



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO



Layane Rodrigues de Souza Queiroz

ABORDAGEM ESTOCÁSTICA DE MÁQUINAS ROTATIVAS
UTILIZANDO OS MÉTODOS HIPERCUBO LATINO E CAOS
POLINOMIAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CATALÃO – GO, 2017

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinadas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: ☒ **Dissertação** ☐ **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

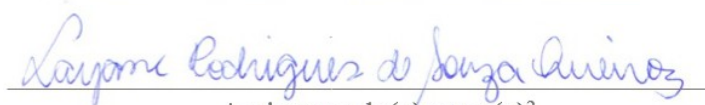
Nome completo do autor: Layane Rodrigues de Souza Queiroz

Título do trabalho: Abordagem Estocástica de Máquinas Rotativas Utilizando os Métodos Hiper-cubo Latino e Caos Polinomial

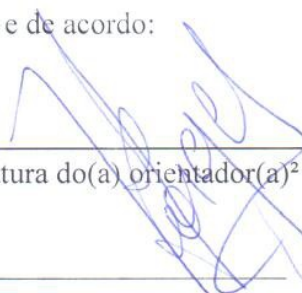
3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM ☐ NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.


Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:


Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 13 / 11 / 2017

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

² A assinatura deve ser escaneada.

LAYANE RODRIGUES DE SOUZA QUEIROZ

ABORDAGEM ESTOCÁSTICA DE MÁQUINAS ROTATIVAS
UTILIZANDO OS MÉTODOS HIPERCUBO LATINO E CAOS
POLINOMIAL

Dissertação apresentada como requisito parcial
para a obtenção do título de Mestre em
Modelagem e Otimização pela Universidade
Federal de Goiás – Regional Catalão.

Orientador:
Prof. Dr. Romes Antonio Borges

CATALÃO – GO
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Queiroz, Layane Rodrigues de Souza

Abordagem Estocástica de Máquinas Rotativas Utilizando os
Métodos Hipercubo Latino e Caos Polinomial [manuscrito] / Layane
Rodrigues de Souza Queiroz. - 2017.

119 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Romes Antonio Borges.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade
Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão,
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização, Catalão, 2017.

Bibliografia.

Inclui siglas, abreviaturas, símbolos, gráfico, tabelas, lista de
figuras, lista de tabelas.

1. Incertezas. 2. Hipercubo Latino. 3. Caos Polinomial. 4.
Máquinas Rotativas. I. Borges, Romes Antonio, orient. II. Título.

CDU 621.03

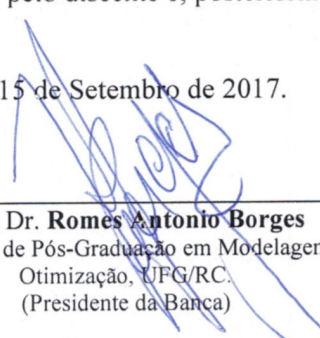


Defesa Nº 23

Ata de Defesa Pública – Dissertação de Mestrado

Aos **quinze** dias do mês de **Setembro** do ano de 2017, às **8h:30 min**, reuniram-se os componentes da banca examinadora, professores(as): : Prof. Dr. **Romes Antonio Borges** (presidente e orientador), Prof. Dr. **Aldemir Aparecido Cavallini Junior** – FEMEC/UFU, Prof. Dr. **Donald Mark Santee** - IMTec/UFG, para, em sessão pública realizada na Sala 104 do Bloco L, da Universidade Federal de Goiás (UFG), procederem com a avaliação do trabalho intitulado: **Abordagem Estocástica de Máquinas Rotativas Utilizando os Métodos Hipercubo Latino e Caos Polinomial**, em nível de Mestrado, área de concentração *Modelagem e Otimização*, de autoria de **Layane Rodrigues de Souza Queiroz**, matrícula **20161364**, discente do Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização (PPGMO) da UFG/RC. A sessão foi aberta pelo presidente da banca, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao discente que, dentro do tempo regulamentar, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o candidato, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação do trabalho. Os membros da banca consideraram o trabalho final: (X) **Aprovado** (unanimidade) ou () **Reprovado** (por maioria simples). Cumpridas as formalidades de pauta, às 10 h: 30 min, a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu Romes Antonio Borges, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora, pelo discente e, posteriormente, será homologada pelo Colegiado do PPGMO.

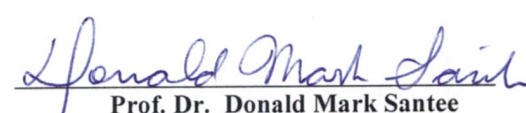
Catalão-GO, 15 de Setembro de 2017.



Prof. Dr. **Romes Antonio Borges**
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e
Otimização, UFG/RC.
(Presidente da Banca)



Prof. Dr. **Aldemir Aparecido Cavallini Junior**
Faculdade de Engenharia Mecânica
UFU



Prof. Dr. **Donald Mark Santee**
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e
Otimização, UFG/RC.



Discente: **Layane Rodrigues de Souza**
Queiroz, matrícula **20161364**
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e
Otimização, UFG/RC

*Dedico este trabalho a Deus e a minha Família,
fonte de amor e aprendizado para todo o sempre!*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela vida, pelo amor, pela paz e tudo mais que fornece para o meu próprio bem.

Agradeço ao meu marido Thiago por todo o carinho e amor que tem para comigo. Igualmente, agradeço-o pelas palavras de suporte e apoio que tem me dado em todo o caminhar da minha vida.

Agradeço ao meu orientador, professor Romes Antonio Borges, pela paciência em me ensinar, pela dedicação em me corrigir, pelas conversas a me aconselhar e por toda a compreensão diante das minhas dificuldades.

Agradeço a todos os familiares, amigos e colegas que fizeram parte desta trajetória e incentivaram-me a continuar firme neste propósito.

RESUMO

QUEIROZ, L. R. S. *Abordagem estocástica de máquinas rotativas utilizando os métodos Hipercubo Latino e Caos Polinomial*. 2017. 119 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem e Otimização) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

Sistemas mecânicos estão sujeitos a incertezas que surgem a partir da imprecisão dos dados ou da natureza dinâmica do problema. Diferentes métodos têm sido utilizados para lidar com a propagação de incertezas, entre eles o Hipercubo Latino e o Caos Polinomial. O hipercubo latino permite obter a resposta do processo aleatório a partir da amostragem por alguma distribuição de probabilidade, sobre pontos do domínio do processo. Por sua vez, a expansão em caos polinomial permite separar as componentes estocásticas e determinísticas da resposta do processo aleatório a partir do uso de polinômios ortogonais condizentes com a distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias que representam as incertezas. Neste trabalho, utiliza-se o hipercubo latino e o caos polinomial para avaliar o efeito de incertezas em sistemas dinâmicos. Inicialmente foram considerados sistemas mecânicos mais simples, como forma de validação da metodologia e, em seguida, fez-se um estudo do efeito de incertezas em um rotor com mancais hidrodinâmicos.

Palavras-chaves: Incertezas, Hipercubo Latino, Caos Polinomial, Máquinas Rotativas.

ABSTRACT

QUEIROZ, L. R. S. *Stochastic analysis of rotating machines by using the Latin hypercube and Polynomial Chaos methods*. 2017. 119 f. Thesis (Master in Modelling and Optimization) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

Mechanical systems may suffer with uncertainties that can appear from non-precise data and due to the dynamic nature of the problem. Different methods have been used to deal with uncertainty propagation, such as the Latin Hypercube sampling and Polynomial Chaos. The Latin hypercube allows to obtain the solution of the random process, by sampling using some probability distribution, over the process domain data. In its turn, the polynomial chaos expansion allows to separate the stochastic components from the deterministic ones of the random solution by using orthogonal polynomials in conformity with the probability distribution of the random variables representing uncertainties. In this work, we apply the Latin hypercube and the polynomial chaos in order to study the effects of uncertainties in dynamical systems. In the beginning of the study, some simple mechanical systems were considered for the purpose of validating the methodology and, then, we studied the effects of uncertainties in a rotor supported by hydrodynamic bearings.

Keywords: Uncertainties, Latin Hypercube, Polynomial Chaos, Rotating Machines.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Sistema massa-mola-amortecedor com deslocamento na horizontal	31
Figura 2.2 – Método de Newmark com convergência por Newton-Rapshon	35
Figura 2.3 – Resposta no domínio do tempo para o sistema linear e não linear	37
Figura 2.4 – Barra longitudinal e sua discretização em elementos finitos	37
Figura 3.1 – Amostragem para duas variáveis aleatórias	43
Figura 3.2 – Aplicação do Hipercubo Latino para $n = 2$ variáveis e com $p = 4$ pontos	44
Figura 3.3 – Esquema de aplicação do Hipercubo Latino para simulações	45
Figura 3.4 – Esquema de aplicação da expansão em caos polinomial para a quantificação de incertezas	52
Figura 4.1 – Resposta (média e desvio-padrão) do sistema massa-mola-amortecedor para A1	59
Figura 4.2 – Resposta (média e desvio-padrão) do sistema massa-mola-amortecedor para A2	60
Figura 4.3 – Resposta (média e desvio-padrão) do sistema massa-mola-amortecedor não linear para B1	64
Figura 4.4 – Resposta (média e desvio-padrão) do sistema massa-mola-amortecedor não linear para B2	64
Figura 4.5 – Sistema massa-mola de dois graus de liberdade	66
Figura 4.6 – Curva de Pareto do cenário C_1 para a primeira frequência natural do sistema com incertezas	71
Figura 4.7 – Curva de Pareto do cenário C_2 para a primeira frequência natural do sistema com incertezas	73
Figura 5.1 – Ilustração do rotor, com seus elementos de eixo, disco e mancais, considerado neste estudo	76
Figura 5.2 – Ilustração do elemento de viga e seus graus de liberdade	77
Figura 5.3 – Deslocamentos transversais e órbita do nó associado ao mancal #1	89
Figura 5.4 – Deslocamentos transversais e órbita do nó associado ao disco #1	90
Figura 5.5 – Deslocamentos transversais e órbita do nó associado ao disco #2	91
Figura 5.6 – Deslocamentos transversais e órbita do nó associado ao mancal #2	92

Figura 5.7 – Deslocamentos transversais e órbita associados ao mancal #1 na condição de <i>run-down</i>	95
Figura 5.8 – Deslocamentos transversais e órbita associados ao disco #1 na condição de <i>run-down</i>	96
Figura 5.9 – Deslocamentos transversais e órbita associados ao disco #2 na condição de <i>run-down</i>	97
Figura 5.10 – Deslocamentos transversais e órbita associados ao mancal #2 na condição de <i>run-down</i>	98
Figura 5.11 – Deslocamentos e órbita do mancal #1 para o terceiro cenário	101
Figura 5.12 – Deslocamentos e órbita do disco #1 para o terceiro cenário	102
Figura 5.13 – Deslocamentos e órbita do disco #2 para o terceiro cenário	103
Figura 5.14 – Deslocamentos e órbita do mancal #2 para o terceiro cenário	104

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Polinômios de Hermite bidimensionais	57
Tabela 4.2 – Parâmetros adotados para o sistema massa-mola-amortecedor	58
Tabela 4.3 – Parâmetros adotados para o sistema massa-mola-amortecedor não linear	63
Tabela 4.4 – Soluções da curva de Pareto considerando o cenário $\mathcal{C}_1$	71
Tabela 4.5 – Soluções da curva de Pareto considerando o cenário $\mathcal{C}_2$	72
Tabela 5.1 – Parâmetros para o sistema rotativo da Fig. 5.1	88
Tabela 5.2 – Comprimento dos elementos de viga e posição dos nós do rotor	88
Tabela 5.3 – Desvio-padrão obtido com o PC e HCL considerando os deslocamentos nas Figs. 5.3 a 5.6	94
Tabela 5.4 – Desvio-padrão obtido com o PC e HCL considerando os deslocamentos nas Figs. 5.7 a 5.10	100

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	SISTEMAS MECÂNICOS LINEARES E NÃO LINEARES	31
2.1	Características de um Sistema	31
2.2	Obtenção das Respostas de Sistemas Mecânicos	33
2.3	Introdução ao Método dos Elementos Finitos	37
3	QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS	41
3.1	Amostragem por Hipercubo Latino	42
3.2	Decomposição de Karhunen-Loève	45
3.3	Caos Polinomial	47
4	ESTUDO DE INCERTEZAS EM SISTEMAS MECÂNICOS	55
4.1	Resposta no Domínio da Frequência	56
4.2	Resposta no Domínio do Tempo	60
4.3	Projeto Ótimo de um Sistema Massa-Mola com Incertezas	65
5	CONSIDERAÇÃO DE INCERTEZAS EM UM ROTOR SUPORTADO POR MANCAIS HIDRODINÂMICOS	75
5.1	Equação de Movimento	77
5.1.1	Energia Cinética	78
5.1.2	Energia de Deformação	81
5.1.3	Força de Desbalanceamento	82
5.1.4	Força Hidrodinâmica nos Mancais	83
5.2	Incertezas no Rotor	84
6	CONCLUSÕES	107
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	111

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Sistemas mecânicos podem ser lineares ou mesmo não lineares. Além disso, grande parte deles pode ser afetado por algum tipo de incerteza. Por esse motivo, nota-se que cada vez mais pesquisadores se dedicam a estudar tais características.

A resposta do sistema deve ser capaz de representar a sua realidade, mesmo em condições de incertezas e não linearidades. Não linearidades em um sistema impõem que a resposta não seja diretamente proporcional aos parâmetros de entrada, sendo uma característica presente em grande parte dos sistemas reais e que requer técnicas próprias a fim de não obter respostas incoerentes com a realidade (THOMSEN, 2003).

As técnicas utilizadas para obter a resposta de sistemas não lineares costumam considerar o emprego de métodos numéricos e a realização de simulações computacionais, enquanto que em sistemas muito simples é possível obter uma resposta exata de forma analítica. Nos sistemas mecânicos dinâmicos, essa resposta pode corresponder ao seu movimento (deslocamento, velocidade e aceleração) no decorrer do tempo ocasionado a partir da aplicação de alguma força externa e/ou pelas condições iniciais impostas (DIMARAGONAS, 1996).

Em se tratando de sistemas mecânicos não lineares, tem-se um considerável crescimento de pesquisas nesta área. Soares (2004) estudou sistemas não lineares acoplados relacionados a interação solo-fluido-estrutura, em que propôs uma combinação do método de elementos de contorno com o método de elementos finitos para a análise dinâmica do sistema. Moraes (2013) analisou um sistema vibro-impacto associado a perfuratrizes de solo para a exploração de petróleo com e sem a condição de impacto. O autor analisou a resposta no domínio do tempo, o retrato de fases, o diagrama de bifurcação, o mapa de Poincaré e espectros da frequência a fim de obter os parâmetros que proporcionam o estudo da estabilidade e caoticidade do sistema.

Salahshoor, Ebrahimi e Maasoomi (2016) aplicaram o método de múltiplas escalas durante a análise de um pêndulo deslizante com folgas nas conexões. Theotokoglou e

Panayotounakos (2017) investigaram um sistema não amortecido que envolve o acoplamento de dois osciladores não forçados com não linearidade cúbica, para o qual aplicaram transformações funcionais para obter equações diferenciais ordinárias não lineares de segunda ordem. Zhou et al. (2017b) fizeram uma análise dinâmica de um sistema não linear acoplado, formado por um veículo e uma ponte, com as equações do movimento sendo obtidas pelo método de Lagrange. Os autores analisaram o impacto da rigidez não linear do suporte da ponte, da razão entre as massas, da amplitude de excitação e da relação de posição no comportamento dinâmico do sistema.

Para a solução numérica de sistemas lineares e não lineares, tem-se empregado diversos métodos. O método de Newmark combinado com o método de Newton-Raphson tem se mostrado interessante para resolver sistemas não lineares devido a sua rapidez e a boa convergência em comparação a outros métodos, como o Runge-Kutta de quarta ordem que requer tamanho de passos pequenos e ao menos quatro avaliações da função por passo (SAIENI, 2012).

Moorthy et al. (1993) aplicaram o método de Newmark com um critério de convergência para minimizar o erro em cada passo para a resolução de um sistema caótico composto por um oscilador de um grau de liberdade. Os resultados são comparados com o método de Runge-Kutta de quarta ordem mostrando que o Newmark é bem competitivo. Chang (2004) aplicou o método de Newmark para resolver sistemas lineares elásticos, em que o método se mostrou estável, e sistemas não lineares, em que o método pode apresentar instabilidade. Assim, o autor fez uma discussão das características necessárias para o método obter soluções precisas ao resolver sistemas não lineares.

Em sistemas complexos cuja obtenção das equações de movimento não é trivial uma estratégia bastante utilizada é aplicar uma modelagem via método de elementos finitos (LOTTI et al., 2006). Segundo Kattan (2008) e Inman (2013), este método é utilizado para facilitar a obtenção da resposta aproximada de um sistema a partir da discretização do mesmo em partes menores chamadas de elementos. Cada elemento contém pontos que o limitam, chamados de nós e que permitem conectar um elemento a outro, assim, formando a malha de elementos finitos.

Krivilyov et al. (2015) analisaram o fluxo de turbulência e o transporte iônico de massa em um reator cilíndrico eletromecânico a partir da aplicação de uma versão híbrida do método de elementos finitos com uma expansão de Fourier. Segundo os autores, o método permite incluir as equações de transporte de massa e energia para prever os campos de temperatura e concentração. Maedo (2015) analisou fissuras em sólidos usando a versão

generalizada do método de elementos finitos com a introdução de elementos de interface, ao passo que Naderi e Iyyver (2017) desenvolveram uma versão tridimensional aumentada do método de elementos finitos para investigar fissuras em sólidos. Ren et al. (2017) aplicaram o método de elementos finitos para a análise de pequenas deflexões em placas compostas finas.

Os sistemas mecânicos costumam ser formados por elementos de massa, rigidez e amortecimento. Assim, a resposta do sistema está relacionada com o armazenamento de energia potencial e a liberação na forma de energia cinética, resultando no movimento (também chamado de vibração) da massa (INMAN, 2013). A forma de vibrar de um sistema tem relação direta com a sua segurança durante o funcionamento, o que sobre certas condições pode causar a falha, perda de performance ou até mesmo a parada do sistema.

Um sistema bastante comum em vários ambientes industriais é o de máquinas rotativas, com aplicação na indústria automotiva, aeroespacial, energia, petróleo, entre outras. Segundo Muszynska (2005), uma máquina rotativa contém uma junção de partes rotativas denominada por rotor, que inclui um eixo e vários elementos presos a ele, como discos, rolamentos, engrenagens, impulsores e engates, de forma que o eixo está suspenso por mancais. Conforme Koroishi (2013), a eficiência de um rotor está ligada à sua velocidade de operação que, por conseguinte, está relacionada ao nível de vibração produzido.

Para a modelagem de uma máquina rotativa, muitas vezes, utiliza-se o método dos elementos finitos (LALANNE; FERRARIS, 1998). Ujihara (2011) apresentou uma metodologia baseada no método de elementos finitos para obter as equações do movimento de um rotor flexível suportado por mancais magnéticos que opera em altas velocidades. Segundo Vance, Zeidan e Murphy (2010), os estudos sobre rotores buscam, em sua grande maioria, prever as velocidades críticas de operação, obter as frequências naturais para a vibração torsional, calcular o balanço para a correção de massas e suprimir as instabilidades dinâmicas.

Cavalini (2013) desenvolveu duas técnicas para identificar trincas em rotores, a primeira relacionada à não linearidade imposta no eixo do rotor devido a trinca e, a segunda, utilizando impedância eletromecânica. O autor obteve as equações de movimento para um rotor flexível, com a presença de forças de desbalanceamento nos mancais de rolamento e hidrodinâmicos. Koroishi (2013) propôs uma metodologia para controlar as amplitudes de vibração de um rotor flexível utilizando atuadores eletromagnéticos em um mancal de rolamento.

Machado e Cavalca (2015) propuseram um modelo numérico para analisar o desgaste na parede de mancais hidrodinâmicos para uma análise no domínio da frequência. Costa (2016) estudou as incertezas que podem surgir nos mancais e no diâmetro do eixo de um rotor

flexível, além de realizar o projeto ótimo robusto do rotor usando um algoritmo genético e o algoritmo de colônia de vagalumes para determinar o diâmetro do eixo de forma que a amplitude de vibração e uma função de vulnerabilidade sejam minimizadas.

Cai e Xiao (2016) analisaram o fenômeno não linear de instabilidade em um rotor com mancais de rolamento causado pelo contato e atrito entre o rotor e a parte estacionária da máquina rotativa. Mendes, Machado e Cavalca (2017) desenvolveram um modelo para a identificação de parâmetros associados ao desgaste de mancais hidrodinâmicos cilíndricos em rotores, mais precisamente, eles analisaram a influência da profundidade do desgaste e da posição angular.

É de grande importância estudar o impacto de incertezas na resposta do sistema, uma vez que elas são tratadas como variáveis aleatórias e, assim, propagadas, dentro do modelo que representa o sistema. O fato de não considerar o efeito de incertezas pode acarretar em respostas diferentes daquelas esperadas na realidade que, por vez, ocasionaria uma possível tomada de decisões equivocadas (MACHADO, 2012).

Após propagar as incertezas no modelo, com o uso de variáveis aleatórias que seguem alguma distribuição de probabilidade, como a distribuição normal, beta, gama, entre outras, estima-se o impacto na resposta aleatória. O impacto na resposta é mensurado a partir de estatísticas, isto é, do cálculo dos momentos, como o de primeira ordem, que representa a média, e o de segunda ordem, que representa a variância.

Entre os métodos empregados para a quantificação de incertezas, tem-se os baseados em amostragem, como a simulação de Monte Carlo e o Hipercubo Latino, que buscam gerar amostras de valores aleatórios associados a um dado domínio. Apesar desses métodos, na maioria das vezes, serem mais simples de se aplicar, eles possuem um custo computacional elevado, pois é necessário um grande número de amostras para se obter uma convergência aceitável na prática. O Hipercubo Latino surge como uma opção bastante interessante frente ao método de Monte Carlo padrão, pois utiliza um menor número de amostras.

Olsson, Sandeberg e Dahlblom (2003) fizeram um estudo de várias técnicas de amostragem aplicadas em problemas de engenharia, em que se destaca a eficiência do Hipercubo Latino. Robert e Casella (2011) apresentaram uma revisão do estado-da-arte sobre o método de Monte Carlo, em particular, com o uso de cadeias de Markov. Didier, Sinou e Faverjon (2013) aplicaram um método baseado no balanço harmônico multidimensional estocástico para analisar a não linearidade em sistemas dinâmicos com a presença de incertezas na parte linear e não linear do sistema, mostrando a superioridade do método proposto em comparação com o Monte Carlo.

Santos (2014) discutiu vários métodos de amostragem inteligentes, com destaque para a comparação entre aqueles que podem ser incorporados no Monte Carlo para melhorar a sua convergência. As comparações ocorreram para a resolução de problemas relacionados a confiabilidade de estruturas. Viana (2016) fez uma discussão generalizada a respeito da amostragem por Hipercubo Latino, mostrando que é crescente o número de artigos envolvendo o uso deste método, além de levantar questões como o motivo dele ser bastante utilizado, suas deficiências e como ele vem sendo melhorado com o emprego de métodos de otimização.

Por outro lado, existem métodos que não são baseados em amostragem que, por sua vez, tratam as incertezas por meio de aproximações. Uma abordagem consiste em descrever as incertezas usando a expansão de Karhunen-Loève em termos de variáveis aleatórias ortogonais. Apesar desta expansão reduzir a dimensionalidade do espaço aleatório, ela requer a função de covariância associada às incertezas. Ritto, Sampaio e Buezas (2007) estudaram os efeitos causados pelo desbalanceamento e folga nos mancais de um rotor em suspensão. Os autores usaram a expansão de Karhunen-Loève para representar a base desse problema não linear e, assim, realizar uma redução eficiente do do modelo.

Lira (2012) empregou a expansão de Karhunen-Loève para descrever campos de permeabilidade de poços de produção de óleo e relatou o seu alto custo computacional, de forma que foi preciso usar a técnica da matriz de núcleo para obter resultados satisfatórios. Cho, Venturi e Karniadakis (2013) generalizaram a expansão de Karhunen-Loève para simular processos estocásticos não estacionários e multi-correlacionados. Os autores conseguiram desenvolver duas abordagens, sendo a primeira baseada na análise espectral do processo, ao passo que a segunda trabalha sobre a estrutura de covariância cruzada do processo. Os resultados indicaram que ambas conseguem representar satisfatoriamente processos multi-correlacionados e podem ser usadas para a redução da dimensão do espaço de variáveis.

Outro método consiste na expansão em Caos Polinomial, em que as incertezas são tratadas no âmbito de processos estocásticos de segunda ordem no espaço de Hilbert, ou seja, no espaço linear L^2 (em que o momento de segunda ordem é finito) de forma que o produto interno é definido como sendo o valor esperado das variáveis aleatórias. O Caos Polinomial considera uma base de polinômios ortogonais cuja função peso deve estar de acordo com a função densidade de probabilidade das variáveis aleatórias consideradas para tratar as incertezas.

O caos polinomial permite separar, na resposta do sistema, a parte estocástica, que fica concentrada apenas na base de polinômios utilizada, da determinística, que contém os coeficientes da expansão. Assim, a média é obtida a partir do primeiro coeficiente da expansão,

enquanto a variância é dada pela soma ponderada dos coeficientes dos outros termos da expansão ao quadrado (GUERINE et al, 2016). Por isso, torna-se necessário obter os coeficientes da expansão, seja usando a projeção de Galerkin, ou por uma aproximação por regressão linear ou colocação de pontos. As integrais resultantes do uso da projeção de Galerkin podem ser resolvidas analiticamente, quando é possível, ou usando algum método numérico, o que é mais comum, em que se emprega o método da quadratura ou até mesmo simulação por amostragem.

Algumas desvantagens podem estar associadas ao emprego do caos polinomial, como o rápido crescimento da dimensionalidade do problema, que é dependente do número de variáveis aleatórias e da máxima ordem usada para a expansão. Uma boa representação das incertezas geralmente exige muitas variáveis aleatórias, enquanto sistemas não lineares precisam de uma expansão com muitos termos, ou seja, polinômios de alta ordem (LUCOR; KARNIADAKIS, 2004).

Ghanem e Spanos (1991) apresentaram uma descrição detalhada da expansão de Karhunen-Loève, focada no desenvolvimento do caos polinomial para a base de polinômios ortogonais de Hermite, com aplicação em diferentes problemas de mecânica. Xiu e Karniadakis (2002a) generalizaram o caos polinomial para a família de polinômios ortogonais de Askey, de forma que as variáveis podem seguir outras distribuições de probabilidade. Uma aplicação para a resolução de equações diferenciais parciais elípticas com incertezas foi feita por Xiu e Karniadakis (2002b), em que se aplicou a projeção de Galerkin para uma expansão em caos polinomial. Wan e Karniadakis (2006) verificaram que a decomposição do espaço de variáveis aleatórias em vários elementos menores permite diminuir o erro associado à variância do processo. A partir disso, os autores desenvolveram o caos polinomial generalizado multi-elemento, em que a cada um dos elementos menores é associado uma variável aleatória que, por sua vez, é expandida pelo caos polinomial generalizado.

Pimentel (2014) aplicou o caos polinomial com a projeção de Galerkin em problemas de transferência de calor e massa. Um dos problemas resolvidos foi o de magnetohidrodinâmica com escoamento laminar e campo magnético constante. Os resultados mostraram que a presença de incertezas faz com que as medidas do sistema sejam perturbadas e, assim, uma avaliação puramente determinística pode ocasionar resultados insatisfatórios na prática. Em Li et al. (2016), a equação de convecção-difusão com difusividade aleatória e condições de contorno periódicas é transformada, com o uso do caos polinomial generalizado, em um sistema de equações determinísticas acopladas. Os resultados mostraram que, com

entradas aleatórias uniformes, o erro estatístico cresce rapidamente conforme a expansão em caos polinomial cresce.

No caso de sistemas em que se busca a resposta dinâmica, Gerritsma et al. (2010) propuseram uma forma de lidar com o caos polinomial para considerar a dependência do tempo. Com isso, os autores conseguiram melhorar a convergência do método quando se busca uma resposta para longos intervalos de tempo. Kewlani, Crawford e Iagnemma (2012) consideraram o caos polinomial no estudo da resposta dinâmica do movimento de um veículo com parâmetros incertos ou com incertezas oriundas do terreno. Os autores compararam as respostas via simulação por Monte Carlo e para o caos polinomial generalizado com e sem multi-elementos. Jacquelin et al. (2016) estudaram um sistema dinâmico com incertezas sendo caracterizadas por variáveis aleatórias e *fuzzy*. Os autores desenvolveram um *framework* usando caos polinomial que é capaz de lidar com ambos os tipos de variáveis. Neste *framework*, as variáveis *fuzzy* podem ser expandidas usando o caos polinomial generalizado com a base de polinômios de Legendre.

Aplicações envolvendo o caos polinomial para sistemas não lineares com incertezas foram feitas, por exemplo, por Lucor e Karniadakis (2004), que estudaram osciladores não lineares sujeitos a excitações aleatórias. Os autores consideraram osciladores de Duffing com a força externa sujeita a diferentes tipos de incertezas, em que uma comparação com o sistema determinístico foi realizada. Didier, Faverjon e Sinou (2012) quantificaram os efeitos de incertezas nos parâmetros físicos e geométricos de um rotor com dois discos usando o método de elementos finitos estocásticos com a expansão em caos polinomial. A resposta aleatória foi representada por um envelope por meio de sua média e variância, além de ser comparada com o método de Monte Carlo.

Guerine et al. (2016) consideraram o caos polinomial com a base de Hermite para lidar com o comportamento dinâmico não linear de um sistema de engrenagens com atrito. Os autores assumiram que o coeficiente de atrito é um parâmetro incerto, de forma que um sistema de oito graus de liberdade precisou ser resolvido para obter as respostas aleatórias. Daróczy, Janiga e Thévenin (2016) buscaram pelo projeto de turbinas eólicas do tipo *H-Darrieus* a partir da aplicação do caos polinomial considerando incertezas no ângulo de controle de vibração e na velocidade angular. Nos experimentos numéricos foram analisados os coeficientes de desempenho e a curva de torque quase-periódica, mostrando que os coeficientes de torque possuem distribuições assimétricas. Keshavarzzadeha, Fernandez e Tortorellia (2017) desenvolveram uma abordagem que combina caos polinomial e análise sensível para a otimização da topologia de estruturas na presença de incertezas. Os autores

desenvolveram métricas com a expansão em caos polinomial capazes de estimar com precisão as estatísticas da resposta, bem como a probabilidade de falhas e o nível de sensibilidade do sistema.

De forma a contribuir com o estudo de incertezas em sistemas mecânicos lineares e não lineares, este trabalho tem por objetivo utilizar os métodos estocásticos Hipercubo Latino e a expansão em caos polinomial com a base de polinômios de Hermite para o estudo de incertezas em sistemas mecânicos. Desta forma, pretende-se inicialmente aplicar a metodologia estudada em sistemas mecânicos de um e dois graus de liberdade, tanto no caso linear, quanto para quando se tem características não lineares, evidenciando as vantagens de cada um dos métodos.

O foco principal do trabalho consiste em aplicar o método Hipercubo Latino e o caos polinomial para estudar o efeito de incertezas em uma máquina rotativa com mancais hidrodinâmicos. Para a modelagem do rotor, utiliza-se o método de elementos finitos e as equações de Lagrange.

Além deste capítulo introdutório, o presente trabalho contém outros capítulos, quais sejam:

- O Capítulo 2 traz uma revisão envolvendo sistemas mecânicos lineares e não lineares, bem como uma breve descrição do método de elementos finitos.
- O Capítulo 3 descreve os métodos para a análise de sistemas com incertezas. Inicialmente, discute-se os conceitos fundamentais do método Hipercubo Latino. Em seguida, faz-se uma discussão acerca da decomposição de Karhunen-Loève, que é usada para representar campos aleatórios por meio de variáveis aleatórias ortogonais. Por fim, discute-se a expansão em caos polinomial, mostrando a versão homogênea, com base em polinômios de Hermite, e comentando brevemente sobre a versão generalizada, que considera qualquer polinômio da família do Esquema de Askey.
- O Capítulo 4 mostra como aplicar o caos polinomial em sistemas mecânicos para dois casos, o primeiro para a resposta no domínio da frequência e a outro para resposta no domínio do tempo. A última parte do capítulo está relacionada ao projeto ótimo de um sistema de dois graus de liberdade.
- O Capítulo 5 apresenta a modelagem e a obtenção das equações de movimento de um rotor flexível hidrodinâmico a partir da aplicação do método de elementos finitos e das equações de Lagrange. Considera-se que alguns parâmetros do rotor estão sujeitos a

incertezas e, assim, testes numéricos são realizados visando quantificar o efeito das incertezas na resposta aleatória do rotor.

- O Capítulo 6 traz as conclusões e as atividades a serem desenvolvidas para a continuação deste trabalho. Por fim, as referências citadas no decorrer do texto são apresentadas.

Capítulo 2

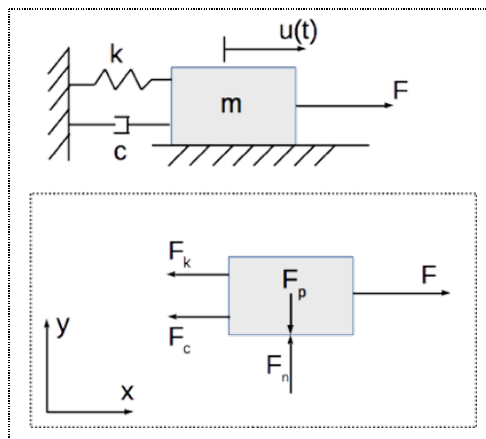
SISTEMAS MECÂNICOS LINEARES E NÃO LINEARES

Neste capítulo, faz-se uma introdução acerca de conceitos básicos envolvendo sistemas mecânicos com características lineares e não lineares. Ao conhecer as características desses sistemas, torna-se possível considerar aspectos relevantes para que as respostas obtidas estejam de acordo com a realidade do projeto.

2.1 Características de um Sistema

A Fig. 2.1 ilustra um sistema mecânico de um grau de liberdade (g.d.l.), livre de atrito entre a massa e o solo, em que $u(t)$, $\dot{u}(t) = \frac{d}{dt}u(t)$ e $\ddot{u}(t) = \frac{d^2}{dt^2}u(t)$ representam, respectivamente, o deslocamento, a velocidade e a aceleração da massa na direção horizontal e o seus parâmetros são dados por massa (m) do corpo em kg , o coeficiente de amortecimento viscoso (c) em Ns/m , o coeficiente de rigidez da mola (k) em N/m e a força de excitação externa (F) em N .

Figura 2.1. Sistema massa-mola-amortecedor com deslocamento na horizontal.



Fonte: a autora.

O sistema da Fig. 2.1 pode representar vários sistemas mecânicos reais, a depender dos parâmetros atribuídos. Ao considerar o digrama de corpo livre desse sistema, em condições de equilíbrio, com a aplicação da segunda Lei de Newton, obtém-se uma equação diferencial, Eq. (2.1), que descreve o seu movimento em função do tempo t . Observa-se que a força de amortecimento $F_c = c\dot{u}$ é proporcional a velocidade da massa e a força elástica $F_k = ku$ é proporcional ao deslocamento da massa, ambas com direção oposta ao movimento.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F. \quad (2.1)$$

A esse sistema está associado um único grau de liberdade, pois a posição da massa em qualquer instante de tempo é representada por uma única coordenada de deslocamento. Havendo em um sistema mecânico a necessidade de outras coordenadas para representar o deslocamento da massa (ou das massas), tem-se de forma direta um aumento no número de graus de liberdade.

A obtenção das equações de movimento de um sistema também pode ocorrer usando o princípio de conservação de energia, isto é, a soma da energia potencial total com a energia cinética total das massas que compõem o sistema permanece constante em cada instante de tempo.

No caso do sistema dado na Fig. 2.1, a energia cinética corresponde a $T = \frac{1}{2}m\dot{u}^2$ e a energia potencial é $U = \frac{1}{2}ku^2$. Nesse sistema ainda há a presença da força de amortecimento, que resulta na energia dissipativa $P = \frac{1}{2}c\dot{u}^2$, e da força externa, resultando na força generalizada $Q = F$. A partir disso, escrevem-se as equações de Lagrange em função das q coordenadas generalizadas u_i , ou seja:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_i} + \frac{\partial U}{\partial u_i} + \frac{\partial P}{\partial \dot{u}_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (2.2)$$

Como o sistema em questão possui apenas uma coordenada generalizada, que está relacionada ao deslocamento u , tem-se $q = 1$, $u_1 = u$ e $Q_1 = Q$, tal que se deriva a equação de movimento do sistema a partir da aplicação da Eq. (2.2), com resultado na Eq. (2.1). A aplicação das equações de Lagrange é conveniente para sistemas com vários graus de liberdade em que a obtenção das forças (e torques) é difícil de ser alcançada usando diagramas de corpo livre (INMAN, 2013).

A equação do movimento do sistema apresentado na Fig. 2.1 mostra que ele é linear, uma vez que a variável dependente u , que representa o deslocamento, e, consequentemente, a

velocidade $\dot{u}$ e a aceleração $\ddot{u}$ estão relacionadas de forma linear (com termos de primeiro grau) e, então, o princípio da superposição pode ser aplicado. Por outro lado, quando há a presença de termos que relacionam as variáveis dependentes, por exemplo, por meio de produtos (u^2 , $\dot{u}u$, $\frac{\ddot{u}}{\sqrt{u}}$, etc.) e funções trigonométricas ($\sin(u)$, $\cos(\dot{u})$, $\tan^{-1}(u^2 t)$, etc.), tem-se um sistema não linear (BORGES, 2008).

Embora os sistemas não lineares possam ser linearizados, tal linearização pode acarretar em soluções que não condizem com a realidade do problema, uma vez que a não linearidade pode trazer fenômenos como múltiplos pontos de equilíbrio, atratores estranhos, bifurcações, ressonâncias, ciclos limites, entre outros (RAND, 2005; SOCOLAR, 2006). É importante destacar que a não linearidade pode surgir no sistema de diferentes formas, por exemplo, na sua geometria (GERGES, 2013), pelo tipo de material usado (RICHARDS; SINGH, 2001), nas forças externas e na inércia (KERSCHEN et al., 2006), no atrito entre componentes do sistema (AL-BENDER et al., 2004), entre outras.

Ao considerar que o sistema da Fig. 2.1 possui uma mola com características não lineares, com força elástica $F_k = ku - k_1 u^2$, sendo k o coeficiente de rigidez linear e k_1 o respectivo coeficiente da parcela não linear. Neste caso, a força de elasticidade consiste de uma combinação de molas lineares e não lineares. Ao assumir $k_1 > 0$ e sendo o sinal que acompanha a parcela não linear negativo, tem-se uma não linearidade do tipo que abrande (*softening spring*). Se, por outro lado, o sinal que acompanhasse fosse positivo, a não linearidade seria do tipo que enrijece (*hardening spring*) (BORGES, 2008). A equação de movimento do sistema torna-se agora não linear, a saber:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku - k_1 u^2 = F. \quad (2.3)$$

2.2 Obtenção das Respostas de Sistemas Mecânicos

Embora a solução da Eq. (2.1) possa ser obtida analiticamente, a Eq. (2.3) não pode ser resolvida desta maneira devido a presença do termo não linear $k_1 u^2$. Neste caso, a resposta em função do tempo pode ser obtida de forma discreta usando um método numérico, como o método de Newmark, de Runge-Kutta, de Adams-Bashfort, entre outros (BURDEN; FAIRES, 2010; GAVIN, 2016).

A aplicação do método de Newmark combinado com o de Newton-Raphson para resolver o problema na Eq. (2.3) visa obter a resposta no domínio do tempo. Para tanto, sejam

$u_0 = u(t_0)$ e $\dot{u}_0 = \dot{u}(t_0)$ as condições iniciais do referido problema no tempo inicial t_0 . O primeiro passo é calcular a aceleração no tempo inicial:

$$\ddot{u}_0 = m^{-1}(-c\dot{u}_0 - ku_0 + k_1u_0^2 + F) \quad (2.4)$$

Em seguida, o tempo é atualizado para $t_{n+1} = t_n + h$, assumindo que o tempo inicial ocorre em $n = 0$ e h é o tamanho do passo de tempo. Assim, faz-se a predição para o deslocamento, a velocidade e a aceleração nesse novo tempo, ou seja:

$$\begin{cases} \dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + (1 - \gamma)h\ddot{u}_n, \\ u_{n+1} = u_n + h\dot{u}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2\ddot{u}_n. \end{cases} \quad (2.5)$$

Na Eq. (2.5), os parâmetros γ e β do método determinam a variação da aceleração sobre o intervalo de tempo. A escolha de ambos os parâmetros deve ser cuidadosa, pois eles influenciam na precisão e estabilidade do método de Newmark. Segundo Moorthy et al. (1993), a escolha de $\gamma \geq 0,5$ e $\beta \geq \frac{(2\gamma+1)^2}{16}$ fornece um método incondicionalmente estável. O próximo passo consiste em calcular o vetor residual associado a predição feita, isto é:

$$r_{n+1} = m\ddot{u}_n + c\dot{u}_n + ku_n - k_1u_n^2 - F. \quad (2.6)$$

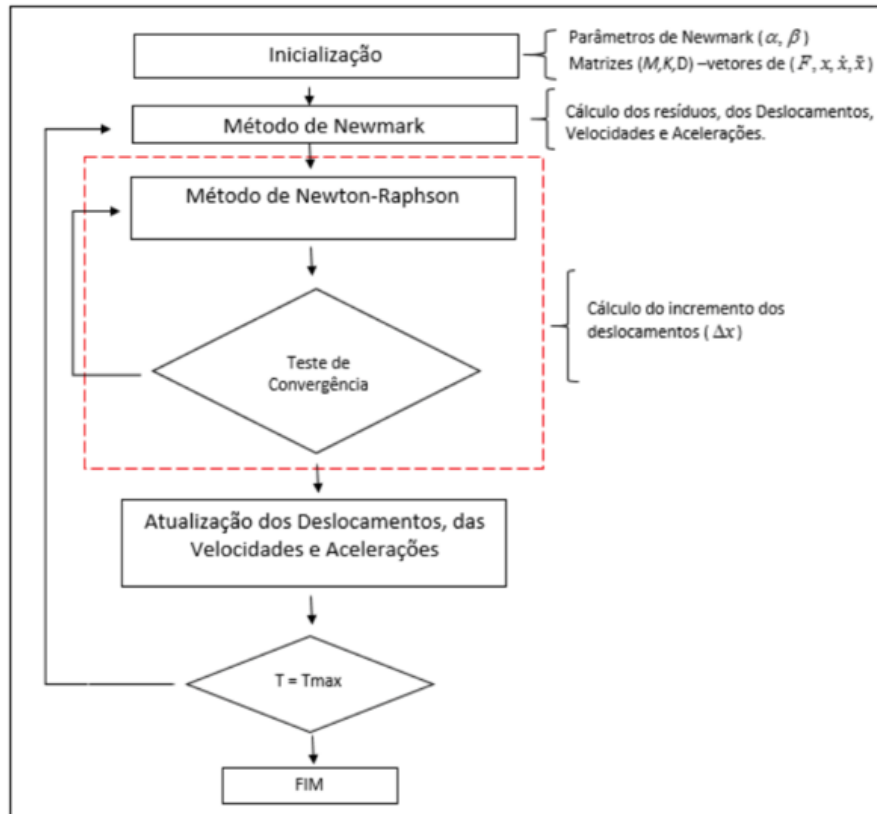
Em problemas não lineares, o vetor residual aparece devido ao desequilíbrio de forças, de forma que tais forças precisam ser dissipadas, isto é, deseja-se que o vetor residual se aproxime de zero o quanto for necessário (CARILHO, 2008).

Uma forma fazer a convergência do vetor residual para zero é aplicar o método de Newton-Rapshon (detalhes deste método em Burden e Faires (2010)) para resolver a Eq. (2.7) e obter o valor do incremento dos deslocamentos Δu . Em seguida, faz-se a correção dos valores do deslocamento, velocidade e aceleração na Eq. (2.8) para, em seguida, calcular novamente o vetor residual na Eq. (2.6) e verificar se o critério de convergência do Newton-Rapshon foi atendido. Caso este critério não tenha sido atendido, repete-se a aplicação do Newton-Rapshon. Por outro lado, caso haja a convergência, volta-se para o passo de atualização do tempo, em seguida, faz-se a predição na Eq. (2.5) para esse novo tempo e, novamente, realiza-se o teste de convergência do vetor residual. A Fig. 2.2 mostra o esquema iterativo do método de Newmark com Newton-Rapshon.

$$S(u_{n+1})\Delta u = -r_{n+1}, \text{ em que: } S(u_{n+1}) = k + k_1u_{n+1} + \frac{\gamma}{\beta h}c + \frac{1}{\beta h^2}m. \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_{n+1} + \Delta u \\ \dot{u}_{n+1} = \dot{u}_{n+1} + \frac{\gamma}{\beta h} \Delta u \\ \ddot{u}_{n+1} = \ddot{u}_{n+1} + \frac{1}{\beta h^2} \Delta u \end{cases} \quad (2.8)$$

Figura 2.2. Método de Newmark com convergência por Newton-Rapshon.



Fonte: Fonseca (2013).

Outras técnicas podem também ser utilizadas para diminuir o erro durante a convergência do vetor residual e, assim, acelerar a convergência do método de Newmark. Erkus (2004) discutiu sobre outras alternativas ao método Newton-Rapshon, inclusive que sob certas condições são mais precisos, sendo elas o método da Pseudo-Força e método de Correção da Força Desbalanceada.

Outra alternativa ao método de Newmark é o método de Runge-Kutta de quarta ordem para obter a resposta no domínio do tempo. Em Kumar e Unny (1977), o método de Runge-Kutta foi aplicado para resolver equações diferenciais parciais não lineares e comparado, quanto a eficiência, com o método de diferenças finitas. Desale e Dasre (2013) resolveram um

sistema acoplado não linear envolvendo seis equações diferenciais relacionadas a equação de Boussinesq, que simula o movimento de ondas na água.

Conforme Lantos e Márton (2011), o método de Runge-Kutta de quarta ordem estima, a partir do tempo atual t_n , a solução no tempo seguinte, $t_{n+1} = t_n + h$, fazendo uma avaliação da função em quatro pontos (o primeiro no tempo atual, o segundo e o terceiro no meio do intervalo, e o último no tempo final). A aproximação no tempo t_{n+1} consiste de uma média ponderada envolvendo os valores obtidos nesses quatro pontos.

Para resolver a Eq. (2.3) usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, primeiro se faz uma redução de ordem, de forma que $\dot{u}(t) = y(t)$ e $\ddot{u}(t) = \dot{y}(t)$, com as condições iniciais sendo $u_0 = e$ e $y_0 = \dot{u}_0$. Assim, escreve-se o sistema de equações diferenciais ordinárias discreto de primeira ordem em função do tempo t_n , para $n = 1, 2, \dots$, isto é:

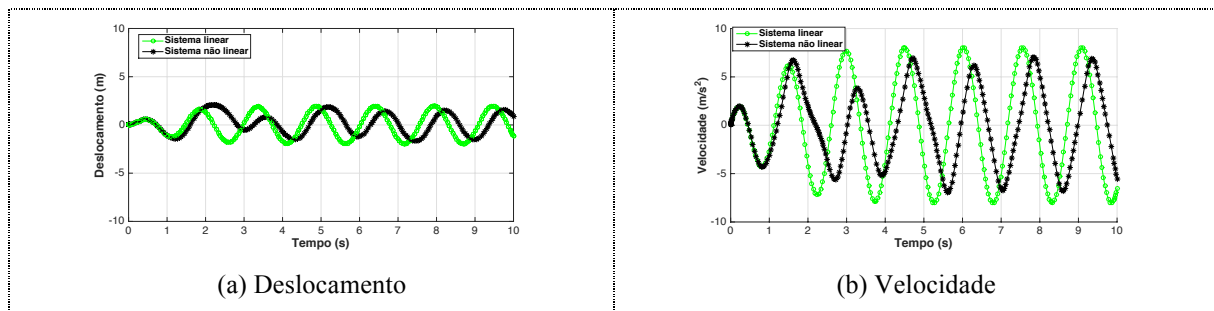
$$\begin{cases} f(t_n, u_n, y_n) = \dot{u}(t_n) = y_n, \\ g(t_n, u_n, y_n) = \dot{y}(t_n) = m^{-1}(-cy_n - ku_n + k_1u_n^2 + F). \end{cases} \quad (2.9)$$

Após montar o sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem conforme a Eq. (2.9), calcula-se o deslocamento u_n e a velocidade y_n pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, resolvendo a Eq. (2.10) para cada tempo t_n , com $n = 1, 2, \dots$, ou seja:

$$\begin{cases} v_1 = f(t_{n-1}, u_{n-1}, y_{n-1}), \\ a_1 = g(t_{n-1}, u_{n-1}, y_{n-1}), \\ v_2 = f\left(t_{n-1} + \frac{h}{2}, u_{n-1} + v_1 \frac{h}{2}, y_{n-1} + a_1 \frac{h}{2}\right), \\ a_2 = g\left(t_{n-1} + \frac{h}{2}, u_{n-1} + v_1 \frac{h}{2}, y_{n-1} + a_1 \frac{h}{2}\right), \\ v_3 = f\left(t_{n-1} + \frac{h}{2}, u_{n-1} + v_2 \frac{h}{2}, y_{n-1} + a_2 \frac{h}{2}\right), \\ a_3 = g\left(t_{n-1} + \frac{h}{2}, u_{n-1} + v_2 \frac{h}{2}, y_{n-1} + a_2 \frac{h}{2}\right), \\ v_4 = f(t_{n-1} + h, u_{n-1} + v_3 h, y_{n-1} + a_3 h), \\ a_4 = g(t_{n-1} + h, u_{n-1} + v_3 h, y_{n-1} + a_3 h), \\ u_n = u_{n-1} + \frac{h}{6}(v_1 + 2v_2 + 2v_3 + v_4), \\ y_n = y_{n-1} + \frac{h}{6}(a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4). \end{cases} \quad (2.10)$$

A Fig. 2.3 apresenta as respostas no domínio do tempo, tanto para o caso linear quanto para o não linear, sendo que tais respostas foram obtidas utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Os valores adotados para os parâmetros foram extraídos de Inman (2013) e correspondem a $m = 100$, $c = 170$, $k = 2000$, $k_1 = 520$, $F = 1500 \cos(4,1029t)$, $u_0 = 0,01$, $\dot{u}_0 = 0,1$, $0 \leq t \leq 10$ e $h = 0,01$.

Figura 2.3. Resposta no domínio do tempo para o sistema linear e não linear.



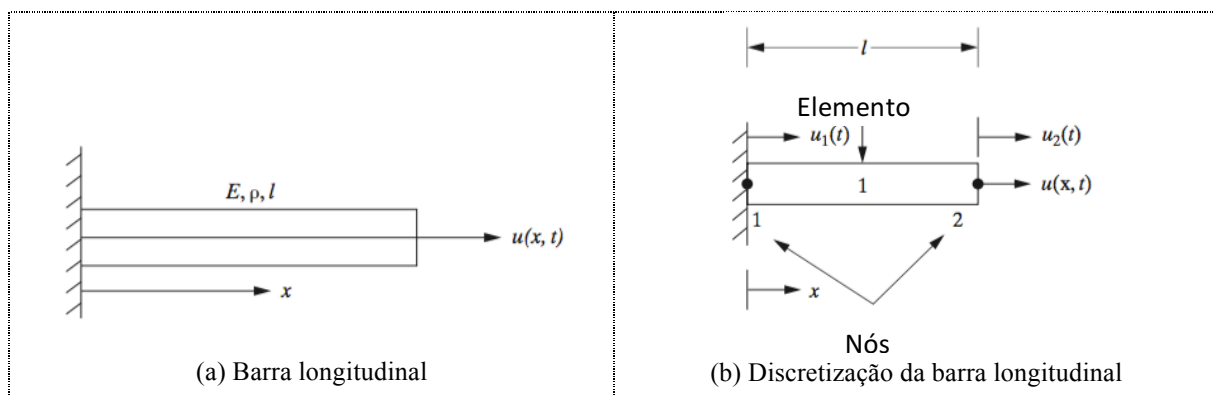
Fonte: a autora.

Na Fig. 2.3, pode-se observar que as respostas não lineares, tanto para o deslocamento quanto para a velocidade, apresentam oscilações não harmônicas que se diferem das respostas para o caso linear, mostrando assim, a influência do termo não linear no sistema.

2.3 Introdução ao Método dos Elementos Finitos

A aplicação do método de elementos finitos costuma transformar o sistema contínuo em discreto para que a obtenção das equações de movimento seja simplificada. A Fig. 2.4 mostra um exemplo de barra longitudinal engastada-livre, de forma que se ilustra a aplicação do método de elementos finitos a fim de obter a equação de movimento dessa barra. Mais detalhes sobre o método e suas aplicações podem ser obtidos, por exemplo, em Kattan (2008), Inamn (2013) e Maedo (2015).

Figura 2.4. Barra longitudinal e sua discretização em elementos finitos.



Fonte: Inamn (2013).

Na Fig. 2.4, observa-se que a barra tem deslocamento com relação a direção x e ao tempo t dado por $u(x, t)$, velocidade no tempo $u_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$ e aceleração no tempo $u_{tt}(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t)$, comprimento l , módulo de elasticidade E , área de seção transversal A , condições de contorno $u(0, t) = 0$ e $u_x(l, t) = 0$, condições iniciais $u(x, 0) = u_0(x)$ e $u_t(x, 0) = \dot{u}_0(x)$, um elemento e dois nós. As funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$ representam os deslocamentos nodais e são relacionadas com a função espacial $u(x)$ observando os nós e as condições de contorno.

Para escrever os deslocamentos nodais, usa-se um polinômio de primeiro grau, por observar que existe apenas um grau de liberdade no sistema, assim resultando em $u(x) = c_1 x + c_2$. A definição de como gerar a malha de elementos finitos e qual tipo de polinômio usar caracterizam os dois principais passos do método de elementos finitos e devem ser feitos com cuidado a fim de gerar resultados condizentes com a realidade.

Assim, ao considerar as funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$ nas suas respectivas posições $x = 0$ e $x = l$, obtêm-se as constantes c_1 e c_2 do polinômio interpolador considerado, ou seja:

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow u_1(t) = c_2, \\ x = l \rightarrow u_2(t) = c_1 l + c_2 \rightarrow c_1 = \frac{u_2(t) - u_1(t)}{l}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Com o valor das constantes, obtêm-se a aproximação para o deslocamento, fazendo $u(x, t) = u(x)$, ou seja:

$$u(x, t) = \left(\frac{u_2(t) - u_1(t)}{l} \right) x + u_1(t) = \left(1 - \frac{x}{l} \right) u_1(t) + \left(\frac{x}{l} \right) u_2(t). \quad (2.12)$$

O próximo passo consiste em obter as energias que estão associadas com a aproximação de $u(x, t)$ para, assim, derivar a equação de movimento usando o método de Lagrange. No caso da barra da Fig. 2.4, obtêm-se, respectivamente, a sua energia cinética T e a de deformação V (INMAN, 2013):

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l A \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \right]^2 dx = \frac{\rho A l}{6} (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \dot{u}_2^2) = \quad (2.13)$$

$$[\dot{u}_1(t) \quad \dot{u}_2(t)] \cdot \frac{\rho A l}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}},$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^l E A \left[\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right]^2 dx = \frac{E A}{2l} (u_1^2 - 2u_1 u_2 + u_2^2) = \quad (2.14)$$

$$[u_1(t) \quad u_2(t)] \cdot \frac{E A}{2l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u},$$

em que M é a matriz de massa e K é a matriz de rigidez, ambas relacionadas ao único elemento da malha.

Pelas condições de contorno, a barra na posição $x = 0$ tem resposta no tempo nula e claramente não haverá equação de movimento para esse nó, assim resultando em:

$$\begin{cases} T(t) = \frac{\rho Al}{6} \dot{u}_2^2, \\ V(t) = \frac{EA}{2l} u_2^2. \end{cases} \quad (2.15)$$

Por fim, substituem-se as energias na equação de Lagrange, Eq. (2.3), considerando a quantidade de nós como o número de coordenadas generalizadas, ou seja, $u_1(t)$ e $u_2(t)$, e assumindo $T = T(t)$, $U = V(t)$, $P = 0$, $Q_1 = Q_2 = 0$. Com isso, chega-se em:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_1} + \frac{\partial V}{\partial u_1} = 0 \rightarrow 0 = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_2} + \frac{\partial V}{\partial u_2} = 0 \rightarrow \frac{\rho Al}{3} \ddot{u}_2 + \frac{EA}{l} u_2. \end{cases} \quad (2.16)$$

Observa-se que, na Eq. (2.16), tem-se apenas a equação de movimento para o segundo nó devido as condições de contorno. Assim, a equação resultante consiste no modelo de elementos finitos para a barra. Quando há vários nós e elementos na malha, torna-se comum escrever a equação resultante na forma matricial, o que também facilita a implementação e resolução por algum método computacional.

No método de elementos finitos, a não linearidade também pode ser considerada durante a obtenção das equações. Como mencionado, a não linearidade em um sistema mecânico pode estar relacionada, por exemplo, a geometria (grandes deslocamentos, tensões e rotações), ao material (relação tensão-deformação ou força-deslocamento são não lineares) e ao contato entre os elementos. Assim, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez que aparecem nas energias podem conter as funções de deslocamentos nodais, o que faz surgir a não linearidade no modelo de elementos finitos e, então, requerendo o emprego de métodos numéricos como o Newmark combinado com Newton-Raphson (WRIGGERS, 2008).

Capítulo 3

QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS

Neste capítulo são apresentados os métodos usados para tratar incertezas no contexto de sistemas mecânicos com e sem não linearidade. Esses sistemas, uma vez sujeitos a influência de efeitos aleatórios, são caracterizados como estocásticos e, assim, torna-se difícil prever as suas respostas usando métodos puramente determinísticos.

As incertezas que surgem em sistemas mecânicos podem estar associadas, por exemplo, à falta de clareza nos dados de entrada e/ou aos fenômenos físicos e químicos difíceis de serem considerados de forma exata no modelo. Diante disso, torna-se fundamental considerar as incertezas nos parâmetros do sistema, fazer a devida propagação no modelo e, assim, quantificar o efeito na resposta do sistema de forma a retratar a realidade do projeto e evitar decisões errôneas ou de baixa qualidade.

A inclusão das incertezas é feita sobre as variáveis do sistema como forma de eliminar os erros que uma resposta unicamente determinística forneceria. As variáveis são, então, chamadas de variáveis incertas ou aleatórias, sendo representadas por uma distribuição de probabilidade que melhor caracteriza a aleatoriedade. Pode-se dizer que uma variável aleatória é uma função que define um valor a cada evento do espaço amostral (SHELDON, 2010).

Ao assumir variáveis aleatórias contínuas, os principais tipos de distribuição de probabilidade que podem descrevê-las são a uniforme, gaussiana, triangular, beta, gama, entre outras. No caso de variáveis aleatórias discretas, tem-se as distribuições binomial, geométrica, de Bernoulli, de Poisson e outras (SHELDON, 2010).

Uma variável aleatória pode ser quantificada a partir de seus *momentos*. Os momentos estão relacionados com o valor esperado (isto é, a esperança) de potências da variável aleatória, sendo dependentes do tipo de distribuição de probabilidade, em particular, da função de densidade de probabilidade associada a distribuição. Neste sentido, o momento de primeira ordem representa a esperança da variável aleatória, que nada mais é do que a sua média ou valor esperado. A partir do momento de primeira ordem, obtém-se os momentos

centrais, como o momento de segunda ordem que representa a variância da variável aleatória (SHELDON, 2010).

Ao realizar a propagação de incertezas sobre o sistema, usam-se métodos para a quantificação destas e, assim, determinam o efeito da aleatoriedade sobre a resposta, em geral, a partir da obtenção dos momentos de primeira e segunda ordem (RAMOS, 2014). O primeiro método a ser discutido é o Hipercubo Latino, que é uma variante do método de Monte Carlo, porém requer menos pontos por amostragem. Em seguida, apresenta-se a expansão de Karhunen-Loève, além da expansão por Caos Polinomial que permite quantificar incertezas em sistemas estocásticos de segunda ordem, que são os sistemas cuja variância é finita.

3.1 Amostragem por Hipercubo Latino

O método do Hipercubo Latino (HCL) foi discutido inicialmente em McKay et al. (1979), como uma alternativa mais eficiente ao seu precursor, o método de Monte Carlo (MC) proposto em Metropolis e Ulam (1949), além de outros métodos de amostragem direta. O HCL busca realizar a amostragem das variáveis aleatórias a partir de uma estratificação, que consiste em dividir o domínio das variáveis em intervalos de igual probabilidade que são chamados de estratos.

De acordo com Lima (2012), pode-se estruturar o MC nas seguintes etapas: (i) gerar amostras para as variáveis aleatórias seguindo a distribuição de probabilidade escolhida; (ii) realizar os cálculos e simulações usando as amostras geradas; e, analisar as repostas geradas e as suas estatísticas (isto é, os momentos).

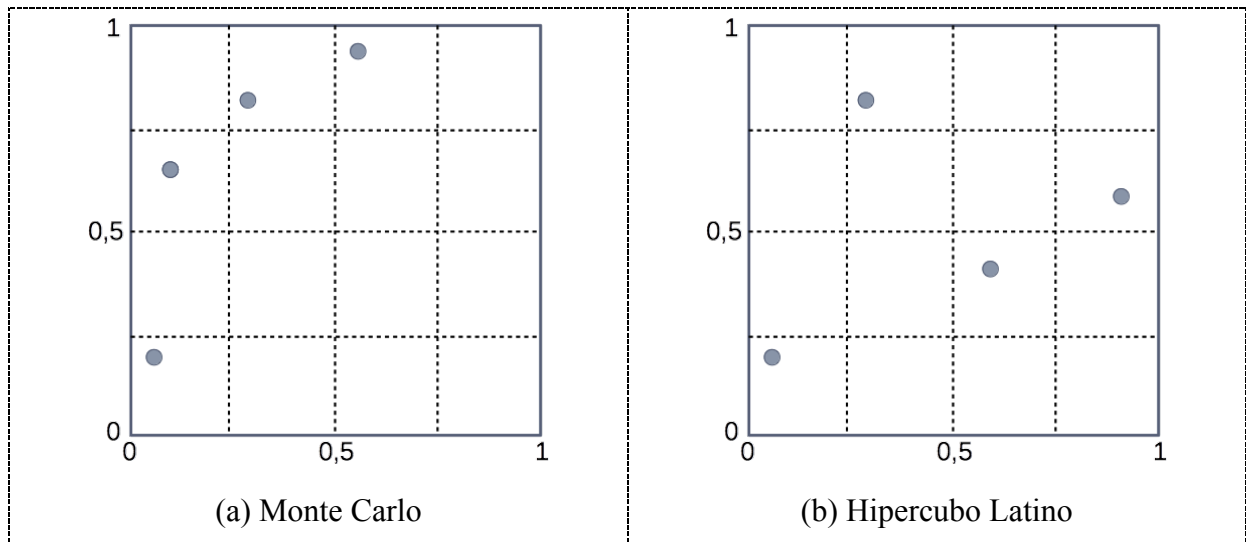
Embora o MC ainda seja bastante usado, a sua convergência depende do número de amostras geradas, o que implica em mais simulações do modelo (LIU, 2004). No caso de modelos para sistemas complexos, que geralmente dependem de outros procedimentos iterativos, o custo computacional crescerá em demasia.

Assim, enquanto o MC exige um grande número de pontos da amostra para representar com precisão a resposta do sistema, uma vez que os pontos são gerados aleatoriamente e de forma independente, o HCL gera pontos de forma aleatória controlada. Em outras palavras, no HCL faz-se a seleção aleatória de um ponto da amostra por estrato evitando que todos os pontos venham de uma mesma região. Quando existe mais de uma variável, os pontos são gerados para cada uma e depois combinados aleatoriamente buscando respeitar um ponto por estrato. Segundo Chrisman (2014), se o HCL requer p pontos da

amostra para atingir uma dada precisão, no MC é preciso ao menos p^2 pontos para atingir a mesma precisão.

A Fig. 3.1 exemplifica o caso em que no MC ocorre a concentração dos pontos em uma determinada região do espaço amostral, enquanto no HCL há uma cobertura mais homogênea e controlada do espaço, com um ponto por estrato, o que permite uma convergência mais rápida (VIANA, 2016). A Fig. 3.1(b) é um exemplo de construção do quadrado latino, que é um plano de projeção uniforme com uma amostra por estrato. No caso multidimensional, tem-se a divisão do espaço em hipercubos com a construção dos chamados hipercubos latinos, similar ao feito para o quadrado latino (FORRESTER; SÓBESTER; KEANE, 2008).

Figura 3.1. Amostragem para duas variáveis aleatórias.



Fonte: a autora.

Em linhas gerais, no método HCL, ao considerar que há n variáveis aleatórias $X_1, X_2, \dots, X_n$ (espaço n -dimensional) e seja requerido p pontos da amostra (resulta nos p estratos) por variável, gera-se uma primeira matriz, chamada de H , de ordem $p \times n$, em que cada coluna de H é preenchida com uma permutação de $\{1, 2, \dots, p\}$.

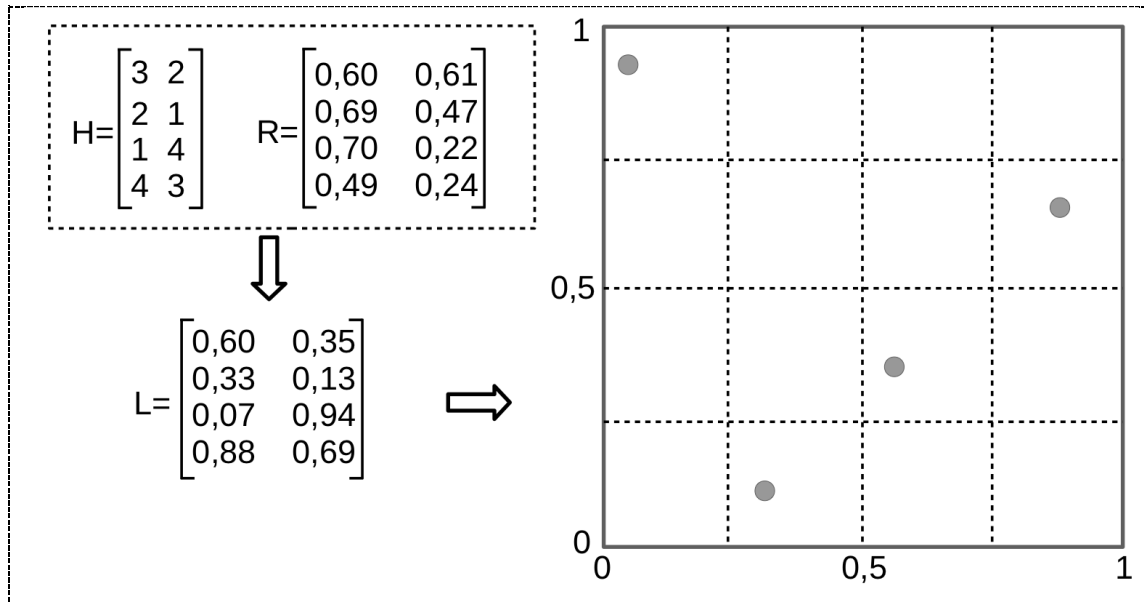
Uma segunda matriz, chamada de R , também de ordem $p \times n$, é criada contendo números aleatórios no intervalo aberto $(0, 1)$ gerados conforme a distribuição adotada para as variáveis. É interessante que a geração de R leve em consideração uma função densidade de probabilidade que esteja de acordo com a distribuição utilizada para representar a variável aleatória.

Com as matrizes H e R , constrói-se a matriz $L = \frac{1}{p}(H - R)$. A partir da matriz L , pode-se gerar as amostras x_{ij} da variável aleatória X_j utilizando a função $F_{x_j}^{-1}$, que é a inversa da função de distribuição de probabilidade da variável amostrada (SANTOS, 2014), ou seja:

$$x_{ij} = F_{x_j}^{-1}(L_{ij}), \quad (3.1)$$

em que L_{ij} é o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz L . A Fig. 3.2 traz um exemplo das matrizes H , R e L para $p = 4$ e $n = 2$ dada uma distribuição gaussiana, que é a normal com média 0 e variância 1.

Figura 3.2. Aplicação do Hipercubo Latino para $n = 2$ variáveis e com $p = 4$ pontos.



Fonte: a autora.

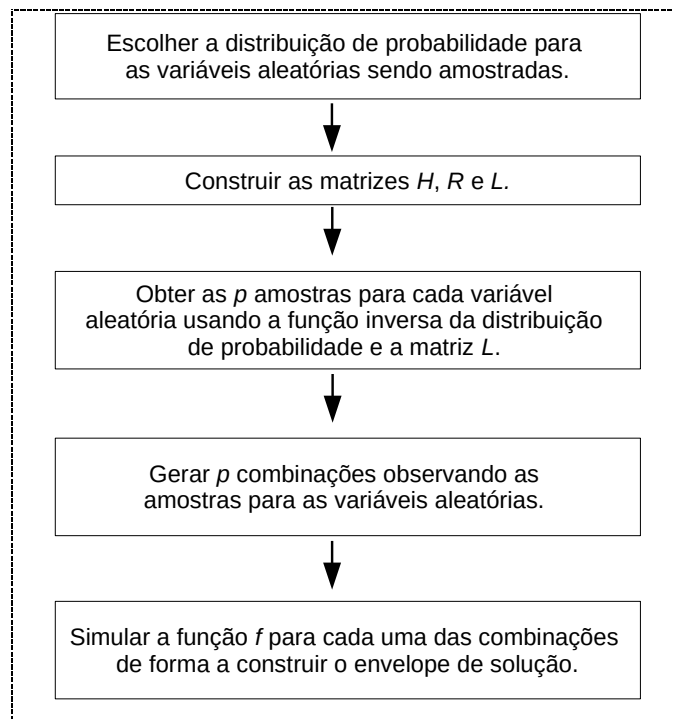
Após gerar os p pontos para cada variável aleatória X_j , para a simulação de uma função determinística f que depende das variáveis aleatórias $X_1, X_2, \dots, X_n$, seleciona-se aleatoriamente um ponto da amostra, ainda não selecionado, para cada uma dessas variáveis, o que resulta em um total de p combinações. A função f é avaliada sobre cada uma dessas combinações de forma a construir o envelope de solução, isto é, o máximo, o mínimo e o valor médio que a função obtém dada as combinações.

Embora o HCL seja um método que traz boa uniformidade para representar uma variável, ele começa a ter problemas quando o número de variáveis aleatórias aumenta. O principal problema é manter a uniformidade de preenchimento do espaço, isto é, realizar uma amostragem homogênea do espaço a fim de garantir um ponto por hipercubo. Uma forma de contornar esse problema é maximizar a mínima distância e reduzir a correlação entre os

pontos, porém não é uma tarefa trivial de ser alcançada em termos de otimização (VIANA, 2016). A Fig. 3.3 ilustra os passos a serem seguidos para a aplicação do HCL.

Todavia, o HCL tem se mostrado superior ao MC nas simulações de sistemas complexos por requerer um menor esforço computacional, pois gera menos amostras, e trazer maior precisão, pela uniformidade dos pontos gerados (PILGER; COSTA; KOPPE, 2005). Koide, Ferreira e Luersen (2013) aplicaram o HCL para gerar amostras usadas por um meta-modelo capaz de avaliar cargas de flambagem de compostos laminados sobre cargas de compressão.

Figura 3.3. Esquema de aplicação do Hipercubo Latino para simulações.



Fonte: a autora.

3.2 Decomposição de Karhunen-Loève

Conforme Guedri (2006) uma forma de quantificar incertezas em sistemas, além do Hipercubo Latino e outros métodos de amostragem, é por meio de métodos de análise espectral, como a decomposição (ou expansão ou transformação) de Karhunen-Loève. Segundo Lucor, Su e Karniadakis (2004), a decomposição de Karhunen-Loève é propícia para representar os parâmetros com incertezas.

Ghanem e Spanos (1991) desenvolveram a decomposição de Karhunen-Loève para a representação de um processo aleatório $R(\mathbf{y}, w)$ usando um conjunto de variáveis aleatórias gaussianas $\xi_i(w)$, ou seja:

$$R(\mathbf{y}, w) = \bar{R}(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j(w) \sqrt{\lambda_j} v_j(\mathbf{y}), \quad (3.2)$$

em que $\mathbf{y}$ representa um vetor espacial (ou temporal) sobre um dado domínio, w é um evento aleatório de um dado espaço de eventos, $\bar{R}(\mathbf{y})$ é o valor médio (ou valor esperado) de $R(\mathbf{y}, w)$ e λ_i é o i -ésimo autovalor, ao passo que $v_i(\mathbf{y})$ é a i -ésima autofunção, ambos λ_i e $v_i(\mathbf{y})$ são ortonormais e obtidos da covariância $C(y_1, y_2)$ associada a $R(\mathbf{y}, w)$.

Por definição, a função de covariância é limitada, simétrica e positiva definida, definida a partir da integral sobre o domínio do vetor posição (GHANEM; SPANOS, 1991), a saber:

$$\int C(y_1, y_2) v_i(\mathbf{y}) dy_1 = \lambda_i v_i(y_2). \quad (3.3)$$

Segundo Ghanem e Spanos (1991) é comum truncar a expansão da Eq. (3.2) fazendo o índice j na somatória variar até um N -ésimo termo. Apesar da expansão ser truncada, as informações estocásticas do campo ainda continuam bem representadas, o que faz da decomposição de Karhunen-Loève uma boa técnica para a redução do espaço probabilístico e consequente uso em métodos mais avançados de quantificação de incertezas, como o caos polinomial. A decomposição truncada passa a ter problemas de convergência quando a magnitude dos autovalores demora a diminuir, o que exige mais termos na decomposição (CUNHA, 2010).

Uma aplicação importante da decomposição de Karhunen-Loève ocorre no método de Elementos Finitos Estocástico, pois uma vez que os parâmetros do sistema são incertos, eles podem ser representados por campos aleatórios. E, com a inclusão da decomposição de Karhunen-Loève, pode-se diminuir o custo computacional do método de elementos finitos por exigir menos variáveis para a representação das incertezas (GUEDRI; BOUHADDI; MAJED, 2006).

Costa (2016) empregou o método de elementos finitos estocástico com a decomposição de Karhunen-Loève para simular uma viga de Euler-Bernoulli engastada-livre com uma resposta no domínio da frequência. A autora considerou a largura e a espessura da viga como parâmetros incertos para uma decomposição de Karhunen-Loève com $N = 10$ termos. Os resultados mostraram a convergência do método, a partir da análise das frequências naturais, conforme a resposta determinística.

Wang e Sett (2016) investigaram a equação de propagação de ondas sísmicas em sólidos heterogêneos sob a presença de incertezas na força de atuação externa e no módulo de elasticidade do sólido. Os autores aplicaram a expansão em caos polinomial e a decomposição de Karhunen-Loève para representar as incertezas. As equações de movimento foram obtidas usando elementos finitos estocásticos, ao passo que as simulações no domínio do tempo ocorreram com a aplicação do método de Newmark. Zhou et al. (2017a) desenvolveram uma abordagem para a análise de estruturas compostas com incertezas nas propriedades dos materiais e ângulo-ply. As respostas estruturais foram obtidas a partir da aplicação do método de elementos finitos multi-escala estocástico e comparadas com o método de Monte Carlo.

3.3 Caos Polinomial

A expansão em caos polinomial (do inglês *Polynomial Chaos* – PC) foi proposta inicialmente para resolver equações diferenciais estocásticas. Atualmente, a expansão em PC tem também sido aplicada para resolver sistemas mecânicos, em especial, quando há a presença de incertezas. A expansão em PC permite criar uma relação robusta entre a resposta do sistema e as variáveis aleatórias, uma vez que pode determinar a média e o desvio-padrão da resposta. A expansão em PC permite separar, na resposta aleatória do sistema, a parte estocástica, que fica concentrada apenas na base de polinômios utilizada, da determinística, que contém os coeficientes da expansão e permite determinar as estatísticas mencionadas.

A expansão em PC foi definida com base em uma expansão dos polinômios de Hermite para processos estocásticos de segunda ordem (isto é, processos com variância finita) em termos de variáveis aleatórias gaussianas ortonormais independentes considerando o espaço de Hilbert L^2 . Segundo Xiu et al. (2003), o PC com base em polinômios de Hermite é também chamado de PC Homogêneo, dado o seu desenvolvimento na teoria do caos homogêneo de Wiener.

Apesar do PC homogêneo ser utilizado também para lidar com processos envolvendo outros tipos de polinômios ortogonais, a sua convergência nesses casos é lenta. Por isso, uma versão generalizada do PC foi proposta envolvendo o uso de bases de polinômios ortogonais do esquema de Askey, resultando na chamada expansão em PC Generalizada ou PC de Wiener-Askey (SCHOUTENS, 1999).

Na versão do PC generalizado, as variáveis aleatórias podem seguir a distribuição uniforme (requer polinômios de Legendre), beta (polinômio de Jacobi), exponencial (polinômio de Laguerre), gama (polinômio de Laguerre generalizado), entre outras. Também

é possível considerar variáveis discretas, com a distribuição de Poisson (polinômios de Charlier), binominal (polinômio de Krawtchouk), hipergeométrica (polinômio de Hahn), etc (XIU et al., 2003).

Partindo de Ghanem e Spanos (1991), faz-se adiante o desenvolvimento da expansão em PC homogêneo, dado um processo estocástico em que se utiliza a base de polinômios de Hermite. Para a resposta aleatória do sistema representada por um processo estocástico (ou variável aleatória) de segunda ordem $X(w)$, em que w representa um evento aleatório, a expansão em PC é dada por:

$$\begin{aligned} X(w) = & a_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1} \Gamma_1(\xi_{i_1}(w)) + \\ & \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}(w), \xi_{i_2}(w)) + \\ & \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} a_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_3(\xi_{i_1}(w), \xi_{i_2}(w), \xi_{i_3}(w)) + \\ & \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \sum_{i_4=1}^{i_3} a_{i_1 i_2 i_3 i_4} \Gamma_4(\xi_{i_1}(w), \xi_{i_2}(w), \xi_{i_3}(w), \xi_{i_4}(w)) + \dots, \end{aligned} \quad (3.4)$$

em que os $a_{i_j \dots}$ representam os coeficientes da expansão; $\Gamma_p(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_n})$ representa o polinômio do caos de ordem p e de dimensão $n = \infty$, que é ortogonal em termos das variáveis aleatórias gaussianas independentes dadas em $\xi = (\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_n})$. Por conveniência, omite-se o argumento w das variáveis em ξ .

A Eq. (3.4) pode ser rescrita a partir de uma indexação baseada em termo resultando em:

$$X(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{a}_j \Phi_j(\xi), \quad (3.5)$$

em que existe uma bijeção entre os termos Γ_p com Φ_j , assim como entre $a_{i \dots}$ e os novos coeficientes $\hat{a}_j$.

Os polinômios em $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots\}$ formam uma base ortogonal completa em termo das variáveis aleatórias independentes em ξ , de forma que produto interno coincide com o valor esperado E no espaço de Hilbert (LUCOR; SU; KARNIADAKIS, 2004), isto é:

$$\langle \Phi_r, \Phi_s \rangle = E[\Phi_r, \Phi_s] = \int_C \Phi_r(\xi) \Phi_s(\xi) \rho(\xi) d\xi, \quad (3.6)$$

em que $\rho(\xi)$ representa a função peso e C é o suporte (intervalo de ortogonalidade). Os polinômios são ortogonais e, assim, o produto interno é nulo, tal que a integral resulta em zero para $r \neq s$.

A função peso assume a forma da função de distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias ξ sendo consideradas. No caso particular do PC homogêneo, em que o C

representa o intervalo $(-\infty, \infty)$, a função peso dos polinômios ortogonais de Hermite é dada por (XIU et al., 2003):

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}\xi^T \xi}, \quad (3.7)$$

que também representa a função densidade de probabilidade de variáveis aleatórias gaussianas n -dimensionais, como é o caso de ξ .

Na expansão em PC homogêneo, o polinômio do caos Γ_p , de ordem p e dimensão n , é obtido calculando-se o polinômio de Hermite n -dimensional (GHANEM; SPANOS, 1991), isto é:

$$\Gamma_p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (-1)^n \left(e^{\frac{1}{2}\xi^T \xi} \right) \left(\frac{\partial^n}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \dots \partial \xi_n} e^{-\frac{1}{2}\xi^T \xi} \right), \quad (3.8)$$

que pode ser reescrito como um produto de n polinômios em uma única variável, considerando que $\Phi_0 = 1$, a saber (LIRA, 2012):

$$\Gamma_p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \Phi_1(\xi_1) \Phi_2(\xi_2) \dots \Phi_n(\xi_n) = \Phi_j(\xi), \quad (3.9)$$

É importante destacar que, no caso da expansão em PC generalizado, as variáveis aleatórias em ξ não são necessariamente gaussianas. Neste caso, faz-se a escolha de uma base de polinômios ortogonais (esquema de Askey) de acordo com a distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias que representam as incertezas. Logo, o produto interno na Eq. (3.6) deve considerar a função peso, na Eq. (3.7), definida de acordo com a base de polinômios usada, e da mesma forma para o intervalo representado pelo suporte C .

Os coeficientes $\hat{a}_j$ na Eq. (3.5) são obtidos seguindo a Eq. (3.10), calculados a partir da projeção de Galerkin (CUNHA, 2010), que consiste na projeção da resposta com relação a cada polinômio da base Φ por meio do produto interno, além de considerar as propriedades de ortogonalidade, isto é:

$$\hat{a}_j = \frac{\langle X(\xi), \Phi_j(\xi) \rangle}{\langle \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i(\xi), \Phi_j(\xi) \rangle} = \frac{\int_C X(\xi) \Phi_j(\xi) \rho(\xi) d\xi}{\langle \Phi_j(\xi), \Phi_j(\xi) \rangle}, \quad (3.10)$$

uma vez que somente para $i = j$ o produto interno $\langle \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i(\xi), \Phi_j(\xi) \rangle$ é não nulo. Observa-se que o numerador depende da resolução de uma integral n -dimensional em ξ , enquanto o denominador pode ser resolvido analiticamente. Na maioria dos casos, emprega-se o método da quadratura Gaussiana (POLES; LOVISON, 2009).

Do ponto de vista aplicado, a Eq. (3.5), que contém uma expansão infinita, é substituída por uma finita, ao mesmo tempo que se usa um número finito de variáveis aleatórias. Assim, a expansão finita em PC passa a ser:

$$X(w) = \sum_{j=0}^N \hat{a}_j \Phi_j(\xi), \quad (3.11)$$

em que N representa o número de termos da expansão dado um polinômio de ordem máxima p e a dimensão de ξ sendo $n < \infty$. O valor de N é obtido por:

$$N = \frac{(n+p)!}{n!p!} - 1. \quad (3.12)$$

Para a aplicação da expansão em PC homogêneo conforme Ghanem e Spanos (1991), grande parte dos problemas mecânicos que envolvem variáveis aleatórias podem ser escritos como:

$$(L - \Pi(w))X(w) = F(w), \quad (3.13)$$

em que L é a componente determinística e $\Pi(w)$ é a componente aleatória do sistema, enquanto $X(w)$ é a resposta aleatória relacionada com a excitação $F(w)$.

Por sua vez, a componente aleatória, que contém as incertezas, pode ser escrita como $\Pi(w) = \alpha(w)R$, em que R representa a parte determinística. No caso do PC homogêneo, o processo $\alpha(w)$ pode ser expresso na forma de uma expansão de Karhunen-Loève da seguinte forma:

$$\alpha(w) = \bar{\alpha}(w) + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(w)g_i, \quad (3.14)$$

sendo $\bar{\alpha}(w)$ o valor médio do processo $\alpha(w)$ e g_i funções determinísticas associadas a covariância do processo, sendo geralmente o desvio-padrão associado ao processo $\alpha(w)$. Pode ser conveniente, em situações em que a função de covariância do processo é desconhecida, representar $\alpha(w)$ por uma expansão em PC usando a Eq. (3.5).

A resposta aleatória $X(w)$ na Eq. (3.13) expressa por uma expansão em PC n -dimensional finita de N termos é dada por:

$$X(w) = \sum_{j=0}^N x_j \Phi_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n). \quad (3.15)$$

Os coeficientes x_j na Eq. (3.15) são os mesmos $\hat{a}_j$ na Eq. (3.5) e podem ser obtidos a partir da substituição das Eqs. (3.14) e (3.15) na Eq. (3.13), em seguida multiplicando a

equação resultante por cada Φ_j e tomando o produto interno considerando as propriedades de ortogonalidade dos polinômios em Φ . Em outras palavras, tem-se a projeção da resposta sobre o espaço de variáveis aleatórias considerando a base de polinômios adotada. Assim, chega-se em:

$$x_r \langle \Phi_r^2 \rangle L + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^N x_j \langle \xi_i \Phi_j, \Phi_r \rangle \mathbf{R} = F \langle \Phi_r \rangle, \quad \text{para } r = 0, 1, \dots, N, \quad (3.16)$$

que resulta em sistema de $N + 1$ equações para obter os coeficientes x_j . Os coeficientes $\langle \xi_i \Phi_j, \Phi_r \rangle$ podem ser obtidos analiticamente pela Eq. (3.6), ou numericamente, por exemplo, usando algum método de quadratura, enquanto $\mathbf{R} = \sum_i R_i g_i$.

Após a resolução do sistema na Eq. (3.16), as estatísticas da resposta aleatória $X(w)$ do sistema, neste caso a sua média e variância são expressas respectivamente por:

$$\mu_X = x_0, \quad (3.17)$$

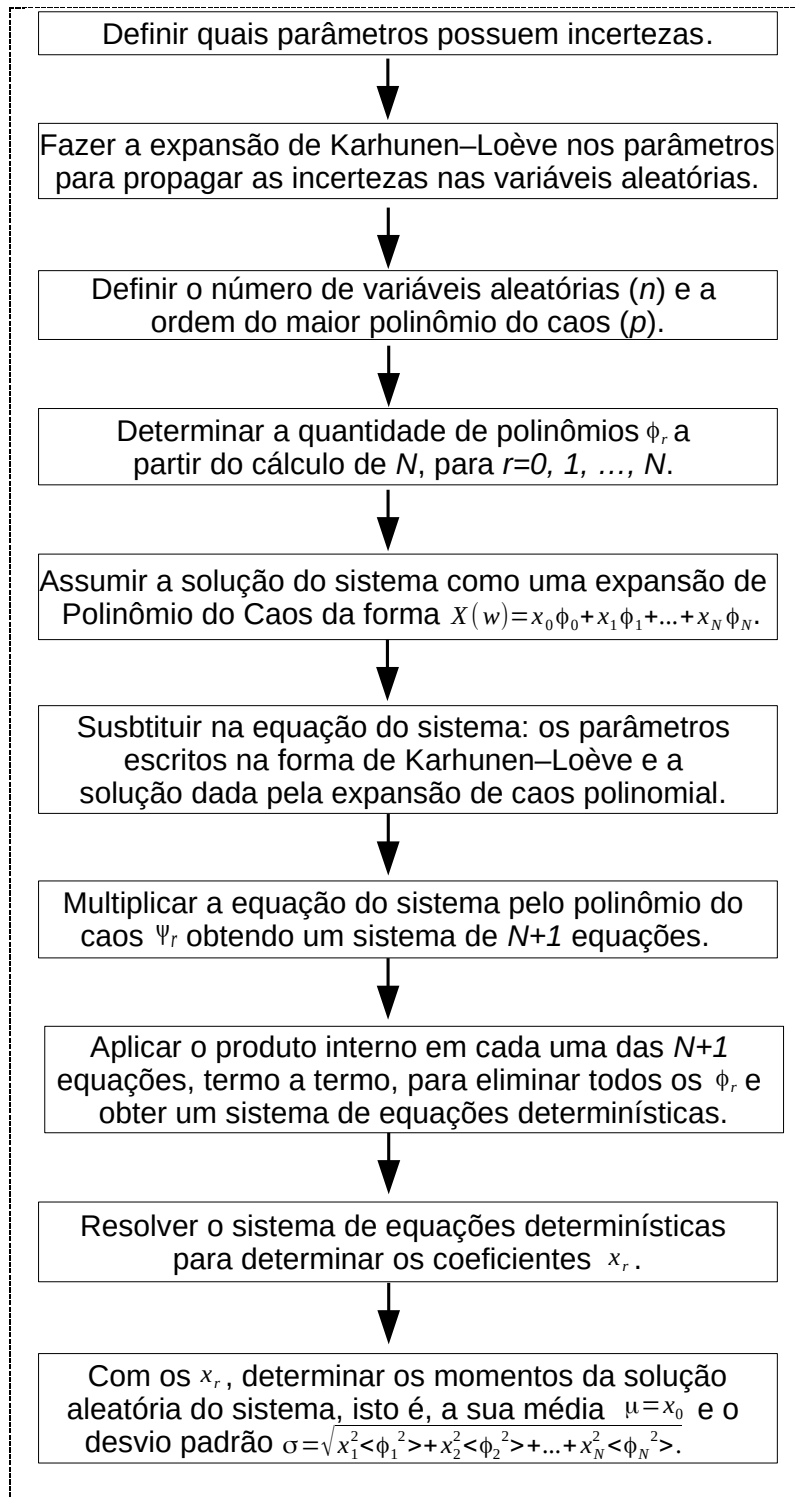
$$\sigma_X^2 = \sum_{j=1}^N x_j^2 \langle \Phi_j^2 \rangle. \quad (3.18)$$

Tabelas contendo os polinômios do caos até a quarta ordem ($p = 4$) e com até quatro dimensões ($n = 4$ variáveis aleatórias), para a base com os polinômios de Hermite, podem ser encontradas em Ghanem e Spanos (1991). A Fig. 3.4 ilustra um esquema para a aplicação da expansão em PC para a quantificação de incertezas em sistemas.

A versão generalizada do PC foi estendida por Shi e Zhand (2007) para resolver equações diferenciais não lineares sujeitas à atrasos aleatórios. Os autores constataram que o erro nos resultados deriva principalmente do ruído dimensional finito inserido na modelagem.

O PC foi aplicado para simulações estocásticas dependente do tempo e para a reconfiguração de sistemas de energia por Prempraneerach et al. (2010). Os coeficientes foram calculados usando a projeção de Galerkin e o método de Colocação, de forma que os resultados sobre dois componentes eletromecânicos de um chip foram apresentados. Os resultados mostraram que o PC é muito eficiente em comparação com o Monte Carlo mesmo usando pequenas dimensões (isto é, quando há poucas variáveis aleatórias representando a solução do sistema).

Figura 3.4. Esquema de aplicação da expansão em caos polinomial para a quantificação de incertezas.



Fonte: a autora.

Seguí, Faverjon e Jacquet-Richardet (2013) investigaram o efeito de incertezas associadas as propriedades de lâminas na dinâmica de sistemas de discos laminados multiestágios. Os autores consideraram a aplicação do PC para obter a resposta dinâmica do sistema e, assim, compararam com o método de Monte Carlo para diferentes análises modais

e com forças externas atuantes. Foi possível notar por parte dos autores que a consideração de incertezas pode acarretar em mudanças significativas no comportamento dinâmico e nos modos do sistema, todavia o PC conseguiu captá-las convenientemente.

Em Sinou e Jacquelin (2015), um rotor com incertezas na rigidez e acoplamento simétrico de termos dependentes do tempo foi analisado em velocidades críticas a partir da aplicação do método de balanço harmônico estocástico e expansão em PC. Os autores propuseram um método recursivo para calcular os coeficientes do PC e, assim, estimar a resposta estacionária do rotor quando se usa expansões do PC com polinômios de alta ordem.

Capítulo 4

ESTUDO DE INCERTEZAS EM SISTEMAS MECÂNICOS

Com o intuito de mostrar o desenvolvimento da expansão em PC para o estudo das incertezas, além de analisar a sua eficácia frente ao HCL, faz-se adiante a aplicação em sistemas mecânicos do tipo massa-mola-amortecedor. Sistemas desse tipo são comuns durante a descrição e representação de mecanismos complexos da engenharia, bem como o estudo proposto pode ser estendido para representar outros sistemas.

Na análise, o primeiro caso considera a resposta no domínio da frequência para um sistema linear, em que a massa e rigidez são parâmetros incertos. O segundo caso já considera um sistema não linear, com a não linearidade presente na mola, e as incertezas presentes nos coeficientes de rigidez, em que se busca a resposta no domínio do tempo. A última parte do capítulo está relacionada ao projeto ótimo de um sistema massa-mola de dois graus de liberdade em que as massas são parâmetros incertos. Assim, deseja-se determinar a rigidez das molas para que a primeira frequência natural seja máxima e o desvio da resposta aleatória seja mínimo, como forma de atenuar os níveis de vibração do sistema.

Wang, Friswellb e Leic (2006) lidaram com o projeto de uma viga sob diferentes condições de contorno com o objetivo de determinar a posição ótima do suporte e a sua rigidez visando a maximização das frequências de vibração da viga. Rajasekara, Anneta e Choob (2008) trabalharam com a movimentação de plataformas marinhas *offshores* por guindastes objetivando determinar a posição dos suportes nos guindastes para que a frequência de vibração seja máxima. Picelli et al. (2015) desenvolveram um algoritmo evolucionário para otimizar a topologia de sistemas com estrutura acústica, em que se buscou maximizar a primeira frequência natural do sistema.

4.1 Resposta no Domínio da Frequência

Seja o sistema massa-mola-amortecedor ilustrado na Fig. 2.1. Assumindo a solução da Eq. (2.1) na forma exponencial $u(t) = Ue^{i\omega t}$ e $F = F_0 \cos(\omega t)$, para uma análise modal, chega-se na resposta (INMAN, 2013):

$$(-\omega^2 m + \omega ci + k)U = F_0. \quad (4.1)$$

Ao assumir que a massa e a rigidez da mola são parâmetros com incertezas representadas por variáveis aleatórias gaussianas independentes, aplica-se a expansão em PC homogêneo. A partir da Eq. (3.14), os parâmetros incertos podem ser descritos na forma de uma decomposição de Karhunen-Loève finita, em que se assume uma única variável independente por parâmetro, resultando respectivamente em:

$$\begin{cases} \tilde{m} = \bar{m} + \sum_{n=1}^1 \xi_n g_n = \bar{m} + \xi_1 \sigma_m, \\ \tilde{k} = \bar{k} + \sum_{n=2}^2 \xi_n g_n = \bar{k} + \xi_2 \sigma_k. \end{cases} \quad (4.2)$$

em que $\bar{m}$ e $\bar{k}$ representam as médias e correspondem aos respectivos valores nominais m e k ; $g_1 = \sigma_m$ e $g_2 = \sigma_k$ são os respectivos valores do desvio-padrão para a massa e a rigidez assumindo a distribuição gaussiana; e, ξ_1 e ξ_2 são as respectivas variáveis aleatórias para a massa e a rigidez.

Substituindo a Eq. (4.2) na Eq. (4.1) e organizando conforme a Eq. (3.13), tem-se:

$$[(-\omega^2 m + \omega ci + k) + (-\omega^2 \sigma_m \xi_1 + \sigma_k \xi_2)]U = F_0. \quad (4.3)$$

Para a resposta do sistema representada por uma expansão finita com $n = 2$ variáveis aleatórias e um caos polinomial de ordem máxima $p = 2$, logo com $N = 5$, tem-se:

$$U = \sum_{j=0}^5 u_j \Phi_j(\xi_1, \xi_2) = u_0 \Phi_0 + u_1 \Phi_1 + u_2 \Phi_2 + u_3 \Phi_3 + u_4 \Phi_4 + u_5 \Phi_5, \quad (4.4)$$

em que os polinômios de Hermite bidimensionais, obtidos pela Eq. (3.8), são definidos juntamente com as suas propriedades na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Polinômios de Hermite bidimensionais.

Polinômio	Valor	Produto Interno $\langle \Phi_j \rangle$	Produto Interno $\langle \Phi_j^2 \rangle$
Φ_0	1	1	1
Φ_1	ξ_1	0	1
Φ_2	ξ_2	0	1
Φ_3	$\xi_1^2 - 1$	0	2
Φ_4	$\xi_1 \xi_2$	0	1
Φ_5	$\xi_2^2 - 1$	0	2

Fonte: a autora.

A partir da Eq. (3.16), escrevem-se as $N + 1 = 6$ equações algébricas para obter os coeficientes u_j da Eq. (4.4). Em outras palavras:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 \langle \Phi_0^2 \rangle L + \sum_{n=1}^2 \sum_{j=0}^5 u_j \langle \xi_n \Phi_j, \Phi_0 \rangle \mathbf{R} = F_0 \langle \Phi_0 \rangle, \\ u_1 \langle \Phi_1^2 \rangle L + \sum_{n=1}^2 \sum_{j=0}^5 u_j \langle \xi_n \Phi_j, \Phi_1 \rangle \mathbf{R} = F_0 \langle \Phi_1 \rangle, \\ u_2 \langle \Phi_2^2 \rangle L + \sum_{n=1}^2 \sum_{j=0}^5 u_j \langle \xi_n \Phi_j, \Phi_2 \rangle \mathbf{R} = F_0 \langle \Phi_2 \rangle, \\ u_3 \langle \Phi_3^2 \rangle L + \sum_{n=1}^2 \sum_{j=0}^5 u_j \langle \xi_n \Phi_j, \Phi_3 \rangle \mathbf{R} = F_0 \langle \Phi_3 \rangle, \\ u_4 \langle \Phi_4^2 \rangle L + \sum_{n=1}^2 \sum_{j=0}^5 u_j \langle \xi_n \Phi_j, \Phi_4 \rangle \mathbf{R} = F_0 \langle \Phi_4 \rangle, \\ u_5 \langle \Phi_5^2 \rangle L + \sum_{n=1}^2 \sum_{j=0}^5 u_j \langle \xi_n \Phi_j, \Phi_5 \rangle \mathbf{R} = F_0 \langle \Phi_5 \rangle. \end{array} \right. \quad (4.5)$$

sendo os coeficientes $L = -\omega^2 m + \omega ci + k$, $\mathbf{R} = -\omega^2 \sigma_m + \sigma_k$, e os $\langle \xi_n \Phi_j, \Phi_r \rangle$ calculados pela Eq. (3.6) considerando a função peso na Eq. (3.7), que resulta no seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 L + (u_1 + u_2) \mathbf{R} = F_0, \\ u_1 L + (u_0 + 2u_3 + u_4) \mathbf{R} = 0, \\ u_2 L + (u_0 + u_4 + 2u_5) \mathbf{R} = 0, \\ u_3 L + 2u_1 \mathbf{R} = 0, \\ u_4 L + (u_1 + u_2) \mathbf{R} = 0, \\ u_5 L + 2u_2 \mathbf{R} = 0. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Assim, obtém-se os coeficientes para, em seguida, obter os momentos, isto é:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{F_0(L^2 - 6R^2)}{L(L^2 - 8R^2)}, \\ u_1 = \frac{-F_0R}{L^2 - 8R^2}, \\ u_2 = \frac{-F_0R}{L^2 - 8R^2}, \\ u_3 = \frac{2F_0R^2}{L(L^2 - 8R^2)}, \\ u_4 = \frac{2F_0R^2}{L(L^2 - 8R^2)}, \\ u_5 = \frac{-2F_0R^2}{L(-L^2 + 8R^2)}, \end{cases} \quad (4.7)$$

Por fim, os momentos de primeira e segunda ordem, isto é, a média e a variância da resposta aleatória são expressas respectivamente por:

$$\mu_U = u_0, \quad (4.8)$$

$$\sigma_U^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_3^2 + u_4^2 + 2u_5^2. \quad (4.9)$$

A avaliação da resposta do sistema massa-mola-amortecedor é feita adiante para uma codificação usando o *software* Matlab[®]. Para tanto, analisa-se a média (valor esperado) e o desvio-padrão retornado pelo PC com relação ao HCL. No caso particular da média, considera-se também a resposta determinística do sistema, isto é, sem incertezas. Os valores adotados para os parâmetros estão listados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2. Parâmetros adotados para o sistema massa-mola-amortecedor.

Parâmetro	Média (ou Nominal)	Desvio-Padrão
m [kg]	100	{2, 3, 8, 10}
k [N/m]	2000	{34, 57, 110, 151}
c [Ns/m]	170	-
F_0 [N]	1500	-

Fonte: a autora.

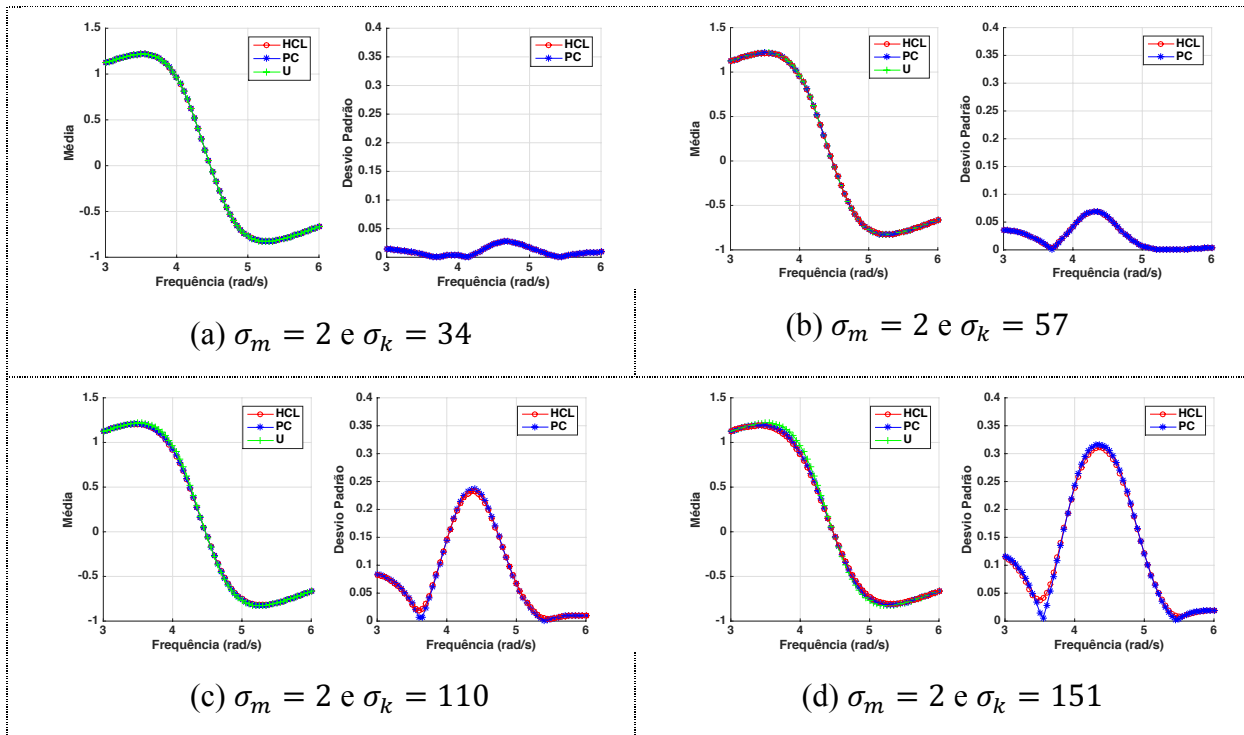
Os valores do desvio-padrão foram gerados para um intervalo de variação entre 0,5% a 10% do respectivo valor nominal e tomando apenas a parte inteira do resultado. A primeira análise (A1) considera o desvio-padrão da massa fixo em 2 kg, enquanto o desvio-padrão da rigidez é variado seguindo os valores da Tabela 4.2. De forma similar, a segunda análise (A2)

adota o desvio da rigidez fixo em 34 N/m , enquanto o desvio-padrão da massa varia conforme a Tabela 4.2.

As Figs. 4.1 e 4.2 trazem, respectivamente, os resultados apenas da parte real para as análises A1 e A2, em que a frequência ω varia no intervalo de $[3, 6] \text{ rad/s}$, o qual inclui a frequência de ressonância. Os resultados são apresentados para o PC, com a média da resposta na Eq. (4.8), sendo comparada com a resposta determinística na Eq. (4.1) e a simulação por Hipercubo Latino que convergiu com 1.000 amostras. No caso do desvio-padrão retornado pelo PC, conforme a Eq. (4.9), tem-se a comparação apenas com a solução do HCL.

Os resultados nas Figs. 4.1 e 4.2 mostram que a solução determinística U começa a divergir do valor médio das soluções do PC e do HCL quando o desvio da rigidez aumenta e o da massa tem um valor pequeno (veja, por exemplo, nas Figs. 4.1c e 4.1d). De forma similar, quando o desvio da massa aumenta e o da rigidez permanece pequena, tem-se que as soluções começam a divergir (observe as Fig. 4.2c e 4.2d). Note que em ambas as situações, o desvio-padrão da resposta aumenta consideravelmente, principalmente próximo da frequência de ressonância do sistema.

Figura 4.1. Resposta (média e desvio-padrão) do sistema massa-mola-amortecedor para A1.



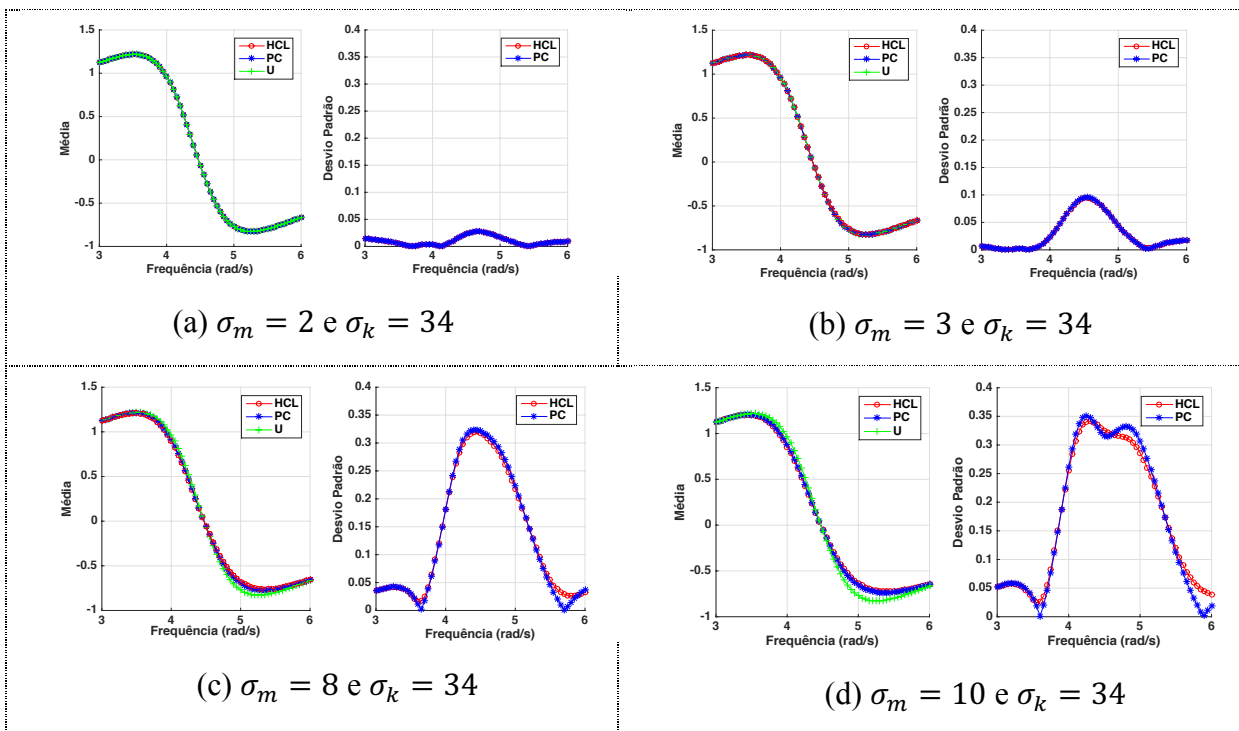
Fonte: a autora.

Nas Figs. 4.1 e 4.2 ainda é possível observar que a solução U é próxima da solução do PC e HCL apenas para pequenos valores do desvio-padrão da massa e da rigidez (veja as Figs.

4.1a, 4.1b, 4.2a e 4.2b). Observe que o desvio-padrão da resposta tem pouca dispersão nestes casos. Em termos da resposta dada pelo PC e HCL, ambos os métodos retornam respostas bem similares para o valor médio (com pouca dispersão) em todos os casos. Por outro lado, para o valor do desvio-padrão, as respostas passam a ter diferenças visíveis para os casos de maior variabilidade no desvio-padrão da rigidez (Figs. 4.1c e 4.1d) e da massa (Figs. 4.2c e 4.2d).

De forma geral, ao fixar o desvio-padrão da massa (rigidez) em seu valor mais baixo e variar o desvio da rigidez (massa), tem-se que o desvio-padrão obtido com o PC e o HCL tende a aumentar, enquanto a solução determinística começa a divergir do valor esperado dado pelo PC. Além disso, os métodos PC e HCL também começam a divergir para variações mais altas dos parâmetros incertos, mostrando que o sistema em estudo é mais sensível para variações na massa.

Figura 4.2. Resposta (média e desvio-padrão) do sistema massa-mola-amortecedor para A2.



Fonte: a autora.

4.2 Resposta no Domínio do Tempo

Considera-se agora a aplicação da expansão em PC homogêneo para um sistema dinâmico não linear com o intuito de analisar a sua resposta no tempo. Para tanto, seja o sistema massa-mola-amortecedor da Fig. 2.1 em que a mola apresenta características não

lineares da forma $F_k = ku - k_1 u^2$, conforme discutido no Capítulo 2, cuja equação de movimento não linear corresponde a Eq. (2.3).

Assume-se que os parâmetros associados a rigidez possuem incertezas e, assim, são representados por variáveis aleatórias gaussianas independentes. Similar ao caso anterior, os parâmetros incertos são expressos na forma de uma expansão de Karhunen-Loève finita usando uma variável aleatória por parâmetro, o que resulta em:

$$\begin{cases} \tilde{k} = \bar{k} + \sum_{n=1}^1 \xi_i g_i = k + \xi_1 \sigma_k, \\ \tilde{k}_1 = \bar{k}_1 + \sum_{n=2}^2 \xi_i g_i = k_1 + \xi_2 \sigma_{k_1}. \end{cases} \quad (4.10)$$

em que $\bar{k}$ e $\bar{k}_1$ representam as médias e são tomadas iguais aos respectivos valores nominais; $g_1 = \sigma_k$ e $g_2 = \sigma_{k_1}$ representam os respectivos valores do desvio-padrão; e ξ_1 e ξ_2 são as variáveis aleatórias para $\tilde{k}$ e $\tilde{k}_1$, respectivamente.

A resposta dinâmica do sistema não linear é representada por uma expansão em PC homogêneo finita, em que se assume $n = 2$ variáveis aleatórias e um polinômio de ordem máxima $p = 2$, o que resulta em $N = 5$. Em outras palavras, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t, \xi) &= \sum_{j=0}^5 u_j(t) \Phi_j(\xi_1, \xi_2) \\ &= u_0 \Phi_0 + u_1 \Phi_1 + u_2 \Phi_2 + u_3 \Phi_3 + u_4 \Phi_4 + u_5 \Phi_5. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Substituindo as Eq. (4.11) na equação de movimento do sistema não linear, Eq. (2.3), assim propagando as incertezas pelo sistema, chega-se em:

$$\begin{aligned} m \sum_{j=0}^5 \ddot{u}_j \Phi_j + c \sum_{j=0}^5 \dot{u}_j \Phi_j + (k + \xi_1 \sigma_k) \left(\sum_{j=0}^5 u_j \Phi_j \right) \\ - (k_1 + \xi_2 \sigma_{k_1}) \left(\sum_{j=0}^5 u_j \Phi_j \right)^2 = F_0 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Segundo Lucor e Karniadakis (2004), faz-se a projeção da Eq. (4.12) sobre o espaço aleatório considerando a base de polinômios ortogonais de Hermite em Φ . Em outras palavras, faz-se o produto interno com cada polinômio da base em cada termo da Eq. (4.12), a

fim de obter um conjunto de $N + 1 = 6$ equações não lineares para o movimento do sistema, isto é, para $r = 0, 1, \dots, 5$:

$$\begin{aligned}
 \ddot{u}_r + \frac{c}{m\langle\Phi_r^2\rangle}\dot{u}_r + \frac{k}{m\langle\Phi_r^2\rangle}u_r + \frac{\sigma_k}{m\langle\Phi_r^2\rangle}\sum_{i=1}^2\sum_{j=0}^5u_j\langle\xi_i\Phi_j,\Phi_r\rangle + \\
 - \frac{k_1}{m\langle\Phi_r^2\rangle}\sum_{j=0}^5\sum_{l=0}^5u_ju_l\langle\Phi_j\Phi_l,\Phi_r\rangle + \\
 - \frac{\sigma_{k_1}}{m\langle\Phi_r^2\rangle}\sum_{i=1}^2\sum_{j=0}^5\sum_{l=0}^5u_ju_l\langle\xi_i\Phi_j\Phi_l,\Phi_r\rangle \\
 = \left(\frac{F_0}{m\langle\Phi_r^2\rangle}\cos\omega t\right)\langle\Phi_r\rangle.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Embora o conjunto de equações que vai ser obtido a partir da Eq. (4.13) seja acoplado, ele é determinístico, uma vez que a aleatoriedade do sistema foi deslocada para a base de polinômios Φ . Diante disto, as equações resultantes podem ser resolvidas por métodos de integração numérica, como por exemplo o Runge-Kutta de quarta ordem (KEWLANI et al., 2012).

Para a resolução pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, escreve-se a Eq. (4.13), para cada r , em um conjunto de equações de primeira ordem em termos de $\dot{U}_{1,r}(t) = \dot{u}_r$ e $\dot{U}_{2,r}(t) = \ddot{u}_r$, a saber:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \dot{U}_{1,r} &= U_{2,r}, \\
 \dot{U}_{2,r} &= -\frac{c}{m}U_{2,r} - \frac{k}{m}U_{1,r} - \frac{\sigma_k}{m\langle\Phi_r^2\rangle}\sum_{i=1}^2\sum_{j=0}^5U_{1,j}\langle\xi_i\Phi_j,\Phi_m\rangle + \\
 &+ \frac{k_1}{m\langle\Phi_r^2\rangle}\sum_{j=0}^5\sum_{l=0}^5U_{1,j}U_{1,l}\langle\Phi_j\Phi_l,\Phi_r\rangle + \\
 &+ \frac{\sigma_{k_1}}{m\langle\Phi_r^2\rangle}\sum_{i=1}^2\sum_{j=0}^5\sum_{l=0}^5U_{1,j}U_{1,l}\langle\xi_i\Phi_j\Phi_l,\Phi_r\rangle + \left(\frac{F_0}{m\langle\Phi_r^2\rangle}\cos\omega t\right)\langle\Phi_r\rangle.
 \end{aligned} \right. \tag{4.14}$$

A média e a variância da resposta (deslocamento da massa) no tempo t são expressas respectivamente por:

$$\mu_u(t) = u_0 = U_{1,0}, \tag{4.15}$$

$$\sigma_U^2(t) = u_1^2 + u_2^2 + 2u_3^2 + u_4^2 + 2u_5^2 = U_{1,1}^2 + U_{1,2}^2 + 2U_{1,3}^2 + U_{1,4}^2 + 2U_{1,5}^2. \quad (4.16)$$

Assim como no caso anterior, para a resposta no domínio da frequência, a avaliação da resposta dinâmica no tempo do sistema massa-mola-amortecedor não linear é feita adiante para os coeficientes da rigidez linear e não linear considerados como parâmetros incertos. Os valores adotados para os parâmetros estão listados na Tabela 4.3.

Os valores do desvio-padrão foram gerados considerando uma variação entre 0,5% a 10% do respectivo valor médio (nominal), em que apenas a parte inteira do resultado é considerada. A primeira análise (B1) considera o desvio-padrão $k_1 = 7$, enquanto o desvio-padrão de k varia de acordo com os dados da Tabela 4.3. De forma similar, a segunda análise (B2) adota $k = 34$, enquanto o desvio-padrão de k_1 varia conforme a Tabela 4.3.

Os resultados apenas da parte real para as análises B1 e B2 são reportados nas Figs. 4.3 e 4.4, em que o tempo t varia no intervalo fechado de $[0, 10]$ segundos. Os resultados são apresentados para a expansão em PC homogêneo, com o valor médio da resposta na Eq. (4.15) sendo comparada com a resposta determinística dada pela resolução da Eq. (2.3) com o método de Runge-Kutta de quarta ordem. As condições iniciais para a resolução foram $u(0) = u_r(0) = 0,01$ e $\dot{u}(0) = \dot{u}_r(0) = 0,1$, para $r = 0, 1, \dots, 5$.

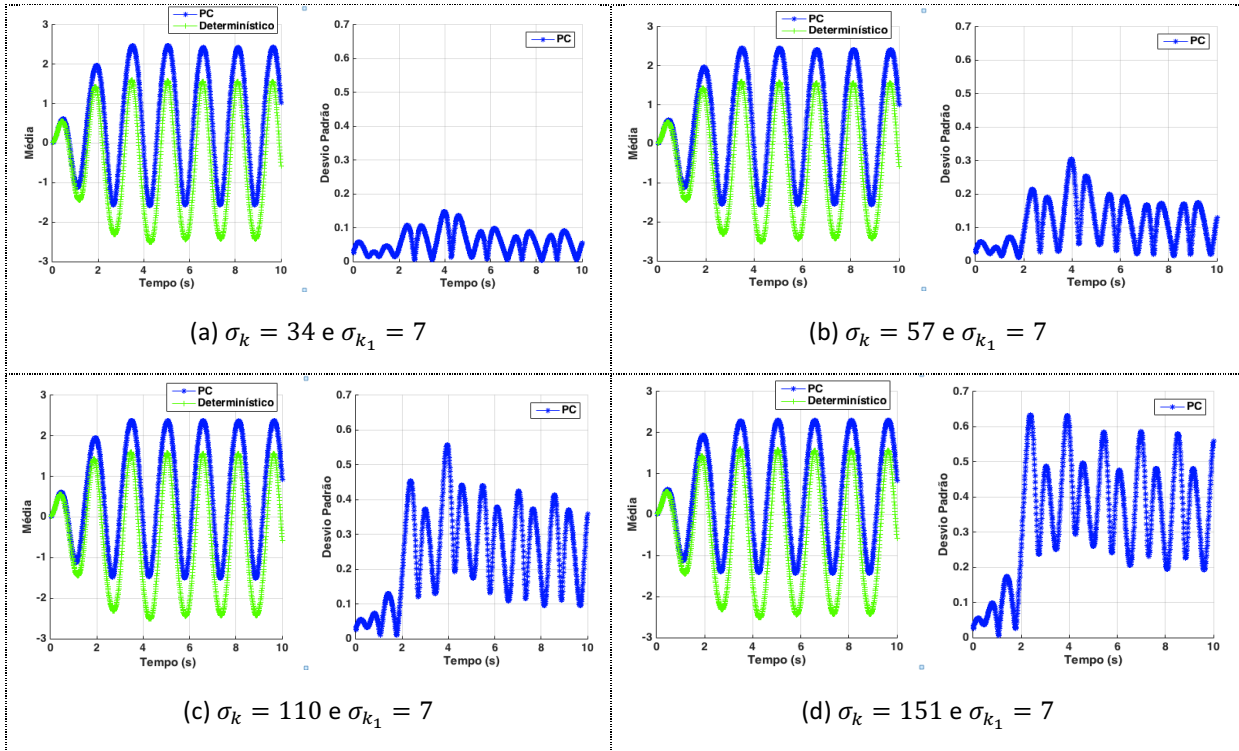
Tabela 4.3. Parâmetros adotados para o sistema massa-mola-amortecedor não linear.

Parâmetro	Média (ou Nominal)	Desvio-Padrão
m [kg]	100	-
k [N/m]	2000	{34, 57, 110, 151}
k_1 [N/m ²]	520	{7, 22, 40, 51}
c [Ns/m]	170	-
F_0 [N]	1500	-
ω [rad/s]	4,1029	-

Fonte: a autora.

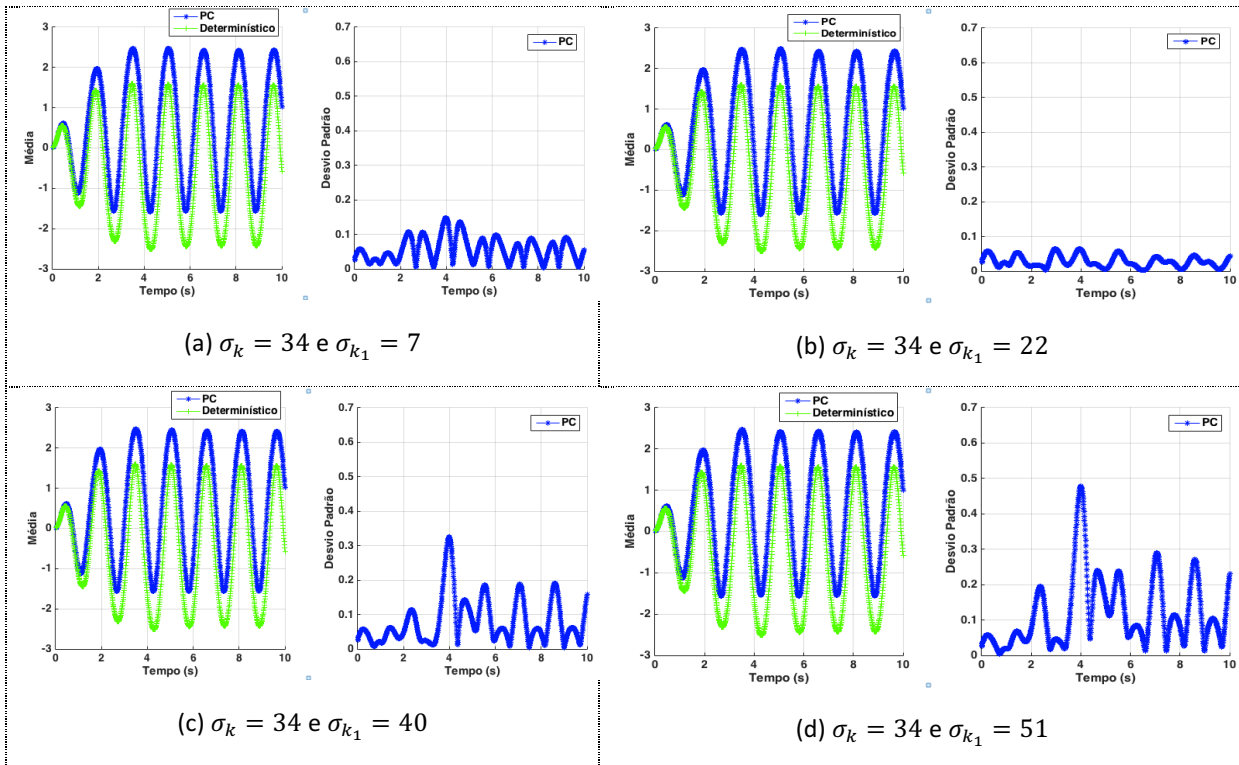
As soluções no domínio do tempo apresentadas nas Figs. 4.3 e 4.4 mostram que a solução do PC converge do valor Determinístico apenas para pequenos valores de tempo, em praticamente todos os casos para o valor médio. Todavia, os valores encontrados para o desvio-padrão são diferentes, em particular com o desvio-padrão da resposta aumentando a medida que a variabilidade de cada rigidez aumenta (veja, por exemplo, as Figs. 4.3c, 4.3d, 4.4c e 4.4d).

Figura 4.3. Resposta (média e desvio-padrão) do sistema massa-mola-amortecedor não linear para B1.



Fonte: a autora.

Figura 4.4. Resposta (média e desvio-padrão) do sistema massa-mola-amortecedor não linear para B2.



Fonte: a autora.

O desempenho do PC pode ser melhorado ao aumentar a ordem máxima assumida para a expansão, ao passo que pode ser conveniente adotar mais variáveis independentes para representar as variáveis incertas. Todavia, os resultados apresentados estão de acordo com a literatura, uma vez que Gerritsma et al. (2010) discutiram que o PC tende a ter um comportamento não regular para respostas sobre intervalos de tempo longos. Além disso, os autores ainda enfatizaram que aumentar a ordem máxima significa adiar a não convergência do PC, além de exigir mais tempo computacional para computar os coeficientes e montar as equações.

4.3 Projeto Ótimo de um Sistema Massa-Mola com Incertezas

O projeto consistente de sistemas mecânicos resulta em segurança e confiabilidade durante a sua operação e funcionamento. Em muitas situações, o projeto requer a determinação de parâmetros ótimos a fim de diminuir os custos envolvidos ou melhorar o nível de segurança.

É comum que o sistema projetado esteja sujeito a diferentes níveis de vibração, o que pode ocasionar falhas e, assim, impactar no seu nível de segurança. Uma saída é considerar o uso de Absorvedores Dinâmicos de Vibrações (ADVs), que são afixados na estrutura com o intuito de absorver a sua energia vibratória. Embora os ADVs tenham baixo custo, eles precisam ser projetados para atuar em condições extremas (MÉNDEZ, 2014). Barros (2009) trabalhou no projeto ótimo de um ADV multimodal envolvendo a associação de vigas com discos circulares, em que foi feito um ensaio em uma carcaça de compressor hermético a fim de validar a proposta.

O objetivo é projetar um sistema massa-mola de dois graus de liberdade com incertezas nas massas. Para o projeto, considera-se a resolução de um problema de otimização que busca determinar a rigidez das molas de forma a maximizar a primeira frequência natural, enquanto minimiza o seu desvio-padrão. A resolução do problema de otimização é feita por meio de um algoritmo genético básico.

Algoritmos genéticos são técnicas que utilizam estratégias fundamentadas na teoria da evolução Darwiniana, descrita por Darwin (1859), para resolver, em geral, problemas de otimização. Segundo o autor, os melhores indivíduos sobrevivem as gerações e conseguem produzir bons descendentes.

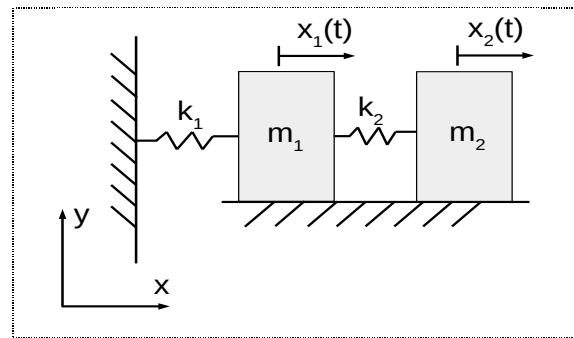
Com base nisso, Holland (1975) estabeleceu os princípios básicos para a construção de um Algoritmo Genético (AG) com aplicação em problemas de otimização. O AG utiliza uma

população de indivíduos, representada geralmente por cromossomos, em que cada cromossomo contém uma solução do problema. Os melhores cromossomos, ou seja, com as melhores soluções, conforme a função de aptidão, são escolhidos para a fase de reprodução e seguem com alta probabilidade para a nova geração, da próxima iteração. Deste modo, com o decorrer das gerações (iterações do algoritmo), a tendência é que a população passe a ter cada vez mais indivíduos com melhores valores de função objetivo.

Ao considerar que as massas do sistema de dois graus de liberdade são elementos com características incertas, tem-se que elas são tratadas como variáveis aleatórias e, assim, devem ser propagadas pelo sistema com o intuito de analisar o impacto nas frequências de vibração. O impacto na frequência é mensurado a partir de estatísticas que representam o seu valor esperado (média) e a sua variância, da qual se obtém o desvio-padrão (GHANEM; SPANOS, 1991).

Seja um sistema massa-mola de dois graus de liberdade conforme apresenta a Fig. 4.5. Assume-se que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ representam o deslocamento na direção horizontal para as massas m_1 e m_2 , respectivamente, em que não há atrito entre a base horizontal fixa e as massas. As molas que conectam a massa m_1 na base vertical fixa, e a massa m_2 na massa m_1 possuem coeficiente de rigidez k_1 e k_2 , respectivamente.

Figura 4.5. Sistema massa-mola de dois graus de liberdade.



Fonte: a autora.

Observando a Fig. 4.5, tem-se um sistema de dois graus de liberdade sem força externa cuja equação de movimento é dada na Eq. (4.17). Vale mencionar que para que o sistema formado pela massa m_2 e mola com rigidez k_2 atue como um ADV, deve-se escolher valores adequados para m_2 e k_2 de forma que a amplitude do sistema primário seja próxima de zero ou até mesmo nula.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Considera-se a solução da Eq. (4.17) na forma $x_1(t) = X_1 e^{i\omega t}$ e $x_2(t) = X_2 e^{i\omega t}$, que representa um movimento harmônico, tal que ω é uma constante a ser determinada (INMAN, 2013). Assim, chega-se em:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_1 \neq 0 \text{ e } X_2 \neq 0. \quad (4.18)$$

Para que a Eq. (4.18) tenha uma solução diferente de zero, a matriz de coeficientes deve satisfazer:

$$\det \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} = 0, \quad (4.19)$$

que resulta no seguinte polinômio característico, para $\omega^2 = \lambda$, ou seja:

$$m_1 m_2 \lambda^2 - (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2) \lambda + k_1 k_2 = 0. \quad (4.20)$$

A resolução da Eq. (4.20) permite obter as frequências em que as massas m_1 e m_2 oscilam, chamadas de frequências naturais (INMAN, 2013). Ao assumir que as massas do sistema estão sujeitas a incertezas, sendo representadas em termos de variáveis aleatórias gaussianas independentes, parte-se para a aplicação da expansão em PC homogêneo.

A partir da Eq. (3.14), os parâmetros incertos podem ser escritos na forma de uma expansão de Karhunen-Loève finita, em que se assume apenas uma variável aleatória por massa, resultando respectivamente em:

$$\tilde{m}_1 = \bar{m}_1 + \sum_{i=1}^1 \xi_i g_i = m_1 + \xi_1 \sigma_{m_1}, \quad (4.21)$$

$$\tilde{m}_2 = \bar{m}_2 + \sum_{i=2}^2 \xi_i g_i = m_2 + \xi_2 \sigma_{m_2}, \quad (4.22)$$

sendo que $\bar{m}_1$ e $\bar{m}_2$ representam as médias e correspondem aos respectivos valores reais m_1 e m_2 ; $g_1 = \sigma_{m_1}$ e $g_2 = \sigma_{m_2}$ representam os respectivos desvio-padrão para as massas; e, ξ_1 e ξ_2 são as variáveis aleatórias independentes associadas as respectivas massas.

O próximo passo consiste em propagar as incertezas no sistema, assim substituir as Eqs. (4.21) e (4.22) na Eq. (4.20) resultando em:

$$\begin{aligned}
& (m_1 + \xi_1 \sigma_{m_1})(m_2 + \xi_2 \sigma_{m_2})\lambda^2 \\
& - \left((m_1 + \xi_1 \sigma_{m_1})k_2 + (m_2 + \xi_2 \sigma_{m_2})k_1 \right. \\
& \left. + (m_2 + \xi_2 \sigma_{m_2})k_2 \right) \lambda + k_1 k_2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Uma vez que há incertezas no sistema da Fig. 4.5, a sua resposta passa a ser representada por uma expansão em PC finita. Assume-se $n = 2$ variáveis aleatórias e um polinômio de ordem máxima $p = 2$, resultando em $N = 5$ e tal que:

$$\lambda = \sum_{j=0}^5 \lambda_j \Phi_j(\xi_1, \xi_2) = \lambda_0 \Phi_0 + \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 + \lambda_3 \Phi_3 + \lambda_4 \Phi_4 + \lambda_5 \Phi_5. \tag{4.24}$$

O próximo passo consiste em fazer a projeção da Eq. (4.23), após a substituição da resposta dada na Eq. (4.24), sobre o espaço aleatório com a base de polinômios de Hermite. Em outras palavras, o resultado da substituição da Eq. (4.24) na Eq. (4.23) é multiplicado por cada polinômio da base Φ e, em seguida, toma-se o produto interno. Segue que um conjunto de $N + 1 = 6$ equações algébricas são obtidas representando um conjunto de polinômios característicos aleatórios. Assim, para cada $r = 0, 1, \dots, 5$, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \left\langle \Phi_r, (m_1 + \xi_1 \sigma_{m_1})(m_2 + \xi_2 \sigma_{m_2}) \left(\sum_{j=0}^5 \lambda_j \Phi_j \right)^2 \right. \\
& - \left((m_1 + \xi_1 \sigma_{m_1})k_2 + (m_2 + \xi_2 \sigma_{m_2})k_1 \right. \\
& \left. \left. + (m_2 + \xi_2 \sigma_{m_2})k_2 \right) \sum_{j=0}^5 \lambda_j \Phi_j + k_1 k_2 \right\rangle = \langle \Phi_r, 0 \rangle.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

O conjunto de equações que vai ser obtido a partir da Eq. (4.25) é acoplado, porém determinístico, uma vez que a aleatoriedade do sistema passa a ser deslocada para a base de polinômios em Φ . Assim, tais equações podem ser resolvidas (neste caso numericamente por envolver termos não lineares) visando obter as estatísticas da resposta aleatória. Em outras palavras, o valor médio e a variância das duas frequências obtidas a partir da Eq. (4.25) são expressas, respectivamente, por:

$$\begin{cases} \mu_{\lambda_{[1]}} = \lambda_{0[1]} \\ \mu_{\lambda_{[2]}} = \lambda_{0[2]} \end{cases}, \tag{4.26}$$

$$\begin{cases} \sigma_{\lambda_{[1]}}^2 = \lambda_{1[1]}^2 + \lambda_{2[1]}^2 + 2\lambda_{3[1]}^2 + \lambda_{4[1]}^2 + 2\lambda_{5[1]}^2 \\ \sigma_{\lambda_{[2]}}^2 = \lambda_{1[2]}^2 + \lambda_{2[2]}^2 + 2\lambda_{3[2]}^2 + \lambda_{4[2]}^2 + 2\lambda_{5[2]}^2 \end{cases} \quad (4.27)$$

O objetivo é maximizar o valor médio da primeira frequência $\lambda_{[1]}$ na Eq. (4.26) e, ao mesmo tempo, minimizar o seu desvio-padrão, obtido a partir da variância $\sigma_{\lambda_{[1]}}^2$ na Eq. (4.27). Logo, busca-se determinar os valores de k_1 e k_2 para a aleatoriedade propagada nas frequências naturais do sistema, sendo conhecidas as massas m_1 e m_2 e os seus respectivos desvios σ_{m_1} e σ_{m_2} . Para tanto, considera-se o seguinte problema de otimização multiobjetivo:

$$\begin{cases} \text{Maximizar } f_1 = \mu_{\lambda_{[1]}} \\ \text{Minimizar } f_2 = \sigma_{\lambda_{[1]}} \end{cases} \quad (4.28)$$

Lobato (2008) apresenta métodos para lidar com problemas de otimização multiobjetivo, de forma que neste trabalho aplica-se o método da Soma Ponderada resultando na função da Eq. (4.29).

$$\text{Minimizar } F = -\frac{Wf_1}{f_1^o} + \frac{(1-W)f_2}{f_2^o} \quad (4.29)$$

O fator de ponderação é definido como $0 \leq W \leq 1$, tal que cada valor de W fornece uma solução para f_1 e f_2 e, assim, é possível construir a curva de Pareto das soluções. Como a localização do ponto ótimo não depende apenas de W , considera-se um coeficiente $c_i = \frac{1}{f_i^o}$, para $i = 1, 2$, sendo f_i^o o valor ideal obtido da otimização individual da função objetivo f_i com as restrições impostas ao problema.

A resolução do problema de otimização definido com o objetivo na Eq. (4.20) é feita por um Algoritmo Genético básico¹, denominado por AG, disponibilizado pelo *Grupo de Control Predictivo y Optimización*, da Universidade Politécnica de Valência, para o *software* Matlab[®]. Detalhes da implementação e funcionamento do AG podem ser obtidos diretamente em Ferragud (1999).

Em linhas gerais, o AG realiza uma busca global pela melhor solução do problema, sendo capaz de evitar ótimos locais. Basicamente, para uma dada população gerada inicialmente de modo aleatório, escolhem-se os indivíduos com melhor valor de função de aptidão para aplicar os operadores genéticos de cruzamento e mutação. A partir disso, uma

¹ <http://cpoh.upv.es/en/research/software/item/249-basic-ga.html>

nova população, que combina os melhores indivíduos da população atual com os indivíduos descendentes, é criada. Esses passos são repetidos até que se alcance algum critério de parada.

A operação de cruzamento consiste em gerar indivíduos descendentes a partir da combinação dos melhores indivíduos da população atual selecionados com alta probabilidade. A probabilidade é calculada de acordo com o valor que cada indivíduo recebe da função de aptidão. Deste modo, realiza-se a combinação entre as partes genéticas de dois indivíduos aptos, o que geralmente resulta em indivíduos descendentes de boa qualidade. O número de indivíduos que passam pelo cruzamento é determinado por meio da probabilidade de cruzamento. Por sua vez, o operador de mutação consiste em realizar a mudança de um (ou mais) valor contido no cromossomo. A escolha da posição onde mudar o valor é feita de forma aleatória, tal que a mudança ocorre a partir de uma probabilidade de mutação, que deve ter valor pequeno a fim de que não haja pioras significativas na solução.

A partir de um estudo de sensibilidade dos parâmetros do AG, chegou-se nos seguintes valores: $N = 50$ (tamanho da população), $N_{ger} = 100$ (número de gerações), $P_c = 0,7$ (probabilidade de cruzamento) e $P_m = 0,05$ (probabilidade de mutação). Os valores adotados para os parâmetros correspondem a $m_1 = 100$ e $m_2 = 30$, ao passo que se busca determinar a rigidez das molas, que variam da seguinte forma: $1500 \leq k_1 \leq 2500$ e $300 \leq k_2 \leq 800$.

Dois cenários foram analisados, para o desvio-padrão das massas variando no intervalo fechado $[5\%, 10\%]$ do respectivo valor nominal, ou seja, avaliam-se os cenários $C_1 = \{\sigma_{m_1} = 5; \sigma_{m_2} = 3\}$ e $C_2 = \{\sigma_{m_1} = 10; \sigma_{m_2} = 1,5\}$, que representam os dois extremos permitidos para o desvio-padrão das massas.

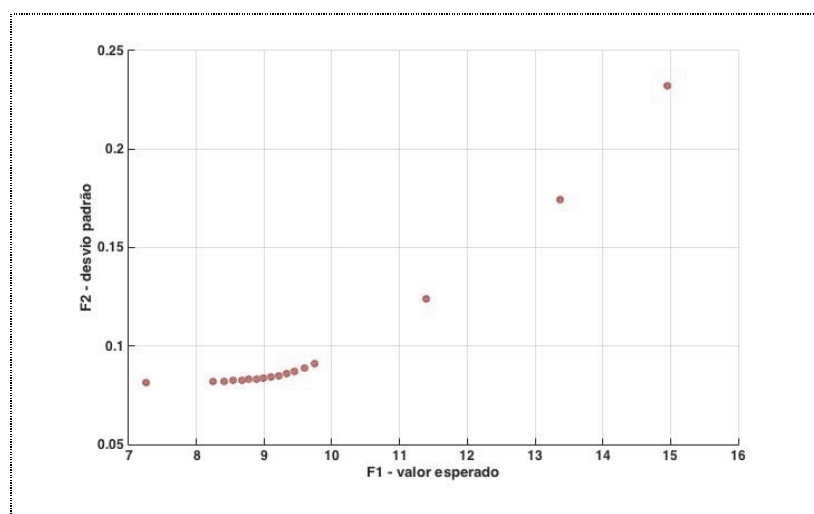
A resolução do problema de otimização pelo AG resulta, para o cenário C_1 , na Tabela 4.4, com os resultados para distintos valores de W , e na Fig. 4.6, com a curva de Pareto. De forma similar, a Tabela 4.5 e a Fig. 4.7 trazem os resultados para os diferentes W e a curva de Pareto, respectivamente, para o Cenário C_2 . Vale ressaltar que em C_1 , os valores ideais de cada função objetivo foram $f_1^o = 14,95$ e $f_2^o = 0,08$, enquanto que para C_2 o resultado foi de $f_1^o = 14,93$ e $f_2^o = 0,02$.

Os resultados obtidos na Tabela 4.4 mostram que a medida que o valor de W se aproxima de 1, consegue-se aumentar satisfatoriamente o valor da primeira frequência natural, o que requer que as variáveis de projeto tenham valores iguais ao seus limitantes superiores, porém o desvio-padrão associado a aleatoriedade da resposta aumenta consideravelmente. O processo inverso ocorre quando W se aproxima de 0, o que também pode ser visto na Fig. 4.6.

Tabela 4.4. Soluções da curva de Pareto considerando o cenário C_1 .

W	k_1	k_2	f_1	f_2	Nº Avaliações
0,00	1500,00	300,00	7,26	0,08	5050
0,05	1500,00	300,00	7,26	0,08	5050
0,10	1500,00	300,00	7,26	0,08	5050
0,15	1500,00	385,82	8,25	0,08	5050
0,20	1500,00	404,61	8,42	0,08	5050
0,25	1500,00	420,62	8,55	0,08	5050
0,30	1500,00	435,77	8,67	0,08	5050
0,35	1500,00	450,88	8,78	0,08	5050
0,40	1500,00	466,49	8,88	0,08	5050
0,45	1500,00	483,07	8,99	0,08	5050
0,50	1500,00	501,16	9,10	0,08	5050
0,55	1500,00	521,37	9,21	0,08	5050
0,60	1500,00	544,59	9,33	0,09	5050
0,65	1500,00	572,12	9,45	0,09	5050
0,70	1500,00	606,05	9,59	0,09	5050
0,75	1500,00	650,02	9,75	0,09	5050
0,80	1736,26	785,34	11,39	0,12	5050
0,85	2129,72	800,00	13,37	0,17	5050
0,90	2500,00	800,00	14,95	0,23	5050
0,95	2500,00	800,00	14,95	0,23	5050
1,00	2500,00	800,00	14,95	0,23	5050

Fonte: a autora.

Figura 4.6. Curva de Pareto do cenário C_1 para a primeira frequência natural do sistema com incertezas.

Fonte: a autora.

Para $W = 0$ na Tabela 4.4 é possível comparar o valor esperado da primeira frequência natural, obtida com o emprego do PC homogêneo, com o valor determinístico,

obtido a partir da resolução da Eq. (4.20), obtendo, respectivamente, $\mu_{\lambda_{[1]}} = 7,26 \pm 0,08$ e $\lambda_1 = 7,22$. Este resultado condiz com o tamanho da expansão assumida para o PC, uma vez que expansões com mais termos conseguiriam melhor representar as incertezas do sistema.

Os resultados para o cenário C_2 estão na Tabela 4.5, com a curva de Pareto na Fig. 4.7. Observa-se que há uma diferença com relação aos resultados do cenário C_1 , em especial no que diz respeito ao número de pontos distintos na curva de Pareto. Nota-se que agora houve pouca variação em f_2 .

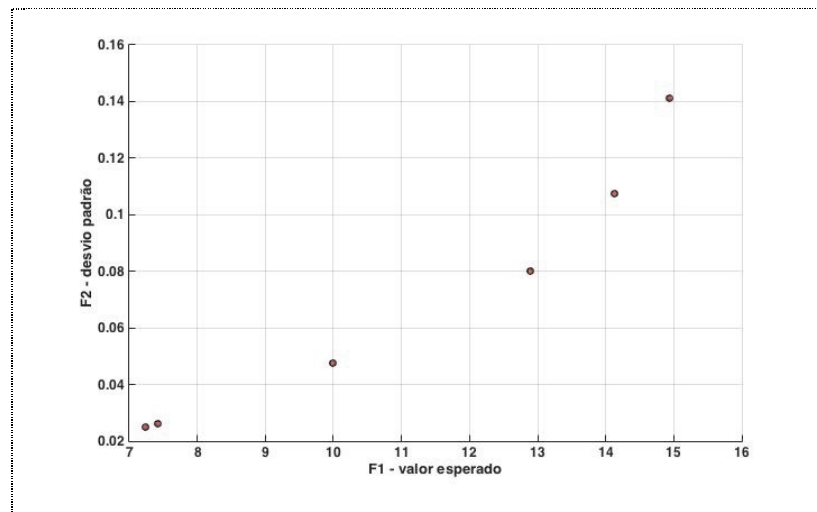
Ao analisar o cenário C_2 , percebe-se que o aumento no desvio-padrão associado a massa m_1 traz menor impacto na curva de Pareto ao comparar com cenário C_1 , em que o desvio-padrão de m_1 assume seu limitante inferior. A Tabela 4.5 mostra claramente que, para $W \leq 0,8$, não houve variação com relação aos objetivos, ao contrário da Tabela 4.4, em que isto ocorreu somente para $W \leq 0,1$ e $W \geq 0,9$.

Tabela 4.5. Soluções da curva de Pareto considerando o cenário C_2 .

W	k_1	k_2	f_1	f_2	Nº Avaliações
0,00	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,05	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,10	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,15	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,20	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,25	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,30	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,35	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,40	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,45	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,50	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,55	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,60	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,65	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,70	1500,00	300,00	7,23	0,03	2550
0,75	1500,00	300,00	7,23	0,03	5050
0,80	1500,00	313,72	7,42	0,03	5050
0,85	2002,69	425,62	9,99	0,05	5050
0,90	2500,00	566,25	12,90	0,08	5050
0,95	2500,00	689,68	14,12	0,11	5050
1,00	2500,00	800,00	14,93	0,14	5050

Fonte: a autora.

Figura 4.7. Curva de Pareto do cenário C_2 para a primeira frequência natural do sistema com incertezas.



Fonte: a autora.

É importante mencionar que os cenários analisados consideram que o desvio-padrão das massas, σ_{m_1} , da massa m_1 , e σ_{m_2} , da massa m_2 , podem variar até 10% do respectivo valor nominal. Acredita-se que a solução do PC deve divergir da solução determinística quando se aumenta o valor do desvio-padrão desses parâmetros incertos, ao mesmo tempo que o desempenho do PC pode ser melhorado ao aumentar a ordem máxima assumida para a expansão ou considerando mais variáveis aleatórias independentes para os parâmetros incertos.

Capítulo 5

CONSIDERAÇÃO DE INCERTEZAS EM UM ROTOR SUPORTADO POR MANCAIS HIDRODINÂMICOS

Com o objetivo de lidar com as incertezas em sistemas mecânicos, este trabalho também considera a aplicação do método HCL e a expansão em PC homogênea em máquinas rotativas, em particular, em um rotor flexível suportado por mancais hidrodinâmicos. Os rotores aparecem em diversos equipamentos reais, possuindo aplicações nos mais variados ramos da engenharia, uma vez que qualquer máquina possuindo um eixo fixo girando em torno de si próprio passa a ser caracterizada como um rotor.

Estudos envolvendo a quantificação de incertezas na dinâmica de rotores foram feitos por diferentes autores. Rémond, Farvejon e Sinou (2011), assim como Didier, Farvejon e Sinou (2012), consideram a aplicação do PC para um estudo envolvendo incertezas em rotores flexíveis. Koroishi et al. (2012) usaram a decomposição de Karhunen-Loève para uma modelagem via elementos finitos estocásticos de um rotor flexível com incertezas em parâmetros do eixo e dos mancais.

Em Didier, Farvejon e Sinou (2013) foram consideradas incertezas no módulo de Young, na matriz de rigidez elementar associada aos mancais, no diâmetro e densidade dos discos, e na força de desbalanceamento de um rotor estocástico, sendo a quantificação das incertezas realizadas via PC homogêneo. Cavalini et al. (2014) também investigaram o caso estudado aqui, porém fazendo uso da análise *fuzzy* e do HCL para quantificar os efeitos das incertezas na dinâmica do rotor. Os resultados obtidos pelos autores mostraram que a análise *fuzzy* consegue prever com maior precisão os envelopes de solução.

Os rotores costumam ser constituídos de três elementos básicos que são o eixo, os discos e os mancais, embora outros elementos podem ser acoplados ao eixo (MUSZYNSKA, 2005), visando uma melhor representação do sistema real. O tipo de eixo está relacionado com a velocidade de operação, podendo o rotor operar em baixas e altas rotações conforme a

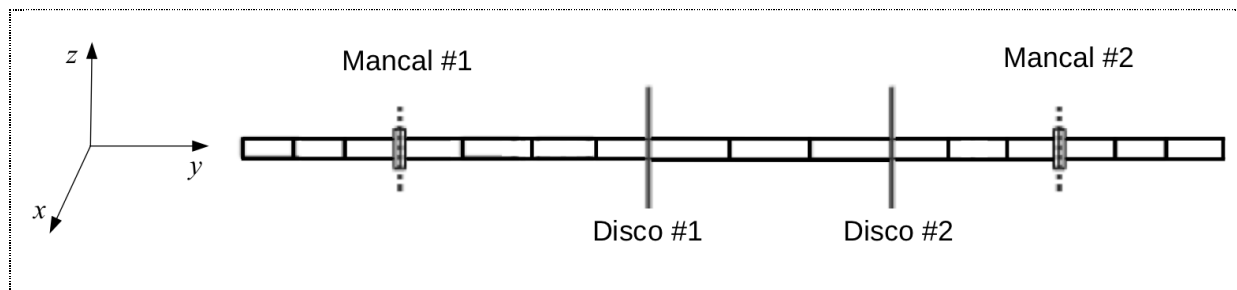
necessidade do sistema. Os mancais são os elementos de suporte que restringem o movimento do eixo, além de serem os meios de transmissão das vibrações ocasionadas pelo rotor para a estrutura da máquina (FERREIRA, 2009).

Huchings (1992) comentou sobre os diferentes tipos de mancais, como os planos, que possuem um filme de óleo entre as superfícies, e os mancais de deslizamento e rolamento. Existem também os mancais magnéticos, em que não há contato mecânico entre as superfícies, e os hidrodinâmicos, que consideram um filme de óleo lubrificante que impede o contato direto do eixo com o mancal (não há contato entre as partes metálicas) e operam conforme a teoria de lubrificação hidrodinâmica (FERREIRA, 2009).

O rotor considerado para efeito de estudo assume que o eixo é de metal flexível, sendo representado por elementos de vigas de Timoshenko (modelo de elementos finitos), que há dois discos rígidos de metal e dois mancais hidrodinâmicos cilíndricos próximo as extremidades. Considera-se ainda a presença de uma força de desbalanceamento, sendo definida por uma massa atuando próxima do centro geométrico do eixo, e a força de sustentação do eixo pelos mancais. Por outro lado, os efeitos do acoplamento entre o sistema rotativo e o motor elétrico são desconsiderados durante a modelagem e também na posterior análise experimental.

A modelagem do rotor considera a aplicação do método de elementos finitos, para obter as matrizes elementares, e as equações de Lagrange, para obter a equação de movimento geral do rotor, seguindo a metodologia de Lalanne e Ferraris (1998). A Fig. 5.1 ilustra o rotor sob estudo considerando a discretização, por meio do método de elementos finitos, em 17 nós e 16 elementos de viga, sendo que a quatro nós estão acoplados os discos e mancais.

Figura 5.1. Ilustração do rotor, com seus elementos de eixo, discos e mancais, considerado neste estudo.

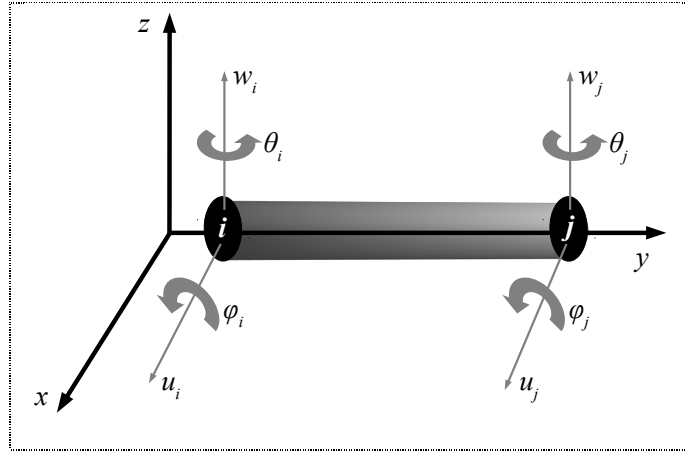


Fonte: adaptado de Cavalini et al. (2015).

A partir da discretização do eixo do rotor em elementos de viga, a cada um desses elementos está associado dois nós. A cada nó está associado quatro graus de liberdade, sendo dois relacionados a direção do eixo x (deslocamento e rotação) e outros dois relacionados a

direção do eixo z (também de deslocamento e rotação), ao passo que o eixo y é neutro. A Fig. 5.2 exemplifica um elemento finito de viga com os respectivos nós e graus de liberdade.

Figura 5.2. Ilustração do elemento de viga e seus graus de liberdade.



Fonte: adaptado de Cavalini (2013).

5.1 Equação de Movimento

A equação diferencial geral, conforme Cavalini (2013), que descreve a dinâmica de um rotor flexível que usa mancais hidrodinâmicos como suporte é dada na Eq. (5.1)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{D} + \Omega\mathbf{D}_g]\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K} + \dot{\Omega}\mathbf{K}_{st}]\mathbf{q} = \mathbf{W} + \mathbf{F}_u + \mathbf{F}_h, \quad (5.1)$$

em que $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}_g$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_{st}$, $\mathbf{W}$, $\mathbf{F}_u$ e $\mathbf{F}_h$ são, respectivamente, as matrizes globais de massa, amortecimento proporcional do sistema, efeito giroscópio, rigidez, enrijecimento dos mancais, força peso das partes girantes, força de desbalanceamento e força hidrodinâmica. O amortecimento proporcional é calculado por $\mathbf{D} = \lambda\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$, para λ e β sendo constantes. A velocidade e a rotação angular são representadas, respectivamente, por Ω e $\dot{\Omega}$. O deslocamento, a velocidade e a aceleração do sistema estão representados nos vetores $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ e $\ddot{\mathbf{q}}$, respectivamente. Além disso, não linearidades surgem no termo $\mathbf{F}_h$ devido ao modelo adotado para os mancais.

A obtenção da Eq. (5.1) exige a aplicação dos seguintes passos, conforme Lalanne e Ferraris (1998), quais sejam: obter a energia cinética T e a de deformação U das partes que compõem o rotor e o trabalho virtual das forças externas; aplicar o método de elementos finitos; e, aplicar as equações de Lagrange assumindo as coordenadas generalizadas independentes e as forças generalizadas atuantes no sistema. Assim, esses passos são

combinados e, então, permitem obter as matrizes constituintes da equação geral de movimento.

5.1.1 Energia Cinética

O eixo do rotor é modelado por elementos finitos que representam uma viga de Timoshenko de seção transversal circular e diâmetro constante, seguindo a ilustração na Fig. 5.2. O emprego da viga de Timoshenko para representar os elementos de eixo traz mais precisão para a descrição da dinâmica do sistema quando a relação entre as dimensões do eixo (comprimento e diâmetro) são pequenas. Além disso, os efeitos de flexão na viga de Timoshenko conseguem representar deslocamentos e rotações, bem como o efeito de deformação por esforço cortante. Mais detalhes sobre o uso da viga de Timoshenko para modelar o eixo do rotor podem ser encontrados em Ujihara (2011).

Como um elemento de viga e possui oito graus de liberdade, veja Fig. 5.2, quatro em cada nó, o vetor $\mathbf{q}_e$ de deslocamento nodais de e é composto pelos vetores dos respectivos deslocamento nas direções x e z , a saber:

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) & \varphi_1(t) & u_2(t) & \varphi_2(t) \\ w_1(t) & \theta_1(t) & w_2(t) & \theta_2(t) \end{Bmatrix}^T \rightarrow \mathbf{q}_e = [u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ \varphi_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2 \ \varphi_2]^T. \quad (5.2)$$

Conforme Ujihara (2011), a expressão para a obtenção da energia cinética T_e para um elemento de viga e de comprimento L está na Eq. (5.3). A equação considera, nesta ordem, os seguintes termos: para a flexão; para o efeito secundário da inércia rotacional, devido a viga de Timoshenko; para a energia relacionada a velocidade angular Ω do elemento em torno da direção y ; e, para o efeito giroscópico.

$$\begin{aligned} T_e = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{\mathbf{q}}_u^T \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 \dot{\mathbf{q}}_u + \dot{\mathbf{q}}_w^T \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_2 \dot{\mathbf{q}}_w) dy \\ & + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left(\dot{\mathbf{q}}_u^T \frac{d\mathbf{N}_1^T}{dy} \frac{d\mathbf{N}_1}{dy} \dot{\mathbf{q}}_u + \dot{\mathbf{q}}_w^T \frac{d\mathbf{N}_2^T}{dy} \frac{d\mathbf{N}_2}{dy} \dot{\mathbf{q}}_w \right) dy \\ & + \rho I_y \Omega^2 - 2\rho I_y \Omega \int_0^L \left(\dot{\mathbf{q}}_u^T \frac{d\mathbf{N}_1^T}{dy} \frac{d\mathbf{N}_2}{dy} \dot{\mathbf{q}}_w \right) dy, \end{aligned} \quad (5.3)$$

em que ρ representa a massa por unidade de volume; S é a área da seção transversal do elemento e ; I é o momento de inércia em relação as direções x ou z , uma vez que $I = I_x = I_z$, ao passo que momento de inércia em relação a direção y é dado por I_y ; $\mathbf{N}_1 = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4]$ e

$\mathbf{N}_2 = [c_5 \ c_6 \ c_7 \ c_8]$ contêm os coeficientes de polinômios de Hermite de terceira ordem, os quais são tomados como as funções interpoladoras para descrever os deslocamentos nodais, respectivamente, nos planos xy e zy do elemento e . Assim, as funções interpoladoras fornecem como resultado:

$$\begin{cases} \mathbf{N}_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} & -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} & \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} & \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \\ \mathbf{N}_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} & y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} & \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} & -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \end{cases} \quad (5.4)$$

O próximo passo consiste em substituir os vetores $\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_2$ da Eq. (5.4) na expressão da energia cinética para o elemento de viga e , Eq. (5.3), e, assim, realizar as multiplicações que envolvem tais vetores, o que resulta em matrizes quadradas de ordem 4. Em seguida, resolvem-se as integrais correspondentes e aplica-se a equação de Lagrange para obter a equação de movimento relacionada ao elemento e :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_e}{\partial \dot{\mathbf{q}}_e} \right) - \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{q}_e} = \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e + \Omega \mathbf{D}_{eS} \dot{\mathbf{q}}_e + \dot{\Omega} \mathbf{K}_{est} \mathbf{q}_e, \quad (5.5)$$

sendo a matriz $\mathbf{M}_e$ formada pela soma da matriz relacionada a inércia de translação devido a energia cinética com a matriz relacionada a inércia I , $\mathbf{D}_{eS}$ é a matriz relacionada ao efeito giroscópico e $\mathbf{K}_{est}$ é a matriz associada ao enrijecimento em movimento transiente. Todas essas matrizes são quadradas, além disso são de oitava ordem devido a flexibilidade assumida para o elemento de viga.

As matrizes da Eq. (5.5) são escritas, respectivamente, como:

$$\mathbf{M}_e = \frac{\rho L}{30} \left(\frac{S}{14} + \frac{I}{L^2} \right) \begin{bmatrix} 192 & 0 & 0 & -25L & 18 & 0 & 0 & 10L \\ & 192 & 25L & 0 & 0 & 18 & -10L & 0 \\ & & 8L^2 & 0 & 0 & 10L & -4L^2 & 0 \\ & & & 8L^2 & -10L & 0 & 0 & -4L^2 \\ & & & & 192 & 0 & 0 & 25L \\ & & & & & 192 & -25L & 0 \\ & & & & & & 8L^2 & 0 \\ SIM. & & & & & & & 8L^2 \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{D}_{eS} = \frac{\rho I_Y}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ & & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ & & & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ & & & & 0 & -36 & 3L & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 3L \\ & & & & & & 0 & -L^2 \\ -SIM. & & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

$$\mathbf{K}_{est} = \frac{\rho I_Y}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Com relação ao disco, tem-se que a cada elemento de disco d está associado quatro graus de liberdade, que são os dois deslocamentos e as duas rotações (CAVALINI, 2013). Isto resulta no vetor de deslocamento nodal do centro do disco:

$$\mathbf{q}_d = [u(t) \ w(t) \ \theta(t) \ \varphi(t)]^T. \quad (5.9)$$

Por sua vez, a energia cinética de um elemento de disco d é expressa na Eq. (5.10) e consta, nesta ordem, de um termo devido ao movimento de translação, um devido ao movimento de rotação em torno dos eixos x e z , um devido a rotação em torno do eixo y e um termo que representa o efeito giroscópico. Para tanto, assume-se que há apenas o efeito da energia cinética e que o disco d é rígido e simétrico, tem massa m_d , matriz de inércia I_d nas direções x e z , matriz de inércia I_{dy} na direção y e rotação constante, bem como possui ângulos de rotação φ e θ muito pequenos nas respectivas direções x e z .

$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_d (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\varphi}\theta). \quad (5.10)$$

Para obter a equação de movimento do elemento de disco d com respeito ao vetor de deslocamento nodal $\mathbf{q}_d$, aplica-se a equação Lagrange na energia cinética T_d , resultando em:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_d}{\partial \dot{\mathbf{q}}_d} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial \mathbf{q}_d} = \mathbf{M}_d \ddot{\mathbf{q}}_d + \Omega \mathbf{D}_d \dot{\mathbf{q}}_d + \dot{\Omega} \mathbf{K}_{dst} \mathbf{q}_d, \quad (5.11)$$

em que a matriz $\mathbf{M}_d$ está relacionada a massa, $\mathbf{D}_d$ ao efeito giroscópico e $\mathbf{K}_{dst}$ ao enrijecimento devido ao regime transiente.

As matrizes que aparecem na Eq. (5.11) são quadradas e de ordem 4, sendo descritas, respectivamente, por:

$$\mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

$$\mathbf{D}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{dy} \\ 0 & 0 & I_{dy} & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

$$\mathbf{K}_{dst} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dy} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

A forma adotada para acoplar os discos ao eixo considera que há um aumento na rigidez do mesmo, além de ocorrer a soma das matrizes nas Eqs. (5.12) a (5.14) as respectivas matrizes do correspondente nó do elemento de viga onde o disco vai ser acoplado (LALANNE; FERRARIS, 1998).

Ao considerar o sistema representado na Fig. 5.1, montam-se as matrizes globais $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}_g$ e $\mathbf{K}_{st}$ a partir das respectivas matrizes elementares associadas aos elementos de viga e nas Eqs. (5.6) a (5.8) e, quando do acoplamento, inclui-se também as respectivas matrizes dos elementos de disco d nas Eqs. (5.12) a (5.14). Por outro lado, a matriz global $\mathbf{W}$ é obtida multiplicando $\mathbf{M}$ pela aceleração da gravidade ($9,81 \text{ m/s}^2$). Além disso, pela Fig. 5.1 é possível perceber que os discos estão acoplados nos nós de número 8 e 11 (contando da esquerda para a direita).

5.1.2 Energia de Deformação

Uma vez que os elementos de discos são considerados rígidos e os mancais agem como elementos de suporte, parte-se para a obtenção da energia de deformação do eixo, mais especificamente, dos elementos de viga. Mais detalhes sobre a obtenção das equações podem ser obtidos em Ujihara (2011).

O cálculo da energia de deformação parte da relação entre tensão e deformação para um ponto qualquer da seção transversal do eixo. Uma vez que o eixo é simétrico, a expressão da energia potencial para um elemento de viga e , de comprimento L , em flexão pura é dada por:

$$U_e = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\dot{\mathbf{q}}_u^T \frac{d^2 \mathbf{N}_1^T}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dy^2} \dot{\mathbf{q}}_u + \dot{\mathbf{q}}_w^T \frac{d^2 \mathbf{N}_2^T}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dy^2} \dot{\mathbf{q}}_w \right) dy, \quad (5.15)$$

em que E é o módulo de Young; I é o momento de inércia; e, $\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_1$ são descritos na Eq. (5.4).

Após fazer a substituição dos vetores $\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_2$ na expressão da energia de deformação para o elemento de viga e , Eq. (5.15), e realizar as devidas multiplicações, resolvem-se as integrais correspondentes. Em seguida, aplica-se a equação de Lagrange, conforme Eq. (5.5), para obter a matriz de rigidez $\mathbf{K}_e$ na Eq. (5.16), seguindo a disposição das variáveis no vetor de coordenadas $\mathbf{q}_e$.

$$\mathbf{K}_e = \frac{12EI}{L^3(1 + \vartheta_y)} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & (4 + \vartheta_y)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2 - \vartheta_y)L^2 & 0 \\ & & & (4 + \vartheta_y)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2 - \vartheta_y)L^2 \\ & & & & 12 & 0 & 0 & 6L \\ & & & & & 12 & -6L & 0 \\ & & & & & & (4 + \vartheta_y)L^2 & 0 \\ & & & & & & & (4 + \vartheta_y)L^2 \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

em que $\vartheta_y = \frac{12EI}{k_y GS}$ é a influência do efeito de cisalhamento, para: G é o módulo de cisalhamento do elemento; S é a área da seção transversal; e, k_y é o coeficiente de forma da seção transversal na direção y , que depende do coeficiente de Poisson ν , dado por:

$$k_y = \frac{6(1 + \nu)^2}{7 + 12\nu + 4\nu^2}. \quad (5.17)$$

A matriz de rigidez global $\mathbf{K}$ é obtida ao considerar as matrizes $\mathbf{K}_e$ para todos os elementos de viga e .

5.1.3 Força de Desbalanceamento

Segundo Lalanne e Ferraris (1998), uma força de desbalanceamento $\mathbf{F}_{nu}$, aplicada em uma posição n do eixo, surge devido ao efeito de uma massa m_u sobre o eixo do rotor. Considera-se que essa massa é pequena comparada a massa do sistema, está a uma distância d_u do centro geométrico do eixo e em um plano perpendicular a direção y . Além disso, considera-se que a força $\mathbf{F}_{nu}$ possui componentes apenas nas direções x e z associadas aos respectivos deslocamentos transversais u e w .

Conforme Cavalini (2013), pode-se escrever a energia cinética da massa m_u como sendo:

$$T_u \approx m_u d_u \Omega [\dot{u} \sin(\Omega t) - \dot{w} \cos(\Omega t)]. \quad (5.18)$$

As componentes da força de desbalanceamento são obtidas ao aplicar a equação de Lagrange sobre a Eq. (5.18) considerando cada um dos deslocamentos como coordenadas generalizadas.

$$\begin{cases} F_{nux} = -m_u d_u \dot{\Omega} \sin(\Omega t) - m_u d_u \Omega^2 \cos(\Omega t), \\ F_{nuy} = -m_u d_u \dot{\Omega} \cos(\Omega t) + m_u d_u \Omega^2 \sin(\Omega t). \end{cases} \quad (5.19)$$

Ao assumir que a posição n do eixo está associada a um dos nós de algum elemento de viga que representa o eixo, chega-se, respectivamente, nas componentes de $\mathbf{F}_{nu}$ ao longo das direções x e z como expresso na Eq. (5.19). Assim, a montagem da matriz global $\mathbf{F}_u$ considera as forças $\mathbf{F}_{nu}$ conforme os nós em que elas atuam. Assume-se no rotor da Fig. 5.1 que há forças $\mathbf{F}_{nu}$ atuando em cada disco, consequentemente, nos nós de número 8 e 11.

5.1.4 Força Hidrodinâmica nos Mancais

Os mancais são considerados como elementos de suporte e os adotados no presente estudo são do tipo hidrodinâmicos cilíndricos sob a hipótese de que a razão entre o comprimento e o diâmetro do mancal é menor do que 0,5. A modelagem matemática das forças de sustentação exercidas pelos mancais adota o modelo não linear proposto em Capone (1986), o qual considera a resolução da equação de Reynolds em (5.20) para condições de escoamento isotérmico e laminar.

$$\left(\frac{R}{L_h}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{h}_h^3 \frac{\partial \bar{p}_h(\theta, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\partial \bar{h}_h}{\partial \theta} + 2\bar{h}_h, \quad (5.20)$$

com a distribuição de pressão $\bar{p}_h(\theta, \bar{y})$ ao longo do mancal; as coordenadas adimensionais $\bar{x}$, $\bar{y}$ e $\bar{z}$ do centro do eixo do rotor nas respectivas direções x , y e z , sendo $\bar{x} = \frac{x}{C}$, $\bar{z} = \frac{z}{C}$, $\dot{\bar{x}} = \frac{\dot{x}}{\omega C}$ e $\dot{\bar{z}} = \frac{\dot{z}}{\omega C}$; a folga radial C ; a velocidade ω de rotação do eixo; a coordenada cilíndrica θ ; o comprimento L_h do mancal; o raio R do eixo do rotor; a espessura adimensional $\bar{h}_h$ do filme de óleo, com $\bar{h}_h = \bar{x} \cos \theta - \bar{z} \sin \theta$.

A partir da Eq. (5.20), Cavalini et al. (2015) consideraram simplificações a fim de obter a forma analítica do campo de pressão, que é:

$$\bar{p}_h(\theta, \bar{y}) = \frac{1}{8} \left(\frac{L_h}{R} \right)^2 \left[\frac{(\bar{x} - 2\dot{\bar{z}}) \sin \theta - (\bar{z} + 2\dot{\bar{x}}) \cos \theta}{\bar{h}_h^3} \right] (4\bar{y}^2 - 1). \quad (5.21)$$

Para determinar a força de sustentação exercida por um mancal $\mathbf{F}_{mh}$, considera-se a integração da Eq. (5.21) sobre a área do mancal (nas variáveis θ e $\bar{y}$), isto é:

$$\mathbf{F}_{mh} = -\frac{6\mu\omega R^3}{L_h} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\alpha_h}^{\alpha_h+\pi} \bar{p}_h(\theta, \bar{y}) \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} d\theta d\bar{y}, \quad (5.22)$$

em que μ é a viscosidade do óleo e o ângulo α_h corresponde a:

$$\alpha_h = \tan^{-1} \left(\frac{\bar{z} + 2\dot{\bar{x}}}{\bar{x} - 2\dot{\bar{z}}} \right) - \frac{\pi}{2} \text{sign} \left(\frac{\bar{z} + 2\dot{\bar{x}}}{\bar{x} - 2\dot{\bar{z}}} \right) - \frac{\pi}{2} \text{sign} (\bar{z} + 2\dot{\bar{x}}). \quad (5.23)$$

O resultado analítico da Eq. (5.22) fornece a seguinte resposta para $\mathbf{F}_{mh}$, a saber:

$$\mathbf{F}_{mh} = -\mu\omega \frac{RL_h^3}{4C^2} \frac{[(\bar{z} + 2\dot{\bar{x}})^2 + (\bar{x} - 2\dot{\bar{z}})^2]^{\frac{1}{2}}}{1 - \bar{x}^2 - \bar{z}^2} \begin{bmatrix} 3\bar{x}V_h - G_h \sin \alpha_h - 2S_h \cos \alpha_h \\ 3\bar{z}V_h + G_h \cos \alpha_h - 2S_h \sin \alpha_h \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

em que:

$$V_h = \frac{2 + (\bar{z} \cos \alpha_h + \bar{x} \sin \alpha_h)G_h}{1 - \bar{x}^2 - \bar{z}^2}, \quad (5.25)$$

$$S_h = \frac{\bar{x} \cos \alpha_h + \bar{z} \sin \alpha_h}{1 - (\bar{x} \cos \alpha_h + \bar{z} \sin \alpha_h)^{\frac{1}{2}}}, \quad (5.26)$$

$$G_h = \frac{2}{(1 - \bar{x}^2 - \bar{z}^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{\bar{z} \cos \alpha_h + \bar{x} \sin \alpha_h}{(1 - \bar{x}^2 - \bar{z}^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right]. \quad (5.27)$$

Segundo Castro e Cavalcá (2009), para escrever a resposta analítica na Eq. (5.24) é preciso considerar a função G_h na Eq. (5.27). Segue que a montagem da matriz global $\mathbf{F}_h$ considera as forças $\mathbf{F}_{mh}$ e os nós dos elementos de viga em que elas atuam. Dado o rotor na Fig. 5.1, considera-se que as forças $\mathbf{F}_{mh}$ estão agindo nos nós de número 4 e 14 (da esquerda para a direita), que é onde os mancais suportam o eixo.

5.2 Incertezas no Rotor

Esta seção apresenta o estudo de incertezas no rotor flexível suportado por mancais hidrodinâmicos, cuja equação de movimento é dada na Eq. (5.1). A análise considera as incertezas associadas a parâmetros dos mancais hidrodinâmicos. Assume-se que a viscosidade do óleo μ é um parâmetro incerto, uma vez que as condições de operação influenciam na temperatura do óleo e, consequentemente, nas suas características de lubrificação. Além disso,

considera-se que a distância que separa o eixo da parte interna do mancal, expressa como folga radial, é um parâmetro com incertezas. Essa distância pode eventualmente variar devido ao desgaste relacionado a forma de operar o rotor ou até mesmo por tolerâncias relacionadas a usinagem das peças. A análise é feita pela aplicação da expansão em PC homogêneo e do HCL para três cenários diferentes.

Para a aplicação do PC homogêneo, as incertezas na viscosidade do óleo são expressas usando a Eq. (3.14) e considerando a variável aleatória gaussiana ξ_1 , o valor médio $\bar{\mu}$ que corresponde ao valor real de μ e o desvio-padrão $g_1 = \sigma_\mu$ associado ao valor médio. Assim:

$$\tilde{\mu} = \bar{\mu} + \sum_{n=1}^1 \xi_n g_n = \mu + \xi_1 \sigma_\mu. \quad (5.28)$$

No caso da folga existente entre o eixo e o mancal, dois cenários independentes foram estudados. O primeiro considera as incertezas ocorrendo no raio R do eixo do rotor, todavia somente na posição onde os mancais interagem com o eixo. Já o outro cenário considera o próprio parâmetro C , que é a folga radial e aparece como argumento de funções trigonométricas e de sinal nas Eqs. (5.25) a (5.27), trazendo maior dificuldade numérica por exigir a resolução das integrais que surgem no PC dada a projeção do espaço de variáveis sobre a base de polinômios (veja a Eq. (3.10)).

Aplicando o mesmo raciocínio usado para a viscosidade do óleo, quantificam-se as incertezas no raio R e na folga C considerando uma variável aleatória ξ_2 , que é independente de ξ_1 , os respectivos valores médios $\bar{R}$ e $\bar{C}$, que correspondem ao valor real adotado para R e $\bar{C}$, respectivamente, e o desvio-padrão $g_2 = \sigma_R = \sigma_C$. Logo:

$$\begin{cases} \tilde{R} = \bar{R} + \sum_{n=2}^2 \xi_n g_n = R + \xi_2 \sigma_R, \\ \tilde{C} = \bar{C} + \sum_{n=2}^2 \xi_n g_n = C + \xi_2 \sigma_C. \end{cases} \quad (5.29)$$

A propagação das incertezas no sistema rotativo considera a solução geral do sistema na Eq. (5.1) representada por uma expansão em PC homogêneo finita para $n = 2$ variáveis aleatórias e um polinômio de ordem máxima $p = 2$, o que resulta em $N = 5$. Assim:

$$\mathbf{q}(t, \xi) = \sum_{j=0}^5 \mathbf{q}_j(t) \Phi_j(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{q}_0 \Phi_0 + \mathbf{q}_1 \Phi_1 + \mathbf{q}_2 \Phi_2 + \mathbf{q}_3 \Phi_3 + \mathbf{q}_4 \Phi_4 + \mathbf{q}_5 \Phi_5. \quad (5.30)$$

Como o rotor na Fig. 5.1 é discretizado em elementos finitos e, assim, constituído por nós, tem-se que a solução geral $\mathbf{q}(t, \xi)$ é formada pela solução envolvendo todos os graus de liberdade do modelo. Assim, para cada nó i , que possui quatro graus de liberdade, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=0}^5 u_{i,j}(t) \Phi_j(\xi_1, \xi_2) \\ \sum_{j=0}^5 w_{i,j}(t) \Phi_j(\xi_1, \xi_2) \\ \sum_{j=0}^5 \theta_{i,j}(t) \Phi_j(\xi_1, \xi_2) \\ \sum_{j=0}^5 \varphi_{i,j}(t) \Phi_j(\xi_1, \xi_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{i,0} \Phi_0 + u_{i,1} \Phi_1 + u_{i,2} \Phi_2 + u_{i,3} \Phi_4 + u_{i,4} \Phi_4 + u_{i,5} \Phi_5 \\ w_{i,0} \Phi_0 + w_{i,1} \Phi_1 + w_{i,2} \Phi_2 + w_{i,3} \Phi_3 + w_{i,4} \Phi_4 + w_{i,5} \Phi_5 \\ \theta_{i,0} \Phi_0 + \theta_{i,1} \Phi_1 + \theta_{i,2} \Phi_2 + \theta_{i,3} \Phi_3 + \theta_{i,4} \Phi_4 + \theta_{i,5} \Phi_5 \\ \varphi_{i,0} \Phi_0 + \varphi_{i,1} \Phi_1 + \varphi_{i,2} \Phi_2 + \varphi_{i,3} \Phi_3 + \varphi_{i,4} \Phi_4 + \varphi_{i,5} \Phi_5 \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Ao substituir o parâmetro incerto, Eqs. (5.28) e (5.29), e a solução com as incertezas propagadas, Eq. (5.30), na equação de movimento do sistema, Eq. (5.1), escreve-se:

$$\mathbf{M} \sum_{j=0}^5 \ddot{\mathbf{q}}_j \Phi_j + [\mathbf{D} + \Omega \mathbf{D}_g] \sum_{j=0}^5 \dot{\mathbf{q}}_j \Phi_j + [\mathbf{K} + \dot{\Omega} \mathbf{K}_{st}] \sum_{j=0}^5 \mathbf{q}_j \Phi_j = \mathbf{W} + \mathbf{F}_u + \tilde{\mathbf{F}}_h. \quad (5.32)$$

em que $\tilde{\mathbf{F}}_h$ considera a substituição, dada a Eq. (5.28), de μ pelo $\tilde{\mu}$ e, dada a Eq. (5.29), de R pelo $\tilde{R}$ ou de C pelo $\tilde{C}$, mas não ambos simultaneamente.

Ao realizar a projeção da Eq. (5.32) sobre o espaço aleatório considerando a base de polinômios ortogonais de Hermite, obtém-se um conjunto de $N + 1 = 6$ equações de movimento para o sistema rotativo. Em outras palavras, tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_0 \langle \Phi_0^2 \rangle + [\mathbf{D} + \Omega \mathbf{D}_g] \dot{\mathbf{q}}_0 \langle \Phi_0^2 \rangle + [\mathbf{K} + \dot{\Omega} \mathbf{K}_{st}] \mathbf{q}_0 \langle \Phi_0^2 \rangle = \mathbf{W} \langle \Phi_0 \rangle + \mathbf{F}_u \langle \Phi_0 \rangle + \langle \tilde{\mathbf{F}}_h, \Phi_0 \rangle, \\ \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_1 \langle \Phi_1^2 \rangle + [\mathbf{D} + \Omega \mathbf{D}_g] \dot{\mathbf{q}}_1 \langle \Phi_1^2 \rangle + [\mathbf{K} + \dot{\Omega} \mathbf{K}_{st}] \mathbf{q}_1 \langle \Phi_1^2 \rangle = \mathbf{W} \langle \Phi_1 \rangle + \mathbf{F}_u \langle \Phi_1 \rangle + \langle \tilde{\mathbf{F}}_h, \Phi_1 \rangle, \\ \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_2 \langle \Phi_2^2 \rangle + [\mathbf{D} + \Omega \mathbf{D}_g] \dot{\mathbf{q}}_2 \langle \Phi_2^2 \rangle + [\mathbf{K} + \dot{\Omega} \mathbf{K}_{st}] \mathbf{q}_2 \langle \Phi_2^2 \rangle = \mathbf{W} \langle \Phi_2 \rangle + \mathbf{F}_u \langle \Phi_2 \rangle + \langle \tilde{\mathbf{F}}_h, \Phi_2 \rangle, \\ \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_3 \langle \Phi_3^2 \rangle + [\mathbf{D} + \Omega \mathbf{D}_g] \dot{\mathbf{q}}_3 \langle \Phi_3^2 \rangle + [\mathbf{K} + \dot{\Omega} \mathbf{K}_{st}] \mathbf{q}_3 \langle \Phi_3^2 \rangle = \mathbf{W} \langle \Phi_3 \rangle + \mathbf{F}_u \langle \Phi_3 \rangle + \langle \tilde{\mathbf{F}}_h, \Phi_3 \rangle, \\ \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_4 \langle \Phi_4^2 \rangle + [\mathbf{D} + \Omega \mathbf{D}_g] \dot{\mathbf{q}}_4 \langle \Phi_4^2 \rangle + [\mathbf{K} + \dot{\Omega} \mathbf{K}_{st}] \mathbf{q}_4 \langle \Phi_4^2 \rangle = \mathbf{W} \langle \Phi_4 \rangle + \mathbf{F}_u \langle \Phi_4 \rangle + \langle \tilde{\mathbf{F}}_h, \Phi_4 \rangle, \\ \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_5 \langle \Phi_5^2 \rangle + [\mathbf{D} + \Omega \mathbf{D}_g] \dot{\mathbf{q}}_5 \langle \Phi_5^2 \rangle + [\mathbf{K} + \dot{\Omega} \mathbf{K}_{st}] \mathbf{q}_5 \langle \Phi_5^2 \rangle = \mathbf{W} \langle \Phi_5 \rangle + \mathbf{F}_u \langle \Phi_5 \rangle + \langle \tilde{\mathbf{F}}_h, \Phi_5 \rangle. \end{cases} \quad (5.33)$$

O sistema (5.33) pode ser resolvido por algum método numérico a fim de obter as estatísticas da resposta, em particular, obter a média e a variância expressas na Eq. (5.34). Por envolver um sistema muito sensível aos termos não lineares que surgem na força de sustentação dos mancais, aplica-se o método de Newmark com convergência por Newton-Raphson, como ilustrado na Fig. 2.2 e com mais detalhes em Cavalini et al. (2015).

$$\begin{cases} \mu_q(t) = \mathbf{q}_0, \\ \sigma_q^2(t) = \langle \Phi_1^2 \rangle \mathbf{q}_1^2 + \langle \Phi_2^2 \rangle \mathbf{q}_2^2 + \langle \Phi_3^2 \rangle \mathbf{q}_3^2 + \langle \Phi_4^2 \rangle \mathbf{q}_4^2 + \langle \Phi_5^2 \rangle \mathbf{q}_5^2. \end{cases} \quad (5.34)$$

Avaliam-se as estatísticas da resposta aleatória dadas na Eq. (5.34) para uma codificação usando o Matlab[®]. A análise considera a comparação da resposta determinística com os envelopes obtidos pelo PC homogêneo e o HCL, para os parâmetros incertos variando no intervalo $[-20\%, 20\%]$. A construção dos envelopes considerou 500 amostras, uma vez que os métodos convergiram satisfatoriamente com esta quantidade.

As amostras foram geradas dentro do intervalo de variação assumido para os parâmetros incertos, que são a viscosidade do óleo, o raio do eixo no mancal e a folga radial. No caso particular do raio do eixo no mancal, como se busca mensurar a folga, a variação é calculada com base no valor da folga radial. Os valores adotados para os parâmetros do sistema rotativo estão na Tabela 5.1.

Tabela 5.1. Parâmetros para o sistema rotativo da Fig. 5.1.

Parâmetro	Média (ou Nominal)	Intervalo para amostras
Comprimento do eixo $[m]$	0,780	-
Diâmetro do eixo $[m]$	0,025	-
Diâmetro do disco $[m]$	0,100	-
Espessura do disco $[m]$	0,002	-
Comprimento do mancal $[m]$	0,001	-
Módulo de Young $[Pa]$	$2,067 \times 10^{11}$	-
Densidade do material $[kg/m^3]$	7800	-
Coefficiente de Poisson	0,3	-
Constante λ	0	-
Constante β	2×10^{-4}	-
Desbalanceamento $[kg.m]$	100×10^{-6} em 0°	-
Velocidade de rotação $[RPM]$	1500	-
Folga radial $[m]$	50×10^{-6}	$\{0,00005 \pm 0,00001\}$
Viscosidade do óleo $[Pa.s]$	0,04	$\{0,04 \pm 0,008\}$
Raio do eixo no mancal $[m]$	0,0125	$\{0,0125 \pm 0,00001\}$

Fonte: a autora.

A Tabela 5.2 apresenta os comprimentos de cada elemento de viga, dado um eixo de comprimento 0,780 m, bem como a coordenada de cada nó ao longo da direção y. Destaca-se

que o eixo do rotor possui o mesmo diâmetro em todos os elementos de viga e está com seu primeiro nó posicionado na origem do sistema de coordenadas, como ilustrado na Fig. 5.1.

Tabela 5.2. Comprimento dos elementos de viga e posição dos nós do rotor.

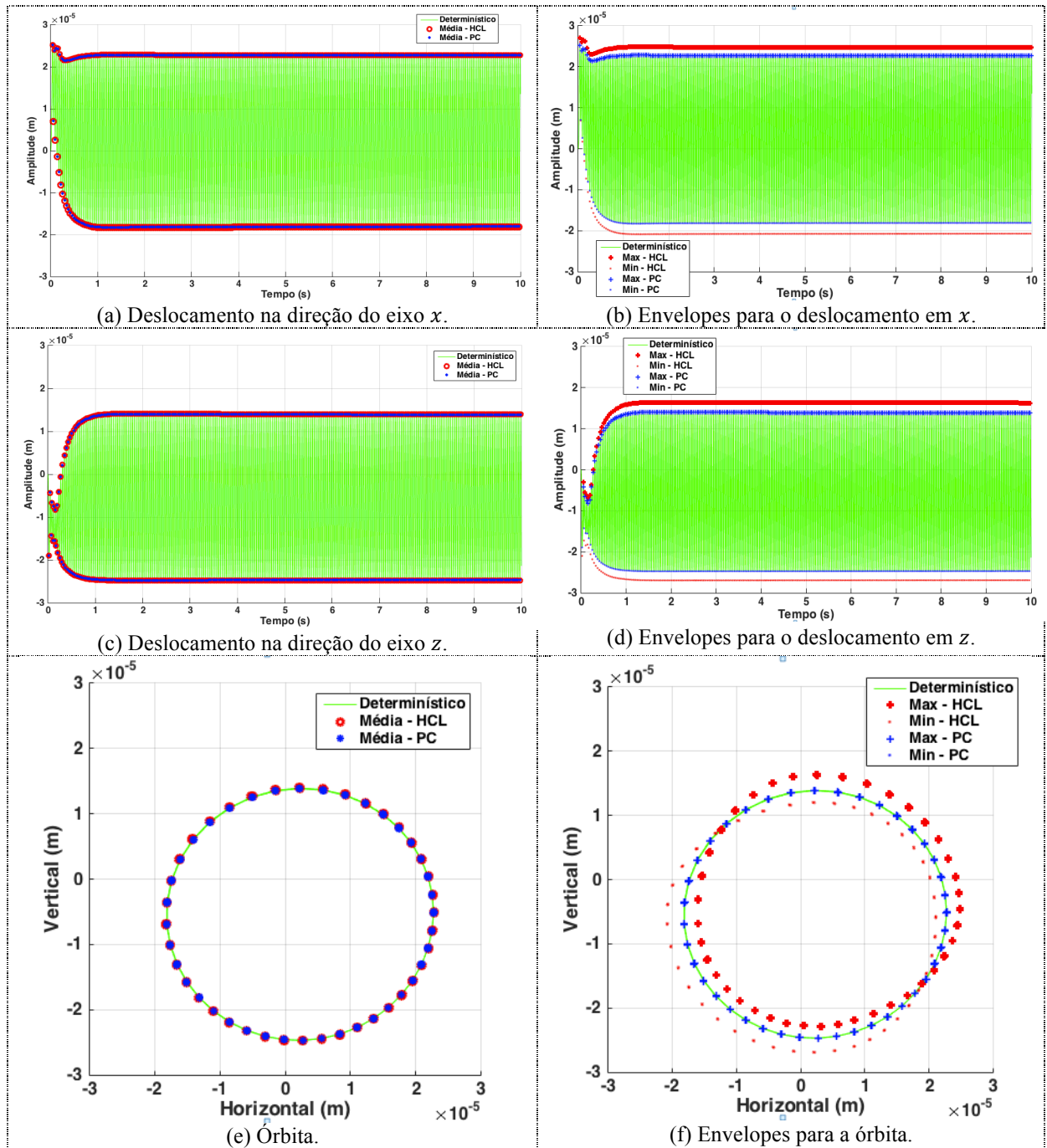
Elemento	Comprimento [m]	Nós	Posição em y [m]
1	0,045	1	0,000
2	0,045	2	0,045
3	0,005	3	0,090
4	0,005	4	0,095
5	0,0725	5	0,100
6	0,0725	6	0,1725
7	0,0725	7	0,245
8	0,0725	8	0,3175
9	0,0725	9	0,390
10	0,0725	10	0,4625
11	0,0725	11	0,535
12	0,0725	12	0,6075
13	0,005	13	0,680
14	0,005	14	0,685
15	0,045	15	0,690
16	0,045	16	0,735
		17	0,780

Fonte: a autora.

A equação de movimento do rotor foi resolvida para o tempo t variando no intervalo de $[0, 10]$ segundos. As condições iniciais correspondem a deslocamento e velocidade nulas no instante de tempo $t = 0$, para todos os graus de liberdade. Assumem-se os seguintes parâmetros para o método de Newmark: $\gamma = 0,5$, $\beta = 0,25$ e tamanho de passo $h = 0,001$, que pode ser decrementado, na iteração corrente, por um fator de 1,0025 caso o método de Newton-Rapshon tenha dificuldade de convergência. Assume-se que o método de Newton-Rapshon converge quando a norma do vetor residual é inferior a 10^{-5} .

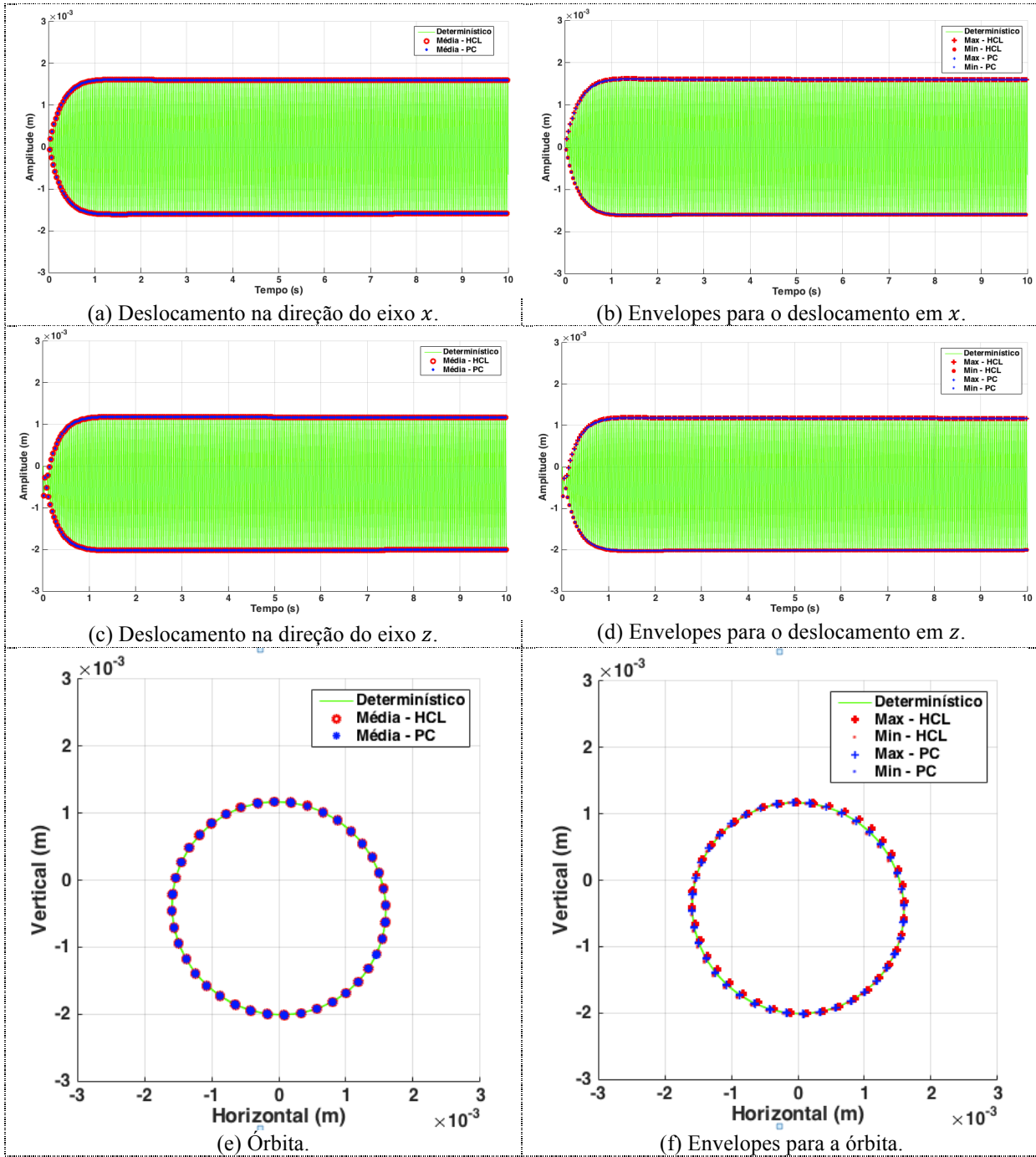
Os resultados nas Figs. 5.3 a 5.6 estão relacionados ao cenário em que há incertezas na viscosidade do óleo μ e no raio R do eixo sobre os mancais. Esses resultados mostram os deslocamentos transversais, em função do tempo, dos nós em que estão acoplados os mancais e os discos, bem como as órbitas no plano xz realizadas por esses nós. Em todas as figuras, a ilustração da esquerda mostra a comparação entre a solução determinística e as médias do PC e HCL, enquanto que a ilustração da direita mostra os envelopes do PC e do HCL.

Figura 5.3. Deslocamentos transversais e órbita do nó associado ao mancal #1.



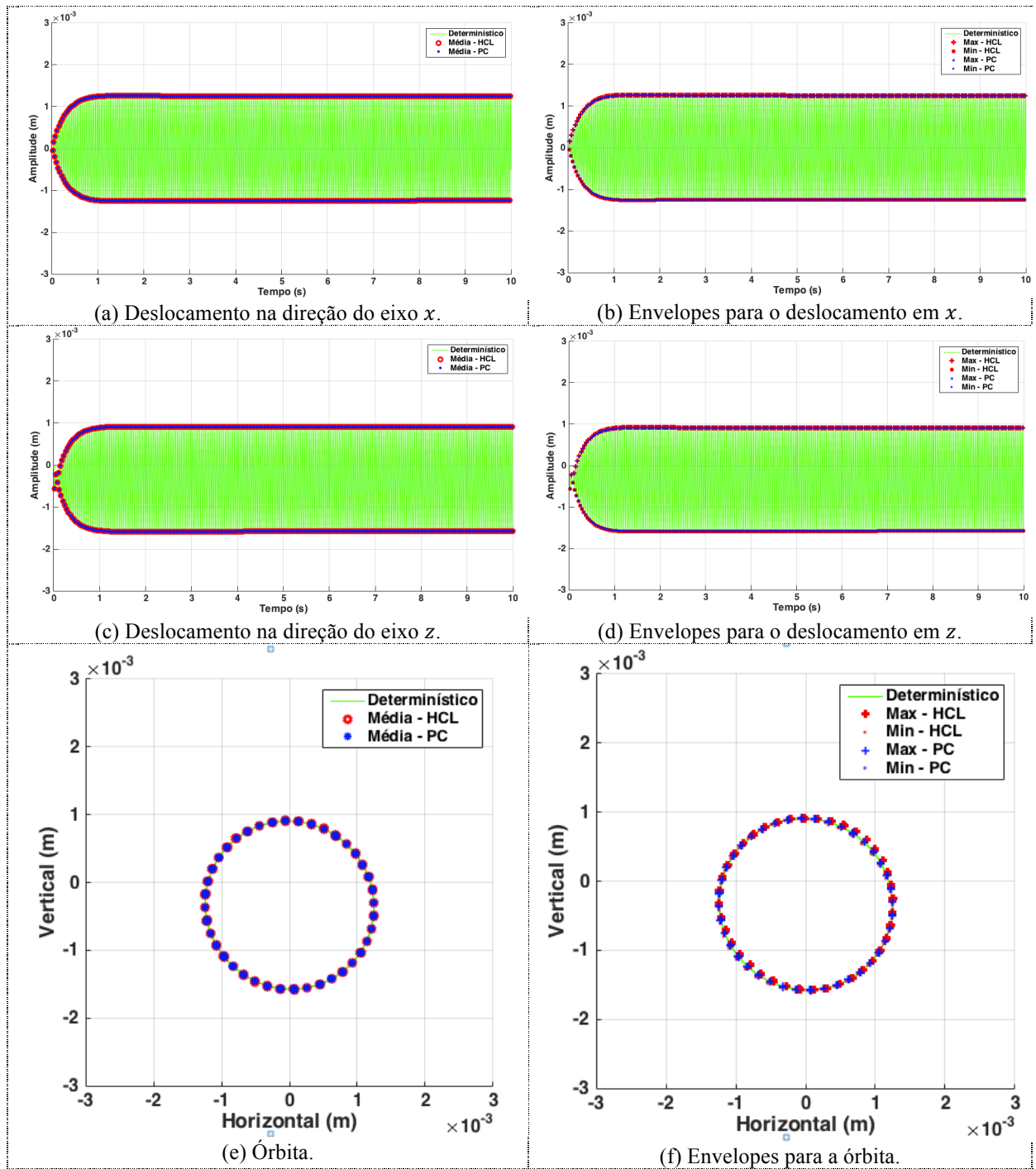
Fonte: a autora.

Figura 5.4. Deslocamentos transversais e órbita do nó associado ao disco #1.



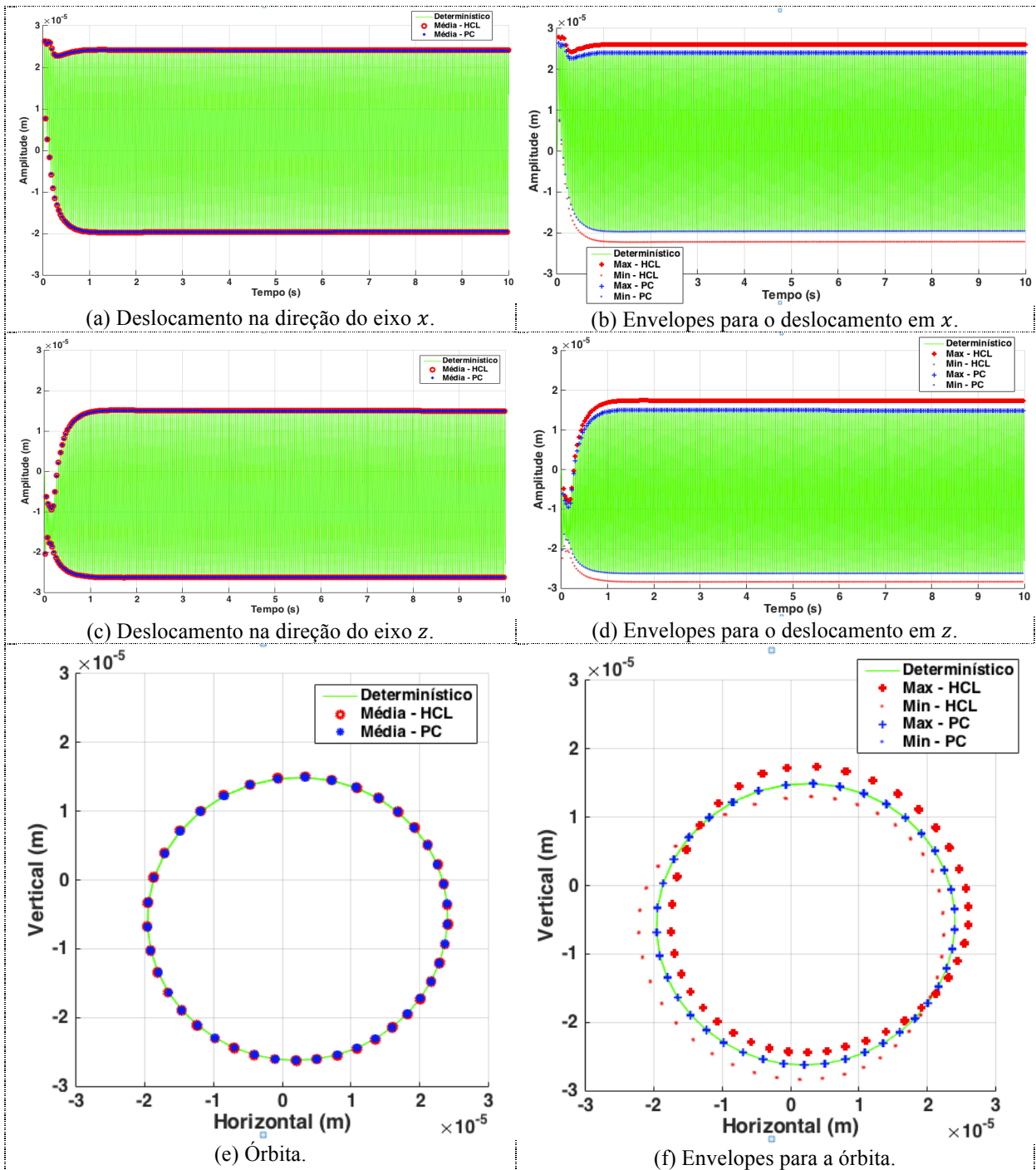
Fonte: a autora.

Figura 5.5. Deslocamentos transversais e órbita do nó associado ao disco #2.



Fonte: a autora.

Figura 5.6. Deslocamentos transversais e órbita do nó associado ao mancal #2.



Fonte: a autora.

Observa-se nesse primeiro cenário que a solução média do PC coincide com a solução determinística, enquanto a solução média do HCL é levemente diferente da solução determinística. Os envelopes de solução do HCL apresentam variação com relação à solução determinística, enquanto que os do PC não tem qualquer variação. Essa variação é clara ao observar faixas de valores retornadas pelo HCL para os deslocamentos nos mancais. Em geral:

- Para os deslocamentos relacionados ao mancal #1, Figs. 5.3b e 5.3d, nota-se que as faixas mínimas e máximas dos envelopes calculados pelo HCL têm uma maior diferença nas regiões próximas aos picos e vales. Essa diferença é perceptível quando observando os envelopes para a órbita (Fig. 5.3f).
- Com relação ao disco #1, os envelopes obtidos com o HCL possuem uma distância maior entre as faixas máximas e mínimas, embora não seja perceptível nas Figs. 5.4b e 5.4d, enquanto que na solução do PC essa diferença não existe. Nota-se que o distanciamento nas faixas retornadas pelo HCL ocorre em toda a órbita (Fig. 5.4f).
- Os deslocamentos no disco #2 são levemente menores do que no disco #1. Observa-se também que a órbita do disco #2, Fig. 5.4f, tem uma amplitude menor do que a do disco #1 (elas estão na mesma escala de valores). Além disso, as faixas mínimas e máximas associadas aos envelopes do HCL nas Figs. 5.5b e 5.5d mostram um distanciamento da solução determinística, embora não perceptível nessas figuras, enquanto que o PC mantém faixas coincidindo com a solução determinística.
- Os deslocamentos no mancal #2 seguem o mesmo padrão ao comparar com o mancal #1. Nota-se que o distanciamento entre as faixas dos envelopes ocorre em toda a órbita retornada pelo HCL (Fig. 5.6f) e também nos deslocamentos transversais (Figs. 5.6b e 5.6d). Além disso, a órbita do mancal #2 possui amplitude ligeiramente maior comparada a órbita do mancal #1.

É importante destacar que, embora as faixas dos envelopes calculados pelo HCL sejam melhor diferenciadas nos mancais, a escala de valores relacionada aos deslocamentos nesses elementos é menor comparada aos deslocamentos dos discos. Isso é coerente, pois em cada disco há a presença de uma massa de desbalanceamento. Além disso, os deslocamentos nos mancais não são livres, uma vez que o eixo do rotor tem seu movimento limitado pela folga radial.

A Tabela 5.3 apresenta o valor do desvio-padrão obtido a partir dos envelopes calculados pelo PC e HCL, nas Figs. 5.3 a 5.6, para os deslocamentos transversais. Observa-se que no caso dos envelopes calculados pelo PC não houve variação nas faixas, enquanto que para aqueles obtidos com o HCL a variação foi relativamente pequena, daí resulta que as soluções médias do HCL possuem pequena dispersão, mesmo para um intervalo relativamente grande, de $\pm 20\%$, de variabilidade dos parâmetros incertos.

O fato de não ter ocorrido variação nas soluções retornadas pelo PC é devido ao sistema de equações (5.33) não ser acoplado. Com isso, o coeficiente usado para obter a

solução média, $\mathbf{q}_0$, pode ser calculado diretamente pela resolução da primeira equação do sistema (5.33), a qual também não sofre influência dos desvios σ_μ e σ_R .

Tabela 5.3. Desvio-padrão obtido com o PC e HCL considerando os deslocamentos nas Figs. 5.3 a 5.6.

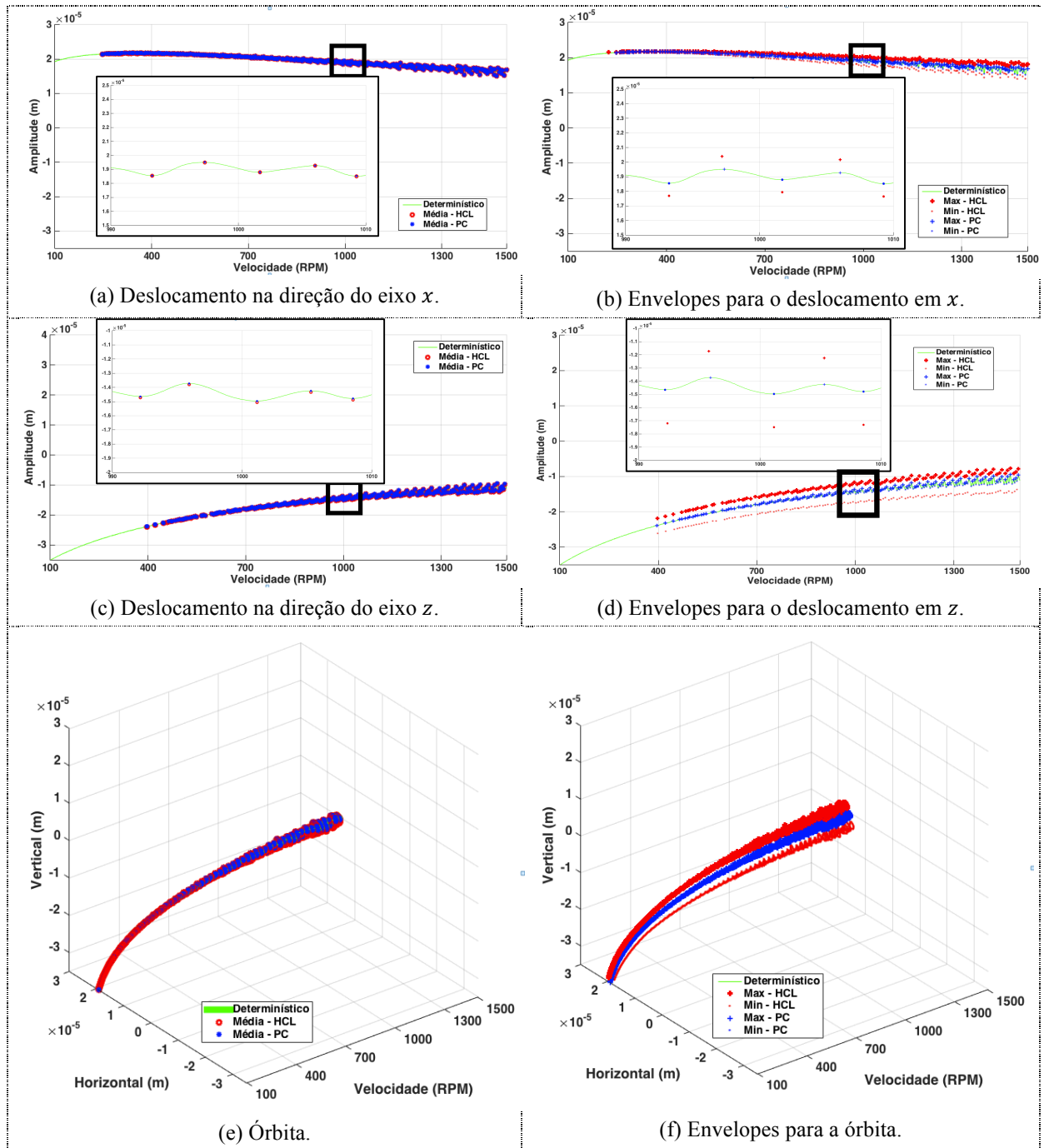
Elemento	Figura	Método	Desvio-Padrão
Mancal #1	5.3(b)	PC	0,0
		HCL	$1,37 \times 10^{-6}$
	5.3(d)	PC	0,0
		HCL	$1,31 \times 10^{-6}$
Disco #1	5.4(b)	PC	0,0
		HCL	$3,47 \times 10^{-5}$
	5.4(d)	PC	0,0
		HCL	$3,38 \times 10^{-5}$
Disco #2	5.5(b)	PC	0,0
		HCL	$2,72 \times 10^{-5}$
	5.5(d)	PC	0,0
		HCL	$2,65 \times 10^{-5}$
Mancal #2	5.6(b)	PC	0,0
		HCL	$1,36 \times 10^{-6}$
	5.6(d)	PC	0,0
		HCL	$1,29 \times 10^{-6}$

Fonte: a autora.

Um segundo cenário foi investigado para as incertezas na viscosidade do óleo μ e no raio do eixo R . Considera-se que o rotor sofre uma diminuição na sua velocidade de rotação quando em operação (condição de *run-down*). Com isso, a velocidade de rotação do eixo é reduzida, de forma linear, de 1800 para 0 RPM no intervalo de $[0, 10]$ segundos. As Figs. 5.7 a 5.10 apresentam, de forma similar ao cenário anterior, os deslocamentos transversais em função do tempo e as órbitas no plano xz realizadas pelos nós que servem de acoplamento para os mancais e discos, para a velocidade no intervalo de 100 a 1500 RPMs.

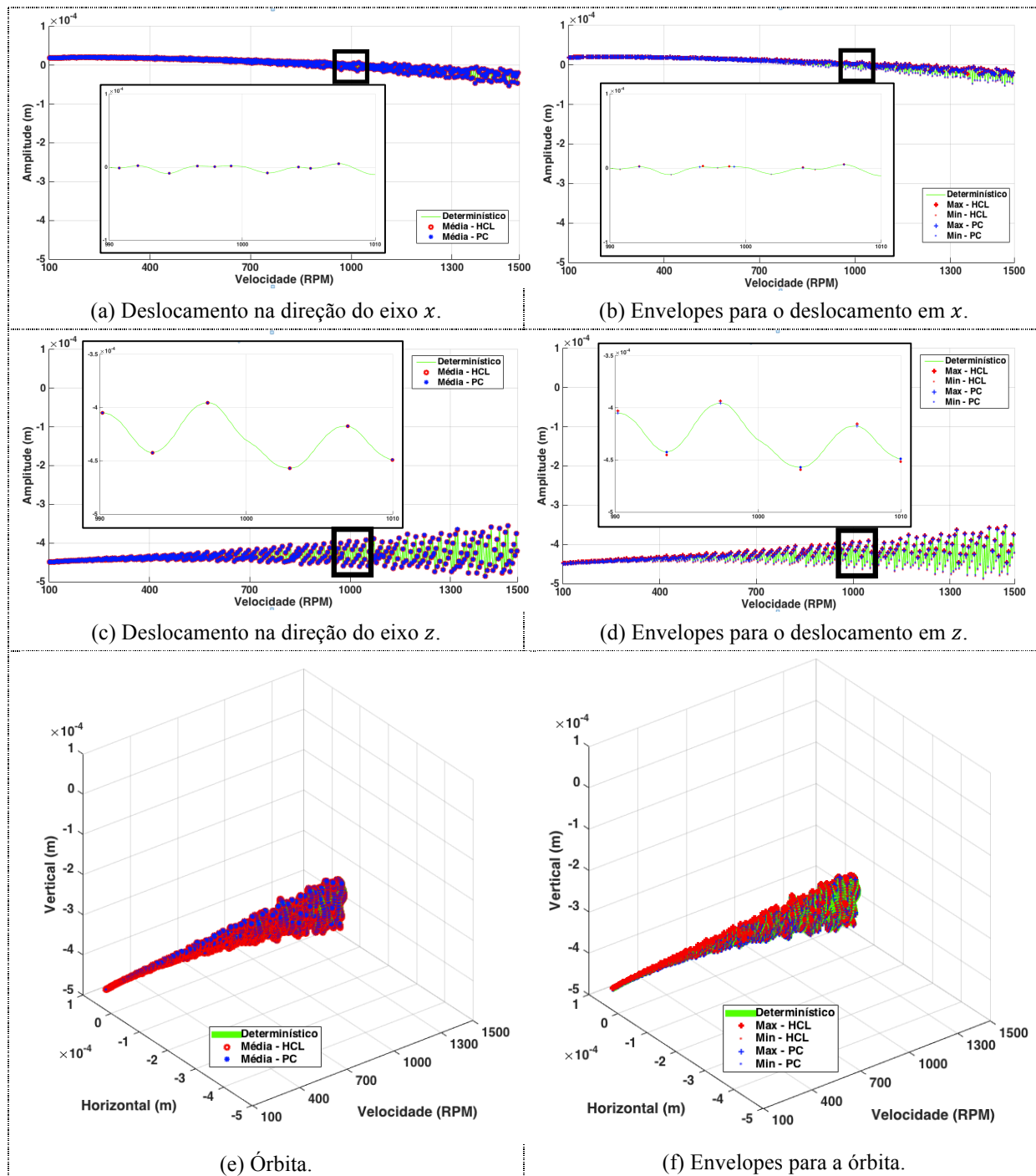
Nas Figs. 5.7 a 5.10 há também uma janela com o zoom sobre os deslocamentos transversais na faixa de rotação próxima dos 1000 RPMs, em particular no intervalo $[990, 1010]$ RPMs, como forma de melhor visualizar as diferenças entre os métodos.

Figura 5.7. Deslocamentos transversais e órbita associados ao mancal #1 na condição de *run-down*.



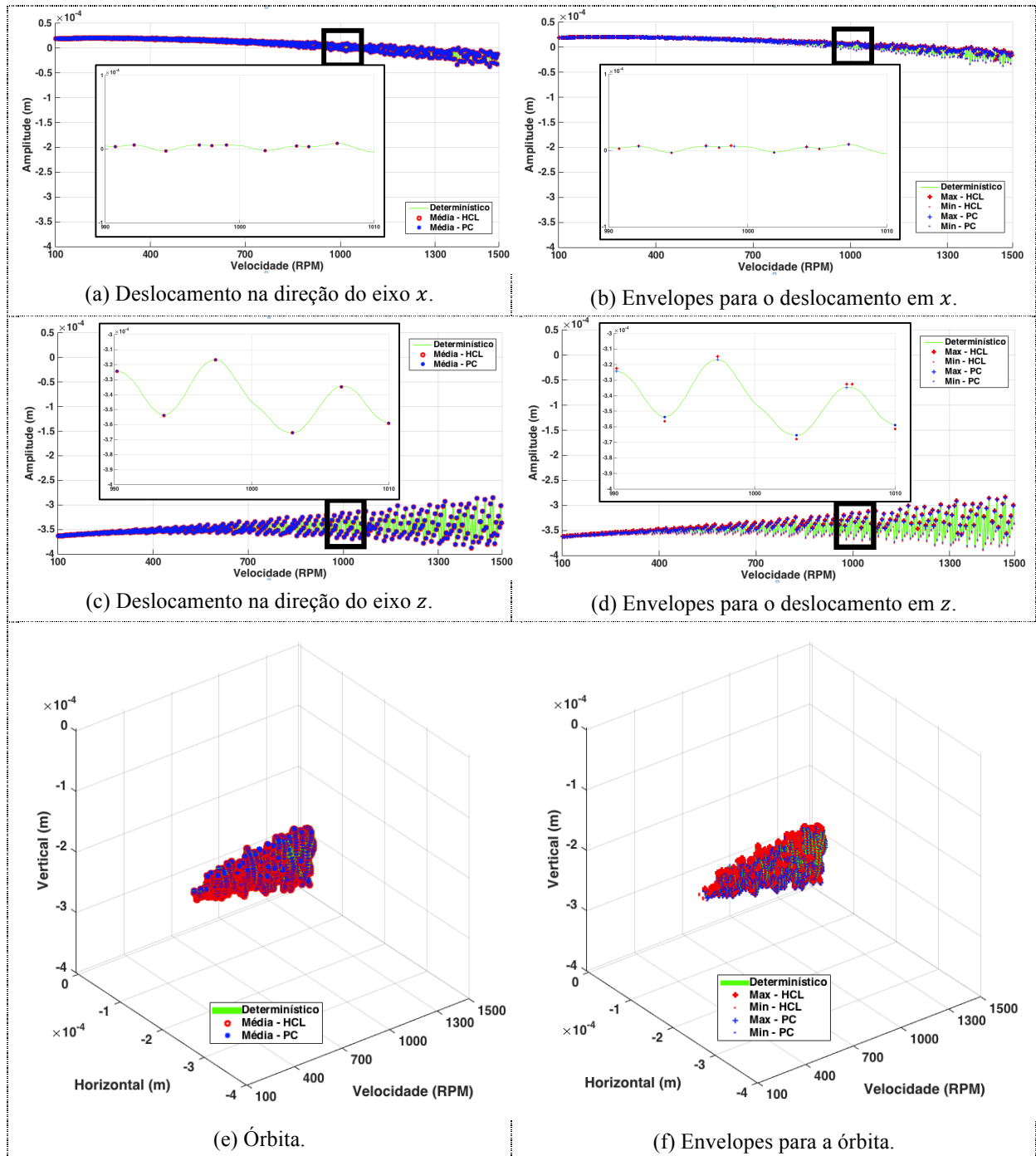
Fonte: a autora.

Figura 5.8. Deslocamentos transversais e órbita associados ao disco #1 na condição de *run-down*.



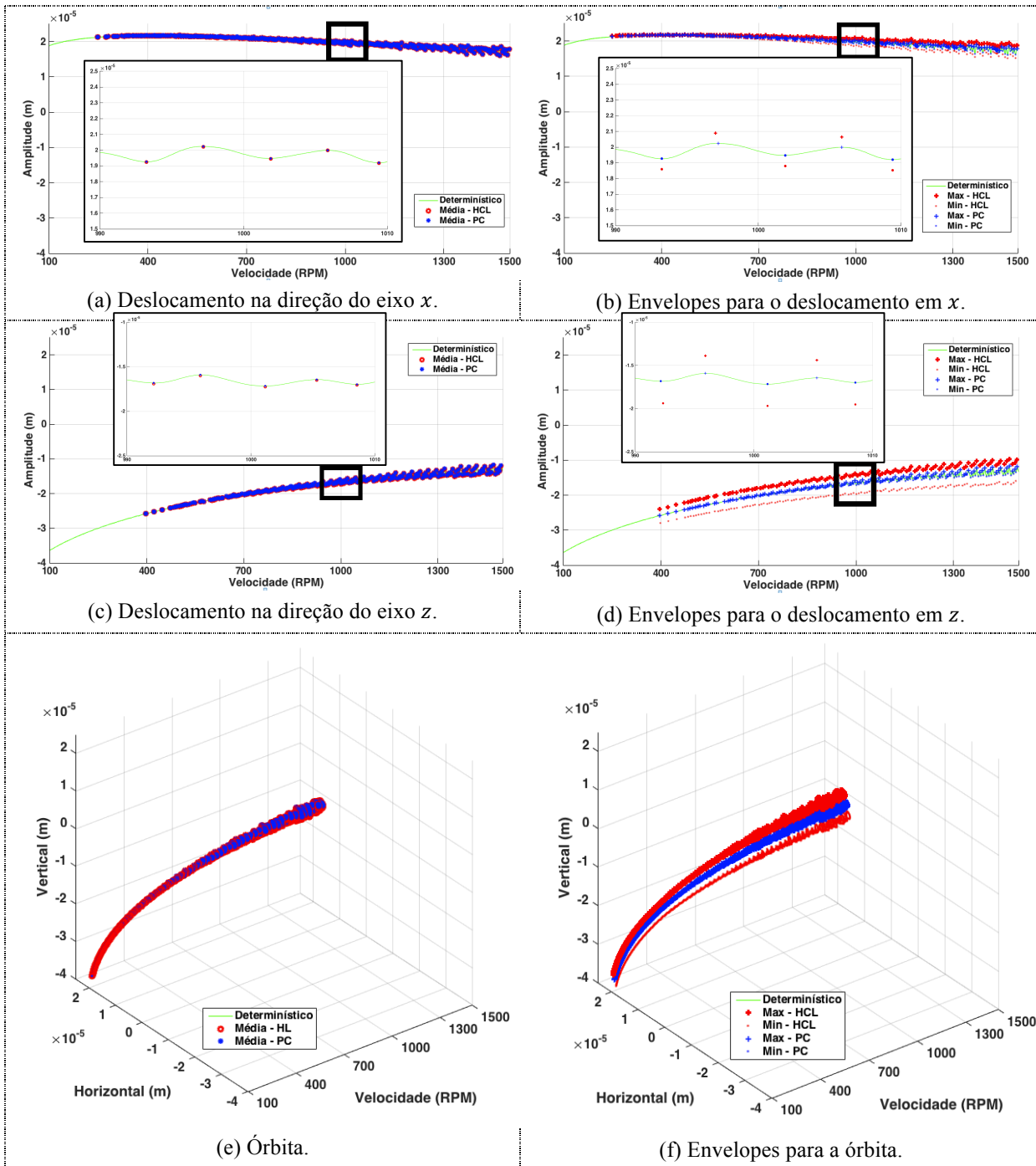
Fonte: a autora.

Figura 5.9. Deslocamentos transversais e órbita associados ao disco #2 na condição de *run-down*.



Fonte: a autora.

Figura 5.10. Deslocamentos transversais e órbita associados ao mancal #2 na condição de *run-down*.



Fonte: a autora.

No segundo cenário, que envolve a condição de *run-down*, observa-se comportamentos similares com relação ao primeiro cenário, ao comparar as soluções e os envelopes do PC e do HCL com a solução determinística. No geral, o PC não apresenta variabilidade com relação a solução determinística, enquanto que o HCL tem resultados com pouca variabilidade em termos de envelopes e média. A diferença nas faixas de valores para

os envelopes do HCL é visualmente percebida nos mancais, embora a escala seja menor comparada aos deslocamentos efetuados pelos discos. Em resumo:

- Os envelopes calculados pelo HCL para a órbita do mancal #1, Figs. 5.7b e 5.7d, mostram uma diferença mais acentuada entre as faixas mínimas e máximas a medida que a velocidade do eixo aumenta. Nota-se ainda que a amplitude da órbita tende a diminuir conforme ocorre a diminuição da velocidade de rotação (Fig. 5.7f).
- Os deslocamentos no disco #1 mostram que a órbita gerada diminui de amplitude conforme há diminuição na velocidade de rotação (Fig. 5.8f). Nesse caso, os envelopes obtidos com o HCL possuem maior variação entre as faixas ao comparar com os mancais.
- O disco #2 possui deslocamentos próximos ao do disco #1 conforme apresenta as Figs. 5.9a e 5.9c, porém a diferença entre as faixas é ligeiramente maior para o disco #1 (Figs. 5.9b e 5.9d). As órbitas do disco #2 possuem menor variabilidade na amplitude dos deslocamentos a medida que a velocidade de rotação do eixo vai diminuindo, ao comparar com os mancais, enquanto que os envelopes dados pelo HCL possuem diferença entre suas faixas mínimas e máximas.
- O comportamento dos deslocamentos no mancal #2 (Figs. 5.10a e 5.10c) é bem similar ao do mancal #1, com diferença para a amplitude dos deslocamentos, que é ligeiramente maior no mancal #1. A amplitude das órbitas tende a diminuir conforme a velocidade vai diminuindo e, além disso, os envelopes obtidos com o HCL, como mostra as Figs. 5.10b e 5.10d, tem diferença menor entre as faixas mínimas e máximas ao comparar com o mancal #1.

Os valores do desvio-padrão calculados sobre as soluções do PC e HCL, considerando os deslocamentos transversais, estão presentes na Tabela 5.4. Observa-se mais uma vez que com o HCL se obteve um valor de desvio-padrão relativamente pequeno em cada caso. Assim, nota-se que há pouca dispersão da solução média retornada com o HCL, enquanto o PC não apresenta qualquer variabilidade.

Como comentado anteriormente, os resultados obtidos utilizando o PC não apresentaram variação com relação a solução determinística, pois o coeficiente usado para obter a solução média é calculado diretamente da resolução da primeira equação do sistema (5.33), a qual não considera a influência dos desvios para os parâmetros incertos.

Tabela 5.4. Desvio-padrão obtido com o PC e HCL considerando os deslocamentos nas Figs. 5.7 a 5.10.

Elemento	Figura	Método	Desvio-Padrão
Mancal #1	5.7(b)	PC	0,0
		HCL	$4,81 \times 10^{-7}$
	5.7(d)	PC	0,0
		HCL	$3,67 \times 10^{-7}$
Disco #1	5.8(b)	PC	0,0
		HCL	$1,35 \times 10^{-6}$
	5.8(d)	PC	0,0
		HCL	$1,91 \times 10^{-6}$
Disco #2	5.9(b)	PC	0,0
		HCL	$1,11 \times 10^{-6}$
	5.9(d)	PC	0,0
		HCL	$1,60 \times 10^{-6}$
Mancal #2	5.10(b)	PC	0,0
		HCL	$4,21 \times 10^{-7}$
	5.10(d)	PC	0,0
		HCL	$3,59 \times 10^{-7}$

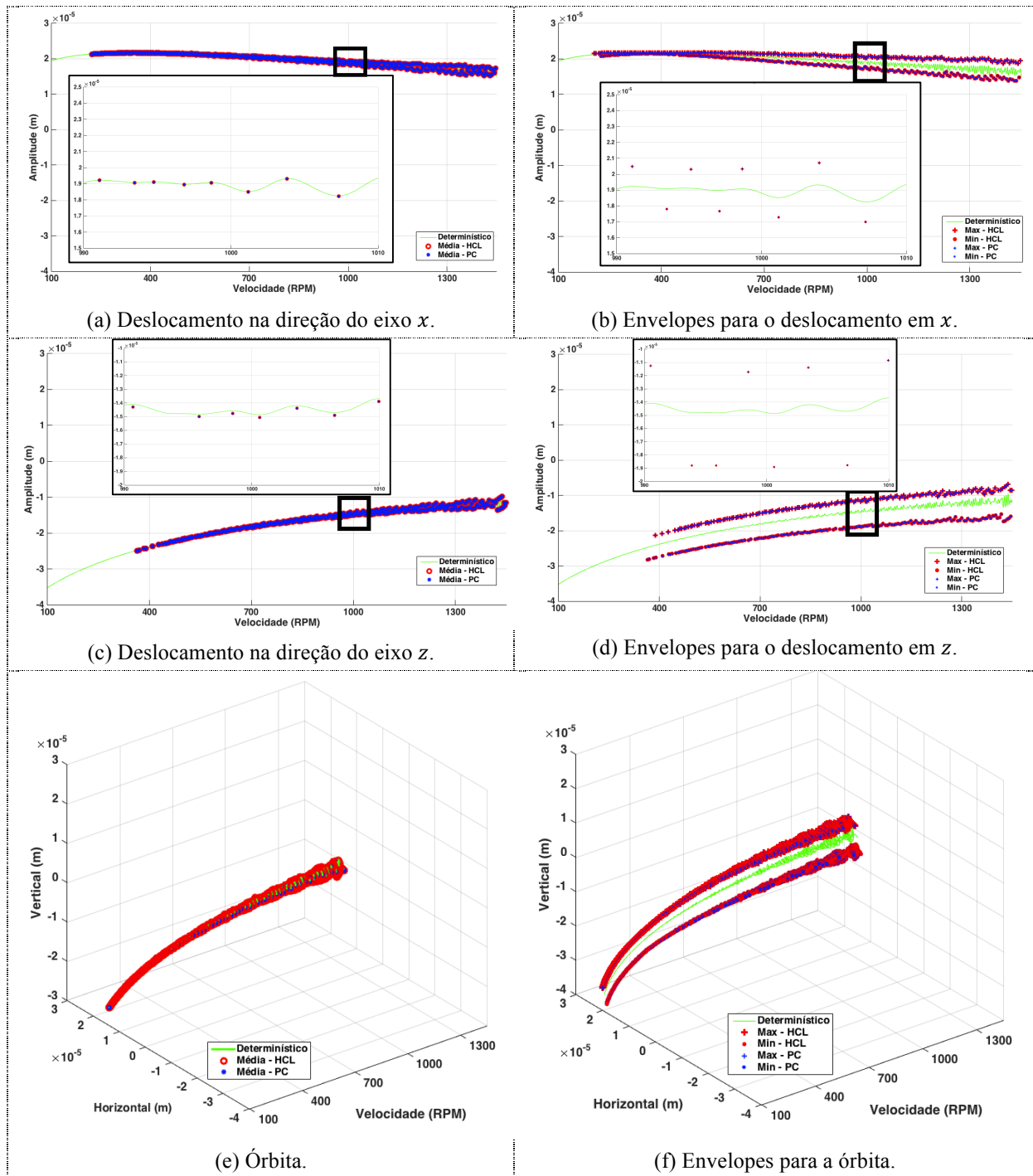
Fonte: a autora.

Um terceiro cenário buscou avaliar o impacto das incertezas na viscosidade do óleo μ e na folga radial C para o rotor na condição de *run-down*. Assim, o rotor tem sua velocidade de rotação reduzida linearmente de 1800 para 0 RPM no intervalo de [0, 10] segundos. Os deslocamentos transversais e as órbitas para os mancais e discos são apresentados nas Figs. 5.11 a 5.14 considerando a velocidade no intervalo de 100 a 1500 RPMs. Nessas figuras há uma janela com o zoom sobre os deslocamentos transversais com a velocidade de rotação no intervalo [990, 1010] RPMs.

Esse terceiro cenário mostra que a solução do HCL está mais próxima da solução obtida com o PC. Desta vez, os resultados obtidos com o PC indicam uma variação nos deslocamentos transversais com relação a solução determinística, pois a folga radial C aparece em termos trigonométricos e de sinais, dificultando a resolução das integrais para obter o coeficiente q_0 . Além disso, foi preciso diminuir consideravelmente o número de amostras e aumentar satisfatoriamente o valor da tolerância requerida pelo Newton-Rapshon de forma que o PC conseguisse retornar uma solução em menor tempo, uma vez que o método ficou executando por mais de um mês, sem ter retornado qualquer solução, para a tolerância original de 10^{-5} .

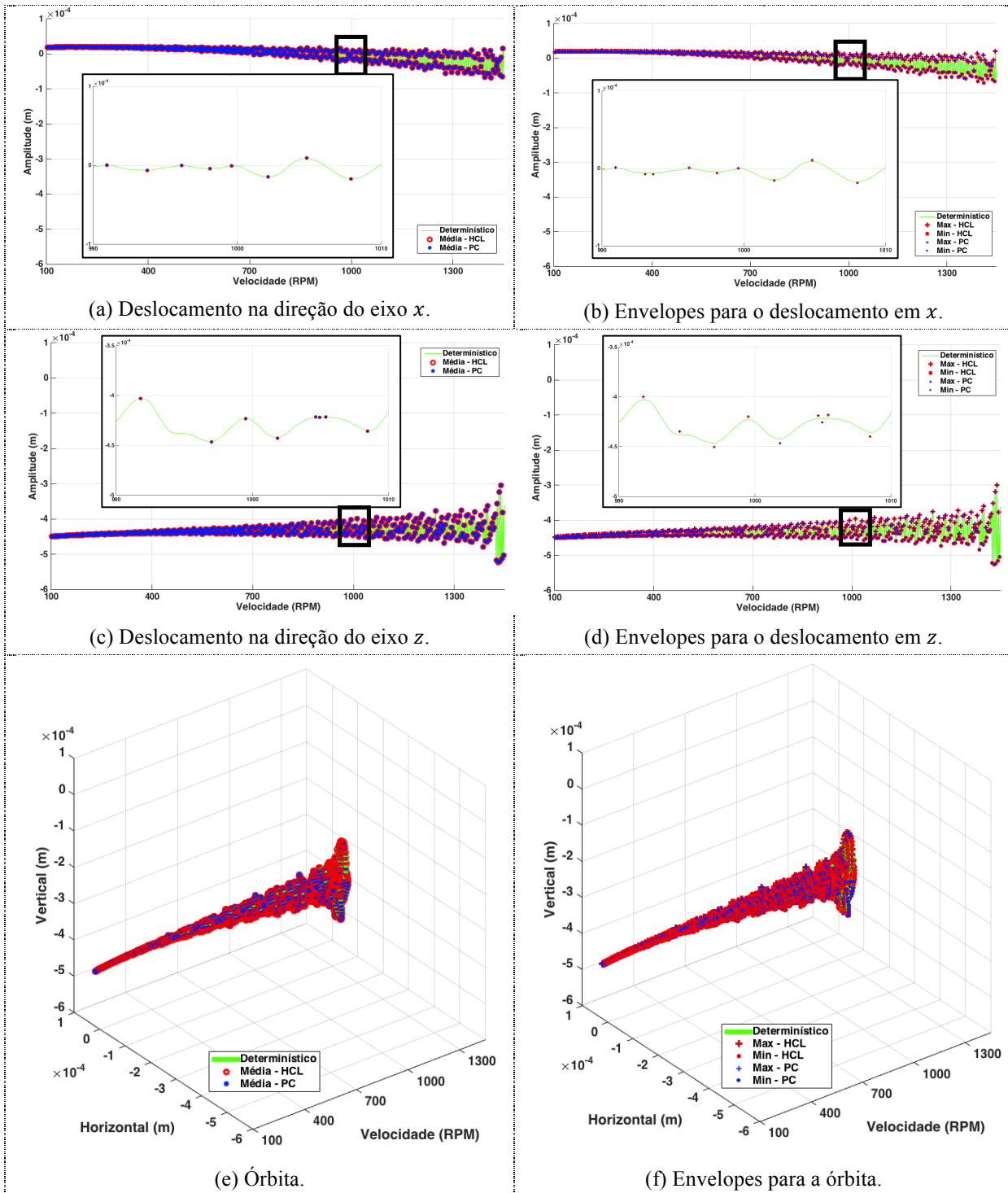
Essa variação nos resultados do PC possivelmente ocorreu devido aos erros numéricos introduzidos durante a resolução das integrais, pela regra de Simpson composta, para obter o coeficiente q_0 e por ter aumentado a tolerância associada ao Newton-Rapshon. As Figs. 5.11 a 5.14 apresentam os deslocamentos transversais nos elementos do rotor.

Figura 5.11. Deslocamentos e órbita do mancal #1 para o terceiro cenário.



Fonte: a autora.

Figura 5.12. Deslocamentos e órbita do disco #1 para o terceiro cenário.



Fonte: a autora.

Figura 5.13. Deslocamentos e órbita do disco #2 para o terceiro cenário.

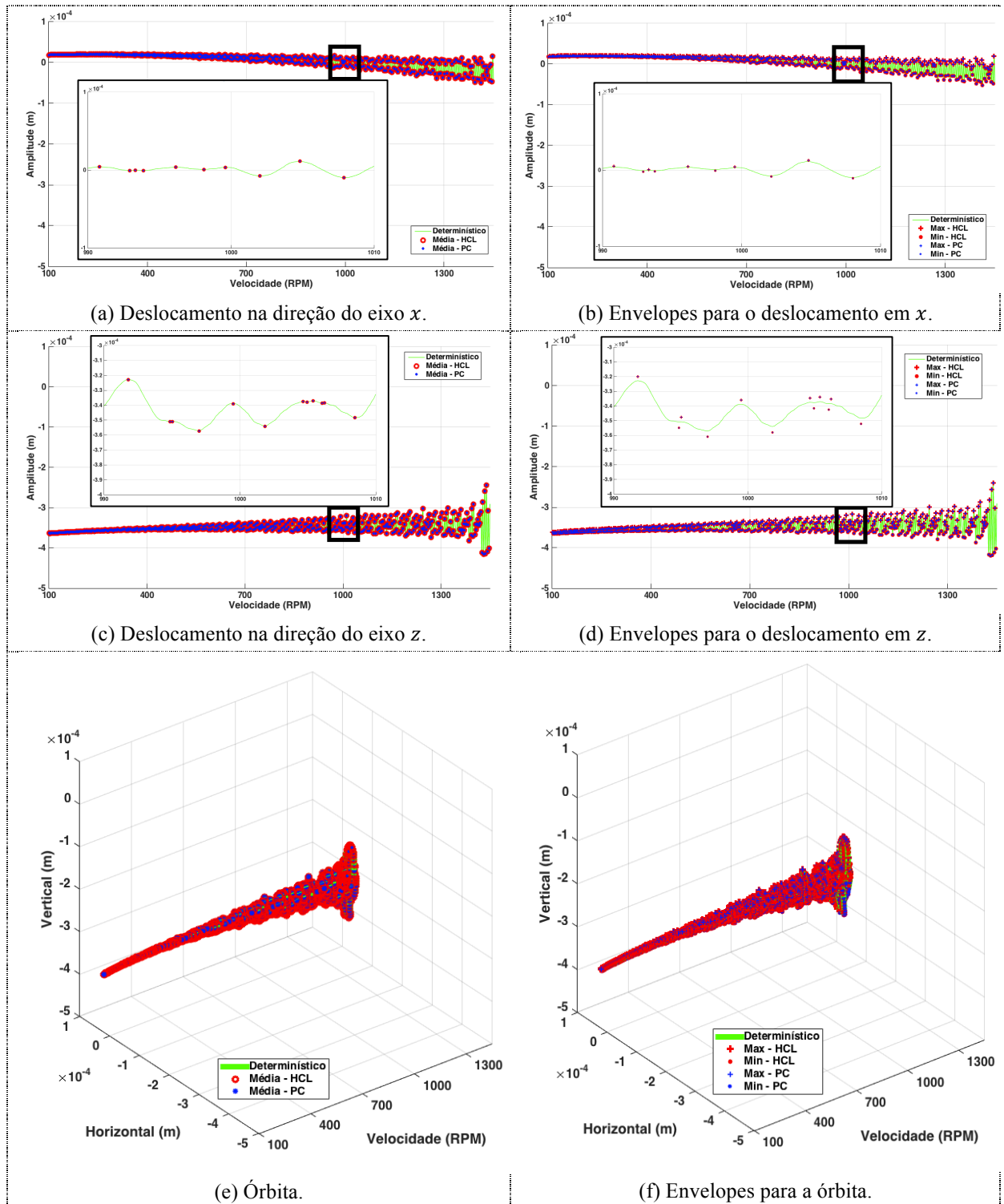
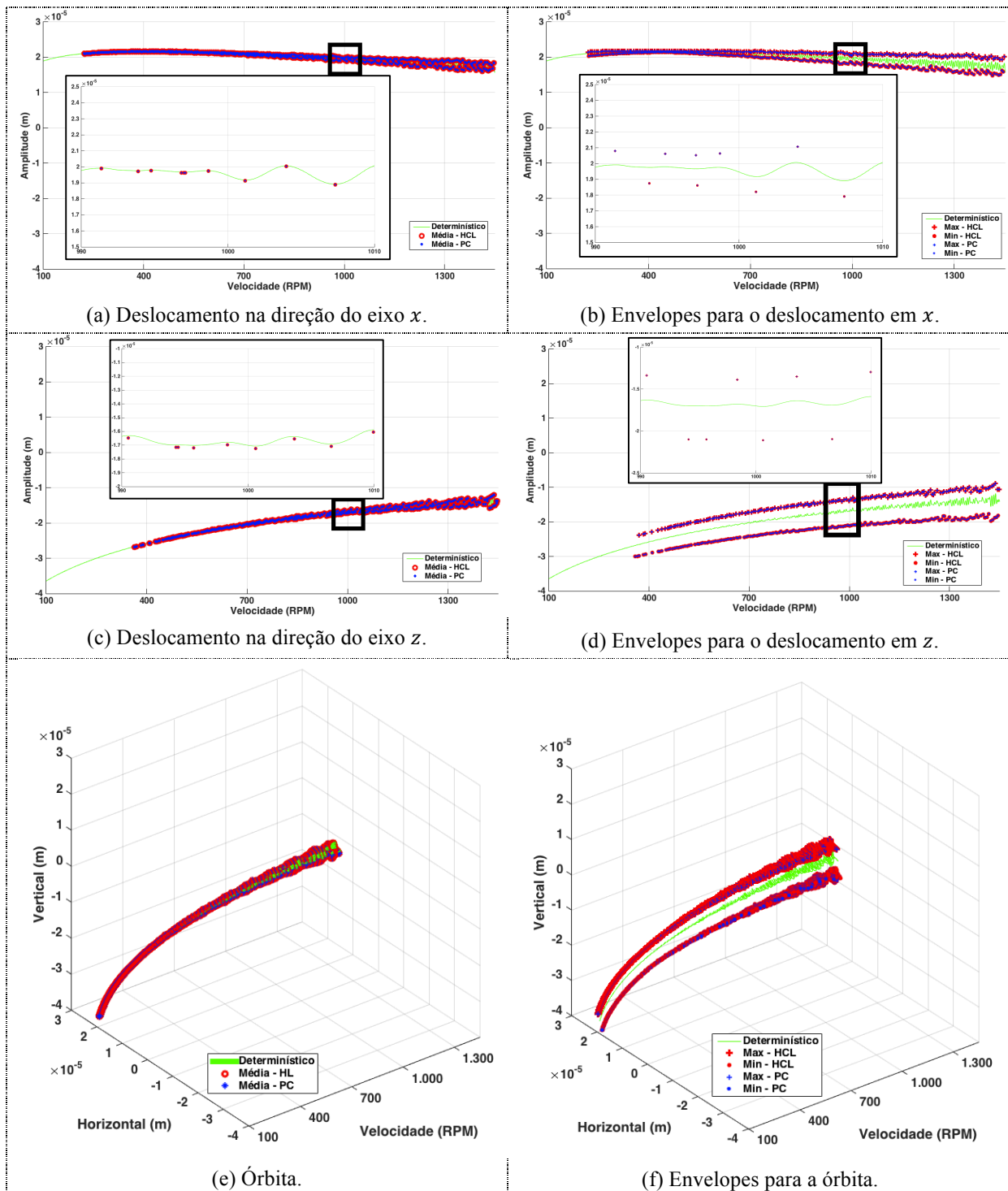


Figura 5.14. Deslocamentos e órbita do mancal #2 para o terceiro cenário.



Fonte: a autora.

Sobre o terceiro cenário, vale ainda comentar que:

- Os envelopes obtidos pelo PC e HCL, para a órbita do mancal #1, Figs. 5.11b e 5.11d, basicamente coincidem entre si, enquanto que a solução média obtida por eles tem uma ligeira variabilidade com relação a solução determinística (Figs. 5.11a e 5.11c).
- Os deslocamentos no disco #1 obtidos com o PC e HCL mostram que a órbita gerada diminui de amplitude conforme ocorre uma diminuição na velocidade de rotação do eixo (Figs. 5.12e e 5.12f).
- As soluções do PC e HCL para o disco #2, Figs. 5.13a e 5.13c, mostram que os deslocamentos transversais possuem amplitudes similares as do disco #1, sendo maior a amplitude para o deslocamento do disco #2 com relação ao eixo z. Os envelopes possuem suas faixas máximas e mínimas se aproximando a medida que a velocidade do eixo diminui (Figs. 5.13b e 5.13d).
- Os deslocamentos no mancal #2, Figs. 5.14a e 5.14c, obtidos com o PC e HCL, são similares aos do mancal #1, embora a amplitude seja ligeiramente maior para o mancal #1. Nas Fig. 5.15f é possível perceber que as faixas máximas reportadas pelo PC e HCL estão praticamente se coincidindo e, igualmente, para as faixas mínimas.

Capítulo 6

CONCLUSÕES

Com o objetivo de lidar com as incertezas em sistemas mecânicos, este trabalho considerou a aplicação do método hipercubo latino e a expansão em caos polinomial homogêneo, inicialmente em sistemas mecânicos discretos de um e dois graus de liberdade forçados em que a massa e/ou a rigidez da mola são parâmetros incertos. Em particular, foram analisadas uma aplicação para a resposta no domínio da frequência e outra no domínio do tempo, além de uma análise preliminar, onde se buscou o projeto ótimo envolvendo a maximização da frequência natural. Além disso, um estudo foi feito sobre um rotor flexível com incertezas nos parâmetros dos mancais.

A expansão em caos polinomial permite propagar as incertezas para a solução do sistema, de forma que a aleatoriedade é transferida para a base de polinômios ortogonais empregada, que neste caso foram os polinômios de Hermite, enquanto a parte determinística contém os coeficientes que descrevem as estatísticas da resposta aleatória (média e variância). No caso do Hipercubo Latino, torna-se possível realizar a amostragem da resposta utilizando uma quantidade razoável de pontos, uma vez que os experimentos mostraram que a resposta ficou próxima da retornada com o caos polinomial.

Com base nas simulações numéricas realizados para os sistemas mecânicos do tipo massa-mola, pode-se concluir que o caos polinomial fornece resultados condizentes com variabilidade assumida para os parâmetros incertos. Nota-se que o valor esperado da resposta aleatória tende a diferir da resposta determinística a medida que o desvio aumenta para um dos parâmetros, enquanto permanece baixa para o outro. O resultado é ainda mais perceptível quando o desvio-padrão da resposta é observado, mostrando que a massa é mais sensível do que a rigidez, dado o sistema com resposta no domínio da frequência. Da mesma forma, a rigidez não linear é mais sensível do que a linear para o sistema com resposta no domínio do tempo.

Ao considerar a aplicação de otimização no sistema massa-mola, fez-se a aplicação da expansão em caos polinomial homogêneo para obter as estatísticas das soluções aleatórias associadas a primeira frequência natural do sistema. O projeto assume que as massas estão sujeitas a incertezas e, assim, possuem um desvio-padrão máximo conhecido (gerando dois cenários de teste), enquanto se busca determinar os valores da rigidez associados a cada mola e que permite maximizar a primeira frequência ao mesmo tempo que minimizar o seu desvio-padrão.

A partir da aplicação do método de otimização, um algoritmo genético, os parâmetros encontrados para cada cenário de teste permitiram projetar um sistema massa-mola com alto valor para a primeira frequência natural. Todavia, a frequência tem o seu valor reduzido a medida que se deseja diminuir o desvio-padrão da resposta aleatória. Os resultados mostraram, para ambos os cenários, que o ganho com o aumento da frequência traz prejuízos em relação ao aumento do seu desvio-padrão. Além disso, a vantagem da construção da curva de Pareto é que o projetista pode selecionar o conjunto de valores que melhor representam a realidade do projeto, mesmo na presença de incertezas.

O foco principal do trabalho consistiu na consideração de incertezas em um rotor de eixo flexível, com dois discos acoplados e o eixo sendo suportado por dois mancais hidrodinâmicos cilíndricos. A modelagem do rotor seguiu a aplicação do método de elementos finitos para obter a equação de movimento geral do sistema rotativo. Para efeitos de análise foram consideradas a viscosidade do óleo e o raio do eixo nos mancais como parâmetros incertos. As respostas obtidas contemplam o deslocamento dos discos e mancais, bem como as suas órbitas.

Os experimentos computacionais realizados sobre o rotor em condição de velocidade constante e em *run-down* mostraram que as soluções médias do caos polinomial e a determinística são praticamente iguais, exceto para um último cenário em que foi preciso modificar as tolerâncias de convergência para o caos polinomial. Por outro lado, a solução do hipercubo latino apresentou razoável diferença quando comparada com a determinística. Os envelopes de solução gerados com o hipercubo latino mostraram que uma maior variabilidade dos deslocamentos transversais pode ocorrer nos nós de acoplamento dos discos, os quais sofrem a influência de uma massa de desbalanceamento, enquanto os mancais restringem um pouco mais o movimento do eixo. Pela análise dos envelopes e dos desvio-padrões, percebe-se a superioridade do caos polinomial sobre o hipercubo latino, mostrando que o hipercubo latino pode requerer um número considerável de amostras para ter soluções mais precisas, embora o caos polinomial também dependa da resolução de integrais.

Trabalhos futuros que podem ser realizados a partir dessa pesquisa são: considerar novas fontes de incertezas no rotor, por exemplo, analisar o impacto na resposta aleatória para a presença de incertezas nas forças de desbalanceamento, na matriz de massa e na matriz de rigidez; efetivar o projeto ótimo robusto do rotor buscando minimizar a amplitude de vibração ou maximizar as frequências naturais do sistema pelo uso de métodos, como o Colônia de Vagalumes Multiobjetivo Robusto e o *Nondominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGA); e, aplicar o caos polinomial em outros sistemas mecânicos, como no projeto de absorvedores dinâmicos de vibração com características não lineares.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AL-BENDER, F.; SYMENS, W.; SWEVERS, J.; VAN BRUSSEL, H. Theoretical Analysis of the Dynamic Behavior of Hysteresis Elements in Mechanical Systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 39, n. 10, p. 1721-1735, 2004.

BELUSSO, C. L. M. *Análise de Estabilidade do Modelo Não Linear de um Pulverizador Agrícola do Tipo Torre*. 123 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática), Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí - Rio Grande do Sul, 2011.

BARROS, M. B. 2009. *Proposição, avaliação numérica e experimental de um absorvedor dinâmico de vibrações multimodal*. 80 f. Dissertação (Mestrado – Engenharia Mecânica), Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Federal de Uberlândia, Uberlândia - Minas Gerais, 2009

BORGES, R. A. *Contribuição ao Estudo dos Absorvedores Dinâmicos de Vibrações não-lineares*. 154 f. Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica), Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia - Minas Gerais, 2008.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*, 9th Edition. Cengage Learning, 2010.

CAI, D.; XIAO, H. Dynamic Modeling and Analysis of Sliding Bearing-Rotor System with Coupling Rubbing Faults. Em: *2016 Sixth International Conference on Instrumentation & Measurement, Computer, Communication and Control (IMCCC)*, Harbin - China, p. 163-166, 2016.

CAPONE, G. Orbital motions of rigid symmetric rotor supported on journal bearings. *La Meccanica Italiana*, n. 199, p. 37-46, 1986.

CARRILHO, M. H. *Aplicação de algoritmos que conservam a energia-momentum na análise dinâmica não-linear*. 97 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil), Universidade de Brasília, Brasília - Distrito Federal, 2008.

CASTRO, H. F.; CAVALCA, K. L. Non-linear hydrodynamic bearing force characterization under fluid-induced instability. Em: *XIII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics (DINAME)*, Angra dos Reis - RJ, Brasil, 2009.

CAVALINI JR., A. A. *Detecção e identificação de trincas transversais incipientes em eixos horizontais flexíveis de máquinas rotativas*. 246 f. Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica), Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia - Minas Gerais, 2013.

CAVALINI JR., A. A.; LARA-MOLINA, F. A.; SALES, T. P.; KOROISHI, E. H.; STEFFEN JR., V. Uncertainty analysis of a flexible rotor supported by fluid film bearings. Em: *VIII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM)*, Uberlândia - MG, Brasil, 2014.

CAVALINI JR., A. A.; LARA-MOLINA, F. A.; SALES, T. P.; KOROISHI, E. H.; STEFFEN JR., V. Uncertainty analysis of a flexible rotor supported by fluid film bearings. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 12, n. 8, p. 1487-1504, 2015.

CHANG, S.-Y. Studies of newmark method for solving nonlinear systems: (ii) verification and guideline. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, v. 27, n. 5, p. 663-675, 2004.

CHO, H.; VENTURI, D.; KARNIADAKIS, G. E. Karhunen–Loève expansion for multi-correlated stochastic processes. *Probabilistic Engineering Mechanics*, v. 34, p. 157-167, 2013.

CHRISMAN, L. *Latin Hypercube vs. Monte Carlo Sampling*. 2014. Disponível em: <<http://www.lumina.com/blog/latin-hypercube-vs.-monte-carlo-sampling>>. Acesso em 01 de julho de 2016.

COSTA, T. N. *Avaliação numérica e computacional do efeito de incertezas inerentes a sistemas mecânicos*. 120 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização), Universidade Federal de Goiás, Catalão - Goiás, 2016.

CUNHA, J. C. C. *Propagação de incertezas na exploração e produção de Petróleo: abordagens com o uso do método do Caos Polinomial e da Colocação Estocástica*. 109 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica), Universidade Federal de Pernambuco, Recife - Pernambuco, 2010.

DARÓCZY, D.; JANIGA, G.; THÉVENIN, D. Analysis of the performance of a H-Darrieus rotor under uncertainty using Polynomial Chaos Expansion. *Energy*, v. 113, p. 399-412, 2016.

DARWIN, C. *On the origin of species by means of natural selection*. London: Murray, v. 247, 1859.

DESALE, B.; DASRE, N. Numerical Solution of the System of Six Coupled Nonlinear ODEs by Runge-Kutta Fourth Order Method. *Applied Mathematical Sciences*, v. 7, n. 6, p. 287-305, 2013.

DIDIER, J.; FAVERJON, B.; SINOUE, J.-J. Analysing the Dynamic Response of a Rotor System Under Uncertain Parameters Polynomial Chaos Expansion. *Journal of Vibration and Control*, v. 18, n. 5, p. 712-732, 2012.

DIDIER, J.; SINOUE, J.-J.; FAVERJON, B. Nonlinear vibrations of a mechanical system with non-regular nonlinearities and uncertainties. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 18, n. 11, p. 3250-3270, 2013.

DIMARAGONAS, A. *Vibration for Engineers*, 2nd Edition. Prentice Hall, 1996.

DYM, C. L. *Structural modeling and analysis*. Cambridge University Press, 1997.

ERKUS, B. Comparison of the techniques used in the newmark analysis of nonlinear structures. Em: *17th ASCE Engineering Mechanics Conference*, University of Delaware, Newmark – Estados Unidos, 2004.

FERRAGUD, F. X. B. *Control predictivo basado en modelos mediante técnica de optimización heurística. Aplicación a procesos no lineales y multivariantes*. 334 f. Tese (Doutorado – Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática), Polytechnic University of Valencia, Valencia-Spain, 1999.

FERREIRA, R. B. *Análise numérica de mancais hidrodinâmicos lisos e ranhurados utilizando o método dos volumes finitos*. 112 f. Dissertação (Mestrado – Faculdade de Engenharia Mecânica), Universidade Estadual de Campinas, Campinas – São Paulo, 2009.

FONSECA JR., L. A. *Técnica de Redução de Modelos Improved Reduced System Enriched Aplicada ao Estudo do Comportamento de Sistemas Mecânicos Não Lineares*. 124 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização), Universidade Federal de Goiás, Catalão - Goiás, 2016.

FORRESTER, A. I. J.; SÓBESTER, A.; KEANE, A. J. *Engineering design via surrogate modelling: a practical guide*. United Kingdom: John Wiley and Sons, 2008.

GAVIN, H. P. *Numerical Integration in Structural Dynamics*, 2016. Disponível em: <<http://people.duke.edu/~hpgavin/cee541/NumericalIntegration.pdf>>. Acesso em 15 de dezembro de 2016.

GERGES, Y. *Méthods de Réduction de Modèles en Vibroacoustique non-linéaire*. 172 f. Tese (Doutorado – École Doctorale Sciences pour l'Ingénieur et Microtechniques), Université de France, Comté - França, 2013.

GHANEM, R. G.; SPANOS, P. D. *Stochastic Finite Elements: a Spectral Approach*. Springer-Verlag, 1991.

GUEDRI, M. *Synthèse modale /approches stochastiques en élastodynamique linéaire et non-linéaire*. Tese (Doutorado), Faculté des sciences de Tunis de l'université El Manar, Nabeul, Tunisie, 2006.

GUEDRI, M.; BOUHADDI, N.; MAJED, R. Reduction of the stochastic finite element models using a robust dynamic condensation method. *Journal of Sound and Vibration*, v. 297, n. 1-2, p. 123-145, 2006.

GUERINE, A.; EL HAMI, A.; WALHA, L.; FAKHFAKH, T.; HADDAR, M. A polynomial chaos method for the analysis of the dynamic behavior of uncertain gear friction system. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, v. 59, p. 76-84, 2010, 2016.

GERRITSMA, M.; VAN DER STEEN, J-B.; VOS, P.; KARNIADAKIS, G. Time-dependent generalized polynomial chaos. *Journal of Computational Physics*, v. 229, n. 22, p. 8333-8363, 2010.

HOLLAND, J. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.

HUTCHINGS, I. M. *Tribology: Friction and wear of engineering materials*. Edward Arnold Publication Ltd, 1992.

INMAN, D. J. *Engineering Vibration*, 4th Edition. Pearson Education Inc, 2013.

JACQUELIN, E.; FRISWELL, M. I.; ADHIKARI, S.; DESSOMBZ, O.; SINOUE, J.-J. Polynomial chaos expansion with random and fuzzy variables. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 75, p. 41-56, 2016.

KATTAN, P. I. *MATLAB Guide to Finite Elements: an interactive approach*, 2nd Edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

KERSCHEN, G.; WORDEN, K.; VAKAKIS, A. F.; GOLINVAL, J.-C. Past, Present and Future of Nonlinear System Identification in Structural Dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 20, n. 3, p. 505-592, 2006.

KESHAVARZZADEH, V.; FERNANDEZ, F.; TORTORELLI, D. A. Topology optimization under uncertainty via non-intrusive polynomial chaos expansion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 318, p. 120-147, 2017.

KEWLANI, G.; CRAWFORD, J.; IAGNEMMA, K. A polynomial chaos approach to the analysis of vehicle dynamics under uncertainty. *Vehicle System Dynamics*, v. 50, n. 5, p. 1-26, 2012.

KOIDE, R. M.; FERREIRA, A. P. C. S.; LUERSEN, M. A. Latin hypercube design of experiments and support vector regression metamodel applied to buckling load prediction of composite plates. Em: 22nd *International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013)*, ABCM, Ribeirão Preto - SP, Brazil, 2013.

KOROISHI, E. H.; CAVALINI JR., A. A.; DE LIMA, A. M. G.; STEFFEN JR., V. Stochastics Modeling of Flexible Rotors. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 34, p. 597-603, 2012.

KOROISHI, E. H. *Controle de vibrações em máquinas rotativas utilizando atuadores eletromagnéticos*. 221 f. Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica), Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia - Minas Gerais, 2013.

KRIVILYOV, M.; RASQUIN, M.; STAPPERS, L.; GORDEEV, G.; FRANSAER, J.; DEGREGZ, G. Direct numerical simulation of near-wall turbulent flow and ionic mass transport in electrochemical reactors using a hybrid finite element/spectral method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 91, p. 922-935, 2015.

KUMAR, A.; UNNY, T. E. Application of Runge-Kutta method for the solution of non-linear partial differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, v. 1, n. 4, p. 199-204, 1977.

LALANNE, M.; FERRARIS, G. *Rotordynamics prediction in engineering*, 2nd Edition. New York: Jhon Wiley and Sons, 1998.

LANTOS, B.; MÁRTON, L. *Nonlinear control of vehicles and robots*. Springer-Verlag London, 2011.

LI, N.; ZHAO, J.; FENG, X.; GUI, D. Generalized polynomial chaos for the convection diffusion equation with uncertainty. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 97, p. 289-300, 2016.

LIMA, R. Q. *Análise de vibrações estocásticas em sistemas mecânicos*. 148 f. Dissertação (Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica), Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - Rio de Janeiro, 2014.

LIRA JR., J. D. *Otimização com modelos substitutos considerando incertezas em reservatórios de petróleo*. 149 f. Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil), Universidade Federal de Pernambuco, Recife - Pernambuco, 2012.

LIU, J. S. *Monte Carlo Strategies in Scientific Computing*. New York: Springer-Verlag, 2004.

LOBATO, F. S. *Otimização Multi-objetivo para o Projeto de Sistemas de Engenharia*. 354 f. Tese (Doutorado – Engenharia Mecânica), Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Federal de Uberlândia, Uberlândia - Minas Gerais, 2008.

LOTTI, R. S.; MACHADO, A. W.; MAZIEIRO, E. T.; LANDRE JR., J. Aplicabilidade Científica do Método dos Elementos Finitos. *Revista Dental Press de Ortodontia e Ortopedia Facial*, v. 11, n. 2, p. 35-43, 2006.

LUCOR, D.; KARNIADAKIS, G. E. Adaptive generalized polynomial chaos for nonlinear random oscillators. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 26, n. 2, p. 720-735, 2004.

LUCOR, D.; SU, C.-H.; KARNIADAKIS, G. E. Generalized polynomial chaos and random oscillators. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 60, p. 571-596, 2004.

MACHADO, M. R. *Quantificação de incertezas e análise de confiabilidade em problemas mecânicos*. 113 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica), Universidade Estadual de Campinas, Campinas - São Paulo, 2012.

MACHADO, T. H.; CAVALCA, K. L. Modeling of hydrodynamic bearing wear in rotor-bearing systems. *Mechanics Research Communications*, v. 69, p. 15-23, 2015.

MAEDO, M. A. *Simulação computacional por elementos finitos de múltiplas fissuras em sólidos usando técnica de fragmentação da malha*. 68 f. Dissertação (Mestrado – Faculdade de Engenharia), Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Bauru - São Paulo, 2015.

MCKAY, M. D.; BECKMAN, R. J.; CONOVER, W. J. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, v. 21, n. 2, p. 239-244, 1979.

MÉNDEZ, Y. A. D. *Um Estudo dos Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Multimodais*. 113 f. Dissertação (Mestrado – Engenharia Mecânica), Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista – Campus de Ilha Solteira, Ilha Solteira - São Paulo, 2014.

MENDES, R. U.; MACHADO, T. H.; CAVALCA, K. L. Experimental wear parameters identification in hydrodynamic bearings via model based methodology. *Wear*, v. 372-373, p. 116-129, 2017.

METROPOLIS, N.; ULAM, S. The Monte Carlo Method. *Journal of the American Statistical Association*, v. 44, n. 247, p. 335-341, 1949.

MOORTHY, R. J. K.; KAKODKAR, A.; SRIRANGARAJAN, H. R.; SURYANARYAN, S. An assessment of the Newmark method for solving chaotic vibrations of impacting oscillators. *Computers & Structures*, v. 49, n. 4, p. 597-603, 1993.

MORAES, F. H. *Comportamento dinâmico não-linear de um sistema mecânico com vibrações associadas a uma transição brusca na rigidez*. 104 f. Dissertação (Mestrado – Faculdade de Engenharia), Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Bauru - São Paulo, 2013.

MUSZYNSKA, A. A. *Rotordynamics*. CRC Press, 2005.

NADERI, M.; IYYER, N. 3D modeling of arbitrary cracking in solids using augmented finite element method. *Composite Structures*, v. 160, p. 220-231, 2017.

OLSSON, A.; SANDEBERG, G.; DAHLBLOM, O. On latin hypercube sampling for structural reliability analysis. *Structural Safety*, v. 25, p. 47-68, 2003.

PICELLI, P.; VICENTE, W. M.; PAVANELLO, R.; XIE, Y. M. Evolutionary topology optimization for natural frequency maximization problems considering acoustic-structure interaction. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 106, n. C, p. 56-64, 2015.

PILGER, G. G.; COSTA, J. F. C. L.; KOPPE, J. C. Improving the efficiency of the sequential simulation algorithm using latin hypercube sampling. Em: LEUANGTHONG, O.; DEUTSCH, C. V. (eds.). *Geostatistics Banff 2004*, Springer Netherlands, v. 14, part 5, pp. 989-998, 2005.

PIMENTEL, A. C. M. *Simulações sob incertezas em problemas de transferência de calor e massa*. 124 f. Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - Rio de Janeiro, 2014.

POLES, S.; LOVISON, A. A Polynomial Chaos Approach to Robust Multiobjective Optimization. In: DEB, K.; GRECO, S.; MIETTINEN, K.; ZITZLER, E. (eds.). *Hybrid and Robust Approaches to Multiobjective Optimization*, Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, Germany, 2009.

PREMPRANEERACH, P.; HOVER, F. S.; TRIANTAFYLLOU, M. S.; KARNIADAKIS, G. E. Uncertainty quantification in simulations of power systems: Multi-element polynomial chaos methods. *Reliability Engineering & System Safety*, v. 95, n. 6, p. 632-646, 2010.

QUEIROZ, L. R. S.; BORGES, R. A. Projeto ótimo robusto de um sistema de dois graus de liberdade utilizando polinômio do caos. Em: *IV Seminário de Pesquisa, Pós-graduação e Inovação da Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão (SPPGI)*, Catalão – GO, Brasil, 2016a.

QUEIROZ, L. R. S.; BORGES, R. A. Hipercubo latino e polinômio do caos aplicados ao estudo de incertezas em sistemas mecânicos. Em: *XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)*, ABCM, Brasília – DF, Brazil, 2016b.

RAJASEKARAN, S.; ANNETA, D.; CHOUB, Y. S. Optimal locations for heavy lifts for offshore platforms. *Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing)*, v. 9, n. 6, p. 605-627, 2008.

RAMOS, K. P. G. *Propagação de incertezas via expansão por caos polinomial na simulação de reservatórios de petróleo*. 113 f. Dissertação (Mestrado – Departamento de Engenharia Elétrica), Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - Rio de Janeiro, 2014.

RAND, R. H. *Lecture Notes on Nonlinear Vibrations*, 2005. Disponível em: <<http://audiophile.tam.cornell.edu/randdocs/nlvibe52.pdf>>. Acesso em 12 de dezembro de 2016.

RÉMOND, D.; FAVERJON, B.; SINOUE, J.-J. Analyzing the dynamic response of a rotor system under uncertain parameters by polynomial chaos expansion. *Journal of Vibration and Control*, v. 18, p. 712-732, 2011.

REN, M.; CONG, J.; WANG, B.; GUO, X. Extended multiscale finite element method for small-deflection analysis of thin composite plates with aperiodic microstructure characteristics. *Composite Structures*, v. 160, p. 422-434, 2017.

RICHARDS, C. M.; SINGH, R. Characterization of Rubber Isolator Nonlinearities in the Context of Single- and Multi-Degree-of-Freedom Experimental Systems. *Journal of Sound and Vibration*, v. 247, p. 807-834, 2001.

RITTO, T.; SAMPAIO, R.; BUEZAS, F. S. Modelling an overhung rotor with clearance and unbalance – Karhunen-Loève Decomposition. In: VAROTO, P. S.; TRINDADE, M. A. (eds.), *Proceedings of the XII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics*, ABCM, Ilhabela – SP, Brazil, 2007.

ROBERT, C.; CASELLA, G. A short history of Markov Chain Monte Carlo: Subjective recollections from incomplete data. *Statistical science*, v. 26, n. 1, p. 102-115, 2011.

SAIENI, H. A. *Non-linear vibrations of tensegrity structures*. Dissertação (Mestrado – School of Engineering Sciences), KTH Mechanics, KTH Royal Institute of Technology, Stockholm – Sweden, 2012.

SALAHSHOOR, E.; EBRAHIMI, S.; MAASOOMI, M. Nonlinear vibration analysis of mechanical systems with multiple joint clearances using the method of multiple scales. *Mechanism and Machine Theory*, v. 105, p. 495-509, 2016.

SANTOS, K. R. M. *Técnicas de amostragem inteligente em simulação de Monte Carlo*. 193 f. Dissertação (Mestrado – Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos - São Paulo, 2014.

SEGUÍ, B.; FAVERJON, B.; JACQUET-RICHARDET, G. Effects of random stiffness variations in multistage rotors using the Polynomial Chaos Expansion. *Journal of Sound and Vibration*, v. 332, n. 18, p. 4178-4192, 2013.

SHELDON, R. *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*, 8ª Edição. Porto Alegre: Bookman, 2010.

SHI, W.; ZHANG, C. Generalized polynomial chaos for nonlinear random delay differential equations. *Applied Numerical Mathematics*, v. 115, p. 16-31, 2017.

SINOUE, J.-J.; JACQUELIN, E. Influence of Polynomial Chaos expansion order on an uncertain asymmetric rotor system response. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 50-51, p. 718-731, 2015.

SOARES JR., D. *Análise dinâmica de sistemas não lineares com acoplamento do tipo solo-fluido-estrutura por intermédio do método dos elementos finitos e do método dos elementos de contorno*. 259 f. Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - Rio de Janeiro, 2004.

SOCOLAR, J. E. S. Nonlinear Dynamical Systems. Em: DEISBOECK, T. H; KRESH, J. Y. (Eds). *Complex Systems Science in Biomedicine*. Springer-Verlag US, 2006. cap. 2, p. 116-140.

SCHOUTENS, W. *Stochastic processes in the Askey scheme*. Tese (Doutorado), University of KU Leuven, Ghent-Belgium, 1999.

THEOTOKOGLU, E. E.; PANAYOTOUNAKOS, D. E. Nonlinear asymptotic analysis of a system of two free coupled oscillators with cubic nonlinearities. *Applied Mathematical Modelling*, v. 43, p. 509-520, 2017.

THOMSEN, J. J. *Vibrations and Stability*, 2nd Edition. Springer-Verlag, 2003.

UJIHARA, D. Y. *Obtenção de um modelo de rotor flexível sustentado por mancais magnéticos ativos através do método dos elementos finitos*. 134 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica), Universidade Federal Fluminense, Niterói - Rio de Janeiro, 2011.

VANCE, J.; ZEIDAN, F.; MURPHY, B. *Machinery vibration and rotordynamics*. New Jersey: Jhon Wiley and Sons, 2010.

VIANA, F. A. C. A Tutorial on Latin Hypercube Design of Experiments. *Quality and Reliability Engineering International*, v. 32, n. 5, p. 1975-1985, 2016.

WAN, X.; KARNIADAKIS, G. E. An adaptive multi-element generalized polynomial chaos method for stochastic differential equations. *Journal of Computational Physics*, v. 209, n. 2, p. 617-642, 2005.

WANG, D.; FRISWELL, M. I.; LEIC, Y. Maximizing the natural frequency of a beam with an intermediate elastic support. *Journal of Sound and Vibration*, v. 291, p. 1229-1238, 2006.

WANG, F.; SETT, F. Time-domain stochastic finite element simulation of uncertain seismic wave propagation through uncertain heterogeneous solids. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, v. 88, p. 369-385, 2016.

WANG, S.; WANG, Y.; ZI, Y.; HE, Z. A 3D finite element-based model order reduction method for parametric resonance and whirling analysis of anisotropic rotor-bearing systems. *Journal of Sound and Vibration*, v. 359, p. 116-135, 2015.

WRIGGERS, P. *Nonlinear Finite Element Methods*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

XIU, D.; LUCOR, D.; SU, C.-H.; KARNIADAKIS, G. E. Performance Evaluation of Generalized Polynomial Chaos. Em: SLOOT, P. M. A.; ABRAMSON, D.; BOGDANOV, A. V.; GORBACHEV, Y. E.; DONGARRA, J. J.; ZOMAYA, A. Y. (eds.), *International Conference on Computational Science (ICCS 2003)*, p. 346-354, 2003.

XIU, D.; KARNIADAKIS, G. E. The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 24, n. 2, p. 619-644, 2002a.

XIU, D.; KARNIADAKIS, G. E. Modeling uncertainty in steady state diffusion problems via generalized polynomial chaos. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 191, n. 43, p. 4927-4948, 2002b.

ZHOU, X.-Y.; GOSLING, P. D.; ULLAH, Z., KACZMARCZYK, L.; PEARCE, C. J. Stochastic multi-scale finite element based reliability analysis for laminated composite structures. *Applied Mathematical Modelling*, v. 45, p. 457-473, 2017a.

ZHOU, S.; SONG, G.; WANG, R.; REN, Z.; WEN, B. Nonlinear dynamic analysis for coupled vehicle-bridge vibration system on nonlinear foundation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 87, part A, p. 259-278, 2017b.