo  $GJK$  e depois a congruência do triângulo  $BDF$  com o triângulo  $GKL$ .

Sejam  $D$  e  $E$  os respectivos pontos médios dos lados  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$  do triângulo obtusângulo  $ABC$ . Seja ainda  $F$  um ponto tal que  $E$  está entre  $F$  e  $D$  de modo que  $\overline{EF}$  é congruente a  $\overline{ED}$ , como exibido na figura 2.8. Assim,  $\widehat{AEF} = \widehat{CED}$  por serem opostos pelo vértice, e ainda  $\overline{AE} \equiv \overline{CE}$ , pois  $E$  é ponto médio de  $\overline{AC}$ , então pelo caso de congruência lado - ângulo - lado (LAL),  $\triangle AEF \equiv \triangle CDE$ .

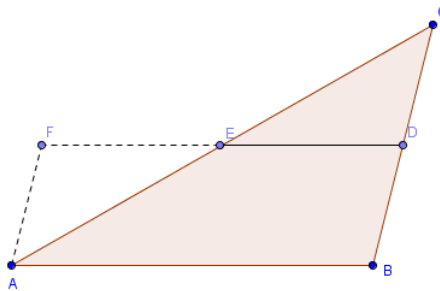


Figura 2.8: Sobreposição do paralelogramo  $ABDF$  no triângulo  $ABC$ .

Sejam  $G$  e  $H$  os pés das perpendiculares baixadas, respectivamente, dos pontos  $B$  e  $A$  à reta que passa por  $D$  e  $E$ , como exibido na Figura 2.9. Assim  $\widehat{AHF} = \widehat{BGD} = 90^\circ$ .

Como  $\overline{BD} \equiv \overline{CD}$ , pois o ponto  $D$  é médio do segmento  $\overline{BC}$  e  $\overline{AF} \equiv \overline{CD}$ , pois



$\triangle AEF \equiv \triangle CED$ , tem-se que  $\overline{AF} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{BD}$ . E tem-se ainda:

$$G\hat{D}B = 180^\circ - C\hat{D}E = 180^\circ - A\hat{F}E = H\hat{F}A$$

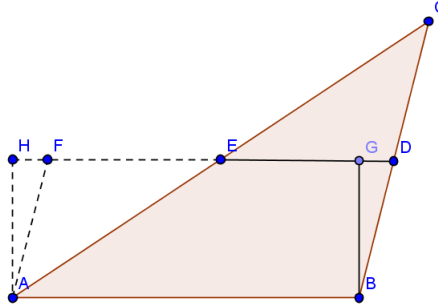


Figura 2.9: Reconstrução do triângulo ABC em um retângulo.

Então pelo caso de congruência  $LAA_o$  (Lado-Ângulo-Ângulo Oposto), o triângulo  $AHF$  é congruente ao triângulo  $BDG$ . Conclui-se então, que o triângulo  $ABC$  é equidecomponível com o retângulo  $ABGH$  de mesma área.

□

**Proposição 2.6.** *Todo retângulo pode ser decomposto em um quadrado de mesma área.*

*Demonstração.* Será feita uma construção para provar que sempre existe um quadrado de mesma área de um retângulo. Para isto utiliza-se régua e compasso: seja o retângulo  $ABCD$  de altura  $a$  e base  $b$ , cria-se um segmento formado pela altura e a base desse retângulo alinhados, ou seja, o segmento  $\overline{EG}$  e nele marca-se o ponto  $F$  de tal modo que  $EF = b$  e  $FG = a$ , assim  $EG = a + b$  conforme figura 2.10.

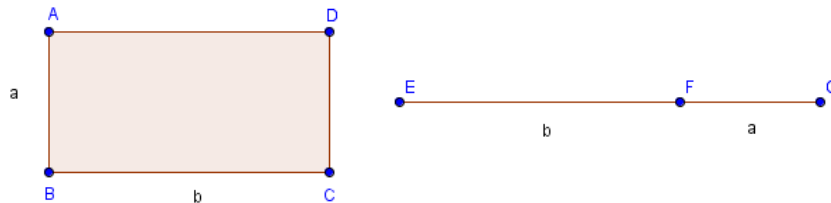


Figura 2.10: Retângulo  $ABCD$  e segmento  $\overline{EG}$  formado pela altura e base do retângulo alinhados.

Desenha-se um círculo com centro em  $H$ , ponto médio de  $\overline{EG}$  que também é diâmetro desse círculo, e traça-se por  $F$  um segmento  $\overline{FI}$  perpendicular a  $\overline{EG}$ , sendo  $I$  um ponto sobre a circunferência, conforme figura 2.11. Utilizando relações métricas no triângulo retângulo, tem-se  $FI = \sqrt{ab}$ , que é a medida do lado do quadrado desejado.

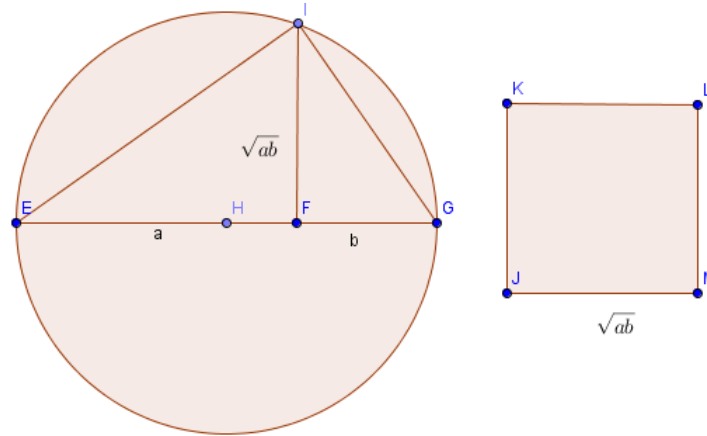


Figura 2.11: Construção da medida do lado do quadrado  $JKLM$ .

Essa construção mostra que sempre existe um quadrado que possui a mesma área de um dado retângulo, assim, resta fazer a decomposição do retângulo nesse quadrado.

Para que exista a construção da transformação desse retângulo em um quadrado de mesma área, e possa ser feita da forma sugerida adiante, tem-se que verificar se algum dos lados do retângulo é maior que duas vezes o lado do quadrado, ou seja, maior que duas vezes a média geométrica dos lados desse retângulo, não podendo ocorrer  $b > 2\sqrt{ab}$  ou  $a > 2\sqrt{ab}$ .

Supõe-se que aconteça  $b > 2\sqrt{ab}$ , então divide-se esse retângulo em dois retângulos congruentes de lados  $a$  e  $\frac{b}{2}$  e agrega-se essas figuras formando um novo retângulo de lados  $2a$  e  $\frac{b}{2}$ , conforme figura 2.12.

Assim, a média geométrica no retângulo  $ABCD$  é  $\sqrt{ab}$ , sendo a mesma média geométrica do retângulo  $FGJI$  que é  $\sqrt{2.a.\frac{b}{2}} = \sqrt{ab}$ .

Se ainda algum dos lados do retângulo continuar o dobro da média geométrica, então continuam-se as divisões, repetindo o processo quantas vezes for necessário, pois

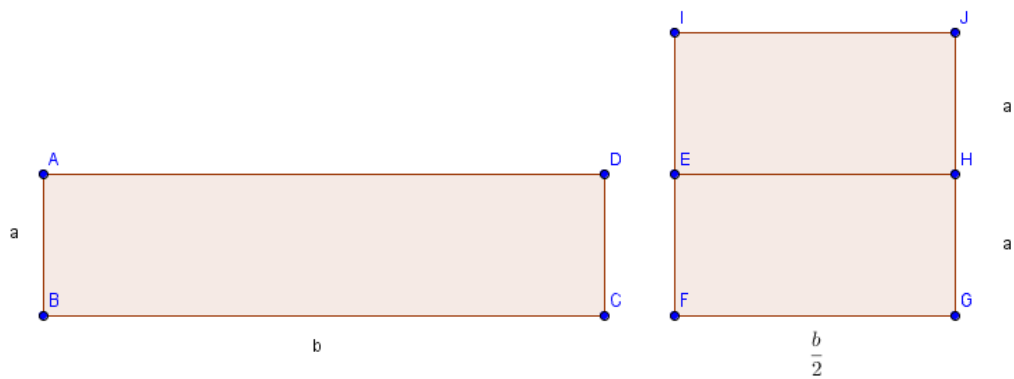


Figura 2.12: Retângulo  $ABCD$  de lados  $a$  e  $b$  e retângulos sobrepostos de lados  $a$  e  $\frac{b}{2}$ .

a média geométrica permanece inalterada, obtendo então um retângulo que possui lados menores que o dobro do lado de um quadrado de mesma área.

Na próxima construção, será feita efetivamente a transformação de um retângulo em um quadrado de mesma área.

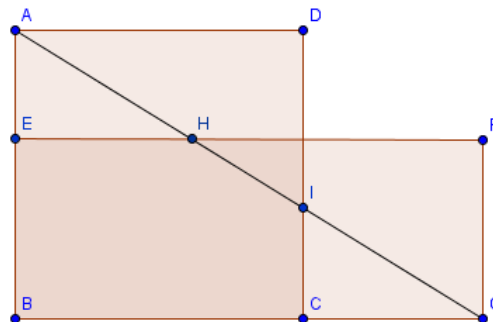


Figura 2.13: Quadrado  $ABCD$  sobreposto ao retângulo  $BEFG$ .

Primeiro sobrepõe-se o quadrado  $ABCD$  no retângulo  $BEFG$ , conforme figura 2.13, em seguida desenha-se  $\overline{AG}$  e como admite-se que a base do retângulo é menor que o dobro da base do quadrado, então  $\overline{AG}$  intersecta o lado do quadrado no ponto  $I$ , interior do retângulo.

Tem-se o retângulo  $BEFG$  com  $EB = a$  e  $EF = b$ , e o quadrado  $ABCD$  com lado  $l = \sqrt{ab}$ . O segmento traçado  $\overline{AG}$  intersecta  $\overline{EF}$  no ponto  $H$  e  $\overline{CD}$  no ponto  $I$ . Como  $\overline{CI}$  é paralelo a  $\overline{AB}$ , são semelhantes os triângulos  $\triangle ABG$  e  $\triangle ICG$ .

Assim:

$$\frac{AB}{CI} = \frac{BG}{CG} \implies \frac{l}{CI} = \frac{b}{b-l}$$

Portanto:

$$CI = \frac{l(b-l)}{b} = \frac{b.l - l^2}{b} = \frac{b.l - a.b}{b} = \frac{b(l-a)}{b} = l - a.$$

Concluindo que  $DI = a = FG$ .

Da mesma forma, como  $\overline{EH}$  e  $\overline{BG}$  são paralelos, então  $\triangle AEH$  e  $\triangle ABG$  são semelhantes, e:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EH}{BG} \implies \frac{l-a}{l} = \frac{EH}{b}$$

Portanto:

$$EH = \frac{b(l-a)}{l} = \frac{b.l - a.b}{l} = \frac{b.l - l^2}{l} = \frac{l(b-l)}{l} = b - l$$

Assim,  $FH = l = AD$ .

Como  $\widehat{ADI} = 90^\circ = \widehat{EFG}$ , pelo caso de congruência de triângulos LAL, conclui-se que  $\triangle ADI \equiv \triangle HFG$ .

Como  $FH = l = AD$  e  $AD = l = BC$  (lados do quadrado  $ABCD$ ) então  $FH = BC$ , assim  $EH = EF - FH = b - l = BG - BC = CG$  e ainda como  $DI = a = FG$  e  $FG = a = EB$  (lados do retângulo  $BEFG$ ), então  $AE = AB - EB = l - a = CD - DI = CI$ .

Do fato de  $\widehat{AEH} = 90^\circ = \widehat{ICG}$ ,  $\overline{EH} \equiv \overline{CG}$  e  $\overline{AE} \equiv \overline{CI}$ , então pelo caso de congruência LAL,  $\triangle CGI \equiv \triangle EHA$ .

Efetuada translação do  $\triangle HFG$ , fazendo coincidir com o  $\triangle ADI$ , e também, a translação do  $\triangle CGI$  combinando com  $\triangle EHA$ , constrói-se o quadrado de lado  $l$  desejado, com a mesma área do retângulo inicial.  $\square$

**Proposição 2.7.** *Dois quadrados dados são equidecomponíveis a um quadrado cuja área é igual a soma das áreas dos outros dois.*

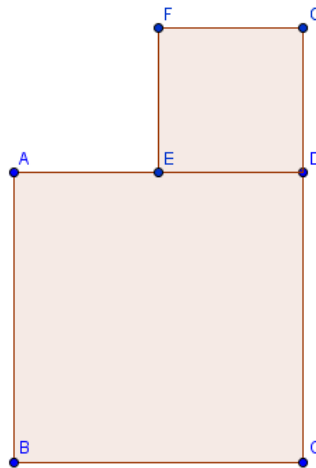


Figura 2.14: Quadrado  $DEFG$  colocado acima do quadrado  $ABCD$ .

*Demonstração.* Os quadrados são dispostos conforme a figura 2.14 seguinte:

Desenha-se o segmento  $\overline{AG}$  e as retas  $r$  e  $s$  perpendiculares a  $\overline{AG}$  passando, respectivamente, pelos pontos  $A$  e  $G$ . Seja  $H$  o ponto de interseção entre a reta  $r$  e  $\overline{BC}$ , tem-se  $\overline{AH}$ . Desenha-se ainda  $\overline{HI}$  perpendicular a  $\overline{AH}$ , de forma que o ponto  $I$  pertença à reta  $s$  perpendicular a  $\overline{AG}$ . Desenha-se ainda  $\overline{IJ}$  perpendicular a  $\overline{CG}$ , sendo  $J$  ponto do segmento  $\overline{CG}$ .

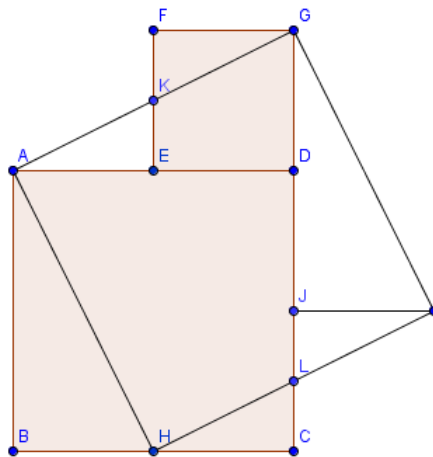


Figura 2.15: Transformação dos quadrados  $ABCD$  e  $DEFG$  no quadrado  $AGIH$ .

Tem-se que  $\widehat{DAH} = \alpha$  e  $\widehat{DAB} = 90^\circ = \widehat{GAH}$ , então:

$$\widehat{BAH} = 90^\circ - \widehat{DAH} = 90^\circ - \alpha = \widehat{DAG}$$

Além disso, os catetos  $\overline{AB}$  e  $\overline{AD}$  dos triângulos  $ABH$  e  $ADG$ , respectivamente, são congruentes, pois são lados do quadrado  $ABCD$ , os ângulos  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{ADG}$  são retos então, pelo caso de congruência de triângulos  $ALA$ ,  $\triangle ABH \equiv \triangle ADG$ . Assim,  $\overline{BH} \equiv \overline{DG}$ .

Como o triângulo  $ABH$  é retângulo em  $\widehat{B}$ , pelo Teorema de Pitágoras  $AH^2 = AB^2 + BH^2$ . Como  $BH = DG$ , tem-se  $AH^2 = AB^2 + DG^2$ .

Daí conclui-se que a área do quadrado  $AGIH$  é igual a soma das áreas dos quadrados  $ABCD$  e  $DEFG$ .

□

Feita toda essa análise, construiu-se uma base teórica consistente para demonstrar o Teorema de Bolyai-Gerwien, citado no início do capítulo e que garante a recíproca da Proposição 2.4.

Farkas Bolyai (1775-1856), nasceu em Bolya, perto de Nagyenyed (Hungria) em 9 de Fevereiro de 1775. Até os 6 anos de idade, Farkas foi ensinado pelo pai, de certo modo um erudito, e depois entrou na famosa escola calvinista em Nagyenyed. A especialização em matemática de F. Bolyai foi determinada pelos anos em Gottingen. Começou, então, a tomar forma em seu pensamento um sistema matemático para mais tarde lidar com o 5º postulado de Euclides. Paul Gerwien foi um matemático amador alemão, que conseguiu provar esse mesmo teorema em 1833.

**Teorema 2.8.** *(Bolyai-Gerwien) Dois polígonos de mesma área são equidecomponíveis.*

*Demonstração.* Toma-se inicialmente um dos dois polígonos considerados, e utilizando o postulado  $p1$ , citado no capítulo 1, que todo polígono pode ser dividido em um número finito de triângulos, tem-se o polígono inicial dividido em vários triângulos menores. Utilizando a Proposição 2.5, transformam-se esses triângulos em vários retângulos de mesma área. Prosseguindo, vale-se do resultado da Proposição 2.6, que assegura a transformação desses retângulos em quadrados com a mesma área. Agora existem vários quadrados originados a partir da figura inicial, assim aplicando a Proposição 2.7 juntam-se esses

quadrados dois a dois os convertendo em um único quadrado que possui a mesma área do polígono original, já que as transformações foram feitas preservando áreas. Todas as transformações estão representadas na figura 2.16.

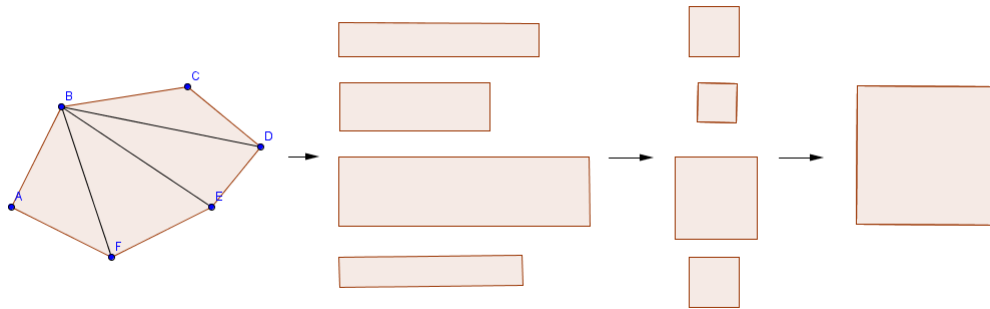


Figura 2.16: Transformação de um polígono em um quadrado.

Fazendo o mesmo procedimento com o segundo polígono obtem-se outro quadrado com a mesma área desse polígono. É claro que as peças dos quadrados que foram formados não são necessariamente congruentes. Para se obter a equidecomposição explícita de um polígono no outro, basta sobrepor os dois quadrados e fazer novos cortes de tal forma que todos os cortes no primeiro quadrado apareçam no segundo, e vice-versa. Assim, conclui-se que é sempre possível fazer a equidecomposição de polígonos que tem a mesma área.  $\square$

## Capítulo 3

# Propostas de Atividades Envolvendo a Decomposição de Polígonos

Neste capítulo serão apresentadas sugestões de atividades para se trabalhar no ensino fundamental (6º ao 9º ano) e ensino médio. As atividades envolvem decomposição de polígonos e teorias apresentadas nos capítulos anteriores. Em todas as atividades apresentadas serão expostas diferentes propostas de trabalho, seguidas das respectivas demonstrações e resoluções dos problemas, podendo ser trabalhadas como oficinas em forma de quebra-cabeças, exigindo conhecimentos dos conceitos de áreas de figuras planas, semelhanças e congruências de triângulos e também construções geométricas.

Resolução de problemas é ferramenta básica importante no processo de aprendizagem na matemática, a apropriação do conhecimento matemático ocorre resolvendo problemas. O aluno que se depara com situações desafiadoras pode aprender mais e melhor o conteúdo que está sendo trabalhado.

Pode-se utilizar a resolução de problemas em sala de aula para: introduzir conceitos matemáticos de difícil compreensão, dar significado a conceitos já aprendidos, fazer os alunos tomarem decisões com raciocínio para resolução dos mesmos, dentre outros, tornando o emprego da resolução de problemas uma metodologia de trabalho em matemática muito eficaz no processo de ensino-aprendizagem.



Utiliza-se o Currículo Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás para sugestão das séries em que todas as atividades devem ser aplicadas. Nessas séries são trabalhados conceitos de áreas de figuras planas, semelhanças e congruências de triângulos.

A primeira atividade é uma demonstração do Teorema de Pitágoras.

### 3.1 Atividade 1- Teorema de Pitágoras através da Decomposição de Áreas.

São várias as demonstrações do Teorema de Pitágoras. Dentre elas, pode-se destacar esta retirada de OLIVEIRA(2008), por decomposição de áreas, pois envolve a decomposição dos quadrados sobre os catetos em polígonos menores tal que rearranjados formem o quadrado maior.

Essa atividade pode ser trabalhada com alunos do 9º ano do ensino fundamental e também 2ª série do ensino médio pois, conforme o currículo referência da rede estadual de educação de Goiás, são nessas séries que se estudam conteúdos fundamentais de áreas de figuras planas e do Teorema de Pitágoras. Durante a realização da atividade o professor pode também fazer a revisão de conceitos matemáticos como congruência e semelhança de triângulos, tendo como objetivo principal demonstrar o Teorema de Pitágoras.

Resgatando o enunciado do Teorema de Pitágoras do livro Elementos EUCLIDES (2009): *“nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.”* (p.47)

Pode-se então reformular esse enunciado para: *a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo é igual a área do quadrado construído sobre a hipotenusa desse triângulo.*

Na figura 3.1 tem-se um triângulo retângulo com três quadrados construídos sobre seus lados, e o recorte do quadrado sobre um dos catetos, cujos recortes juntamente com o quadrado sobre o outro cateto serão encaixados no quadrado maior construído sobre a hipotenusa.

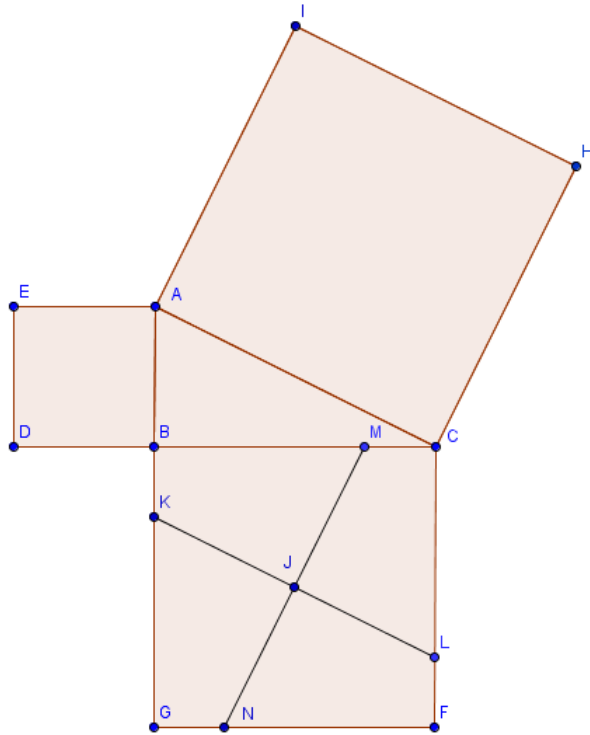


Figura 3.1: Ilustração utilizada na demonstração do Teorema de Pitágoras via decomposição de polígonos.

Uma possível solução para a atividade 1 proposta está ilustrada na figura 3.2. Nesta solução as peças precisaram somente ser transladadas, nenhuma foi rotacionada ou refletida.

Analisando o recorte das peças verifica-se a veracidade da solução. Considere o triângulo retângulo  $ABC$ , construa sobre os catetos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente, os quadrados  $ABDE$ ,  $BCFG$  e  $ACHI$ . Seja  $J$  o centro do quadrado  $BCFG$ , ou seja,  $J$  é a interseção das diagonais desse quadrado. Sejam  $M$ ,  $L$ ,  $N$  e  $K$  pontos sobre os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CF}$ ,  $\overline{FG}$  e  $\overline{GB}$  do quadrado  $BCFG$ , respectivamente, de modo que o segmento  $\overline{MN}$  seja paralelo aos lados  $\overline{CH}$  e  $\overline{AI}$  e  $\overline{KL}$  seja paralelo aos lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{IH}$  do quadrado  $ACHI$ . Assim os cortes  $\overline{KL}$  e  $\overline{MN}$  produzem as peças 1, 2, 3 e 4 no quadrado  $BCFG$ . A peça 5 é simplesmente o quadrado  $ABDE$ .

Como  $\overline{KL}$  e  $\overline{MN}$  são paralelos a  $\overline{AC}$  e  $\overline{CH}$  e estes são segmentos perpendiculares, então,  $\overline{KL}$  e  $\overline{MN}$  são perpendiculares também. Assim as peças 1, 2, 3 e 4 formam ângulos

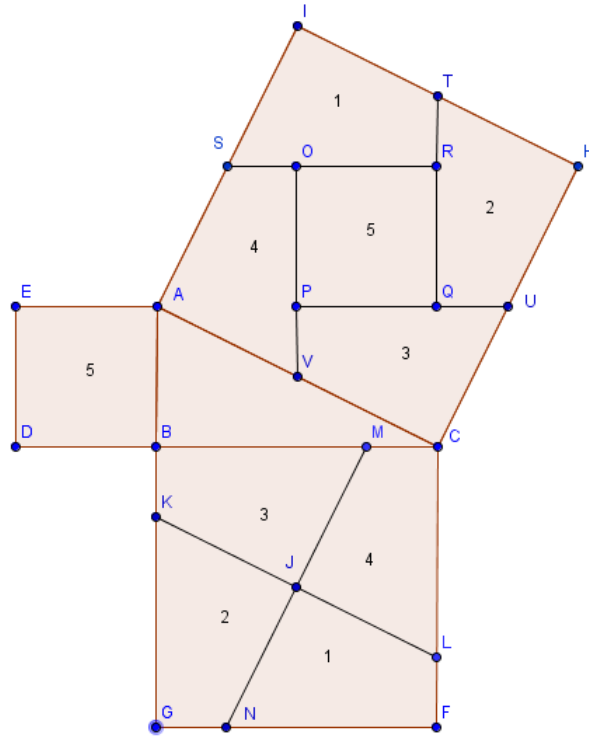


Figura 3.2: Sugestão de solução da atividade 1, com encaixe das peças 1,2,3,4 e 5 no quadrado ACHI.

retos no vértice  $J$ .

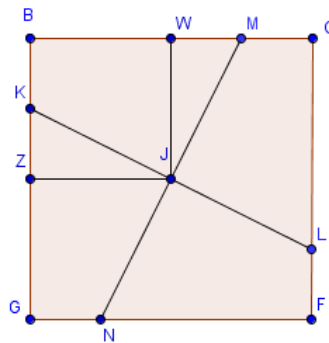


Figura 3.3: Ilustração utilizada na demonstração que  $J$  é ponto médio de  $\overline{KL}$  e de  $\overline{MN}$ .

Sejam os pontos  $W$  e  $Z$  tais que  $\overline{JW}$  e  $\overline{JZ}$  são perpendiculares respectivamente aos lados  $\overline{BC}$  e  $\overline{BG}$ , como exibido na figura 3.3. Assim  $BWJZ$  é um retângulo e  $K\hat{J}Z = 90^\circ - K\hat{J}W = M\hat{J}W$ , já que  $\overline{KL}$  e  $\overline{MN}$  são perpendiculares. Por  $\overline{JW}$  e  $\overline{JZ}$  serem perpendiculares aos lados do quadrado  $BCFG$  e por passarem pelo seu centro  $J$ , então  $\overline{JW} \equiv \overline{JZ}$  com medida igual a metade do lado desse quadrado. Assim, por ALA,

$\triangle KJZ \equiv \triangle MJW$  e dessa congruência observa-se que  $\overline{JM} \equiv \overline{JK}$ . Com raciocínio análogo, pode-se mostrar que  $\overline{JK} \equiv \overline{JM} \equiv \overline{JN} \equiv \overline{JL}$ .

Com o auxílio da figura 3.2 e pelos critérios de divisão do quadrado  $BCFG$ , percebe-se que o quadrilátero  $ACLK$ , possui os lados opostos paralelos caracterizando-se um paralelogramo, desta forma  $\overline{AC} \equiv \overline{KL}$ , inferindo que  $\overline{JK}$ ,  $\overline{JL}$ ,  $\overline{JM}$  e  $\overline{JN}$  possuem medidas iguais a metade do lado do quadrado  $ACHI$ . Desse fato, juntamente com as peças 1, 2, 3 e 4 possuírem ângulos retos no vértice  $J$ , implica que essas peças podem ser deslocadas de forma que se encaixem no quadrado  $ACHI$ , então fica demonstrado que as peças cobrem todo o quadrado  $ACHI$ , exceto pelo quadrilátero central, que possui todos os ângulos retos. Para finalizar será mostrado a seguir que esse quadrilátero é a peça 5, ou seja, o quadrado  $ABDE$ .

Observando o encaixe exibido na figura 3.2, percebe-se que  $OV = CL$  e  $PV = BK$ , assim  $OP = OV - PV = CL - BK = AB + BK - BK = AB$ . Da mesma forma, mostra-se que todos os lados do quadrilátero central são iguais aos lados do quadrado  $ABDE$ , isso demonstra que a peça 5 encaixa perfeitamente sobre o quadrado central rodeado pelas peças 1, 2, 3 e 4. Portanto essa configuração resolve o problema da demonstração do Teorema de Pitágoras, usando decomposição de polígonos.

## 3.2 Atividade 2 - Triângulo Equilátero Transformado em Quadrado.

Esta clássica equidecomposição foi descoberta por Henry Dudeney em 1902, inventor de quebra-cabeças, sendo uma forma simples de equidecomposição que é apresentada em seguida. Essa atividade pode ser realizada no 8º e/ou 9º anos do ensino fundamental e também 2ª e/ou 3ª séries do ensino médio pois, são nessas séries que o currículo referência da rede estadual de educação de Goiás, traz conteúdos de figuras planas e também estudo de construções geométricas. Nas séries do ensino fundamental o professor pode somente aplicar a construção das peças e montagem da atividade, já nas séries do ensino médio

o professor pode além de contruir as peças e montar o quebra-cabeça, explicar como e o porquê das peças se encaixam utilizando congruências e semelhanças de triângulos. O professor pode construir com os alunos os segmentos no triângulo que serão recortados ou simplesmente entregar uma ficha pronta com o triângulo e os segmentos para que os alunos recortem e montem o quebra-cabeça.

Considere um triângulo equilátero  $ABC$ , sendo  $b$  o lado desse triângulo e  $h$  sua altura,  $A_q$  e  $A_t$  indicam as áreas do quadrado e do triângulo equilátero, respectivamente, e  $l$  indica o lado do quadrado a ser gerado que é a média geométrica entre a metade do lado e altura desse triângulo, conforme segue:

$$A_q = A_t \iff l^2 = \frac{b \cdot h}{2} \iff l = \sqrt{\frac{b \cdot h}{2}}$$

Na próxima construção encontrar-se-á o segmento  $\overline{DG}$  que representa o lado desse quadrado procurado.

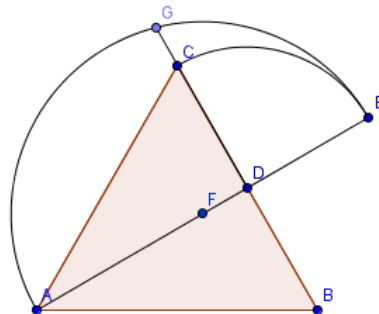


Figura 3.4: Construção do lado de um quadrado de mesma área de um triângulo equilátero  $ABC$ .

Considerando o triângulo equilátero  $ABC$ , conforme figura 3.4, seja  $D$  ponto médio de  $\overline{BC}$ . O ponto  $E$  é o encontro do arco de centro em  $D$  e raio  $\overline{CD}$  com a reta que passa por  $A$  e  $D$ , de modo que  $\overline{DE} \equiv \overline{CD}$ .  $F$  é ponto médio de  $\overline{AE}$  e o ponto  $G$  é o encontro da semirreta  $\overrightarrow{DC}$  com o arco de centro  $F$  e raio  $\overline{FE}$ , assim, utilizando as relações métricas no triângulo retângulo obtém-se  $\overline{DG}$  que é a média geométrica entre a metade do lado e a altura do triângulo  $ABC$ , portanto  $\overline{DG}$  é o lado do quadrado.

O triângulo  $ABC$  será recortado para poder montar o quadrado com a mesma área. Para isso constrói-se uma circunferência de centro  $D$  e raio  $\overline{DG}$ , cujo encontro com o lado  $\overline{AB}$  do triângulo  $ABC$  é o ponto  $H$ , conforme figura 3.5. O segmento formado  $\overline{DH}$  é o lado do quadrado.

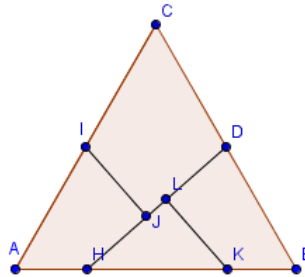


Figura 3.5: Recortes das peças do triângulo  $ABC$  para formar o quadrado de mesma área.

$I$  é o ponto médio do segmento  $\overline{AC}$ , traça-se  $\overline{IJ}$  de tal forma que  $J$  está em  $\overline{DH}$  e  $\overline{IJ}$  é perpendicular a  $\overline{DH}$ . Marca-se o ponto  $K$  de tal forma que  $\overline{HK} \equiv \overline{AI}$ , ou seja,  $\overline{HK}$  é igual a metade do lado do triângulo  $ABC$ . Considere o ponto  $L$  em  $\overline{DH}$  tal que  $\overline{KL}$  seja perpendicular a  $\overline{DH}$ , conforme figura 3.5.

Para se montar o quadrado numeram-se os recortes feitos no triângulo  $ABC$  conforme figura 3.6:

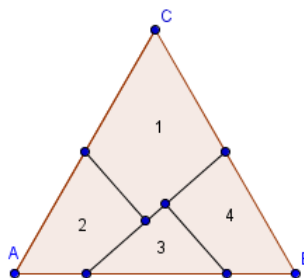


Figura 3.6: Numeração das peças de recorte do triângulo  $ABC$ .

Girando o triângulo  $ABC$   $180^\circ$  em torno do ponto  $C$ , tem-se a configuração da figura 3.7:

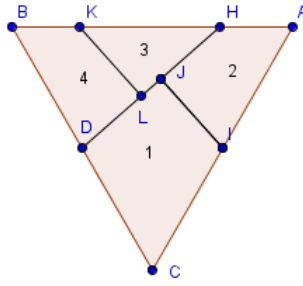


Figura 3.7: Rotação de  $180^\circ$  do triângulo  $ABC$ .

Em seguida, rotacione a peça 1, ao redor do ponto  $D$  de um ângulo de  $180^\circ$ , no sentido horário de modo que o vértice  $C$  da peça 1 coincida com o vértice  $B$  da peça 4, conforme exibido na figura 3.8.

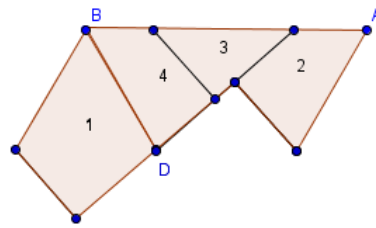


Figura 3.8: Rotação e encaixe da peça 1.

Translade a peça 2 de modo que o seu vértice  $A$  coincida com o vértice  $B$ . Assim, a peça 2 encaixa-se à peça 1, como ilustrado na figura 3.9.

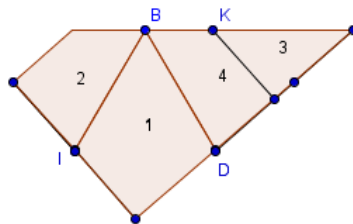


Figura 3.9: Translação e encaixe da peça 2.

Rotacione a peça 3 de um ângulo de  $180^\circ$  no sentido anti-horário, ao redor do ponto  $K$ , de modo que ela se encaixe na parte de cima, terminando assim a montagem do quadrado desejado, conforme exibido na figura 3.10.

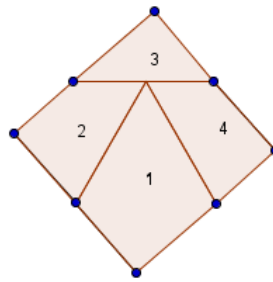


Figura 3.10: Quadrado equidecomponível com triângulo equilátero  $ABC$ .

### 3.3 Atividade 3 - Relação Entre Áreas.

Essa atividade, retirada de ARAÚJO(2013), pode ser trabalhada com alunos da 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> séries do ensino médio pois, essa atividade foi elaborada nos moldes de problemas de olimpíadas de matemática e requer um raciocínio mais elaborado e maduro dos alunos. O professor pode entregar uma cópia da figura 3.11 abaixo com o enunciado e pedir para os alunos encontrarem uma relação entre as áreas. Esse é um problema que envolve a decomposição de áreas em sua resolução, dependendo apenas da percepção do fato de que precisa dividir a figura em dois trapézios e aplicar a proposição 1.3 de relação entre áreas de triângulos do capítulo 1.

No trapézio  $ABCD$  da figura 3.11, o lado  $\overline{AD}$  é paralelo ao lado  $\overline{BC}$ . Determine a relação entre as áreas  $S, S_1$  e  $S_2$  ali indicadas.

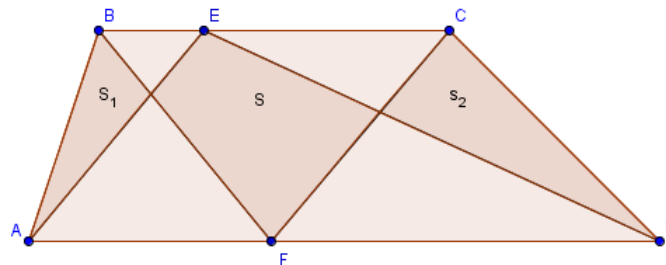


Figura 3.11: Trapézio da atividade 3.

Ao traçar o segmento  $\overline{EF}$  observa-se que será formado dois outros trapézios  $ABEF$  e  $CDFE$ , que divide o trapézio maior  $ABCD$  em duas partes e também a região



$S$  em  $S'$  e  $S''$ , como pode ser observado na figura 3.12.

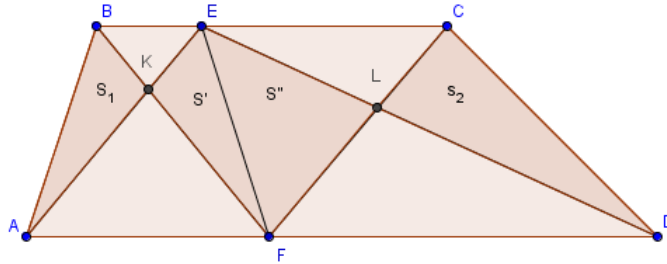


Figura 3.12: Divisão do trapézio  $ABCD$  em dois outros trapézios:  $ABEF$  e  $CDFE$ .

No capítulo 1 a proposição 1.3 diz que todo triângulo com a mesma base e a mesma altura possuem a mesma área, então as áreas dos triângulos  $ABF$  e  $AEF$  são iguais, pois possuem a mesma base  $\overline{AF}$  e a mesma altura do trapézio  $ABCD$  e também as áreas dos triângulos  $DEF$  e  $DCF$  são iguais por possuírem a mesma base  $\overline{DF}$  e a mesma altura do trapézio original.

Como o triângulo  $AFK$  é comum aos triângulos  $ABF$  e  $AEF$  e eles possuem a mesma área, então as regiões  $S_1$  e  $S'$  possuem a mesma área, da mesma forma o triângulo  $FDL$  é comum aos triângulos  $DEF$  e  $DCF$  que possuem a mesma área, portanto a área da região  $S_2$  é igual a área da região  $S''$ . Assim:

$$S = S' + S'' = S_1 + S_2.$$

Concluindo que, no trapézio  $ABCD$  a área  $S$  é igual a soma das medidas das áreas das partes  $S_1$  e  $S_2$ .

### 3.4 Atividade 4 - Transformação de um Hexágono Regular em um Quadrado.

Nessa atividade, que segue a linha da atividade 2 e foi retirada de KAGOIKI(2001), o professor pode entregar as peças do quebra-cabeça montado como um hexágono e pedir que os alunos o transformem em um quadrado, ou então ao contrário, entregar as

peças montadas como um quadrado e pedir para que transforme-as em um hexágono. O exercício também pode ser trabalhado no 8º e/ou 9º anos do ensino fundamental e também 2ª e/ou 3ª séries do ensino médio pois, são nessas séries que o currículo referência da rede estadual de educação de Goiás, traz conteúdos de figuras planas e também estudo de construções geométricas. Pode ser feito junto com os alunos a construção das peças.

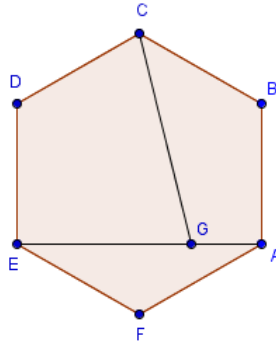


Figura 3.13: Hexágono com os segmentos  $\overline{AE}$  e  $\overline{CG}$ .

Dado um hexágono regular  $ABCDEF$  traça-se o segmento  $\overline{AE}$ . Constrói-se um segmento partindo do ponto  $C$  e até um ponto qualquer  $G$  no segmento  $\overline{AE}$ . O segmento  $\overline{CG}$  é do tamanho do lado do quadrado a ser encontrado, conforme figura 3.13.

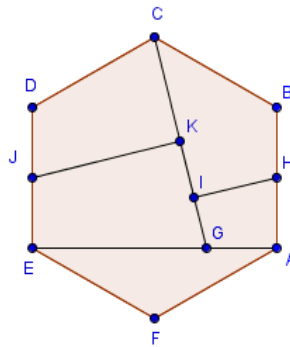


Figura 3.14: Recorte das peças do hexágono  $ABCDEF$  para formar o quadrado de mesma área.

Partindo do ponto médio  $H$  de  $\overline{AB}$  traça-se um segmento  $\overline{HI}$  perpendicular a  $\overline{CG}$ . Partindo do ponto médio  $J$  de  $\overline{DE}$  traça-se um segmento  $\overline{JK}$  perpendicular a  $\overline{CG}$ , que pode ser visto na figura 3.14. Construindo assim os recortes no hexágono  $ABCDEF$  que reagrupados formarão o quadrado desejado.

Para montar o quadrado, primeiro enumera-se as peças do hexágono recortadas, de acordo com a figura 3.15.

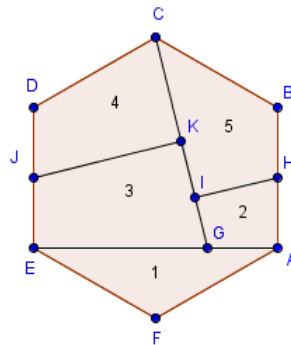


Figura 3.15: Numeração das peças de recorte hexágono  $ABCDEF$ .

Translade a peça 1 para a esquerda até que o ponto  $A$  coincida com o ponto  $G$ , figura 3.16.

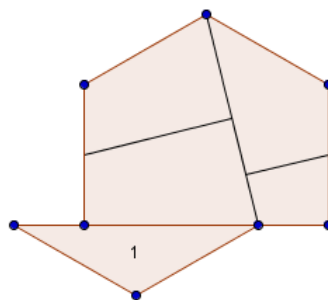


Figura 3.16: Translação da peça 1.

Translade a peça 2 e encaixa-a conforme figura 3.17.

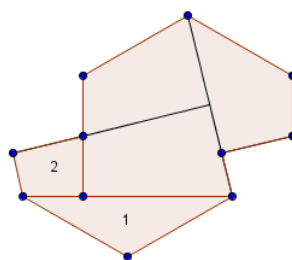


Figura 3.17: Translação da peça 2.

Mova a peça 4 para baixo e encaixe-a, conforme figura 3.18.

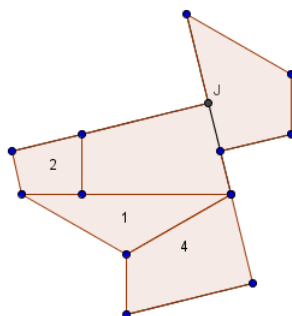


Figura 3.18: Movimento feito com a peça 4.

Finalizando encaixe a peça 5 obtendo a figura 3.19.

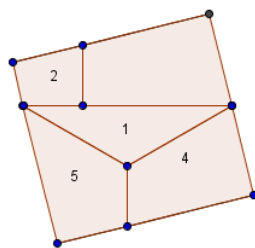


Figura 3.19: Encaixe da peça 5.

Concluindo assim a montagem do quadrado a partir do hexágono regular  $ABCDEF$ .

### 3.5 Atividade 5 - Calculando a Área do Paralelogramo.

Esta atividade tem como objetivo verificar que todo paralelogramo é equidecomponível ao retângulo de mesma base e mesma altura e definir uma expressão matemática ou “fórmula” para a área do paralelogramo, podendo ser trabalhada no 7º e 8º anos do ensino fundamental e 2ª série do ensino médio, pois de acordo com o currículo referência da rede estadual de educação de Goiás, são nessas séries que se estuda o cálculo de áreas de figuras planas, assim o professor quando for utilizar a expressão matemática que calcula essa área do paralelogramo pode primeiro demonstra-la aos alunos.

O professor pode entregar folhas de tamanho A4 com o paralelogramo já desenhado, ou papel quadriculado para que os alunos construam o paralelogramo, aproveitando ainda para explicar características dessa figura na realização da atividade.

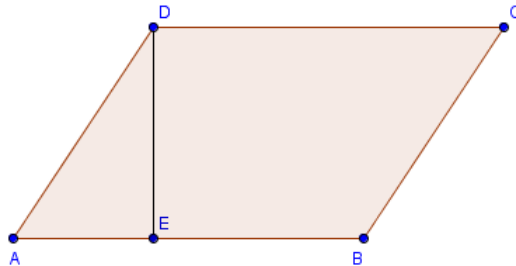


Figura 3.20: Paralelogramo  $ABCD$  com altura  $\overline{DE}$ .

Para o desenvolvimento do exercício, deve-se construir primeiro um paralelogramo  $ABCD$  qualquer, em seguida, traçar sua altura, como observado na figura 3.20, ou seja, o segmento  $\overline{DE}$  perpendicular ao segmento  $\overline{AB}$ .

Recorte o triângulo  $ADE$  e translade encaixando o segmento  $\overline{AD}$  no segmento  $\overline{BC}$ , conforme exibido na figura 3.21.

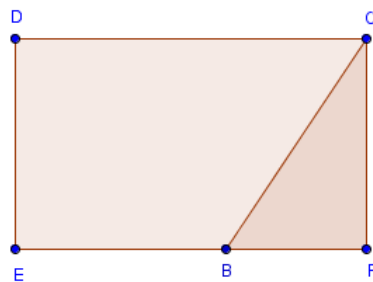


Figura 3.21: Obtenção do retângulo  $FCDE$  após a translação do triângulo  $ADE$ .

Verifica-se que o paralelogramo  $ABCD$  original é equidecomponível com um retângulo de mesma base, e mesma altura, portanto suas áreas são iguais. Assim a área de um paralelogramo é igual a área de um retângulo: base  $\times$  altura.

### 3.6 Atividade 6 - Calculando a Área do Trapézio.

Nessa atividade um trapézio será transformado em um retângulo definindo uma expressão matemática para o cálculo de sua área. Podendo ser trabalhada no 7º e 8º anos do ensino fundamental e 2ª série do ensino médio. Da mesma forma que obtém-se a fórmula que calcula a área do paralelogramo pode ser feita com o cálculo da fórmula da área do trapézio. Assim, como na atividade anterior, de acordo com o currículo da rede estadual de educação de Goiás, é nessas séries que se estudam o cálculo de áreas de figuras planas tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio.

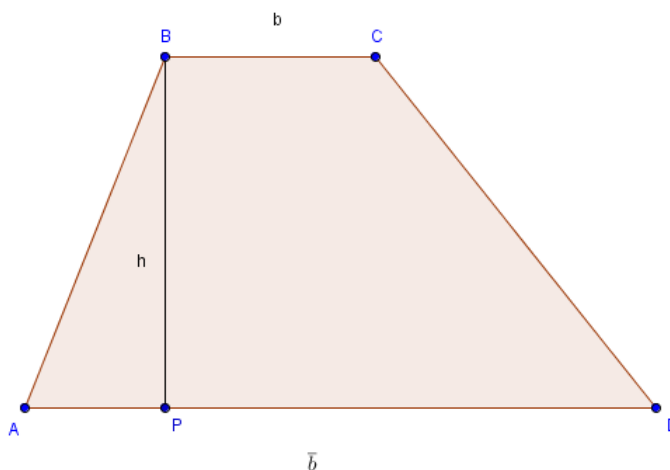


Figura 3.22: Trapézio  $ABCD$  com base maior  $\bar{b}$ , base menor  $b$  e altura  $h$ .

O professor pode entregar uma folha de papel com um trapézio desenhado ou uma folha quadriculada para que os alunos possam desenhá-lo. Na atividade podem ser trabalhados conceitos de geometria plana como congruência e características do trapézio.

Iniciando constrói-se um trapézio  $ABCD$ , de base menor  $b = BC$  e base maior  $\bar{b} = AD$ , conforme figura 3.22. Considere o ponto  $P$  em  $\overline{AD}$  de forma que  $\overline{BP}$  seja perpendicular a  $\overline{AD}$ , ou seja, a altura do trapézio é  $h = BP$ .

Marcando os pontos médios  $E$  e  $F$  dos respectivos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , traçam-se o segmento  $\overline{EF}$  e os segmentos  $\overline{BG}$  e  $\overline{CH}$  perpendiculares ao  $\overline{EF}$  com  $G$  e  $H$  pertencentes ao segmento  $\overline{EF}$ , conforme figura 3.23.

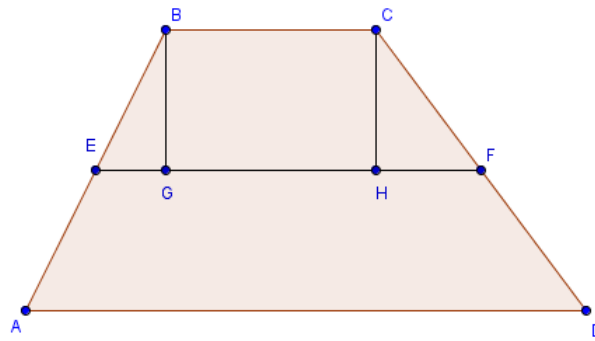


Figura 3.23: Trapézio  $ABCD$  com construção de  $\overline{BG}$  e  $\overline{CH}$  perpendiculares a  $\overline{EF}$ .

Na figura 3.24 tem-se o retângulo  $AILK$  sobreposto ao trapézio  $ABCD$ . O triângulo  $\triangle BEG$  é congruente ao triângulo  $\triangle AEI$  pelo caso de congruência de triângulos  $LAA_o$  (Lado-Ângulo-Ângulo oposto), pois possuem  $\widehat{BEG} \equiv \widehat{AEI}$  (opostos pelo vértice),  $\widehat{AIE} = \widehat{BGE} = 90^\circ$  e  $\overline{AE} \equiv \overline{EB}$ , pelo mesmo motivo  $\triangle CFH \equiv \triangle DFJ$ .

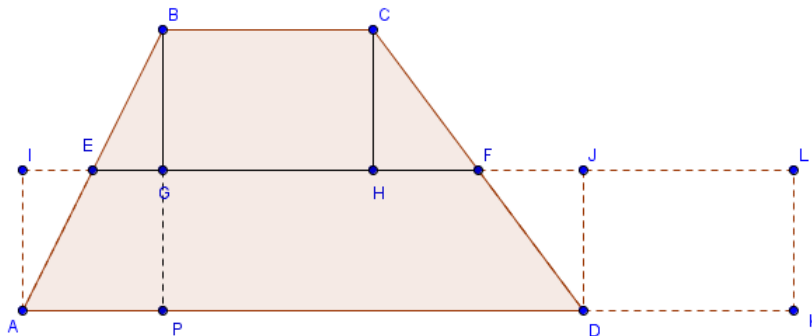


Figura 3.24: Retângulo  $AILK$  sobreposto ao trapézio  $ABCD$ .

O retângulo  $BCHG$  é transladado e encaixado no retângulo  $DJLK$ , pois  $\overline{JD} \equiv \overline{CH}$ , pela congruência dos triângulos  $CFH$  e  $DFJ$ , mostrando que o trapézio  $ABCD$  é equidecomponível com o retângulo  $AILK$ .

Para determinar a expressão matemática que fornece a área do trapézio, basta calcular a área do retângulo  $AILK$ . A altura desse retângulo é  $\frac{h}{2}$ , pois o segmento  $\overline{EF}$  divide a altura do trapézio  $h$  em dois segmentos iguais, a base do retângulo é a soma de  $AD$  e  $DK$ , mas  $DK = BC$ , então a medida da base será:  $\bar{b} + b$ . Assim:

$$\text{Área trapézio } ABCD = \frac{(\bar{b} + b) \times h}{2} = \text{Área do retângulo } AILK.$$



# Considerações Finais

Atividades para calcular áreas de polígonos, em que divide-se esses polígonos em figuras menores e conhecidas, às quais, sabe-se como calcular as áreas, é recorrente em livros didáticos. Com esse trabalho estabeleceu-se uma teoria que embasa essa prática e também cria uma proposta do trabalho com atividades que podem ser relevantes e ao mesmo tempo aplicáveis em sala de aula facilitando o trabalho do professor.

As sugestões do capítulo 3 servem para que o professor utilize da equidecomposição de polígonos para resolver problemas de áreas de figuras planas. Nesse sentido, cabem aos próximos trabalhos que surgirão dessa proposta, aplicar essas atividades para que se consiga verificar os resultados. Também, pode-se sugerir que se criem outras atividade lúdicas para essa mesmo tema.

Uma outra proposta surge da pergunta que se pode fazer: existe um resultado análogo transpondo do plano para o espaço? Ou, se dois sólidos possuem o mesmo volume são equidecomponíveis? Por exemplo, um tetraedro e um cubo que possuem o mesmo volume são equidecomponíveis? Esse problema é simplesmente o terceiro teorema de Hilbert.

Para finalizar, este trabalho foi de grande relevância para mim enquanto professor, pois contribuiu para um grande aperfeiçoamento profissional e pessoal, pois tive a possibilidade de ampliar meus conhecimentos e discutir métodos para trabalhar conteúdos de geometria.

# Referências Bibliográficas

- [1] ARAUJO, L. C. **Cálculo de Áreas: Um Meio Atrativo para o Enriquecimento do Ensino da Matemática**. 65 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal da Bahia. Salvador, 2013.
- [2] BARBOSA, João L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do professor de matemática, Rio de Janeiro-RJ, SBM, 2006. 222 p.
- [3] BATISTA, E. **Áreas, Volumes e Equidecomponibilidade**. Florianópolis-SC, Editora:UFSC, 2004. Notas. Disponível em < [http : //www.bienasbm.ufba.br/M51.pdf](http://www.bienasbm.ufba.br/M51.pdf) >. Acesso em: 15 de jan. 2016.
- [4] BOLTIANSKI, V. G. **Figuras Equivalentes e Equidecompostas**. Editora MIR, Moscou, 1996.
- [5] BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. Tradução: Castro, H. **História da Matemática**. Editora Blucher, São Paulo, 2012. 504 p.
- [6] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Geometria Plana**. Coleção fundamentos de matemática elementar, volume 09, São Paulo-SP, Atual, 2005. 456 p.
- [7] EUCLIDES. Tradução de BICUDO, I. **Os Elementos**. São Paulo-SP, UNESP, 2009. 593 p.

- [8] GOIÁS. Secretaria de Estado da Educação. **Currículo Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás**. Disponível em: < [http : //www.seduc.go.gov.br](http://www.seduc.go.gov.br) >. Acesso em: 20 de janeiro de 2016.
- [9] HILBERT, D. Tradução Franco de Oliveira A. J. **Fundamentos de Geometria**. Coleção Trajectos Ciência, editora Gradiva , Lisboa, 2003. 337 p.
- [10] HOFFMANN, D. S.; GRAVINA. M. A. **Polígonos Equidecomponíveis**. Disponível em: < [http : //www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades\\_diversas/ativ26/CabriJava/ativ26.htm](http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/ativ26/CabriJava/ativ26.htm) >. Acesso em: 20 fev. 2016.
- [11] KAGOIKI, F. Y. **Figuras equidecomponíveis**. 40 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2001.
- [12] MUNIZ NETO, Antonio, C. **Geometria**. Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro-RJ, SBM, 2013 a. 502 p.
- [13] OLIVEIRA, J. A. **Teorema de Pitágoras**. 46 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática) - Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2008.