UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Sérgio Joaquim da Silva

DINÂMICA DE MÁQUINAS ROTATIVAS:
UM INSTRUMENTO DE APRENDIZAGEM NO ENSINO MÉDIO

CATALÃO-GO

2019

sistema de bibliotecas ufg

PRPG
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Sérgio Joaquim da Silva

Título do trabalho: Dinâmica de Máquinas Rotativas: Um Instrumento de Aprendizagem no Ensino Médio

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Sérgio Joaquim da Silva
Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Fernando Kennedy da Silva
Assinatura do(a) orientador(a)[2] Data:12 / 06 / 2019

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Versão atualizada em setembro de 2017.

SÉRGIO JOAQUIM DA SILVA

DINÂMICA DE MÁQUINAS ROTATIVAS:
UM INSTRUMENTO DE APRENDIZAGEM NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.
Orientador: Dr. Fernando Kennedy da Silva

CATALÃO-GO

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Silva, Sérgio Joaquim da
Dinâmica de Máquinas Rotativas [manuscrito] : Um Instrumento de Aprendizagem no Ensino Médio / Sérgio Joaquim da Silva. - 2019.
LXVI, 66 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Kennedy da Silva.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Catalão, 2019.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Modelagem Matemática. 2. Dinâmica de Máquinas Rotativas. 3. Ensino Médio. I. Silva, Fernando Kennedy da, orient. II. Título.

CDU 373.5

Universidade Federal de Goiás - UFG
Regional Catalão
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia
Mestrado Profissional em Matemática

Defesa N° 30

Ata de Defesa - avaliação da Dissertação

Em 22 de maio de 2019, às 14 h 15 min, reuniram-se os componentes da banca examinadora, professores(as) Dr. Fernando Kennedy da Silva (orientador), Dr. Plínio José Oliveira, Dr. Tobias Anderson Guimarães para, em sessão pública realizada no Bloco J – Sala 11, da Regional Catalão (RC), da Universidade Federal de Goiás (UFG), procederem a avaliação da Dissertação intitulado(a) "Dinâmica de Máquinas Rotativas: Um Instrumento de Aprendizagem no Ensino Médio", de autoria de Sérgio Joaquim da Silva, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo(a) presidente, que fez a apresentação formal dos membros da banca. Em seguida, a palavra foi concedida ao(à) discente que, em 25 min procedeu a apresentação. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o(a) examinando(a). Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da Dissertação, que foi considerado(a): **(X) Aprovado(a) ou ( ) Reprovado(a)**. Cumpridas as formalidades de pauta, às 15 h 20 min a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu Fernando Kennedy da Silva, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo(a) discente.

Fernando Kennedy da Silva

Dr. Fernando Kennedy da Silva
UFG/UAE de Matemática e Tecnologia – Catalão
Presidente da Banca

Plínio José Oliveira.

Dr. Plínio José Oliveira
UFG/UAE de Matemática e Tecnologia – Catalão

Tobias

Dr. Tobias Anderson Guimarães
UFTM / Engenharia Mecânica – Uberaba

Sérgio Joaquim da Silva

Sérgio Joaquim da Silva
Discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/RC/UFG

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus Pai que me sustenta em todos momentos da minha vida.

A minha esposa, Adriana, que está sempre me ajudando e cuidando de mim e dos meus filhos.

Aos meus filhos, Rafaela e Murilo, por cada momento divertido que passamos juntos.

Ao professor, Fernando Kennedy da Silva, o orientador desse trabalho que, com muita dedicação e paciência, contribui de maneira decisiva me incentivando, corrigindo e me ajudando a melhorar.

Aos professores do PROFMAT, Plínio José de Oliveira, Márcio, Donald Santee, Porfírio Júnior, Paulo Bergamaschi, Romes Antônio Borges, Thiago Queiroz, Juliana Borges, Élida Alves, pela dedicação, paciência e aprendizado proporcionados.

Aos meus colegas de turma pelo companheirismo nos bons momentos e nos mais difíceis onde foram fundamentais com grandes contribuições.

E a CAPES pelo suporte financeiro que foi muito importante.

RESUMO

SILVA, S. J.. *Dinâmica de Máquinas Rotativas: Um Instrumento de Aprendizagem no Ensino Médio*. 2019. 65 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás, Catalão-GO.

Neste trabalho, faz-se uma abordagem da Modelagem na Educação Matemática. A Modelagem ainda não chegou significativamente as escolas, provavelmente porque muitos educadores têm dificuldades para justificar a utilização da Matemática ensinada, ou ainda porque têm pouco tempo para preparação das aulas. Além da formação precária, existem poucos materiais voltado para o Ensino Básico (Ensino Médio). Esta dissertação, tem-se a pretensão de produzir um material que possa minimizar esta necessidade. Para tanto, faz-se uma abordagem sobre a História das Máquinas Rotativas, tomando como princípio a origem da roda, desde a idade da pedra, onde figura a Roda de Potter's de 3500 aC. Mostra-se sua utilização nas máquinas de guerra em todo antigo Império Romano e chega-se até a construção de primeira Turbina de Reação Aelopile de Hero. Com o avanço da ciência da época, tem-se a construção das Rodas de Água, provavelmente as primeiras ferramentas implementadas pela humanidade para esmagar sementes, e relata-se grandes cientistas como Euler e Bernoulli e Joseph Lagrange, que fez grandes contribuições durante a revolução científica, e assim culmina-se com a invenção da Primeira Turbina de Parson. A História da Máquina Rotativa, facilita o entendimento de suas funcionalidades. Fez-se uma fundamentação teórica das Equações Diferenciais Ordinárias, em que se utiliza-se equações lineares homogênea com coeficientes constantes, onde sua solução é baseada em funções e equações amplamente conhecidas no Ensino Médio (Equações do Segundo Grau, Funções Polinomiais, Funções Trigonométricas e Funções Exponenciais). Com base na Lei de Hooke e na Segunda Lei de Newton, mostra-se o mais simples dos sistemas vibratórios e os tipos de movimentos. Em dinâmica de rotores, defini-se o rotor, seus elementos e o tipo de movimento utilizando para isso o Modelo Jeffcott, muito útil para se estabelecer conceitos e definições. Busca-se, ainda, entender o significado físico das soluções com suas análises gráficas.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Dinâmica de Máquinas Rotativas, Ensino Médio .
.

ABSTRACT

SILVA, S. J.. *Rotordynamics: An Instrument of Learning in High School.* 2019. 65 f. Master Thesis in Mathematic – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás, Catalão-GO.

In this work, a modeling approach in Mathematics Education is made. Modeling has not yet arrived significantly the schools, probably because many educators have difficulty justifying the use of mathematics taught, or because they have little time for class preparation. In addition to precarious training, there are few materials the Basic Education (High School). This dissertation intends to produce a material that can minimize this need. Therefore, an approach is made on the History of Rotary Machines, taking as a principle the origin of the wheel, from the age of the stone, where it appears the Wheel of Potter's of 3500 BC. Its use in war machines is shown in all the old Roman Empire and arrives until the construction of first Turbine of Aelopile Reaction of Hero. With the advancement of the science of the time, we have the construction of Water Wheels, probably the first tools implemented by mankind to crush seeds, and reports great scientists such as Euler and Bernoulli and Joseph Lagrange, who made great contributions during the scientific revolution, and thus culminates in the invention of First Parson Turbine. The History of the Rotating Machine, facilitates the understanding of its functionalities. There was a theoretical basis of the Ordinary Differential Equations, in which homogeneous linear equations with coefficients are used constants, where its solution is based on functions and equations widely known in High School (Equations of the Second Degree, Polynomial Functions, Trigonometric Functions, and Exponential Functions). Based on Hooke's Law and in the Second Newton Law, it is shown the simplest of vibratory systems and types of movements. In rotor dynamics, the rotor was defined, its elements and the type of movement using the Jeffcott Model, very useful for establishing concepts and definitions. It also seeks to understand the physical meaning of the solutions with their graphical analysis.

Keywords: Mathematical Modeling. Rotordynamics. High School.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Movimentação Utilizando Troncos de Árvores . . . 21
Figura 2 – Roda de Potter's de 3500 aC . . . 22
Figura 3 – A roda Colocada em uso para Movimento . . . 23
Figura 4 – Aelopile de Hero . . . 24
Figura 5 – Moinho de Farinha em Barbegal . . . 26
Figura 6 – O Primeiro Motor de Pistão . . . 30
Figura 7 – Primeira Turbina de Parson . . . 32
Figura 8 – Dynamo Jumbo de Edison . . . 33
Figura 9 – Motor de Hans Von Ohain (esquerda) e o Motor de Frank Whittle (direita) . 34
Figura 10 – Motor GE-90 . . . 34
Figura 11 – Eventos Mais Importantes na História das Máquinas Rotativas . . . 35
Figura 12 – Alguns Exemplos Específicos de $g(t)$ . . . 41
Figura 13 – Sistema Massa-Mola . . . 42
Figura 14 – Relação entre $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ e ângulo de fase ϕ . . . 45
Figura 15 – Movimento Harmônico Simples . . . 46
Figura 16 – Dispositivo de amortecimento . . . 47
Figura 17 – Movimento de um sistema superamortecido . . . 48
Figura 18 – Movimento de um sistema criticamente amortecido . . . 49
Figura 19 – Movimento de um sistema subamortecido . . . 49
Figura 20 – Movimento oscilatório vertical do suporte . . . 50
Figura 21 – Gráfico das soluções . . . 52
Figura 22 – Ressonância Pura . . . 54
Figura 23 – Rotor Flexível . . . 55
Figura 24 – Precessão Direta e Inversa . . . 56
Figura 25 – Comparação da rigidez dos mancais e rigidez da flexão do eixo . . . 57
Figura 26 – Rotor em Repouso e girando com velocidade Ω . . . 57
Figura 27 – Rotor de Jeffcott em coordenadas cartesianas . . . 58
Figura 28 – Rotor de Jeffcott realizando uma precessão . . . 60
Figura 29 – Resposta à um desbalanceamento do Rotor Jeffcott 1 . . . 60

Figura 30 – Resposta à um desbalanceamento do Rotor Jeffcott 2 61

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 12

2 A IMPORTÂNCIA DA APLICABILIDADE DA MATEMÁTICA 15
2.1 Modelos e Sistemas Vibratórios 15
2.2 Identificação de Sistemas Mecânicos 17
2.3 Máquinas Rotativas 18

3 HISTÓRIA DAS MÁQUINAS ROTATIVAS 21
3.1 Início da Roda 21
3.2 Ciência Antes do Período Medieval 23
3.3 Rodas de Água 25
3.3.1 Moinhos de Vento 27
3.4 Renovação e Revolução Científica 27
3.5 Engenheiros Renascentistas 29
3.6 Revolução Industrial 30
3.6.1 Máquinas Turbo 31

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRIA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS 37
4.1 Equações Lineares Homogêneas Com Coeficiente Constantes 37
4.1.1 Raízes reais e distintas: 38
4.1.2 Raízes reais e iguais 38
4.1.3 Raízes complexas conjugadas 38
4.2 Duas Equações que Vale a Pena Conhecer 39
4.3 Coeficiente a Determinar 40
4.4 Sistema Massa-Mola 41
4.4.1 Lei de Hooke 41
4.4.2 Segunda Lei de Newton 41
4.4.3 Equação Diferencial do Movimento Livre Não-Amortecido 42
4.4.4 Solução e Equação do Movimento 42
4.4.5 Forma Alternativa de $x(t)$ 44
4.4.5.1 Interpretação Gráfica 45
4.4.5.2 Movimento Livre Amortecido 46
4.4.5.3 Equação Diferencial do Movimento Livre Amortecido 47

4.4.6 Movimento Forçado 50
4.4.6.1 Equação diferencial do movimento forçado com amortecimento 50
4.4.6.2 Termos transientes (transitórios) e estacionários 51
4.4.6.3 Equação diferencial de um movimento forçado não amortecido 52
4.4.6.4 Ressonância Pura 53

5 DINÂMICA DE ROTORES 55
5.1 Introdução 55
5.2 Movimento de um Sistema Rotativo 56
5.3 Modelo Massa-Mola 56
5.3.1 O Rotor de Jeffcott 57
5.4 Analise do modelo Jeffcott rotor 59
5.4.1 Significado físico das soluções 60

6 CONCLUSÃO 62

REFERÊNCIAS 63

Capítulo 1

Introdução

A modelagem matemática de um problema real consiste essencialmente no trabalho de descrevê-lo numa linguagem matemática e, posteriormente, resolvê-lo, interpretando sua solução numa linguagem compatível com a do mundo real (BARROS; BASSANEZI, 2006). É uma ferramenta de fundamental importância para entender e analisar a natureza de sistemas complexos reais.

A abordagem de um fenômeno real passa pelo processo de entendimento e pela definição da forma mais precisa possível, com a escolha das informações necessárias. A transposição deste para um problema, numa linguagem matemática adequada contribui para a compreensão, o equacionamento, a simulação e a resolução do mesmo.

Nesse sentido, é de grande importância captar quais aspectos de um problema seria mais relevantes para serem considerados num modelo matemático, bem como saber as suas limitações decorrentes das simplificações, já que alguns aspectos serão omitidos durante o processo de modelagem. Mesmo porque, pode-se considerar um modelo matemático adequado e eficiente, quando ele for capaz de produzir soluções geradas em tempos computacionais, aceitáveis e suficientemente próximos de valores reais para situações conhecidas, estimadas ou previstas.

Assim, quando na resolução de um problema real, se ocorrer que a formulação matemática correspondente não conduzir a um resultado aceitável, ou a uma situação em que não se consegue obter uma solução compatível com a situação real do problema, deve-se aperfeiçoá-lo, enriquecê-lo gradualmente. Se necessário, rever e fazer ajustes como incremento de hipóteses, parâmetros ou restrições adequadas, de modo a não invalidá-lo ou mesmo, se for o caso, abordar o problema com um novo modelo matemático.

Para tanto, resta lembrar que a Modelagem na educação matemática vem se desenvolvendo significativamente nos últimos quarenta anos, como se pode observar pela multiplicação de eventos específicos, com destaque para CNMEM (Conferência Nacional de Modelagem na Educação Matemática). Mesmo assim, essa Modelagem ainda não chegou sig-

nificativamente nas escolas. Provavelmente porque muitos educadores têm dificuldades para justificar a utilização da matemática ensinada, ou porque tem pouco tempo para preparação de aulas, ou ainda tem formação precária em modelagem. Não se esquecendo, inclusive, que existem poucas publicações de materiais voltados para o ensino básico, tais como relato de experiências.

Na matemática dedutiva, o foco é a estrutura, a lógica e a linguagem do próprio conhecimento matemático. A argumentação para convencer os outros sobre a verdade das proposições recebe atenção especial, e persiste até hoje. Por sua vez, enquanto que o objetivo da Modelagem não é treinar alunos em linguagem matemática, mas sim, usá-la para descrever e, com isso intervir sobre o real, a tarefa não só de matemáticos, mas de qualquer usuário dela.

Em meio às diversas temáticas discutidas no meio educacional, uma das questões mais recorrentes são as lacunas de aprendizagem em relação à matemática apresentadas por alunos durante a sua trajetória escolar. Diante de tais discussões, percebe-se que muitos pesquisadores defendem que a matemática deve ser ensinada de modo que favoreça o aluno a aplicar seus conceitos, em seu contexto social (CONCEIÇÃO; ALMEIDA, 2015).

Assim, surge a necessidade de favorecer um ensino que leve o educando a problematizar os mais variados conceitos abordados na referida disciplina escolar. No entanto, conforme (CONCEIÇÃO; ALMEIDA, 2015), o homem, como ser social e integrante de uma cultura, necessita do conhecimento matemático na sua relação interpessoal, não sendo, muitas vezes, perceptível a utilização desse conhecimento.

À medida que se defende a necessidade da utilização da matemática no cotidiano, inevitavelmente deve-se perceber que existem sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. Pois, se de um lado tem o sujeito que ensina ou media, do outro se encontra o que aprende ou que constrói o conhecimento junto com o sujeito mediador. Por isso, é inquestionável que muitos professores de matemática estão presos a um modelo de ensino que não promove no aluno a mobilização da aprendizagem e nem a motivação para perceber que a matemática está presente em suas relações sociais (CONCEIÇÃO; ALMEIDA, 2012).

Ainda se questiona por que a matemática torna-se, muitas vezes, distante da realidade do educando. Uma resposta provável para tal questionamento está relacionada à maneira como é abordada em sala de aula, ou à ostentação da sua simbologia social.

A modelagem é também um processo de investigação que usa a linguagem matemática como instrumento para expressar ideias. Nesse sentido, se aproxima das matemáticas aplicadas. Ou seja, ao usar um conceito, fórmula ou algoritmo, o modelador não está preocupado com a consistência, mas supõe que a estrutura usada seja verdadeira. No entanto, resta lembrar que a propriedade mais explorada da Modelagem é a contextualização do conhecimento matemático. Neste contexto, surge a pergunta: para que serve a matemática?

Questionamento que pode ser respondido depois da realização de algumas atividades, embora a aprendizagem e a caracterização do tipo de matemática aprendida não têm merecido a mesma atenção de que a Modelagem proporciona aplicações dos conceitos matemáticos. Justamente pelo fato de que através da Modelagem Matemática é possível o aluno interpretar e compreender os mais diversos fenômenos do seu cotidiano.

Nesse sentido, pretende-se neste trabalho pesquisar a possibilidade de associar os aspectos pragmático - desenvolvido pela modelagem - e o argumentativo - desenvolvido no ensino clássico escolar - em relação ao conhecimento matemático de atividades de educação matemática desenvolvido atualmente na escola básica.

Por sua vez, os Parâmetros Curriculares Nacionais dizem que: "a matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza cada vez mais de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar"(BRASIL, 1998, p. 19).

Sendo assim, os profissionais da educação, principalmente os da área de exatas, devem pesquisar métodos com a finalidade de demonstrar ao aluno a matemática presente no seu cotidiano e sua aplicabilidade no seu dia a dia. Nesse sentido é que se destaca a importância do professor ser capaz de relacionar os conteúdos lecionados em sala de aula à realidade do aluno, tornando-se agente transformador da realidade que envolve a matemática sob o ponto de vista dos alunos. Os Parâmetros Curriculares Nacionais orientam que os alunos:

> Saibam usar a matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006, p. 69).

Portanto, neste trabalho defende-se a fundamental importância da aplicação da matemática a partir da sua relação com o cotidiano do aluno. Para tanto, utiliza-se a dinâmica de máquinas rotativas para mostrar uma aplicação da matemática nas ciências da engenharia. Além do mais, o estudo explora algumas ideias de como se podem representar matematicamente alguns problemas sobre máquinas rotativas, bem como o seu comportamento representado por equações, gráficos e tabelas, partindo de alguns dados e hipóteses.

Capítulo 2

A Importância da Aplicabilidade da Matemática

2.1 Modelos e Sistemas Vibratórios

O estudo de sistemas vibratórios trata do comportamento oscilatório do corpo. De um modo geral, trata de qualquer oscilação de um corpo em torno de sua posição de equilíbrio. As vibrações, na verdade, são de natureza não-linear. Porém, em muitos casos podem ser aproximadas por descrições lineares. Assim, os sistemas vibratórios podem ser classificados em lineares e não-lineares.

Geralmente, os problemas de engenharia são muito complexos. Então, a primeira dificuldade na análise do comportamento de um sistema vibratório consiste na escolha do modelo matemático, que o represente na forma mais adequada e simplificada. Os elementos básicos que caracterizam um sistema são a massa, o amortecimento e a rigidez. As equações do movimento são obtidas através da segunda lei de Newton. Entretanto, para sistemas complexos, que necessitam de várias coordenadas para especificar o movimento, tais equações também podem ser obtidas por meio das equações de Lagrange.

Já os sistemas submetidos à ação de forças externas, usualmente, têm sua resposta determinada através do método operacional (uso da transformada de Laplace e Transformada de Fourier). No entanto, este método também pode ser utilizado para estabelecer diretamente a resposta do sistema, em termos da resposta impulso e da função de transferência, para os casos escalar e matricial.

A resposta impulso, ou seja, a resposta de um sistema a uma força impulsiva unitária permite gerar uma nova base matemática, sobre a qual é estabelecida uma nova teoria para alcançar a solução de problemas vibratórios. Por sua vez, a resposta livre do sistema pode ser descrita pela resposta ao impulso. Assim, é possível destacar duas componentes da resposta livre: uma parte transiente, que está relacionada com a resposta do sistema livre; e uma parte estacionária (permanente), vinculada à força excitadora do sistema.

Diante de sistemas complexos, tem-se os padrões preferenciais de vibração e os modos. O estudo destes sistemas é feito através da análise modal. Entretanto, com este enfoque surge uma outra classificação dos sistemas vibratórios, que se refere ao amortecimento e que limita esta análise. Significa que, para sistemas não-amortecidos não há restrições, e a análise modal é perfeitamente aplicável. Porém, na presença de amortecimento, são feitas várias hipóteses para desacoplar o sistema. Tem-se, então, os sistemas desacopláveis, denominados vibratórios clássicos ou sistemas classicamente amortecidos e os sistemas vibratórios não-clássicos, onde a análise modal não é aplicável. Aqui está a maior dificuldade e, para contorná-la, são impostas condições especiais sobre o amortecimento.

Neste contexto, o estudo teórico das vibrações é efetuado em base de modelos. O modelo físico, que é a representação esquemática dos sistemas reais, e o modelo matemático, que é, a representação analítica, através de uma equação - ou de um sistema de equações - que descreve o comportamento dinâmico do modelo físico em questão. Na prática, a análise das vibrações é feita através de medições experimentais (EWINS, 1995), (WHEELER; GANJI, 1996) e simulações computacionais dos referidos modelos. Estes procedimentos requerem o uso de equipamentos e softwares específicos.

As vibrações são essencialmente de natureza não-linear. Entretanto, quando se desenvolvem na vizinhança de uma posição de equilíbrio estável, deslocamentos insignificantes diante de pequenas perturbações, podem ser aproximadas por descrições lineares. Neste caso, as equações lineares resultantes são de resolução muito mais simples, além de fornecerem uma visão mais ampla das características importantes do sistema.

Vale observar ainda, que o estudo experimental das vibrações, sem dúvida, contribui fortemente para o entendimento e o controle de muitos fenômenos encontrados na prática. Note-se que, para a confiabilidade de um sistema, é essencial conhecer as características dinâmicas do mesmo.

Segundo Ewins (1995) e Wheeler e Ganji (1996), as observações experimentais são feitas com dois objetivos principais: determinar a natureza e a extensão dos níveis das respostas a uma vibração, e verificar e predizer modelos teóricos. Como é de se observar, estes objetivos correspondem a dois tipos de testes. O primeiro consiste em medir forças ou respostas durante o funcionamento da máquina ou estrutura em estudo. O segundo é um teste no qual a estrutura ou componente vibra com uma força excitadora conhecida, muitas vezes fora de seu ambiente de funcionamento. Geralmente, este último é feito em condições de controle mais restritas, fornecendo, portanto, informações mais precisas e detalhadas que o primeiro. Além do mais, inclui a aquisição de dados e sua subsequente análise. Este método é atualmente denominado de análise modal.

Com o uso de dispositivos especiais (geradores de vibrações, martelos de impacto, transdutores e amplificadores, por exemplo), os dados experimentais são gerados, transformados em sinais elétricos (grandezas elétricas adequadas), e convertidos em sinais analógicos,

contínuos em função do tempo. Em outros casos, por motivos inerentes ao próprio fenômeno, ou pelo procedimento de amostragem, ou no caso de sinal digital, os dados podem assumir uma representação discreta caracterizados por uma sequencia de pontos (INMAN, 1994), (TAMAGNA, 1998).

Em linhas gerais, segundo Phillips e Parr (1995), a fundamentação matemática correspondente a este métodos, que é estabelecida em áreas específicas, denominadas análise de sinais e análise modal. Os sinais analógicos mais simples são os do tipo harmônico. Por outro lado, pode-se exprimir sinais complexos como a superposição de sinais harmônicos (série de Fourier). Assim, cada sinal (entrada ou saída) pode ser descrito por suas componentes nas diferentes frequências. Este conceito, utilizado em muitas áreas, é conhecido como decomposição espectral das funções do tempo. Os sinais podem ser do tipo determinístico ou estocástico, conforme possam ser descritos por funções matemáticas explícitas ou não, respectivamente (BENDAT; PIERSOL, 1971).

Quanto a obtenção das respostas de problemas vibratórios por procedimentos analíticos nem sempre é possível. Por outro lado, a determinação de coeficientes de interesse pode envolver muitos cálculos. Daí, a grande importância de sua determinação com o auxílio de dispositivos computacionais, e, para tanto, a utilização de métodos numéricos (GOLUB; LOAN, 1996), (FADDEEV; FADDEEV, 1963). Basicamente, estes são empregados na integração das equações, no cálculo de frequências ou na identificação dos parâmetros dos modelos. Para Análise Modal é possível simular situações experimentais, através de pacotes computacionais.

2.2 Identificação de Sistemas Mecânicos

Os métodos que permitem a estimação de parâmetros de vibração, para o desenvolvimento de modelos dinâmicos confiáveis, são o objeto de estudo da análise modal. Tais parâmetros podem ser classificados em modais (frequências naturais, fatores de amortecimento e forma de vibrar dos modos) ou estruturais (matrizes de massa, rigidez e amortecimento) e são utilizados em aplicações variadas na Engenharia Mecânica, como, por exemplo, na análise dinâmica de peças estruturais de difícil modelagem analítica, como no refinamento ou verificação de um modelo analítico, na predição de cargas dinâmicas ou níveis de resposta que uma estrutura pode experimentar durante sua operação. Ocorrendo ainda, controle de vibrações em estruturas flexíveis, identificação insipiente de falhas, ajuste de modelos, monitoramento de integridade superficial, dentre outras.

Os métodos de identificação em análise modal podem ser divididos em duas categorias, quais sejam, os que operam no domínio do tempo e os que operam no domínio da frequência. Observa-se que estes últimos tiveram um desenvolvimento muito mais acelerado do que os primeiros. Talvez o fato de, desde a metade da década de setenta, poder-se contar com equipamentos capazes de proceder a análise de Fourier, que tenha influenciado signifi-

cativamente o desenvolvimento de técnicas no domínio da frequência. Hoje já se sabe que os métodos de identificação não se aplicam de forma universal a quaisquer tipos de situações encontradas na prática. Assim, dependendo do problema inverso a ser resolvido, escolhe-se o método que apresente o melhor desempenho possível naquele contexto específico.

Nos métodos do Domínio da Frequência, os parâmetros de vibração são extraídos a partir dos dados de resposta em frequência, utilizando, na sua grande maioria, modelos para ajustes de curvas e técnicas matemáticas tais como, mínimos quadrados, métodos gradientes, etc, (BECK; ARNOLD, 1977).

Por sua vez, vários métodos que operam no domínio do tempo derivam de uma técnica baseada na teoria desenvolvida por Prony (1795), na qual a identificação é realizada a partir da função resposta ao impulso. As grandes vantagens dos métodos do Domínio do Tempo é que eles não necessitam de estimativas iniciais para os parâmetros. No método das Exponenciais Complexas, o ponto de partida é a expressão da função resposta ao impulso, cujo cálculo era feito através da Transformada Inversa de Fourier da receptância (EWINS; DIMAROGONAS, 1996).

Este era um inconveniente deste método. Pois, colhiam-se os dados no domínio do tempo, passava-se para o domínio da frequência para o cálculo da receptância, para depois retornar ao domínio do tempo. Atualmente, existem novas técnicas que permitem calcular a função resposta ao impulso a partir dos próprios dados no domínio do tempo (FASANA; PIOMBO, 1997).

2.3 Máquinas Rotativas

Segundo Pereira (2005) as mais comuns máquinas rotativas, também denominadas de rotores, podem ser turbo-compressores, turbinas de aviões, turbinas à vapor para a produção de energia elétrica, etc.

A grande capacidade dos rotores de gerar energia mecânica vem da alta velocidade a qual seus eixos são submetidos. Associado à essa alta velocidade, estão altas cargas devido a inércia de seus componentes e potenciais problemas de vibração e instabilidade dos rotores. A previsão do comportamento de rotores, através de modelos matemáticos, é relativamente bem sucedida quando comparado com medições experimentais. No entanto, a intuição humana pode, muitas vezes, levar à conclusões incorretas. Por exemplo, a massa desbalanceadora permanecerá internamente à órbita, realizada pelo eixo do rotor em altas velocidades; assim como o aumento do amortecimento pode causar instabilidade também em altas velocidades.

Ainda de acordo com Pereira (2005), em análises do comportamento dinâmico de rotores, os estudos mais freqüentemente realizados são:

- Previsão das velocidades críticas: Velocidades nas quais a vibração devido ao desbalanceamento do rotor é máxima;
- Modificações de projeto para eliminar as velocidades críticas: Quando é necessário alterar a velocidade de operação do rotor, modificações no projeto do rotor são necessárias para alterar as velocidades críticas;
- Prever as freqüências naturais das vibrações torsionais: Quando vários eixos estão acoplados (por exemplo, caixa de engrenagens) e estes eixos são excitados pelas pulsações do motor durante o *start-up*;
- Calcular as massas de correção e suas localizações a partir de dados de vibração: Balanceamento de rotores;
- Prever as amplitudes de vibração causadas pelo desbalanceamento do rotor;
- Prever as frequências de vibração nas instabilidades dinâmicas: Nem sempre simples de ser alcançado, haja visto que nem todas as forças desestabilizadoras são conhecidas; bem como a modificação do projeto para eliminar instabilidades dinâmicas.

Sabe-se que a passagem pelas velocidades críticas ou a operação da máquina em velocidades próximas destas é bastante perigosa, pois o alto nível de vibração pode proporcionar sobrecargas e levar à falha dos mancais, aumentar a possibilidade de aparecimento de trincas, além de outros fatores. Como as velocidades de rotação são muito elevadas, a energia cinética armazenada na máquina rotativa pode ocasionar grandes catástrofes decorrentes de falhas. Pequenas trincas podem aparecer e desenvolver-se ao ponto de provocar o colapso do eixo. Sabe-se que alguns rotores trabalham muitos anos com eixos trincados e, se forem devidamente monitorados, podem continuar em operação por mais tempo, até que sua substituição seja recomendada. As altas velocidades de trabalho dos rotores causam preocupações também com o desbalanceamento que o sistema apresenta, pois a força induzida por ele aumenta com o quadrado da velocidade de rotação, sendo este responsável por solicitações dinâmicas importantes, que podem levar componentes à fadiga.

Assim, modelos matemáticos para rotores, análise de dinâmica de máquinas rotativas, a identificação e modelagem de trincas, bem como a identificação e correção do desbalanceamento são temas importantes e atuais, apesar de já virem sendo estudados nas últimas décadas. Burbano (2005), em sua dissertação de mestrado, apresenta o desenvolvimento do modelo de trincas juntamente com sua validação experimental. Já Saldarriaga, et.al (2009) apresenta a identificação do desbalanceamento em sistemas rotativos por meio de uma alteração na metodologia dos coeficientes de influência, na qual utilizou-se redes neurais artificiais para a determinação das massas de correção. Esta técnica permite a identificação do desbalanceamento em rotores altamente flexíveis.

A dinâmica de rotores trincados vem sendo investigada por vários autores, dentre eles Wauer (1990), Gasch (1993) e Dimarogonas (1996). Geralmente a transição entre a abertura e o fechamento da trinca é assumida abrupta, como desenvolvido por Gasch (1993). Outros modelos bastantes empregados assumem uma transição entre a abertura e o fechamento da trinca, conforme representada por uma função harmônica. Algumas investigações levam em conta o fenômeno mais realístico do comportamento da trinca, o chamado mecanismo de *breathing* apresentado pelas trincas transversais, no qual são caracterizados a abertura e o fechamento da secção da trinca ao longo da rotação do rotor.

Quando os carregamentos estáticos prevalecem sobre os carregamentos dinâmicos, o mecanismo de *breathing* pode ser pré-determinado e o comportamento dinâmico pode ser determinado por uma aproximação linear. Isso ocorre em máquinas rotativas horizontais pesadas, com velocidade de rotação baixa e/ou desbalanceamento relativamente pequeno. No caso dos carregamentos dinâmicos serem iguais ou maiores que os estáticos, isso ocorre em rotores leves ou na posição vertical, com velocidades de rotação elevadas acima das primeiras críticas. O problema torna-se não linear e o mecanismo de *breathing* deve ser analisado para cada passo de tempo ao longo da rotação do sistema.

Capítulo 3

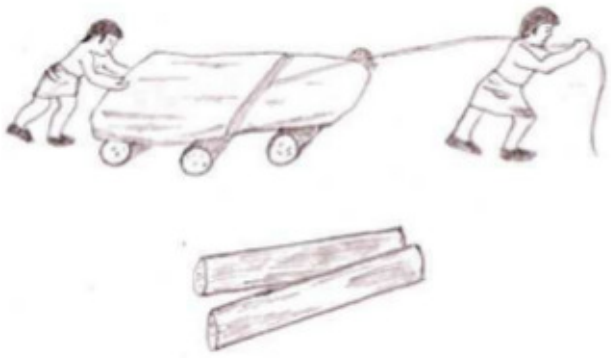
História das Máquinas Rotativas

3.1 Início da Roda

As datas da Idade da Pedra variam consideravelmente para diferentes partes do mundo. Começou cerca de 2 milhões de anos atrás e terminou de 6000 a 2500 aC. Neste periodo ocorreram grandes mudanças no clima e em outras condições que afetam a cultura humana. Os próprios seres humanos evoluíram para a sua forma moderna durante a última parte dela.

Segundo Man (1979), a Idade da Pedra foi dividida em três períodos: o Paleolítico, Mesolítico e Neolítico. O Paleolítico, ou idade antiga da pedra, foi o período mais longo. Começou cerca de 2 milhões de anos atrás, quando as ferramentas de pedra foram usadas pelas criaturas humanoides e terminaram com o fim da última era de gelo, cerca de 13.000 aC. Após isso, houve mudanças nos padrões climáticos que resultaram na maior disponibilidade de alimentos. As ferramentas paleolíticas, foram adaptadas às novas condições. Este período é conhecido como Mesolítico, ou Idade da Pedra Média. Neste período, há muitos milhares de anos, o homem descobriu que uma seção de um tronco de árvore poderia ser movida sob a força da gravidade, porque era redonda, conforme demonstra a Figura 1.

Figura 1 – Movimentação Utilizando Troncos de Árvores



Fonte: Adaptado de (RAO, 2011, p. 02)

No tocante a Figura 1, os primeiros homens começaram a colocar os corredores sob uma carga pesada, tornando-a mais fácil para ser arrastada. Esta foi à invenção do trenó. Os homens então, começaram a combinar o rolo e o trenó. À medida que o trenó avançava sobre o primeiro rolo, um segundo rolo foi colocado sob a extremidade dianteira para carregar a carga quando deslocou o primeiro rolo. Descobriu-se que os rolos que carregavam o trenó ficaram ranhurados com o uso, e que esses sulcos profundos realmente permitiram que o trenó avançasse uma distância maior antes do rolo seguinte ser necessário. Assim, os rolos se desenvolveram em rodas. Provavelmente a invenção mecânica mais importante de todos os tempos.

De certa forma, quase todas as máquinas construídas desde o início da Revolução Industrial envolvem um único princípio básico incorporado em uma das invenções verdadeiramente significativas da humanidade. É difícil imaginar qualquer sistema mecanizado que seja possível sem a roda, ou a idéia de um componente simétrico movendo-se em movimento circular em um eixo. De pequenas engrenagens de relógio para automóveis, motores a jato e unidades de disco de computador, o princípio é o mesmo.

Já no período Neolítico, ou Nova Idade da Pedra, conhecido cerca de 8000aC, as ferramentas de pedra tornaram-se altamente polidas e variadas. Em 6000 aC apareceu a cerâmica e o cobre foi usado pela primeira vez em algumas regiões, seguido de bronze. Antes da introdução do ferro, a maioria das ferramentas e armas era de bronze. Então, esse período era chamado de Idade do Bronze. Durante este tempo, a roda do oleiro lento foi inventada, conforme evidencia a Figura 2.

Figura 2 – Roda de Potter's de 3500 aC

Fonte: Adaptado de (RAO, 2011, p.02)

Em cerca de 3000 aC,os egípcios desenvolveram a roda rápida, um aparelho completamente móvel, cuidadosamente balanceado de pedra. O primeiro uso conhecido desta invenção essencial era uma roda de oleiro, que foi usada em Ur na Mesopotâmia (parte do Iraque atual) já em 3500 aC.

Conforme a Figura 3, o primeiro uso da roda para o transporte, provavelmente estava em carros de Mesopotâmia, em 3200 aC. Antes de serem usadas em veículos, é interessante notar que as rodas podem ter aplicações industriais ou de fabricação. Posteriormente, foram aperfeiçoada pelos egípcios, que fizeram rodas com raios, que poderiam ser encontrados em

carros, de cerca de 2000 aC.

Figura 3 – A roda Colocada em uso para Movimento

Fonte: Adaptado de (RAO, 2011, p. 03)

Os gregos também adotaram a idéia de fazer a roda dos egípcios, melhorando-a ainda mais. Nesse processo, mais tarde, durante o tempo do Império Romano, os romanos também se comprometeram na fabricação da roda, produzindo a maior variedade de veículos de rodas. Sendo que, com o colapso do Império Romano, em 476 dC, a roda foi amplamente utilizada para máquinas de guerra, em todo o antigo império.

3.2 Ciência Antes do Período Medieval

Os gregos adotaram a matemática elementar dos egípcios e desenvolveu-a em ferramentas para servir o físico e o engenheiro da época. Consta que Aristóteles foi provavelmente o primeiro a conceber a ideia de pesquisa organizada. No entanto, do ponto de vista das ciências físicas, os primeiros filósofos gregos não produziram princípios fundamentalmente sólidos que são agora aceitos. Mas deram, durante séculos, sua autoridade a muitas premissas falsas.

O mundo da ciência poderia ter se beneficiado materialmente de suas especulações, em vez de ficar com muitas declarações vagas sobre amoção natural e não natural, que realmente servia para confundir e retardar o desenvolvimento bem-sucedido das verdades fundamentais da Mecânica.

Segundo Pedersen (1993), alguns dos ensinamentos escolares de Aristóteles incluem premissas falsas como:

- As substâncias são divididas em corruptíveis e incorruptíveis;
- Os corpos são classificados como corpos absolutos pesados e corpos leves absolutos, que buscam seus lugares, sendo que, os leves ficam no topo;
- As moções são classificadas como movimentos naturais e movimentos violentos;
- Os corpos grandes caem mais rapidamente do que os pequenos.

Arquimedes (287-212 aC) de Siracusa, na Sicília, é considerado por muitos como o primeiro gênio matemático que o mundo produziu até hoje. Ele sistematizou máquinas simples, sendo, provavelmente, o inventor da polia composta. Um dispositivo para aumentar a força de tração ou elevação, e propondo a teoria da alavanca, ambas de um a dois braços. Além do mais, considerava a roda como a figura circular descrita por uma alavanca rotativa de um braço, e o parafuso como a analogia circular do plano inclinado. Um de seus ditos famosos é: "Dê-me um lugar para fixar e eu vou mover a terra".

Ainda conforme Pedersen (1993), Arquimedes recebeu sua educação na Universidade de Alexandria, onde grupos de matemáticos e cientistas trabalharam, dedicando-se à construção de inúmeras máquinas fascinantes. O maior, e de mais destaque que se conhece, foi, sem dúvida, Hero, que viveu algum tempo durante o segundo século aC. Sua melhor invenção é o aelopile, conforme a Figura 4. Primeira turbina de reação, que converteu o calor em energia mecânica através do vapor.

Figura 4 – Aelopile de Hero

Fonte: Adaptado de (RAO, 2011, p. 06)

No entando, o Aelopile do Hero, a primeira turbina de reação, não conseguiu produzir um trabalho útil, pois sua velocidade não era suficiente para criar o alto nível de vapor exigido. Na década de 1780, James Watt trabalhou nas condições teóricas operacionais de uma turbina de reação e concluiu que essa turbina não poderia ser construída, dado o estado da tecnologia contemporânea.

3.3 Rodas de Água

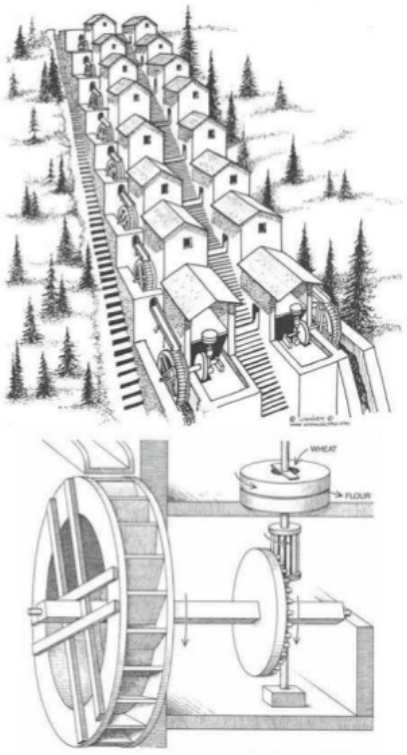
As primeiras ferramentas implementadas pela humanidade, para esmagar ou moer sementes, nozes e outros produtos alimentares, consistiam pouco mais do que uma rocha plana, sobre a qual o material foi esmagado, batendo com uma pedra ou ramo de árvore. Muito mais eficiente do que a rocha plana ou mesmo o pilão era o moinho, que parece ter antecipado a revolução agrícola há muito tempo.

O moinho consiste em uma rocha plana, muitas vezes oca ou côncava, em que o grão, sementes ou outros materiais são colocados, e uma pedra de moagem, que é rolada através do grão, reduz, assim, este grão para a farinha. Apesar de o moinho ainda estar até hoje em uso em muitas partes do mundo, a humanidade começou a aproveitar a energia da água para transformar as pedras que soltam seu grão (Rodas de água). Provavelmente foi a primeira ferramenta para criar energia mecânica para substituir o poder humano e animal direto (HEATH, 1897).

A primeira descrição de uma roda de água, é de Vitrúvio, um engenheiro romano (31 aC-14 dC), que compôs um tratado de 10 volumes sobre todos os aspectos da engenharia romana. Desde então, nos tempos clássicos, existiram três variedades gerais de rodas de água: a roda horizontal e duas variações da roda vertical.

Uma das aplicações romanas mais notáveis de uma roda de água estava em Barbegal, perto de Arles, no sul da França. Com data do século IV dC, a fábrica era um imenso moinho de farinha que empregava 16 rodas de água ultrapassadas, conforme a Figura 5.

Figura 5 – Moinho de Farinha em Barbegal



Fonte: Adaptado de (RAO, 2011, p. 09)

Os engenheiros do Renascimento estudaram o volante e perceberam que a ação da água em uma roda com lâminas seria muito mais eficaz se esta estivesse de alguma forma inserida em um tipo de câmara. Eles sabiam muito bem que apenas uma pequena quantidade de água empurrando ou caindo sobre uma lâmina de roda ou uma pá, realmente o atinge e que grande parte da energia contida na água está perdida ou nunca é realmente capturada.

Inserir a roda e canalizar a água através de uma câmara resultaria em uma máquina de maior eficiência e potência. No entanto, eles foram prejudicados pela falta de qualquer compreensão teórica da hidráulica. Ambos esses problemas foram resolvidos até certo ponto, no século XVIII, com um dos primeiros exemplos de uma turbina de reação, que foi construída em 1750 pelo alemão Johann Andres Von Segner (1704-1777).

Esses desenvolvimentos ocorreram durante um período significativo de evolução científica e renascimento. Euler fundava neste período *Scienta Navalis*, um novo ramo da ciência, "mecânica racional"(FELLMANN, 2007), que trata fluidos ideais no primeiro volume, e Engenharia marítima e naval no segundo volume.

Em grande parte, deve-se a Euler os princípios da movimentação do impulsor e do parafuso. Em seu tempo, estes eram considerados apenas como teoria. No entanto, os experimentos de Euler na máquina alimentada com água de Segner e a teoria relacionada das turbinas de água são bem conhecidos.

3.3.1 Moinhos de Vento

Há mais de 5.000 anos, os antigos egípcios usavam vento para navegar no rio Nilo. Enquanto a proliferação de moinhos de água estava em pleno andamento, os moinhos de vento pareciam aproveitar mais energia, empregando velas de vento. A roda de vento de Heron de Alexandria marca uma das primeiras instâncias conhecidas na história do vento que alimenta uma máquina (DRACHMANN, 1961). No final do século XII, moinhos de vento com velas montadas em um eixo horizontal apareceram na Europa.

O primeiro desse tipo provavelmente apareceu na Normandia, na Inglaterra. Trata-se dos moinhos de ventos, onde as velas e as máquinas são montadas em um poste robusto e todo o aparelho deve ser girado para enfrentar o vento. Dois séculos depois, o moinho da torre foi introduzido, inserindo o maquinário em uma torre estacionária, de modo que apenas a tampa que carregava as velas precisava ser virada pelo vento. Em 1854, Daniel Halliday obteve a primeira patente de moinho americano.

Até agora, é possível ver como o rotor evoluiu de dispositivos antigos. A maquinaria rotativa (ou alternativa) não pôde ser desenvolvida de forma significativa até que tenha sido estabelecido um fundo científico suficiente. Embora Arquimedes tenha pavimentado o caminho no século III aC para o pensamento científico, a fortaleza da Igreja, no mundo ocidental durante o período medieval impediu novos desenvolvimentos. Apesar das teorias científicas tentarem explicar os fenômenos como o viga dobrando, que era um precursor para a compreensão dos rotores, a Revolução Industrial forneceu a necessidade de desenvolvimento de rotores de alta velocidade.

3.4 Renovação e Revolução Científica

O despertar do pensamento científico foi provocado durante o período do Renascimento (1400-1600) e realizado no período da Revolução Científica. Leonardo da Vinci (1452-1519), recentemente foi creditado por algumas contribuições fundamentais para mecânica sólida, mecânica de fluidos e projeto mecânico muito antes da Revolução Científica. Suas contribuições aparecem no Codex Madrid I, uma das duas notáveis notas que foram descobertas em 1967 na Biblioteca Nacional da Espanha (Madrid), depois de terem sido deslocadas por quase 500 anos.

Ele concluiu corretamente que, na flexão das vigas devido a cargas transversais, as seções transversais do plano permanecem planas antes e depois da flexão e da rotação. Da Vinci faltou a lei de Hooke e o cálculo para completar a teoria. No entanto, teve que esperar para que Galileo melhorasse isso antes que Euler e Bernoulli formulassem equações corretas para simples flexões.

O consenso prevalecente, de outro modo, é que Galileo Galilei (1564-1642) fez as pri-

meiras tentativas de desenvolver uma teoria dos vigas (TIMOSHENKO, 1955). Ele reconheceu o Princípio do Trabalho Virtual como uma lei geral. Da teoria Galileu, no entanto, fez uma suposição incorreta no desenvolvimento dos vigas; ele não reconheceu que, em qualquer seção do viga, havia equilíbrio das tensões de tração e compressão.

O evento que a maioria dos historiadores da ciência chamam de revolução científica pode ser datado aproximadamente como tendo começado em 1543, ano em que Nicolau Copérnico publicou seu *De revolutionibus orbium coelestium*.

É amplamente aceito que o*De revolutionibus* de Copérnico seguiu o esboço e método estabelecido pelo matemático egípcio e astrônomo Ptolomeu em seu *Almagest* no segundo século.

A flexão lateral de vigas simples longos e finos foi explicada corretamente por Euler e Bernoulli em 1750. Euler fez uma série de contribuições para a Mecânica. As mais conhecidas são em Mecânica (Força de Materiais). Durante seu mandato como professor de Matemática em São Petersburgo, ele publicou em 1736 o que desde então foi reconhecido como sendo o primeiro livro sobre Mecânica Analítica. O modelo Euler-Bernoulli inclui a energia de deformação devido à flexão e à energia cinética devido ao deslocamento lateral.

Jacob Bernoulli (1654-1705) descobriu primeiro que a curvatura de um viga elástico, em qualquer ponto, é proporcional ao momento de flexão nesse ponto. Daniel Bernoulli (1700-1782), sobrinho de Jacob, foi o primeiro a formular a equação diferencial do movimento de um viga de vibração. Mais tarde, a teoria de Jacob Bernoulli foi aceita por Leonhard Euler (1707-1783) em sua investigação da forma das vigas elásticas sob várias condições de carregamento.

Sem dúvidas, muitos avanços na compreensão das curvas elásticas foram feitos por Euler. A teoria do viga de Euler-Bernoulli, algumas vezes chamada de teoria do viga clássico, teoria do viga de Euler, teoria do viga de Bernoulli ou teoria do viga de Bernoulli-Euler é a mais usada, porque é simples e fornece aproximações de engenharia razoáveis para muitos problemas. No entanto, o modelo de Euler-Bernoulli tende a superestimar ligeiramente as frequências naturais. Este problema é exacerbado para as frequências naturais dos modos superiores. Além disso, a previsão é melhor para vigas finos do que vigas não esbeltos, (HAN; BENAROYA; WEI, 1999).

Para um dinamismo do rotor, a teoria do viga é a espinha dorsal de toda análise. Significa dizer que todos os rotores foram modelados como vigas ao longo do século XX, e apenas, recentemente, começou-se a entender a dinâmica do rotor do modelo sólido.

Assim, os modelos de viga desempenham um papel significativo na história da dinâmica do rotor. A teoria do raio de Rayleigh (1877) fornece uma melhoria marginal na teoria de Euler-Bernoulli, incluindo o efeito da rotação da seção transversal.

A energia cinética por rotação é contabilizada na análise; diminui as frequências

naturais no modelo Euler-Bernoulli. O efeito do cisalhamento no viga de Euler-Bernoulli foi representado por Timoshenko (1921) para respostas de alta frequência, onde os efeitos de cisalhamento ou rotativos não são insignificantes. Este modelo de viga é válido ainda hoje no século XXI.

Joseph Louis Lagrange (1788), que viveu de 1736 a 1813, fez contribuições fundamentais durante a Revolução Científica e transformou a mecânica newtoniana em um ramo de análise. A mecânica lagrangiana, como é chamada agora, exibiram os chamados "princípios" mecânicos como resultados simples do cálculo variacional.

Hamilton (1834), que viveu de 1805 a 1865, anunciou posteriormente seu famoso princípio de dinâmica, fundamental para a derivação de todos os problemas de vibração. Dessa forma, o problema de vibração dos sistemas clássicos foi discutido lúcidamente por Lord Rayleigh (1842-1919) em 1877. No entanto, Walter Ritz (1878-1909) fez contribuições significativas para métodos variados na derivação de métodos de energia.

Nesse processo, fundamentos da Teoria da Elasticidade ou física de corpos deformáveis foram estabelecidos durante a Revolução Científica. Os engenheiros se referiam a esses corpos deformáveis como estruturas. A Revolução Industrial começou com motores de vapor alternativos concebidos por James Watt em 1780, e o século XIX testemunhou uma rápida expansão em vários setores industriais.

Infelizmente, a máquina de vapor alternativo tem vários problemas devido à combustão externa e carga alternada excessiva devido a massas reciprocantes, que limitam velocidades e capacidades. A indústria estava à procura de sistemas não reciprocantes. Sistemas de rotação pura que poderiam inaugurar uma era dos chamados mecanismos "sem vibração".

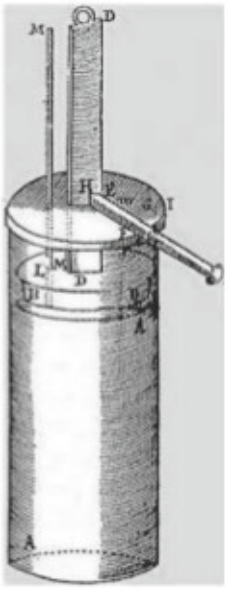
Diante disso, tem-se que dinâmica de rotores é diferente da dinâmica das estruturas. Basicamente, todos os fenômenos de vibração serão válidos, no entanto, existem várias diferenças, sendo necessário configurar procedimentos para o tratamento dos rotores e seus fenômenos vibratórios.

3.5 Engenheiros Renascentistas

De acordo com McConnell (2004), Denis Papin (1647-1712), um físico francês, matemático e inventor, é mais conhecido por sua invenção pioneira do digestor de vapor; precursor da máquina a vapor. Ele visitou Londres em 1675 e trabalhou com Robert Boyle de 1676 a 1679, publicando um relato de seu trabalho na continuação de novas experiências em 1680.

Durante esse período, Papin inventou o digestor de vapor, um tipo de panela de pressão. Enquanto em Leipzig em 1690, tendo observado o poder mecânico da pressão atmosférica em seu "digestor", ele construiu um modelo de motor de pistão a vapor, o primeiro de seu tipo, como revela Figura 6.

Figura 6 – O Primeiro Motor de Pistão



Fonte: Adaptado de (RAO, 2011, p. 25)

Thomas Savery (1650-1715) foi um engenheiro e inventor militar inglês que, em 1698, patenteou a primeira máquina a vapor em bruto, baseada no digestor de Denis Papin ou na panela de pressão de 1679.

Em 2 de julho de 1698, Savery patenteou uma máquina de vapor inicial. Ele demonstrou à *Royal Society* em 14 de junho de 1699. Em 1702 Savery descreveu a máquina em seu livro *The Miner's Friend*; um motor para levantar a água pelo fogo, no qual ele afirmou que poderia bombear água para fora das minas.

Em 1705, Papin, com a ajuda de Gottfried Leibniz, desenvolveu uma segunda máquina a vapor com pressão de vapor em vez de pressão atmosférica. Mecânica a vapor de Papin foi o primeiro avanço desde a turbina de reação de Hero do século II aC, que nunca funcionou na realidade.

A máquina a vapor do Newcomen foi o primeiro dispositivo prático a aproveitar o poder do vapor para produzir trabalhos mecânicos. Seu primeiro motor de trabalho foi instalado em uma mina de carvão no Dudley Castle, em Staffordshire, em 1712.

Esses motores foram usados em toda a Inglaterra e na Europa para bombear água das minas a partir do início do século XVIII. O Newcomen merece justamente a diversidade do crédito pela introdução generalizada do poder de vapor.

3.6 Revolução Industrial

Entre 1780 e 1850, em um espaço de apenas sete décadas, o rosto de Inglaterra foi alterado por uma revolução de longe, sem precedentes na história da humanidade.

Glasgow University teve um dos motores Newcomen para a sua classe de filosofia natural. Em 1763, um ano após o nascimento de Newcomen, este aparelho ficou fora de ordem e o professor John Anderson deu a James Watt (1736-1819) a oportunidade de reparálo. Ele rapidamente percebeu que o desperdício de vapor era inerente ao projeto do motor e ficou obcecado com a idéia de encontrar algum remédio.

Da descoberta de Joseph Black (1728-1799), ele deduziu que a perda de calor latente era o defeito mais grave no motor Newcomen (OGG, 1965). O trabalho de James Watt (RAO, 1999) é, portanto, a principal aplicação da ciência à engenharia que levou ao nascimento da Revolução Industrial.

Havia uma forte demanda por um motor que poderia produzir um movimento rotativo para dirigir máquinas de fábrica. O motor alternativo que produziu movimento rotativo revolucionou o mundo. Por volta de 1787 foi construído o primeiro motor de James Watt. As máquinas alternativas têm desvantagens inerentes em altas velocidades, que, praticamente, desapareceram no mundo moderno, ainda existem locomotivas a vapor que operam em alguns lugares. Os motores de combustão interna ainda prosperam para o transporte, a geração de energia, e assim por diante.

Os motores de combustão interna podem funcionar a velocidades mais elevadas com um arranjo de cilindros múltiplos e balanceamento de peças alternativas. No entanto, eles não são livres de vibração. Embora as máquinas de reciprocação sejam fascinantes, elas não têm rotores diretamente e também no trem de transmissão. As velocidades são limitadas devido ao impulso alternativo. Assim, não foi dada muita atenção à dinâmica do rotor durante esta era.

3.6.1 Máquinas Turbo

Durante o século II aC, Hero demonstrou o princípio de uma turbina de reação, mas não conseguiu realizar nenhum trabalho útil.

Apesar da Revolução Científica, que se seguiu pela Revolução Industrial, James Watt, ao tentar construir uma turbina a vapor, chegou à conclusão de que não poderia ser construído, dado o estado da tecnologia contemporânea.

Assim, em meados do século XIX, havia uma boa compreensão das características de vibração de cordas, vigas, membranas e placas. Contudo, nada se sabia sobre um viga quando se transforma em um eixo e gira.

Neste aspecto, em 1869 William John Macquorn Rankine (1820-1872) propôs que existisse uma velocidade crítica para um rotor, que é o limite de velocidade para o giro centrífugo. Entretanto, não se sabia se um rotor pode atravessar essa velocidade crítica limitante, uma vez que Rankine já havia proposto essa velocidade limitante.

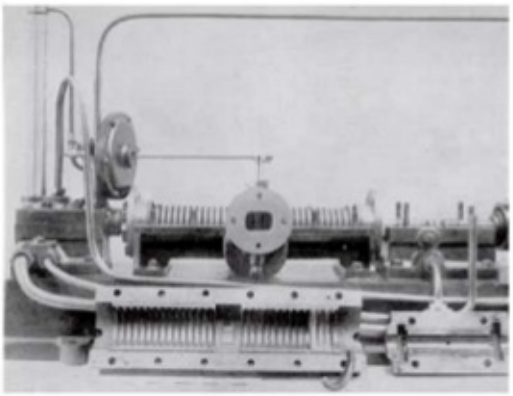
Somente quase duas décadas depois, em 1883 (cerca de 100 anos após o Watt ter construído seu motor a vapor), De Laval de Estocolmo resolveu o problema.

Karl Gustaf Patrick de Laval (1845-1913) foi um engenheiro e inventor sueco que fez importantes contribuições para o projeto de turbinas a vapor e Máquinas para lácteos. Ele construiu a primeira turbina a vapor (turbina de impulso).

Uma vez que uma máquina rotativa foi alcançada com vapor como força motriz, houve uma tremenda expansão na capacidade de geração de energia. Apenas um ano após a turbina de Laval, Charles Parsons (PARSONS, 1911), em 1884, surgiu com a primeira turbina de reação.

Sir Charles Algernon Parsons (1854-1931) foi um engenheiro britânico, mais conhecido por sua invenção da turbina a vapor, conforme demonstra a Figura 7).

Figura 7 – Primeira Turbina de Parson



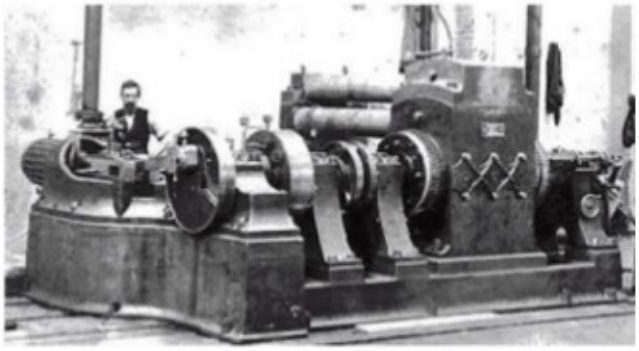
Fonte: Adaptado de (RAO, 2011, p. 38)

Devido a vibrações pesadas em máquinas reciprocantes com torque severo e flutuações de velocidade, essas turbinas são aclamadas de "motores sem vibração", pelo menos, nesse momento.

De Laval também conseguiu derivar o raio de giro em termos de excentricidade do eixo, rigidez do eixo e peso, explicando como o rotor gira suavemente além da velocidade crítica.

Com a invenção do Dynamo em 1878 por Thomas Alva Edison, e a instalação da Central Elétrica de Pearl Street em 1882, conforme ilustra a Figura 8, o caminho foi limpo para produzir eletricidade em uma escala sem precedentes, que trouxe uma expansão fenomenal da turbina a vapor.

Figura 8 – Dynamo Jumbo de Edison



Fonte: Adaptado de (RAO, 2011, p. 38)

A primeira parte do século XX viu turbinas de 2 MW, em 1920. A primeira máquina de 50 MW foi feita, e no final da II Guerra Mundial, as máquinas de 100 MW começaram a produzir energia. A capacidade subiu para 1000MW em 1970 e, em 1980, uma única máquina produziu eletricidade de 1500 MW.

Heinkel He-178 foi o primeiro avião turbojetado do mundo, que voou quase dois anos antes do Gloster britânico E28. Foi alimentado por um motor sem hélice, motor a jato ou turbina a gás em vez de um motor a pistão.

Hans von Ohain (1911-1998) estudou na Universidade de Göttingen e, aos 22 anos de idade, em 1933, concebeu a idéia de um motor de combustão de ciclo contínuo. Ele patenteou um projeto de motor de propulsão a jato, semelhante ao de Frank Whittle (1907-1996), mas diferente em arranjo interno isso ocorreu em 1934.

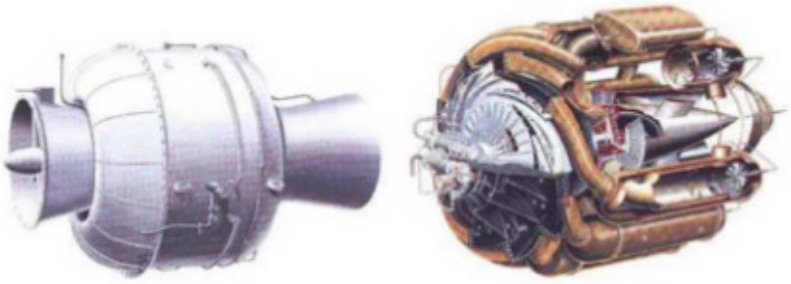
Hans von Ohain e Frank Whittle são ambos reconhecidos como co-inventores do motor a jato. Cada um trabalhou separadamente e não sabia nada sobre o trabalho do outro. Enquanto Hans von Ohain é considerado o designer do primeiro turbojato operacional, Frank Whittle foi o primeiro a registrar uma patente para o turbo-motor em 1930.

De acordo com Peter (1999), Frank Whittle era um oficial da Força Aérea Real, propôs em uma tese de que os aviões precisariam voar em altitudes elevadas, onde a resistência do ar é muito menor, para alcançar longos intervalos e altas velocidades. Os motores de pistão e as hélices não eram adequados para este fim. Então, Frank Whittle concluiu que a propulsão de foguete ou turbinas a gás, dirigindo propulsoras, seriam necessárias. Quanto a propulsão a jato, conforme Peter (1999), esta não estava no pensamento de Whittle. Mesmo porque, um motor de pistão usaria muito combustível, e com isso, pensou em usar uma turbina a gás e patenteou sua ideia.

Em 1935, a Whittle garantiu o apoio financeiro, e com a aprovação da RAF (*Royal A*), a Power Jets Ltd foi formada. Eles começaram a construir um motor de teste em julho de 1936, embora não foi conclusivo. Whittle concluiu que era necessária uma reconstrução completa, mas que não tinha as finanças necessárias. Assim, continuaram negociações prolongadas

com o Ministério do Ar e o projeto foi garantido em 1940. Em abril de 1941, o motor W.2, conforme a Figura 9, estava pronto para testes, produzindo impulso de 1600 lb.

Figura 9 – Motor de Hans Von Ohain (esquerda) e o Motor de Frank Whittle (direita)

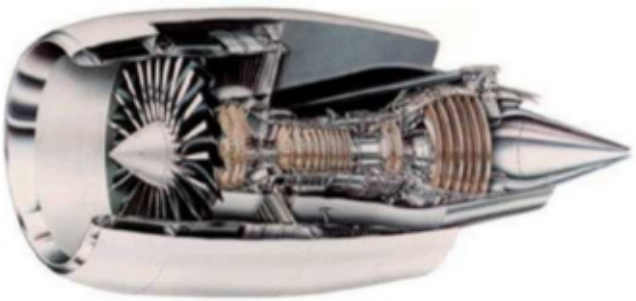


Fonte: Adaptado de (RAO, 2011, p. 39)

O primeiro voo Gloster E.28 / 39 ocorreu em 15 de maio de 1941. Em outubro, os americanos ouviram falar do projeto e pediram os detalhes e um motor. Uma equipe de Power Jets e o motor foram levados para Washington para permitir que a General Electric examinasse e começasse a construção. Os americanos trabalharam rapidamente e seu XP-59A Aircomet foi transportado pelo ar em outubro de 1942, algum tempo antes do British Meteor, que entrou em operação em 1944.

Em apenas seis décadas depois, o motor General Electric GE-90 115-B, ilustrado na Figura 10, é projetado para uma classificação de impulso de 115.000 libras (511 kN), tornando-se o motor a jato mais potente do mundo (GROUP, 2001).

Figura 10 – Motor GE-90



Fonte: Adaptado de (RAO, 2011, p. 40)

Durante o século XX, houve vários desafios no desenvolvimento de máquinas rotativas de alta velocidade, como turbinas a vapor, turbinas a gás e compressores de fluxo radial e axial, bem como combustores internos ou externos. Principais elementos que fazem parte do processo completo de unidades.

Enquanto a maquinaria de velocidade lenta poderia ser desenvolvida por metodologias de projeto, com as máquinas complexas de alta velocidade, era necessário determinar a estimativa precisa de várias quantidades de estado importantes.

Assim, posteriormente, em maio de 1942, Whittle percebeu que o Ministério da Produção de Aeronaves sentiu-se desconfortável com o projeto como um todo. Por isso, foi em resposta ao setor anterior por otimismo, tendo em vista que a freqüência de falhas da lâmina da turbina estava se tornando a última barreira tecnológica a superar.

Nessa perspectiva, os rotores com peças rotativas montadas continuam a ser os elementos mecânicos sujeitos a tensões de todas as máquinas, recebendo a máxima atenção em seu design.

Recapítulando, os eventos mais importantes na história das máquinas rotativas são apresentados na Figura 11.

Figura 11 – Eventos Mais Importantes na História das Máquinas Rotativas

Table 8.1 Significant events in the history of rotating machines

Year	Significant Event
2000000 BC	Beginning of Paleolithic or Old Stone Age – Dark Ages
13000 BC	Beginning of Mesolithic or Middle Stone Age - Earliest movement achieved to pull and push under log rollers
8000 BC	Beginning of Neolithic or New Stone Age – Agricultural villages
6000 BC	End of Stone Age – Pottery and pottery wheel
3000 BC	Wheel for transportation; sail ships
250 BC	Archimedes
200 BC	Hero's Aelopile – First reaction turbine
31 BC	Vitruvius and water wheel
700 AD	Wind mills
1543 AD	Copernicus and Scientific Revolution
1680 AD	Newton; Otto von Guericke
1690 AD	Papin; Savery; Newcomen
1750 AD	Euler
1780 AD	James Watt and Industrial Revolution
1883 AD	Laval and Parsons Edison, Pearl Street Station
1940 AD	Von Ohain and Frank Whittle
1980 AD	1500 MW steam turbine, cryogenic pumps accelerating to 100000 RPM in 4–5 seconds

Fonte: Adaptado de (RAO, 2011, p. 42)

Foram quase dois milhões de anos de existência de seres humanos que podem ser descritos como Idade da Pedra; o uso de ferramentas de pedra e a capacidade de se desenvolver diferencia o homem do reino animal. Há de se ver que, a cerca de 15000 anos atrás, o primeiro avanço veio na Idade da Pedra, onde o homem aprendeu uma maneira mais rápida de mover as coisas, inventando o trenó e o rolo. Embora ainda dependamos do trabalho humano, o primeiro passo foi tomado, e, conduzindo este ser humano à Idade da Pedra, em que o homem se estabeleceu, morando em uma aldeia em vez de ser totalmente nômades, inaugurando a Nova Era da Pedra.

Nesse processo, foram necessários mais 2000 anos para o homem inventar a primeira roda de cerâmica para fabricação. A partir disso, que desenvolveu sua capacidade de moldar nossas próprias ferramentas, acabando com a Idade da Pedra em surgimento a uma nova era sobre máquinas.

Consta-se que há cerca de 5000 anos, o homem transformou o tronco e a roda de cerâmica em uma roda no transporte, utilizando-se de boi. Ou seja, aprendeu a usar animais de forma extensiva, substituindo o trabalho humano. Com isso, sobrou tempo extra para o homem pensar sobre o que estava em seu entorno, passando a entender física, química e biologia, por exemplo.

No que concerne a isso, Hero fez tentativas iniciais para aproveitar a energia do vapor através de uma turbina. Posteriormente, a energia hidroelétrica começou a ser explorado sob a forma de rodas de água; E a energia eólica foi explorada sob a forma de moinhos de vento. No entanto, levou-se mais de 120 anos, para entender as leis básicas do movimento dos corpos; um pré-requisito para postular corretamente o movimento e a maquinaria de design de forma científica.

De certa forma, tem-se apenas cerca de três séculos de base de conhecimento na existência humana, com mais de dois milhões de anos. Um século depois, descobrimos que a pressão do vapor pode ser usada diretamente para nos dar mais poder eficiente do que princípios de vácuo. Isso ajudou o homem a desenvolvimento de motores rotativos a vapor em uma base firme e explorar a energia para as nossas necessidades industriais; uma rápida expansão, iniciando a Revolução Industrial.

A partir disto, grandes progressos em tecnologia foram feitos no século XX, no sentido de melhorar a maquinaria rotativa para o atual status no setor de energia, transporte, petróleo, gás e indústrias espaciais.

Portanto, olhando para a história da máquina rotativa, siginifica dizer que é possível entender sobre elas, embora também seja correto não saber muito sobre a mesma, imaginando o que nos reserva nos próximos 100 anos.

Capítulo 4

Fundamentação Teória de Equações Diferenciais Ordinárias

4.1 Equações Lineares Homogêneas Com Coeficiente Constantes

Consideremos, primeiramente, o caso particular da equação de segunda ordem

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{4.1}$$

onde a, b e c são constantes e $y = y(t)$. Se tentarmos encontrar uma solução da forma $y = e^{mt}$, com m constante, então, após substituição de $y' = me^{mt}$ e $y'' = m^2e^{mt}$, a equação (4.1) torna-se

$$am^2e^{mt} + bme^{mt} + ce^{mt} = 0 \quad ou \quad e^{mt}(am^2 + bm + c) = 0$$

Devido a $e^{mt} \neq 0$ para qualquer t, é evidente que a única maneira de $y = e^{mt}$ poder satisfazer a equação diferencial (4.1) é quando m é escolhido como uma raíz da equação quadrática

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{4.2}$$

Essa última equação é chamada de equação característica da equação diferencial (4.1). Uma vez que as duas raízes de (4.2) são $m_1 = (-b+\sqrt{b^2-4ac})/2a$ e $m_2 = (-b-\sqrt{b^2-4ac})/2a$, teremos três formas da solução geral de (4.1), cada uma correspondendo a um dos três casos:

- m_1 e m_2 são raízes reais e distintas ($b^2 - 4ac > 0$);
- m_1 e m_2 são raízes reais e iguais ($b^2 - 4ac = 0$); e
- m_1 e m_2 são números complexos conjugados ($b^2 - 4ac < 0$).

4.1.1 Raízes reais e distintas:

Sob a hipótese de que a equação característica (4.2) tenha duas raizes distintas m_1 e m_2, encontramos duas soluções $y_1 = e^{m_1 t}$ e $y_2 = e^{m_2 t}$. Essas funções são linearmente independentes em $(-\infty, +\infty)$ e, portanto, formam um conjunto fundamental. Segue então que a solução geral de (4.1) nesse intervalo é

$$y = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t} \tag{4.3}$$

4.1.2 Raízes reais e iguais

Quando $m_1 = m_2$, temos necessariamente uma única solução exponencial, $y_1 = e^{m_1 t}$. Segue que uma segunda solução da equação é $y_2 = te^{m_1 t}$. Assim a solução geral é então

$$y = c_1 e^{m_1 t} + c_2 te^{m_1 t}. \tag{4.4}$$

4.1.3 Raízes complexas conjugadas

Se m_1 e m_2 forem complexas, então podemos escrever $m_1 = \alpha + i\beta$ e $m_2 = \alpha - i\beta$, onde α e $\beta > 0$ são reais e $i^2 = -1$. Formalmente, não há diferença entre esse caso e o primeiro. Portanto

$$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)t} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)t}$$

Porém, na prática, preferimos trabalhar com funções reais, em vez de exponenciais complexas. Com essa finalidade, usamos a fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

onde θ é um número real qualquer. Dessa fórmula, segue que

$$e^{i\beta t} = \cos(\beta t) + i\sin(\beta t) \quad e \quad e^{-i\beta t} = \cos(\beta t) - i\sin(\beta t) \tag{4.5}$$

onde usamos que $\cos(-\beta t) = \cos(\beta t)$ e $\sin(-\beta t) = -\sin(\beta t)$. Observe que, primeiro somando e então subtraindo as duas equações em (4.5), obtemos, respectivamente,

$$e^{i\beta t} + e^{-i\beta t} = 2\cos(\beta t) \quad e \quad e^{i\beta t} - e^{-i\beta t} = 2i\sin(\beta t)$$

Uma vez que $y = c_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)t}$ é uma solução de (4.1) para qualquer escolha de c_1 e c_2, as escolhas $c_1 = c_2 = 1$ e $c_1 = 1, c_2 = -1$ nos dão, sucessivamente, duas soluções

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)t} + e^{(\alpha-i\beta)t} \quad e \quad y_2 = e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}$$

Mas

$$y_1 = e^{\alpha t}(e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}) = 2e^{\alpha t}\cos(\beta t)$$

e

$$y_2 = e^{\alpha t}(e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}) = 2ie^{\alpha t}\sin(\beta t).$$

Agora verificando que $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ e $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ são soluções reais de (4.1) e além disso, essa soluções formam um sistema fundamental em $(-\infty, +\infty)$. Consequentemente, a solução geral é

$$y = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t). \tag{4.6}$$

4.2 Duas Equações que Vale a Pena Conhecer

As equações diferenciais

$$y'' + k^2 y = 0 \quad e \quad y'' - k^2 y = 0$$

onde k é real, são importantes em matemática aplicada. Para $y'' + k^2 y = 0$, a equação característica $m^2 + k^2 = 0$ tem raízes imaginárias $m_1 = ki$ e $m_2 = -ki$. Substituindo $\alpha = 0$ e $\beta = k$ em (4.6), vemos que a solução geral da ED é

$$y = c_1\cos(kt) + c_2\sin(kt) \tag{4.7}$$

Entretanto, a equação característica $m^2 - k^2 = 0$ de $y'' - k^2 y = 0$ tem raízes reais e distintas $m_1 = k$ e $m_2 = -k$. Assim, de (4.3), a solução geral da ED é

$$y = c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt} \tag{4.8}$$

Observe que, se escolhermos $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ e $c_1 = \frac{1}{2}$ e $c_2 = -\frac{1}{2}$, obteremos de (4.8) a solução particular $y = \frac{1}{2}(e^{kt} + e^{-kt}) = \cosh(kt)$ e $y = \frac{1}{2}(e^{kt} - e^{-kt}) = \sinh(kt)$. Como $\cosh(kt)$ e $\sinh(kt)$ são linearmente independentes em qualquer intervalo do eixo t, uma forma alternativa da solução geral de $y'' - k^2 y = 0$ é

$$y = c_1\cosh(kt) + c_2\sinh(kt). \tag{4.9}$$

4.3 Coeficiente a Determinar

Para resolver uma equação diferencial linear não homogênea

$$ay'' + by' + cy = g(t) \tag{4.10}$$

É necessário adotar dois procedimentos:

- encontrar a função complementar y_c e
- encontrar qualquer solução particular y_p de (4.10).

Então, a solução geral de (4.10) em um intervalo é $y = y_c + y_p$. A função complementar y_c de (4.10) é a solução geral da equação homogênea associada

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Agora o objetivo é desenvolver um método para a obtenção de solução particulares. Um caminho para determinar uma solução particular y_p para a ED linear não homogênea que temos é o método dos coeficientes a determinar. A ideia subjacente a esse método é uma conjectura, um palpite bem informado sobre a forma de y_p, que é baseada nos tipos de funções que compõem a função de entrada $g(t)$.

O método geral é limitado a equações lineares, tais como (4.10), onde $g(t)$ é uma constante k, uma função polinomial, uma função exponencial $e^{\alpha t}$, uma função $\sin(\beta t)$ ou $\cos(\beta t)$, ou somas e produtos finitos dessas funções.

Isto é, $g(t)$ é uma combinação linear de funções do tipo

$$P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0, \;\; P(t)e^{\alpha t}, \;\; P(t)e^{\alpha t}\sin(\beta t) \;\; e \;\; P(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t)$$

onde n é um inteiro não negativo e α e β são números reais. O método dos coeficientes a determinar não é aplicavel a equações da forma (4.10) quando

$$g(t) = ln(t), \;\; g(t) = \frac{1}{t}, \;\; g(t) = \tan(t)$$

e assim por diante.

O conjunto de funções que consiste em constantes, polinômios, exponenciais $e^{\alpha t}$, senos e cossenos tem a propriedade notável de que as derivadas das respectivas somas e produtos são novamentes somas e produtos de constantes, polinômios, exponenciais $e^{\alpha t}$, senos e cossenos. Como a combinação linear de derivadas $ay'' + by' + cy$ deve ser idêntica a $g(t)$, é razoável supor que y_p tem a mesma forma de $g(t)$.

A Figura 12, ilustra alguns exemplos especificos de $g(t)$ em (4.10) com a forma correspondente da solução particular. Naturalmente, supondo que nenhuma função na suposta solução particular y_p faz parte da função complementar y_c.

Figura 12 – Alguns Exemplos Específicos de $g(t)$

Tabela 4.1 Soluções particulares

	$g(x)$	Forma de y_p
1.	1 (qualquer constante)	A
2.	$5x+7$	$Ax+B$
3.	$3x^2-2$	Ax^2+Bx+C
4.	x^3-x+1	Ax^3+Bx^2+Cx+E
5.	$\operatorname{sen} 4x$	$A\cos 4x+B\operatorname{sen} 4x$
6.	$\cos 4x$	$A\cos 4x+B\operatorname{sen} 4x$
7.	e^{5x}	Ae^{5x}
8.	$(9x-2)e^{5x}$	$(Ax+B)e^{5x}$
9.	x^2e^{5x}	$(Ax^2+Bx+C)e^{5x}$
10.	$e^{3x}\operatorname{sen} 4x$	$Ae^{3x}\cos 4x+Be^{3x}\operatorname{sen} 4x$
11.	$5x^2\operatorname{sen} 4x$	$(Ax^2+Bx+C)\cos 4x+(Ex^2+Fx+G)\operatorname{sen} 4x$
12.	$xe^{3x}\cos 4x$	$(Ax+B)e^{3x}\cos 4x+(Cx+E)e^{3x}\operatorname{sen} 4x$

Fonte: Adaptado de (ZILL, 2016, p. 152)

4.4 Sistema Massa-Mola

4.4.1 Lei de Hooke

Suponha que uma mola flexível esteja suspensa verticalmente em um suporte rígido e que então uma massa m seja conectado a sua extremidade livre. A distensão ou elongação da mola naturalmente dependerá da massa; massas com pesos diferentes distenderão a mola diferentemente. Pela Lei de Hooke, a mola exerce uma força restauradora F oposta a direção do alongamento e proporcional ao à distensão s. Enunciando, de forma mais simples:

$$F = k \cdot s,$$

onde k é uma constante de proporcionalidade chamada constante de rigidez.

A mola é essencialmente caracterizada por k.

Exemplo, Se uma massa de 10 gramas alonga em $\frac{1}{2}$ centímetro uma mola, $10 = k \cdot \frac{1}{2}$, implica que $k = 20$ g/cm. Então, uma massa de, digamos 8 gramas, necessariamente estica a mesmo mola somente $\frac{2}{5}$ cm.

4.4.2 Segunda Lei de Newton

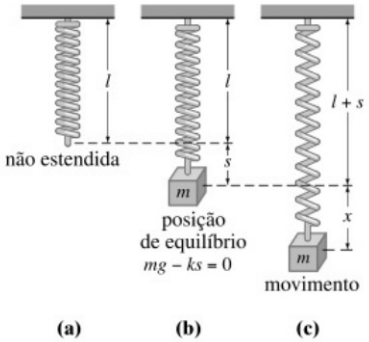
Depois que uma massa m é conectada a uma mola, provoca nesta uma distensão s e atinge sua posição de equilíbrio na qual seu peso W é igual sua força restauradora $k \cdot s$. Lembre-se que o peso é dado por $W = mg$, onde a massa é medida em slugs, quilogramas ou gramas e $g = 32$ pés/s^2, 9,8 m/s^2 ou 980 cm/s^2, respectivamente.

A condição de equilíbrio é $mg = ks$ ou $mg - ks = 0$. Se a massa for deslocada por uma quantidade x de sua posição de equilíbrio, a força restauradora da mola será $k(x+s)$. Supondo que não haja forças de retardamento sobre o sistema e supondo que a massa vibre sem a ação de outras forças externas - movimento livre, podemos igualar F com a força resultante do peso e da força restauradora:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(s+x) + mg = -kx + mg - ks = -kx. \tag{4.11}$$

É interessante observar que o sinal negativo indica que a força restauradora da mola age no sentido oposto ao movimento. Além disso, se combinar que deslocamento medidos abaixo da posição x=0 são positivos, a Figura 13 ilustra bem a variação entre os sinais.

Figura 13 – Sistema Massa-Mola



Fonte: Adaptado de (ZILL, 2016, p. 204)

4.4.3 Equação Diferencial do Movimento Livre Não-Amortecido

Dividindo (4.11) pela massa m, obtem-se a equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{4.12}$$

onde $\omega^2 = k/m$. Dizemos que a equação (4.12) descreve o movimento harmônico simples ou movimento livre não amortecido.

Duas condições iniciais associadas com (4.12) são $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = x_1$, representando, respectivamente o deslocamento e a velocidade inicial da massa.

4.4.4 Solução e Equação do Movimento

Para resolver a equação (4.12), há de se observar que as soluções da equação característica

$$m^2 + \omega^2 = 0$$

são números complexos $m_1 = \omega i$ e $m_2 = -\omega i$. Assim, determinamos a solução da EDO como sendo:

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t). \tag{4.13}$$

O período do movimento descrito por (4.13) é $T = \frac{2\pi}{\omega}$. O número T representa o tempo (medido em segundos) em que a massa leva para executar um ciclo de movimento. Um ciclo é uma oscilação completa da massa, isto é, o movimento da massa m do ponto mais baixo, abaixo da posição de equilíbrio, para o ponto mais alto, acima do posição de equilíbrio depois voltando para o ponto mais baixo.

Do ponto de vista gráfico T é duração do intervalo de tempo entre dois sucessivos máximos (ou mínimos) de $x(t)$. Lembre-se de que o máximo de $x(t)$ é um deslocamento positivo correspondente à distância máxima atingida pela massa abaixo da posição de equilíbrio, enquanto mínimo de $x(t)$ é um deslocamento negativo correspondente a altura máxima atingida pela massa acima da posição de equilíbrio.

A frequência do movimento é $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, e também o número de ciclos completos por segundos.

Exemplo: Se $x(t) = 2\cos(3\pi t) - 4\sin(3\pi t)$, o período é $T = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$ segundos, e a frequência $f = \frac{3}{2}$ ciclos/s. Do ponto de vista gráfico, $x(t)$ repete a cada 2/3 segundo, ou seja $x(t + 2/3) = x(t)$ e 3/2 do ciclos do gráfico são completados a cada segundo (ou, equivalentemente, três ciclos são concluídos a cada 2 segundos).

O número $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é chamado frequência natural do sistema. Finalmente, quando as condições iniciais forem usadas para determinar as constantes c_1 e c_2 em (4.13), diremos que a solução particular resultante ou resposta é a equação do movimento. Exemplo: Uma massa 2 libras distende uma mola em 6 polegadas. Em $t = 0$, a massa é solta 8 polegadas abaixo da posição de equilíbrio, a uma velocidade de $\frac{4}{3}$ pés/s para cima. Determine a equação do movimento.

Como estamos usando sistema de unidades da engenharia, as unidades dadas em polegadas devem ser convertidas em pés: 6 pol = $\frac{1}{2}$ pé; 8 pol = $\frac{2}{3}$ pé.

Além disso, precisamos converter as unidades de peso dadas em libras em unidades de massa. De $m = \frac{W}{g}$, temos $m = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ slug. Além disso, da lei de Hooke, $2 = k\frac{1}{2}$ implica que a constante da mola é $k = 4$ lb/pé. Logo a equação 4.11 resulta em

$$\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2} = -4x \quad + \frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0.$$

O deslocamento e a velocidade iniciais são $x(0) = \frac{2}{3}$, $x'(0) = -\frac{4}{3}$, onde o sinal negativo na última condição é uma consequência do fato de que é dada a massa uma velocidade inicial

na direção negativa ou para cima.

Como $\omega^2 = 64$ ou $\omega = 8$, a solução geral da equação diferencial é:

$$x(t) = c_1 \cos(8t) + c_2 \sin(8t).$$

Aplicando as condições inicias $x(t)$ e $x^{'}(t)$, obtemos $c_1 = \frac{2}{3}$ e $c_2 = -\frac{1}{6}$. Assim a equação do movimento será

$$x(t) = \frac{2}{3}\cos(8t) - \frac{1}{6}\sin(8t). \tag{4.14}$$

4.4.5 Forma Alternativa de $x(t)$

Quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$, a amplitude real A da vibração livre não é obvia com base no exame da equação (4.13). Por exemplo, embora a massa do exemplo tenha sido deslocada inicialmente $\frac{2}{3}$ pé além da posição de equilíbrio, a amplitude das vibrações é um número maior que $\frac{2}{3}$. Assim, em geral é conveniente converter uma solução da forma (4.13) na forma mais simples

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi), \tag{4.15}$$

onde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e ϕ é o ângulo de fase definido por

$$\sin(\phi) = \frac{c_1}{A}, \quad \cos(\phi) = \frac{c_2}{A} \Rightarrow \tan(\phi) = \frac{c_1}{c_2}.$$

Para verificar isso, pode-se desenvolver (4.15)usando a formula da adição do seno:

$$A\sin(\omega t)\cos(\phi) + A\cos(\omega t)\sin(\phi) = (A\sin(\phi))\cos(\omega t) + (A\cos(\phi))\sin(\omega t). \tag{4.16}$$

Segue da Fig. 14 que, se ϕ for definido por

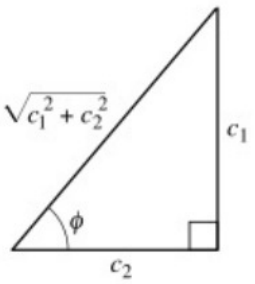
$$\sin(\phi) = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{c_1}{A}, \quad \cos(\phi) = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{c_2}{A},$$

então (4.16) se torna

$$A\frac{c_1}{A}\cos(\omega t) + A\frac{c_2}{A}\sin(\omega t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t) = x(t).$$

Segundo a Figura 14, abaixo, se ϕ for definido por:

Figura 14 – Relação entre $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ e ângulo de fase ϕ



Fonte: Adaptado de (ZILL, 2016, p. 206)

Exemplo: Em vista da discussão anterior, pode-se escrever a solução (4.14) na forma alternativa

$$x(t) = A\sin(8t + \phi).$$

O cálculo da amplitude é direto, considerando:

$$A = \sqrt{(2/3)^2 + (-1/6)^2} = \sqrt{17/36} \approx 0,69,$$

mas deve-se tomar algum cuidado quando se calcula o ângulo de fase ϕ dado por 7. Como $c_1 = 2/3$ e $c_2 = -1/6$, encontramos $\tan(\phi) = -4$, e uma calculadora tem-se, então $\tan^{-1}(-4) = -1,326$ rad. Isso não é ângulo de fase, uma vez que $\tan^{-1}(-4)$ está localizado no quarto quadrante e, portanto, contradiz o fato de que $\sin(\phi) > 0$ e $\cos(\phi) < 0$, pois $c_1 > 0$ e $c_2 < 0$. Logo, devemos tomar ϕ como o ângulo no segundo quadrante $\phi = \pi + (-1,326) = 1,816$ rad. Assim, (4.14) é o mesmo que

$$x(t) = \frac{\sqrt{17}}{6}\sin(8t + 1,816).$$

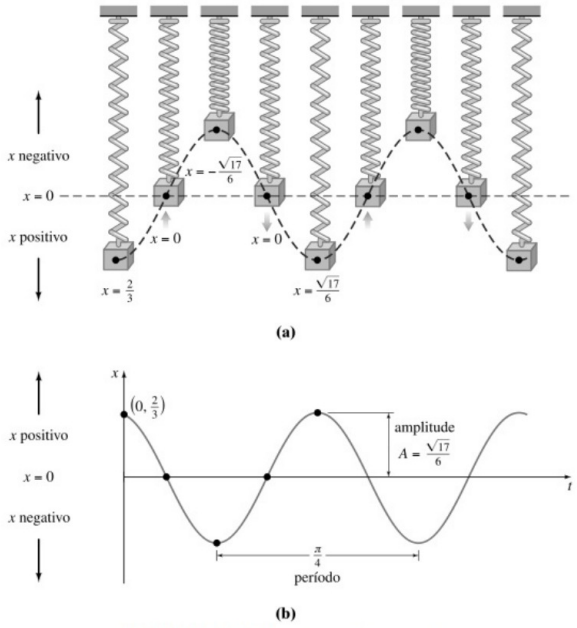
4.4.5.1 Interpretação Gráfica

A Figura 15 abaixo ilustra a massa do exemplo passando aproximadamente por dois ciclos completos de movimento. Lendo da esquerda para a direita, as cinco primeiras posições correspondem à posição inicial da massa abaixo da posição de equilíbrio ($x = 2/3$), da massa passando pela posição de equilíbrio pela primeira vez indo para cima ($x = 0$), da massa em seu deslocamento extremo acima da posição de equilíbrio ($x = \sqrt{17}/6$), da massa na posição de equilíbrio pela segunda vez e ida para baixo ($x = 0$) e da massa em seu deslocamento extremo abaixo da posição de equilíbrio ($x = \sqrt{17}/6$. Os pontos pretos no gráfico, dados na Figura 15 (b), também estão de acordo com as cinco posições que acabamos de apresentar. Observe, porém, que na Figura 15 (b) o sentido positivo no eixo x é a direção usual para cima e, portanto, é oposta da Figura 15 (a).

Logo o gráfico em cinza representa o movimento da massa, Figura 15 (b), que é a imagem refletiva da curva tracejada na Figura 15 (a).

A forma alternativa dada anteriormente é muito útil, uma vez que permite encontrar facilmente os valores do tempo para os quais o gráfico de $x(t)$ cruza a parte positiva do eixo t (a reta $x = 0$). Observamos que $\sin(\omega t + \phi)$, quando $\omega t + \phi = n\pi$, onde n é um inteiro não negativo.

Figura 15 – Movimento Harmônico Simples

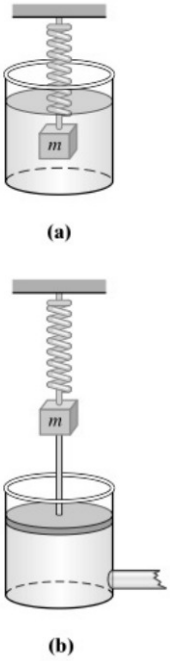


Fonte: Adaptado de (ZILL, 2016, p. 207)

4.4.5.2 Movimento Livre Amortecido

O conceito de movimento harmônico livre é um tanto quanto irreal, uma vez que é descrito por (4.11) sob a hipótese de que nenhuma força de retardamento age sobre a massa em movimento. Conforme a Figura 16, a massa poderia estar suspensa em um meio viscoso ou conectada a um dispositivo de amortecimento.

Figura 16 – Dispositivo de amortecimento



Fonte: Adaptado de (ZILL, 2016, p. 208)

4.4.5.3 Equação Diferencial do Movimento Livre Amortecido

No estudo de mecânica, as forças de amortecimento que atuam sobre um corpo são consideradas proporcionais a uma potência da velocidade instantânea. Em particular, suponha-se que durante toda a discussão subsequente, essa força seja dada por um múltiplo constante de $\frac{dx}{dt}$t. Quando não houver outras forças externas agindo sobre o sistema, segue da segunda lei de Newton, sendo:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt}, \tag{4.17}$$

onde β é positivo e chamado de constante de amortecimento e o sinal negativo é uma consequência do fato de que a força amortecedora age no sentido oposto ao do movimento.

Dividindo-se (4.17) pela massa m, obtemos a equação diferencial do movimento livre amortecido.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} = 0,$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \tag{4.18}$$

onde

$$2\lambda = \frac{\beta}{m}, \ \omega^2 = \frac{k}{m} \tag{4.19}$$

O símbolo 2λ foi usado somente por conveniencia algébrica, pois a equação característica é $m^2 + 2\lambda m + \omega^2 = 0$ e as raízes correspondentes são, portanto,

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}, \;\; m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

Agora, pode-se distinguir três casos possíveis, dependendo do sinal algébrico de $\lambda^2 - \omega^2$. Como cada solução contém o fator de amortecimento $e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, o deslocamento da massa fica despresível após um longo período.

1. $\lambda^2 - \omega^2 > 0$

   Nessa situação, dizemos que o sistema é superamortecido, pois o coeficiente de amortecimento β é grande quando comparado com a constante da mola k. A solução correspondente de (4.18) é $x(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$ ou

   $$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t} + c_2 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t}). \tag{4.20}$$

   Essa equação representa um movimento suave e não oscilatório. A Figura 17 apresenta dois gráficos possíveis de $x(t)$.

   Figura 17 – Movimento de um sistema superamortecido

   Fonte: Adaptado de (ZILL, 2016, p. 209)

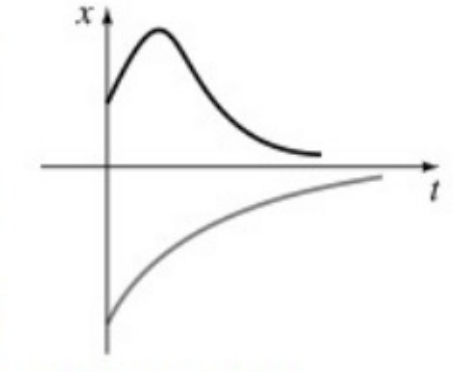
2. $\lambda^2 - \omega^2 = 0$

   Pode-se dizer, então que o sistema é criticamente amortecido, pois qualquer decréscimo na força de amortecimento resulta em um movimento oscilatório. A solução geral de (4.18) é $x(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 t e^{m_1 t}$ ou

   $$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 + c_2 t). \tag{4.21}$$

   Alguns gráficos típicos desse movimento são apresentados na Figura 18. Observe que o movimento é bem semelhante ao sistema superamortecido. também é evidente de (4.21) que a massa pode passar pela posição de equilíbrio no máximo uma vez.

Figura 18 – Movimento de um sistema criticamente amortecido



Fonte: Adaptado de (ZILL, 2016, p. 209)

3. $\lambda^2 - \omega^2 < 0$

   Nesse caso, diz que o sistema é subamortecido, pois o coeficiente de amortecimento é pequeno quando comparado com a constante da mola. As raízes m_1 e m_2 agora são complexas:

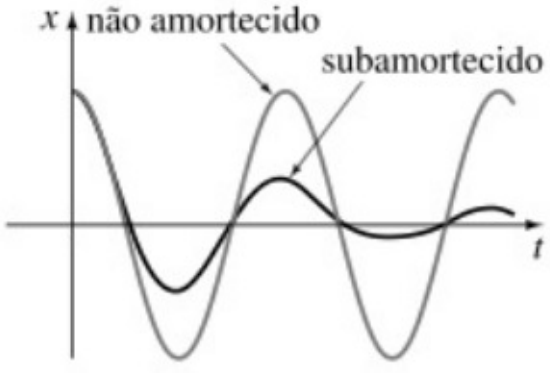
$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,i, \quad m_2 = -\lambda - \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,i$$

   Assim, a solução geral da equação (4.18) é

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 \cos(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t) + c_2 \sin(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t). \tag{4.22}$$

   Conforme indicado na Figura 19, o movimento descrito por (4.22) é oscilatório; mas, por causa do fator $e^{-\lambda t}$, as amplitudes de vibração $\to 0$ quanto $t \to 0$.

Figura 19 – Movimento de um sistema subamortecido



Fonte: Adaptado de (ZILL, 2016, p. 209)

Observação 1. De forma idêntica, tratada anteriormente, pode-se escrever qualquer solução:

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 \cos(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t) + c_2 \sin(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t)$$

na forma alternativa

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\sin(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t+\phi). \tag{4.23}$$

O coeficiente $Ae^{-\lambda t}$ é algumas vezes chamado de amplitude de amortecimento das vibrações. Como (4.23) não é uma função periódica, o número $2\pi/\sqrt{\omega^2-\lambda^2}$ é chamado de quase-período e $\sqrt{\omega^2-\lambda^2}/2\pi$ é quase-frequência. O quase-período é o intervalo de tempo entre dois máximos sucessivos de $x(t)$.

4.4.6 Movimento Forçado

4.4.6.1 Equação diferencial do movimento forçado com amortecimento

Consideremos agora uma força externa $f(t)$ agindo sobre uma massa vibrante em uma mola. Por exemplo, $f(t)$ pode representar uma força que gera um movimento oscilatório vertical do suporte da mola, Figura 20. A inclusão de $f(t)$ na formulação da segunda lei de Newton resulta na equação diferencial do movimento forçado ou induzido

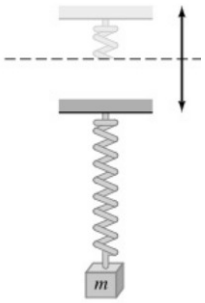
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt} + f(t) \tag{4.24}$$

Dividindo (4.24) por m, obtemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F(t) \tag{4.25}$$

onde $F(t) = f(t)/m$. Como anteriormente, $2\lambda = \beta/m$ e $\omega^2 = k/m$. Para resolver essa última equação não homogênea, pode-se usar o método dos coeficientes a determinar.

Figura 20 – Movimento oscilatório vertical do suporte



Fonte: Adaptado de (ZILL, 2016, p. 211)

Dado o problema de valor inicial:

$$\frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2} + 1{,}2\frac{dx}{dt} + 2x = 5\cos(4t), \quad x(0) = \frac{1}{2}, \quad x'(0) = 0. \tag{4.26}$$

Este problema representa um sistema vibrante que consiste em uma massa ($m = \frac{1}{5}$) presa a uma mola ($k = 2$). A massa inicialmente é solta do repouso $\frac{1}{2}$ unidade abaixo da posição de equilíbrio. O movimento é amortecido ($\beta = 1,2$) e está sendo pressionado por uma força externa periódica ($T = \pi/2$) que começa em $t = 0$. Intuitivamente, poderíamos esperar que, mesmo com o amortecimento, o sistema continuasse em movimento até o instante em que a força externa fosse "desligada", caso em que a amplitude diminuiria. Porém, da forma como o problema foi dado, $f(t) = 5\cos(4t)$ permanecerá "ligada" sempre.

Em primeiro lugar, multiplicamos a equação diferencial (4.26) por 5 e resolvemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 10x = 0$$

empregando os métodos usuais. Como $m_1 = -3 + i$, $m_2 = -3 - i$, segue que

$$x_c(t) = e^{-3t}(c_1\cos(t) + c_2\sin(t)).$$

Usando o método dos coeficientes a determinar, procuramos uma solução particular da forma

$$x_p(t) = A\cos(4t) + B\sin(4t).$$

Segue assim, que

$$x(t) = e^{-3t}(c_1\cos(t) + c_2\sin(t)) - \frac{25}{102}\cos(4t) - \frac{50}{51}\sin(4t) \tag{4.27}$$

Fazento $t = 0$ na equação anterior, obtemos $c_1 = \frac{38}{51}$. Diferenciando a expressão e então fazendo $t = 0$, obtemos que $c_2 = -\frac{86}{51}$. Portanto, a equação de movimento é

$$x(t) = e^{-3t}(\frac{38}{51}\cos(t) - \frac{86}{51}\sin(t)) - \frac{25}{102}\cos(4t) - \frac{50}{51}\sin(4t)$$

4.4.6.2 Termos transientes (transitórios) e estacionários

Se F for uma função periódica, tal como $F(t) = F_0\sin(\gamma t)$ ou $F(t) = F_0\cos(\gamma t)$, a solução geral de (4.25) para $\lambda > 0$ é a soma de uma função não periódica $x_c(t)$ e uma função periódica $x_p(t)$. Além disso, $x_c(t)$ torna-se desprezível à medida que o tempo decorre. Assim, para grandes valores do tempo, o movimento da massa é aproximado bem de perto pela solução particular $x_p(t)$. A função complementar $x_c(t)$ é chamada então de termo transiente ou solução transiente e a função $x_p(t)$, a parte da solução que permanece após um intervalo

de tempo, é chamada de termo estacionário ou solução estacionária. Observe então que o efeito das condições iniciais sobre um sistema massa-mola induzido por F é transiente.

Exemplo: A solução do problema de valor inicial

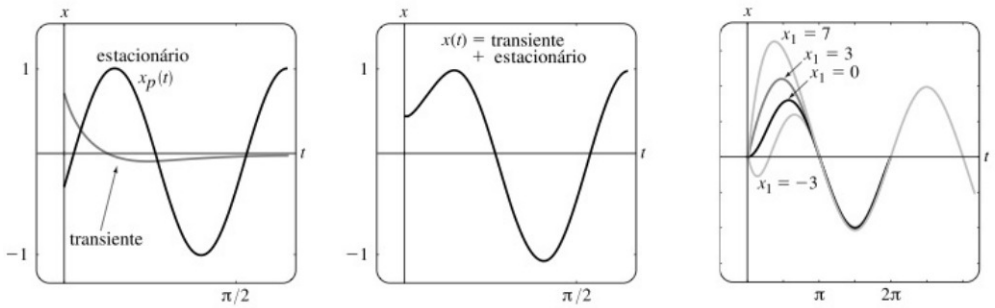
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 4\cos(t) + 2\sin(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = x_1.$$

onde x_1 é constante, é dada por

$$x(t) = (x_1 - 2)e^{-t}\sin(t) + 2\sin(t)$$

Curvas integrais para valores selecionados da velocidade inicial x_1 estão na Figura 21. Os gráficos mostram que a influência do termo transiente é desprezível para $t > 3\pi/2$.

Figura 21 – Gráfico das soluções



Fonte: Adaptado de (ZILL, 2016, p. 212)

4.4.6.3 Equação diferencial de um movimento forçado não amortecido

Se houver a ação de uma força externa periódica, e nenhum amortecimento, não haverá termo transiente na solução de um problema. Pode-se observar também que uma força externa periódica, com uma frequencia próxima ou igual à das vibrações livres não amortecidas pode causar danos severos a um sistema mecânico oscilatório.

Exemplo:O problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0\sin(\gamma t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0. \tag{4.28}$$

onde F_0 é uma constante e $\gamma \neq \omega$.

A função complementar é $x_c(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)$. Para obter uma solução particular, vamos experimentar $x_p(t) = A\cos(\gamma t) + B\sin(\gamma t)$ de tal forma que

$$A = 0 \;\; e \;\; B = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}.$$

Logo, têm-se

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}\sin(\gamma t)$$

Aplicando as condições iniciais dadas à solução geral

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

obtemos $c_1 = 0$ e $c_2 = \frac{-\gamma F_0}{\omega(\omega^2-\gamma^2)}$. Assim, a solução será

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2-\gamma^2)}(-\gamma\sin(\omega t) + \omega\sin(\gamma t)), \quad \gamma \neq \omega \tag{4.29}$$

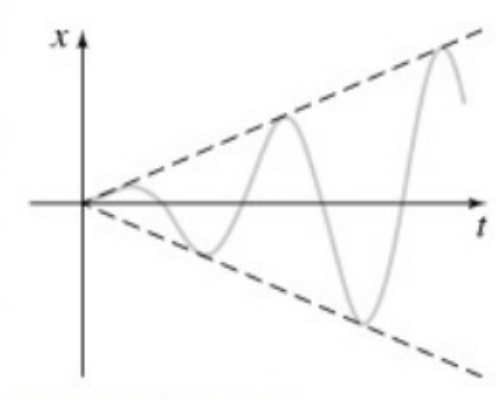
4.4.6.4 Ressonância Pura

Embora (4.29) não esteja definida para $\gamma = \omega$, é interessante observar que seu valor limite quando $\gamma \to \omega$ pode ser obtido aplicando a regra de L'Hôpital. O processo limite é análogo a "sintonizar" a frequência da força externa ($\frac{\gamma}{2\pi}$) com a frequência da vibração livre ($\frac{\omega}{2\pi}$). Intuitivamente, espera-se que, após algum tempo, possa aumentar substancialmente a amplitude de vibração. Para $\gamma = \omega$, define-se a solução como

$$\begin{aligned} x(t) = \lim_{\gamma\to\omega} F_0\frac{-\gamma\sin(\omega t) + \omega\sin(\gamma t)}{\omega(\omega^2-\gamma^2)} &= F_0\lim_{\gamma\to\omega}\frac{\frac{d}{d\gamma}(-\gamma\sin(\omega t) + \omega\sin(\gamma t))}{\frac{d}{d\gamma}(\omega^3 - \omega\gamma^2)} \\ &= F_0\lim_{\gamma\to\omega}\frac{-\sin(\omega t) + \omega t\cos(\gamma t)}{-2\omega\gamma} \\ &= F_0\frac{-\sin(\omega t) + \omega t\sin(\omega t)}{-2\omega^2} \\ &= \frac{F_0}{2\omega^2}\sin(\omega t) - \frac{F_0}{2\omega}t\cos(\omega t). \end{aligned}$$

Como suspeitava, quanto $t \to \infty$, os deslocamentos tornam-se grandes; de fato, $|x(t_n)| \to \infty$ quanto $t_n = \frac{n\pi}{\omega}$, $n = 1, 2, \cdots$. O fenômeno a qual se descreve é conhecido como Ressonância pura. O gráfico dado na Figura 22 mostra um movimento típico nesse caso.

Figura 22 – Ressonância Pura



Fonte: Adaptado de (ZILL, 2016, p. 213)

Capítulo 5

Dinâmica de Rotores

5.1 Introdução

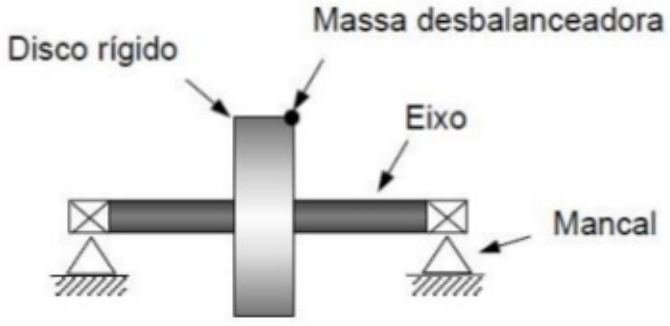
Os rotores consistem de um disco rígido montado sobre um eixo flexível ou rígido e mancais rígidos e flexíveis. São apoiados em mancais que são os responsáveis pela ligação entre a parte móvel e a estrutura fixa de uma máquina rotativa. Além de absorvedor de energia, outra importante função dos mancais é o de guiar ou restringir movimentos durante a rotação do eixo.

As vibrações do rotor podem ser síncronas, quando a velocidade de rotação for igual à velocidade orbital, e assíncronas quando forem diferentes.

Os movimentos de precessão podem também ser sincronizados com a rotação do rotor ou não. Normalmente, as precessões síncronas ocorrem devido ao desbalanceamento de um rotor, no entanto, nem todas as precessões são síncronas.

Um modelo mais elaborado para evidenciar o surgimento das velocidades críticas em rotores consiste de um disco rígido desbalanceado montado sobre um eixo flexível e mancais rígidos, Figura 23. Este modelo de rotor, chamado de Jeffcott rotor, explica como a amplitude se torna máxima na velocidade crítica, e porque a massa desbalanceadora se movimenta internamente à órbita do rotor.

Figura 23 – Rotor Flexível

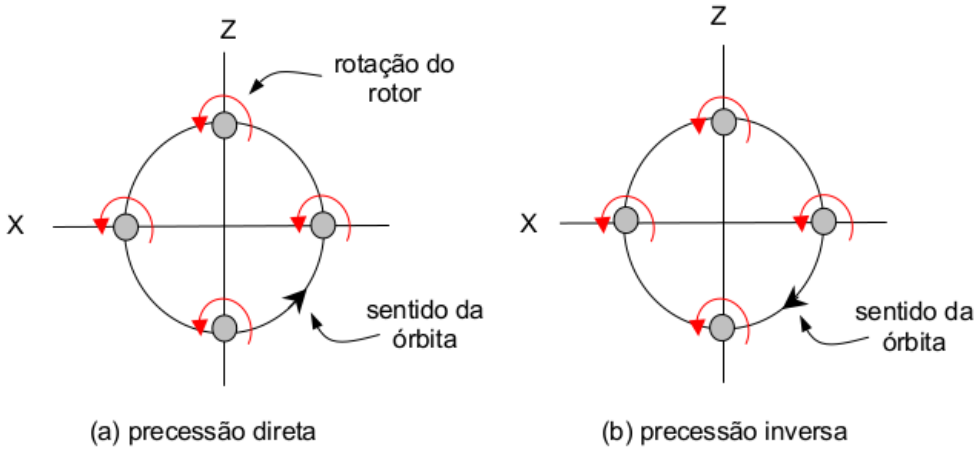


Fonte: Adaptado de (PEREIRA, 2005, p. 07)

5.2 Movimento de um Sistema Rotativo

Um sistema rotativo, que ser pode composto basicamente de um eixo, um disco e mancais, realiza dois movimentos rotativos superpostos: a rotação em torno de si próprio (rotação própria ou spin) e rotação do eixo defletido em torno de sua configuração não defletida (precessão ou whirl). A órbita que realiza o centro geométrico pode ter uma trajetória no mesmo sentido que a rotação própria do rotor. Movimento caracterizado como precessão direta (forward whirl), ou ter sentido oposto, caracterizado como precessão retrógrada ou inversa (backward whirl), conforme ilustra a Figura 24.

Figura 24 – Precessão Direta e Inversa

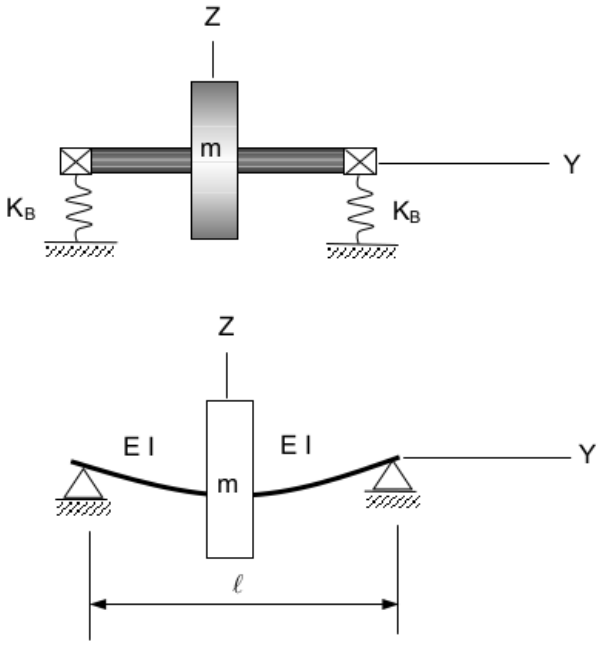


Fonte: Adaptado de (PEREIRA, 2005, p. 08)

5.3 Modelo Massa-Mola

O modelo mais simples para análise da vibração de um rotor é o sistema massa-mola. Se o rotor for relativamente rígido comparado com os mancais, à massa efetiva m é a massa total do rotor, e a rigidez efetiva $k = 2k_b$ é a rigidez dos mancais. Se o rotor for relativamente flexível, comparado com a rigidez dos mancais, a rigidez efetiva será determinada pela rigidez da flexão do eixo k, conforme pode-se observar na Figura 25, onde E é o Módulo de Elásticidade do material do eixo e I é o momento de inércia da seção, e o produto EI representa a rigidez do eixo. Se considerar que a deflexão ocorrerá em duas direções ortogonais X e Z, o sistema terá dois graus de liberdade. Quando se leva em conta a influência da ação giroscópica, mais dois graus de liberdade devem ser considerados.

Figura 25 – Comparação da rigidez dos mancais e rigidez da flexão do eixo

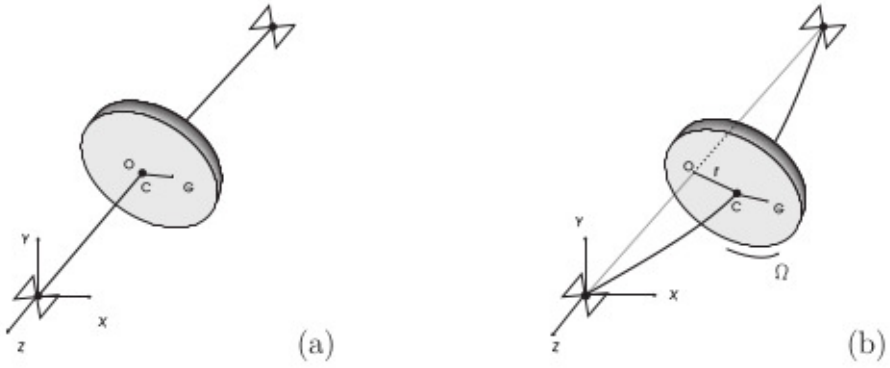


Fonte: Adaptado de (PEREIRA, 2005, p. 05)

5.3.1 O Rotor de Jeffcott

O rotor de Jeffcott é muito útil para se estabelecer conceitos e definições importantes. É um modelo simplificado que guarda muitas das características de um sistema mais complexo. Consiste de um eixo flexível sem massa com um disco central suportado por mancais idênticos. O eixo Z do sistema de coordenadas XYZ coincide com a linha de centro dos mancais. Devido a um desbalanceamento u, conhecido como excentricidade, o centro de massa G não coincide com o centro geométrico C do disco. Quando o rotor está em repouso, o ponto C coincide com o centro elástico O, pertencente à linha de centro dos mancais, como ilustra a Figura 26.

Figura 26 – Rotor em Repouso e girando com velocidade Ω



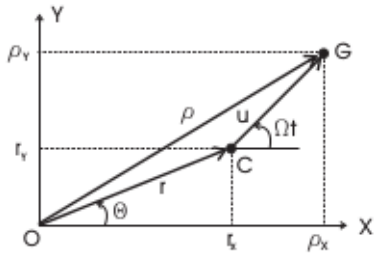
Fonte: Adaptado de (PEDREIRA, 2006, p. 22)

Quando o rotor é acionado a uma velocidade Ω constante, a força devida ao desbalanceamento deslocará o ponto C de r em relação à linha de centro dos mancais.

Observando a Figura 27 e aplicando as Leis de Newton, obtém-se:

$$\begin{aligned} m\rho_x'' &= -kr_x \\ m\rho_y'' &= -kr_y \end{aligned} \tag{5.1}$$

Figura 27 – Rotor de Jeffcott em coordenadas cartesianas



Fonte: Adaptado de (PEDREIRA, 2006, p. 22)

Substituindo as relações (5.2)

$$\begin{aligned} \rho_x &= r_x + u\cos(\Omega t) \\ \rho_y &= r_y + u\sin(\Omega t) \end{aligned} \tag{5.2}$$

em (5.1), obtem-se

$$\begin{aligned} mr_x'' + kr_x &= mu\Omega^2\cos(\Omega t) \\ mr_y'' + kr_y &= mu\Omega^2\sin(\Omega t) \end{aligned} \tag{5.3}$$

A equações (5.3) mostram que os movimentos nas direções X e Y são desacopladas. Introduzindo as variáveis $x = r\cos(\Omega t - \beta)$ e $y = r\sin(\Omega t - \beta)$ e $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ obtem-se

$$r'' + \omega^2 r = u\Omega^2 e^{i\Omega t} \tag{5.4}$$

Uma solução particular de resposta em regime permanente, é dada para $\Omega \neq \omega$, por

$$\begin{aligned} x &= u\frac{u\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}\cos(\Omega t - \beta) \\ y &= u\frac{u\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}\sin(\Omega t - \beta) \end{aligned} \tag{5.5}$$

onde $r = u\frac{u\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}$.

5.4 Analise do modelo Jeffcott rotor

A Figura 28 apresenta a vista de uma das extremidades do modelo Jeffcott rotor realizando uma precessão. O centro de massa está em M. O ponto C localiza o centro geométrico do disco. O deslocamento estático do desbalanceamento é $d = C\bar{M}$ e a deflexão do eixo do rotor devido as cargas dinâmicas é $r = \bar{OC}$. A força de gravidade é considerada desprezível comparada às forças dinâmicas.

O eixo do rotor é considerado ter rigidez k, o disco tem massa m, o amortecimento viscoso do conjunto é c e a velocidade de rotação do rotor é Ω. As equações diferenciais que fornecem o movimento do centro do disco em coordenadas cartesianas X e Z são da forma:

$$\begin{aligned} mX'' + cX' + kX &= m\Omega^2 d\sin(\Omega t) \\ mZ'' + cZ' + kZ &= m\Omega^2 d\cos(\Omega t) \end{aligned} \tag{5.6}$$

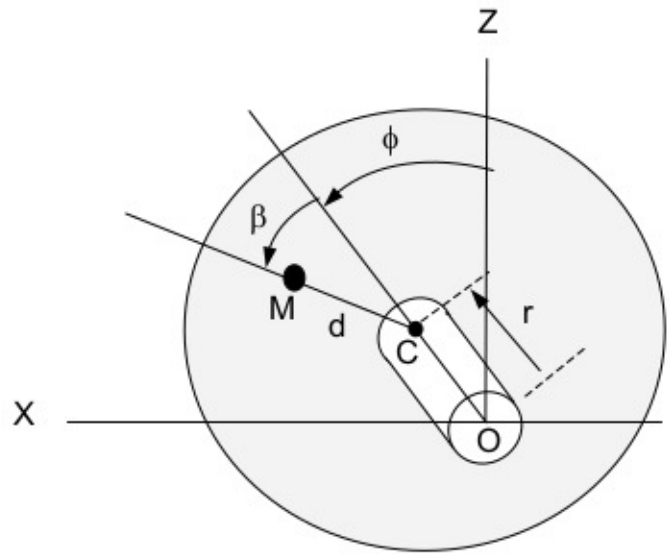
A solução da equação (5.6) para a precessão síncrona é:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\Omega^2 d}{\sqrt{(k/m-\Omega^2)^2 + (c\Omega/m)^2}}\sin(\Omega t - \beta) \\ Z &= \frac{\Omega^2 d}{\sqrt{(k/m-\Omega^2)^2 + (c\Omega/m)^2}}\cos(\Omega t - \beta) \\ \beta &= \tan^{-1}\left(\frac{c\Omega}{m(k/m-\Omega^2)}\right) \end{aligned} \tag{5.7}$$

De acordo com a Figura 28, conclui-se que a deflexão do eixo do rotor é:

$$r = \sqrt{X^2 + Z^2} = \frac{\Omega^2 d}{\sqrt{(k/m-\Omega^2)^2 + (c\Omega/m)^2}}. \tag{5.8}$$

Figura 28 – Rotor de Jeffcott realizando uma precessão

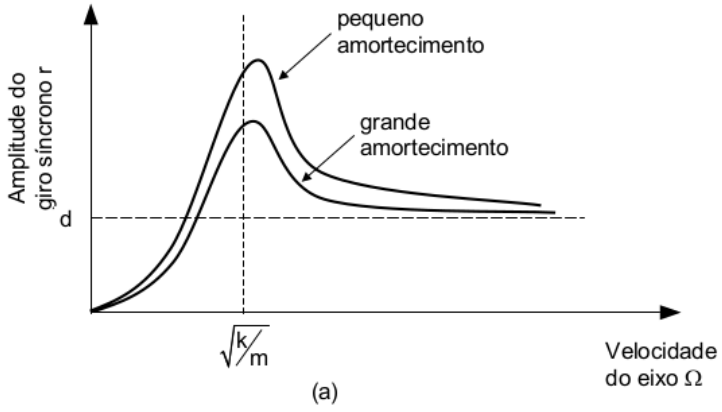


Fonte: Adaptado de (PEREIRA, 2005, p. 11)

5.4.1 Significado físico das soluções

A Figura 29 mostra como a amplitude da precessão síncrona aumenta com a aproximação da velocidade crítica, e, após a passagem pela velocidade crítica, diminui e se aproxima assintoticamente do deslocamento estático d do desbalanceamento nas velocidades supercríticas (acima das velocidades críticas). Desta forma, em altas velocidades, a amplitude em precessão síncrona pode ser pequena com o balanceamento do rotor.

Figura 29 – Resposta à um desbalanceamento do Rotor Jeffcott 1



Fonte: Adaptado de (PEREIRA, 2005, p. 12)

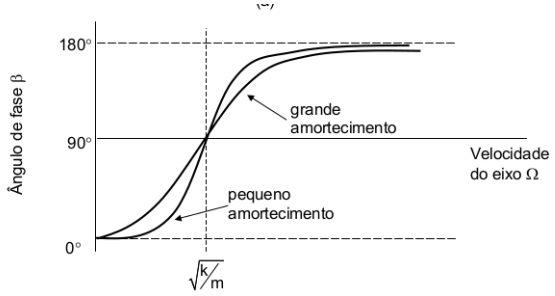
Em velocidades próximas da velocidade crítica, pode ser visto que o parâmetro mais importante para a redução da amplitude é o amortecimento.

A Figura 29 também fornece a definição de velocidade crítica. A velocidade na qual a resposta síncrona, devido ao desbalanceamento, é máxima. A Figura 30 explica a razão pela

qual a amplitude se aproxima assintoticamente do deslocamento estático d do desbalanceamento.

Quando a velocidade crítica é atravessada, o ângulo β passa por 90^0 e se aproxima de 180^0 nas velocidades supercríticas. Assim, para altas velocidades, o centro de massa M gira internamente à órbita realizada pelo disco, e o centro do disco C gira em torno do centro de massa M com uma amplitude igual ao deslocamento estático d do desbalanceamento. Este fenômeno é chamado de inversão da velocidade crítica. Observa-se que o centro de massa M se mantém externamente a órbita realizada pelo disco nas baixas velocidades $\Omega < \sqrt{\frac{k}{m}}$, e o desbalanceamento está defasado de 90^0 do vetor V, na velocidade crítica não amortecida $\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Figura 30 – Resposta à um desbalanceamento do Rotor Jeffcott 2



Fonte: Adaptado de (PEREIRA, 2005, p. 12)

Capítulo 6

Conclusão

O objetivo principal deste trabalho foi produzir um material de fácil acesso a professores do ensino médio e alunos de graduação da área de exatas, como uma forma de entender a dinâmica do rotor a partir do método analítico, ou seja, a Segunda Lei de Newton aplicada ao modelo do rotor.

Fica claro o quanto é difícil compreender as disciplinas exatas. Existe o desafio de identificar a importância destas matérias na vida cotidiana, fora do ambiente escolar. Por este motivo, entende-se que desenvolver nas aulas das disciplinas de exatas atividades de estímulos ao desenvolvimento da autoestima e capacidade de enfrentamento de situações não familiares ou na concepção do raciocínio logico, é extremamente importante para estimular o educando ao aprendizado dos conteúdos.

Dessa forma, é que apresentamos o tema, Dinâmica do rotor de maneira detalhada, com uma fundamentação histórica, bem como teórica de EDO, com o significado físico das soluções, das equações de energia dos elementos do rotor e diagrama de Campbell. Isso é fundamental para que o aluno absorva de forma significativa esse conteúdo. Além do mais, oferecer suporte teórico também é importante para as Modelagens e para outras aplicações matemáticas. Nota-se que a modelagem pelo método de lagrange, permite a consolidação da premissa de que é possível aproximar os conteúdos matemáticos da realidade, bem como entendê-la como um instrumento fundamental das análises de casos reais.

Por fim, acredita-se que o Ensino da matemática tenha caminhado no sentido de se remover o estigma de complexidade que paira sobre o assunto tratado nesta dissertação, tornando o estudo do rotor e sua Modelagem mais simples e prazeroso.

REFERÊNCIAS

BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. São Paulo: Unicamp IMECC, Livros Didáticos, 2006. Citado na página 12.

BECK, J. V.; ARNOLD, K. J. *Parameter Estimation in Engineering and Science*. New York: John Wiley and Sons, 1977. Citado na página 18.

BENDAT, J.; PIERSOL, A. *Random Data: Analysis and Measurements Procedures*. [S.l.]: John Willey Interscience, 1971. Citado na página 17.

BRASIL. *Leis de Diretrizes e Bases para a Educação Brasileira*. Brasília: MEC, 1998. Citado na página 14.

____. *Orientações para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e sua Tecnologias*. Brasília: MEC, 2006. Citado na página 14.

BURBANO, C. E. R. *Diagnóstico de Falhas em Máquinas Rotativas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlância-MG, 2005. Citado na página 19.

CONCEIÇÃO, F. H. G.; ALMEIDA, M. J. de M. Dificuldades de alunos da eja em relação a conteúdos matemáticos. *VI Colóquio Internacional "Educação e Contemporaneidade"*, p. 1–14, 2012. Citado na página 13.

____. Situações-problema como ferramenta metodológica para o ensino de matemática na educação de jovens e adultos. *Revista Científica da FASETE*, p. 81–92, 2015. Citado na página 13.

DIMAROGONAS, A. D. Vibration of cracked structures - a state of the art review. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 55, p. 831–857, 1996. Citado na página 20.

DRACHMANN, A. Heron's windmill. *Centaurus*, v. 7, p. 145, 1961. Citado na página 27.

EWINS, D. J. *Modal Testing: Theory and Pratice*. England: Research Studies Press Ltd and John Wiley and Sons Ltd, 1995. Citado na página 16.

EWINS, D. J.; DIMAROGONAS, A. D. Vibration of cracked structures - a state of the art review. *Engineering Fracture Mechanics*, p. 831–857, 1996. Citado na página 18.

FADDEEV, D. K.; FADDEEV, V. N. *Computational Methods of Linear Algebra*. San Francisco: W. H. Freeman Company, 1963. Citado na página 17.

FASANA, A.; PIOMBO, A. D. Identification of linear mechanical system by deconvolution techniques. *Mechanical System and Signal Processing*, v. 11, n. 3, p. 351–373, 1997. Citado na página 18.

FELLMANN, E. A. *Leonhard Euler, Translated by E. Gautschi and W. Gautschi*. Berlin: Birkhauser Verlag, 2007. Citado na página 26.

GASCH, R. A survey of the dynamic behaviour of a simple rotating shaft with a transverse crack. *Journal of Sound and Vibration*, p. 313–332, 1993. Citado na página 20.

GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. *Matrix Computations*. Baltimore: John Hopkins University Press, 1996. Citado na página 17.

GROUP, S. *GE90-115B Exceeds 120000 Pounds of Thrust During Test*. 2001. <http://www.le-webmag.com/article.php3?idarticle=26&lang=en>. Citado na página 34.

HAN, S. M.; BENAROYA, H.; WEI, T. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, v. 225, p. 935, 1999. Citado na página 28.

HEATH, T. L. *The Works of Archimedes, edited in modern notation, with introductory chapters*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1897. Citado na página 25.

INMAN, D. *Engineering Vibration*. USA: Prentice Hall Inc., 1994. Citado na página 17.

MAN, T. of. *Technology of Man*. [S.l.]: United Technologies Corporation, 1979. Citado na página 21.

MCCONNELL, A. *Papin, Denis (1647-1712?)*. [S.l.]: Oxford Dictionary of National Biography, Oxford University Press, 2004. Citado na página 29.

OGG, D. *Europe of the Ancient Regime: 1715-1783*. [S.l.]: Harper e Row, 1965. Citado na página 31.

PARSONS, C. A. *The Steam Turbine*. [S.l.]: The Rede Lecture, Cambridge University Press, 1911. Citado na página 32.

PEDERSEN, O. *Early Physics and Astronomy: A Historical Introduction*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

PEDREIRA, J. A. *Dinâmica de Máquinas Rotativas em Mancais Hidrodinâmicos*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro-RJ, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 58.

PEREIRA, J. C. *Introdução à Dinâmica de Rotores*. UFSC, Florianópolis: Notas de Curso, 2005. Citado 6 vezes nas páginas 18, 55, 56, 57, 60 e 61.

PETER, J. S. The history of aircraft gas turbine engine development in the united states? a tradition of excellence. *ASME Publications*, 1999. Citado na página 33.

PHILLIPS, C. L.; PARR, J. M. *Signals, Systems and Transforms*. USA: Prentice Hall Inc., 1995. Citado na página 17.

PRONY, R. W. Essai experimental et analytique sur les lois de la dilatabilite des fluides elastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alkool, a differentes temperatures. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, v. 1, n. 2, p. 24–76, 1795. Citado na página 18.

RAO, J. S. Two hundred years after his retirement. *10th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, Finland, v. 1, p. 63, 1999. Citado na página 31.

____. *History of Rotating Machinery Dynamics*. [S.l.]: Springer, 2011. Citado 10 vezes nas páginas 21, 22, 23, 24, 26, 30, 32, 33, 34 e 35.

TAMAGNA, A. *Vibrações*. UFRGS, Porto Alegre: Notas de Curso, 1998. Citado na página 17.

TIMOSHENKO, S. P. *History of Strength of Materials*. [S.l.]: McGraw-Hill Book Co, 1955. Citado na página 28.

WAUER, J. On the dynamics of cracked rotor: A literature survey. *Applied Mechanics Reviews*, v. 43, p. 13–17, 1990. Citado na página 20.

WHEELER, A. J.; GANJI, A. R. *Introduction to Engineering Experimentation*. USA: Prentice Hall Inc., 1996. Citado na página 16.

ZILL, D. G. *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem*. [S.l.]: Cengage Learning, 2016. Citado 10 vezes nas páginas 41, 42, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 52 e 54.