



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS - REGIONAL CATALÃO
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA



Davi José dos Santos

**A ÁLGEBRA DOS COMPLEXOS/QUATÉRNIOS/OCTÔNIOS E A
CONSTRUÇÃO DE CAYLEY-DICKSON**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CATALÃO - GO, 2016

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: ☒ **Dissertação** ☐ **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

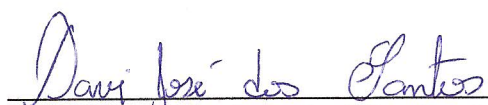
Nome completo do autor:

Título do trabalho:

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento ☒ **SIM** ☐ **NÃO**¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.


Assinatura do (a) autor (a) ²

Data: 29 / 11 / 2016

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

² A assinatura deve ser escaneada.

DAVI JOSÉ DOS SANTOS

A ÁLGEBRA DOS COMPLEXOS/QUATÉRNIOS/OCTÔNIOS E A
CONSTRUÇÃO DE CAYLEY-DICKSON

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:
Fernando Kennedy da Silva

CATALÃO - GO

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Santos, Davi José dos
A ÁLGEBRA DOS COMPLEXOS/QUATÉRNIOS/OCTÔNIOS E A
CONSTRUÇÃO DE CAYLEY-DICKSON [manuscrito] / Davi José dos
Santos. - 2016.
CI, 101 f.

Orientador: Prof. Fernando Kennedy da Silva.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade
Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão,
Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT -
profissional), Cidade de Goiás, 2016.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Números Complexos. 2. Construção de Cayley-Dickson. 3.
Octônios, William Rowan Hamilton. 4. Quatérnios. I. Silva, Fernando
Kennedy da, orient. II. Título.

CDU 51



Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Davi José dos Santos. Aos trinta dias do mês de agosto do ano de dois mil e dezesseis, (30/08/2016), às 10h00min, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora, **Prof. Dr. Fernando Kennedy da Silva – Orientador, Prof. Dr. Fagner Lemos de Santana e Prof. Dr. André Luiz Galdino** para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Laboratório de Controle Operacional, Bloco J, do Câmpus I da Regional Catalão, procederem a avaliação da defesa do trabalho intitulado: “**A Álgebra dos Complexos/Quatérnios/Octônios e a Construção De Cayley-Dickson**”, em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Davi José dos Santos, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da banca, Prof. Dr. Fernando Kennedy da Silva, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em 32 minutos, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1075/2012 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o trabalho de conclusão foi APROVADO por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de MESTRE EM MATEMÁTICA, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 11h36min a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, eu Elizângela Maria Marques Nahas, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Prof. Dr. Fernando Kennedy da Silva

Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Fagner Lemos de Santana

Departamento de Matemática da UFRN/Natal/RN

Prof. Dr. André Luiz Galdino

Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG

DAVI JOSÉ DOS SANTOS, bacharel em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia - UFU e também possui licenciatura em Matemática pela Faculdade Noroeste de Minas - FINOM. Desde 2013 é professor na FINOM.

Aos meus familiares, especialmente meus pais, Salvador José dos Santos e Abadia Moura dos Santos, que sempre me deram força, coragem e constante apoio para seguir em busca de meus objetivos, e a minha esposa que sempre esteve ao meu lado me incentivando.

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas do meu convívio que acreditaram e contribuíram, mesmo que indiretamente, para a conclusão deste curso;

Aos meus pais, Salvador José dos Santos e Abadia Moura dos Santos, pelo amor incondicional e pela paciência. Por terem feito o possível e o impossível para me oferecer a oportunidade de estudar, acreditando e respeitando as minhas decisões e nunca deixando que as dificuldades acabassem com os meus sonhos. Serei imensamente grato;

Ao meus irmãos, Daniel, Lilian, Greice, Raul e Rodrigo, que mesmo inconscientemente me incentivaram, sendo além de irmãos, amigos, a correr atrás dos meus objetivos. Agradeço de coração;

Ao meu orientador, Prof. Fernando Kennedy da Silva, pelo empenho, paciência e credibilidade. Obrigado por tudo;

À todos os meus familiares, tios, tias e primos que torceram e acreditaram na conclusão deste curso. Fico muito grato;

Aos amigos da turma pelas agradáveis lembranças que serão eternamente guardadas no meu coração. Muito obrigado.

“Eu preferia descobrir uma causa a ganhar o reino da Pérsia.”

Demócrito de Abdera

RESUMO

SANTOS, D. J. *A Álgebra dos Complexos/Quatérnios/Octônios e a Construção de Cayley-Dickson*. 2016. 101 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado em Matemática) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, Catalão - GO.

Esta pesquisa com abordagem teórica busca investigar na matemática, os octônios, que é uma extensão não-associativa dos quatérnios. Sua álgebra com divisão formada de 8 dimensões sobre os números reais é a mais extensa que pode ser obtida através da construção de Cayley-Dickson. Nessa perspectiva temos como meta principal responder a seguinte questão: "Que sistemas numéricos permitem as operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão?" Na gênese dos octônios está o matemático irlandês William Rowan Hamilton que, motivado por uma profunda convicção de que os quatérnios poderiam revolucionar a Matemática e a Física, foi o pioneiro de uma nova teoria que transformou o mundo moderno. Hoje, confirma-se que os complexos/quatérnios/octônios e suas aplicações se manifestam em diferentes ramos das ciências tais como a mecânica, a geometria, a física matemática, com grande relevância na animação 3D e na robótica. Com o propósito de investigar a importância deste tema e dar uma pequena contribuição, fazemos uma introdução ao tema desde os números complexos e apresentamos o raciocínio e motivações de Hamilton na descoberta dos quatérnios/octônios. Fazemos uma apresentação da estrutura algébrica, bem como as suas propriedades fundamentais. Em seguida discorremos sobre a construção de Cayley-Dickson que produz uma sequência de álgebras sobre o campo de números reais, cada uma com o dobro do tamanho anterior. Álgebras produzidas por este processo são conhecidas como álgebras Cayley-Dickson; uma vez que elas são uma extensão dos números complexos, isto é, os números hipercomplexos. Todos esses conceitos têm norma, álgebra e conjugado. A ideia geral é que o produto de um elemento e seu conjugado deve ser o quadrado de sua norma. A surpresa é que, além de maior dimensão, a álgebra seguinte perde alguma propriedade algébrica específica. Por fim, descrevemos e analisamos alguns grupos de simetria, com várias representações através de matrizes e aplicações que demonstram que este conteúdo tem uma utilidade na evolução da tecnologia.

Palavras-chaves: Números Complexos, Quatérnios, Octônios, William Rowan Hamilton, Construção de Cayley-Dickson.

ABSTRACT

SANTOS, D. J. *A Álgebra dos Complexos/Quatérnios/Octônios e a Construção de Cayley-Dickson*. 2016. 101 f. Master Thesis in Mathematics – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, Catalão - GO.

This research with theoretical approach seeks to investigate in mathematics, octonions, which is a non-associative extension of the quaternions. Its algebra division 8-dimensional formed on the real numbers is more extensive than can be obtained by constructing Cayley-Dickson. In this perspective we have as main goal to answer the following question: "What number systems allow arithmetic operations addition, subtraction, multiplication and division? " In the genesis of octonions is the Irish mathematician William Rowan Hamilton, motivated by a deep belief that quaternions could revolutionize mathematics and physics, was the pioneer of a new theory that transformed the modern world. Today, it is confirmed that the complex/quaternions/octonions and its applications are manifested in different branches of science such as mechanics, geometry, mathematical physics, with great relevance in 3D animation and robotics. In order to investigate the importance of this issue and make a small contribution, we make an introduction to the theme from the numbers complex and present the rationale and motivations of Hamilton in the discovery of quaternions/octonions. We make a presentation of the algebraic structure and its fundamental properties. Then we discuss about constructing Cayley-Dickson algebras that produces a sequence over the field of real numbers, each with twice the previous size. Algebras produced by this process are known as Cayley-Dickson algebras; since they are an extension of complex numbers, that is, hypercomplex numbers. All these concepts have norm, algebra and conjugate. The general idea is that the multiplication of an element and its conjugate should be the square of its norm. The surprise is that, in addition to larger, the following algebra loses some specific algebraic property. Finally, we describe and analyze certain symmetry groups with multiple representations through matrixes and applications to show that This content has a value in the evolution of technology.

Keywords: Complex Numbers, Quaternions, Octonions, William Rowan Hamilton, Cayley-Dickson Constructing.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Multiplicação por -1 (Argand).	38
Figura 3.2 – Multiplicação por i .	39
Figura 3.3 – Eixos de um complexo.	40
Figura 3.4 – Adição de dois complexos.	41
Figura 3.5 – Multiplicação de um número real por um complexo.	42
Figura 3.6 – Módulo de um complexo.	43
Figura 3.7 – Conjugado de um complexo.	44
Figura 4.1 – William Rowan Hamilton	47
Figura 4.2 – Royal Canal	48
Figura 4.3 – Placa sobre Hamilton no Royal Canal	48
Figura 4.4 – Multiplicação Quaternônica	51
Figura 4.5 – Não comutatividade geométrica	52
Figura 5.1 – Plano Fano	61
Figura 7.1 – Rotação em torno de um eixo arbitrário	75
Figura 7.2 – Ângulos: Heading ψ , Elevation θ , Bank φ	86
Figura 7.3 – Gimbal lock	89

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Tábua de Multiplicações para Octonions	62
---	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	PRELIMINARES	25
2.1	Grupos	25
2.2	Álgebras	30
3	A ÁLGEBRA/GEOMETRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS	35
3.1	História dos Números Complexos	35
3.2	Álgebra/Geometria dos Números Complexos	40
4	A ÁLGEBRA/GEOMETRIA DOS QUATÉRNIOS	47
4.1	História dos Quatérnios	47
4.2	A Álgebra/Geometria dos Quatérnios	50
5	A ÁLGEBRA/GEOMETRIA DOS OCTÔNIOS	59
5.1	História dos Octônios	59
5.2	A Álgebra/Geometria dos Octônios	59
6	A CONSTRUÇÃO DE CAYLEY-DICKSON	65
7	APLICAÇÕES	71
7.1	Forma matricial de um número complexo e a geometria de $SO(2)$	71
7.2	Forma matricial de um quatérnio e a geometria de $SO(3)$	73
7.3	Rotação em torno de um eixo arbitrário	74
7.4	Matriz de Rotação	76
7.5	Rotação com Quatérnios	77
7.6	Conversões entre Representações	80
7.6.1	Quatérnios para Matriz	80
7.6.2	Matriz para Quatérnios	80
7.6.3	Ângulos de Euler para Quatérnios	82
7.6.4	Das matrizes para o eixo-ângulo	82
7.6.5	Quatérnios para Ângulo de Euler	85
7.7	Uso de quaternions na aeronáutica	85
7.7.1	Análise matricial	86

7.7.1.1	Análise quaterniônica	87
7.7.2	Gimbal lock	88
7.8	Transformação de lorentz	91
7.8.0.1	A geometria de $SO(3,1)$	92
7.9	Aplicações no Ensino Médio-Quatérnios na física	94
8	CONCLUSÃO	97
REFERÊNCIAS		99

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Que sistemas numéricos permitem as operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão?

Segundo [Dray e Manogue \(2015\)](#), a fim de contar, necessitamos dos números inteiros. Até quanto podemos contar? Existe um sistema numérico finito adequado? O próprio universo pode ser finito? Assumamos que podemos contar até o infinito, ou, mais precisamente, que não existe um maior número. A fim de subtrair, necessitamos do zero, bem como dos números negativos. Como dissemos, necessitamos dos números inteiros, ou seja,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

A aritmética dos números inteiros funciona bem para adição, subtração e multiplicação, mas e a divisão? Agora precisamos das frações, ou, mais precisamente, dos números racionais

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0 \right\}.$$

Agora podemos realmente fazer aritmética. No entanto, não podemos medir a hipotenusa de um triângulo retângulo, ou a circunferência de um círculo. Para tais procedimentos, necessitamos dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, dentre os quais se incluem os números racionais tais como 3 ou $\frac{1}{2}$, mas também os números irracionais tais como $\sqrt{2}$ ou π .

Estamos prontos? Não, porque existem equações algébricas que ainda não podemos resolver. Um exemplo simples é

$$x^2 + 1 = 0$$

cujas soluções, caso existam, seriam a raiz quadrada de -1 . Como sabemos, os números complexos $\mathbb{C}$ são constituídos por uma parte real e uma parte imaginária, isto é, múltiplos

reais de $i = \sqrt{-1}$. Além disso, todas as equações polinomiais de ordem n tem exatamente n soluções em $\mathbb{C}$ (contando as multiplicidades). Os números complexos podem parecer uma brincadeira matemática, pois quem precisa de raiz quadrada de números negativos? Acontece que a mecânica quântica é uma teoria inerentemente baseada nos números complexos; os números complexos são um ingrediente essencial em nossa compreensão atual do mundo que nos rodeia.

Estamos prontos? Talvez. Quais são as regras? Mesmo sobre os números complexos, as regras são ligeiramente diferentes, como evidenciado pelo aparente paradoxo

$$i = \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i} = -i$$

o que nos obriga a repensar as regras para manipulação de raízes quadradas. Nos podemos mudar as regras ?

Sim, nós podemos. Primeiramente, podemos deixar cair a exigência de que os números comutam uns com os outros. No entanto isto não é intuitivo, pois há boas razões para suspeitar que tais números poderiam ser úteis, já que há muitas operações físicas onde as questões de ordem são importantes. Um exemplo matemático onde a ordem importa é a multiplicação de matrizes, onde, em geral, $AB \neq BA$. Como veremos, esta escolha leva aos quatérnios, $\mathbb{H}$.

A ideia dos quatérnios surgiu na tentativa de criar um complexo tri-dimensional, assim a álgebra dos quatérnios teve origem nos números complexos, quando William Rowan Halmiton (1805-1865) colocou um número complexo como pares ordenados de reais e buscou uma forma de generalizar para o caso tri-dimensional. A teoria dos quatérnios foi comunicada pela primeira vez durante uma reunião da Academia Irlandesa, realizada em 16 de outubro de 1843. Desse extenso trabalho Hamilton fez duas apresentações adicionais, uma publicada em 1853 e outra em 1866 (DION; PACCA; MACHADO, 1995).

Podemos ir mais longe? Sim, soltando a associatividade. Por que fazemos isso? Bem, a multiplicação de matrizes é associativa, mas o produto vetorial $\vec{v} \times \vec{u} \times \vec{w}$ não é. Podemos trabalhar sem $\vec{v} \times \vec{u} \times \vec{w}$? Não sem saber qual produto fazer primeiro! Como veremos, esta escolha nos leva aos octônios, $\mathbb{O}$.

Podemos ir mais longe? Não, ir mais longe nos obriga a desistir da divisão. Mais precisamente, as quatro álgebras $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$, são as únicas sem divisores de zero, isto é, elementos não nulos cujo produto não deixa de ser zero.

Os octônios são a maior álgebra com divisão. Dray e Manogue (2015) acreditam que esta maior estrutura matemática acabará por ser vista como a chave para entender os blocos de construção básicos da natureza, ou seja, as partículas fundamentais, tais como elétrons e quarks.

Em matemática, a construção de Cayley-Dickson produz uma sequência de álgebras sobre o campo de números reais, cada uma com o dobro da dimensão da anterior. Álgebras produzidas por este processo são conhecidas como álgebras Cayley-Dickson; e são uma extensão dos números complexos, isto é, algo como números hipercomplexos. Em todas estas extensões é possível definir norma, álgebra e conjugado. A idéia geral é que o produto de um elemento e seu conjugado deve ser o quadrado de sua norma. A surpresa é que, além de maior dimensão, a álgebra seguinte perde alguma propriedade algébrica específica.

Como dito anteriormente, as únicas dimensões nas quais há números hipercomplexos que permitem uma noção de divisão são as de dimensões 4 e 8. Mais ainda, sob determinadas exigências para uma norma definida nestas estruturas, em ambos os casos estes sistemas numéricos são únicos nas respectivas dimensões.

Também, aumentando-se a dimensão, nós não podemos manter algumas das propriedades que caracterizam os sistemas simples de números. No perde e ganha das generalizações, a multiplicação deixa de ser comutativa nos quatérnios e nos octônios e no caso deste último nem é mesmo associativa.

O objetivo desta trabalho de conclusão de curso é introduzir a matemática dos quatérnios/octônios, oferecendo algumas dicas de como eles podem ser úteis.

Assim, no capítulo 2, trabalharemos alguns assuntos preliminares, tais como: Grupos e Álgebras. No capítulo 3, trataremos dos números complexos. Nos capítulos 4 e 5, trataremos dos números hipercomplexos, quatérnios e octônios, respectivamente. No capítulo 6 trataremos da construção de Cayley-Dickson e por fim, no capítulo 7, mostraremos algumas aplicações.

Capítulo 2

PRELIMINARES

Embasamos este capítulo nos livros [Dray e Manogue \(2015\)](#), [Garcia e Lequain \(2008\)](#), nos trabalhos de conclusão de curso de [Lima \(2011\)](#), [Lima \(2012\)](#) e no artigo ([BAEZ, 2002](#)).

2.1 Grupos

Definição 1. Um grupo é um par $(G, \cdot)$ em que G é um conjunto não vazio e

$$G \times G \rightarrow G$$

$$(a, b) \mapsto a \cdot b$$

é uma função, denominada operação do grupo, satisfazendo

1. Aassociatividade :

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a, b, c \in G.$$

2. Existência do elemento neutro :

Existe $e \in G$, tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$, para qualquer $a \in G$.

3. Existência do elemento inverso :

Para qualquer $a \in G$ existe $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Definição 2. Um grupo $(A, \cdot)$ é abeliano, ou comutativo, se para qualquer $a, b \in A$, tivermos

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Observação 1. O elemento neutro é único. De fato, se $e, e' \in G$ são elementos neutros de G , então

$$e = e \cdot e'$$

pois e' é elemento neutro. Por sua vez,

$$e \cdot e' = e'$$

pois e é elemento neutro. Concluindo que $e = e'$.

Observação 2. O elemento inverso é único. De fato, seja $a \in G$, e $b, b' \in G$ dois elementos inversos de a , então:

$$b = b \cdot e = b \cdot (a \cdot b')$$

pois b' é inverso de a . Por outro lado,

$$b \cdot (a \cdot b') = (b \cdot a) \cdot b' = e \cdot b' = b'$$

pois b é inverso de a . Concluindo que $b = b'$.

Definição 3. Seja $(G, \cdot)$ um grupo. Um subconjunto não-vazio H de G é um subgrupo de G (denotamos $H < G$) quando, com a operação de G , o conjunto H é um grupo, isto é, quando as condições seguintes são satisfeitas:

1. $h_1 \cdot h_2 \in H, \forall h_1, h_2 \in H$;
2. $h_1 \cdot (h_2 \cdot h_3) = (h_1 \cdot h_2) \cdot h_3, \forall h_1, h_2, h_3 \in H$;
3. $\exists e_H \in H$ tal que $e_H \cdot h = h \cdot e_H = h, \forall h \in H$;
4. Para cada $h \in H$, existe $k \in H$ tal que $h \cdot k = k \cdot h = e_H$.

Teorema 1. Um subconjunto H de um grupo G é um subgrupo de G , se e somente se, $xy^{-1} \in H$ sempre que x e y pertencem a H .

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se H é um subgrupo de G , sabemos que y^{-1} deve estar em H , assim como xy^{-1} deve pertencer a H , pois a operação é fechada em H .

($\Leftarrow$) Suponhamos que H seja um subconjunto, não-vazio, de G , e que $xy^{-1} \in H$ sempre que $x, y \in H$. Se $x \in H$ então $e = xx^{-1} \in H$ e $x^{-1} = ex^{-1} \in H$. Por fim, se $y \in H$, então $y^{-1} \in H$ pelo mesmo argumento usado para x^{-1} , logo $xy = x(y^{-1})^{-1} \in H$. Portanto H é subgrupo de G . $\square$

Definição 4. Dados dois grupos G e H , uma função $\Phi : G \rightarrow H$ é dita ser um homomorfismo de grupos se $\Phi(a \cdot b) = \Phi(a) \cdot \Phi(b)$, para todos os elementos $a, b \in G$. Se o homomorfismo é bijetivo, dizemos que ele é um isomorfismo. Usaremos a notação $G \cong H$ quando os grupos G e H forem isomorfos.

Definição 5. Uma ação de um grupo G em um conjunto X é um homomorfismo de G no grupo das bijeções em X , que será denotado por $B_{ij}(X)$.

Vamos denotar uma ação de grupo por:

$$\alpha : G \rightarrow B_{ij}(X)$$

$$g \mapsto \alpha_g$$

e portanto α_g é uma bijeção no conjunto X , que associa a cada elemento $x \in X$ outro elemento $\alpha_g(x)$. Podemos salientar que os elementos de G indexam um subconjunto das bijeções de X .

Exemplo 1. O conjunto de todas as matrizes $n \times n$ inversíveis com entradas reais, munido da operação de multiplicação usual de matrizes é um grupo. Basta observar ainda que tal operação é associativa, o elemento neutro desta operação é a matriz identidade, $Id_{n \times n}$. Como todas as matrizes deste conjunto são inversíveis, e suas inversas são também matrizes $n \times n$, temos que tal conjunto é de fato um grupo.

Segundo [Kolman e Hill \(2006\)](#), podemos associar a cada matriz A deste grupo uma transformação linear T_A tal que

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longrightarrow T_A(x) = xA^t \end{aligned}$$

para todo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Como $T_{AB}(x) = x(AB)^t = xB^t A^t = T_A(T_B(x))$, logo a matriz AB está associada a composição das transformações lineares T_A e T_B . Por outro lado se $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear inversível, e se A é a matriz que representa tal transformação na base canônica, então A é inversível e $T = T_A$. Devido a esta associação com transformações lineares, este grupo matricial é chamado **Grupo Linear Geral** e é denotado por $GL_n(\mathbb{R})$. Sabemos que a multiplicação de matrizes não é comutativa para $n \geq 2$, temos então uma família de grupos infinitos não abelianos.

Exemplo 2. O conjunto de todas as matrizes de ordem 2, denotado aqui por $\mathbb{M}_2$ com a soma usual de matrizes é um grupo abeliano.

Vamos denotar por $\mathbb{M}_n$ o conjunto de todas matrizes reais $n \times n$. Como $\mathbb{M}_2$ é possível provar que $\mathbb{M}_n$ é um grupo abeliano com a soma. Observe que esse conjunto das matrizes não é um grupo com a multiplicação usual pois, sabemos que a multiplicação usual de matrizes não é comutativa.

Exemplo 3 (Os subgrupos O_n e SO_n).

Definição 6. Uma matriz $A_{n \times n}$ é ortogonal se $A^t A = Id_{n \times n}$.

Segue da definição que os elementos de uma matriz ortogonal satisfazem

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + a_{3i}a_{3j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j. \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Se considerarmos as colunas de A como vetores de $\mathbb{R}^n$ vemos que todas as colunas possuem norma igual a 1, e são ortogonais entre si.

Estas duas propriedades obtidas das colunas de A , nos dizem que o conjunto dos vetores coluna de A formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Claramente as linhas de A também possuem essa propriedade, basta observar que $AA^t = Id = A^t A$. Uma propriedade de matrizes ortogonais é $\det(A) = \pm 1$ pois

$$\det(A^t \cdot A) = \det(A) \cdot \det(A) = (\det A)^2 = 1.$$

Para provar que o conjunto das matrizes ortogonais, formam um subgrupo de GL_n , utilizaremos o Teorema 1. Sejam A e B matrizes ortogonais, então

$$\begin{aligned} (AB^{-1})^t AB^{-1} &= (B^{-1})^t A^t AB^{-1} \\ &= (B^t)^t A^t AB^{-1} \\ &= BA^t AB^{-1} \\ &= BB^{-1} \\ &= Id. \end{aligned}$$

Desta forma, concluímos que AB^{-1} é também ortogonal, e pelo Teorema 1, segue o resultado. Tal subgrupo de GL_n é chamado **Grupo Ortogonal**, denotado por O_n . Os elementos de O_n que possuem determinante igual a 1 formam um subgrupo de O_n , chamado **Ortogonal Especial** denotado por SO_n , isto é,

$$SO_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n}; A^t A = Id, \det(A) = 1\}$$

onde introduzimos a notação $\mathbb{R}^{m \times n}$ para as matrizes $m \times n$ no qual seus elementos pertencem a $\mathbb{R}$.

Proposição 1. A ortogonalidade segue do seguinte fato: Se $A \in O_n$, a transformação linear T_A associada a matriz A preserva ortogonalidade e distância.

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, considerando $\mathbb{R}^n$ munido do produto interno usual, temos que

$$\begin{aligned} \langle T_A(x), T_A(y) \rangle &= \langle x \cdot A^t, y \cdot A^t \rangle \\ &= x \cdot A^t \cdot (y \cdot A^t)^t \\ &= x \cdot A^t \cdot A \cdot y^t \\ &= x \cdot y^t \\ &= \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Utilizando a norma induzida pelo produto interno usual, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\|T_A(x)\| = \|x\|$$

ou seja, T_A preserva o tamanho dos vetores, e portanto, também preservada a distância entre eles pois

$$\|T_A(x) - T_A(y)\| = \|T_A(x - y)\| = \|x - y\|.$$

□

Proposição 2. Os autovalores de uma matriz ortogonal devem ter módulo igual a 1.

Demonstração. Seja λ um autovalor associado ao autovetor v . Pela proposição anterior temos que a igualdade $\langle T_A(v), T_A(v) \rangle = \langle v, v \rangle$ é válida. Desta forma temos que

$$\begin{aligned} \langle T_A(v), T_A(v) \rangle &= \langle v, v \rangle \\ \langle \lambda \cdot v, \lambda \cdot v \rangle &= \langle v, v \rangle \\ \lambda^2 \langle v, v \rangle &= \langle v, v \rangle \text{ (como } v \text{ não é o vetor nulo temos que)} \\ \sqrt{\lambda^2} &= 1 \\ |\lambda| &= 1. \end{aligned}$$

□

Observação 3. Uma n -upla $x = (x_1, \dots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$ pode ser interpretada como um ponto no espaço ou um vetor com origem em $(0, \dots, 0)$ e final em $(x_1, \dots, x_n)$.

Assim notamos que o produto $T_A(x) \cdot T_A(y)$ é zero precisamente quando $x \cdot y$ é zero, portanto, se x e y são vetores ortogonais, suas imagens por T_A também serão.

O que foi mostrado é a correspondência unilateral entre as matrizes em O_n e operadores lineares em $\mathbb{R}^n$. Podemos trabalhar no sentido oposto desta correspondência e verificar que T leva bases ortonormais em bases ortonormais (LIMA, 2012). A matriz A que representa o operador T possui os elementos de tal base como suas colunas, consequentemente, A é ortonormal. Desta forma concluímos que $T = T_A$, onde $A \in O_n$, ou seja, encontramos uma matriz correspondente a um operador ortogonal. Portanto temos uma bijeção entre tais conjuntos.

2.2 Álgebras

Antes de tratar especificamente dos complexos/quatérnios/octônios, vamos considerar algumas definições sobre álgebras.

Imagine um conjunto V onde seja possível somar elementos e multiplicar os elementos por números reais, e que o resultado dessas operações esteja no conjunto V . Imagine ainda que essas operações têm "boas" propriedades, aquelas que estamos acostumados a usar quando somamos e quando multiplicamos por números:

- podemos somar os elementos trocando a ordem, ou agrupando-os como quisermos, sem que o resultado seja alterado;
- existe um elemento que quando somado a outro resulta sempre nesse outro;
- feita uma soma, é possível desfazê-la com uma subtração, e todo elemento de V pode ser subtraído de outro;
- multiplicar por 1 não faz efeito;
- multiplicar seguidamente por vários reais é o mesmo que multiplicar pelo produto deles;
- multiplicar o resultado de uma soma por um número real é o mesmo que multiplicar cada parcela e depois somar;
- multiplicar por um elemento de V uma soma de reais é o mesmo que multiplicar cada real pelo elemento em questão e depois somar os resultados.

Existem vários conjuntos onde a adição e a multiplicação por números reais que fazemos usualmente gozam dessas propriedades. Os conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são exemplos. Os conjuntos de matrizes de mesma ordem ($M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ etc.) também são exemplos. Na verdade, há muitos exemplos de conjuntos com essa mesma estrutura. Chamamos a esses conjuntos, munidos dessas operações com as propriedades acima de espaços vetoriais.

Definição 7. Um espaço vetorial real é um conjunto V de elementos juntamente com duas operações $+$ e $\cdot$ que possuem as seguintes propriedades:

Se u e v são quaisquer elementos de V , então $u + v$ está em V , isto é, V é fechado em relação à operação $+$.

a) $u + v = v + u$, para todo $u, v \in V$;

b) $u + (v + w) = (u + v) + w$, para todo $u, v, w \in V$;

c) Existe um elemento 0 em V tal que

$$u + 0 = 0 + u = u, \text{ para todo } u \text{ em } V;$$

d) Para todo u em V , há um elemento $-u$ em V tal que

$$u + (-u) = 0.$$

Se u é qualquer elemento de V e $c \in \mathbb{R}$, então $c \cdot u$ está em V .

e) $c(u + v) = c \cdot u + c \cdot v$, para todos os números reais c e todos $u, v \in V$;

f) $(c + d) \cdot u = c \cdot u + d \cdot u$, para todos os números reais c e d e todo $u \in V$;

g) $c \cdot (d \cdot u) = (cd) \cdot u$, para todos os números reais c e d e todo $u \in V$;

h) $1 \cdot u = u$, para todo $u \in V$.

Definição 8. Uma álgebra A será um espaço vetorial que está munido com uma aplicação bilinear $m : A \times A \rightarrow A$ chamada “multiplicação” e um elemento diferente de zero $1 \in A$ chamado de “unidade” de tal forma que $m(1, a) = m(a, 1) = a$.

Definição 9. Uma subálgebra é uma álgebra S' , que é subconjunto de uma grande álgebra S e compartilha de suas propriedades.

Como de costume, abreviaremos $m(a, b) = a \cdot b$. Dada uma álgebra, vamos pensar nos números reais como elementos desta álgebra via aplicação $\alpha \mapsto \alpha \cdot 1$.

Definição 10. Um álgebra A é finitamente gerada sobre $\mathbb{R}$ quando existe um subconjunto finito $X = \{a_1, \dots, a_k\} \subset A$ tal que todo elemento de A pode ser obtido através de um número finito de somas, multiplicações de elementos de X e/ou multiplicações por escalares de $\mathbb{R}$, isto é, se $u \in A$, então,

$$u = \sum \lambda_i a_{i1} \cdots a_{is},$$

onde $a_{ij} \in X$ e $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Definição 11. Uma álgebra A é uma álgebra com divisão, se dado $a, b \in A$ com $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$. Equivalentemente, A é uma álgebra de divisão se as operações de multiplicação à esquerda e à direita por qualquer elemento diferente de zero são invertíveis.

Em 1878 e 1880, Frobenius e Peirce provaram que as únicas álgebras com divisão real associativas são os números reais, números complexos e quatérnios ([MISHCHENKO; SOLOVYOV, 2000](#)). Os octônios formam a única álgebra com divisão não associativa. [Hurwitz \(1898\)](#) provou que as álgebras dos números reais, números complexos, quatérnios e octônios são os únicos em que a multiplicação por “vetores” unidade preservam a distância.

[Adams \(1958\)](#) e [Adams \(1960\)](#) mostrou que os vectores n -dimensional formam uma álgebra em que a divisão (excepto por 0) é sempre possível apenas para $n = 1, 2, 4$ e 8. [Bott e Milnor \(1958\)](#) mostrou que as únicas álgebras finitas com divisão real ocorrem com dimensões $n = 1, 2, 4$ e 8.

Cada uma dá origem a uma álgebra com aplicações físicas particularmente úteis. Estas quatro álgebras correspondem aos números reais, números complexos, quatérnios e octônios, respectivamente.

Definição 12. Uma álgebra com divisão é dita normada se é uma álgebra A e também é um espaço vetorial normado com $\|ab\| = \|a\| \cdot \|b\|$.

Definição 13. Uma álgebra A tem inverso multiplicativo se para qualquer $a \in A$, diferente de zero, há um elemento $a^{-1} \in A$ com $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Existem três níveis de associatividade.

Definição 14. Uma álgebra é dita associativa-forte se a subálgebra gerada por qualquer elemento é associativa. É dita alternada, se a subálgebra gerada por quaisquer dois elementos é associativa. Finalmente, se a subálgebra gerada por quaisquer três elementos é associativa, a álgebra é dita associativa.

Uma álgebra associativa tem inverso multiplicativo se, e somente se é uma álgebra com divisão. No capítulo 6 iremos construir álgebras que têm inverso multiplicativo, mas não são álgebras com divisão. Por outro lado, podemos construir uma álgebra com divisão sem inverso multiplicativo. Veja exemplo em ([BAEZ, 2002](#)).

Veremos, que os octônios não são associativos, mas eles são alternados. Como é que se verifique uma coisa assim? Pelo teorema de Emil Artin ([SCHAFER, 1995](#)), uma álgebra A é alternada se e somente se para todos os $a, b \in A$ temos

$$(ab)b = a(bb) \text{ e } (aa)b = a(ab), \quad (2.2.0.1)$$

Para ver este fato, note que qualquer álgebra tem uma aplicação trilinear

$$[\cdot, \cdot, \cdot] : A^3 \rightarrow A$$

chamada associador, definido por

$$[a, b, c] = (ab)c - a(bc).$$

A aplicação associador mede a associatividade da álgebra, assim como a aplicação comutador $[a, b] = ab - ba$ mede a comutatividade. Agora, o comutador é um aplicação

alternada bilinear, significando que ela muda de sinal sempre que os dois argumentos são trocados:

$$[a, b] = -[b, a]$$

ou de modo equivalente, que desaparece quando eles são iguais:

$$[a, a] = 0.$$

Isso levanta a questão se o associador também é uma aplicação alternada. Na verdade, isto se verifica quando A é alternada. A razão é que cada uma das equações em 2.2.0.1 diz que a aplicação associador desaparece quando um determinado par de argumentos são iguais, ou equivalentemente, que muda de sinal, quando o par de argumentos é comutado.

Agora podemos enunciar os resultados sobre o $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$:

Teorema 2. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$ são as únicas álgebras com divisão normadas.

Teorema 3. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$ são as únicas álgebras com divisão alternadas.

O primeiro teorema aparece no artigo de 1898 de (HURWITZ, 1898). Uma versão do segundo teorema aparece em um artigo de 1930 de (ZORN, 1930). Para provas modernas de ambos os teoremas, consulte (SCHAFFER, 1995).

Note que não afirmamos que $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$ são as únicas álgebras com divisão. Isso não é verdade. Por exemplo, descreveremos no capítulo 6 uma maneira de obter álgebras de divisão de dimensão 4 que não têm inverso multiplicativo. No entanto, temos este fato:

Teorema 4. Todas as álgebras com divisão têm dimensão 1, 2, 4 ou 8.

Este teorema foi independentemente comprovado por Kervaire (1958) e Bott e Milnor (1958) em 1958. No entanto, nosso foco não é a demonstração deste teorema, em vez disso, concentraremos nas características dos complexos/quatérnios/octônios.

Capítulo 3

A ÁLGEBRA/GEOMETRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

3.1 História dos Números Complexos

Segundo Santos (2013), ao introduzir os números complexos no ensino médio usamos o argumento que permite resolver qualquer equação quadrática. Porém o seu surgimento, teve início no século XVI com os matemáticos que tentavam encontrar um método para resolver equações do terceiro grau.

Uma equação foi por muito tempo vista como a modelagem matemática de um problema real (ROSA, 1998). Como por exemplo, qual triângulo retângulo tem área igual a 7 e seu perímetro é de 12 unidades encontre os comprimentos dos lados?

Chamando de x e y os comprimentos dos catetos desse triângulo temos que:

$$\frac{1}{2}xy = 7$$

$$x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2$$

isolando y na primeira equação e substituindo na segunda obtemos:

$$24x^2 - 172x + 336 = 0$$

cujas raízes são

$$x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}.$$

Assim, se no decorrer da resolução dessa equação era obtida a raiz quadrada de um número negativo, acreditava-se que o problema original não tinha solução.

Segundo Milies (1993), a primeira raiz quadrada de um número negativo é encontrado no livro Estereometria do matemático grego Heron, publicado em aproximadamente 75 d.C., em uma análise matemática de um problema físico. Ainda em Milies (1993), outro

registro sobre raiz quadrada de um número negativo se deve a Diofanto de Alexandria, em aproximadamente 250 d.C., em cujo livro VI, é apresentado o problema *Dado um triângulo retângulo de área 7 e perímetro 12, encontre seus lados* que o leva a uma equação quadrática cuja solução é um número complexo.

O matemático, físico e médico italiano Gerônimo Cardano (1501-1576) foi o primeiro a trabalhar com raiz quadrada de números negativos. Ele, em meados do século XVI, publica a obra *Ars Magna*, onde resolve o seguinte problema: *dividir o número 10 em duas partes cujo produto é 40*. Isso o conduziu à equação $x(10 - x) = -x^2 + 10x = 40$. Ao resolvê-la, obtém $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ como soluções. Cardano resolve multiplicá-las e obtém

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = (5)^2 - (\sqrt{-15})^2 = 25 - (-15) = 40.$$

Mas, geometricamente, era forçado a usar essas raízes de números negativos, pois possibilitavam extrair um segmento de um quadrado (ROQUE, 2012). Cardano teve dúvidas entre admitir as operações algébricas por si mesmas ou tentar dar uma justificativa geométrica para elas.

Na obra, *Ars Magna*, Cardano mostra uma fórmula para a resolução de equações do terceiro grau da forma

$$x^3 + px + q = 0,,$$

conhecida até hoje como Fórmula de Cardano, por ter sido ele quem a divulgou, contudo, não se deve a ele sua descoberta. Ele admitiu em seu livro, que a sugestão para a resolução da equação cúbica lhe tinha sido dada por Niccolo Tartaglia (1500-1557).

A Fórmula de Cardano que permite obter uma raiz é:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

É claro que quando

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} < 0$$

a fórmula parece não ter sentido, porém, mesmo neste caso, a equação pode ter solução.

Em 1572, o italiano Rafael Bombelli (1526-1572) publicou a obra *L'Algebra*, na qual resolveu esse problema considerando $(\sqrt{-1})^2 = -1$ e utilizando as regras elementares da aritmética. Ele considerava impossível a existência de raiz quadrada de números negativos, mas admitiu sua utilidade como ferramenta de cálculo e desenvolveu regras para as operações.

É através deste trabalho que a maneira de manipular os números da forma $a + b\sqrt{-1}$ começa a ser utilizada na resolução de equações do terceiro grau. Mas como os matemáticos do século XVI eram muito tradicionais em relação a geometria, eles não ficaram confiantes com conceitos que não conseguiam dar um significado geométrico. Assim as raízes quadradas dos números negativos eram vistas com muita desconfiança, gerando resistências em reconhecer a legitimidade desses novos números algébricos. Mas aos poucos a segurança em trabalhar com esses novos números cresce à medida em que viram manipulação não conduzia a uma contradição.

Em 1629, Albert Girard (1595-1632) foi o primeiro a utilizar o símbolo $\sqrt{-1}$, quando determinou a correspondência entre raízes e coeficientes de uma equação. Segundo Baumgart (1994),

“Foi Albert Girard (1629) quem enfocou números negativos e números imaginários com grande ousadia. Ele usava números negativos para resolver problemas geométricos e sugeriu que, aceitando também números imaginários como raízes, seria possível afirmar que uma equação admite tantas raízes quanto é seu grau. Enunciou também as relações entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial e sugeriu que as raízes imaginárias são úteis por tornar essas relações gerais. Por exemplo, para a equação $x^4 - 4x + 3 = 0$ ele deu as raízes 1, -1 e $-1 \pm \sqrt{-2}$.” (BAUMGART, 1994).

Mas a dúvida quanto à existência desse tipo de número continuava e fez com que, segundo Garbi (2010) uma frase descuidada de René Descartes (1596-1650), em 1637, batizasse as raízes quadradas de valores negativos, como números imaginários: *“nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias.”*

A álgebra dos números complexos teve pouca evolução durante um certo tempo. Até que, no início do século XVIII, o matemático francês Abraham De Moivre (1667-1754) relacionou funções trigonométricas com números complexos.

Conforme Milies (1993), em 1748 Euler *“redescobriu o resultado de Cotes, demonstrou a fórmula de De Moivre e estendeu sua validade para todo expoente n real. Com isso, a existência de raízes no campo complexo ficou definitivamente estabelecida.”*

Em 1707, De Moivre publica a solução de equações de grau ímpar por um procedimento semelhante ao método de Cardano, mas podendo utilizar uma tabela trigonométrica. O que De Moivre não faz é justificar o porque da troca da tabela de logaritmos pela tabela trigonométrica, e nem o motivo pelo qual utilizou uma parte da medida do ângulo.

Segundo Rosa (1998), *“Em 1722, De Moivre revela o artifício usado para descobrir a solução dessas equações de grau ímpar.”*

Segundo Boyer (1981), Roger Cotes (1682-1716) apresentou num artigo em *Philosophical Transactions* de 1714, que foi reimpresso em *Harmonia mensurarum* publicado após sua

morte em 1722, a fórmula $\ln(\cos(\phi) + i \sin(\phi)) = i\phi$.

John Wallis (1616-1703) em 1685 foi o primeiro matemático a buscar uma interpretação geométrica para a raiz quadrada de números negativos. Com os números negativos sempre vistos com desconfiança, porém usado pelos matemáticos, devido a sua utilidade nos cálculos, tinham uma perfeita interpretação. Nas palavras de Wallis:

“no entanto, sobre a notação algébrica pura, ele (o número negativo) implica uma quantidade menor do que nada; no entanto, quando se trata de uma aplicação física, ele denota uma quantidade real, como se o sinal fosse +, porém interpretada para o sentido contrário.”

Wallis, ficou próximo de resolver o problema da representação geométrica dos números complexos, mas não obteve sucesso. Isso só foi ocorrer um século depois, quando esses números imaginários ganharam um significado, além das simples finalidades operatórias.

Os primeiros a notarem a relação entre os números complexos e os pontos reais do plano após Wallis foram Caspar Wessel (1745-1818), Jean Robert Argand (1768-1822) e Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), de forma independente um do outro.

Em 1797, um agrimensor norueguês, chamado Caspar Wessel (1745-1818), encaminha à Academia Real Dinamarquesa de Ciências, que o publica em 1799, um artigo intitulado *Om Directionens Analytiske Betregning* (sobre a representação analítica de direção), onde apresentava um método que propõe uma representação analítica para segmentos de retas no plano e para representar os números complexos como pontos do plano.

Segundo Milies (1993) “O símbolo i foi usado pela primeira vez para representar $\sqrt{-1}$ por Leonhard Euler, em 1777. Apareceu impresso pela primeira vez em 1794 e se tornou amplamente aceito após seu uso por Gauss, em 1801.”

Segundo Santos (2013) em 1806, Jean Robert Argand (1768-1822) um bibliotecário suíço, publicou o livro *Ensaio sobre a Maneira de Representar as Quantidades Imaginárias*. Ele viu que a multiplicação por -1 representa uma reflexão em relação à origem, por isso $(+1) \cdot (-1) = (-1)$ e $(-1) \cdot (-1) = (+1)$, ou seja, ao se multiplicar por (-1) tem-se uma rotação de 180° no sentido anti-horário.

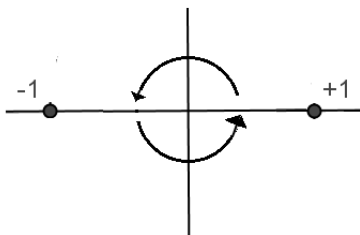


Figura 3.1 – Multiplicação por -1 (Argand).

Argand considera de modo semelhante a multiplicação por i . Ele analisa que ao se multiplicar $(+1)$ por i obtém-se i e, em seguida novamente multiplicar esse resultado por i obtém-se (-1) , ou seja, ao multiplicar $(+1)$ duas vezes seguidas por i , obtém-se novamente uma rotação de 180° . Assim, ele considera a multiplicação de i como uma rotação de 90° no sentido anti-horário.

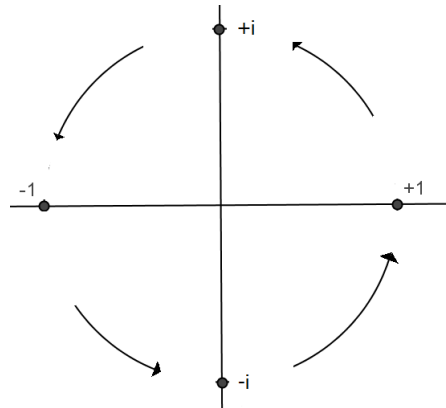


Figura 3.2 – Multiplicação por i .

Em 1831, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matemático, astrônomo e físico alemão, escreveu um artigo no qual associava cada número complexo a um único ponto do plano cartesiano, ou seja, representava $a + bi$ como o par ordenado (a, b) . A interpretação geométrica dos números complexos, a partir dali, se tornou totalmente aceita.

Em 1833, William Rowan Hamilton (1805-1865), num artigo apresentado à Academia Irlandesa, quase três séculos depois do surgimento da fórmula de Cardano, formalizou a álgebra dos números complexos. Ele considerou os números complexos $a + bi$ como pares ordenados de números reais (a, b) , e definiu as operações de soma e multiplicação da seguinte maneira:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

e

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Assim, o par ordenado $(a, 0)$ representa o número real a , o par $(0, 1)$ o número i e $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$, ou seja, $i^2 = -1$, o que deu uma explicação coerente para $\sqrt{-1}$.

Segundo [Stewart \(2012\)](#)

“Do ponto de vista algébrico, disse Hamilton, um ponto no plano pode ser identificado por dois números reais, suas coordenadas (x, y) . Se você observar o diagrama de Wallis (ou o de Wessel, ou o de Argand, ou o de Gauss), vai ver que x é a parte real do número, e que y é sua parte imaginária. Um número complexo $x + iy$ é realmente apenas um par de números reais, (x, y) . Podemos até estabelecer regras para somar e multiplicar esses pares; o principal passo

é observar que, como i corresponde ao par $(0, 1)$, então $(0, 1) \cdot (0, 1)$ deve ser igual a $(-1, 0)$.“ (STEWART, 2012).

3.2 Álgebra/Geometria dos Números Complexos

Definição 15. Dado o número complexo $z = (a, b) = a + bi$, os números reais a e b serão ditos, respectivamente, parte real e parte imaginária de z e serão denotados por

$$\Re(z) = a \text{ e } \Im(z) = b$$

Se $\Re(z) = 0$, z será dito um imaginário puro e se $\Im(z) = 0$, z será considerado um número real.

Os números complexos podem ser identificados com pares ordenados de números reais, e a representação gráfica consiste em identificar cada par ordenado (a, b) com um ponto do plano, cujas coordenadas retangulares são dadas por a e b .

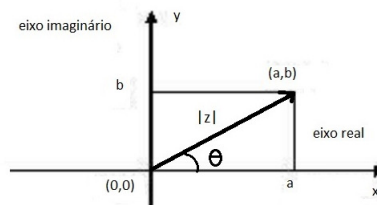


Figura 3.3 – Eixos de um complexo.

Iniciamos definindo a adição de dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ como:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

isto é, somamos as partes reais e as partes imaginárias. Utilizando a representação no plano de Argand-Gauss temos, $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ com $z_1 \neq z_2$ e $z_1, z_2 \neq 0$ tem-se que $z_1 + z_2$ é a diagonal do paralelogramo, conforme a figura ?? . Logo $z_1 + z_2 = (a + c, b + d)$.

Os números complexos são mais do que apenas um espaço vetorial; eles são também uma álgebra, isto é, podemos multiplicá-los. Como fazer o produto de números complexos? Simplesmente fazemos a multiplicação usual, como se fossem números reais considerando $i^2 = -1$,

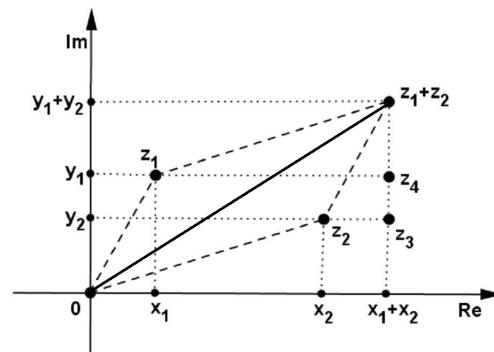


Figura 3.4 – Adição de dois complexos.

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= (a + bi)c + (a + bi)di \\ &= (ac - bd) + (bc + ad)i\end{aligned}$$

Qual propriedade dos números complexos foi usada? Primeiramente, usamos a distributiva da multiplicação com relação à adição. Segundo, i é a raiz quadrada de -1 , isto é, $i^2 = -1$. Terceiro, usamos a associatividade, isto é,

$$(xy)z = x(yz)$$

para qualquer número complexo x, y, z . Finalmente, usamos a comutatividade, isto é, $xy = yx$ para substituir bic por bci .

Isto não só implica distributividade, mas também comutatividade entre os números reais e a unidade complexa i , que, neste caso, é o suficiente para assegurar a comutatividade por completo.

Dado um número real $r \neq 0$ e um número complexo $z = (x, y) \neq 0$, podemos observar que $r \cdot z = (rx, ry)$ tem a mesma direção de z e módulo igual ao produto do módulo de r pelo módulo de z . Se $r > 0$ ($r < 0$), $r \cdot z = (rx, ry)$, tem o mesmo sentido de z (sentido contrário de z). Vale observarmos que se $r = 0$ ou $z = 0$, tem-se que $r \cdot z$ é o ponto $(0, 0)$.

Além disso, temos:

Definição 16. Dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, são iguais quando $a = c$ e $b = d$, ou seja, todo número complexo pode ser escrito de maneira única.

Assim, as operações de adição e multiplicação definidas acima possuem as seguintes propriedades:

1. Propriedade comutativa em relação a adição:

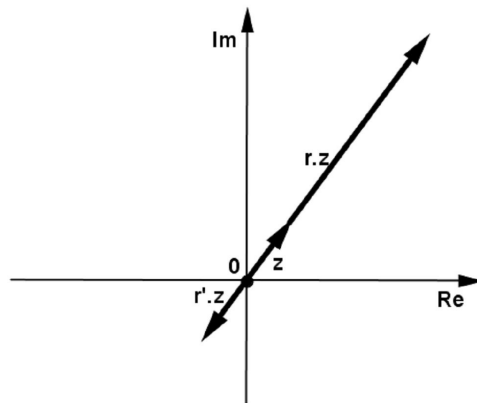


Figura 3.5 – Multiplicação de um número real por um complexo.

Se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ então $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

2. Propriedade comutativa em relação a multiplicação:

Se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ então $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

3. Propriedade associativa em relação a adição:

Se $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ então $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

4. Propriedade associativa em relação a multiplicação:

Se $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ então $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

5. Propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição:

Se $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ então $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

6. Existência do elemento neutro para a adição:

Existe $e_1 \in \mathbb{C}$, tal que $z + e_1 = z$, para qualquer $z \in \mathbb{C}$.

7. Existência do elemento simétrico aditivo:

Para qualquer $z \in \mathbb{C}$ existe $(-z) \in \mathbb{C}$ tal que $z + (-z) = e_1$.

8. Existência do elemento neutro para a multiplicação:

Existe $e_2 \in \mathbb{C}$, tal que $z \cdot e_2 = z$, para qualquer $z \in \mathbb{C}$.

9. Existência do elemento inverso multiplicativo:

Para qualquer $z \in \mathbb{C}$ e $z \neq 0$ existe $z^{-1} \in \mathbb{C}$ e $z^{-1} \neq 0$ tal que $z \cdot z^{-1} = e_2$.

Definição 17. Sendo z um número complexo, $z \neq 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, definimos:

- $z^0 = 1$;
- $z^n = z \cdot z \cdot z \cdots z$ (n vezes), se $n \in \mathbb{N}$;
- Se n é um número inteiro negativo, então $z^n = \frac{1}{z^{-n}}$.

Definição 18. Sendo $z = a + bi$ um número complexo, definimos o módulo de z , denotado por $\|z\|$, como

$$\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

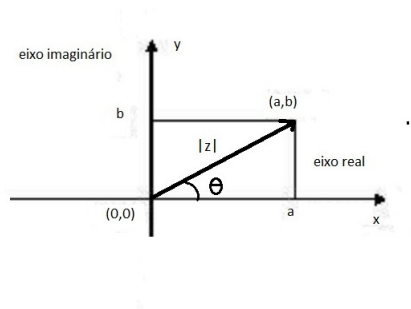


Figura 3.6 – Módulo de um complexo.

Definimos, ainda, o conjugado de z , denotado por $\bar{z}$, como

$$\bar{z} = a - bi.$$

O conjugado de um número complexo é representado através da reflexão em relação ao eixo real do plano complexo

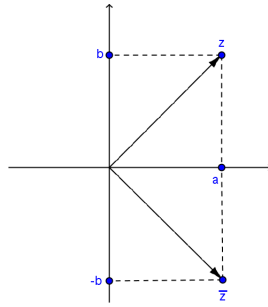


Figura 3.7 – Conjugado de um complexo.

Graças à fórmula de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

é possível escrever os números complexos em termos da sua norma e um ângulo θ , isto é, qualquer número complexo pode ser escrito sob a forma

$$z = re^{i\theta}$$

onde $r = \|z\|$ e desde que $\|e^{i\theta}\| = 1$. Cada número complexo tem, portanto, uma direção associada com ele no plano complexo, determinada pelo ângulo θ . A fórmula de Euler fornece uma derivação elegante das fórmulas de adição de ângulos para o seno e cosseno. Observe que

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)} \quad (3.2.0.1)$$

logo

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = (\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta))$$

de modo que trabalhando do lado esquerdo usando multiplicação complexa, e comparando as partes reais e imaginárias, obtemos as fórmulas padrão para as funções trigonométricas no lado direito. Podemos usar 3.2.0.1 para proporcionar uma interpretação geométrica da multiplicação complexa:

$$r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

A cada complexo $z = a + bi$, corresponde o ponto do plano $P(a, b)$. Dado um complexo $z = a + bi$, o módulo de z é a distância do ponto (a, b) , correspondente a z , no plano complexo, à origem do plano. O módulo de z é obtido a partir da aplicação do Teorema de Pitágoras, sobre o triângulo retângulo cujos catetos medem a e b . O módulo de z é a medida da hipotenusa deste triângulo. Conforme pode ser observado nas figuras ?? e ??.

Sejam $z \in \mathbb{C}$ onde $z = a + bi$ e $a, b \in \mathbb{R}$ então podemos encontrar a raiz quadrada de z :

$$\begin{aligned}
\sqrt{z} &= \sqrt{a \pm b\sqrt{-1}} \\
&= \sqrt{a \pm \sqrt{-b^2}} \\
&= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - (-b^2)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - (-b^2)}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{a + \|z\|}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \|z\|}{2}}.
\end{aligned}$$

Logo a raiz quadrada de z é dada por:

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{a + \|z\|}{2}} \pm \sqrt{\frac{\|z\| - a}{2}} i$$

Capítulo 4

A ÁLGEBRA/GEOMETRIA DOS QUATÉRNIOS

4.1 História dos Quatérnios

De acordo com Milies (1993), Hamilton era também um físico e percebia claramente as implicações de sua descoberta: ele tinha desenvolvido uma álgebra que permitia trabalhar com os vetores do plano.

Figura 4.1 – William Rowan Hamilton



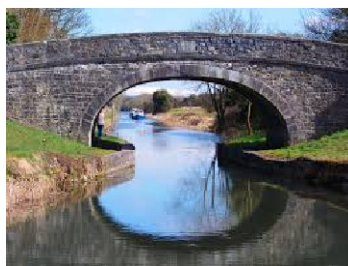
Fonte: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PictDisplay/Hamilton.html>

Isto o levou a considerar um problema que seria fundamental para a física da época: desenvolver uma álgebra de ternas que daria a linguagem para trabalhar com vetores do espaço. Ele trabalhou durante dez anos neste problema antes de descobrir onde estava a dificuldade essencial. Hamilton escrevia suas ternas na forma $a + bi + cj$, por semelhança ao que era feito com os complexos e tentava desenvolver o produto $(a + bi + cj)(x + yi + zj)$ e representá-lo como um elemento da mesma forma. Esperava ainda que o comprimento do produto de vetores fosse igual ao produto dos comprimentos, isto é, que $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$, fato que chamou lei dos módulos.

Para desenvolver o produto, assumiu naturalmente que $i^2 = j^2 = -1$ mas a dificuldade estava em determinar qual devia ser o valor dos produtos ij e ji .

Não discutiremos em detalhe as tentativas sucessivas para definir esses produtos; uma exposição interessante encontra-se em (WAERDEN, 1976). Foi a tentativa de preservar a lei dos módulos que lhe impôs finalmente a necessidade de trabalhar com uma dimensão a mais, o que lhe era difícil de admitir. Transferindo isto para a álgebra, devemos admitir um terceiro símbolo imaginário k , que não deve ser confundido com i ou j . E o assim que Halmiton introduziu os quatérnios tais como $a + bi + cj + dk$ ou (a, b, c, d) .

Figura 4.2 – Royal Canal



Fonte: <http://www.iwai.ie/kildare/places-of-interest/places-history/>

Em uma carta a seu filho, Hamilton descreve como foi a descoberta final que se deu no dia 16 de outubro de 1843 que:

”era uma segunda-feira e dia de reunião do Conselho da Real Sociedade da Irlanda, eu ia andando para participar e presidir, e tua mãe andava comigo, ao longo do Royal Canal, embora ela falasse comigo ocasionalmente, uma corrente subjacente de pensamento estava acontecendo na minha mente, que finalmente teve um resultado, cuja importância senti imediatamente. Pareceu como se um circuito elétrico tivesse se fechado; e saltou uma faísca, o heraldo de muitos anos vindouros de pensamento e trabalho dirigidos, por mim, se poupado, e de qualquer forma por parte de outros, se eu vivesse o suficiente para comunicar minha descoberta. Nesse instante eu peguei uma libreta de anotações que ainda existe e fiz um registro naquela hora. Não pude resistir ao impulso tão não filosófico quanto possa ser de gravar com um canivete numa pedra da ponte de Brougham, quando a cruzamos, a fórmula fundamental dos símbolos i, j, k .” (EVES, 2011).

Figura 4.3 – Placa sobre Hamilton no Royal Canal



Fonte: <http://www.rte.ie/tv/waterways/pages/royal-canal/william-rowan-hamilton.html>

Hamilton chegou a seguinte relação:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Note que a relação acima implica as conhecidas fórmulas que definem a multiplicação de símbolos:

$$ij = -ji = k$$

$$jk = -kj = i$$

$$ki = -ik = j$$

Uma vez definido o produto, Hamilton define o conjugado de $q = a + bi + cj + dk$ como sendo o quatérnio:

$$a = a - bi - cj - dk.$$

Logo em seguida define o módulo como sendo:

$$\|q\| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Com as multiplicações definidas como acima, o conjunto dos quatérnios constitui o primeiro exemplo de anel não comutativo, com divisão. Claro que esta terminologia não estava ainda em uso, mas Hamilton reconheceu imediatamente a importância de sua descoberta, especialmente pelas suas implicações para o desenvolvimento da física.

No dia seguinte, em 17 de outubro de 1843, Hamilton escreveu a seu amigo John T. Graves comunicando-lhe seus resultados. A semente de novos desenvolvimentos tinha sido plantada.

Hamilton dedicou o resto de sua vida a desenvolver aplicações dos seus quatérnios à geometria, mecânica e física. Nesse período introduziu termos como vetor, versor, tensor, escalar, que são tão familiares ao estudante de matemática de nossos dias. Como resultado deste trabalho publicou em 1853 suas *Lectures on Quaternions* e, em 1866, se editou em forma póstuma um trabalho em dois volumes: *Elements of Quaternions*.

Os quatérnios não vieram a ocupar o lugar que seu autor sonhava na física comparável ao papel desempenhado pelo cálculo na mecânica mas, mesmo assim, tiveram importância decisiva em pelo menos dois sentidos.

Por um lado, eles deram origem ao cálculo vetorial. Com efeito, Josiah Willard Gibbs (1839 - 1903) era professor de física-matemática no Yale College e, numa tentativa de simplificar os métodos dos quatérnios, escreveu, para uso de seus estudantes, um conjunto de

notas intitulado *Elements of Vector Analysis* onde se expõe o cálculo vetorial da forma hoje usual. Independentemente, Oliver Heaviside (1850 - 1925) que era um engenheiro especializado em telegrafia, publicou, durante a década de 1880-1890, uma série de artigos no jornal *Electrician* onde usava o cálculo vetorial que tinha desenvolvido, da mesma forma que Gibbs, simplificando os métodos dos quatérnios para torná-los acessíveis aos engenheiros. Por outro lado, a descoberta teve um papel decisivo no desenvolvimento da Álgebra. Do ponto de vista da abstração crescente que estava então em desenvolvimento, teve a virtude de assinalar que as leis fundamentais sugeridas pelos sistemas até então conhecidos, não eram dados que deviam ser sempre assumidos, uma vez que o conjunto dos quatérnios é o primeiro exemplo conhecido onde a ordem dos fatores altera o produto, isto é, a primeira álgebra não comutativa. Mostrou também claramente a possibilidade de estender ainda mais o conjunto das álgebras conhecidas.

4.2 A Álgebra/Geometria dos Quatérnios

Analogamente aos números complexos, os quatérnios se caracterizam como uma ampliação do conjunto dos números reais, isto é, um número quatérnio q é uma lista de números reais (a, b, c, d) , a qual é usualmente escrita como

$$q = a + bi + cj + dk$$

De forma similar aos números complexos, os quatérnios possuem uma parte real e uma imaginária. Ao contrário dos complexos, porém, os quatérnios apresentam três componentes diferentes para sua parte imaginária, às quais chamaremos de i , j e k .

As propriedades de i , j e k são generalizações das propriedades do i dos complexos. As definições que levam às propriedades desejadas exigiram, historicamente, muita reflexão antes de serem adequadamente formuladas, e são apresentadas a seguir.

De forma similar aos complexos, temos que

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Porém, ao contrário dos complexos, precisamos lidar também com multiplicações entre imaginários de natureza diferente. Isso é resolvido definindo que

$$ij = k$$

$$ji = -k$$

Da definição acima, é fácil verificar que

$$ij = k \Rightarrow ijk = kk \Rightarrow ijk = -1 \Rightarrow iijk = -i \Rightarrow -jk = -i \Rightarrow jk = i$$

Assim como que

$$jk = i \Rightarrow jki = ii \Rightarrow jki = -1 \Rightarrow jjki = -j \Rightarrow -ki = -j \Rightarrow ki = j.$$

A multiplicação é mostrada esquematicamente pela figura.

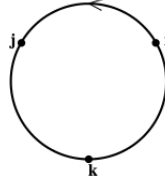


Figura 4.4 – Multiplicação Quaterniônica

Definição 19. Definimos o conjunto dos quatérnios, denotado por $\mathbb{H}$, como

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad e \quad i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$$

Observação 4. Multiplicando ambos os lados de $-1 = ijk$ por k temos

$$-k = ijk k = ij(k^2) = ij(-1) \Rightarrow k = ij.$$

Todos os outros produtos podem ser determinados similarmente, resultando

$$ij = k, ji = -k, jk = i, kj = -i, ki = j, ik = -j,$$

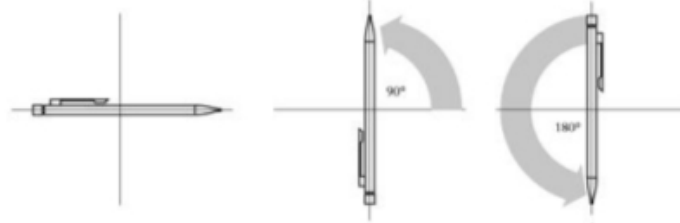
Observe-se que o produto de dois quatérnios, ao contrário dos complexos, não é comutativo, como aliás seria de se esperar, já que as rotações tridimensionais, ao contrário das planas, não comutam.

Hamilton percebeu que teria que abandonar a lei comutativa para a multiplicação e admitir, que os objetos cuja álgebra que descreve o espaço, devem ser quádruplas em vez de triplas. Isso se justifica pois, no plano existe apenas um grau de liberdade de rotação (rotação no plano XY) que é associada a uma unidade imaginária e quando aumenta-se uma dimensão, aumenta-se dois graus de liberdade de rotação (rotação no plano XZ e no plano YZ), que precisam ser associadas de forma semelhante à dos complexos, por uma unidade imaginária cada uma. Além disso a rotação no espaço não é comutativa, como mostram [Vaz \(2000\)](#) e [Santos \(2013\)](#) (VAZ,2000) na figura abaixo.

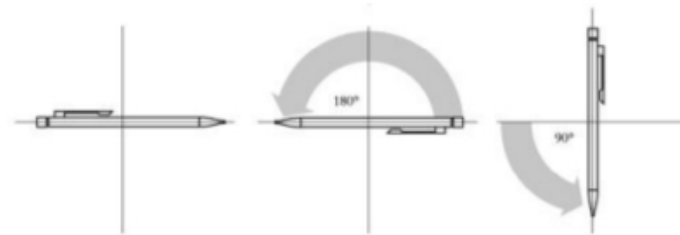
A soma de dois quatérnios é simplesmente a soma algébrica usual componente a componente, isto é, sejam $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ e $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ dois quatérnios quaisquer, então

Figura 4.5 – Não comutatividade geométrica

As rotações ilustram bem o que significa "não-comutatividade". Primeiro, vamos considerar as rotações em um plano. Tome um objeto, por exemplo uma caneta. Faça primeiro uma rotação desse objeto por um ângulo de 90° e depois outra por um ângulo de 180° , como ilustra a figura abaixo.



Agora troque a ordem das operações, ou seja, faça primeiro uma rotação por um ângulo de 180° e depois outra por um ângulo de 90° .



Como podemos ver pelas figuras acima, o resultado final é o mesmo. Dizemos nesse caso que as operações acima descritas *comutam*.

Já com as *rotações espaciais* as coisas são bem diferentes! Pegue aquela mesma caneta, escolha uma direção espacial e faça uma rotação de 90° no plano ortogonal a essa direção escolhida. Depois escolha uma direção espacial ortogonal àquela escolhida anteriormente e faça uma rotação de 180° no plano ortogonal a ela. Essas operações estão ilustradas abaixo.



Agora troque a ordem das operações, como ilustrado na próxima figura.



Veia! O resultado final agora é diferente! Dizemos nesse caso que essas operações *não-comutam*.

Fonte: (SANTOS, 2013)

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$$

A relevância dos quatérnios reside em sua operação de multiplicação. A partir das definições acima, podemos verificar que, dados dois quatérnios q_1 e q_2 , seu produto será :

$$\begin{aligned}
 q_1 \cdot q_2 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\
 &= (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) + b_1 i(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\
 &+ c_1 j(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) + d_1 k(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\
 &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_1 c_2 j + a_1 d_2 k + b_1 i a_2 + b_1 i b_2 i + b_1 i c_2 j + b_1 i d_2 k \\
 &+ c_1 j a_2 + c_1 j b_2 i + c_1 j c_2 j + c_1 j d_2 k + d_1 k a_2 + d_1 k b_2 i + d_1 k c_2 j + d_1 k d_2 k \\
 &= a_1 a_2 + b_1 b_2 i^2 + c_1 c_2 j^2 + d_1 d_2 k^2 + a_1 b_2 i + a_1 c_2 j + a_1 d_2 k \\
 &+ b_1 a_2 i + c_1 a_2 j + d_1 a_2 k + b_1 c_2 i j + b_1 d_2 i k + c_1 b_2 j i + c_1 d_2 j k + d_1 b_2 k i + d_1 c_2 k j \\
 &= a_1 a_2 - (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + a_1(b_2 i + c_2 j + d_2 k) + a_2(b_1 i + c_1 j + d_1 k) \\
 &+ b_1 c_2 k - b_1 d_2 j - c_1 b_2 k + c_1 d_2 i + d_1 b_2 j - d_1 c_2 i \\
 &= a_1 a_2 - (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + a_1(b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\
 &+ a_2(b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (c_1 d_2 - d_1 c_2)i + (d_1 b_2 - b_1 d_2)j + (b_1 c_2 - c_1 b_2)k
 \end{aligned}$$

Definição 20. Dois quatérnios $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ e $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ são iguais quando $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ e $d_1 = d_2$, ou seja, todo quatérnios pode ser escrito de maneira única.

A tabela de multiplicação dos quatérnios é quase, mas não completamente, o produto vetorial. A única diferença é que o quadrado dos quatérnios imaginários é um número negativo, enquanto que o produto vetorial de um vetor com si próprio é zero. Isto não é uma coincidência. Fazendo a identificação óbvia de vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ com os quatérnios imaginários v , w , ou seja

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \leftrightarrow v = v_x i + v_y j + v_z k$$

(e similarmente para $\vec{w}$), então, a parte imaginária do produto quaternônico $v \cdot w$ é o produto vetorial $\vec{v} \times \vec{w}$, isto é,

$$\vec{v} \times \vec{w} \leftrightarrow \Im(v \cdot w)$$

enquanto a parte real é apenas (menos) o produto escalar $\vec{v} \cdot \vec{w}$, que é

$$-\vec{v} \cdot \vec{w} = \Re(vw).$$

Assim, o produto dos quatérnios pode ser considerado como uma combinação do produto escalar e produto vetorial. Na verdade, o uso de i, j, k para vetores de base cartesianas originaram dos quatérnios.

Como dito no capítulo 2, se definimos a aplicação comutador de dois quatérnios p e q por

$$[p, q] = pq - qp,$$

que mostra a falta de comutatividade dos quatérnios. Por exemplo, temos $[i, j] = 2k$. No entanto, os quatérnios são associativos; é suficiente para verificar observar que

$$(i, j)k = -1 = i(jk).$$

Como sempre, temos distributividade da multiplicação sobre a adição.

Definição 21. O conjugado de um quatérnio $q = a + bi + cj + dk$ é representado por $\bar{q}$ e definido como:

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk$$

Definição 22. O inverso de um quatérnio q é representado por q^{-1} e definido como o quatérnio tal que :

$$qq^{-1} = q^{-1}q = 1$$

Um breve cálculo revela que o produto de um quatérnio q e o seu conjugado $\bar{q}$ é igual ao produto de q com si mesmo, o que também é igual ao quadrado de q . Isto é,

$$q\bar{q} = \bar{q}q = q \cdot q = \|q\|^2 = q^2 \quad (4.2.0.1)$$

Teorema 5. O inverso de um quatérnio diferente de zero q , denotado por q^{-1} , é dado por:

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{q^2}$$

Demonstração. Usando a equação 4.2.0.1 temos:

$$qq^{-1} = \frac{q\bar{q}}{q^2} = \frac{q^2}{q^2} = 1$$

e ainda

$$q^{-1}q = \frac{\bar{q}q}{q^2} = \frac{q^2}{q^2} = 1$$

Provando assim o teorema. □

A conjugação quaternônica satisfaz a identidade

$$\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$$

assim

$$\|pq\| = \|p\|\|q\|$$

Definição 23. O produto vetorial de dois vetores P e Q , escrito como $P \times Q$, é uma grandeza vetorial dada pela fórmula

$$P \times Q = \langle P_y Q_z - P_z Q_y, P_z Q_x - P_x Q_z, P_x Q_y - P_y Q_x \rangle.$$

Uma ferramenta comumente usada para recordar esta fórmula é calcular produtos vetoriais avaliando o determinante

$$P \times Q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

onde i, j , e k são vetores unitários paralelos aos eixos x, y e z . O produto vetorial $P \times Q$ também pode ser expresso como uma transformação linear a partir de P que opera em Q como se segue:

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 0 & -P_z & P_y \\ P_z & 0 & -P_x \\ -P_x & P_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \quad (4.2.0.2)$$

O conjunto dos quatérnios puros, $I\mathbb{H}$, representa os quatérnios cuja parte real é zero, isto é, que podem ser tratados como vetores de $\mathbb{R}^3$; pois existe uma correspondência biunívoca entre $I\mathbb{H}$ e $\mathbb{R}^3$, que a cada vetor $q \in \mathbb{R}^3$ faz corresponder o quatérnio puro $q = 0 + q \in I\mathbb{H}$, ou seja,

$$q \in \mathbb{R}^3 \longleftrightarrow q = 0 + q \in I\mathbb{H} \subset \mathbb{H}.$$

Vejamos alguns resultados que envolvem quatérnios puros, começando por referir uma das suas definições.

Definição 1. Seja $q \in \mathbb{H}$

$$q \in I\mathbb{H} \iff q^2 \in \mathbb{R} \text{ e } q \notin \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Facilmente se demonstra a proposição seguinte, se atendermos à definição anterior e ao facto de $I\mathbb{H}$ ser fechado para a adição.

Proposição 2. Se $p, q \in I\mathbb{H}$, então

$$pq + qp \in \mathbb{H}.$$

Também, facilmente, se demonstra usando $pq = p \times q - p \cdot q$ e $|pq| = |p||q|$.

Definição 3. (Olinde Rodrigues) Sejam $p = p_0 + p$ e $q = q_0 + q$ então

$$pq = p_0 q_0 - p \cdot q + p_0 q + q_0 p + p \times q$$

onde $p \cdot q$ representa o produto interno dos vetores e $p \times q$ representa o produto vetorial.

Proposição 4. Sejam $p, q \in IH$. Então

$$|p|^2 |q|^2 = (pq)^2 + |p \times q|^2.$$

Os resultados seguintes verificam-se usando a fórmula de Olinde Rodrigues para a multiplicação de quatérnios puros, usando $pq = p \times q - p \times q$ e a igualdade $p \times q = -q \times p$.

Proposição 5. $p, q, r \in IH$. Então

$$a) \quad p \times q = \frac{1}{2}(pq - qp)$$

$$b) \quad p \times (q \times r) = \frac{1}{2}(pqr - qrp)$$

$$c) \quad pq = \frac{1}{2}(p\bar{q} - q\bar{p})$$

$$d) \quad pq = -\frac{1}{2}(pq - qp)$$

de c) resulta:

Proposição 6. (Critério de ortogonalidade) Sejam $p, q \in IH$. Então

$$pq = 0 \iff p\bar{q} \in I\mathbb{H}.$$

Proposição 7. (Igualdade de Grassmann) Sejam $p, q, r \in IH$. Então

$$p \times (q \times r) = (pr)q - (pq)r.$$

Proposição 8. Sejam $p, q, r \in IH$. Então

$$(p \times q) \times r = (pr)q - (qr)p.$$

Proposição 9. (Igualdade de Jacobi) Sejam $p, q, r \in IH$. Então

$$p \times (q \times r) + q \times (r \times p) + r \times (p \times q) = 0.$$

Definição 24. A norma de um quatérnio $q = a + bi + cj + dk$ é dada por:

$$\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

É importante perceber que $\pm i, \pm j$ e $\pm k$ não são as únicas raízes quadradas de -1 , pois, quaisquer quatérnios imaginários negativos com norma 1 terão raiz quadrada -1 .

Os quatérnios imaginários de norma 1 formam uma esfera, isto é, o conjunto de pontos

$$b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

com $a = 0$. Qualquer quatérnio unitário imaginário u pode ser utilizado para construir uma subálgebra de $\mathbb{H}$ que também vai ser denotado por $\mathbb{C}$,

$$\mathbb{C} = \{a + bu\}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Além disso, podemos usar a identidade de Euler para escrever

$$e^{u\theta} = \cos\theta + u\sin\theta.$$

Isto significa que qualquer quatérnio pode ser escrito sob a forma

$$q = re^{u\theta}$$

onde

$$r = \|q\|$$

e u denota a direção da parte imaginária de q .

Considere o seguinte exemplo: definimos conjugado de um quatérnio q por outro quatérnio $p \neq 0$ por pqp^{-1} (observe que o conjugado de q é diferente de conjugado q por p). A norma da p é irrelevante aqui, então podemos muito bem supor que $|p| = 1$ no caso em que $p^{-1} = \bar{p}$.

- Qual é o resultado do conjugado de um quatérnio por i ?

Faça q em termos de um par de números complexos, isto é,

$$q = z_1 + z_2j$$

onde $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Logo temos que

$$iq\bar{i} = iz_1\bar{i} + iz_2j\bar{i} = iz_1\bar{i} - iz_2j = z_1 - z_2j.$$

A conjugação por i , portanto, deixa o plano complexo intocado, mas gera uma rotação de π no plano jk . Analogamente, realizar a conjugação por qualquer outra unidade quaterniônica imaginária como u irá produzir o mesmo resultado.

- Qual é o resultado do conjugado de um quatérnio por $e^{i\theta}$?

A conjugação por j produz uma rotação por π no plano ki , então

$$je^{-i\theta}\bar{j} = e^{i\theta},$$

multiplicando ambos os lados da equações à direita por j produz a importante relação

$$je^{-i\theta} = e^{i\theta}j.$$

Assim,

$$e^{i\theta}qe^{-i\theta} = e^{i\theta}z_1e^{-i\theta} + e^{i\theta}z_2je^{-i\theta} = z_1 + z_2e^{2i\theta}j$$

Capítulo 5

A ÁLGEBRA/GEOMETRIA DOS OCTÔNIOS

5.1 História dos Octônios

Segundo [Dray e Manogue \(2015\)](#) Hamilton enviou uma carta ao seu bom amigo John T. Graves um dia após sua descoberta, em outubro 1843. Em 26 de dezembro de 1843, Graves escreveu de volta descrevendo os octônios, que ele chamou oitavas, um nome que ainda é usado às vezes. No entanto, Graves não publicou este trabalho até 1845, pouco depois (e em resposta a) a publicação de sua própria descoberta dos octônios de Arthur Cayley. Por esta razão, os octônios também são conhecidos como números de Cayley. Embora Hamilton mais tarde atestou prioridade de Graves, Cayley publicou em primeiro lugar. Os créditos são dados para ambos independentemente quem descobriu os octônios.

5.2 A Álgebra/Geometria dos Octônios

Ao contrário dos quatérnios, os octônios apresentam quatro componentes diferentes para sua parte imaginária, às quais chamaremos de i, j, k e l . Sendo, $l^2 = -1$, e também, $(il)^2, (jl)^2$ e $(kl)^2$ são iguais a -1 . Agora temos sete termos independentes imaginários, que podemos escrever como:

$$x = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k + x_5kl + x_6jl + x_7il + x_8l$$

em que $x_m \in \mathbb{R}$, que pode ser pensado como um ponto ou vetor em $\mathbb{R}^8$. Poderíamos definir a parte real de x por x_1 e a parte imaginária de x como sendo todo o resto.

Definição 25. Dois octônios $x = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k + x_5kl + x_6jl + x_7il + x_8l$ e $y = y_1 + y_2i + y_3j + y_4k + y_5kl + y_6jl + y_7il + y_8l$, são iguais quando, $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_8 = y_8$, ou seja, todo octônio pode ser escrito de maneira única.

Definição 26. O conjugado de um octônio x , é o elemento $\bar{x}$ como a parte real de x e sinal trocado de cada unidade imaginária. Assim

$$\bar{x} = x_1 - x_2i - x_3j - x_4k - x_5kl - x_6jl - x_7il - x_8l$$

Observação 5. Temos que

$$\overline{xy} = \bar{y} \bar{x}$$

A norma de um octônio $\|x\|$ é definida por

$$\|x\|^2 = x\bar{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2$$

Mais uma vez, o único octônio com a norma zero é o zero, e assim, cada octônio diferente de zero tem um único inverso,

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}$$

Tal como acontece com as outras álgebras com divisão, a norma satisfaz a identidade

$$\|xy\| = \|x\| \|y\|$$

Uma propriedade notável dos octônios é que eles não são associativos. Por exemplo, compare

$$(ij)(l) = +(k)(l) = +kl$$

$$(i)(jl) = (i)(jl) = -kl$$

No entanto, os octônios são alternados, ou seja, produtos que envolvam dois octônios quaisquer independentes é associativo. Especificamente,

$$(xy)y = xy^2$$

$$(xy)x = x(yx)$$

para quaisquer octônios x, y . A alternatividade estende-se a produtos com conjugados, de modo que

$$(xy)\bar{y} = x|y|^2$$

$$(xy)\bar{x} = x(y\bar{x})$$

O comutador definido para os quatérnios, estende-se naturalmente para os octônios. O associador de três octônios x, y, z é dado por

$$[x, y, z] = (xy)z - x(yz)$$

a qual mostra a perda da associatividade. Entretanto, temos

$$[x, y, x] = 0 = [x, y, y]$$

Uma forma de representar a multiplicação dos octônios é dada por um diagrama denominado Plano de Fano, mais precisamente, representa-se a multiplicação dos octônios por um triângulo. Os pontos do triângulo são representados através das unidades imaginárias dos octônios: i, j, k, kl, jl, il, l . As setas indicam se o sinal da multiplicação é positivo ou negativo.

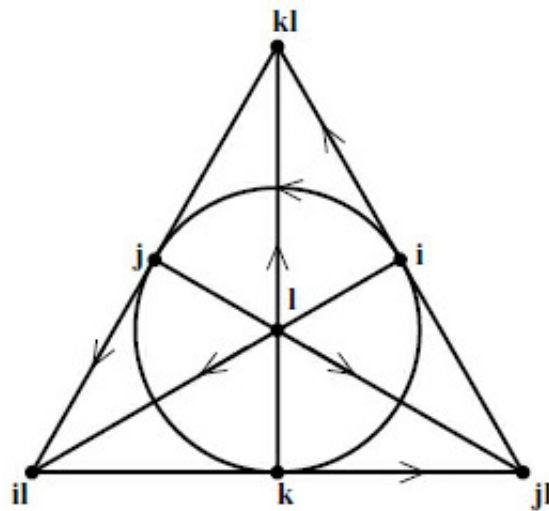


Figura 5.1 – Plano Fano

$$kl = kl$$

$$l \ kl = k$$

$$kl \ k = l$$

e a inversão da ordem contribui com um sinal de menos, a tabela ?? mostra melhor os produtos

Tal como acontece com os quatérnios, as unidades i, j, k, kl, jl, il e l não são de nenhuma maneira as únicas raízes quadradas de -1 . Para isso basta escolher um octônimo negativo onde sua norma seja igual a 1. Os octônios imaginários de norma 1 formam uma 6-esfera no espaço de dimensão 7 formado pelos octônios imaginários.

	i	j	k	kl	jl	il	l
i	-1	k	-j	jl	-kl	-l	il
j	-k	-1	i	-il	-l	kl	jl
k	j	-i	-1	-l	il	-jl	kl
kl	-jl	il	l	1	-i	j	k
jl	kl	l	-il	i	1	-k	j
il	l	-kl	jl	-j	k	1	i
l	-il	-jl	-kl	-k	-j	-i	1

Tabela 5.1 – Tábua de Multiplicações para Octonions

Qualquer octônio imaginário unitário $\hat{s}$ pode ser utilizado para construir uma subálgebra dos $\mathbb{O}$ que também vai ser denotado por $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \{a + b\hat{s}\}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Além disso, podemos usar a identidade de Euler para escrever

$$e^{\hat{s}\theta} = \cos\theta + \hat{s}\sin\theta$$

isto significa que qualquer octônio pode ser escrito sob a forma

$$x = re^{\hat{s}\theta}$$

onde

$$r = \|x\|$$

Dois octônios imaginários unitários $\hat{s}$ e $\hat{t}$ com direções diferente (isto exclui $\hat{s} = -\hat{t}$) determinam uma subálgebra quaterniônica de $\mathbb{O}$, a qual também é denotada por $\mathbb{H}$ e dada por

$$\mathbb{H} = \{a + b\hat{s} + c\hat{t} + d\hat{s}\hat{t}\},$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Uma técnica importante quando se trabalha com os octônios é trabalhar com o que chamamos de octônios genéricos. Qualquer octônio x pode ser assumido em $\mathbb{C}$, isto é,

$$x = x_1 + x_2 i$$

Um segundo octônio y pertence a $\mathbb{H}$ acrescentando apenas uma nova direção, isto é,

$$y = y_1 + y_2 i + y_3 j$$

enquanto um terceiro pode assumir a forma

$$z = z_1 + z_2 i + z_3 j + z_4 k + z_8 l$$

isto é, um elemento geral de $\mathbb{H}$ adicionado mais uma nova direção.

Como nos quatérnios, podemos usar a estratégia para resolver problemas quebrando os octônios em pedaços de complexos ou pedaços de quatérnios. Assim,

$$x = x_{1\mathbb{H}} + x_{2\mathbb{H}}l = x_{1\mathbb{C}} + x_{2\mathbb{C}}i + x_{3\mathbb{C}}j + x_{4\mathbb{C}}k$$

onde $x_{1\mathbb{H}}, x_{2\mathbb{H}} \in \mathbb{H}$ e $x_{1\mathbb{C}}, x_{2\mathbb{C}}, x_{3\mathbb{C}}, x_{4\mathbb{C}} \in \mathbb{C}$. Aqui $\mathbb{H}$ é uma subálgebra gerada por i, j, k e $\mathbb{C}$ uma subálgebra gerada por l .

- Qual é o resultado do produto do conjugado de um octônio por l ?

Primeiramente não temos a associatividade aqui e como temos somente dois octônios envolvidos, l e x , expandido x em 8 coordenadas e notando que l não é comutativo com cada termo exceto o primeiro e último, temos:

$$ly\bar{l} = y_1 - y_2i - y_3j - y_4k - y_5kl - y_6jl - y_7il + y_8l$$

Se $q \in \mathbb{H}$, temos

$$lq\bar{l} = \bar{q}$$

e analogamente,

$$l(ql)\bar{l} = \bar{q}l$$

ou equivalentemente

$$lq\bar{l} = \bar{q}l \quad e \quad l(ql) = -\bar{q}$$

As duas últimas expressões são pedaços da regra geral da multiplicação, o qual pode ser expresso da seguinte forma.

$$(x_{1\mathbb{H}} + x_{2\mathbb{H}}l)(y_{1\mathbb{H}} + y_{2\mathbb{H}}l) = (x_{1\mathbb{H}}y_{1\mathbb{H}} - \overline{y_{2\mathbb{H}}}x_{2\mathbb{H}}) + (y_{2\mathbb{H}}x_{1\mathbb{H}} + x_{2\mathbb{H}}\overline{y_{1\mathbb{H}}})l$$

e assim podemos escrever na forma

$$l(y_{1\mathbb{H}} + y_{2\mathbb{H}}l)\bar{l} = \overline{y_{1\mathbb{H}}} + \overline{y_{2\mathbb{H}}}l$$

- Qual é o resultado do produto do conjugado de um octônio por $e^{l\theta}$?

Semelhantemente o que foi feito para os quatérnios, escrevendo o octônio x em termos de complexos, temos:

$$\begin{aligned} e^{l\theta} x e^{-l\theta} &= e^{l\theta} x_{1\mathbb{C}} e^{-l\theta} + e^{l\theta} x_{2\mathbb{C}} i e^{-l\theta} + e^{l\theta} x_{3\mathbb{C}} j e^{-l\theta} + e^{l\theta} x_{4\mathbb{C}} k e^{-l\theta} \\ &= x_{1\mathbb{C}} + x_{2\mathbb{C}} e^{2l\theta} i + x_{3\mathbb{C}} e^{2l\theta} j + x_{4\mathbb{C}} e^{2l\theta} k. \end{aligned}$$

Como visto anteriormente, esta operação corresponde a uma rotação de 2θ nos três planos.

Capítulo 6

A CONSTRUÇÃO DE CAYLEY-DICKSON

Seria bom ter uma construção das álgebras de divisão normalizados $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$, que explicasse por que cada uma se encaixa perfeitamente dentro da seguinte. Seria bom se essa construção deixasse claro por que $\mathbb{H}$ é não-comutativa e $\mathbb{O}$ é não associativa. Seria ainda melhor se esta construção desse uma sequência infinita de álgebras, dobrando de dimensão cada vez, com as álgebras de divisão normalizada conforme os quatro primeiros (BAEZ, 2002).

Na verdade, há uma tal construção: ela é chamada construção de Cayley-Dickson.

Como notado por Hamilton, o número complexo $a + bi$ pode ser pensado como um par (a, b) de números reais. Além disso a multiplicação é definida assim:

$$(a, b)(c, d) = (ac - db, ad + cb)$$

Também é possível definir o conjugado de um número complexo

$$\overline{(a, b)} = (a, -b).$$

Agora que têm-se os números complexos, pode-se definir os quatérnios de uma forma semelhante. Um quatérnio pode ser pensado como um par de números complexos. Além disso, se $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}$, a multiplicação é definida assim:

$$(c_1, c_2)(c_3, c_4) = (c_1 c_3 - c_4 \overline{c_2}, \overline{c_1} c_4 + c_3 c_2)$$

Esta é apenas como a fórmula para a multiplicação de números complexos, mas com um par de conjugados dentro. Se os incluimos na fórmula de multiplicação dos números complexos nada iria mudar, uma vez que o conjugado de um número real é ele mesmo.

Também podemos definir o conjugado de um quaternio por

$$\overline{(c_1, c_2)} = (\overline{c_1}, -c_2).$$

O jogo continua! Agora podemos definir um octônio como sendo um par de quaternios. Nós somamos e multiplicamos usando as mesmas fórmulas que funcionaram para os quaternios. Este truque para obter novas álgebras é chamado a construção de Cayley-Dickson.

Por que os números reais, números complexos, quaternios e octônios têm inverso multiplicativo? Eu tomo isso como óbvio para os números reais. Para obter os números complexos, pode-se verificar que

$$(a, b)\overline{(a, b)} = \overline{(a, b)}(a, b) = K(1, 0)$$

onde k é um número real, o quadrado da norma do (a, b) . Isto significa que sempre que (a, b) é diferente de zero, o seu inverso multiplicativo $\frac{\overline{(a, b)}}{K}$. Pode-se verificar que o mesmo vale para os quaternios e octônios.

Mas isso, é claro, levanta a questão: por que não há uma sequência infinita de álgebras com divisão, cada uma obtida a partir da anterior pela construção de Cayley-Dickson? A resposta é que cada vez que se aplica a construção, a álgebra fica um pouco pior. Primeiro perdemos o fato de que cada elemento é o seu próprio conjugado, então perdemos comutatividade, então perdemos associatividade, e, finalmente, perder a propriedade algébrica da divisão.

Para ver isso claramente, ajuda ser um pouco mais formal. Defina uma **álgebra* como uma álgebra A munida com uma conjugação, ou seja, uma aplicação linear $*$: $A \rightarrow A$ com

$$\overline{\overline{a}} = a, \quad \overline{(ab)} = \overline{b}\overline{a}$$

para todo $a, b \in A$. Nós dizemos que **álgebra* é real se $a = \overline{a}$ para cada elemento a da álgebra. Nós dizemos que os **álgebra* A é bem normada se $a + \overline{a} \in \mathbb{R}$ e $a\overline{a} = \overline{a}a > 0$ para todo $a \in A$ diferente de zero.

Se A é bem normada definimos

$$\Re(a) = \frac{(a + \overline{a})}{2} \in \mathbb{R}, \quad \Im(a) = \frac{(a - \overline{a})}{2},$$

e definimos uma norma de A por

$$\|a\|^2 = a\overline{a}.$$

Se A é bem normada, tem inverso multiplicativo dado por

$$a^{-1} = \frac{\bar{a}}{\|a\|^2}.$$

Se A é bem normada e alternada, então A é uma álgebra com divisão normalizada. Para ver isto, note que para qualquer $a, b \in A$, todos os 4 elementos $a, b, \bar{a}, \bar{b}$ encontram-se na álgebra associativa gerada por $\Im(a)$ e $\Im(b)$, de modo que

$$\|ab\|^2 = (ab)(\overline{ab}) = ab(\bar{b}\bar{a}) = a(b\bar{b})\bar{a} = \|a\|^2\|b\|^2.$$

Assim, a partir de qualquer **álgebra* A , a construção de Cayley-Dickson dá uma nova **álgebra* A' . Elementos de A' são pares $(a, b) \in A^2$, com multiplicação definida por

$$(a, b)(c, d) = (ac - d\bar{b}, \bar{a}d + cb)$$

e a conjugação é definida por

$$\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b).$$

As seguintes proposições mostram o efeito da aplicação repetidamente da construção de Cayley-Dickson:

Proposição 3. A' nunca é real.

Proposição 4. A é real (e, portanto, comutativa) $\Leftrightarrow A'$ é comutativa.

Proposição 5. A é comutativa e associativa $\Leftrightarrow A'$ é associativa.

Proposição 6. A é associativa e bem normada $\Leftrightarrow A'$ é alternada e bem normada.

Proposição 7. A é bem normada $\Leftrightarrow A'$ é bem normada.

Resulta destas proposições que:

$\mathbb{R}$ é uma **álgebra* real, associativa, comutativa e bem normada $\Rightarrow$

$\mathbb{C}$ é uma **álgebra* associativa, comutativa e bem normada $\Rightarrow$

$\mathbb{H}$ é uma **álgebra* associativa e bem normada $\Rightarrow$

$\mathbb{O}$ é uma **álgebra* alternada e bem normada.

e então segue que $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$ são álgebras com divisão normada. E também segue que os octônios não formam uma **álgebra* real, nem comutativa e nem associativa.

Se continuarmos a aplicação do processo de Cayley-Dickson aos octônios obtemos uma sequência de **álgebras* de dimensão 16, 32, 64, e assim por diante. O primeiro deles é chamado de sedênios, presumivelmente aludindo ao fato que é de dimensão 16 (LOHMUS; PAAL; SORGSEPP, 1994). Segue-se a partir dos resultados acima que todos as **álgebras* nesta sequência são bem normalizadas, mas não são reais, nem comutativas, nem alternadas. Todas elas têm inverso multiplicativo, uma vez que elas são muito bem normadas. Mas elas não são álgebras com divisão, uma vez que um cálculo explícito demonstra que os sedênios e, portanto, todo o resto, tem divisores de zero. Na verdade Dray e Manogue (1999) e Chevalley e Schafer (1950), mostraram que os divisores de zero da norma de um sedênio formam um subespaço que é homeomorfo ao excepcional grupo de Lie G_2 .

A construção de Cayley-Dickson fornece uma boa maneira de obter a sequência $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ e das propriedades básicas destas álgebras. Mas qual é o significado desta construção? Para responder a isso, é melhor definir A' como a álgebra formada unindo a A um elemento i satisfazendo $i^2 = -1$ juntamente com as seguintes relações:

$$a(ib) = i(\overline{ab}), \quad (ai)b = (\overline{ab})i, \quad (ia)(bi^{-1}) = \overline{(ab)} \quad (6.0.0.1)$$

para todos os $a, b \in A$. Fazemos A' uma **álgebra* usando a conjugação original dos elementos de A e definindo $\bar{i} = -i$. Verifica-se que todos os elementos de A' podem ser escrito unicamente como $a + bi$ para algum $a, b \in A$, e que esta descrição da construção de Cayley-Dickson torna-se equivalente à nossa anterior na qual definimos $(a, b) = a + ib$

Qual é o significado das relações em 6.0.0.1? Simplesmente isto: elas expressam a conjugação em termos de conjugação. Este é um trocadilho com o duplo sentido da palavra "conjugação". O que realmente quer dizer que eles expressam a operação conjugado $\bar{a}$ em A como a conjugação de i . Em particular, temos

$$\bar{a} = (ia)i^{-1} = i(ai^{-1})$$

para todos $a \in A$. Note-se que quando A' é associativa qualquer uma das relações de 6.0.0.1 implica na outras duas. E quando A' não é associativa precisamos de todas as três relações.

Esta interpretação da construção de Cayley-Dickson faz com que seja mais fácil de ver o que acontece à medida que aplicamos repetidamente a construção começando com $\mathbb{R}$. Em $\mathbb{R}$ a operação conjugado $\bar{a}$ não faz nada, então quando fazemos a construção de Cayley-Dickson, conjugando por i não temos nenhum efeito sobre elementos de $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é comutativa, isto significa que $\mathbb{C} = \mathbb{R}'$ é comutativa. Mas $\mathbb{C}$ não é real, uma vez que $\bar{i} = -i$.

Em seguida vamos aplicar a construção de Cayley-Dickson, para $\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ é comutativa, a operação conjugado $\bar{a}$ em $\mathbb{C}$ é um automorfismo. Sempre que temos uma álgebra associativa A munida com um automorfismo α , sempre podemos estender A a uma álgebra associativa maior, juntando um elemento invertível x , com

$$\alpha(a) = xAx^{-1}$$

para todos os $a \in A$. Como $\mathbb{C}$ é associativa, isto significa que $\mathbb{C}' = \mathbb{H}$ é associativa.

Mas como $\mathbb{C}$ não é real, $\mathbb{H}$ não pode ser comutativa, uma vez que a conjugação do elemento recém-juntado i deve ter um efeito não-trivial.

Finalmente, vamos aplicar a construção de Cayley-Dickson, para $\mathbb{H}$. Como $\mathbb{H}$ é não-comutativa, a operação conjugado $\bar{a}$ em $\mathbb{H}$ não é um automorfismo. Isso significa que não podemos expressá-la como a conjugação de alguns elementos de uma álgebra associativa maior. Assim $\mathbb{H}' = \mathbb{O}$ deve ser não associativa.

Observe também que se definirmos os sedênios como um par de octônios,

$$s = (p, q)$$

com $p, q \in \mathbb{O}$. A multiplicação é definida pela construção de Cayley-Dickson, isto é,

$$\overline{(p, q)} = (\bar{p}, -q),$$

$$(p_1, q_1)(p_2, q_2) = (p_1 p_2 - \bar{q}_2 q_1, q_2 p_1 + q_1 \bar{p}_2),$$

$$(p, q)\overline{(p, q)} = (\|p\|^2 + \|q\|^2, 0).$$

Se definirmos o elemento especial

$$e = (0, 1)$$

então podemos escrever

$$s = p + qe$$

desde que

$$(p, 0)(1, 0) = (p, 0)$$

$$(q, 0)(0, 1) = (0, q)$$

Os sedênios não são nem comutativos, nem associativos. Observe pela norma $s\bar{s}$ de qualquer sedênio diferente de zero, s é estritamente positivo. Além disso os sedênios contêm divisores de zero, isto é, o produto de elementos não nulos pode ser zero. Por exemplo, temos que

$$(il + je)(jl + ie) = (il, j)(jl, i) = ((il)(jl) + ij, i(il) - j(jl)) = (-k + k, -l + l) = 0$$

Assim, os sedênios não são uma álgebra de composição, uma vez que não conseguem satisfazer a identidade

$$\|pq\| = \|p\|\|q\|$$

e eles não são uma álgebra com divisão, pois como vimos $il + je$ não pode ser invertível.

Capítulo 7

APLICAÇÕES

Segundo [Marinho \(2012\)](#) uma importante propriedade dos quatérnios é que eles podem representar rotações no espaço tridimensional. A teoria de rotações pode ser encontrada em ([MARINHO, 2012](#)).

7.1 Forma matricial de um número complexo e a geometria de SO(2)

Sejam dois números complexos de mesmo módulo e diferentes argumentos

$$z = x + yi = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

e

$$z_1 = x_1 + y_1 i = r_1[\cos(\alpha + \theta) + i\sin(\alpha + \theta)]$$

Tem-se que

$$x_1 = r_1 \cos(\alpha + \theta) = r_1 \cos(\alpha) \cos(\theta) - r_1 \sin(\alpha) \sin(\theta)$$

$$y_1 = r_1 \sin(\alpha + \theta) = r_1 \sin(\alpha) \cos(\theta) + r_1 \cos(\alpha) \sin(\theta)$$

mas $r_1 \cos(\alpha) = x$ e $r_1 \sin(\alpha) = y$, então

$$x_1 = x \cos(\theta) - y \sin(\theta)$$

$$y_1 = x \sin(\theta) + y \cos(\theta)$$

Figura

Escrevendo este sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Particularmente quando um complexo faz uma rotação $\theta = \frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

e quando um complexo faz uma rotação $\theta = 0$, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{2 \times 2}.$$

Como representar números complexos através de matrizes, que quando operados através da álgebra matricial, mantenham as propriedades inerentes aos números complexos?

Conforme Marcos André(SANTOS, 2013) podemos definir a forma matricial de um número complexo $a + bi$ como

$$a + bi = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Olhando de maneira geral suponha que

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix},$$

como (a, b) pertence à circunferência unitária, podemos escrever suas coordenadas como $a = \cos(\theta)$ e $b = \sin(\theta)$ para algum θ satisfazendo $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Sendo (c, d) perpendicular a (a, b) , e também pertencente à circunferência unitária, temos $c = \cos(\phi)$ e $d = \sin(\phi)$ onde $\phi = \theta + \frac{\pi}{2}$ ou $\phi = \theta - \frac{\pi}{2}$. Assumindo o primeiro caso, nossa matriz A assume a seguinte forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Observe que o determinante de A é sempre igual a 1, independente de θ , desta forma vemos que $A \in SO(2)$. O segundo caso faz com que A assumira a seguinte forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Tal matriz possui determinante igual a -1, independente de θ . Observe que uma matriz 2×2 ortogonal representa uma rotação do plano com relação a origem, ou uma reflexão com relação a reta que passa pela origem formando um ângulo de $\frac{\theta}{2}$. Para diferenciarmos uma rotação de uma reflexão, basta atentarmos para o determinante da matriz; se o determinante for igual a 1, então tal matriz representa uma rotação, se igual a -1 então estamos lidando com uma reflexão.

7.2 Forma matricial de um quatérnio e a geometria de $SO(3)$

Vimos como gerar $SO(2)$ através da multiplicação por um número complexo. Podemos tentar a mesma coisa com o quatérnios. Multiplicação por um quatérnio normado e unitário deve ser uma rotação. Uma vez que os quatérnios são 4-dimensional, esperamos obter rotações, em quatro dimensões.

Mas vimos no capítulo 4 que a multiplicação dos quatérnios corresponde a rotações em dois planos. Vamos tentar gerar rotações em apenas um plano.

Começamos com os quatérnios imaginários, que correspondem aos vetores de três dimensões. Se queremos rodar apenas estas três dimensões, nós precisamos de transformações que deixam a parte real de um quatérnio fixo. Considere

$$q \mapsto pqp^{-1}$$

que é chamado de conjugação de q por p . Usando que p e q comutam, então $pqp^{-1} = q$. A conjugação preserva automaticamente a norma de q , pois

$$|pqp^{-1}| = |q|$$

Este argumento mostra que a norma de p não tem nenhum papel na transformação. Assim, podemos assumir $|p| = 1$. Seja $p = e^{i\alpha}$, então $p^{-1} = \bar{p}$, e a conjugação por p torna-se

$$q \mapsto pq\bar{p}$$

Como $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j$, podemos escrever

$$q = r_1 e^{i\theta} + r_2 e^{i\phi} j$$

Lembrando que i e j não comutam, então temos

$$pq\bar{p} = e^{i\alpha} (r_1 e^{i\theta} + r_2 e^{i\phi} j) e^{-i\alpha}$$

Assim a conjugação por $e^{i\alpha}$ deixa ambas direções reais e i fixado, mas induz uma rotação de 2α no plano jk . Do mesmo modo, a conjugação por $e^{j\alpha}$ e $e^{k\alpha}$ correspondem a rotações por 2α nos planos ki e ij , respectivamente. Deste modo podemos gerar qualquer rotação através da combinação de rotações nos planos de coordenadas, vemos que a conjugação dos quatérnios unitários normados gera $SO(3)$ como rotações na parte $Im(\mathbb{H})$. Em três dimensões, podemos realmente fazer melhor: qualquer rotação em três dimensões é na verdade uma rotação em torno de um único eixo, para que possamos dispensar a noção de "geradores" neste caso. Em outras palavras,

$$SO(3) = \{p \in \mathbb{H} : |p| = 1\}$$

ou, no sentido de transformações,

$$SO(3) = \{q \mapsto pq\bar{p} : q \text{ e } p \in \mathbb{H} : |p| = 1\}$$

Em três dimensões, cada rotação é na verdade uma rotação em torno de algum eixo único. Para especificar uma rotação em três dimensões, por conseguinte, é necessário especificar este eixo e o ângulo sobre o eixo por meio do qual vamos girar.

Estes três parâmetros são conhecidos coletivamente como ângulos de Euler. Outra maneira de descrever rotações em três dimensões é construir explicitamente as rotações nos planos coordenados, e em seguida, argumentar que qualquer rotação pode ser obtida por combinação adequada destas rotações. Em particular, é bem conhecido que qualquer matriz de rotação em três dimensões pode ser escrita como o produto de três rotações dos tais planos coordenados. Vamos nos concentrar nos termos das rotações nos planos coordenados.

Matrizes de rotação na forma apresentada nos números complexos podem ser generalizadas de uma maneira simples para dimensões maiores, basta fazer a matriz maior e adicionar 1 e 0 de forma adequada nas entradas restantes. Esta construção conduz às três matrizes.

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que correspondente as rotações nos planos yz , xz e xy , respectivamente. Assim, o grupo ortogonal em três dimensões é definido por

$$SO(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}; A^t A = Id, \det(A) = 1\}.$$

7.3 Rotação em torno de um eixo arbitrário

Suponha que desejamos girar um vetor P através de um ângulo θ sobre um eixo arbitrário cuja direção é representada por um vetor unitário A . Podemos decompor o vetor de P em componentes que são paralelas a A e perpendicular como mostrado na Figura ???. Uma vez que a componente paralela (a projeção de P para A) permanece inalterada durante a rotação, podemos reduzir o problema a rotação da componente perpendicular de P sobre

A. Uma vez que A é um vetor unitário, que tem a fórmula simplificada pela projeção de P para A .

$$proj_A P = (A \cdot P)A \quad (7.3.0.1)$$

A componente de P que é perpendicular a A é dada pela equação

$$perp_A P = P - (A \cdot P)A$$

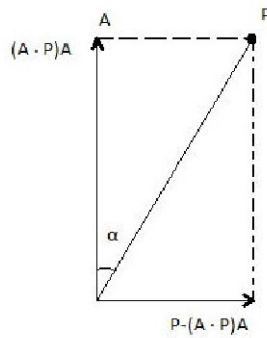


Figura 7.1 – Rotação em torno de um eixo arbitrário

Uma vez que começamos a girar esta componente perpendicular sobre A , vamos adicionar uma constante a componente paralela dada pela equação 7.3.0.1 para chegar a nossa resposta final. A rotação da componente perpendicular ocorre no plano perpendicular ao eixo A . Como antes, o vetor girado é expressado como uma combinação linear de $perp_A$ e o vetor, que resulta a partir de um sentido anti-horário com uma rotação de 90 graus do $perp_A$ sobre A .

Seja α o ângulo entre o vetor original P e o eixo A . Note-se que o comprimento de $perp_A$ é igual a $\|P\| \sin(\alpha)$, pois é o lado oposto ao ângulo α como mostrado na Figura ??.

Um vetor de mesmo comprimento que aponta no sentido é dado por $A \times P$. Agora podemos expressar a rotação de $perp_A$ através de um ângulo θ como

$$[P - (A \cdot P)A] \cos(\theta) + (A \times P) \sin(\theta)$$

Adicionando $proj_A P$, temos a expressão para a rotação do vetor original P sobre o eixo A .

$$P' = P \cos(\theta) + (A \times P) \sin(\theta) + A(A \cdot P)(1 - \cos(\theta)) \quad (7.3.0.2)$$

Substituindo $A \times P$ e $A(A \cdot P)$ na Equação 7.3.0.2 e seus equivalentes da matriz 4.2.0.2 e sabendo que

$$proj_A^P = \frac{1}{\|A\|^2} \begin{pmatrix} A_x^2 & A_x A_y & A_x A_z \\ A_x A_y & A_y^2 & A_y A_z \\ A_x A_z & A_y A_z & A_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$$

temos

$$\begin{aligned} P' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \cos(\theta) + \begin{pmatrix} 0 & -A_z & A_y \\ A_z & 0 & -A_x \\ -A_y & A_x & 0 \end{pmatrix} P \sin(\theta) \\ &+ \begin{pmatrix} A_x^2 & A_x A_y & A_x A_z \\ A_x A_y & A_y^2 & A_y A_z \\ A_x A_z & A_y A_z & A_z^2 \end{pmatrix} P (1 - \cos(\theta)). \end{aligned}$$

Combinando estes termos e definindo $c = \cos(\theta)$ e $s = \sin(\theta)$ obtemos a seguinte fórmula para a matriz $R_A(\theta)$ que gira um vetor através de um ângulo θ sobre eixo A .

$$R_A(\theta) = \begin{pmatrix} c + (1-c)A_x^2 & (1-c)A_x A_y - sA_z & (1-c)A_x A_z + sA_y \\ (1-c)A_x A_y - sA_z & c + (1-c)A_y^2 & (1-c)A_y A_z + sA_x \\ (1-c)A_x A_z + sA_y & (1-c)A_y A_z + sA_x & c + (1-c)A_z^2 \end{pmatrix}$$

7.4 Matriz de Rotação

Vamos estudar rotações de $\mathbb{R}^3$ recorrendo a matrizes, começando por distinguir rotações do referencial e rotações de um ponto de $\mathbb{R}^3$.

Para representar a rotação do referencial em torno do eixo ν segundo o ângulo α , e sendo a correspondente matriz denotada por R_α^ν .

Numa rotação do referencial em $\mathbb{R}^3$, precisamos conhecer o ângulo de rotação e o eixo em torno do qual o referencial vai rodar. Por exemplo, se rodarmos o referencial XYZ em torno do eixo Z' segundo o ângulo ψ , a coordenada z de um ponto $P = (x_1, y_1, z_1)$ vai manter inalterada. Esta situação poderá traduzir-se como uma rotação em $\mathbb{R}^2$ do sistema de eixos coordenados XY em torno da origem segundo o ângulo ψ , isto é, as novas coordenadas do ponto P são denotadas por:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

A matriz desta rotação, isto é, a matriz associada à rotação do referencial XYZ em torno do eixo Z' e do ângulo ψ é

$$R_{\psi}^z = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Do mesmo modo as matrizes associadas às rotações do referencial XYZ em torno do eixo X' de ângulo θ e em torno do eixo do Y' de ângulo α são, respetivamente,

$$R_{\psi}^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad e \quad R_{\psi}^z = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & 0 & -\sin(\psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\psi) & 0 & \cos(\psi) \end{pmatrix}.$$

7.5 Rotação com Quatérnios

Uma rotação em três dimensões pode ser pensado como uma função $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Para que φ represente uma rotação, deve preservar os comprimentos, ângulos e direções. A preservação de comprimento é satisfeita por

$$\|\varphi(P)\| = \|P\| \quad (7.5.0.1)$$

O ângulo entre os segmentos de linha que ligam a origem a quaisquer dois pontos P_1 e P_2 é preservada por

$$\varphi(P_1) \cdot \varphi(P_2) = P_1 \cdot P_2$$

Finalmente, a direção é preservada por

$$\varphi(P_1) \times \varphi(P_2) = \varphi(P_1 \times P_2) \quad (7.5.0.2)$$

Estendendo a função φ para $\mathbb{H}$, exigindo que $\varphi(s + v) = s + \varphi(v)$ nos permite reescrever [7.5.0.2](#) como

$$\varphi(P_1) \cdot \varphi(P_2) = \varphi(P_1 \cdot P_2) \quad (7.5.0.3)$$

Sejam P_1 e P_2 quatérnios. A parte escalar nos permite combinar [7.5.0.2](#) e [7.5.0.3](#) como $P_1 P_2 = -P_1 \cdot P_2 + P_1 \times P_2$. Assim podemos escrever a preservação do ângulo e preservação da direção como uma única equação

$$\varphi(P_1)\varphi(P_2) = \varphi(P_1P_2) \quad (7.5.0.4)$$

A função φ que satisfaz esta equação é chamada de homomorfismo.

A classe de funções dada pela

$$\varphi_q(P) = qPq^{-1}$$

onde q é um quatérnio diferente de zero, satisfaz os requisitos estabelecidos nas Equações 7.5.0.1 e 7.5.0.4, e, assim, representa um conjunto de rotações. Este fato pode ser comprovado observando que a função φ_q preserva comprimento, pois

$$\|\varphi_q(p)\| = \|qPq^{-1}\| = \|q\| \|P\| \|q^{-1}\| = \|P\| \frac{\|q\| \|\bar{q}\|}{q^2} = \|P\|$$

Além disso, φ_q é um homomorfismo

$$\varphi_q(P_1)\varphi_q(P_2) = qP_1q^{-1}qP_2q^{-1} = qP_1P_2q^{-1} = \varphi_q(P_1P_2)$$

Agora precisamos encontrar uma fórmula para que o quatérnio q seja correspondente a uma rotação através de um ângulo θ em torno do eixo A . Temos que $\varphi_a q = \varphi_q$ para qualquer escalar a diferente de zero, de modo a manter as coisas o mais simples possível, vamos preocupar-nos apenas com quatérnios unitários. Seja $q = s + v$ um quatérnio unitário, então $q^{-1} = s - v$. Dado um ponto P , temos

$$\begin{aligned} qPq^{-1} &= (s + v)P(s - v) \\ &= (-v \cdot P + sP + v \times P)(s - v) \\ &= -sv \cdot P + s^2P + sv \times P + (v \cdot P)v - sPv - (v \times P)v \\ &= s^2P + 2sv \times P + (v \cdot P)v - v \times P \times v \end{aligned}$$

Depois de aplicar o Teorema ??(f) ao produto $v \times P \times v$, temos

$$qPq^{-1} = (s^2 - v^2)P + 2sv \times P + 2(v \cdot P)v$$

Colocando $v = tA$, onde A é um vetor unitário, podemos escrever esta equação como

$$qPq^{-1} = (s^2 - t^2)P + 2stA \times P + 2t^2(A \cdot P)A$$

Quando comparamos esta fórmula para rotação em torno de um eixo arbitrário com a equação 7.3.0.2, podemos concluir as seguintes igualdades.

$$\begin{aligned} s^2 - t^2 &= \cos(\theta) \\ 2st &= \sin(\theta) \\ 2t &= 1 - \cos(\theta) \end{aligned}$$

A terceira igualdade nos dá

$$t = \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

A primeira e a terceira igualdade juntas nos dizem que $s^2 + t^2 = 1$, por isso, devemos ter $s = \cos(\frac{\theta}{2})$. De fato, como $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ verifica que a segunda igualdade é satisfeita por estes valores para s e t . Temos agora determinado que o quatérnio unitário q correspondente a uma rotação através do ângulo θ em torno do eixo A e além disso é dada pela seguinte equação:

$$q = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + A\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Observe que qualquer múltiplo escalar do quatérnio q , em particular $-q$ também representa a mesma rotação, pois

$$(aq)P(aq)^{-1} = aqP\frac{q^{-1}}{a} = qPq^{-1}$$

O produto de dois quatérnios q_1 e q_2 representa também uma rotação, especificamente o produto $q_1 q_2$ representa a rotação resultante da primeira rotação por q_2 e, em seguida, por q_1 .

Como

$$q_1(q_2Pq_2^{-1})q_1^{-1} = (q_1q_2)P(q_1q_2)^{-1}$$

podemos combinar muitos quatérnios de tal forma a produzir um único quatérnio representando toda a série de rotações. Multiplicando dois quatérnios juntos requeremos 16 operações multiplicação/adição, enquanto que a multiplicação de duas matrizes 3×3 juntas requer

27 operações. Assim, existe alguma eficiência computacional ao usar quatérnios em situações em que muitas rotações podem ser aplicadas a um objeto.

Como exemplo, suponha a rotação do ponto $P = (2, 0, 1)$ em um ângulo de 90° em torno do eixo z . Neste caso, deve-se usar o quatérnio

$$\begin{aligned} q &= \text{sen}\left(\frac{90^\circ}{2}\right) + \text{Acos}\left(\frac{90^\circ}{2}\right) \\ &= \text{sen}(45^\circ) + (0, 0, 1)\text{cos}(45^\circ) \end{aligned}$$

Observe que o quatérnio P não precisa ser unitário. Logo temos

$$qPq^{-1} = (\text{sen}(45^\circ) + (0, 0, 1)\text{cos}(45^\circ))(2, 0, 1)(\text{sen}(45^\circ) - (0, 0, 1)\text{cos}(45^\circ))$$

Uma outra forma de escrever um quatérnio $q = a + bi + cj + dk$ é $q = (a, (b, c, d))$, assim escrevendo $q = (\frac{\sqrt{2}}{2}, (0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}))$ temos que

$$\begin{aligned} qPq^{-1} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, (0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})\right)(2, 0, 1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, (0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})\right) \\ &= (0, (0, 2, 1)) \end{aligned}$$

Como resultado, obtem o quatérnio $q = (0, (0, 2, 1))$. Tomando-se apenas a parte imaginária, tem-se o ponto P' da rotação, isto é $P' = (0, 2, 1)$, como esperado.

7.6 Conversões entre Representações

7.6.1 Quatérnios para Matriz

Para representar a orientação é preciso restringir-se à subclasse dos quatérnios unitários, isto é, aqueles cuja norma é igual a 1.

$$|q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

Admitindo que a norma é unitária, temos que a matriz correspondente é

$$P' = \begin{bmatrix} 1 - 2c^2 - 2d^2 & 2bc + 2ad & 2bd - 2ab \\ 2bc - 2ad & 1 - 2b^2 - 2d^2 & 2bd + 2ab \\ 2bd + 2ab & 2bd - 2ab & 1 - 2b^2 - 2c^2 \end{bmatrix}$$

7.6.2 Matriz para Quatérnios

Uma maneira de obter um quatérnio através de uma matriz é usar combinações lineares das entradas. O algoritmo a seguir permite o computar todos componentes, dentro de

uma precisão ε estabelecida pela máquina:

$$a^2 = \frac{1}{4}(1 + M_{11} + M_{22} + M_{33})$$

se $a^2 > \varepsilon$ então

$$a = \sqrt{a^2} \quad b = \frac{M_{23} - M_{32}}{4a} \quad c = \frac{M_{31} - M_{13}}{4a} \quad d = \frac{M_{12} - M_{21}}{4a}$$

senão

$$a = 0 \quad b^2 = \frac{1}{2}(M_{22} + M_{33})$$

se $b^2 > \varepsilon$ então

$$b = \sqrt{b^2} \quad c = \frac{M_{12}}{2b} \quad d = \frac{M_{13}}{2b}$$

senão

$$b = 0; \quad c^2 = \frac{1}{2}(1 - M_{33})$$

se $c^2 > \varepsilon$ então

$$c = \sqrt{c^2}; \quad d = \frac{M_{23}}{2c}$$

senão

$$c = 0; \quad d = 1$$

fim se

fim se

fim se

7.6.3 Ângulos de Euler para Quatérnios

Há varias maneiras para se ter os eixos para os ângulos de Euler. A seguir, usaremos uma rotação genérica obtida girando um ângulo φ sobre o eixo k depois girando um ângulo θ sobre o eixo j e por fim girando um ângulo ψ sobre o eixo i . Primeiramente é preciso obter um quatérnio para cada rotação simples.

$$q_{i,\psi} = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)i$$

$$q_{j,\theta} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right>j$$

$$q_{k,\varphi} = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right>k$$

Multiplicando na ordem certa obtemos o resultado desejado:

$$a = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$b = \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$c = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$d = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

7.6.4 Das matrizes para o eixo-ângulo

Para cada rotação existe um único eixo e ângulo de rotação, isto é, cada rotação é definida pelo seu eixo e ângulo, que são únicos. Vamos ver, em primeiro lugar, como obter o eixo de rotação a partir da matriz de rotação. Para tal recorreremos à proposição que enunciamos em seguida.

Proposição 8. Uma rotação em $\mathbb{R}^3$ tem um único autovalor real, nomeadamente 1, associado à matriz dessa rotação.

Seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

uma matriz de rotação. Sabemos que existe um vetor v de $\mathbb{R}^3$ não nulo (qualquer um paralelo ao eixo de rotação), tal que

$$Av = v.$$

Donde resulta que

$$Av = v \Leftrightarrow Av - v = 0 \Leftrightarrow (A - I)v = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11} - 1)v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 = 0 \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - 1)v_2 + a_{23}v_3 = 0 \\ a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + (a_{33} - 1)v_3 = 0 \end{cases}$$

Para encontrar uma solução não trivial (que existe por 1 ser um autovalor) para este sistema homogêneo basta considerarmos $v_3 = 1$ e usar quaisquer duas equações para determinar v_1 e v_2 . Vamos substituir v_3 por 1 nas duas primeiras equações obtendo as seguintes

$$(a_{11} - 1)v_1 + a_{12}v_2 = -a_{13}$$

e

$$a_{21}v_1 + (a_{22} - 1)v_2 = -a_{23}$$

Em seguida, usamos a Regra de Cramer para resolver o sistema constituído por estas duas equações, obtendo assim os valores de v_1 e v_2 .

Calculemos, em primeiro lugar, o determinante da matriz abaixo, que corresponde à matriz associada ao sistema das duas equações anteriores,

$$\begin{pmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - 1 \end{pmatrix}$$

que vamos chamar de matriz B.

$$\det B = (a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{21}a_{12}.$$

Usando a Regra de Cramer obtemos

$$v_1 = \frac{-a_{13}(a_{22} - 1) + a_{23}a_{12}}{(a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{21}a_{12}}$$

$$v_2 = \frac{-a_{23}(a_{11} - 1) + a_{21}a_{13}}{(a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{21}a_{12}}$$

O vetor que representa a direção do eixo de rotação é o vetor

$$(v_1, v_2, 1)$$

ou o vetor

$$(v_1 \det B, v_2 \det B, \det B)$$

ou seja,

$$v = -a_{13}(a_{22} - 1) + a_{23}a_{12}, -a_{23}(a_{11} - 1) + a_{21}a_{13}, (a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{21}a_{12} \quad (7.6.4.1)$$

Seja A a matriz que representa a rotação em torno do eixo v segundo o ângulo ψ . Vamos escrever esta rotação como uma composição de rotações do referencial XYZ em torno dos seus eixos coordenados.

Na primeira rotação vamos rodar o referencial em torno do eixo dos Z' s de forma que o eixo dos X' s coincida com a projeção de ν sobre o plano XY . Vamos chamar de α o ângulo de rotação. Esta rotação (R_α^Z) corresponde à matriz $R_{z,\alpha}$.

Na segunda rotação vamos rodar o novo referencial em torno do novo eixo dos Y' s de modo que o novo eixo dos X' s coincida com o eixo ν ; seja β o ângulo de rotação. A matriz desta rotação é $R_{y,\beta}$.

Vamos representar o produto destas duas matrizes pela matriz $C = R_{y,\beta}R_{z,\alpha}$. Sabemos que C é uma matriz de rotação.

Na terceira rotação, vamos rodar o referencial obtido em torno do eixo ν , isto é, em torno do novo eixo dos X' s; com ângulo de rotação ψ . A correspondente matriz de rotação é

$$R_{c,\psi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$$

Na quarta e última rotação vamos rodar o referencial com uma rotação inversa da rotação representada pela matriz C , isto é, $C^{-1} = C^t$.

A composição destas rotações representa a rotação do referencial XYZ em torno de ν segundo o ângulo ψ , que representamos inicialmente pela matriz A , isto é,

$$A = C^t R_{\nu,\psi} C$$

Para obter o ângulo ψ vamos utilizar o seguinte resultado cuja prova é simples.

Proposição 10. Sejam A, B matrizes quadradas de mesma ordem, então

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

Usando o resultado anterior, temos que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A) &= \text{Tr}(C^t R_{\nu,\psi} C) \\ &= \text{Tr}((C^t R_{\nu,\psi}) C) \\ &= \text{Tr}(C(C^t R_{\nu,\psi})) \\ &= \text{Tr}(I R_{\nu,\psi}) \\ &= \text{Tr}(R_{\nu,\psi}) \end{aligned}$$

Note-se que C é ortogonal, e portanto $CC^t = I$. A partir de

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(R_{\nu,\psi}) = 1 + 2 \cos \psi$$

conclui-se que, o ângulo da rotação é

$$\psi = \arccos \left(\frac{\text{Tr}(A) - 1}{2} \right) \quad (7.6.4.2)$$

7.6.5 Quatérnios para Ângulo de Euler

Normalmente se converte de quatérnio para matriz e depois de matriz para ângulo de Euler. É desnecessário computar os elementos da matriz que não forem utilizados e esta conversão também é inevitável, mal condicionada, já que os quatérnios não contêm mais informações sobre os ângulos que as matrizes,

7.7 Uso de quaternions na aeronáutica

Vamos explorar quaternionicamente uma das sequências eixo-ângulo de Euler mais usada na ciência da navegação aérea. Vamos aplicar o teorema de Euler, já enunciado neste trabalho, e relacionar dois referenciais independentes (um posicionado na Terra e o outro no avião) através desta sequência.

Um dos instrumentos principais de vôo que se encontra no cockpit dos aviões corresponde ao "Heading and Attitude indicator" que dá ao piloto uma informação contínua do estado do avião relativamente a um local na superfície terrestre. Este aparelho relata em cada instante a orientação do referencial no avião para um referencial posicionado num local da Terra.

O referencial do avião xyz tem a sua origem no centro de gravidade do avião. A parte positiva do eixo dos x' s aponta para o nariz do avião ao longo do seu eixo longitudinal. O eixo dos y' s do avião tem a direção das asas e a parte positiva aponta para a asa direita. O eixo positivo dos z' s é normal aos eixos dos x' s e dos y' s, e aponta para baixo.

O referencial de referência na Terra XYZ tem origem, chamemos O , num local na superfície terrestre. O plano XY é o plano tangente à Terra sendo O o seu ponto de tangência. O eixo dos X' s aponta para o Norte e o eixo dos Y' s aponta para Leste. O eixo dos Z' s, normal ao plano XY , aponta para o interior da Terra.

De seguida, indicamos uma composição de três rotações (sequência eixo-ângulo de Euler zyx) que irão posicionar o referencial local XYZ com a mesma orientação do referencial xyz que está no avião.

A primeira rotação será em torno do eixo dos Z' s segundo um ângulo ψ , chamado de Heading. Após esta rotação o novo eixo dos X' s (X_1' s) ficará com a mesma direção da projeção do eixo dos x' s no plano XY , isto é, dá-nos o desvio relativamente ao Norte que o avião apresenta. Este ângulo também nos informa se o nariz do avião está virado para a direita ou para a esquerda relativamente ao Norte.

A segunda rotação será em torno do novo eixo dos Y' s (Y_1' s) segundo um ângulo θ , o ângulo Elevation. Após esta rotação o eixo dos X_1' s ficará com a mesma orientação do eixo dos x do avião. Este ângulo representa a inclinação do avião. Também nos informa se o nariz do avião está para cima ou para baixo, se está a subir ou a descer.

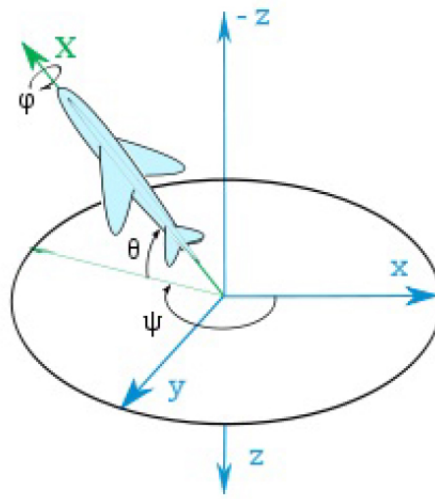
A terceira rotação será em torno do eixo dos X_1' s segundo um ângulo φ , o ângulo Bank. Após esta rotação o referencial de referência na Terra tem a mesma orientação que o referencial no avião. Este último ângulo dá-nos a torção que o avião apresenta e também nos informa se o avião está de cabeça para baixo.

A composição de rotações

$$R_\varphi^x \circ R_\theta^y \circ R_\psi^z$$

e os seus correspondentes ângulos de Euler relacionam o sistema de eixos coordenados do avião ao sistema de eixos coordenados de referência localizado na Terra.

Figura 7.2 – Ângulos: Heading ψ , Elevation θ , Bank φ



Fonte: http://en.wikipedia.org/wiki/Axes_conventions.

7.7.1 Análise matricial

Vamos começar por determinar a matriz composta que corresponde a uma matriz de rotação e que é obtida pelo produto das matrizes seguintes:

$$\begin{aligned}
 R &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta\sin\psi - \cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\sin\theta\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi\sin\theta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Esta matriz pode ser vista como uma única rotação em torno de algum eixo, em geral um eixo que não pertence aos eixos coordenados, que leva o referencial localizado na Terra no referencial do corpo (o avião, no nosso caso).

O ângulo δ da rotação composta representada pela matriz R é obtido através da fórmula 7.6.4.2

$$\cos \delta = \frac{\text{Tr}(R) - 1}{2}$$

isto é,

$$\cos \delta = \frac{\cos \theta \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \theta - 1}{2} \quad (7.7.1.1)$$

Usamos agora o resultado 7.6.4.1 para obter o eixo de rotação v da matriz R . Se

$$v = (v_1, v_2, v_3)$$

então,

$$\begin{aligned} v_1 &= -a_{13}(a_{22} - 1) + a_{23}a_{12} &= \sin \varphi \sin \psi + \sin \theta \cos \varphi \cos \psi - \sin \theta, \\ v_2 &= -a_{23}(a_{11} - 1) + a_{21}a_{13} &= -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta, \\ v_3 &= (a_{11} - 1) + (a_{22} - 1) - a_{21}a_{12} &= \cos \theta \cos \varphi - \cos \theta \cos \psi - \cos \varphi \cos \psi \\ & &\quad - \sin \varphi \sin \theta \sin \psi + 1 \end{aligned}$$

7.7.1.1 Análise quaterniônica

Seja $L_q = L_{q_{x,\varphi}} \circ L_{q_{y,\theta}} \circ L_{q_{z,\psi}}$ o operador quaterniônico de rotação correspondente à composição de rotações anteriormente introduzidas. Como sabemos

$$\begin{aligned} q_{z,\psi} &= \cos \frac{\psi}{2} + k \sin \frac{\psi}{2} \\ q_{y,\theta} &= \cos \frac{\theta}{2} + j \sin \frac{\theta}{2} \\ q_{x,\varphi} &= \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

Como temos uma composição de rotações dos eixos coordenados de um referencial, então, o operador quaterniônico L_q vai ser igual ao operador quaterniônico

$$L_{q_{z,\psi} q_{y,\theta} q_{x,\varphi}},$$

isto é, o produto quaterniônico apropriado para representar a composta é dado por

$$q = q_{z,\psi} q_{y,\theta} q_{x,\varphi} = q_0 + i q_1 + j q_2 + k q_3$$

onde, após os cálculos efetuados, obtemos

$$q_0 = \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2},$$

$$q_1 = \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2},$$

$$q_2 = \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2}$$

e

$$q_3 = \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2}$$

Se o ângulo da rotação composta é δ , então a partir do produto quaterniônico sabemos que

$$\cos \frac{\delta}{2} = q_0 = \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \quad (7.7.1.2)$$

Note-se que as equações 7.7.1.1 e 7.7.1.2 são equivalentes. Para ver que assim é, basta efetuar alguns cálculos e utilizar as fórmulas trigonométricas $\cos \delta = 2 \cos^2 \frac{\delta}{2} - 1$ e $\cos \delta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2}$ eixo de rotação é dado pelo vetor

$$v' = (q_1, q_2, q_3)$$

É de enfatizar a facilidade com que obtivemos o ângulo e o eixo da rotação usando os quaterniões.

7.7.2 Gimbal lock

Quando se utiliza uma sequência eixo-ângulo de Euler pode ocorrer a situação que se designa por Gimbal lock, também conhecida por bloqueio de Cardano. Um Gimbal é um dispositivo análogo a um giroscópio, sendo formado por três anéis, ou arcos, que se podem movimentar livremente em torno de um eixo, sendo cada um desses anéis, eles próprios, também designados por gimbals.

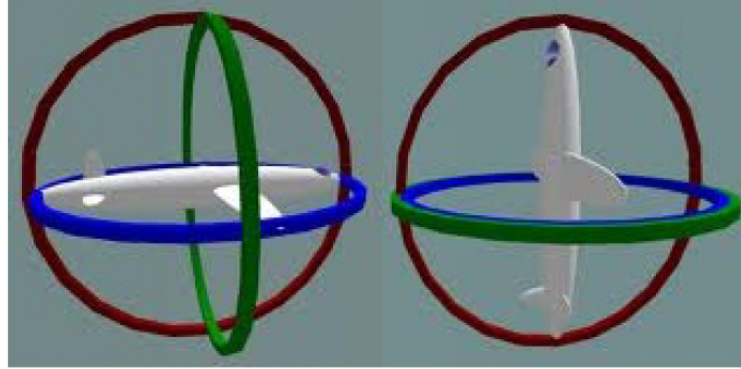
Se xyz for um referencial ortonormado com origem no centro de gravidade de um objeto, podemos fazer corresponder a cada eixo um gimbal. Os gimbal correspondente ao eixo z representa um arco centrado na origem do referencial e contido no plano xy . Do mesmo modo, os gimbais correspondentes aos eixos y e x representam os arcos centrados na origem do referencial contidos nos planos xz e yz , respetivamente.

É de notar que, na composta de rotações zyx de ângulos de Euler apresentada anteriormente, quando se dá a primeira rotação, R_ψ^z , todos os gimbals se movem. Quando se efetua a segunda rotação, R_θ^y , os gimbals dos eixos y e x rodam. Mas, com a terceira rotação, R_φ^x , apenas roda o gimbal deste eixo.

O dispositivo Gimbal é usado, por exemplo, nos aviões para dar a informação ao piloto da orientação do avião relativamente ao solo. O efeito Gimbal Lock ocorre quando o avião roda em torno do eixo y segundo o ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$, isto é, quando o avião aponta para cima 7.3. Nesta altura os eixos x e z ficam sobrepostos mas com sentidos diferentes, representando o mesmo eixo e os seus gimbals coincidem perdendo-se assim um grau de liberdade. É de reparar que o gimbal do eixo x movimentou-se até o gimbal do eixo z que se encontrava estático até ficarem contidos no mesmo plano.

Neste instante o sistema bloqueia, isto é, produz o mesmo efeito quando um objeto roda em torno dos eixos x e z .

Figura 7.3 – Gimbal lock



Fonte: <http://kyruie.tistory.com/8>.

Vamos estudar matricialmente o efeito Gimbal Lock e notar que, de fato, se perde um grau de liberdade.

Como $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ temos que

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \sin(\varphi - \psi) & \cos(\varphi - \psi) & 0 \\ \cos(\varphi - \psi) & -\sin(\varphi - \psi) & 0 \end{pmatrix}$$

representa a matriz composta. Como se nota, esta matriz depende apenas dos ângulos φ e ψ . É de salientar, mais uma vez, que o movimento do avião quando roda segundo o eixo x (Roll), apesar de mover apenas o seu gimbal, realiza o mesmo movimento como quando o rodamos segundo o eixo z (Yaw), mas que neste caso move todos os gimbals associados a cada um dos eixos. Note-se, por isso, que como os eixos x e z têm sentidos contrários que a matriz composta é a mesma quando os ângulos φ e ψ são simétricos. Isto é, se $\varphi = -\psi$, então

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \sin(\varphi - \psi) & \cos(\varphi - \psi) & 0 \\ \cos(\varphi - \psi) & -\sin(\varphi - \psi) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \sin(-2\psi) & \cos(-2\psi) & 0 \\ \cos(-2\psi) & -\sin(-2\psi) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\sin(2\psi) & \cos(2\psi) & 0 \\ \cos(2\psi) & \sin(2\psi) & 0 \end{pmatrix}$$

verificando-se que a matriz composta é a mesma, ou seja, o movimento do avião é exatamente o mesmo.

Aqui foi apenas explorado o caso de $\theta = \frac{\pi}{2}$ mas é evidente que este fenómeno também ocorre quando temos o avião com o nariz apontado para baixo, isto é, quando temos $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Para evitar o efeito gimbal lock basta não aproximar o avião destes ângulos críticos.

Um conhecido incidente onde esta situação aconteceu foi na missão à Lua da Apollo. Um modo de remediar situações como estas seria introduzir um quarto gimbal, mas David Hoag (diretor de desenho técnico do laboratório Apollo), quando questionado sobre o assunto afirmou:

The advantages of the redundant gimbal seem to be outweighed by the equipment simplicity, size advantages, and corresponding implied reliability of the direct three degree of freedom unit.

Os engenheiros desta missão conscientes de que este problema poderia ocorrer optaram por usar um indicador que seria acionado perto da inclinação de 85 graus. Paul Fjeld explicou que o computador avisou do perigo de ocorrer gimbal lock aos 70 graus e que desligou o IMU - Inertial Measurement Unit aos 85 graus. Este aparelho eletrónico mede e dá a informação da velocidade, orientação e das forças gravitacionais da aeronave.

A partir daquele ponto a nave espacial teve que ser afastada da posição gimbal lock manualmente e a plataforma também foi alinhada manualmente utilizando como referência as estrelas. Depois da aterragem do modulo lunar, astronauta Mike Collins a bordo do Módulo de Comando, brincou ao dizer "How about sending me a fourth gimbal for Christmas?"

Outra solução para evitar estas situações passa por utilizar os quatérnios unitários. De fato, qualquer quatérnio unitário está associado a um operador de rotação representando uma rotação em 3D de um determinado ângulo, seja α , em torno de um eixo com a direção de um vetor normalizado, por exemplo, $u = (u_1, u_2, u_3)$ sendo representado por

$$q = \cos \frac{\alpha}{2}, u_1 = \sin \frac{\alpha}{2}, u_2 = \sin \frac{\alpha}{2}, u_3 = \sin \frac{\alpha}{2}$$

Intuitivamente, se entende que um quatérnio descreve a rotação com um único movimento.

Esta é uma das vantagens de se utilizar quatérnios em comparação com os três movimentos que são necessários realizar pelas três rotações sucessivas de ângulos de Euler. Os ângulos de Euler são, por isso, usados na representação de rotações que são adequadamente restringidas a um determinado domínio (KORN; KORN, 1999, p.478)

7.8 Transformação de lorentz

Há um outro tipo de rotação, as Transformações de Lorentz, da relatividade especial que relacionam referenciais inerciais. Geometricamente, tais transformações preservam uma distância generalizada, o quadrado do intervalo entre os eventos espaço-tempo. Assim, em duas dimensões, considere o vetor

$$v = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}.$$

que representa um evento de espaço-tempo ocorrendo em um tempo t e uma posição x . O quadrado da magnitude de v é definida por

$$|v|^2 = x^2 - t^2$$

e representa o quadrado do espaço-tempo do intervalo entre o ponto (t, x) e a origem. Podemos reescrever então em linguagem de matriz através da introdução da métrica g , que aqui assume a forma

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

logo temos

$$|v|^2 = v^T g v. \quad (7.8.0.1)$$

Tal como acontece com rotações comuns, podemos agora procurar estas transformações lineares que preservam a magnitude de v , isto é

$$v^T v = (Mv)^T g (Mv) = v^T M^T g M v$$

para todo $v \in \mathbb{R}^2$, o que só pode ser verdade se,

$$M^T g M = g$$

Tal como acontece com rotações comuns, devemos ter $\det A = \pm 1$. Vamos considerar apenas o caso em que $\det A = \pm 1$. Podemos, portanto definir a rotação generalizada do grupo $SO(p, q)$ por

$$SO(p, q) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n}; A^t g A = g, \det(A) = 1\}$$

Assim podemos escrever

$$SO(1, 1) = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}; A^t g A = g, \det(A) = 1\}$$

O elemento mais geral de $SO(1,1)$ assume a forma

$$A = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) \\ \sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{pmatrix}.$$

representando um impulso na direção x , ou seja, uma Transformação de Lorentz a partir do repouso e movendo para a direita com velocidade $\tanh(\alpha)$.

7.8.0.1 A geometria de $SO(3,1)$

O mundo à nossa volta parece ter três direções independentes, ou seja, Nascente/Poente, Norte/Sul e para cima/baixo. A relatividade especial nos diz para incluir o tempo; agora temos uma quarta "direção", ou seja para o futuro/passado. É costume rotular essas direções pelas coordenadas (t, x, y, z) . Um vetor espaço-tempo é uma componente da seguinte forma

$$g = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

O produto interno sobre esse espaço de Minkowski 4-dimensional é dado por 7.8.0.1, onde agora

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

que resulta em

$$|v|^2 = v^t g v = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

que também é chamado de o quadrado do intervalo entre o evento (t, x, y, z) e a origem.

O grupo de Lorentz de 3 + 1 dimensões do espaço-tempo é dado por

$$SO(3,1) = \{A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}; A^t g A = g, \det(A) = 1\}.$$

Como antes, temos as rotações

$$R_{yz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

$$R_{zx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & 0 & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

$$R_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

correspondente as rotações nos planos yz, zx e xy , respectivamente. Mas também temos as transformações de Lorentz dadas por

$$R_{tx} = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) & 0 & 0 \\ \sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$R_{ty} = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & 0 & \sinh(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh(\alpha) & 0 & \cosh(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$R_{tz} = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & 0 & 0 & \sinh(\alpha) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sinh(\alpha) & 0 & 0 & \cosh(\alpha) \end{pmatrix}.$$

correspondente as rotações hiperbólicas nos planos tx, ty e tz , respectivamente, que são também chamados impulsos nas direções x, y , e z , respectivamente. Qualquer elemento do grupo de Lorentz pode ser obtido como um produto destes seis geradores (com parâmetros adequados). Nem todos os elementos de $SO(3, 1)$ corresponde a uma rotação ou impulso num único plano. Mas existem também elementos de $SO(3, 1)$ que não correspondem a rotações ou impulsos em qualquer plano.

Tanto a rotação R_{xy} e os impulsos R_{tx} e R_{ty} deixam a direção z fixa; esta rotação também fixa a "direção" t , enquanto os impulsos fixam as direções do espaço y e x , respectivamente. Mas considere a matriz

$$N = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\alpha^2}{2} & \alpha & -\frac{\alpha^2}{2} & 0 \\ \alpha & 1 & -\alpha & 0 \\ \frac{\alpha^2}{2} & \alpha & -\frac{\alpha^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3, 1),$$

a qual fixa a direção z . O que mais faz essa transformação deixa fixo? N fixa (anula) a direção $y = t$, é uma rotação nula.

7.9 Aplicações no Ensino Médio-Quatérnios na física

A aplicação a seguir é baseada no artigo (FOSSÁ, 2012). Podemos definir um quatérnio posição no espaço-tempo na forma geral como:

$$q = \frac{c}{\gamma}t + xi + yj + zk$$

onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, sendo v a velocidade do referencial e c a velocidade da luz no vácuo, colocando $V_t = \frac{c}{\gamma}$ o produto de um quatérnio pelo seu conjugado é dado por

$$q\bar{q} = V_t^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

que representa o hiperraio dessa hiperesfera. Vamos supor $y = z = 0$ e considerar apenas uma situação plana em que o hiperraio se reduz a

$$|q|^2 = V_t^2 t^2 + x^2 \quad (7.9.0.1)$$

o que equivale a circunferência de raio $|q|$, assim podemos usar

$$\begin{cases} V_t t = |q| \cos \theta \\ x = |q| \sin \theta \end{cases} \quad (7.9.0.2)$$

e por 7.9.0.2 e 7.9.0.1 temos que

$$2t^2 = q^2 - x^2 \Rightarrow |q|^2 = \frac{|q|^2}{\cos^2 \theta} - \frac{|q|^2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \quad (7.9.0.3)$$

o que na Relatividade garante a invariância da velocidade da luz no vácuo.

Uns dos possíveis referenciais temos o referencial próprio, ou seja, suponha um carro com o motorista em repouso por um tempo indeterminado, neste caso consideremos o carro como referencial próprio do motorista, pois todos os objetos dentro do carro permanecem em repouso em relação ao motorista. Assim a única variável que muda é o tempo T . Em um certo instante o motorista olha pela janela um outro carro em movimento, isto é, um segundo referencial com tempo t e coordenadas $x, y = 0$ e $z = 0$ e com velocidade v em relação ao seu carro. Sem perda de generalidade iremos considerar a velocidade v na direção de x .

Como o carro pode ser considerado em repouso e todo movimento está no segundo carro, pela Relatividade temos que

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 T^2$$

relação que pode ser solucionada pelas transformações de Lorentz chegando à seguinte transformação:

$$\begin{cases} ct = \frac{cT}{\alpha} \\ x = -\frac{\beta cT}{\alpha} \end{cases} \quad (7.9.0.4)$$

então

$$\begin{cases} \alpha ct = cT \\ x = -\beta ct \end{cases} \quad (7.9.0.5)$$

no qual $\beta = \frac{v}{c}$ e $\alpha = \sqrt{1 - \beta^2}$.

Suponhamos em 7.9.0.4 e 7.9.0.5 que $\beta = \sin\theta$, $\alpha = \cos\theta$ e $|q| = ct$ então temos a identidade 7.9.0.3, assim podemos considerar a velocidade v_t como:

$$v_t = c\alpha$$

o que nos da

$$q = \frac{c}{\gamma} t + xi + yj + zk.$$

Capítulo 8

Conclusão

O interesse que motiva a construção deste trabalho parte da observação sempre constante das aplicações das álgebras de Cayley-Dickson nos conteúdos do ensino médio, neste caso específico buscamos enfatizar as aplicações no que tangem temas físicos aplicados à aeronáutica. Neste trabalho relatamos as bases históricas do ponto de vista formal, que deram origem as definições das operações, as quais são apresentadas de forma pragmática nos livros didáticos dos cursos em ciências exatas, embora o foco central tenha sido nas definições da álgebra. Ao realizarmos pesquisas aprofundados sobre o tema, e nos embasarmos nos autores clássicos do tema [Dray e Manogue \(1999\)](#), observamos que os sistemas numéricos que permitem as operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão concomitantemente são os Reais, Complexos, Quatérnios e os Octônios. Citamos certas inconveniências inerentes da álgebra dos complexos quando aplicamos o método de Cayley-Dickson para além da 8-dimensão (Octônios), e perdemos a propriedade da divisão para o grupo algébrico pesquisado, o que não nos garante a perda desta propriedade se nos aventurarmos a usar outras álgebras. Mantendo o foco na pesquisa, observamos ainda as possibilidades de representar esses conjuntos com todas as suas álgebras e geometria e verificamos que estas propriedades tem muitas aplicações práticas nos mais diversos campos do saber.

Como vimos nosso principal foco se deu na teoria da relatividade aplicada ao ensino médio. Esta nos auxilia a resolver um estado do sistema no qual o senso comum não consegue compreender o que de fato está ocorrendo da Teoria original de Einstein. Mas sua utilização em pesquisa ainda é muito pouco usada, pois existem muitas controversas. Quando estudamos esse tema a nível de ensino médio, a geometria esférica, operações e rotações tornam os quatérnios uma solução mais intuitiva para o ensino de Física Moderna. Quando estudamos o tema observamos que num momento inicial o assunto parece muito distante dos temas tratados na educação básica, mas sempre que aprofundamos em determinados assuntos conseguimos compreender a real importância de, ao usar um tema complexo, visualizar todas as suas potencialidades aplicativas. No caso deste trabalho, compreender a teoria da relatividade faz mais sentido ao usarmos os quaternions como elemento mate-

mático. Quanto as operações aritméticas na construção de Cayley-Dickson, vimos que nas aplicações aeronáuticas a utilização da álgebra matricial é de suma importância, juntamente com as suas diversas propriedades, para a compreensão do usos dos quaternions e octônios. A conclusão mais óbvia que podemos notar ao realizar a pesquisa foi sem dúvidas, que por mais abstrato que um tema possa parecer ele sempre terá aplicações a serem observadas. Poder contribuir para que este tema possa chegar ao nível de ser discutido na educação básica é motivo mais que suficiente para dizer que vale a pena todo os esforço.

REFERÊNCIAS

ADAMS, J. F. On the nonexistence of elements of hopf invariant one. *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 64, p. 279–282, 1958. Citado na página 32.

_____. On the non-existence of elements of hopf invariant one. *Ann. of Math*, v. 72, p. 20–104, 1960. Citado na página 32.

BAEZ, J. C. The octonions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, n. 39, p. 145–205, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 25, 32 e 65.

BAUMGART, J. K. *Tópicos da história da matemática para uso em sala de aula*. São Paulo: Atual Editora, 1994. Citado na página 37.

BOTT, R.; MILNOR, J. On the parallelizability of the spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 64, p. 87–89, 1958. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher, 1981. Citado na página 37.

CHEVALLEY, C.; SCHAFER, R. D. The exceptional simple lie algebras f_4 and e_6 . *Proc. Nat. Acad. Sci.*, v. 36, p. 137–141, 1950. Citado na página 68.

DION, S. M.; PACCA, J. L. de A.; MACHADO, N. J. Quaternions: sucesso e insucessos de um projeto de pesquisa. *Estudos Avançados*, v. 9, n. 25, p. 251–262, 1995. Citado na página 22.

DRAY, T.; MANOGUE, C. A. Octonionic mobius transformations. *Mod. Phys. Lett.*, v. 14, p. 1243–1256, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 97.

_____. *The geometry of the octonions*. New Jersey: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2015. Citado 4 vezes nas páginas 21, 22, 25 e 59.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. São Paulo: Editora da Unicamp, 2011. Citado na página 48.

FOSSÁ, O. A. Ensino de quaternions no ensino médio. In: X ENCONTRO DE LICENCIATURA EM FÍSICA, 2012, Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2012. Citado na página 94.

GARBI, G. G. *Romance das equações algébricas*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010. Citado na página 37.

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. *Elementos de álgebra*. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2008. Citado na página 25.

HURWITZ, A. Ueber die composition der quadratischen formen von beliebig vielen variablen. *Nachr. Königl. Gesell. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Klasse*, p. 309–316, 1898. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 33.

KERVAIRE, M. Non-parallelizability of the n sphere for $n > 7$. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, v. 44, p. 280–283, 1958. Citado na página 33.

KOLMAN, B.; HILL, D. R. *Introdução à álgebra linear com aplicações*. Rio de Janeiro: LTC, 2006. Citado na página 27.

KORN, G. A.; KORN, T. M. *Mathematical, Handbook for Cientists and Engineers*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1999. 478 p. Citado na página 90.

LENGYEL, E. *Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics*. Boston: Course Technology - Cengage Learning, 2012. Nenhuma citação no texto.

LIMA, L. F. *Grupos de simetria I*. 78 p. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso A) — Universidade Federal de São Carlos, São Paulo, 2011. Citado na página 25.

LIMA, L. F. *Grupos de simetria II*. 66 p. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso B) — Universidade Federal de São Carlos, São Paulo, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 29.

LOHMUS, J.; PAAL, E.; SORGSEPP, L. *Nonassociative Algebras in Physics*. Palm Harbor, Florida: Hadronic Press, 1994. Citado na página 68.

MARINHO, A. M. L. T. G. *Os quaterniões e suas aplicações*. 140 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade de Lisboa, Lisboa, 2012. Citado na página 71.

MILIES, C. P. A emergência dos números complexos. *Revista do Professor de Matemática*, v. 24, n. 2, p. 5–15, 1993. Citado 4 vezes nas páginas 35, 37, 38 e 47.

MISHCHENKO, A.; SOLOVYOV, Y. Quaternions. *Quantum*, v. 11, p. 4–7, 2000. Citado na página 31.

ROQUE, T. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor Ltda, 2012. Citado na página 36.

ROSA, M. S. *Números complexos: uma abordagem histórica para aquisição do conceito*. 170 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 37.

SANTOS, M. A. dos. *Dos números complexos aos quatérnions: desenvolvimento algébrico, interpretação geométrico e aplicações*. 100 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 35, 38, 51, 52 e 72.

SCHAFER, R. D. *Introduction to Non-Associative Algebras*. New York: Dover, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.

STEWART, I. *Uma história da simetria na Matemática*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor Ltda, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.

VAZ, J. *O que é geometria não comutativa*. 2000. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/vaz/nc.htm>>. Citado na página 51.

WAERDEN, B. L. V. der. Hamilton's discovery of quaternions. *Math Magazine*, v. 49, p. 227–234, 1976. Citado na página 48.

ZORN, M. Theorie der alternativen ringe. *Abh. Math. Sem.*, v. 8, p. 123–147, 1930. Citado na página 33.