



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO



Edson dos Santos Silva

DINÂMICA DE PARTÍCULAS ESFÉRICAS EM LEVITADORES
ACÚSTICOS DE EIXO ÚNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CATALÃO – GO, 2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese

2. Nome completo do autor

Edson dos Santos Silva

3. Título do trabalho

DINÂMICA DE PARTÍCULAS ESFÉRICAS EM LEVITADORES ACÚSTICOS DE EIXO ÚNICO

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(a) autor(a) e ao(a) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Celso Vieira Abud, Orientador**, em 23/02/2022, às 09:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

Documento assinado eletronicamente por **EDSON DOS SANTOS SILVA, Discente**, em 28/02/2022, às 17:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543,](#)

EDSON DOS SANTOS SILVA

DINÂMICA DE PARTÍCULAS ESFÉRICAS EM LEVITADORES
ACÚSTICOS DE EIXO ÚNICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização do Instituto de Matemática e Tecnologia, da Universidade Federal de Goiás(UFG)/Universidade Federal de Catalão(UFCAT) em implantação, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Modelagem e Otimização. Área de concentração: Modelagem e Otimização, Linha de pesquisa: Modelagem Computacional e Otimização.

Orientador:
Celso Vieira Abud

CATALÃO – GO

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFCAT.

Silva, Edson dos Santos
DINÂMICA DE PARTÍCULAS ESFÉRICAS EM LEVITADORES
ACÚSTICOS DE EIXO ÚNICO / Edson dos Santos Silva. - 2022.
62, LXII f.

Orientadora: Profa. Dra. Celso Vieira Abud.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Catalão, Instituto
de Matemática e Tecnologia, Catalão, Programa de Pós-Graduação
em Modelagem e Otimização, Catalão, 2022.

Apêndice.

Inclui lista de figuras.

1. levitação acústica. 2. força acústica. 3. levitadores de eixo único.
4. caos. 5. dinâmica não linear. I. Abud, Celso Vieira, orient. II. Título.

CDU 534



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 13 da sessão de Defesa de Dissertação de **Edson dos Santos Silva**, que confere o título de **Mestre(a) em Modelagem e Otimização**, na área de concentração em **Modelagem e Otimização**.

Aos sete dias do mês de fevereiro de 2022, a partir das 09h00min, na sala web-conferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação, intitulada "*DINÂMICA DE PARTÍCULAS ESFÉRICAS EM LEVITADORES ACÚSTICOS DE EIXO ÚNICO*" nas dependências da Universidade Federal de Catalão, onde os programas de pós-graduação *Stricto Sensu* em funcionamento encontram-se provisoriamente vinculados à Universidade Federal de Goiás, em virtude de procedimentos técnicos relacionados à CAPES, já sendo realizada a transferência da Biblioteca Digital de Dissertações e Teses (BDTD). Assim, justifica-se os nomes das instituições neste documento, uma no cabeçalho (UFG), outra no corpo do texto (UFCAT). Os trabalhos foram instalados pelo(a) **Orientador(a), Professor(a) Doutor(a) Celso Vieira Abud (PPGMO/IMTec/UFCAT)**, com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: **Professor(a) Doutor(a) Sílvio Leão Vieira (IFI/UFG), membro titular externo; Professor(a) Doutor(a) Marcos Napoleão Rabelo (PPGMO/IMTec/UFCAT), membro titular interno**. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato (X) Aprovado () Reprovado pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Celso Vieira Abud**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos sete dias do mês de fevereiro de dois mil e vinte e dois.

Obs: "*Banca Examinadora de Qualificação/Defesa Pública de Dissertação/Tese realizada em conformidade com a Portaria da CAPES n. 36, de 19 de março de 2020, de acordo com seu segundo artigo:*

Art. 2o A suspensão de que trata esta Portaria não afasta a possibilidade de defesas de tese utilizando tecnologias de comunicação à distância, quando admissíveis pelo programa de pós-graduação stricto sensu, nos termos da regulamentação do Ministério da Educação."

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Celso Vieira Abud, Orientador**, em 07/02/2022, às 13:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sílvio Leão Vieira, Professor do Magistério Superior**, em 07/02/2022, às 15:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

Documento assinado eletronicamente por **Marcos Napoleão Rabelo, Professor do Magistério**

Dedico este trabalho em memória de meu pai Margarido Luis da Silva um dos meus maiores entusiastas e incentivadores.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço aos meus pais pelo apoio e amor incondicionais.

Agradeço a minha família: tios e primos pelos conselhos e pela força.

Agradeço aos professores pelos ensinamentos a mim passados, pela dedicação e paciência .

Aos meus amigos do mestrado William, Jonas, Robson, Jaqueline, Luis e Stanley pelas ótimas conversas e pelo apoio, agradeço também aos demais colegas por contribuírem com meu desenvolvimento e aprendizado durante as aulas e nos corredores da universidade.

Aos meus amigos, por todo o apoio, pelos votos de sucesso e compreensão. Não poderia deixar de agradecer a minha amiga Dagna pelo apoio nas horas difíceis e por me ajudar mesmo não tendo familiaridade com a física.

Ao meu orientador pelo imenso apoio, paciência e dedicação ao trabalho. Mais que um orientador um grande amigo. Sempre cobrando um bom trabalho e ao mesmo tempo sabendo reconhecer minhas dificuldades.

RESUMO

SILVA, E. S.. *Dinâmica de partículas esféricas em levitadores acústicos de eixo único*. 2022. 55 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem e Otimização) – Instituto de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

Mecanismos para contrapor a força gravitacional têm intrigado os cientistas durante anos. No princípio, manter objetos suspensos no ar sem qualquer contato aparente, era parte apenas de truques em shows de ilusionismo ou filmes de ficção científica, entretanto com o avanço da ciência a levitação se tornou realidade, graças aos estudos avançados sobre as forças eletromagnéticas, óticas e acústicas. Neste trabalho a dinâmica de pequenas esferas levitadas por forças acústicas produzidas por ondas estacionárias é discutida sob a perspectiva de duas aproximações para força de radiação acústica sendo uma aproximação não linear e outra linear. Os resultados mostram que o modelo com força acústica não linear é mais representativo em comparação com o modelo linear, uma vez que o modelo com força acústica não linear é capaz de representar fenômenos como histerese, duplicação de período, bifurcação e caos. Os diagramas de bifurcação revelam a ocorrência de bifurcações e de regiões caóticas assim como os espaços de fase corroboram, o cálculo do maior expoente de Lyapunov é utilizado para confirmar a existência de caos. Por fim, através das bacias de atração a topologia do espaço de condições iniciais é evidenciada.

Palavras-chaves: Levitação acústica, Força acústica, Levitadores de eixo único, Caos, Dinâmica não linear.

ABSTRACT

SILVA, E. S.. *Spherical particle dynamics in single-axis acoustic levitators*. 2022. 55 f. Master Thesis in Modelling and Optimization – Instituto de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

Mechanisms to counteract the gravitational force have intrigued scientists for years. In the beginning, keeping objects suspended in the air without any apparent contact was only part of tricks of illusionism shows or science fiction movies, however with the advancement of science levitation became a reality due to advanced studies on electromagnetic, optical and acoustic forces. In the present work, the dynamics of small spheres levitated by acoustic radiation force: a non-linear and a linear one. The results show that the model with non-linear acoustic force is more representative compared to the linear model, since the model with non-linear acoustic force is able to representing phenomena such as hysteresis, period doubling, bifurcation and chaos. Bifurcation diagram reveal occurrence of bifurcations and chaotic regions as well as the phase spaces also confirm, the calculation of the largest exponent of Lyapunov is used to confirm the existence of chaos. Finally, through the basins of attraction the topology of the space of initial conditions is highlighted.

Keywords: Acoustic Levitation, Acoustic force, Single-axis Levitators , Chaos, Non-linear dynamics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Ilustração de um Levitador acústico de eixo único. A esquerda uma representação gráfica do modelo mais simples de levitador acústico contendo um transdutor e um refletor separados por uma distância L múltipla de meio comprimento de onda, a esfera a ser levitada deve ser inserida em um nó de pressão acústica e levita nas suas proximidades. A esquerda uma fotografia de um levitador acústico de eixo único mais elaborado com múltiplos transdutores tanto na parte inferior quanto na parte superior do levitador, os transdutores são os objetos cilíndricos posicionados no centro do suporte e conectados por cabos elétricos.	16
Figura 2 –	Pressão de radiação P , Velocidade u , potencial de radiação acústica U e força de radiação acústica F para uma esfera em um campo acústico gerado por ondas estacionárias.	20
Figura 3 –	Amplitudes em função da frequência de excitação para modelo linear e não linear. Os modelos propostos foram analisados quanto a amplitude das soluções como função da frequência de perturbação Ω	26
Figura 4 –	Histerese e múltiplas soluções nas proximidades da frequência natural do sistema para o modelo não linear. Os pontos a e b marcados no gráfico da histerese para frequência de $37 H_z$ apresentam as duas amplitudes de oscilação da esfera, uma correspondente ao caminho de ida e outra correspondente ao caminho de volta. A transformada rápida de Fourier é feita para os dois casos e recupera a frequência natural de $37 H_z$	28
Figura 5 –	Bifurcação e duplicação de período, Amplitude versus Ω e Velocidade máxima versus Ω para $A_{in} = 0,35 mm$, no gráfico a) temos a amplitude de oscilação versus Ω , um ramo de bifurcação bem definido entre entre 60 e 90 H_z fica evidente e indícios de outros dois ramos entre 40 e 60 H_z surgem. No gráfico b) temos a velocidade máxima da esfera em função de Ω o ramo bem definido e os indícios de ramos continuam evidentes para esta nova variável.	30

Figura 6 – Espaço de fase $\Omega = 85,0909H_z$ para $A_{in} = 0,35mm$. Uma duplicação de período foi detectada a partir do gráfico do espaço de fase no ramo bem definido entre 60 e 90 H_z . Dois ciclos representam dois períodos.	31
Figura 7 – Transformada rápida de Fourier $\Omega = 85,0909H_z$ com $A_{in} = 0,35mm$. A partir da transformada rápida de Fourier a frequência dominante 85,0909 foi recuperada e uma segunda frequência, considerada frequência de duplicação de período também foi recuperada.	32
Figura 8 – Espaço de condições iniciais para duas situações com diferentes amplitudes de perturbação $A_{in} = 0,15 mm$ e $A_{in} = 0,35 mm$ para frequência de 37 H_z . Em preto estão representadas as soluções com amplitude alta e em vermelho as soluções com amplitude baixa. Para o gráfico a) com $A_{in} = 0,15 mm$ foram encontradas duas soluções corroborando a ocorrência da histerese detectada anteriormente. Para o gráfico b) com $A_{in} = 0,35 mm$ apenas as soluções de alta amplitude, representadas em preto, foram encontradas sugerindo que não há mais histerese para esta amplitude de perturbação.	34
Figura 9 – Espaço de condições iniciais, amplitude de perturbação $A_{in} = 0,35 mm$ para frequência de 70 H_z . Em preto estão representadas as soluções de amplitude alta e em vermelho as soluções de amplitude baixa.	35
Figura 10 – Diagramas de birfurcação para $A_{in} = 0,35 mm$, no gráfico a) uma simulação foi realizada demonstrando ramos de bifurcações para os intervalos de frequência de 50 a 60 H_z e de 70 a 90 H_z . No gráfico b) uma simulação amplificando a região destacada por um retângulo no gráfico a) é feita demonstrando bifurcações subsequentes e regiões de caos qualitativo. Os pontos P_1 e P_2 serão utilizados adiante para verificar o número de períodos das órbitas através dos gráficos do espaço de fase. No gráfico c) uma nova simulação amplificando a região destacada no retângulo feito no gráfico b) demonstra bifurcações e caos qualitativo.	37
Figura 11 – Espaço de fase na região caótica de 52,4635 H_z	41
Figura 12 – Cálculo do maior expoente de Lyapunov na frequência de 52,4635 H_z . Uma amplificação é feita na região entre 10^4 e 10^5 iterações para que seja visível na figura o valor aproximado do expoente de Lyapunov final.	41
Figura 13 – Espaços de fase para frequências de perturbação em ordem decrescente e aumento do número de períodos até o caos. Partindo do ponto P_1 e caminhando para o ponto P_4 a frequência de perturbação decresce enquanto o número de períodos das orbitas aumentam até que ocorra o caos, os pontos de P_1 a P_4 estão marcados na Figura 10. O Maior expoente de Lyapunov é apresentado para cada uma das frequências e confirmam a caoticidade ou não das órbitas. Um maior expoente de Lyapunov positivo indica caos.	43

Figura 14 – Bacias de Atração para frequência 52,6 a) e 52,4635 b) H_z . Regiões em preto representam soluções de período 1, Regiões em vermelho soluções de período 4 e em amarelo período 10.	44
Figura 15 – Multipla estabilidade de soluções.	46

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	CONCEITOS PRELIMINARES	15
2.1	Levitador acústico de eixo único	15
2.2	Força acústica produzida por ondas estacionárias	17
3	MATERIAIS E MÉTODOS	21
3.1	Modelo Matemático	21
3.2	Comparação entre modelo linear e não linear	24
3.3	Histerese e fenômeno de salto	26
4	CENÁRIO PARA O CAOS E MÚLTIPLA ESTABILIDADE	29
4.1	Diagrama de bifurcação	29
4.2	Cenário para o Caos	36
4.3	Expoentes de Lyapunov	38
4.4	Método numérico para obtenção do maior expoente de Lyapunov	39
4.5	Resultados do cálculo do expoente de Lyapunov	40
5	CONCLUSÕES	47
	REFERÊNCIAS	49
APÊNDICE A	CÓDIGO PARA O CÁLCULO DO MAIOR EXPOENTE DE LYAPUNOV	52

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Em sua obra prima "*Principia*", Sir Isaac Newton apresentou a primeira teoria sobre a dinâmica gravitacional como um sistema de atração recíproca que se baseia em sua terceira lei, mais tarde conhecida como lei da ação e reação (NEWTON, 1686). Por muitos anos a humanidade desafiou tal força e o fenômeno de levitação, por séculos foi parte apenas de truques em shows de ilusionismo ou filmes de ficção científica. Contudo, com o avanço do conhecimento científico sabe-se que a levitação pode ser realidade e nada mais do que a pura aplicação da teoria é necessário para realizar tal feito. Atualmente, cientistas tem dominado várias técnicas que utilizam forças sem contato para contrabalancear a força gravitacional e assim manter objetos suspensos no ar sem nenhum apoio aparente. Dentre as forças de não contato utilizadas pelas técnicas de levitação estão as forças elétricas, magnéticas, ópticas e acústicas.

Graças ao grande conhecimento adquirido a partir do século XIX com respeito a teoria eletromagnética, as forças elétricas e magnéticas foram as primeiras utilizadas em processos ou experimentos de levitação. Um ótimo exemplo seria o experimento com gotículas de óleo de Millikan no qual forças elétricas foram utilizadas para contrapor a força gravitacional, possibilitando a medida da carga elementar do elétron e sendo vencedor do prêmio nobel de 1923. Têm-se também o clássico experimento de Thomson envolvendo campo elétrico, no qual anéis metálicos são postos em suspensão no ar (SILVEIRA; AXT, 2003). Outro experimento, no mínimo curioso, utilizando forças magnéticas foi realizado por Andre Geim que conseguiu levantar um sapo fazendo uso de um campo magnético de alta intensidade (SIMON; GEIM, 2000).

Nas últimas décadas, além da levitação eletromagnética, também foram desenvolvidas formas de levitação ótica (INATOMI *et al.*, 2010; GUCCIONE *et al.*, 2013; PRICE *et al.*, 2015; GOUESBET, 2019) e levitação acústica (ANDRADE; PÉREZ; ADAMOWSKI, 2018; ANDRADE; CAMARGO; MARZO, 2018; TOBON *et al.*, 2017; ZANG *et al.*, 2017), ambas se baseiam no fato de que qualquer objeto sobre o qual uma onda incide pode absorver ou re-

fletir uma parte da energia de momento incidente sobre sua superfície (TORR, 1984). Desse modo ao produzir uma forma de onda incidente sobre a superfície do corpo inserido em sua trajetória, uma força de não contato é exercida contrabalanceando a força gravitacional. A vantagem de se utilizar as forças acústicas em relação a outras técnicas consiste no fato de que esta não apresenta restrições quanto ao tipo de material do objeto a ser levitado, uma vez que seu princípio fundamental se baseia na força de radiação emergente de um campo de pressão acústica (BRANDT, 2001).

A força de radiação acústica pode ser gerada por ondas acústicas progressivas ou ondas estacionárias, que em condições específicas podem neutralizar a força gravitacional, permitindo que os objetos levitem. A técnica de levitação acústica mais comum baseia-se na geração de ondas estacionárias, no qual objetos ou líquidos menores que o comprimento de onda são suspensos nos nós de pressão do campo de onda estacionário. Na literatura, encontra-se basicamente dois tipos de levitadores de ondas estacionárias : *i*) levitador de câmara ressonante fechada, que produz um campo de onda estacionária em um dos modos acústicos da cavidade e *ii*) levitador de eixo único, que consiste de um transdutor e um refletor, onde o campo de onda estacionária é estabelecido entre eles.

O aprisionamento, a separação e a manipulação de pequenas partículas utilizando campos acústicos produzidos por ondas sonoras têm aplicações potenciais em biologia, química, indústria farmacêutica entre outras áreas, possibilitando medições das propriedades físico-químicas de líquidos (SAHA *et al.*, 2010), triagem para seleção de excipientes no desenvolvimento de vacinas (MORGAN *et al.*, 2019), solidificação de ligas metálicas líquidas sub resfriadas (XIE; WEI, 2003), na investigação de líquidos super-resfriados e desenvolvimento de drogas amorfas (WEBER *et al.*, 2012), além de experimentos utilizando gotas líquidas e bolhas livres (SAHA; BASU; KUMAR, 2012; ZANG *et al.*, 2017).

Para uma melhor utilização da técnica de levitação acústica é importante compreender a dinâmica de um objeto com a interação do campo acústico de modo a prever possíveis fenômenos. Em um artigo recente de (FUSHIMI *et al.*, 2018), os autores validaram um modelo de um grau de liberdade para uma partícula em suspensão em um levitador acústico de tipo eixo único. A ocorrência de alguns comportamentos não lineares e uma bifurcação de período duplo foram previstas pelo modelo não linear e constatados experimentalmente. Tendo em vista que a bifurcação de período duplo é uma possível rota para o comportamento caótico (STROGATZ, 2018), uma investigação numérica aprofundada torna-se importante para revelar a dinâmica complexa dos levitadores de eixo único.

Portanto, o objetivo deste trabalho é realizar um estudo teórico-numérico com respeito a dinâmica de partículas esféricas levitadas em um campo de pressão acústica produzido por um levitador de eixo único.

Nos capítulos seguintes discutiremos sobre o fenômeno de levitação acústica e seus aspectos primordiais, posteriormente o modelo matemático adotado será apresentado e por

fim os resultados obtidos serão discutidos. A nossa principal questão é elucidar a dinâmica de movimento para esferas compressíveis sob ação de forças acústicas, de modo a conhecer sua trajetória e determinar o seu comportamento na presença de campos acústicos, que sejam produzidos por levitadores de eixo único operando com ondas estacionárias.

Capítulo 2

Conceitos Preliminares

Importantes fundamentos teóricos sobre a força de radiação acústica foram desenvolvidos e se tornaram a base para os entendimentos atuais da área. Em 1934 L.V. King apresentou as primeiras expressões para força de radiação acústica produzidas por ondas estacionárias agindo sobre uma esfera incompressível (KING, 1934). Em 1955, os efeitos das partículas compressíveis foram introduzidos por Yosioka e Kawasima (YOSIOKA; KAWASIMA, 1955), e em 1962, Gor'kov apresentou uma expressão para uma esfera compressível inserida em um campo acústico arbitrário (GOR'KOV, 1962).

Em geral, as aplicações que usam força de radiação acústica utilizam predominantemente ondas estacionárias, que são geradas por múltiplas reflexões de uma onda acústica, que ocorrem entre o transdutor e o refletor. Uma configuração simplificada de um sistema de levitação acústica consiste em um transdutor emissor de ondas acústicas que atua como um amplificador de sinal tal como um alto falante no qual toda a face emissora vibra harmonicamente a uma frequência ultrassônica (fora da faixa audível para o ser humano) e um refletor usado para gerar as múltiplas reflexões da onda emitida pelo transdutor. Essa configuração é chamada levitador acústico de eixo único.

2.1 Levitador acústico de eixo único

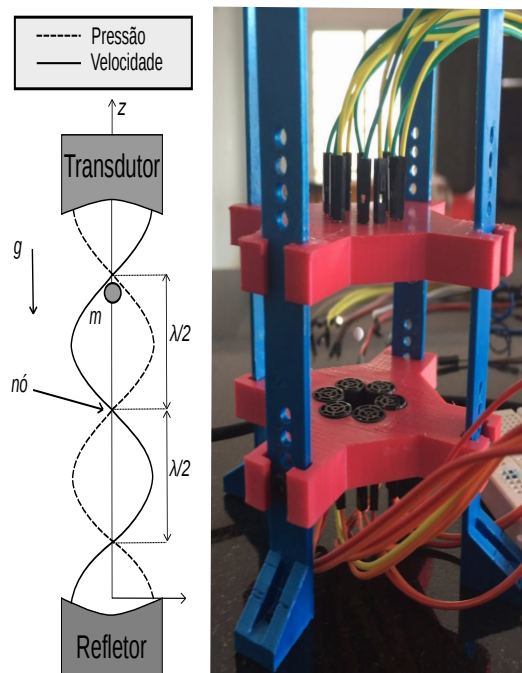
Os equipamentos responsáveis por gerar as ondas sonoras utilizadas na levitação acústica são denominados levitadores acústicos. O modelo mais simples de levitador é o levitador de eixo único, composto de um transdutor ultrassônico (responsável por gerar as ondas sonoras) e um refletor como apresentado na Figura 1. O material a ser levitado pode ser inserido no campo acústico, seja com a ajuda de uma pinça (se for sólido) ou de uma seringa (se for líquido), sendo posicionado nas proximidades de um nó de pressão acústica.

Os atuais avanços feitos na área tornaram possível levitar objetos com densidade maior como pequenas esferas de aço (ANDRADE; BUIOCHI; ADAMOWSKI, 2010), girar e transladar objetos (COX *et al.*, 2018; ANDRADE; PEREZ; ADAMOWSKI, 2015) além de levitar

objetos esféricos de tamanho maior que o comprimento de onda (ANDRADE; BERNASSAU; ADAMOWSKI, 2016). Novas técnicas de construção de levitadores acústicos tem sido apresentadas a fim de melhorar o processo de levitação e garantir uma melhor aplicação dos métodos de levitação acústica, para tanto o objetivo principal nesta área de pesquisa tem sido produzir equipamentos que possibilitem manipular o material levitado e aumentar a capacidade de levitação permitindo levitar objetos maiores e com maior densidade.

Como apresentado anteriormente o levitador acústico de eixo único mais simples consiste de um transdutor de ultrassom e um refletor, separados por uma distância L , no entanto ele também pode ser formado por um ou mais pares de transdutores (FUSHIMI *et al.*, 2018; MARZO; BARNES; DRINKWATER, 2017). Tais transdutores tem o princípio de funcionamento semelhante ao de um autofalante, vibrando de acordo com a forma de onda do sinal elétrico que o alimenta. A principal diferença entre um transdutor de ultrassom e um autofalante é que o alto falante foi projetado para operar na faixa de frequência audível (entre 20 Hz e 20 kHz), enquanto o transdutor de ultrassom é projetado para operar em frequências superiores a 20 kHz. Apesar de ser possível construir um levitador acústico que opere na faixa audível, isto não é aconselhável pois a alta intensidade da onda sonora necessária para levitar uma partícula pode danificar o ouvido humano.

Figura 1 – Ilustração de um Levitador acústico de eixo único. A esquerda uma representação gráfica do modelo mais simples de levitador acústico contendo um transdutor e um refletor separados por uma distância L múltipla de meio comprimento de onda, a esfera a ser levitada deve ser inserida em um nó de pressão acústica e levita nas suas proximidades. A esquerda uma fotografia de um levitador acústico de eixo único mais elaborado com múltiplos transdutores tanto na parte inferior quanto na parte superior do levitador, os transdutores são os objetos cilindricos posicionados no centro do suporte e conectados por cabos elétricos.



Fonte: O autor.

Na Figura 1 temos a representação de um levitador acústico de eixo único, a esquerda temos um diagrama ilustrativo onde é possível verificar o modelo mais simples de levitador acústico de eixo único, é possível verificar a disposição do transdutor e do refletor bem como as ondas representando pressão acústica e velocidade das partículas no meio. A direita temos uma fotografia de um levitador acústico de eixo único com um modelo mais elaborado onde há um arranjo de transdutores tanto na parte inferior quanto da parte superior do levitador, o levitador foi produzido por nosso grupo de pesquisa da Universidade Federal de Catalão Instituto Matemática e Tecnologia (IMTec). Ao levitar uma pequena partícula por meio da levitação acústica em levitadores como os ilustrados na Figura 1 estamos utilizando a força de radiação acústica gerada por uma onda estacionária de modo que seja possível contrabalancear a força gravitacional mantendo o objeto suspenso no ar.

2.2 Força acústica produzida por ondas estacionárias

Uma maneira de descrever as forças acústicas geradas por ondas estacionárias no levitador pode ser obtida relacionando-o ao processo de geração de ondas estacionárias em um tubo ressonante. A onda estacionária em um levitador acústico de eixo único também é do tipo longitudinal portanto, seu comportamento pode ser descrito pelas mesmas equações que descrevem uma onda estacionária em um tubo com extremidades fechadas.

O perfil de uma onda harmônica do tipo senoidal num dado instante de tempo (t) é dado por,

$$P(x, t) = A \cos [k(x - vt) + \varphi]. \quad (2.1)$$

Fazendo uma analogia com o oscilador harmônico $x(t) = A \cos [\omega t + \varphi]$, tem-se que,

$$\omega t = kvt \Rightarrow \omega = kv. \quad (2.2)$$

Na Equação 2.2, ω é a frequência angular da onda, k é o número de onda e v a velocidade da onda no meio. Para haver ocorrência de ondas estacionárias é necessário a superposição de duas ondas progressivas em sentidos opostos; uma onda se propagando para direita no eixo x e outra onda se propagando para esquerda no eixo x ,

$$P_1(x, t) = \frac{A}{2} \cos [kx - \omega t + \varphi]; \quad (2.3)$$

$$P_2(x, t) = \frac{A}{2} \cos [kx + \omega t + \varphi]. \quad (2.4)$$

As ondas se propagando para direita e para esquerda são representadas pela Equação 2.3 e 2.4 respectivamente, somando as duas ondas e considerando a constante de fase $\varphi = 0$ tem-se,

$$P_{res}(x, t) = \frac{A}{2} [\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)]. \quad (2.5)$$

Fazendo uso de identidades trigonométricas tem-se ainda,

$$P_{res}(x, t) = A [\cos(kx) \cos(\omega t)]. \quad (2.6)$$

Considerando-se, a hipótese de que a onda acústica seja plana para o levitador acústico de eixo único, tem-se uma onda estacionária como a descrita na Equação 2.6, descrita em termos da pressão acústica P , e orientada sobre eixo z para o levitador acústico como ilustrado na Figura 1 sendo que, A é a amplitude de pressão acústica, k o número de onda e ω a frequência angular da onda,

$$P(z, t) = A [\cos(kZ) \cos(\omega t)]. \quad (2.7)$$

Para que ocorra a geração de ondas estacionárias é necessário que a pressão acústica seja nula em determinados pontos fixos em todo instante (t), logo o termo $\cos(kZ)$ da Equação 2.7 deve ser nulo, ou seja, $Z = \left(\frac{(2n-1)\lambda}{4}\right)$ e considerando $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ onde $n = [1, 2, 3, \dots]$ é um número inteiro maior que zero, logo o levitador deve ser de tal forma que a distância (L) entre transdutor e refletor seja um múltiplo inteiro de meio comprimento de onda para que ocorra ondas estacionárias como é o caso da representação mostrada na Figura 1 em que um levitador com $L = \left(\frac{3\lambda}{2}\right)$ é ilustrado.

É possível ainda, descrever a onda não só por meio da pressão acústica P , mas também através da velocidade das partículas no meio (u), partindo da equação de Euler linearizada,

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla P. \quad (2.8)$$

Ao calcular o gradiente da pressão acústica apresentada na Equação 2.7 e integrando em relação ao tempo obtém-se a equação para a velocidade das partículas no meio,

$$u(z, t) = \frac{A}{\rho v} \sin(kz) \sin(\omega t). \quad (2.9)$$

Uma vez descritas a pressão acústica e a velocidade das partículas no meio para as ondas estacionárias, produzidas entre duas extremidades, é possível obter a força que essa onda estacionária exerce sobre um objeto inserido em seu caminho. Para tanto, é feito uso do potencial acústico.

A teoria de Gor'kov divulgada em 1962 (GOR'KOV, 1962) descreve o potencial acústico atuando sobre uma partícula esférica de raio R para um campo acústico arbitrário. De acordo com a teoria de Gor'kov a força que uma onda estacionária exerce em uma partícula esférica é conservativa e proporcional ao cubo de seu raio (R) desde que o raio da partícula seja muito menor que o comprimento de onda, sendo o potencial definido então por,

$$U = 2\pi R^3 \left[\frac{\langle P^2 \rangle}{3\rho c^2} - \frac{\langle u^2 \rangle}{2} \right], \quad (2.10)$$

onde ρ é a densidade da partícula e c a velocidade de propagação do som no ar. Utilizando as expressões para $P(z, t)$ e $u(z, t)$ Equações 2.7 e 2.9, respectivamente, calculando a média temporal para o quadrado de ambas chega-se em,

$$\langle P^2 \rangle = \frac{[A \cos(kz)]^2}{2}; \quad (2.11)$$

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{2} \left[\frac{A \sin(kz)}{\rho c} \right]^2, \quad (2.12)$$

substituindo $\langle P^2 \rangle$ e $\langle u^2 \rangle$ obtidos nas Equações 2.11 e 2.12 na equação para o potencial (Equação 2.10) obtém-se o potencial da força de radiação acústica,

$$U = \frac{R^3 \pi A^2}{\rho c^2} \left[\frac{\cos^2(kz)}{3} - \frac{\sin^2(kz)}{2} \right]. \quad (2.13)$$

Uma vez determinado o potencial a que a esfera está sujeita a força de radiação agindo sobre ela pode ser facilmente obtida pela relação.

$$F = -\nabla U \quad (2.14)$$

Assim, como apresentado na Equação 2.14 basta tomar o gradiente do potencial acústico, que leva à,

$$F = -\frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{\pi R^3 A^2}{6\rho c^2} \frac{\partial [2 \cos^2(kZ) - 3 \sin^2(kZ)]}{\partial Z}, \quad (2.15)$$

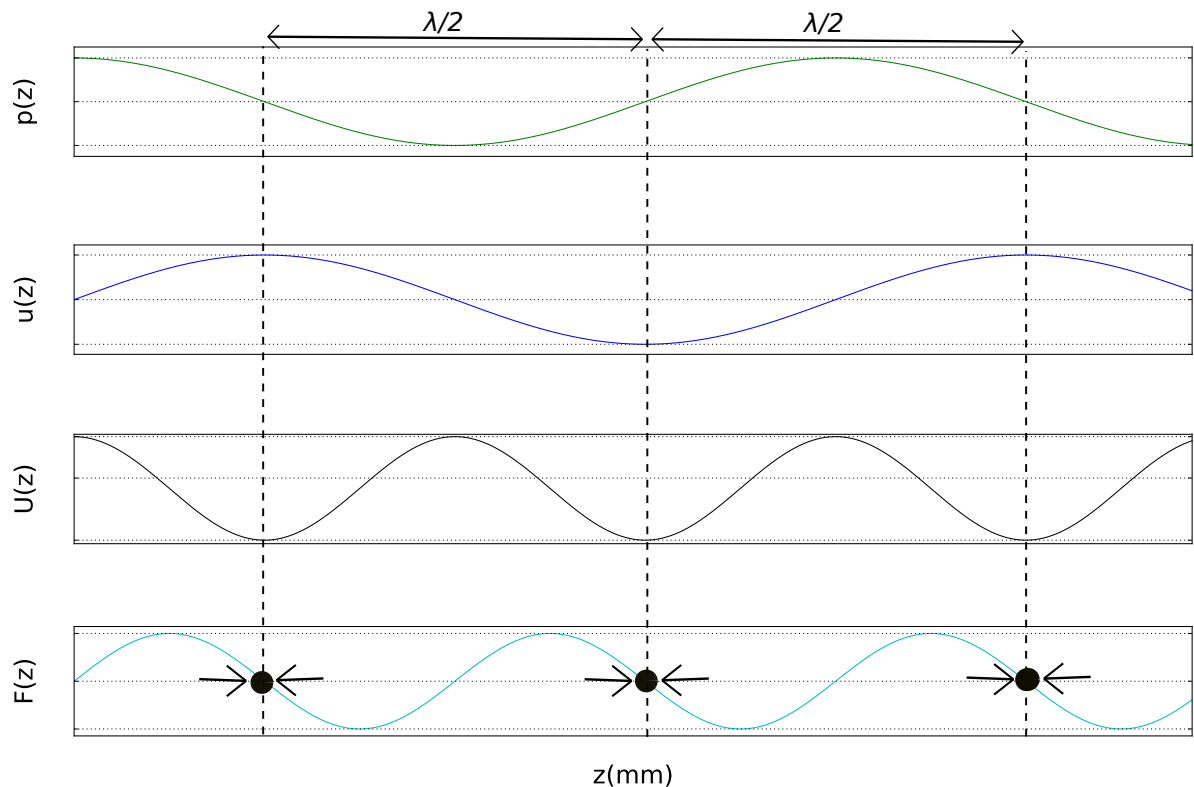
finalmente da Equação 2.15 tem-se que;

$$F = \frac{5\pi R^3 A^2 k}{6\rho c^2} \sin(2kZ), \quad (2.16)$$

Sendo então a força apresentada na Equação 2.16 a força acústica atuante em uma partícula esférica devido ao potencial de Gor'kov.

É interessante ilustrar o comportamento da pressão P dada na Equação 2.7, da velocidade u dada pela Equação 2.9, do potencial U dado pela Equação 2.13 e por fim o comportamento da força acústica dado pela Equação 2.16.

Figura 2 – Pressão de radiação P , Velocidade u , potencial de radiação acústica U e força de radiação acústica F para uma esfera em um campo acústico gerado por ondas estacionárias.



Fonte: O autor.

Pela Figura 2 onde estão representados três nós de pressão acústica, observa-se que nas posições onde a pressão $P(z, t)$ é nula o módulo da velocidade das partículas do meio (ar) $u(z, t)$ é máximo e que estes são os pontos de mínimo potencial, para onde a partícula é empurrada pela força de radiação acústica $F(z, t)$, as setas horizontais no gráfico da força acústica representam a direção em que a força atua. Com esta ilustração fica claro que a partícula é levitada nas regiões de mínimo potencial acústico e que é empurrada para estas regiões pela força de radiação acústica gerada pelo campo de pressão acústica.

Capítulo 3

Materiais e Métodos

Neste capítulo são apresentadas duas aproximações para força acústica uma correspondente a um modelo linear de força acústica e outra correspondente um modelo não linear. Também, foi realizada uma comparação entre os resultados dos dois modelos e por fim apresentou-se a histerese resultante do modelo não linear.

3.1 Modelo Matemático

Lembrando que o movimento da partícula se dá no ar, que é um meio fluido, tem-se então, que a partícula está sujeita a três forças atuantes, a força gravitacional que a impulsiona para baixo, a força acústica responsável por aprisioná-la e a força de arrasto ocasionada pelo movimento do objeto no ar. Como demonstrado, a força acústica em uma partícula esférica no interior de um levitador de eixo único pode ser obtida de maneira simples através da aplicação das leis da mecânica clássica, desde que seja considerado como potencial atuante o potencial de Gor’Kov. A força resultante para o sistema será então calculada através da aplicação da segunda Lei de Newton,

$$m\ddot{Z} = F_{rest} + F_{grav} + F_{arrasto}. \quad (3.1)$$

Na equação de movimento (Equação 3.1), F_{grav} é a força gravitacional, ($F_{grav} = -mg$), $F_{arrasto}$ é a força de arrasto e F_{rest} a componente axial da força acústica denominada aqui como força restauradora. Esta força foi obtida na Equação 2.16, entretanto é comum encontrar uma aproximação ainda mais elementar para a força restauradora nas proximidades do ponto de equilíbrio (BARMATZ; COLLAS, 1985; BAER *et al.*, 2011; ANDRADE; PÉREZ; ADAMOWSKI, 2018), essa aproximação faz uso da analogia entre forças do tipo senoidal e a força produzida por uma mola. Nessa situação ao retirar a partícula do ponto de equilíbrio (nó de pressão) a força restauradora é proporcional ao seu deslocamento em relação ao nó, tem-se então um movimento harmônico amortecido produzido por uma força do tipo

linear, simplificação que pode ser utilizada somente se o deslocamento ao longo do eixo Z for suficientemente pequeno. Logo, a força restauradora linear pode ser dada por,

$$F_{rest} = -K_L(Z - Z_p) \quad (3.2)$$

onde Z , é a posição da partícula no eixo vertical, K_L é a constante elástica obtida para o sistema e Z_p uma perturbação mecânica intrínseca do sistema, gerada pela variação da posição do nó de pressão acústica. A perturbação Z_p será admitida neste trabalho como:

$$Z_p = Z_0 + A_{in} \sin(2\pi\Omega t), \quad (3.3)$$

onde Z_0 é a posição do nó no eixo Z , A_{in} é a amplitude de perturbação e Ω a frequência de perturbação (FUSHIMI *et al.*, 2018).

A aproximação linear de força restauradora representa o movimento da partícula apenas nas proximidades do ponto de equilíbrio desconsiderando os possíveis efeitos não lineares de oscilação da partícula e considerando que a ação do campo acústico se assemelhe a um oscilador massa-mola em um meio viscoso.

Uma segunda aproximação, com rigidez não linear está mais próxima ao modelo real para descrever a força restauradora. Com base na Equação 2.16 propõe-se a força restauradora não linear dada por,

$$F_{rest} = \alpha \sin(\beta(Z - Z_p)), \quad (3.4)$$

onde α e β são coeficientes do termo não linear que podem ser obtidos através do ajuste de curva feitos sobre o campo de pressão acústica (FUSHIMI *et al.*, 2018) e o termo Z_p pode ser obtido pela Equação 3.3.

A força de arrasto corresponde a resistência ao movimento de um objeto sólido através de um fluido, seja ele um líquido ou gás. Diferente de outras forças resistivas, como o atrito por exemplo, forças de arrasto dependem da velocidade do corpo no meio. O arrasto é produzido, principalmente, por forças de fricção agindo em direção paralela à superfície do objeto, e por forças de pressão, que atuam em uma direção perpendicular à superfície do objeto. A equação para a força de arrasto é dada por,

$$F_{arrasto} = \frac{\rho v^2 C_d A}{2} \quad (3.5)$$

onde ρ é a densidade do meio v a velocidade da partícula no meio, C_d coeficiente de amortecimento ou coeficiente de resistência aerodinâmica, A é a área da secção transversal da superfície sob ação da força de arrasto (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016). Em se tratando de uma esfera, $A = \pi r^2$ e considerando ainda o movimento no eixo Z tem-se (FUSHIMI *et al.*, 2018) ;

$$F_{arrasto} = -\frac{\pi r^2 \rho C_d |\dot{Z}| \dot{Z}}{2} \quad (3.6)$$

Em geral, C_d não é uma constante absoluta para uma determinada forma do objeto, ele varia de acordo com o Número de Reynolds (R_e) dado por,

$$R_e = -\frac{(2r|\dot{Z}|\rho)}{\mu} \quad (3.7)$$

válido somente para $R_e \leq 100$. (FLEMMER; BANKS, 1986).

C_d é dado por,

$$C_d = \frac{24}{R_e} \sqrt{1 + \frac{3}{16} R_e} \quad (3.8)$$

É interessante ressaltar que embora o coeficiente de amortecimento diminua com o aumento de R_e , a força de arrasto aumenta.

O número de Reynolds é definido como a razão entre forças de inércia e forças de viscosidade (BANSAL, 2004). Em linhas gerais, R_e permite identificar o regime de escoamento do fluido através de uma superfície ou dentro de uma tubulação. Nesse trabalho foi investigado, o escoamento do fluido sobre a superfície da esfera.

O regime de escoamento se divide em dois, são eles: o escoamento laminar e o turbulento. Escoamento laminar ocorre quando as partículas de um fluido se movimentam ao longo de trajetórias bem definidas, apresentando lâminas ou camadas, que preservam suas características durante o escoamento. Enquanto no escoamento turbulento as partículas do fluido não se movimentam ao longo de trajetórias bem definidas, ou seja, descrevem trajetórias irregulares, com movimento aleatório, produzindo uma transferência de quantidade de movimento entre regiões de massa líquida. Este escoamento é comum em fluidos onde a viscosidade é relativamente baixa.

Considerando inicialmente a Equação 3.1 e substituindo os termos F_{rest} , F_{grav} e $F_{arrasto}$ obtém-se uma equação diferencial ordinária (EDO),

$$m\ddot{Z} = -K_L(Z - Z_p) - mg - \frac{\pi r^2 \rho C_d |\dot{Z}| \dot{Z}}{2}, \quad (3.9)$$

Partindo da equação para o equilíbrio de forças equação 3.1 e utilizando a força restauradora não linear equação 3.4,

$$m\ddot{Z} = -\alpha \sin \beta (Z - Z_p) - mg - \frac{\pi r^2 \rho C_d |\dot{Z}| \dot{Z}}{2}, \quad (3.10)$$

Os dois casos a serem trabalhados foram devidamente definidos, o primeiro termo a direita das Equações 3.9 e 3.10 diferem quanto a sua linearidade, os resultados obtidos por meio destes dois casos será melhor discutido.

3.2 Comparação entre modelo linear e não linear

Com as equações bem definidas, o passo seguinte é encontrar as soluções que cada uma apresenta, para tanto utilizou-se métodos numéricos de integração em linguagem Python, utilizando a biblioteca Odeint que possui os métodos Adams-Bashforth-Moulton e backward differentiation formula (BDF), em português fórmula de diferenciação reversa, para solução de problemas de valor inicial. Para implementação é necessário fazer uma redução de ordem nas Equações 3.9 (linear) e 3.10 (não linear). Assim, os sistemas de equações diferenciais ficam definidos como;

Sistema para força linear,

$$\begin{cases} Z_p = Z_0 + A_{in} \sin(2\pi\Omega t) \\ \theta = \dot{Z} \\ \dot{\theta} = -g - \frac{K_L}{m}(Z - Z_p) - \frac{C_d\pi r^2 \rho}{2m} |\theta| \theta. \end{cases}$$

Sistema para força não linear,

$$\begin{cases} Z_p = Z_0 + A_{in} \sin(2\pi\Omega t) \\ \theta = \dot{Z} \\ \dot{\theta} = -g - \frac{\alpha}{m}(\sin(\beta(Z - Z_p))) - \frac{C_d\pi r^2 \rho}{2m} |\theta| \theta, \end{cases}$$

onde θ é a nova variável de integração inserida pra reduzir a ordem das EDO's para primeira ordem, em que $\theta = \frac{dZ}{dt}$.

Para aplicarmos os sistemas de EDO's acima utilizaremos os parâmetros obtidos por Fushimi(2018) a partir de experimentos confrontados com os modelos apresentados nas Equações 3.9 e 3.10. A esfera sob levitação será de poliestireno com raio $r = 0.71 \text{ mm}$, densidade $\rho = 34.0 \text{ kgm}^{-3}$ e inserida em um levitador acústico de eixo único que opera na faixa de frequência de 40 kHz . Sendo $g = 9,81 \text{ ms}^{-1}$, quase todos os parâmetros necessários estão definidos, faltam apenas α , β e K_L . Os parâmetros α e β são obtidos a partir de ajustes feitos sobre o campo de pressão acústica, que para o experimento em questão tem amplitude $800P_a$ à $5V$ de diferença de potencial(ddp). Considerando que a distância entre transdutor e refletor seja de 80mm o nó central de pressão acústica será na posição de 40mm e os valores de $K_L = 0,0397 \text{ Nm}^{-1}$, $\alpha = -3,6 \times 10^{-6} \text{ N}$ e $\beta = 1315 \text{ m}^{-1}$ são obtidos.(FUSHIMI *et al.*, 2018)

Foram gerados alguns resultados buscando verificar a representatividade dos modelos físicos com força acústica linear e força acústica não linear. Com objetivo de realizar a

redução do número de parâmetros inseridos nos sistemas de EDO's, para o modelo de força linear escolheu-se utilizar como parâmetros d_1 e C_2 representados respectivamente por,

$$d_1 = \frac{K_L}{m}, \quad (3.11)$$

$$C_2 = \frac{C_d \pi r^2 \rho_a}{2m} |\dot{Z}|, \quad (3.12)$$

para $|\dot{Z}|$ um valor fixo foi adotado com base na Equação 3.7 utilizando um valor de R_e de aproximadamente 50.

Para a força restauradora não linear além do parâmetro C_2 , vide Equação 3.12, tem-se o parâmetro C_1 que corresponde à,

$$C_1 = \frac{-\alpha}{m}. \quad (3.13)$$

Finalmente os sistemas implementados se tornam;

Sistema para força linear,

$$\begin{cases} Z_p = Z_0 + A_{in} \sin(2\pi\Omega t) \\ \theta = \dot{Z} \\ \dot{\theta} = -g - d_1(Z - Z_p) - C_2\theta. \end{cases}$$

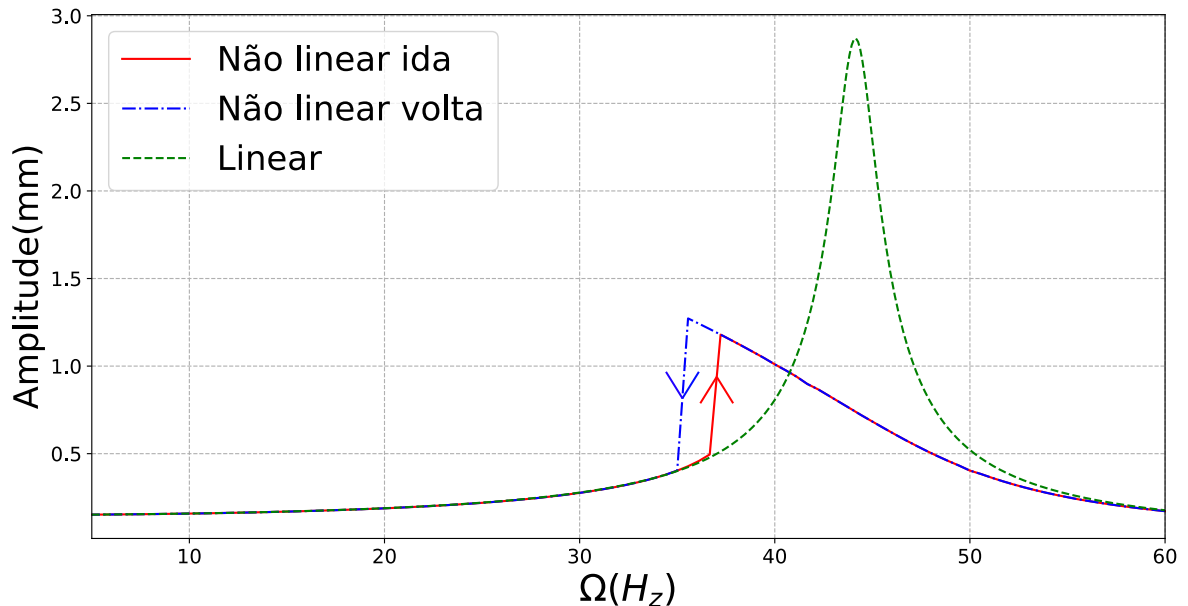
Sistema para força não linear,

$$\begin{cases} Z_p = Z_0 + A_{in} \sin(2\pi\Omega t) \\ \theta = \dot{Z} \\ \dot{\theta} = -g - C_1 \sin(\beta(Z - Z_p)) - C_2\theta \end{cases}$$

A Figura. 3 mostra os resultados para solução dos dois sistemas de EDO's de modo que sejam obtidas soluções dadas as frequências de perturbação do sistema Ω , para uma amplitude de perturbação $A_{in} = 0,15 \text{ mm}$. No modelo não linear a evolução temporal do sistema a medida em que Ω aumenta (caminho de ida) está representada na curva em vermelho (contínua) enquanto a curva em azul (tracejada) representa a evolução temporal da solução para o sistema quando Ω diminui (caminho de volta) e na curva em verde (traço contínuo) temos a evolução temporal da solução para o sistema linear, onde tanto o caminho de aumento quanto o caminho de redução de Ω apresentam soluções iguais. Ao decorrer da simulação a frequência Ω foi aumentada e posteriormente reduzida a cada intervalo de tempo de 40 s e a amplitude de oscilação da esfera $((z_{max} - z_{min})/2)$ foi coletada após o período de transiente de 39 s, sendo a amplitude de resposta do sistema calculada para cada uma das frequências Ω . Em todas as simulações foram usadas como condições iniciais $[Z; \dot{Z}] = [38,0 \text{ mm}; 0,02 \text{ m/s}^{-1}]$, 38 mm foi escolhido por estar localizado logo abaixo do nó central de levitação re-

gião mais provável para que a esfera levite, $0,02 \text{ m/s}^{-1}$ foi escolhida como velocidade inicial por ser um valor baixo de velocidade.

Figura 3 – Amplitudes em função da frequência de excitação para modelo linear e não linear. Os modelos propostos foram analisados quanto a amplitude das soluções como função da frequência de perturbação Ω .



Fonte: O autor.

Para os parâmetros testados, o modelo não linear apresenta resultados com menor amplitude máxima de oscilação e menor frequência natural de excitação em comparação com o modelo linear como pode ser observado no gráfico da Figura 3.

Diferentemente do modelo linear, onde tanto o aumento quanto a redução da frequência de excitação apresentam resultados iguais, no modelo não linear, nas proximidades da frequência natural de excitação do sistema, no entorno de 37 Hz , existem duas amplitudes de oscilação para uma mesma frequência de excitação tanto para o caminho de aumento da frequência, caminho de ida quanto para o caminho de redução da frequência, caminho de volta. O que nos leva ao fenômeno chamado histerese.

3.3 Histerese e fenômeno de salto

Alguns sistemas físicos apresentam um comportamento característico denominado de histerese. Este fenômeno ocorre em sistemas físicos cujas propriedades dependem de sua história precedente. Dessa forma, conferindo ao sistema a capacidade de armazenar informação de estados anteriores.

No caso das simulações feitas para o modelo não linear de força acústica vide Figura 3. O comportamento da curva ao aumentar a frequência de perturbação do sistema com o

passar do tempo difere do comportamento ao reduzir a frequência de perturbação com o passar do tempo, ocasionando em dois caminhos distintos para solução do sistema. Esta falta de reversibilidade quando um parâmetro é variado é chamada de histerese.

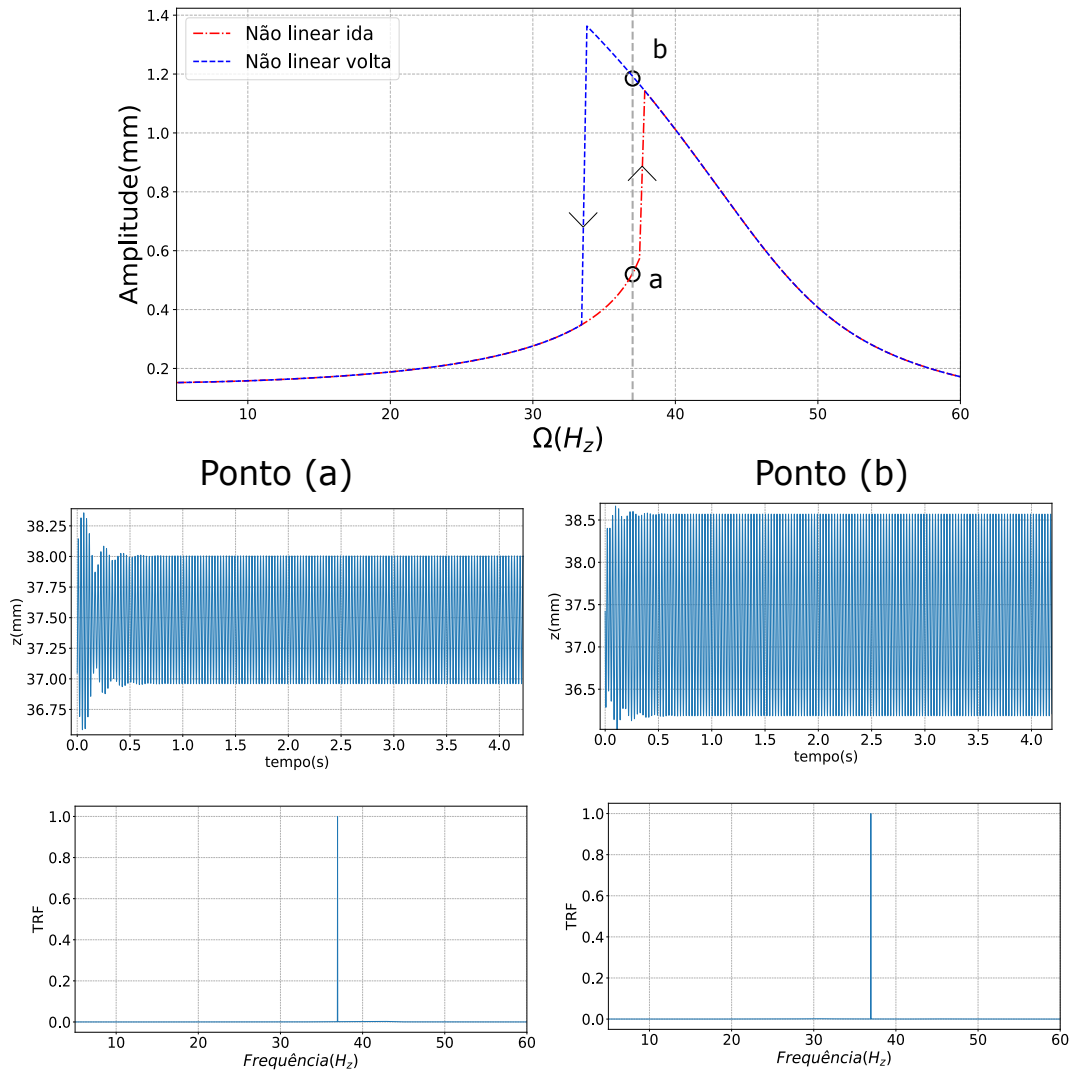
Na simulação além da histerese também ocorre o fenômeno de salto onde a solução do sistema salta de uma menor amplitude para uma maior amplitude no caminho de aumento da frequência (caminho de ida) e de uma maior amplitude para uma menor amplitude no caminho de redução da frequência (caminho de volta), vide Figura 4. O fenômeno de salto é representado pelas setas para cima e para baixo no gráfico da Figura 4.

Na Figura 4 é mostrada a simulação do modelo não linear com ênfase na região da histerese. É possível evidenciar a histerese na região entre 30 e 40 H_z . Além disso, as duas amplitudes marcadas para a frequência de excitação de $\Omega = 37 H_z$ ficam evidenciadas logo abaixo do gráfico da histerese, uma correspondente a curva de aumento da frequência ponto (a) e outra correspondente a redução da frequência ponto (b). A frequência de 37 H_z foi escolhida justamente por estar na faixa onde ocorre a histerese.

Na Figura 4 ponto (a) tem-se a série temporal evidenciando a baixa amplitude (0,5226 mm) obtida durante o aumento da frequência com o passar do tempo (caminho de ida). Por outro lado, na figura 4 ponto (b), nota-se a série temporal com alta amplitude (1,1926 mm) obtida a partir da redução da frequência com o passar do tempo (caminho de volta). A partir das séries temporais fica nítida a diferença entre as duas amplitudes de oscilação obtidas para a mesma frequência Ω de 37 H_z , conferindo assim a característica de diferentes soluções a depender do caminho escolhido.

Na mesma Figura 4, para cada uma das séries temporais é identificada a frequência de excitação do sistema através da transformada rápida de Fourier.

Figura 4 – Histerese e múltiplas soluções nas proximidades da frequência natural do sistema para o modelo não linear. Os pontos *a* e *b* marcados no gráfico da histerese para frequência de $37 H_z$ apresentam as duas amplitudes de oscilação da esfera, uma correspondente ao caminho de ida e outra correspondente ao caminho de volta. A transformada rápida de Fourier é feita para os dois casos e recupera a frequência natural de $37 H_z$.



Fonte: O autor.

Capítulo 4

Cenário para o Caos e múltipla estabilidade

Como o fenômeno de histerese, identificado no capítulo anterior, é um fenômeno típico de sistemas não lineares torna-se natural uma investigação mais detalhada sobre o modelo na busca por outros fenômenos não lineares.

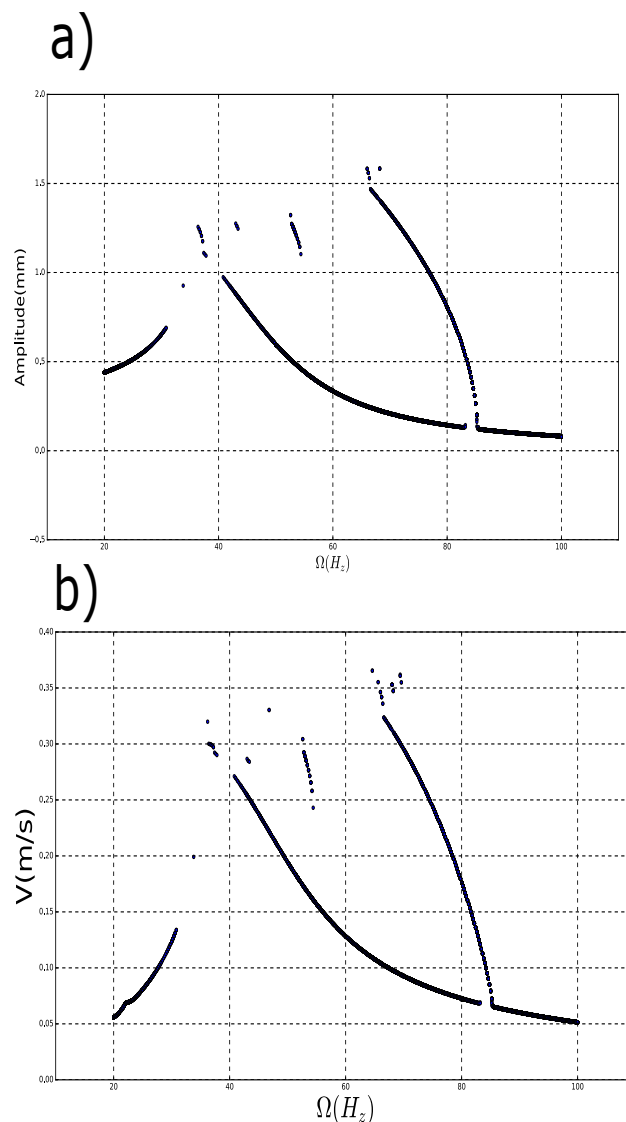
Neste capítulo, investigou-se o modelo para um valor diferente da amplitude de perturbação (A_{in}). A mudança no parâmetro A_{in} implica em uma alteração na perturbação de entrada que, em termos experimentais pode ser causada por uma perturbação que representa uma excitação provinda de uma vibração mecânica produzida por um abalo repentino ou ainda uma mudança no campo de pressão acústica produzindo alteração na posição nodal de levitação. Com a alteração do parâmetro A_{in} foi possível caracterizar duplicações de período (Seção 4.1) e um cenário de órbitas caóticas no sistema. Para uma quantificação das órbitas caóticas encontradas, um método numérico para o cálculo do maior expoente de lyapunov foi utilizado (Seções 4.3 e 4.5).

4.1 Diagrama de bifurcação

Um diagrama de bifurcação é a representação gráfica do comportamento qualitativo das órbitas descritas pelo sistema, geralmente um parâmetro é definido para avaliar a mudança no comportamento qualitativo do sistema, registrando o aumento ou redução no número de períodos das órbitas conforme certos parâmetros variam, os valores destes parâmetros para os quais o comportamento qualitativo muda são chamados de pontos de bifurcação. Ao aumentar a amplitude de perturbação do sistema A_{in} o sistema se comporta de maneira diferente passando a apresentar um ramo de bifurcação bem definido entre as frequências de 60 e 90 Hz e indícios de ramos entre as frequências 40 e 60 Hz. A solução diverge na maioria dos pontos entre as frequências 30 e 40 Hz o que ocasiona algumas falhas no diagrama de bifurcação podendo ser esta uma zona de transição de fase.

As Figuras 5 a) e b) foram obtidas a partir do modelo de rigidez não linear com uma Amplitude de entrada (A_{in}) de $0,35 \text{ mm}$ que corresponde há um valor de amplitude maior que o utilizado no Capítulo 3 que foi de $0,15 \text{ mm}$. Nos gráficos, a solução do modelo de rigidez não linear foi encontrada utilizando um espaço de condições iniciais no entorno do nó de pressão central, mais especificamente, para posições Z pertencente ao intervalo $[40, 1; 41, 0](\text{mm})$ e baixas velocidades \dot{Z} pertencente ao intervalo $[0.02, 0.2](\text{ms}^{-1})$. A simulação foi realizada de forma que cada um dos pares ordenados de condições iniciais $[Z, \dot{Z}]$ fossem testados para cada frequência Ω durante um intervalo de tempo de 16 s para garantir que as amplitudes coletadas fossem o menos ruidosas possível e estivessem o mais próximo de sua oscilação estável.

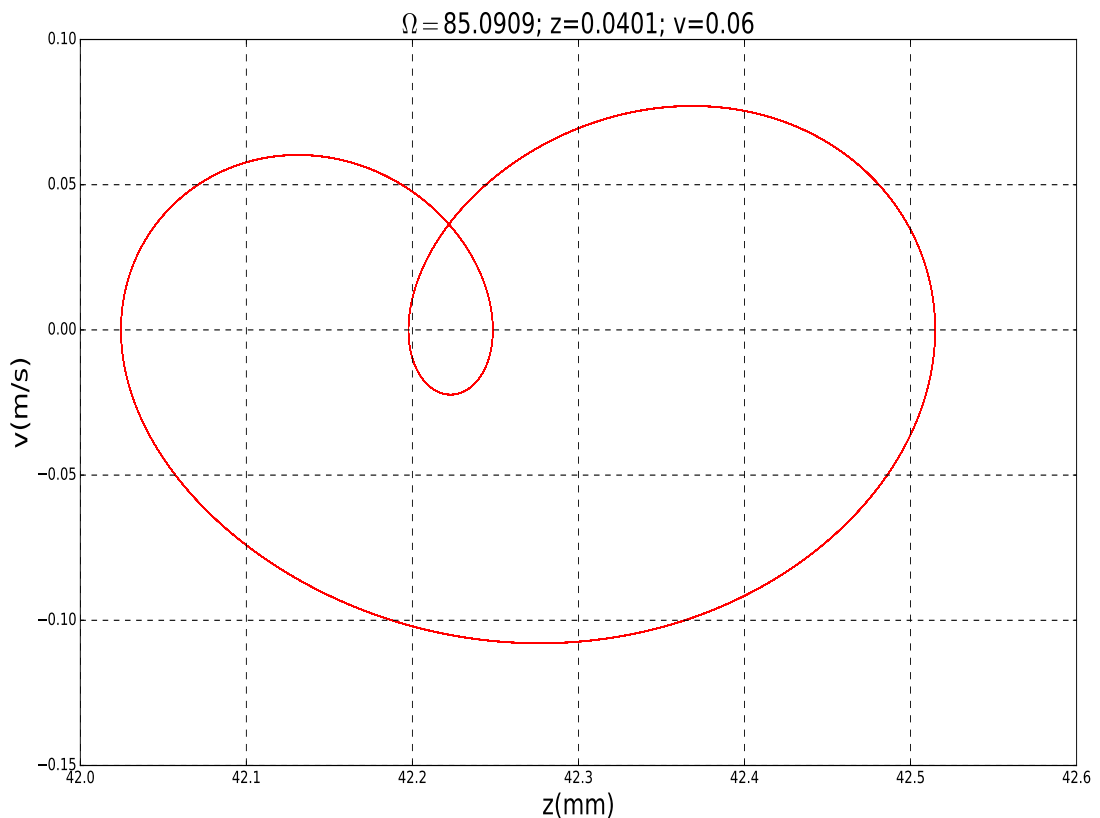
Figura 5 – Bifurcação e duplicação de período, Amplitude versus Ω e Velocidade máxima versus Ω para $A_{in} = 0,35 \text{ mm}$, no gráfico a) temos a amplitude de oscilação versus Ω , um ramo de bifurcação bem definido entre entre 60 e 90 Hz fica evidente e indícios de outros dois ramos entre 40 e 60 Hz surgem. No gráfico b) temos a velocidade máxima da esfera em função de Ω o ramo bem definido e os indícios de ramos continuam evidentes para esta nova variável.



Fonte: O autor.

Para a Figura 5 a) a amplitude de oscilação apresentada no eixo das ordenadas encontrada a partir da série temporal medindo $(z_{máximo} - z_{mínimo})/2$ mostra um ramo de bifurcação bem definido entre $60 H_z$ e $90 H_z$. A presença desse ramo indica uma separação das condições iniciais em duas diferentes amplitudes para uma mesma frequência de excitação. Uma duplicação de período foi detectada na região de 81 a $86 H_z$ região onde surge a bifurcação, esta duplicação de período foi obtida para frequência de $85,0909 H_z$ posição $z = 40,1 mm$ e $v = 0,06 m s^{-1}$ como pode ser visto na Figura 6.

Figura 6 – Espaço de fase $\Omega = 85,0909 H_z$ para $A_{in} = 0,35 mm$. Uma duplicação de período foi detectada a partir do gráfico do espaço de fase no ramo bem definido entre 60 e $90 H_z$. Dois ciclos representam dois períodos.



Fonte: O autor.

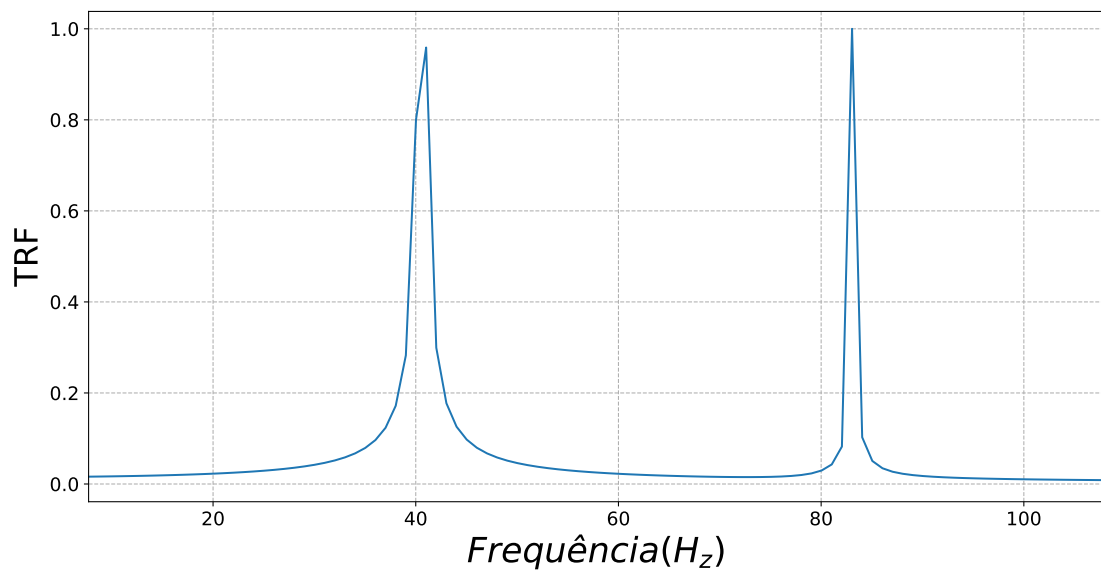
Na Figura 5 b), o intuito foi buscar mais informações com respeito a duplicação de período fazendo uso da informação da velocidade de movimento da esfera. Utilizando a mesma simulação feita para coletar a amplitude e lembrando que a velocidade é máxima na posição de mínimo potencial, foi coletada a velocidade máxima (V_{max}) da esfera para cada frequência Ω . Neste novo gráfico o ramo entre 60 e $90 H_z$ continua evidente.

Para os dois casos, tanto amplitude quanto velocidade, há indícios de outros dois ramos para Ω entre $40 H_z$ e $60 H_z$, tais indícios de que possam haver outros dois ramos é

bastante intrigante. Além disso, diferentemente dos resultados obtidos para $A_{in} = 0,15 \text{ mm}$ na região de 20 a 40 H_z no Capítulo 3 onde havia a histerese, agora para $A_{in} = 0,35 \text{ mm}$ não há mais histerese como confirmado mais a frente a partir do gráfico do espaço de condições iniciais.

A Transformada Rápida de Fourier (TRF) também foi feita para frequência de 85,0909 H_z Figura 7 que corresponde a uma das frequências onde há duplicação de período apresentada na Figura 5, pertencente ao ramo bem definido entre 60 e 90 H_z , assim como esperado foi possível detectar duas frequências principais uma dominante para frequência de excitação e outra para frequência de duplicação de período. A Figura 7 mostra que a frequência dominante para este caso foi 83,3 H_z onde há um pico no valor da TRF mais elevado e que uma segunda frequência aparece também para 40 H_z onde ocorre um segundo pico de menor intensidade indicando assim a presença de um segundo período.

Figura 7 – Transformada rápida de Fourier $\Omega = 85,0909 H_z$ com $A_{in} = 0,35 \text{ mm}$. Apartir da transformada rápida de Fourier a frequência dominante 85,0909 foi recuperada e uma segunda frequência, considerada frequência de duplicação de período também foi recuperada.



Fonte: O autor.

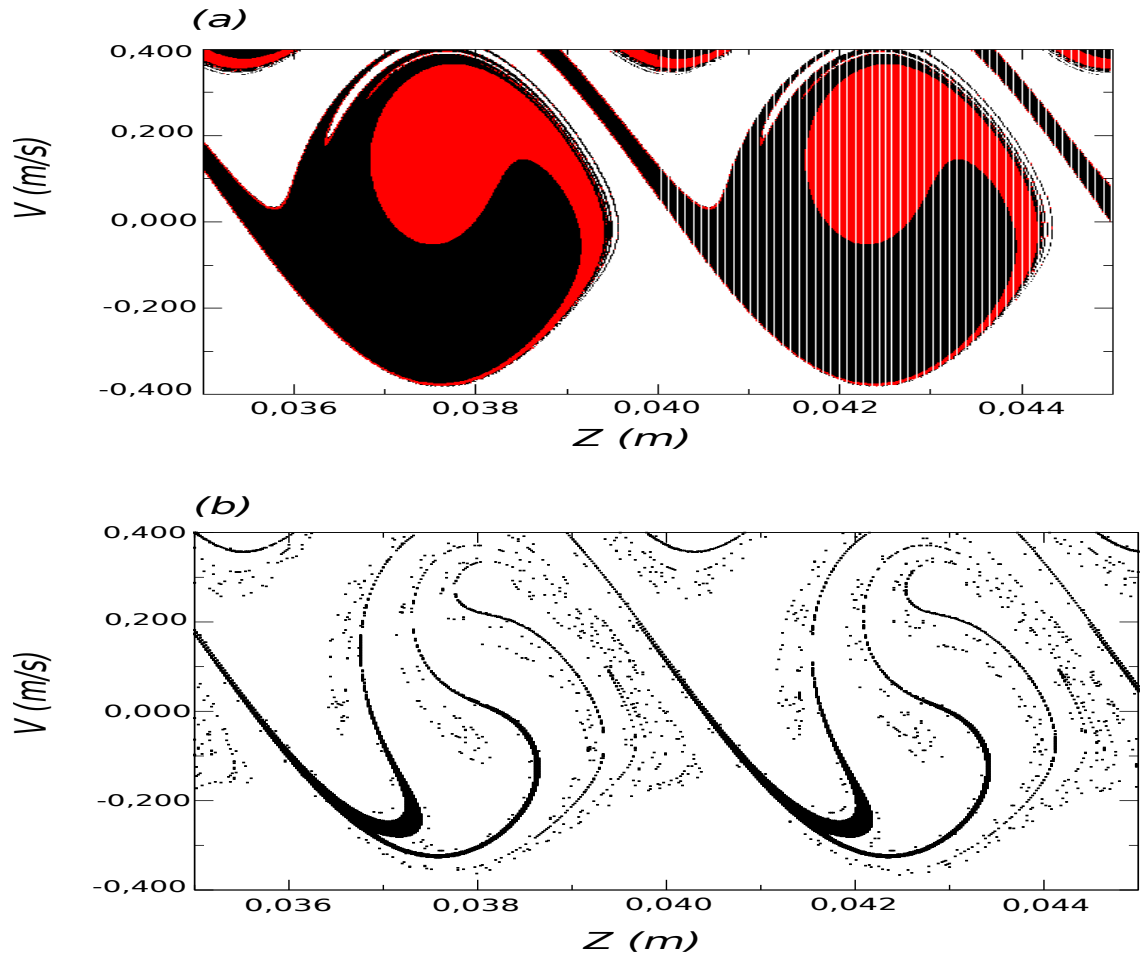
Na Figura 8 o espaço de condições iniciais para as duas amplitudes de perturbação $A_{in} = 0,15$ e $A_{in} = 0,35 \text{ mm}$ é mostrado. Nas simulações realizadas para os dois casos foram utilizadas malhas de $[500 \times 500]$ pontos $[Z, \dot{Z}]$ nas proximidades do nó central $Z = 40 \text{ mm}$ mais especificamente com Z pertencente ao intervalo $[35; 45] \text{ mm}$ e \dot{Z} pertencente ao intervalo $[-0,4; 0,4] \text{ ms}^{-1}$. O objetivo foi verificar as soluções que seriam encontradas para o sistema, o tempo de simulação foi de 16 s. Como pode ser confirmado na Figura 8, na Figura 8 a) ($A_{in} = 0,15 \text{ mm}$) temos duas amplitudes como solução enquanto na Figura 8 b) temos apenas uma amplitude como solução confirmando que não há mais histerese para

$A_{in} = 0,35 \text{ mm}$.

Na Figura 8(a) estão representadas as soluções para amplitude $A_{in} = 0,15 \text{ mm}$. Em preto temos as soluções cujas condições iniciais retornam valores de amplitude alta e em vermelho as soluções de amplitude baixa para a frequência 37 Hz , que correspondem a região onde ocorre histerese apresentada na Figura 4. Dentro do espaço observado há regiões bem definidas com amplitude alta e amplitude baixa separadas por um contínuo. Cabe ressaltar também que existe simetria para as soluções tanto acima quanto abaixo do nó central de 40 mm . A região em branco representa condições iniciais que divergem.

Para a Figura 8(b) o valor da amplitude de perturbação foi aumentado para o valor de $A_{in} = 0,35 \text{ mm}$ e a frequência mantida em 37 Hz . Com o aumento da amplitude de perturbação ocorre uma distorção no espaço de condições iniciais, é possível ainda notar que a região onde as soluções tem amplitude de oscilação alta (região em preto) passa a ser bem menor se comparado com $A_{in} = 0,15 \text{ mm}$. Além da redução na região com soluções de alta amplitude agora não existem duas soluções, ou seja, não há indícios de que a histerese ocorra para esta frequência de perturbação com $A_{in} = 0,35 \text{ mm}$.

Figura 8 – Espaço de condições iniciais para duas situações com diferentes amplitudes de perturbação $A_{in} = 0,15 \text{ mm}$ e $A_{in} = 0,35 \text{ mm}$ para frequência de 37 Hz . Em preto estão representadas as soluções com amplitude alta e em vermelho as soluções com amplitude baixa. Para o gráfico a) com $A_{in} = 0,15 \text{ mm}$ foram encontradas duas soluções corroborando a ocorrência da histerese detectada anteriormente. Para o gráfico b) com $A_{in} = 0,35 \text{ mm}$ apenas as soluções de alta amplitude, representadas em preto, foram encontradas sugerindo que não há mais histerese para esta amplitude de perturbação.

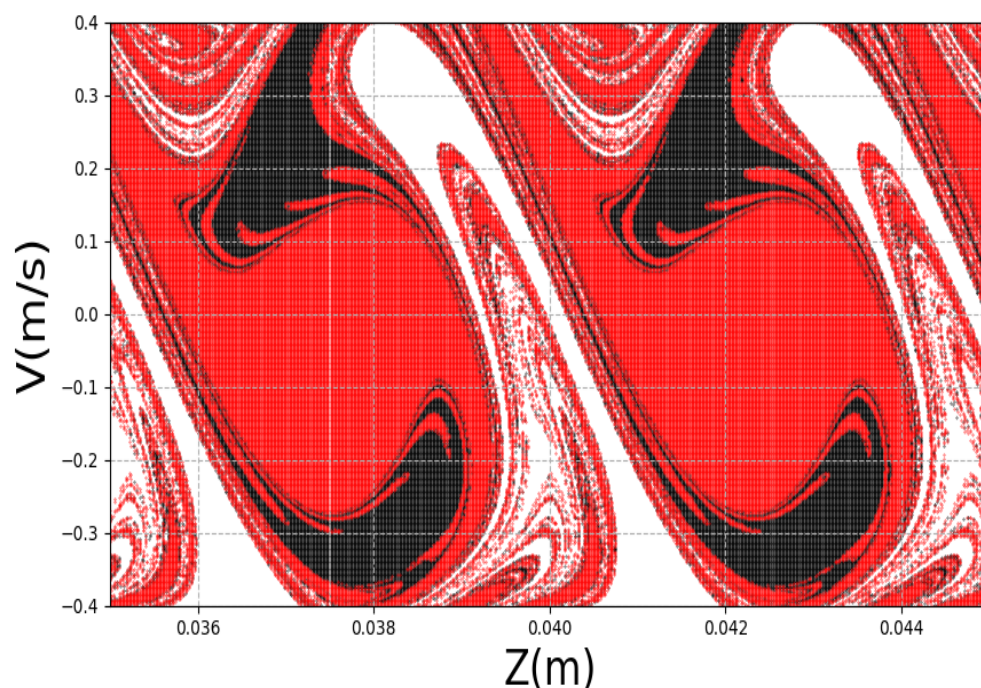


Fonte: O autor.

A construção do espaço de condições iniciais deu-se a partir de uma grade de condições iniciais no entorno do nó central de levitação. Quando há mais de uma solução no modelo, tais condições seguem para uma determinada solução, definindo no espaço de condições iniciais a chamada bacia de atração. As bacias de atração são importantes pois definem topologias sobre o comportamento do sistema. Uma bacia de atração é o conjunto de pontos que vão para um determinado ponto de equilíbrio. Quando determinamos um ponto de equilíbrio assintoticamente estável mas não globalmente estável, ou seja, quando nem todas as soluções vão para o mesmo ponto de equilíbrio ou para o mesmo atrator é comum querermos encontrar este conjunto de pontos. A este conjunto de pontos que caminham para um mesmo atrator damos o nome de bacia de atração.

Ao aumentar a amplitude de perturbação para $A_{in} = 0,35 \text{ mm}$ com uma frequência de perturbação $\Omega = 70 \text{ Hz}$ que corresponde a frequência na qual temos um ramo de bifurcação bem definido, como mostrado nas Figuras 5 a) e b), obtém-se a Figura 9. Na Figura 9 foi utilizada uma malha de condições iniciais de $[500 \times 500]$ pontos $[Z, \dot{Z}]$ com um tempo de simulação de 16 s também realizada no entorno do nó central de 40 mm .

Figura 9 – Espaço de condições iniciais, amplitude de perturbação $A_{in} = 0,35 \text{ mm}$ para frequência de 70 Hz. Em preto estão representadas as soluções de amplitude alta e em vermelho as soluções de amplitude baixa.



Fonte: O autor.

Neste novo cenário a topologia do espaço é mais distorcida. As amplitudes alta e baixa se misturam em certas regiões, por exemplo, na região central da figura no entorno de 40 mm e não há uma divisão nítida separando as duas soluções. Dada uma condição inicial nestas regiões onde amplitude baixa e amplitude alta se misturam não é possível determinar ao certo para qual das duas soluções a condição inicial caminha. A imagem foi gerada para a frequência de perturbação $\Omega = 70 \text{ Hz}$ que corresponde a uma das frequências onde ocorre bifurcação segundo a Figura 5.

4.2 Cenário para o Caos

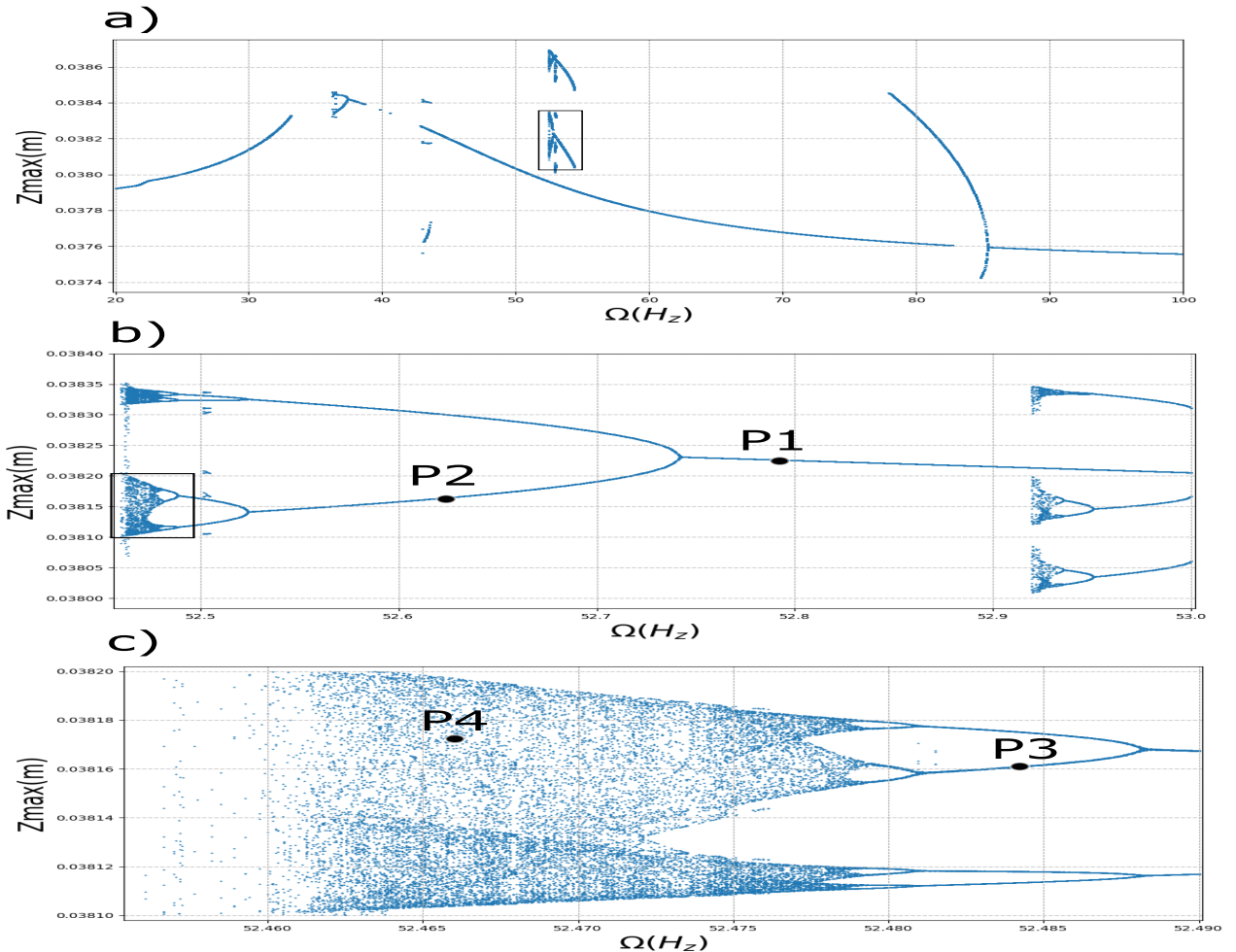
Com a aparição de duplicações de período relatada na seção anterior um caminho natural a se seguir é realizar uma investigação mais detalhada utilizando outras formas de avaliação. Nesta nova investigação ao invés de avaliar a amplitude de oscilação avaliou-se o Z_{max} que corresponde ao valor dos máximos locais da série temporal $Z \times t$. Os resultados obtidos com Z_{max} foram muito satisfatórios, evidenciando duplicações de período e regiões caóticas.

A Figura 10 resulta de uma simulação feita a partir do modelo com uma Amplitude de entrada (A_{in}) de 0,35 mm. Neste gráfico a solução do modelo foi encontrada utilizando um espaço de condições iniciais no entorno do nó de pressão central, mais especificamente, para posições Z pertencente ao intervalo $[36,0;38,0](mm)$ e baixas velocidades \dot{Z} pertencente ao intervalo $[0.02;0.04](ms^{-1})$ com uma malha $[6 \times 6]$ e 3000 pontos em Ω . A simulação foi realizada de forma que cada um dos pares ordenados de condições iniciais $[Z, \dot{Z}]$ fossem testados para cada frequência Ω durante um intervalo de tempo de 20 s, para garantir que as soluções coletadas fossem o menos ruidosas possível e estivessem o mais próximo de sua oscilação estável. O período de transiente foi considerado 19 s, para cada par de condições iniciais os valores de Z_{max} foram coletados.

Para a Figura 10 a) a oscilação máxima em Z mostra um ramo de bifurcação bem definido entre 70 H_z e 90 H_z . A presença desse ramo indica que há separação das condições iniciais em duas diferentes amplitudes para uma mesma frequência de excitação. Com a utilização de Z_{max} , diferentemente da avaliação realizada utilizando a Amplitude e V_{max} , foi possível identificar com maior nitidez dois ramos entre 50 e 60 H_z . O terceiro ramo de bifurcação continua evidente no entorno de 70 a 90 H_z . Cabe resaltar que na região entre 35 H_z e 45 H_z também surgiram outras ramificações, contudo nessa região a solução divergiu em diversos momentos ocasionando falhas no ramo e erros numéricos.

Percebe-se na Figura 10 a) que uma evolução das duplicações de períodos ocorre na região entre 50 e 60 H_z , sabe-se que a ocorrência de bifurcações sucessivas pode levar o sistema à uma rota para o caos (STROGATZ, 2018). Para investigarmos melhor a região uma segunda simulação foi realizada na região destacada na Figura 10 a) utilizando a mesma malha de condições iniciais. Agora, na nova simulação é possível identificar com maior nitidez a existência de uma sequência de bifurcações que formam pequenas regiões de caos definidas nas proximidades de 52,4 H_z e 52,9 H_z . Embora sejam regiões pequenas no intervalo de frequências Ω as regiões evidenciadas na Figura 10 b), possibilitam a identificação de duplicação de períodos e regiões caóticas. Em certos intervalos de frequência o coportamento é periódico, passa a ser caótico e posteriormente volta a ser periódico.

Figura 10 – Diagramas de bifurcação para $A_{in} = 0,35 \text{ mm}$, no gráfico *a*) uma simulação foi realizada demonstrando ramos de bifurcações para os intervalos de frequência de 50 a 60 H_z e de 70 a 90 H_z . No gráfico *b*) uma simulação amplificando a região destacada por um retângulo no gráfico *a*) é feita demonstrando bifurcações subseqüentes e regiões de caos qualitativo. Os pontos P_1 e P_2 serão utilizados adiante para verificar o número de períodos das órbitas através dos gráficos do espaço de fase. No gráfico *c*) uma nova simulação amplificando a região destacada no retângulo feito no gráfico *b*) demonstra bifurcações e caos qualitativo.



Fonte: O autor.

Uma simulação feita na região de Ω entre 52,45 e 52,49 H_z foi realizada, sendo esta uma amplificação feita na parte de baixo do ramo de bifurcação da Figura 10 b) para a mesma malha de condições iniciais Z pertencente ao intervalo $[36,0;38,0](mm)$ e \dot{Z} pertencente ao intervalo $[0,02,0,04](ms^{-1})$, evidenciando bifurcações subseqüentes e caos nesta região como mostra a Figura 10 c).

Entenda sistemas onde ocorrem caos como sistemas que exibem uma dependência sensível as condições iniciais de forma a gerar caminhos no tempo que parecem aleatórios, a menor variação nas condições iniciais pode resultar em drásticas mudanças na resposta do sistema, produzindo comportamentos que parecem aleatórios ou em outras palavras comportamentos caóticos.

Os três gráficos da Figura 10 deixam aparente a ocorrência de caos para o sistema com amplitude $A_{in} = 0,35 \text{ mm}$. Porém, esse caos é apenas qualitativo, ou seja, é apenas observado através dos gráficos de bifurcação. Para uma verificação quantitativa do caos faz-se necessário a aplicação de métodos que o comprovem. Na próxima seção discuti-se sobre os expoentes de Lyapunov para quantificação do caos e um interessante método para o seu cálculo numérico.

4.3 Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov são uma ferramenta muito aplicada para caracterização de sistemas dinâmicos. A partir deles é possível quantificar a existência de caos. Para calcular os expoentes de Lyapunov parti-se de duas condições iniciais próximas uma da outra buscando verificar se as órbitas divergem exponencialmente para tempos longos. Caso as órbitas se afastem exponencialmente entre si o sistema apresenta sensibilidade às condições iniciais e as órbitas são classificadas como caóticas, caso as órbitas permaneçam próximas ou diverjam linearmente então não são sensíveis às condições iniciais, logo não são órbitas caóticas. Os expoentes de Lyapunov são, então, uma medida da sensibilidade da dinâmica do sistema a pequenas alterações nas condições iniciais, para calculá-lo define-se o vetor formado pelas coordenadas no espaço de fase n dimensional $X \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Supondo que este vetor satisfaça um conjunto de n equações diferenciais autônomas de primeira ordem, (FILHO; AMATO; FILHO, 2018)

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)). \quad (4.1)$$

A Equação 4.1 gera um fluxo no espaço de fase com $F(x(t))$ sendo o campo de velocidade do fluxo. Para mensurar a contração ou o alongamento nas vizinhanças de $x(t)$ considera-se duas soluções diferentes para Equação 4.1, $x^{(1)}(t)$ e $x^{(2)}(t)$, além de considerar o vetor de diferença $W \equiv x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t)$. Logo tem-se,

$$W = (\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n) \quad (4.2)$$

a Equação de evolução de W é dada por:

$$\frac{dW}{dt} = J(x(t))W, \quad (4.3)$$

Em que J é a matriz Jacobiana. Assumindo que os elementos de J sejam funções contínuas e limitadas em t para $t \rightarrow \infty$, então as soluções da Equação (4.3) crescem mais lentamente que $\exp(\lambda t)$ para alguma constante λ . O expoente de Lyapunov para uma condição inicial dada $W(0)$ é definido então como,

$$\lambda \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{|W(t)|}{|W(0)|} \right) \quad (4.4)$$

Em um problema n dimensional existem n expoentes de Lyapunov cada um referindo-se ao grau de divergência de direções específicas do sistema. Todos eles formam um conjunto denominado espectro de Lyapunov, que geralmente são organizados como:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \quad (4.5)$$

Nosso problema em questão possui duas dimensões, uma para posição Z e outra para velocidade \dot{Z} , logo temos dois expoentes de Lyapunov, no entanto basta determinarmos o maior deles para saber se o sistema se comporta de modo caótico ou não. Caso o maior expoente de Lyapunov λ_1 seja positivo, suas trajetórias vizinhas tendem a divergir exponencialmente o que implica em um regime caótico.

4.4 Método numérico para obtenção do maior expoente de Lyapunov

Nem sempre se é possível obter de forma analítica os expoentes de Lyapunov pois seu cálculo é por vezes complexo se não impossível. Por tanto, a utilização de métodos numéricos torna-se indispensável. Nesta seção apresenta-se o método numérico para o cálculo do máximo expoente de Lyapunov segundo (SPROTT; SPROTT, 2003).

Tendo em vista que o expoente de Lyapunov caracteriza a divergência entre condições iniciais infinitesimalmente próximas, a ideia básica do presente método é seguir tais condições iniciais e calcular sua taxa média de separação logarítmica. Como as órbitas resultantes podem ficar bastante distantes, uma das órbitas tem que ser realocada para a vizinhança da outra ao longo da linha de separação. Esse procedimento pode ser feito a cada iteração e é um passo importante para se evitar problemas de *overflow*. Considerando o caso de um sistema bidimensional, o cálculo do maior expoente de Lyapunov segundo o método de Sprott (SPROTT; SPROTT, 2003) consiste nos seguintes passos:

Passo 1) Inicia-se com uma condição inicial (x_a, y_a) pertencente a bacia de atração a ser estudada e itera-se até que a órbita esteja no atrator, geralmente itera-se algumas centenas de vezes assumindo que seja suficiente, a menos que se esteja muito perto de um ponto de bifurcação o erro resultante por estar fora do atrator geralmente não é grande. Melhor ainda é iniciar diretamente com uma condição inicial pertencente ao atrator, caso onde não é necessário realizar as iterações.

Passo 2) Escolhe-se uma segunda condição inicial (x_b, y_b) separada por uma distância d_0 da primeira condição inicial, que deve ser da ordem da raiz quadrada da precisão dos

números de ponto flutuante utilizados. Por exemplo, para uma precisão dupla (8 bytes) d_0 deve ser da ordem de 10^{-8} . Com as duas condições iniciais definidas.

Passo 3) Avançar as órbitas em uma iteração e calcular a nova separação d_1 :

$$d_1 = [(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2]^{1/2}. \quad (4.6)$$

Passo 4) Calcula-se:

$$\log\left|\frac{d_1}{d_0}\right|. \quad (4.7)$$

O logaritmo pode ser calculado em qualquer base conveniente, geralmente o logaritmo natural é utilizado.

Passo 5) Reajusta-se uma das órbitas de modo que a distância entre as duas seja novamente d_0 . Supondo que se queira reajustar a órbita b e que seu valor após uma iteração seja (x_{b1}, y_{b1}) tem-se que,

$$x_{b0} = x_{a1} - \frac{d_0}{d_1}(x_{b1} - x_{a1}) \quad (4.8)$$

$$y_{b0} = y_{b1} - \frac{d_0}{d_1}(y_{b1} - y_{a1}) \quad (4.9)$$

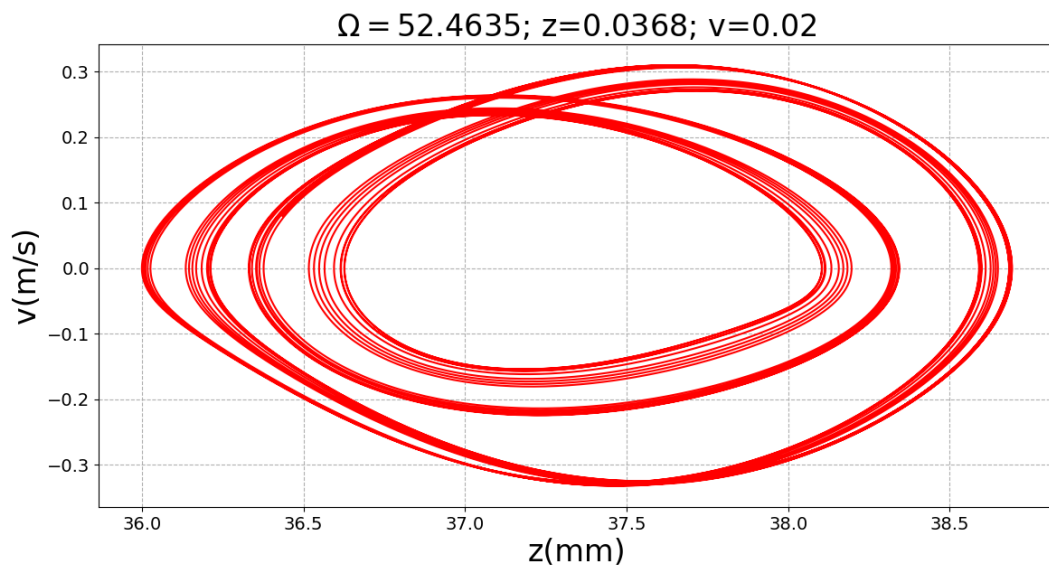
Passo 6) Repete-se os passos de 3 a 5 muitas vezes e calcula-se a média final do valor de $\log\left|\frac{d_0}{d_1}\right|$ que retornará o valor do maior expoente de Lyapunov. Os primeiros valores obtidos podem ser descartados para ter certeza de que as órbitas se orientaram ao longo da direção de expansão máxima. Pode-se observar também a convergência do valor obtido como critério de parada para o método.

4.5 Resultados do cálculo do expoente de Lyapunov

A partir do método numérico apresentado na Seção 4.4 para o cálculo do maior expoente de Lyapunov é possível caracterizar as órbitas que deram origem ao diagrama de bifurcação discutido na Figura 10.

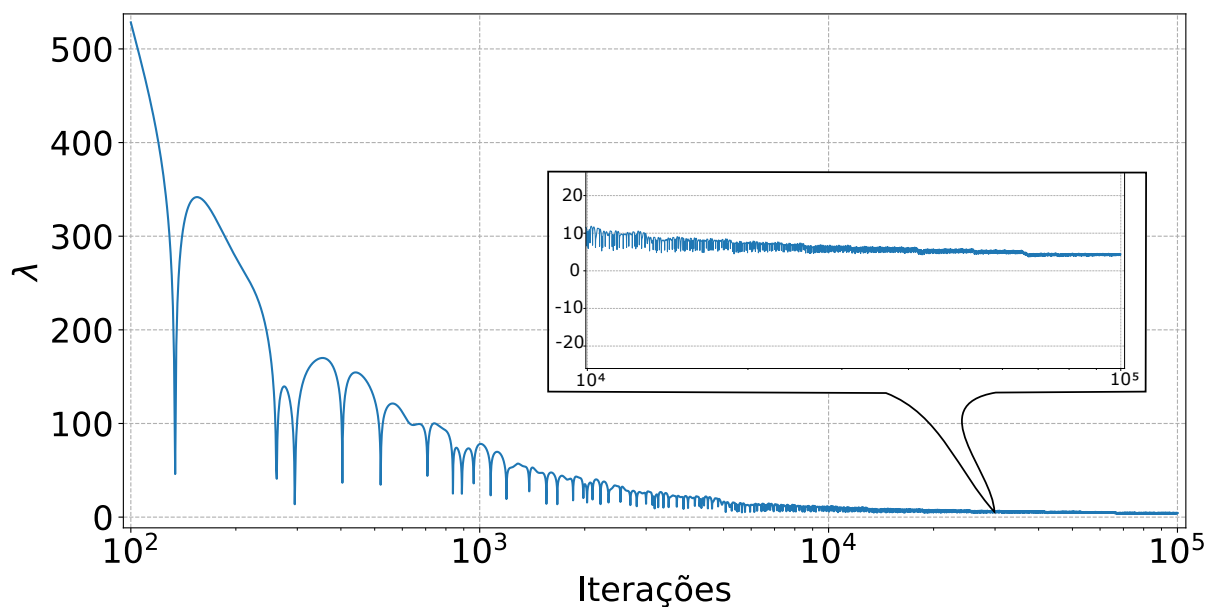
Para frequência de 52,4635 H_z e condições iniciais $z = 0,0368 \text{ mm}$ e $v = 0,02 \text{ m/s}$ mostrada na Figura 11 temos um espaço de fase com múltiplos períodos, o cálculo do maior expoente de Lyapunov efetuado de acordo com o método descrito anteriormente na Seção 4.4 permite afirmar que este espaço de fase representa um atrator caótico uma vez que o valor do máximo expoente de Lyapunov assume um valor positivo de $\lambda > 0$ ao final de 10^5 iterações como evidenciado na Figura 12. Uma amplificação é feita na região entre 10^4 e 10^5 iterações para que seja visível na figura o valor aproximado do expoente de Lyapunov final.

Figura 11 – Espaço de fase na região caótica de 52,4635 Hz



Fonte: O autor.

Figura 12 – Cálculo do maior expoente de Lyapunov na frequência de 52,4635 Hz. Uma amplificação é feita na região entre 10^4 e 10^5 iterações para que seja visível na figura o valor aproximado do expoente de Lyapunov final.



Fonte: O autor.

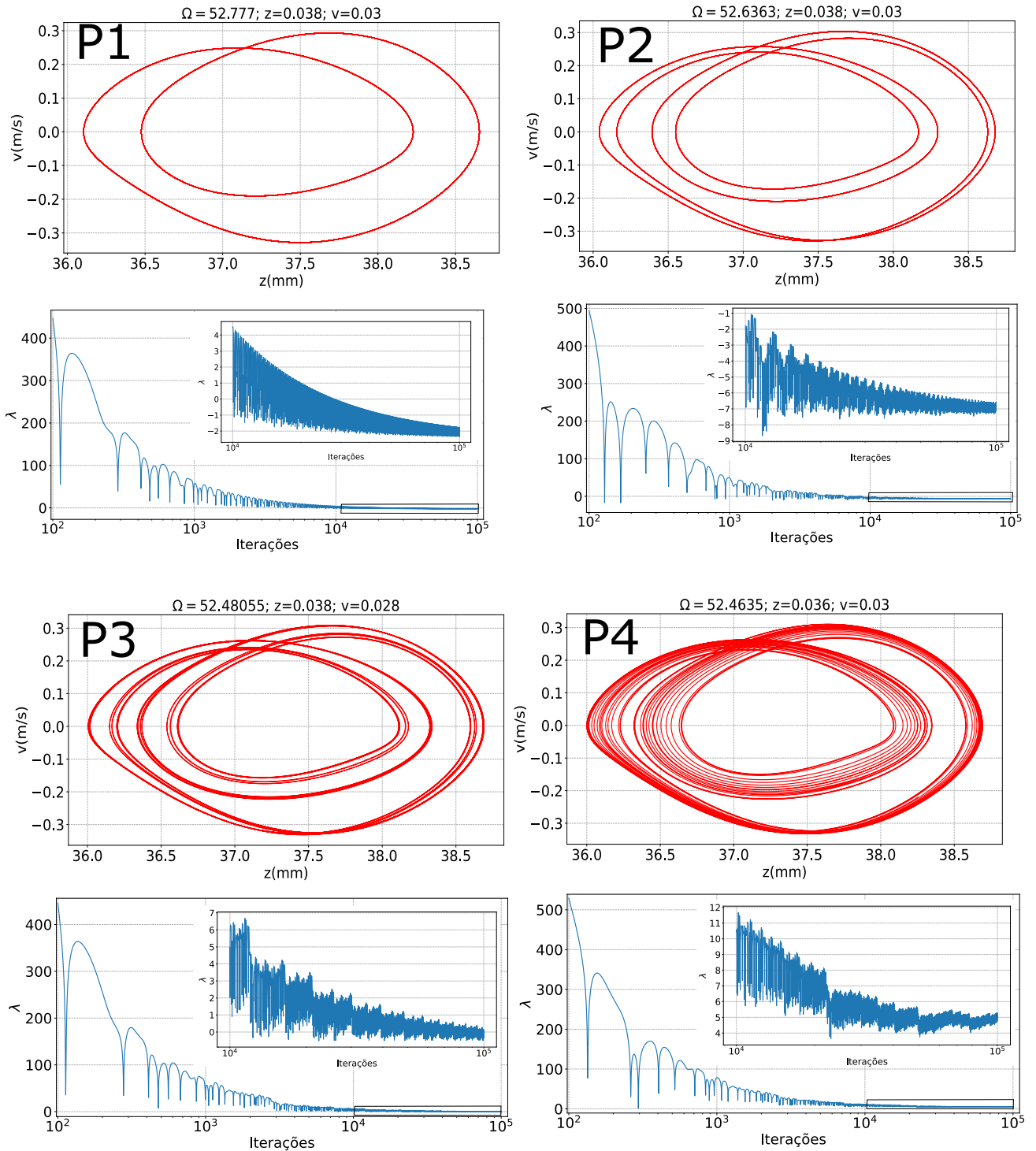
Seguindo os pontos P_1 , P_2 , P_3 e P_4 , sinalizados na Figura 10 tem-se na Figura 13 os espaços de fase e seus respectivos cálculos para o expoente de Lyapunov. As figuras foram organizadas em ordem decrescente da frequência de perturbação Ω , de modo a configurar um aumento do número de órbitas ao se aproximar da região de caos.

Temos um atrator de período dois para frequência de perturbação $52,777 H_z$ e condições iniciais $[0,038 m ; 0,030 ms^{-1}]$ com maior expoente de Lyapunov negativo $\lambda \approx -2$, ponto $P1$ na figura 10, um atrator de período quatro para frequência de perturbação $52,6363 H_z$ e condições iniciais $[0,038 m ; 0,030 ms^{-1}]$ com maior expoente de Lyapunov $\lambda \approx -7$, ponto $P2$, um atrator de período vinte e dois para frequência $52,48055 H_z$ e condições iniciais $[0,038 m ; 0,028 ms^{-1}]$ com maior expoente de Lyapunov $\lambda = 0,08$ ou seja um atrator ligeiramente caótico, ponto $P3$ e um atrator caótico para frequência $52,4635 H_z$ e condições iniciais $[0,036 m ; 0,030 ms^{-1}]$ com maior expoente de Lyapunov $\lambda \approx 5$, ponto $P4$.

Para gerar o espaço de fase é necessário fornecer um par de condições iniciais para uma frequência de perturbação Ω , o transiente considerado foi de 19 s.

Com base nos espaços de fase da Figura 13 é possível verificar a presença de ao mínimo quatro diferentes atratores quando variamos o parâmetro frequência de perturbação (Ω) e as condições iniciais. Também fica evidente um aumento no número de períodos das órbitas ao se aproximar de regiões caóticas.

Figura 13 – Espaços de fase para frequências de perturbação em ordem decrescente e aumento do número de períodos até o caos. Partindo do ponto P_1 e caminhando para o ponto P_4 a frequência de perturbação decresce enquanto o número de períodos das orbitas aumentam até que ocorra o caos, os pontos de P_1 a P_4 estão marcados na Figura 10. O Maior expoente de Lyapunov é apresentado para cada uma das frequências e confirmam a caoticidade ou não das órbitas. Um maior expoente de Lyapunov positivo indica caos.



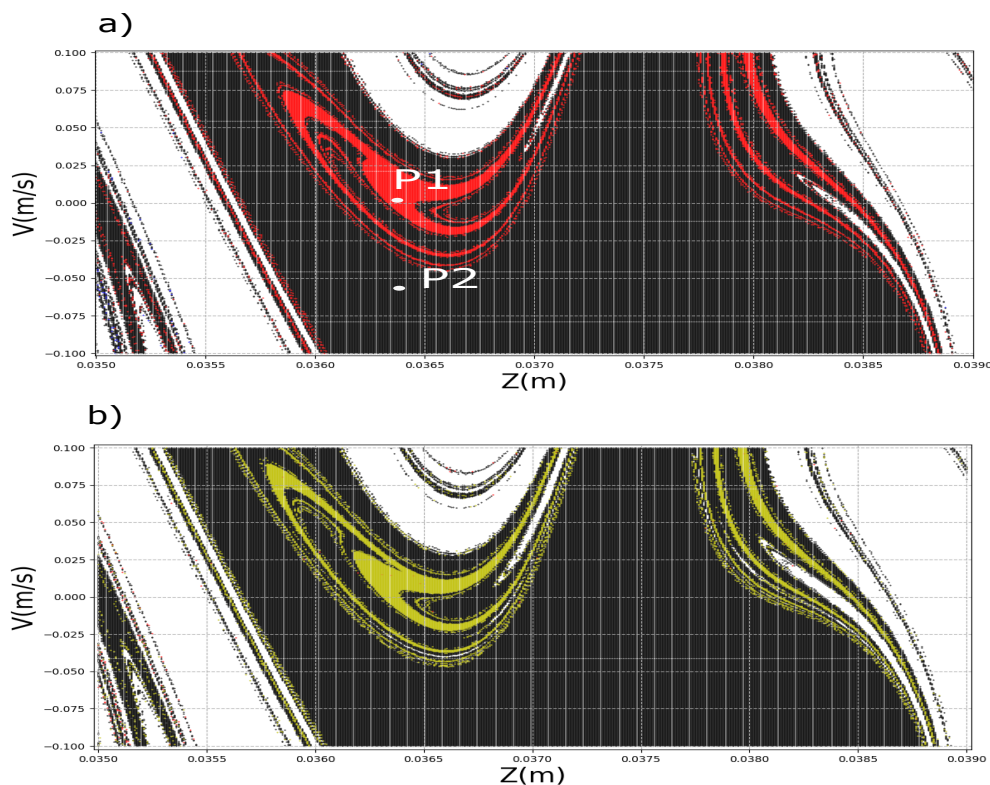
Fonte: O autor.

Outra forma de analisar o sistema em questão é olhar para as bacias de atração e ob-

servar a sua topologia. Foram plotadas duas bacias de atração a primeira para frequência de $52,6 H_z$ uma frequência onde não ocorre caos e uma segunda bacia de atração para frequência de $52,4635 H_z$ frequência onde ocorre caos. Do ponto de vista topológico tanto para frequência onde há oscilações com períodos bem definidos quanto para frequência onde há caos a bacia permanece com a mesma forma.

Para gerar os gráficos das bacias de atração é necessário escolher uma malha de condições iniciais, encontrar os valores de z_{max} (que representam o número de picos ou o número de períodos de uma série temporal) para cada par de condições iniciais e então classificar a região de acordo com o número de picos distintos obtido para cada par de condições iniciais, se uma determinada condição inicial possuir dois valores distintos de z_{max} isto significa que a trajetória da esfera apresenta dois períodos se o sistema apresentar três valores distintos de z_{max} a trajetória da esfera apresenta três períodos e assim por diante. A malha de condições iniciais utilizada para Figura 14 a) foi uma malha $[500 \times 500]$ com Z pertencente ao intervalo $[0,035; 0,039] mm$ e v pertencente ao intervalo $[-0,1; 0,1] m s^{-1}$. As regiões em preto compreendem os valores de z_{max} igual a um ou seja valores onde temos uma órbita de apenas um período, as regiões em vermelho são regiões onde temos órbitas de período 4. As regiões em branco correspondem a regiões onde a solução diverge.

Figura 14 – Bacias de Atração para frequência 52,6 a) e 52,4635 b) H_z . Regiões em preto representam soluções de período 1, Regiões em vermelho soluções de período 4 e em amarelo período 10.



Fonte: O autor.

A bacia de atração para $52,4635 H_z$, Figura 14 b) foi obtida com uma malha [500x500] com Z pertencente ao intervalo $[0,035;0,039]$ mm e v pertencente ao intervalo $[-0,1;0,1]$ ms^{-1} . As regiões em preto correspondem as regiões onde as órbitas possuem período um, as regiões em amarelo são regiões onde as órbitas possuem período 10 ou maior podendo chegar a 30 períodos ou mais, essas órbitas podem ser consideradas caóticas. As regiões em branco correspondem a regiões onde a solução diverge.

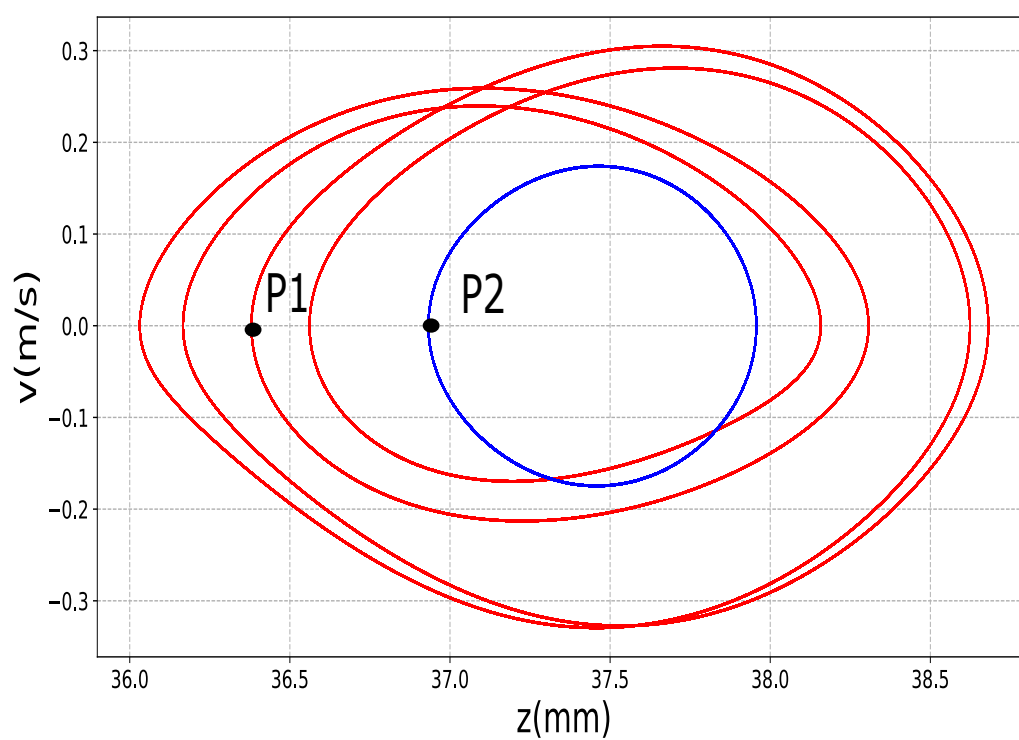
Entre as bacias de atração da Figura 14 observa-se mudanças muito sutis quanto a topologia do espaço, em suma a estrutura das bacias se mantém muito semelhante, a alteração maior encontra-se no número de períodos que passa a ser elevado e até caótico para a bacia de atração da Figura 14 b), enquanto temos regiões com órbitas de 4 períodos para Figura 14 a) para a Figura 14b) chegamos a ter regiões com órbitas de período 10 a 30 ou maior. Nas duas bacias de atração é possível identificar regiões de estabilidade onde temos órbitas com período 1 o que deve em teoria facilitar a levitação estável das esferas inseridas no campo acústico pois uma orbita de período um tende a ser mais previsível.

Para a bacia da Figura 14 a) supomos uma levitação estável embora haja regiões de período 4 o que deve ocasionar certa agitação no movimento orbital das esferas em levitação, pois órbitas de maior período tendem a ter o movimento com menor previsibilidade.

O espaço de fase da Figura.15 foi plotado com intuito de evidenciar a mutipla estabilidade do sistema, em azul temos uma solução de período um, que resulta das condições iniciais $[0,03638 m; -0,065 ms^{-1}]$ em vermelho temos uma solução de período quatro, que resulta das condições iniciais $[0,03638 m; 0,0128 ms^{-1}]$ e frequência de perturbação $52,6 H_z$.

O sistema possui então a característica de multipla estabilidade pois dadas duas condições iniciais distintas e próximas entre si obtemos duas soluções distintas, a primeira de período um e a segunda de período quatro.

Figura 15 – Multipla estabilidade de soluções.



Fonte: O autor.

Capítulo 5

Conclusões

O modelo não linear para força acústica mostra-se capaz de captar fenômenos físicos relevantes que o modelo com rigidez linear não é capaz de prever, estes resultados levam a dinâmica de partículas sob levitação acústica em direção a dinâmica não linear. No decorrer das simulações a comparação entre os modelos de força acústica ao longo do eixo Z apresentaram diferença significativa na representação do fenômeno de levitação, sendo o modelo não linear o mais representativo por demonstrar fenômenos não lineares, como duplicação de período e histerese, outra diferença entre os modelos é a amplitude máxima de oscilação da esfera quando nos aproximamos da frequência natural ou frequência de excitação, o modelo não linear apresenta uma menor amplitude máxima de oscilação bem como uma menor frequência natural.

As séries temporais $Z(t)$ traçadas para o modelo não linear mostram que o modelo descreve oscilações bem comportadas após o período de transiente, mantendo amplitudes de oscilação praticamente uniformes. Com a aplicação da Transformada Rápida de Fourier (TRF) é possível recuperar a frequência dominante do sistema que para os casos de período um do modelo é apenas a frequência de excitação Ω . Porém nas situações onde há duplicação de período a TRF mostra dois picos de frequência um para a frequência de excitação Ω e outro para a frequência que corresponde a frequência de duplicação do período.

O modelo não linear proposto foi capaz de prever fenômenos, como duplicação de período e histerese, quando se estuda a amplitude de oscilação pela frequência de excitação, e uma pequena região caótica, quando se estuda Z_{max} em função da frequência de excitação, esta região caótica caracteriza-se por alternar entre caos e não caos podendo variar de acordo com as condições iniciais, em certos intervalos de frequência o comportamento é periódico, passa a ser caótico e posteriormente volta a ser periódico, esta alternância entre caos e periodicidade é um fenômeno relevante por viabilizar a utilização de certas regiões como ponto de levitação e inviabilizar outras regiões por apresentarem caos. Através de investigações feitas sob os diagramas de bifurcação com diferentes intervalos para frequência de excitação, foi possível observar com detalhes bifurcações e regiões caóticas. Um fato in-

interessante é que o sistema apresenta uma alternância entre regiões onde há duplicação de período e regiões onde há caos, além de apresentar uma órbita de período um que permanece mesmo em meio ao caos indicando múltipla estabilidade. Por meio dos espaços de fase foi possível ainda identificar as órbitas da esfera conforme se modifica o parâmetro Ω e as condições iniciais do sistema. Nota-se um aumento na quantidade de órbitas ao se aproximar de regiões caóticas, quando, então, não existe a possibilidade de estabelecer um período exato para a órbita. A caoticidade do sistema foi quantificada por meio do maior expoente de Lyapunov. Este resultado é de grande importância para o desenvolvimento da área pois para finalidade de controle e estabilidade durante a levitação as regiões onde há recorrência de bifurcações sucessivas e caos devem ser evitadas.

Com respeito as bacias de atração é possível verificar que a topologia do espaço permanece praticamente a mesma quer seja em frequências com orbitas bem definidas ou em frequências onde ocorre caos, existem regiões onde é possível afirmar que a esfera apresenta orbitas bem definidas, ou seja dadas as condições iniciais na região adequada a esfera estará em uma região de maior número de períodos mas, também existem regiões onde o limiar entre o caos e não caos é muito pequeno de tal forma que dada uma condição inicial nesta região não é possível afirmar se o sistema irá para o caos ou para uma oscilação estável com menor período.

Dentre algumas das contribuições do trabalho realizado estão a confirmação de fenômenos como histerese e salto e a identificação e quantificação de regiões caóticas bem como detecção de múltipla estabilidade.

Mais estudos podem ser realizados analisando a dependência da solução quanto ao parâmetro amplitude de perturbação e β além de avaliações quanto ao comportamento do sistema com a variação dos parâmetros C_1 , C_2 e d_1 . O motivo pelo qual erros numéricos surgiram ocasionando falhas nos ramos entre 30 e 45 H_z não foi descoberto tornando esta uma região que pode ser melhor explorada.

A dinâmica de pequenas esferas inseridas em um campo acústico arbitrário é um fenômeno não linear que envolve múltipla estabilidade, histerese, fenômeno de salto e regiões onde há caos.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, M.; BUIOCHI, E.; ADAMOWSKI, J. Finite element analysis and optimization of a single-axis acoustic levitator. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, IEEE, v. 57, n. 2, p. 469–479, 2010. ISSN 0885-3010. Citado na página 15.
- ANDRADE, M.; PEREZ, N.; ADAMOWSKI, J. Particle manipulation by a non-resonant acoustic levitator. *Applied Physics Letters*, AMER INST PHYSICS, v. 106, n. 1, 2015. ISSN 0003-6951. Citado na página 15.
- ANDRADE, M.; PÉREZ, N.; ADAMOWSKI, J. Review of progress in acoustic levitation. *Brazilian Journal of Physics*, Springer US, New York, v. 48, n. 2, p. 190–213, 2018. ISSN 0103-9733. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 21.
- ANDRADE, M. A. B.; BERNASSAU, A. L.; ADAMOWSKI, J. C. Acoustic levitation of a large solid sphere. *Applied Physics Letters*, AIP Publishing LLC, v. 109, n. 4, 2016. ISSN 0003-6951. Citado na página 16.
- ANDRADE, M. A. B.; CAMARGO, T. S. A.; MARZO, A. Automatic contactless injection, transportation, merging, and ejection of droplets with a multifocal point acoustic levitator. *Review of Scientific Instruments*, AIP Publishing LLC, v. 89, n. 12, 2018. ISSN 0034-6748. Citado na página 12.
- BAER, S. *et al.* Analysis of the particle stability in a new designed ultrasonic levitation device. *Review of Scientific Instruments*, American Institute of Physics, v. 82, n. 10, p. 105111, 2011. Citado na página 21.
- BANSAL, R. *A textbook of fluid mechanics and hydraulic machines*. [S.l.]: Laxmi publications, 2004. Citado na página 23.
- BARMATZ, M.; COLLAS, P. Acoustic radiation potential on a sphere in plane, cylindrical, and spherical standing wave fields. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 77, n. 3, p. 928–945, 1985. ISSN 00014966. Citado na página 21.
- BRANDT, E. Suspended by sound. *Nature*, Nature Publishing Group, London, v. 413, n. 6855, p. 474–475, 2001. ISSN 00280836. Disponível em: <<http://search.proquest.com/docview/204483054/>>. Citado na página 13.
- COX, L. *et al.* Acoustic lock: Position and orientation trapping of non-spherical sub-wavelength particles in mid-air using a single-axis acoustic levitator. *Applied Physics Letters*, AIP Publishing LLC, v. 113, n. 5, 2018. ISSN 0003-6951. Citado na página 15.

- FILHO, L. M.; AMATO, M.; FILHO, T. R. Lyapunov exponent and criticality in the hamiltonian mean field model. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing, v. 2018, n. 3, p. 033204, 2018. Citado na página 38.
- FLEMMER, R. L.; BANKS, C. On the drag coefficient of a sphere. *Powder Technology*, Elsevier, v. 48, n. 3, p. 217–221, 1986. Citado na página 23.
- FUSHIMI, T. *et al.* Nonlinear trapping stiffness of mid-air single-axis acoustic levitators. *Applied Physics Letters*, AIP Publishing LLC, v. 113, n. 3, 2018. ISSN 0003-6951. Citado 4 vezes nas páginas 13, 16, 22 e 24.
- GOR'KOV, L. P. On the forces acting on a small particle in an acoustical field in an ideal fluid. In: *Sov. Phys. Dokl.* [S.l.: s.n.], 1962. v. 6, p. 773–775. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 19.
- GOUESBET, G. Generalized lorenz–mie theories and mechanical effects of laser light, on the occasion of arthur ashkin's receipt of the 2018 nobel prize in physics for his pioneering work in optical levitation and manipulation: A review. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Elsevier Ltd, v. 225, p. 258–277, 2019. ISSN 0022-4073. Citado na página 12.
- GUCCIONE, G. *et al.* Scattering-free optical levitation of a cavity mirror. *Physical review letters*, v. 111, n. 18, p. 183001, 2013. ISSN 00319007. Citado na página 12.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de Física Mecânica*. [S.l.]: LTC, 2016. Citado na página 22.
- INATOMI, Y. *et al.* Real-time optical system for observing crystallization in levitated silicate melt droplets. *Review of Scientific Instruments*, American Institute of Physics, v. 81, n. 7, 2010. ISSN 0034-6748. Citado na página 12.
- KING, L. V. On the acoustic radiation pressure on spheres. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 147, n. 861, p. 212–240, 1934. Citado na página 15.
- MARZO, A.; BARNES, A.; DRINKWATER, B. Tynlev: A multi-emitter single-axis acoustic levitator. *Review of Scientific Instruments*, American Institute of Physics Inc., v. 88, n. 8, p. <xocs:firstpage xmlns:xocs=""/>, 2017. ISSN 00346748. Citado na página 16.
- MORGAN, B. A. *et al.* Acoustic levitation as a screening method for excipient selection in the development of dry powder vaccines. *International Journal of Pharmaceutics*, Elsevier B.V, v. 563, p. 71–78, 2019. ISSN 0378-5173. Citado na página 13.
- NEWTON, I. *The Principia: mathematical principles of natural philosophy*. [S.l.]: Univ of California Press, 1686. Citado na página 12.
- PRICE, C. J. *et al.* An in-vacuo optical levitation trap for high-intensity laser interaction experiments with isolated microtargets. *Review of Scientific Instruments*, AIP Publishing LLC, v. 86, n. 3, 2015. ISSN 0034-6748. Disponível em: <\$\$Uhttp://dx.doi.org/10.1063/1.4908285\$\$EView_full_text>. Citado na página 12.

SAHA, A.; BASU, S.; KUMAR, R. Effects of acoustic-streaming-induced flow in evaporating nanofluid droplets. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, v. 692, p. 207–219, 2012. ISSN 00221120. Disponível em: <<http://search.proquest.com/docview/917436815/>>. Citado na página 13.

SAHA, A. *et al.* Experimental analysis of thermo-physical processes in acoustically levitated heated droplets. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier Ltd, v. 53, n. 25, p. 5663–5674, 2010. ISSN 0017-9310. Citado na página 13.

SILVEIRA, F. L. D.; AXT, R. Explicação qualitativa do "anel de thomson": como ocorre a "levitação magnética"? *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Sociedade Brasileira de Física, v. 25, n. 1, p. 81–85, 2003. ISSN 1806-9126. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172003000100010&lng=en&tng=en>. Citado na página 12.

SIMON, M. D.; GEIM, A. K. Diamagnetic levitation: Flying frogs and floating magnets (invited). *Journal of Applied Physics*, American Institute of Physics, v. 87, n. 9, p. 6200–6204, 2000. ISSN 0021-8979. Citado na página 12.

SPROTT, J. C.; SPROTT, J. C. *Chaos and time-series analysis*. [S.l.]: Citeseer, 2003. v. 69. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 52.

STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. [S.l.]: CRC press, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 36.

TOBON, Y. A. *et al.* Photochemistry of single particles using acoustic levitation coupled with raman microspectrometry. *Journal of Raman Spectroscopy*, v. 48, n. 8, p. 1135–1137, 2017. ISSN 0377-0486. Citado na página 12.

TORR, G. The acoustic radiation force. *American Journal of Physics*, v. 52, n. 5, p. 402–408, 1984. ISSN 00029505. Citado na página 13.

WEBER, R. *et al.* Acoustic levitation: recent developments and emerging opportunities in biomaterials research. *European Biophysics Journal*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, v. 41, n. 4, p. 397–403, 2012. ISSN 0175-7571. Citado na página 13.

XIE, W. J.; WEI, B. Temperature dependence of single-axis acoustic levitation. *Journal of Applied Physics*, American Institute of Physics, v. 93, n. 5, p. 3016–3021, 2003. ISSN 0021-8979. Citado na página 13.

YOSIOKA, K.; KAWASIMA, Y. Acoustic radiation pressure on a compressible sphere. *Acta Acustica United with Acustica*, S. Hirzel Verlag, v. 5, n. 3, p. 167–173, 1955. Citado na página 15.

ZANG, D. *et al.* Acoustic levitation of soap bubbles in air: Beyond the half-wavelength limit of sound. *Applied Physics Letters*, AIP Publishing LLC, v. 110, n. 12, 2017. ISSN 0003-6951. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

APÊNDICE A

Código para o cálculo do maior expoente de Lyapunov

O código a seguir foi escrito em linguagem python, foi utilizado o método de Runge Kutta de quarta ordem juntamente com o método de Sprott ([SPROTT; SPROTT, 2003](#)) para o cálculo do maior expoente de Lyapunov.

Código 1 – Cálculo do maior expoente de Lyapunov.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

sistt =0.0
sistz = 0.036 #posicao
sistu = 0.03 #velocidade

d0 = pow(10,-8) # Distancia entre CIs de referencia
h = 0.0001 #passo do RK4
omega = 52.4635
c1 = -60.0315
c2 = 14.5
trans = 10.0 # transiente
i = 0
P = 0.0 #valor inicial para o acumulador do expoente
le = [] #vetor para armazenar lyapunov expoente
while (sistt < 20.0):
    #para a primeira C.I
    zp_1 = 40. * 10.0 ** (-3) + (0.35 * 10.0 ** (-3)) * np.sin(2.0 * np
        .pi * omega * sistt)
    m1 = sistu
    k1 = -c1 * np.sin(1315.0 * (sistz - zp_1)) - c2 * sistu - 9.81
    m2 = sistu + (h/2.)*k1
    t_2 = sistt + (h/2.)
    z_2 = sistz + (h/2.)*m1
    u_2 = m2
    zp_2 = 40. * 10.0 ** (-3) + (0.35 * 10.0 ** (-3)) * np.sin(2.0 * np
        .pi * omega * t_2)
    k2 = -c1 * np.sin(1315.0 * (z_2 - zp_2)) - c2 * u_2 - 9.81
    m3 = sistu + (h/2.)*k2
    t_3 = sistt + (h/2.)
    z_3 = sistz + (h/2.)*m2
    u_3 = m3
    zp_3 = 40. * 10.0 ** (-3) + (0.35 * 10.0 ** (-3)) * np.sin(2.0 * np
        .pi * omega * t_3)
    k3 = -c1 * np.sin(1315.0 * (z_3 - zp_3)) - c2 * u_3 - 9.81
    m4 = sistu + h*k3
    t_4 = sistt + h
    z_4 = sistz + h*m3
    u_4 = m4
    zp_4 = 40. * 10.0 ** (-3) + (0.35 * 10.0 ** (-3)) * np.sin(2.0 * np
        .pi * omega * t_4)
    k4 = -c1 * np.sin(1315.0 * (z_4 - zp_4)) - c2 * u_4 - 9.81
    za = sistz + (h/6.)*(m1 + (2.*m2) + (2.*m3) + m4)
    ua = sistu + (h/6.)*(k1 + (2.*k2) + (2.*k3) + k4)

    if(sistt > trans):
        if(i==0):
            sistt2=sistt
            sistz2=sistz+d0 #posicao

```

```

sistu2=sistu #velocidade

    i=i+1 # contador
    #para a segunda C.I
    zp_11 = 40. * 10.0 ** (-3) + (0.35 * 10.0 ** (-3)) *
    np.sin(2.0 * np.pi * omega * sistt)
    m11 = sistu2
    k11 = -c1 * np.sin(1315.0 * (sistz2 - zp_11)) - c2 * sistu2 - 9.81
    m22 = sistu2 + (h/2.)*k11
    t_22 = sistt + (h/2.)
    z_22 = sistz2 + (h/2.)*m11
    u_22 = m22
    zp_22 = 40. * 10.0 ** (-3) + (0.35 * 10.0 ** (-3)) *
    np.sin(2.0 * np.pi * omega * t_22)
    k22 = -c1 * np.sin(1315.0 * (z_22 - zp_22)) - c2 * u_22 - 9.81
    m33 = sistu2 + (h/2.)*k22
    t_33 = sistt + (h/2.)
    z_33 = sistz2 + (h/2.)*m22
    u_33 = m33
    zp_33 = 40. * 10.0 ** (-3) + (0.35 * 10.0 ** (-3)) *
    np.sin(2.0 * np.pi * omega * t_33)
    k33 = -c1 * np.sin(1315.0 * (z_33 - zp_33)) - c2 * u_33 - 9.81
    m44 = sistu2 + h*k33
    t_44 = sistt + h
    z_44 = sistz2 + h*m33
    u_44 = m44
    zp_44 = 40. * 10.0 ** (-3) + (0.35 * 10.0 ** (-3)) *
    np.sin(2.0 * np.pi * omega * t_44)
    k44 = -c1 * np.sin(1315.0 * (z_44 - zp_44)) - c2 * u_44 - 9.81
    sisttt = sistt + h
    zb = sistz2 + (h/6.)*(m11 + (2.*m22) + (2.*m33) + m44)
    ub = sistu2 + (h/6.)*(k11 + (2.*k22) + (2.*k33) + k44)
#####
    # Distancia entre os valores finais
    d1 = np.sqrt(((za- zb)*(za-zb))+((ua-ub)*(ua-ub)))

    ic=float(i)

    #reavalia a direcao da orbita
    sistz2 = za + (d0*(zb - za)/d1)
    sistu2 = ua + (d0*(ub - ua)/d1)

    #Calcula o expoente
    P= P + np.log(np.absolute(d1/d0));
    dlce = P/ic/h; # media
    if(i>100):
        le.append(dlce)

sistz=za
sistu=ua
sistt = sistt + h

```

```
plt.plot(np.arange(100.,100000.,1),le )
plt.xlabel('Iteracoes', fontsize=24)
plt.ylabel('Lyapunov exp', fontsize=24)
plt.xscale('log')
plt.grid(True, linestyle='dashed')
plt.xticks(fontsize=24)
plt.yticks(fontsize=24)
plt.show()
```
