



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO



DANIEL FERREIRA GONÇALVES

**INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS DE REDUÇÃO DE MODELOS
ADAPTADOS A SISTEMAS MECÂNICOS COM CARACTERÍSTICAS NÃO
LINEARES**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CATALÃO – GO, 2016

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: ☒ **Dissertação** ☐ **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

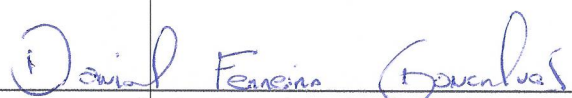
Nome completo do autor: Daniel Ferreira Gonçalves

Título do trabalho: *Introdução aos Métodos de Redução de Modelos Adaptados a Sistemas Mecânicos com Características Não Lineares.*

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento ☒ **SIM** ☐ **NÃO**¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.


Assinatura do autor ²

Data: 11 / 04 / 2016

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

² A assinatura deve ser escaneada.

DANIEL FERREIRA GONÇALVES

INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS DE REDUÇÃO DE MODELOS
ADAPTADOS A SISTEMAS MECÂNICOS COM CARACTERÍSTICAS NÃO
LINEARES

Dissertação apresentada como requisito parcial
para a obtenção do título de Mestre em
Modelagem e Otimização pela Universidade
Federal de Goiás – Regional Catalão.

Orientador:
Romes Antonio Borges

Coorientador:
Antônio Marcos Gonçalves de Lima

CATALÃO-GO, 2016

GONÇALVES, Daniel Ferreira
Introdução aos Métodos de Redução de Modelos Adaptados a Sistemas Mecânicos
com Características Não Lineares [manuscrito]
/ Daniel Ferreira Gonçalves. - 2016.
xlii, 82 f.

Orientador: Prof. Dr. Romes Antonio Borges; co-orientador
Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional
Catalão, Catalão, Programa de Pós-Graduação em Modelagem e
Otimização, Catalão, 2016.
Bibliografia.
Inclui gráficos, tabelas, figuras.

1. Sistemas Mecânicos. 2. Elementos Finitos. 3. Não Linearidade
4. Método de Redução de Modelos. I.
Borges, Romes Antonio, orient. II. De Lima, Antônio Marcos Gonçalves, co-
orient. III. Introdução aos Métodos de Redução de Modelos Adaptados a
Sistemas Mecânicos com Características Não Lineares.

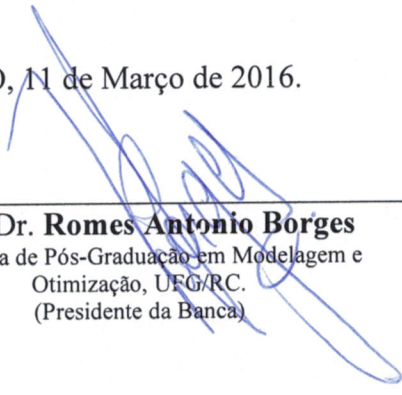


Defesa Nº _____

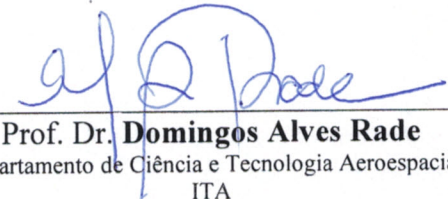
Ata de Defesa Pública – Dissertação de Mestrado

Aos **onze** dias do mês de **Março** do ano de 2016, às **9h:00 min**, reuniram-se os componentes da banca examinadora, professores(as) : Prof. Dr. **Romes Antonio Borges - IMTec/UFG** (presidente e orientador), Prof. Dr. **José dos Reis Vieira de Moura Júnior - IMTec/UFG**, Prof. Dr. **Domingos Alves Rade – DCTA/ITA** para, em sessão pública realizada no Miniauditório Congadas (Centro Integrado de Pesquisa), da Regional Catalão (RC), da Universidade Federal de Goiás (UFG), procederem com a avaliação do trabalho intitulado: : **Introdução aos Métodos de Redução de modelos Adaptados a Sistemas Mecânicos com Características Não Lineares**, em nível de Mestrado, área de concentração *Modelagem e Otimização*, de autoria de **Daniel Ferreira Gonçalves**, matrícula **20140888**, discente do Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização (PPGMO) da UFG/RC. A sessão foi aberta pelo presidente da banca, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao discente que, dentro do tempo regulamentar, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o candidato, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação do trabalho. Os membros da banca consideraram o trabalho final: (X) **Aprovado** (unanimidade) ou () **Reprovado** (por maioria simples). Cumpridas as formalidades de pauta, às 11 h: 20 min a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu **Romes Antonio Borges**, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora, pelo discente e, posteriormente, será homologada pelo Colegiado do PPGMO.

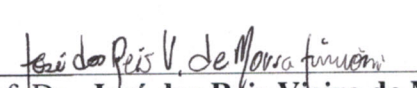
Catalão-GO, 11 de Março de 2016.



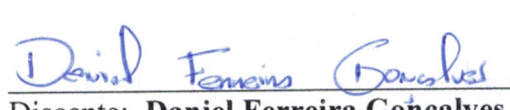
Prof. Dr. **Romes Antonio Borges**
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e
Otimização, UFG/RC.
(Presidente da Banca)



Prof. Dr. **Domingos Alves Rade**
Departamento de Ciência e Tecnologia Aeroespacial
ITA



Prof. Dr. **José dos Reis Vieira de Moura Júnior**
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e
Otimização, UFG/RC.



Discente: **Daniel Ferreira Gonçalves**
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e
Otimização, UFG/RC.

*A Deus, por ter me concedido força e perseverança nesta árdua jornada,
Aos meus pais, Delcione e Maria Abadia, à minha esposa Isadora e a minha filha Ísis
Gabriele.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por estar presente em minha vida, pela força e vontade para superar todos os obstáculos e alcançar meus objetivos.

Aos meus pais, Delcione Gonçalves e Maria Abadia Ferreira Gondim Gonçalves, pelo exemplo de vida e incondicional apoio e incentivo. À minha esposa, Isadora, pelo amor, companheirismo, compreensão e incentivo. À minha filha, Ísis Gabriele, por momentos únicos de inspiração, de amor e paz.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Romes Antonio Borges, que será em minha vida um exemplo a ser seguido tanto pessoal quanto profissional, pela amizade, pelas oportunidades, paciência, confiança e conhecimento cedidos a mim. Gostaria de agradecer-lo também pela disposição em me ajudar e pelo incentivo. Ao Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima, pela colaboração na realização deste trabalho.

A todos meus colegas do mestrado, Lázaro Antônio, José Salviano, Luiz Fernando, Alcione e Tatiane pela amizade, companheirismo, momentos de alegrias e aprendizado ímpares para o trabalho. Verdadeiras amizades são para toda a vida.

À Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão e ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização e aos professores pela oportunidade e confiança para realização desse trabalho.

A CAPES pelo apoio financeiro que possibilitou ao autor a realização desse trabalho.

RESUMO

GONÇALVES, D. F. *Introdução aos Métodos de Redução de Modelos Adaptados a Sistemas Mecânicos com Características Não Lineares*. 2016. 82 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem e Otimização) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

Estudos voltados à modelagem e previsão do comportamento de sistemas mecânicos são relevantes na coibição de deflexões excessivas e falhas estruturais. A maioria destes sistemas são discretizados por elementos finitos cujos modelos são constituídos por elevado número de graus de liberdade tornando-se bastante oneroso computacionalmente. Neste contexto, a aplicação de métodos de redução de modelos ganha destaque especial pois proporciona maior economia de tempo, mantendo a qualidade de solução. Este trabalho tem por objetivo o estudo de métodos de redução de modelos aplicados a sistemas dinâmicos não lineares. Dentre os métodos voltados à redução de modelos, destaca-se o método de Guyan, *Improved Reduction System (IRS)*, *Iterative Improved Reduction System (IIRS)*, *System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP)*, *Component Mode Synthesis (CMS)* e método da Base Modal. Com o objetivo de verificar a eficiência dos métodos de redução de modelos quando aplicados em sistemas não lineares, é apresentado neste trabalho um estudo onde são analisadas as respostas do sistema, verificando o custo computacional e a qualidade da solução do problema reduzido para cada um dos métodos citados.

Palavras-chaves: Sistemas Mecânicos, Elementos Finitos, Não Linearidades, Métodos de Redução de Modelos.

ABSTRACT

GONÇALVES, D. F. *Introduction to Model Reduction Methods Adapted to Mechanical Systems with Nonlinear characteristics*. 2016. 82 f. Master Thesis in Modelling and Optimization – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

Studies focused on modeling and mechanical system behavior prediction are relevant to the avoidance of excessive deflections and structural failures. Most of these systems are discretized by finite element models which are constituted by a large number of degrees of freedom, making it quite expensive computationally. In this context, the application of models reduction methods becomes particularly prominent because it provides a greater saving in time, keeping the solution quality. This work aims to study methods of reducing models applied to nonlinear dynamical systems. Among the methods aimed at reducing models, there is the Guyan method, Improved Reduction System (IRS), Iterative Improved Reduction System (IIRS) System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP), Component Mode Synthesis (CMS) and method of modal projection. In order to verify the efficiency of the models reduction methods when applied to nonlinear systems is presented in this paper a study where the system responses are analyzed by checking the computational cost and quality of the reduced solution of the problem for each of the mentioned methods.

Keywords: Mechanical systems, Finite elements, Nonlinearities, Models reduction methods.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2. 1. Oscilador de Duffing.....	28
Figura 2. 2. Elemento finito de viga de Euler - Bernoulli.	30
Figura 4. 1. Viga de Euler - Bernoulli engastada - livre.....	55
Figura 4. 2. FRFs do modelo completo e dos modelos reduzidos por Guyan e IRS para o caso 1.....	56
Figura 4. 3. FRFs do modelo completo e dos modelos reduzidos por IIRS e SEREP para o caso 1.....	57
Figura 4. 4. FRFs do modelo completo e dos modelos reduzidos por CMS e BM para o caso 1.....	58
Figura 4. 5. Respostas no domínio do tempo para o modelo completo e dos modelos reduzidos para o caso 1.....	59
Figura 4. 6. Tempo computacional estimado para o caso 1.	60
Figura 4. 7. Viga bi engastada de Euler Bernoulli com mola linear e amortecimento viscoso.	61
Figura 4. 8. FRFs do modelo completo e dos modelos reduzidos por IIRS e SEREP para o caso 2.....	62
Figura 4. 9. FRFs do modelo completo e dos modelos reduzidos por CMS e BM para o caso 2.....	63
Figura 4. 10. Respostas no domínio do tempo do modelo completo e dos modelos reduzidos para o caso 2.....	64
Figura 4. 11. Tempo Computacional estimado para o caso 2.....	64
Figura 4. 12. Viga de Euler - Bernoulli com molas com características não lineares.....	65
Figura 4. 13. Respostas no domínio do tempo do modelo completo e dos modelos reduzidos por IIRS e SEREP para o caso 3.	66
Figura 4. 14. Respostas no domínio do tempo do modelo completo e dos reduzidos por CMS e BME para o caso 3.	66
Figura 4. 15. Tempo computacional estimado para o caso 3.	67
Figura 4. 16. Viga de Euler - Bernoulli com mola com característica não linear e amortecimento viscoso.	67
Figura 4. 17. Respostas no domínio do tempo do modelo completo e dos modelos reduzidos por IIRS e SEREP para o caso 4.	68
Figura 4. 18. Respostas no domínio do tempo do modelo completo e dos modelos reduzidos por CMS e BME para o caso 4.....	68
Figura 4. 19. Tempo computacional estimado para o caso 4.	69

Figura 4. 20. Vigas de Euler - Bernoulli conectadas por mola com característica não linear e amortecimento viscoso.....	69
Figura 4. 21. Respostas no domínio do tempo do modelo completo e dos modelos reduzidos por IIRS e SEREP para o caso 5.	70
Figura 4. 22. Respostas no domínio do tempo do modelo completo e dos modelos reduzidos por CMS e BME para o caso 5.....	70
Figura 4. 23. Tempo Computacional estimado para o caso 5.....	71

LISTA DE TABELAS

Tabela 4. 1. Propriedades Físicas e Geométricas da viga.....	56
Tabela 4. 2. Valores das frequências de ressonâncias estimadas para o modelo completo e modelos reduzidos pelos métodos de redução de Guyan e IRS. (rad/s).	57
Tabela 4. 3. Valores das frequências de ressonâncias estimadas para o modelo completo e modelos reduzidos pelos métodos de redução de IIRS e SEREP. (rad/s).....	58
Tabela 4. 4. Valores das frequências de ressonâncias estimadas para o modelo completo e modelos reduzidos pelos métodos de redução de CMS e BM. (rad/s).....	59
Tabela 4. 5. Valores das frequências de ressonâncias estimadas para o modelo completo e modelos reduzidos pelos métodos de redução de IIRS e SEREP. (rad/s).....	62
Tabela 4. 6. Valores das frequências de ressonâncias estimadas para o modelo completo e modelos reduzidos pelos métodos de redução de CMS e BM. (rad/s).....	63

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	MODELAGEM DE ESTRUTURAS MECÂNICAS LINEARES E NÃO LINEARES	25
2.1	INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS NÃO LINEARES	25
2.1.1	Não linearidade geométrica	27
2.1.1.1	Não linearidades globais	27
2.1.1.2	Não linearidades locais	27
2.1.2	Outras não linearidades: de material e de contato	28
2.2	MODELAGEM VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	29
2.2.1	MEF aplicado a estruturas do tipo vigas	29
2.3	MODELAGEM DE UMA ESTRUTURA COM NÃO LINEARIDADE LOCALIZADA	34
2.4	MÉTODOS DE RESOLUÇÃO	35
2.3.1	Método de integração numérica de Newmark	35
3	MÉTODOS DE REDUÇÃO DE MODELOS.....	39
3.1	INTRODUÇÃO À METODOLOGIA DE REDUÇÃO DE ORDEM.....	39
3.2	CRITÉRIOS PARA SELEÇÃO DOS GRAUS DE LIBERDADE MESTRES E ESCRAVOS	40
3.3	MÉTODOS DE REDUÇÃO DE MODELOS.....	42
3.3.1	Método da Condensação Estática ou Método de Guyan	43
3.3.2	Improved Reduction System – IRS	44
3.3.3	Iterative Improved Reduction System – IIRS.....	46
3.3.4	System Equivalent Reduction Expansion Process – SEREP.....	48
3.3.5	Síntese Modal de Componentes – CMS	49
3.3.6	Método da Base Modal e Enriquecimento.....	51
4	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	55
4.1	CASO 1: VIGA DE EULER-BERNOULLI ENGASTADA-LIVRE	55
4.2	CASO 2: VIGA DE EULER-BERNOULLI ENGASTADA COM MOLA LINEAR E AMORTECIMENTO VISCOSO	61
4.3	CASO 3: VIGA DE EULER-BERNOULLI ENGASTADA LIVRE COM NÃO LINEARIDADE LOCALIZADA	65

4.4	CASO 4: VIGA DE EULER-BERNOULLI ENGASTADA COM MOLA NÃO LINEAR E AMORTECEDOR VISCOSO.....	67
4.5	CASO 5: VIGAS DE EULER – BERNOULLI CONECTADAS POR MOLA NÃO LINEAR E AMORTECEDOR VISCOSO.....	69
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS.....	73
5.1	TRABALHOS COMPLEMENTARES	75
5.1.1	Publicações e apresentações em congresso internacional e nacionais.....	75
6	REFERÊNCIAS	77

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Atualmente, projetos modernos de engenharia estão relacionados e são motivados por investigações voltadas ao estudo em atenuação de vibrações e ruído em estruturas automobilísticas, aeroespaciais, máquinas rotativas, motores e turbinas, etc. Na coibição de deflexões excessivas e falhas mecânicas catastróficas na estrutura, a previsão de seu comportamento é um passo essencial na sua concepção e requer tanto o procedimento de modelagem, como o de caracterização dinâmica confiáveis (LIMA *et al.*, 2015; GERGES, 2013; GUEDRI, BOUHADDI, MAJED, 2006).

A utilização de estruturas altamente flexíveis, moderadamente finas ou muito finas, leves e capazes de serem operadas a altas velocidades, tem instigado dispendiosos estudos voltados às não linearidades geométricas, físicas ou de contato. Além disso, a natureza fortemente imprevisível de sistemas com características não lineares pode potencializar falhas, resultando, em casos mais extremos, no colapso estrutural (BORGES, 2008; GERGES, 2013).

No contexto de vibrações mecânicas não lineares, o Princípio da Superposição não é válido e os sistemas possuem mais de uma posição de equilíbrio. Tais características evidenciam a complexidade de se trabalhar com modelos não lineares, sendo que problemas reais exibem comportamento não linear e, para alguns, aproximações lineares são utilizadas para previsão e controle de seu comportamento dinâmico. Contudo, na grande maioria dos casos essa linearização não fornece uma boa representação e deve ser utilizada apenas como uma aproximação inicial (BORGES, 2008).

Soluções analíticas aproximadas em forma fechada são extremamente raras ou até mesmo impossíveis para problemas não lineares. Dessa forma, métodos analíticos aproximados e/ou técnicas numéricas são necessários para a descrição do comportamento dinâmico não linear de tais sistemas (GAVASSONI NETO, 2012). Como a grande maioria dos sistemas de

engenharia possuem elementos elásticos e são representados por um número infinito de graus de liberdade (gdl), a utilização de métodos numéricos de discretização possibilita aproximações precisas do comportamento mecânico destas estruturas e, por isso têm se destacado (BORGES, 2008; RAO, 2008; GUEDRI, 2006).

Estruturas mecânicas de interesse industrial usualmente são discretizadas por elementos finitos. No entanto, modelos de elementos finitos são constituídos por um grande número de gdl, como por exemplo, modelos veiculares e aeroespaciais são representados por modelos com algumas centenas de milhares. Devido ao alto custo computacional em termos de tempo de processamento e espaço de armazenamento, na prática, o uso de tais modelos torna-se inviável. Assim, ferramentas computacionais têm sido constantemente exploradas visando sancionar este problema, destacando-se aplicação de métodos de redução de modelos (LIMA *et al.*, 2015; LIMA *et al.*, 2010; GERGES, 2013; GUEDRI, 2006).

O comportamento dinâmico de um sistema pode ser estimado por uma minoria de gdl que constituem um modelo reduzido. Com o número de gdl reduzidos, o custo computacional pode ser minimizado, proporcionando considerável economia de tempo. Na literatura, recorre-se a algumas investigações de grande relevância referentes ao estudo e aplicações de métodos de redução de modelos, tais como, Moore (1981), Qu (2004).

O método de *Condensação Estática* ou *método de Guyan* (GUYAN, 1965; IRONS, 1965) é considerado um dos primeiros métodos de redução e ainda é bastante difundido na mecânica estrutural. Esse método apresenta boas aproximações em problemas rudimentares e de natureza estática. Porém, em problemas dinâmicos, a representatividade é falha, o que motivou o aprimoramento e desenvolvimento de métodos melhores e mais robustos.

Dentre os métodos de redução que foram desenvolvidos na tentativa de representar satisfatoriamente o comportamento dinâmico, destacam-se o método de *Condensação Dinâmica* de Leung (1978), o método *Improved Reduction System (IRS)* proposto por O'Callahan (1989); o método *System Equivalent reduction Expansion Process (SEREP)* desenvolvido por O'Callahan, Avitabile e Riemer (1989) e por Kammer (1987). Abordagens iterativas para o método IRS foram sugeridas, primeiramente por Friswell (1995,1998) e posteriormente melhorias foram propostas nos trabalhos de Xia *et al.* (2004).

Atualmente, métodos de redução como o *Component Mode Synthesis (CMS)* e variantes, embasados na subdivisão da estrutura em componentes representados pelos vetores de Ritz, os modos de vibrações normais, de corpo rígido, os estáticos, de interface, etc. tem desempenhado papel fundamental. Estes métodos são vantajosos em análises de estruturas complexas, uma vez

que os componentes são analisados e podem ser reduzidos independentemente (GUEDRI, 2006; MASSON et al., 2002; CRAIG JR. et al., 1968).

A grande maioria dos sistemas não lineares estão restritos a alguns métodos de redução. Para não linearidades locais, a contribuição do termo não linear é significativa para a resposta do sistema que é variável dependendo dos níveis de excitação (GERGES, 2013), fato que influencia a eficiência do modelo reduzido. Já para não linearidades globais, as matrizes constitutivas do sistema são variáveis e um modelo reduzido mediante uma base de redução fixa não é capaz de representar o comportamento dinâmico do sistema.

Metodologias e adaptações para redução de modelos não lineares têm sido utilizadas para obter um modelo suficientemente adequado do problema. Contudo, ainda não são suficientes para que análises paramétricas e ciclos de projeto possam ser obtidos de modo eficiente (LÜLF, 2013; GAVASSONI NETO, 2012; PALACIOS, 2011; HAPPAWANA et al., 1995).

As abordagens inspiradas em métodos de reanálise linear se mostram eficientes na redução de problemas não lineares. Métodos, tais como, o método das *Aproximações Combinadas (CA)*, desenvolvido originalmente para reanálise linear, tem se mostrado eficiente em problemas não lineares (GERGES, 2013; GUEDRI et al., 2010; KIRSCH, et al., 2007; KIRSCH, et al., 2006a, 2006b). Destacam-se, ainda, reduções embasadas na utilização de vetores de Ritz e enriquecimento em análise robusta de modelos estocásticos e otimização estrutural (LIMA et al., 2015; LIMA et al., 2010; GUEDRI, 2006; GUEDRI et al., 2010; MASSON et al., 2002).

Este trabalho objetiva o estudo, a adaptação e aplicação de métodos de redução de modelos em sistemas mecânicos lineares e com não linearidades localizadas. Os métodos de redução de Guyan, IRS, IIRS, SEREP, CMS e Projeção Modal, são estudados e aplicados em alguns modelos de elementos finitos de viga de Euler-Bernoulli. Mediante análise modal e obtenção do comportamento dinâmico destes, verifica-se a aplicação dos métodos de redução como uma ferramenta que pode desempenhar papel importante nas análises numéricas.

Além deste capítulo introdutório, este trabalho é dividido em cinco capítulos, organizados da seguinte forma:

O capítulo 2 é dedicado ao estudo de modelagem de sistemas estruturais por procedimentos de elementos finitos. Destaque se dá às fontes de não linearidades típicas da dinâmica estrutural. A formulação de um elemento finito de viga em concordância com a Teoria de vigas de Euler-Bernoulli é desenvolvida e, para resolução das equações, sugere-se o método de integração numérica de Newmark.

No capítulo 3 é apresentada uma introdução à metodologia de redução de modelos aplicada em sistemas estruturais discretizados por elementos finitos. Métodos de redução, dos rudimentares aos mais robustos, presentes na literatura bem como o processo de determinação da matriz de transformação de coordenadas, são estudados.

O capítulo 4 é dedicado às simulações numéricas, realizadas com o objetivo de verificar as vantagens e desvantagens da utilização de métodos de redução de modelos em sistemas estruturais lineares e não lineares com foco na representatividade e na economia de tempo de cada método de redução de modelos.

Por fim, no capítulo 5, são apresentadas conclusões do estudo e propostas futuras para a continuidade do trabalho.

Capítulo 2

MODELAGEM DE ESTRUTURAS MECÂNICAS LINEARES E NÃO LINEARES

Neste capítulo são estudados os procedimentos de modelagem via métodos dos elementos finitos de sistemas estruturais. São apresentadas generalidades sobre a dinâmica de sistemas mecânicos, bem como as fontes de não linearidades típicas da dinâmica estrutural. Além disso, as formulações para estruturas do tipo vigas, segundo a teoria de Euler-Bernoulli, e técnicas numéricas de resolução são mostradas, onde métodos de resolução temporal são caracterizadas por um esquema de integração no tempo.

2.1 Introdução aos Sistemas Não Lineares

No âmbito da mecânica, os sistemas possuem massas e/ou inércia que armazenam energia cinética e potencial gravitacional e elementos armazenadores de energia potencial elástica, molas, e dissipadores de energia mecânica, os amortecedores. Mediante uma excitação, estes exibem um certo comportamento, chamado de resposta. O estudo da relação causa e efeito entre excitação e resposta de um sistema é definido como análise dinâmica (RAO, 2008; DIMAROGONAS, 1996; HARTOG, 1985).

De acordo com Rao (2008), uma gama de sistemas práticos e simples podem ser descritos utilizando um número finito de gdl, denominados sistemas discretos. No entanto, grande maioria dos problemas estruturais de engenharia moderna são sistemas contínuos, envolvendo um número infinito de gdl.

Para um sistema linear, pode-se obter sua resposta mediante alguma excitação, segundo o Princípio da Superposição. As respostas a diferentes excitações podem ser obtidas separadamente e depois combinadas linearmente, sendo que este é o princípio fundamental da Teoria dos Sistemas Lineares. No entanto, para modelos de sistemas não lineares este princípio não é válido e estes modelos são de maior complexidade e de difícil tratamento (RAO, 2008; THOMSON, 1996).

A linearização de sistemas foi, ao longo dos anos, considerada suficiente para estudos voltados à vibração mecânica de inúmeras estruturas e projetos de engenharia. No entanto, com a forte tendência à utilização de estruturas esbeltas e de geometrias complexas, o estudo das não linearidades, até então negligenciadas, vieram a se tornar significativas em problemas práticos de engenharia (KERSCHEN *et al.*, 2008; BORGES, 2008; YU; ZHU, 2005; THOMSEN, 2003).

Mediante complexidade de sistemas não lineares, soluções analíticas aproximadas são extremamente raras ou até mesmo impossíveis. Métodos analíticos aproximados ou técnicas numéricas são utilizados para a descrição do comportamento dinâmico não linear de sistemas estruturais (GAVASSONI, 2012), com destaque para o método do balanço harmônico, os métodos de perturbação e métodos de discretização (NAYFEH, 2011; NAYFEH, 1977; MEI, 1973).

De acordo com Nayfeh (1977) e Langley (1988), o método do balanço harmônico e os métodos de perturbação podem levar a resultados errôneos e são restritos a sistemas com poucos gdl. Neste contexto, para o presente trabalho, técnicas de discretização, tais como, os métodos de Rayleigh-Ritz, o método de Galerkin e o método dos elementos finitos são requeridos.

As não linearidades presentes em sistemas dinâmicos podem ser consideradas de diversas maneiras. Os termos não lineares são reconhecidos por funções não lineares das variáveis dependentes da equação do movimento (BORGES, 2008).

As não linearidades são caracterizadas como locais ou globais, mediante comportamento do material, da natureza da deformação e das condições de contorno (GERGES, 2013; BORGES, 2008; WORDEN; TOMLINSON, 2001; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

2.1.1 Não linearidade geométrica

Esta fonte de não linearidade relacionada à geometria do sistema, de forma global ou local, é importante nos casos de grandes deflexões ou rotações (GERGES, 2013; BORGES, 2008).

2.1.1.1 Não linearidades globais

Não linearidades globais são predominantes em estruturas muito finas, em que, quanto maior o movimento da estrutura, maior o fenômeno não linear.

Para grandes deslocamentos, a deflexão lateral gera momentos fletores adicionais, em virtude da presença de um esforço normal. Os efeitos não lineares estão associados às equações de equilíbrio, que consideram a configuração deformada, e as relações deformação-deslocamento (BORGES, 2008).

2.1.1.2 Não linearidades locais

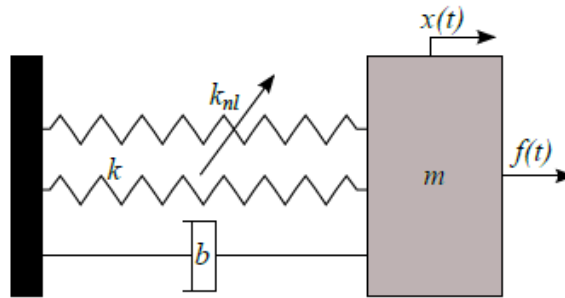
Algumas estruturas são providas de não linearidades locais. Materiais reais obedecem a uma relação não linear entre tensão e deformação que deve ser considerada quando as variações de intensidade das forças são muito grandes (BORGES, 2008). Os fenômenos não lineares são presentes em alguns pontos específicos da estrutura que é o caso do oscilador de Duffing apresentado na Fig. 2.1.

Nesse sistema, a mola é utilizada para representar a rigidez do material não linear. A equação do movimento pode ser expressa por:

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) + k_n x^3(t) = f(t) \quad (2.1)$$

onde m , b , k e k_{nl} representam os parâmetros de massa, amortecimento, rigidez e rigidez não linear; $x(t)$ e $f(t)$ são respectivos vetores dos deslocamentos e de força.

Figura 2. 1. Oscilador de Duffing.



Fonte: (GERGES, 2013).

Se $k_{nl} > 0$, a rigidez aumenta com o aumento da deformação proporcionando uma não linearidade de enrijecimento (*hardening spring*). Caso contrário, $k_{nl} < 0$, a rigidez decresce com o aumento da deformação e a não linearidade passa a ser de amolecimento (*softening spring*). Percebe-se que a resposta do sistema é inerentemente dependente da rigidez não linear k_{nl} que é variável mediante os níveis de excitação.

2.1.2 Outras não linearidades: de material e de contato

Fenômenos não lineares podem ser evidenciados quando a lei de comportamento do material não é linear, como o comportamento elástico-plástico, materiais visco-plásticos, etc. (TRUESDALL *et al.*, 2004) e ainda em ocorrência de frenagens, com atrito ou fricção entre duas superfícies (PERRET-LIAUDET *et al.*, 2003; RIGAUD *et al.*, 2003).

2.2 Modelagem via método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos é uma técnica baseada no processo de discretização que visa em sua essência transformar um problema infinito-dimensional em um problema finito-dimensional. O domínio é subdividido em várias regiões interconectadas, os chamados elementos finitos, que possuem um certo número de pontos, denominados de nós. Devido à praticidade e a possibilidade de ser aplicada em uma gama de problemas, esta técnica é comumente utilizada em sistemas estruturais com geometria complexa e regidos por algum tipo de não linearidade (LIMA et al., 2015; GERGES, 2013; GAVASSONI NETO, 2012; GUEDRI et al., 2006; QU, 2004).

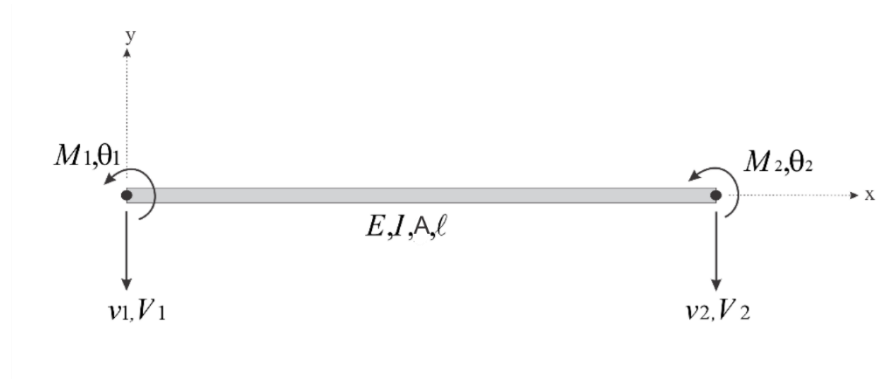
2.2.1 MEF aplicado a estruturas do tipo vigas

Na literatura, diferentes teorias de vigas são estudadas. As teorias de viga de Euler Bernoulli e de Timoshenko são priorizadas. Para a primeira, considera-se que as seções transversais permaneçam planas e normais ao eixo da barra após a deformação, as deformações provenientes do cisalhamento não são consideradas. Para a segunda, as seções transversais se mantêm planas, no entanto, supõe-se que uma seção normal ao eixo da viga não permaneça perpendicular ao eixo após a deformação, sendo considerada a deformação cisalhante.

A modelagem de estruturas via o método dos elementos finitos não é objetivo principal deste trabalho. Logo, considera-se a modelagem em nível elementar de um elemento de viga isolado. No entanto, deve ser considerado que a viga é discretizada em vários elementos e as equações do movimento desses elementos devem ser combinadas assegurando o equilíbrio dinâmico e a continuidade dos deslocamentos e rotações nos nós (RADE, 2011).

Na Figura 2.2 é mostrado um elemento de viga de Euler-Bernoulli. Para formulação de um elemento finito, os parâmetros E , I , A e l indicam, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal, o momento de inércia, a área da seção transversal e o comprimento do elemento de viga. As forças transversais V_1 , V_2 , M_1 e M_2 representam as ações mecânicas exercidas entre elementos.

Figura 2. 2. Elemento finito de viga de Euler - Bernoulli.



Fonte: o autor.

O vetor dos gdl em nível elementar é obtido com os valores dos deslocamentos transversais e pelas rotações das seções transversais nos nós,

$$\{u_i^e(t)\} = [v_1(t) \quad \theta_1(t) \quad v_2(t) \quad \theta_2(t)]^T, \quad (2.2)$$

onde os deslocamentos transversais são representados por v_1 e v_2 ; as rotações das seções transversais são representadas por θ_1 e θ_2 .

Na teoria de Euler-Bernoulli os efeitos de tensões de cisalhantes na seção da viga são desprezados, permitindo relacionar as rotações ao campo de deslocamentos transversais da seguinte forma:

$$\theta_i(x, t) = \frac{\partial v_i(x, t)}{\partial x}. \quad (2.3)$$

Como função interpoladora para o campo de deslocamentos transversais $v_i(x, t)$ adota-se um polinômio de terceira ordem e, consequentemente, pela eq. (2.3), um polinômio quadrático para as rotações é obtido:

$$v_i(x, t) = c_1(t) + c_2(t)x + c_3(t)x^2 + c_4(t)x^3 \Rightarrow \theta_i(x, t) = c_2(t) + 2c_3(t)x + 3c_4(t)x^2. \quad (2.4)$$

Os coeficientes c_1 , c_2 , c_3 e c_4 são descritos como funções dos deslocamentos e rotações nodais considerando que as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned} v_i(0,t) &= c_1 = v_1 & v_i(l_i,t) &= c_1 + c_2 l_i + c_3 l_i^2 + c_4 l_i^3 = v_2, \\ \theta_i(0,t) &= c_2 = \theta_1 & \theta_i(l_i,t) &= c_1 + 2c_3 l_i + 3c_4 l_i^2 = \theta_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

A resolução das equações algébricas lineares (2.5), conduz ao campo de deslocamentos transversais expresso da seguinte forma:

$$v_i(x,t) = H_1(x)v_1(t) + H_2(x)\theta_1(t) + H_3(x)v_2(t) + H_4(x)\theta_2(t), \quad (2.6)$$

ou ainda,

$$v_i(x,t) = [H_i(x)] \{u_i^e(t)\} \quad (2.7)$$

com:

$$\begin{aligned} H_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, \\ H_2(x) &= x - 2l\left(\frac{x}{l}\right)^2 + l\left(\frac{x}{l}\right)^3, \\ H_3(x) &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, \\ H_4(x) &= -l\left(\frac{x}{l}\right)^2 + l\left(\frac{x}{l}\right)^3. \end{aligned} \quad (2.8)$$

As funções H_i , com $i = 1, \dots, 4$, são as chamadas funções de forma ou de interpolação (ZIENKIEWICZ, 1989), que permitem que tanto o deslocamento quanto a rotação sejam contínuos entre os elementos das extremidades.

A energia cinética do elemento pode ser expressa por:

$$T_i = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} m_i(x) \left(\frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (2.9)$$

em que $m_i(x)$ é a densidade linear do material que constitui a viga.

Introduzindo a eq. (2.8) na eq. (2.9) e diferenciando $v_i(t)$ em relação ao tempo, têm-se:

$$T_i = \frac{1}{2} \{\dot{u}_i^e(t)\}^T [M_i^e] \{\dot{u}_i^e(t)\}, \quad (2.10)$$

onde:

$$[M_i^e]_{4 \times 4} = \int_0^{l_i} m_i(x) [H(x)]^T [H(x)] dx, \quad (2.11)$$

em que $[M_i^e]_{4 \times 4}$ é a matriz de inércia do elemento de viga de Euler-Bernoulli cujo cálculo é da seguinte forma:

Para o caso em que $m_i(x)$ é constante, a eq. (2.11) conduz à matriz:

$$[M_i^e] = \frac{m_i l_i}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_i & 54 & -13l_i \\ & 4l_i^2 & 13l_i & -3l_i^2 \\ & & 156 & -22l_i \\ \text{sim.} & & & 4l_i^2 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Para a viga de Euler-Bernoulli a energia potencial é expressa como:

$$V_i = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} E_i(x) I_i(x) \left(\frac{\partial^2 v_i(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx. \quad (2.13)$$

Introduzindo a eq. (2.7) na eq. (2.13) e diferenciando duas vezes $v_i(x,t)$ em relação a x , conduz à matriz:

$$[K_i^e]_{4 \times 4} = \int_0^{l_i} E_i(x) I_i(x) [H''(x)]^T [H''(x)] dx, \quad (2.14)$$

onde $[K_i^e]_{4 \times 4}$ é denominada matriz de rigidez do elemento de viga de Euler-Bernoulli.

De acordo com Rade (2011), dado o carregamento externo $q_i(x,t)$, considerando os trabalhos das forças e momentos externos aplicados, o vetor de esforços generalizados em nível elementar é dado por:

$$\{Q_i^e(t)\} = \int_0^{l_i} [H(x)]^T q_i(x,t) dx, \quad (2.15a)$$

e

$$\{\tilde{Q}_i^e(t)\} = [V_1 \quad M_1 \quad V_2 \quad M_2]^T, \quad (2.15b)$$

Dado que o módulo de rigidez à flexão e o carregamento distribuído são independentes de x no interior do elemento, $E_i(x)I_i(x) = E_i I_i$; $q_i(x,t) = q_i(t)$, as eq. (2.14) e eq. (2.15) levam à matriz:

$$[K_i^e] = \frac{E_i I_i}{l_i^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_i & -12 & 6l_i \\ & 4l_i^2 & -6l_i & 2l_i^2 \\ & & 12 & 6l_i \\ sim. & & & 4l_i^2 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

$$\{Q_i^e(t)\} = \begin{Bmatrix} q_i(t) \frac{l_i}{2} \\ q_i(t) \frac{l_i^2}{12} \\ q_i(t) \frac{l_i}{2} \\ -q_i(t) \frac{l_i^2}{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ -M_2 \end{Bmatrix}. \quad (2.17)$$

Pelo Princípio Variacional de Hamilton sabe-se que:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T_i - V_i) dt = 0, \quad (2.18)$$

Combinando as eq. (2.10) e eq. (2.18), um funcional pode ser identificado e as equações de Euler-Lagrange associadas ao funcional podem ser expressas como:

$$\frac{\partial L_i}{\partial \{u_i^e\}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \{\dot{u}_i^e\}} \right) = \{0\}, \quad (2.19)$$

sendo $L_i = T_i - V_i$ o Lagrangeano.

A partir da eq. (2.19), as equações do movimento em nível elementar são obtidas:

$$[M_i^e]\{\ddot{u}_i^e(t)\} + [K_i^e]\{\dot{u}_i^e(t)\} = \{Q_i^e(t)\} \quad (2.20)$$

2.3 Modelagem de uma Estrutura com Não Linearidade Localizada

Pelo processo de discretização da estrutura, a equação de equilíbrio da estrutura dinâmica em nível global pode ser expressa como,

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{F(t)\}, \quad (2.21)$$

em que $[M]$, $[C]$, $[K]$, de ordem $n \times n$, são as respectivas matrizes de massa, amortecimento proporcional ou ainda viscoso, e rigidez; $\{u(t)\}$ e $\{F(t)\}$, de ordem $n \times 1$, são os vetores de deslocamentos e de força, respectivamente.

No âmbito da mecânica, problemas reais e práticos são aproximados por estruturas de vigas, placas, etc. mediante acoplamento de elementos de molas. No acoplamento de molas com características lineares, reescreve-se a eq. (2.21) como sendo:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K_0]\{u(t)\} = \{F(t)\}, \quad (2.22)$$

onde $[K_0] = [K] + [K]_{linear}$ e $[K]_{linear}$ é a matriz de rigidez das molas lineares.

Para grande maioria dos casos, as variações de intensidade das forças exercidas são muito grandes, o que evidencia uma relação não linear entre tensão e deformação ou entre força e deformação. Esse fato instiga a utilização de molas com características não lineares.

De acordo com De Lima *et al.* (2015), mediante o acoplamento de molas com características lineares e não lineares, a eq. (2.22) deve ser reescrita da seguinte forma:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K_0]\{u(t)\} + [K_{naolinear}]\{u^3(t)\} = \{F(t)\}, \quad (2.23)$$

onde o termo $[K_{naolinear}]\{u^3(t)\}$ representa, respectivamente a matriz de rigidez da mola com características não lineares e o tipo de não linearidade empregada, nesse caso, não linearidade cúbica.

2.4 Métodos de Resolução

Em procedimentos de elementos finitos, as equações de movimento acopladas são transformadas em um conjunto de equações desacopladas independentes por meio de uma matriz modal e os parâmetros modais do sistema podem ser determinados. Em consonância, as respostas dinâmicas de estruturas ou sistemas mecânicos são obtidas por métodos de integração direta no domínio do tempo.

2.3.1 Método de integração numérica de Newmark

Problemas regidos por eq. (2.21), (2.22) e (2.23) podem ser resolvidos numericamente por meio da discretização temporal. Um dos métodos mais utilizados entre os métodos de integração direta no tempo para resolver a eq. (2.23) é o método de integração no tempo de Newmark (GERGES, 2013; RAO, 2008; QU, 2004; ZIENKIEWICZ, 1989; HUGHES, 1987; BATHE, 1982).

De acordo com Zienkiewicz (1989) e Bathe (1982), o método de Newmark, em determinado intervalo de tempo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, utiliza os seguintes pressupostos:

$$\{\dot{u}_{n+1}\} = \{\dot{u}_n\} + [(1-\delta)\{\dot{u}_n\} + \delta\{\ddot{u}_{n+1}\}]\Delta t, \quad (2.24)$$

$$\{u_{n+1}\} = \{u_n\} + \{\dot{u}_n\}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\{\ddot{u}_n\} + \alpha\{\ddot{u}_{n+1}\}\right]\Delta t^2, \quad (2.25)$$

onde α e δ são os parâmetros de integração numérica; $\{u_n\}$, $\{\dot{u}_n\}$, $\{\ddot{u}_n\}$, $\{u_{n+1}\}$, $\{\dot{u}_{n+1}\}$, $\{\ddot{u}_{n+1}\}$ são os respectivos vetores de deslocamento, velocidade e aceleração para t_n e $t_n + \Delta t$.

A equação de equilíbrio, eq. (2.21), juntamente com a eq. (2.24) e eq.(2.25) é reescrita abaixo, em termos de $t_n + \Delta t$:

$$[M]\{\ddot{u}_{n+1}\} + [C]\{\dot{u}_{n+1}\} + [K]\{u_{n+1}\} = \{F\} \quad (2.26)$$

A solução para o deslocamento no tempo $t_n + \Delta t$ pode ser obtido deduzindo as eq. (2.27) e (2.28) a partir das eq. (2.24) e (2.25):

$$\{\ddot{u}_{n+1}\} = a_0(\{u_{n+1}\} - \{u_n\}) - a_2\{\dot{u}_n\} - a_3\{\ddot{u}_n\}, \quad (2.27)$$

$$\{\dot{u}_{n+1}\} = \{\dot{u}_n\} + a_6\{\ddot{u}_n\} + a_7\{\ddot{u}_{n+1}\}, \quad (2.28)$$

onde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}, \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1, \\ a_4 &= \frac{\delta}{\alpha} - 1, \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\left(\frac{\delta}{\alpha} \right) - 1 \right), \quad a_6 = \Delta t(1 - \delta), \quad a_7 = \delta \Delta t. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Substituindo as eq. (2.27) e (2.28) na eq. (2.26), resulta na seguinte equação:

$$\begin{aligned} (a_0[M] + a_1[C] + [K])\{u_{n+1}\} &= \{F\} + [M](a_0\{u_n\} + a_2\{\dot{u}_n\} + a_3\{\ddot{u}_n\})... \\ &+ [C](a_1\{u_n\} + a_4\{\dot{u}_n\} + a_5\{\ddot{u}_n\}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Posteriormente, as velocidades e acelerações são atualizadas usando as eq. (2.27) e (2.28).

O termo $(a_0[M] + a_1[C] + [K])$ é referenciado como a matriz de rigidez efetiva $[K]^{efetiva}$. Para o caso linear, a matriz de rigidez efetiva é constante. Na dinâmica não linear, a matriz de rigidez efetiva é alterada a cada passo de tempo e pode ser obtida como:

$$[K]^{efetiva} = a_0[M] + a_1[C] + [K_T] \quad (2.31)$$

onde $[K_T]$ é denominada de matriz de rigidez tangente.

O método de aproximação numérica de Newton Raphson também é amplamente utilizado na resolução de problemas não lineares. Para alguns casos, a matriz de rigidez efetiva é função da deflexão, o que induz ao uso do método de Newton Raphson juntamente com métodos de integração numérica (GERGES, 2013; ZIENKIEWICZ, 1989; BATHE, 1982).

Capítulo 3

MÉTODOS DE REDUÇÃO DE MODELOS

Como mencionado anteriormente na Introdução deste trabalho, quanto maior a complexidade de um sistema dinâmico, maior a dimensão deste e em um problema estrutural prático, considerando os processos iterativos necessários, vários procedimentos como análises dinâmicas, otimização dinâmica estrutural, análise de incertezas, detecção de danos, dentre outros, são impraticáveis pois exigem grandes esforços computacionais. A utilização de técnicas de redução de modelos torna-se imprescindível. Neste capítulo serão abordados aspectos relevantes sobre métodos de redução de modelos, bem como, a formulação de algumas técnicas presentes na literatura, de grande utilidade na análise de estruturas dinâmicas.

3.1 Introdução à Metodologia de Redução de Ordem

Em análises estruturais dinâmicas, as equações do movimento são descritas como um conjunto de equações diferenciais lineares de segunda ordem:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{F(t)\}. \quad (3.1)$$

em que $[M]$, $[C]$, $[K]$, de ordem $n \times n$, são as respectivas matrizes massa, amortecimento e rigidez de ordem completa; $\{u(t)\}$, $\{F(t)\}$, de ordem $n \times 1$ são os respectivos vetores de deslocamentos e de força do sistema; n indica o número de gdl do modelo completo.

De acordo com Koutsovasilis e Beitelshmidt (2008) e Qu (2004), muitos procedimentos de redução de modelos envolvem a obtenção de uma matriz de transformação

de coordenadas. De modo geral, determina-se um subespaço, denominado matriz de transformação de coordenadas $[T]$, de ordem $m \times n$, com $m \ll n$, tal que:

$$\{u(t)\} \approx [T]\{u_R(t)\}, \quad (3.2)$$

onde $\{u_R(t)\}$ é o vetor dos deslocamentos reduzidos.

Introduzindo a eq. (3.2) na eq. (3.1) e, em seguida, multiplicando as parcelas pela transposta da matriz de transformação, um novo sistema reduzido, é obtido:

$$[\bar{M}]\{\ddot{u}_R(t)\} + [\bar{C}]\{\dot{u}_R(t)\} + [\bar{K}]\{u_R(t)\} = \{\bar{F}(t)\}, \quad (3.3)$$

em que $[\bar{M}]$, $[\bar{C}]$, $[\bar{K}]$, de ordem $m \times m$, são as respectivas matrizes massa, amortecimento e rigidez de ordem reduzida; $\{\bar{F}(t)\}$, de ordem $m \times 1$ é o vetor de força reduzido; m indica o número de gdl retidos no modelo reduzido. Estas matrizes são definidas como:

$$[\bar{M}] = [T]^T [M] [T], \quad [\bar{C}] = [T]^T [C] [T], \quad [\bar{K}] = [T]^T [K] [T], \quad \{\bar{F}\} = [T]^T \{F\}. \quad (3.4)$$

Embora a dimensão do modelo reduzido seja bem menor do que o modelo completo, dada a matriz de transformação de coordenadas que é particular em cada método de redução, as características dinâmicas do modelo completo podem ser preservadas.

3.2 Critérios para Seleção dos Graus de Liberdade Mestres e Escravos

Grande maioria das matrizes de redução de base dos métodos de redução de modelos são obtidas mediante a subdivisão das matrizes constitutivas do sistema em gdl mestres e escravos. Os gdl mestres normalmente são relevantes no sistema e por isso são retidos. Já os gdl escravos são de pouca influência na dinâmica do sistema, motivo pelo qual podem ser omitidos.

De acordo com essa teoria, as matrizes e os vetores da eq. (3.1) são divididos em sub-blocos (KOUTSOVASILIS; BEITELSCHMIDT, 2008), isto é,

$$\begin{bmatrix} [m_{mm}] & [m_{ms}] \\ [m_{ms}]^T & [m_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_m \\ \ddot{u}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [k_{mm}] & [k_{ms}] \\ [k_{ms}]^T & [k_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m \\ u_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_m \\ F_s \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

onde os subescritos m e s representam os graus de liberdade mestres e escravos do sistema e o sobrescrito T representa a matriz transposta.

Considerando o sistema matricial acima, deve-se considerar duas hipóteses. A primeira de que a soma dos gdl mestres e escravos deve ser igual ao número total de gdl da estrutura. Em segundo lugar, que um gdl não pode coexistir no conjunto de coordenadas mestres e escravas. Na literatura pode-se recorrer a inúmeros critérios qualitativos e quantitativos específicos para a escolha dos gdl mestres e escravos, dentre eles, destaca-se àqueles citados por Qu (2004).

No tocante aos critérios qualitativos, de acordo com Ramsden e Stoker (1969), Qu (2004), e Downs (1980) na seleção dos gdl mestres deve-se considerar as áreas da estrutura que estão associados com as maiores concentrações de massa e posteriormente seleciona-se os que têm os maiores movimentos nos modos de interesse, ou ainda, deve-se considerar apenas os gdl relacionados com os deslocamentos em vez das rotações. Em casos de maior complexidade, os gdl mestres selecionados podem ser relacionados segundo o ponto de vista energético, assim, os gdl mestres devem conservar maiores informações referentes à energia de deformação (POPPLEWELL; BERTELS; ARYA, 1973).

A grande maioria das abordagens quantitativas para a seleção dos gdl mestres são baseados na relação dos elementos da diagonal das matrizes de rigidez e de massa (HENSHELL; ONG, 1975; SHAH; RAYMUND, 1982; MATTA, 1987; KOUTSOVASILIS; BEITELSCHMIDT, 2008), ou seja, faz-se $b_i = k_{ii}/m_{ii}$ e posteriormente seleciona-se $\min(b_j)_{1 \leq j \leq m}$.

Segundo Singh e Suarez (1992), este critério é bem definido apenas em estruturas com geometria e características mecânicas relativamente uniformes. Se a distribuição é irregular, aconselha-se concentrar este critério apenas nas regiões com massas significativas (BOUHADDI; FILLOD, 1992). Com base nas energias modais associadas aos gdl nos modos de vibração de um sistema estrutural, esquemas de seleção automática são propostos, denominados Métodos da Energia Modal (KIM; BURTON, 2002). Após uma seleção inicial dos gdl, é necessário avaliar a qualidade do conjunto escolhido, destacando as contribuições de Allemang e Brown (1982), Penny, Friswell e Garvey (1992) e Penny, Friswell e Garvey (1994).

3.3 Métodos de Redução de Modelos

A redução de modelos de estruturas mecânicas discretizadas por procedimentos de elementos finitos é uma tarefa dispendiosa. A eficiência de um esquema de método de redução de modelos consiste na qualidade de representação da dinâmica do modelo e o tempo de cálculo envolvido no processo de obtenção da matriz de transformação de coordenadas e redução das matrizes constitutivas do sistema (KOUTSOVASILIS; BEITELSCHMIDT, 2008; QU, 2004).

Com base no conjunto de coordenadas retidas como gdl mestres, os métodos de redução de ordem existentes se enquadram em três categorias básicas (QU, 2004): redução por coordenadas físicas; redução por coordenadas generalizadas e reduções híbridas.

Na redução por coordenadas físicas, os gdl escravos, removidos do sistema, são uma parte das coordenadas físicas do modelo completo. A principal vantagem deste tipo de redução é que, dessa forma, o modelo reduzido será um subconjunto do modelo completo. Todas coordenadas que não são físicas são referidas como coordenadas generalizadas. Para este tipo de redução, utilizam-se coordenadas globais, coordenadas de Ritz e coordenadas modais. Existem algumas técnicas que são híbridas, cujas as coordenadas do modelo reduzido são compostas por uma parte sendo coordenadas físicas e a outra, por coordenadas generalizadas.

Na literatura, revisões sobre técnicas de redução de modelos podem ser encontradas nos trabalhos de Qu (2004), Koutsovasilis e Beitelschmidt (2008), dentre outros. Neste trabalho serão abordados esquemas de redução comumente utilizados em sistemas dinâmicos, destacando os seguintes métodos e variantes:

- Condensação Estática ou Método de Guyan,
- *Improved Reduction System* (IRS),
- *Iterative Improved Reduction System* (IIRS),
- *System Equivalent Reduction Expansion Process* (SEREP),
- *Component Mode Synthesis* (CMS) ou Síntese Modal de Componentes,
- Redução por Projeção Modal – Base Modal.

3.3.1 Método da Condensação Estática ou Método de Guyan

Proposto por Guyan (1965) e Irons (1965), o método da condensação estática é um dos primeiros métodos de redução de modelos e desde seu desenvolvimento é amplamente utilizado em uma variedade de problemas estáticos e dinâmicos em dinâmica estrutural e vibrações mecânicas.

Considerando um sistema sem amortecimento, eq. (3.5), a abordagem algorítmica para este método é embasada em duas aproximações. Em um primeiro instante, considera-se a não existência de forças aplicadas nos graus de liberdade escravos, ou seja, faz-se $\{F_s\} = 0$. A segunda aproximação pode ser expressa como:

$$[m_{mm}]\{\ddot{u}_m\} + [m_{ms}]\{\ddot{u}_s\} = [m_{sm}]\{\ddot{u}_m\} + [m_{ss}]\{\ddot{u}_s\} = \{0\} \quad (3.6)$$

Nota-se na eq. (3.6) que os termos de inércia $[m_{mm}]$, $[m_{ms}]$, $[m_{sm}]$ e $[m_{ss}]$ inerentes do sistema são omitidos, o que contribui à natureza estática do método. Considerando a expansão da segunda parte da eq. (3.5) não amortecida e introduzindo a eq. (3.6), conduz a expressão que relaciona os vetores de estado escravos e os mestres:

$$\{u_s\} = -[k_{ss}]^{-1}([m_{sm}]\{\ddot{u}_m\} + [m_{ss}]\{\ddot{u}_s\} + [k_{sm}]\{u_m\}), \quad (3.7)$$

$$\{u_s\} = (-[k_{ss}]^{-1}[k_{sm}])\{u_m\}. \quad (3.8)$$

Com base na eq. (3.8), o vetor de estado do modelo completo é expresso em termos do vetor de estado do método de redução,

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_m \\ u_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_{m,m}] \\ -[k_{ss}]^{-1}[k_{sm}] \end{bmatrix} \{u_m\} = [T_{Guyan}]\{u_m\}, \quad (3.9)$$

em que $[I_{m,m}]$ é a matriz unidade e $[T_{Guyan}]$ é a matriz transformação de coordenadas para este método.

O método da condensação Estática é exata em análises estáticas com boa aproximação em uma gama de frequências mais baixas do modelo completo (QU, 2004). No entanto, quando altas frequências são consideradas, a influência dos termos de inércia é relevante e o método tem baixa precisão.

Devido à complexidade das estruturas, a necessidade de melhorias na dinâmica do método de Guyan levou a várias variações desta técnica, como a Condensação Estática Generalizada ou apenas Guyan-g (QU, 2004). Para esta técnica, recorre-se ao mesmo procedimento para obtenção da matriz de transformação para o método de Guyan, diferenciando apenas na definição da matriz de transformação de coordenadas, dada por:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_m \\ u_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m,m} \\ -[k_s]^+ [k_m] \end{bmatrix} \{u_m\} = [T_{Guyan-g}] \{u_m\}, \quad (3.10)$$

onde $[T_{Guyan-g}]$ é a matriz de transformação de coordenadas $[I_{m,m}]$ é a matriz identidade.

Adota-se $[k_s] = \begin{bmatrix} [k_{ms}] \\ [k_{ss}] \end{bmatrix}$; $[k_m] = \begin{bmatrix} [k_{mm}] \\ [k_{sm}] \end{bmatrix}$ e o termo $[k_s]^+$ representa a pseudo-inversa da matriz de rigidez $[k_s]$, isto é,

$$[k_s]^+ = ([k_s]^T [k_s])^{-1} [k_s]^T. \quad (3.11)$$

A abordagem do método Guyan-g é considerada, na maioria das vezes, mais precisa do que o clássico método de Guyan em uma faixa de baixas frequências. No entanto, a negligência dos termos de inércia acarreta em imprecisões e o cálculo da pseudo-inversa para modelos de alta ordem pode ocasionar erros.

3.3.2 Improved Reduction System – IRS

Inúmeras abordagens de redução de modelos foram desenvolvidas a fim de incluir os efeitos dinâmicos do modelo na matriz de transformação de coordenadas, tais como o método IRS.

O princípio básico da abordagem IRS é o método de Guyan, porém nesta abordagem a base estática é perturbada de tal forma a considerar os termos de inércia como forças pseudo-estáticas (O'CALLAHAN, 1989). Assim, as equações dinâmicas do método de redução de Guyan são descritas da seguinte maneira:

$$[\bar{M}]\{\ddot{u}_m\} + [\bar{K}]\{u_m\} = \{0\} \Rightarrow \{\ddot{u}_m\} = -[\bar{M}]^{-1}[\bar{K}]\{u_m\}, \quad (3.12)$$

Da segunda diferenciação da eq. (3.8) obtém-se:

$$\{\ddot{u}_s\} = -[k_{ss}]^{-1}[k_{sm}]\{\ddot{u}_m\}, \quad (3.13)$$

Substituindo a eq. (3.12) na (3.13) chega-se em:

$$\{\ddot{u}_s\} = -[k_{ss}]^{-1}[k_{sm}][\bar{M}]^{-1}[\bar{K}]\{u_m\}. \quad (3.14)$$

A eq. (3.12) e (3.14) é substituída na eq. (3.7) e uma nova relação entre os gdl escravos e os mestres é obtida incluindo os termos de inércia do modelo da seguinte forma:

$$\{u_s\} = \left(-[k_{ss}]^{-1}[k_{sm}] + [k_{ss}]^{-1}[S_0][\bar{M}]^{-1}[\bar{K}] \right) \{u_m\}, \quad (3.15)$$

onde,

$$[S_0] = [m_{sm}] - [m_{ss}][k_{ss}]^{-1}[k_{sm}]. \quad (3.16)$$

Agora o vetor de estados do modelo completo é expresso em termos do vetor de estado do modelo reduzido:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_m \\ u_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_{m,m}] \\ -[k_{ss}]^{-1}[k_{sm}] + [k_{ss}]^{-1}[S_0][\bar{M}]^{-1}[\bar{K}] \end{bmatrix} \{u_m\} = [T_{IRS}]\{u_m\}, \quad (3.17)$$

em que $[T_{IRS}]$ é a matriz transformação de coordenadas.

Reescrevendo a matriz de transformação de coordenadas obtida na eq. (3.17) têm-se:

$$[T_{IRS}] = \begin{pmatrix} [I_{m,m}] \\ -[k_{ss}]^{-1}[k_{sm}] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [k_{ss}]^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [m_{mm}] & [m_{ms}] \\ [m_{sm}] & [m_{ss}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [I_{m,m}] \\ -[k_{ss}]^{-1}[k_{sm}] \end{pmatrix} [\bar{M}]^{-1}[\bar{K}], \quad (3.18)$$

ou na forma compactada:

$$[T_{IRS}] = [T_{Guyan}] + [S][M][T_{Guyan}][\bar{M}]^{-1}[\bar{K}]. \quad (3.19)$$

Em comparação ao método de Guyan, o método IRS fornece maior precisão devido à informação adicional dos termos de inércia. Porém, à medida em que os fatores de inércia se tornam significativos, ambos os métodos não proporcionam boa aproximação (KOUTSOVASILIS; BEITELSCHMIDT, 2008).

3.3.3 Iterative Improved Reduction System – IIRS

Variantes do método de redução IRS foram desenvolvidas na tentativa de minimização dos erros de aproximação. A abordagem iterativa IIRS (FRISWELL; GARVEY; PENNY, 1995) proporciona boa representatividade em uma gama de problemas de dinâmica estrutural.

Na literatura, várias formulações para o esquema iterativo IIRS são sugeridas. Neste trabalho, parte-se do problema de autovalor generalizado de um sistema não amortecido, na forma subestruturada em termos de gdl mestres e escravos,

$$\begin{bmatrix} [k_{mm}] & [k_{ms}] \\ [k_{sm}] & [k_{ss}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{mm} \\ \Phi_{sm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [m_{mm}] & [m_{ms}] \\ [m_{sm}] & [m_{ss}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{mm} \\ \Phi_{sm} \end{bmatrix} [\Lambda_{mm}], \quad (3.20)$$

onde Φ são os autovetores normalizados; Λ é a matriz diagonal contendo os autovalores correspondentes dispostos em ordem crescente. A partir do segundo conjunto de equações da eq. (3.20), tem-se:

$$[k_{sm}][\Phi_{mm}] + [k_{ss}][\Phi_{sm}] = [m_{sm}][\Phi_{mm}][\Lambda_{mm}] + [m_{ss}][\Phi_{sm}][\Lambda_{mm}], \quad (3.21)$$

aonde $[\Phi_{sm}]$ pode ser expresso como,

$$[\Phi_{sm}] = -[k_{ss}]^{-1}[k_{sm}][\Phi_{mm}] + [k_{ss}]^{-1}([m_{sm}][\Phi_{mm}][\Lambda_{mm}] + [m_{ss}][\Phi_{sm}][\Lambda_{mm}]). \quad (3.22)$$

Faz-se,

$$[\Phi_{sm}] = [T_0][\Phi_{mm}], \quad (3.23)$$

onde $[T_0]$ é a matriz de transformação entre os autovetores considerados, escrita na forma

$$[T_0] = [T_{Guyan}] + [k_{ss}]^{-1}([m_{sm}] + [m_{ss}][T_0])(\Phi_{mm}[\Lambda_{mm}][\Phi_{mm}]^{-1}). \quad (3.24)$$

Em seguida, a transformação entre os gdl mestres e os gdl do modelo completo é escrita como,

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_{mm} \\ \Phi_{sm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_{m,m}] \\ [T_0] \end{bmatrix} [\Phi_{mm}] = [T][\Phi_{mm}], \quad (3.25)$$

Substituindo a eq. (3.25) na (3.20) e multiplicando pela transposta da matriz de transformação obtida acima, obtém-se um problema de autovalor reduzido

$$[\bar{K}][\Phi_{mm}] = [\bar{M}][\Phi_{mm}][\Lambda_{mm}]. \quad (3.26)$$

A partir da eq. (3.26) tem-se,

$$[\Phi_{mm}][\Lambda_{mm}][\Phi_{mm}]^{-1} = [\bar{M}]^{-1}[\bar{K}]. \quad (3.27)$$

Substituindo a eq. (3.27) na (3.24), obtém-se:

$$[T_0] = [T_{Guyan}] + [k_{ss}]^{-1}([m_{sm}] + [m_{ss}][T_0])[\bar{M}]^{-1}[\bar{K}]. \quad (3.28)$$

Nota-se que $[T_0]$ está implícito na eq. (3.28) e não pode ser definido diretamente, então propõe-se um esquema iterativo (FRISWELL; GARVEY; PENNY, 1995) dado por:

$$[T]^{(k)} = [T_{Guyan}] + [k_{ss}]^{-1}([m_{sm}] + [m_{ss}][T]^{(k-1)})([\bar{M}]^{(k-1)})^{-1}[\bar{K}]^{(k-1)}, \quad (3.29)$$

$$[T]^{(k)} = \begin{bmatrix} [I_{m,m}] \\ [T]^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

$$[\bar{K}]^{(k)} = [T^{(k)}]^T [K] [T]^{(k)}, \quad (3.31)$$

$$[\bar{M}]^{(k)} = [T^{(k)}]^T [M] [T]^{(k)}, \quad (3.32)$$

onde o índice k denota a k -ésima iteração ($k \geq 2$).

Para o esquema iterativo acima, se $k = 1$, $[T]^{(1)} = [T_{Guyan}]$, é a técnica de Guyan; quando $k = 2$, é equivalente a técnica IRS. Autovetores e autovalores são estimados resolvendo o problema de autovalor generalizado do sistema reduzido:

$$[\bar{K}]^{(k)}[\Phi_m]^{(k)} = [\bar{M}]^{(k)}[\Phi_m]^{(k)}[\Lambda_m]^{(k)}. \quad (3.33)$$

Na abordagem iterativa, a matriz de transformação de coordenadas é atualizada repetidas vezes até atingir a precisão requerida. No entanto o processo de convergência deste método pode requerer elevado tempo computacional. Algumas melhorias foram apresentadas

por Xia *et al.*, (2004). Nessa abordagem, a fórmula iterativa da matriz de transformação é modificada de tal forma a melhorar a velocidade de convergência. As fórmulas para o novo esquema iterativo são:

$$[T]^{(k)} = [T_{Guyan}] + [k_{ss}]^{-1} \left([m_{sm}] + [m_{ss}] [T]^{(k-1)} \right) [M_d^{(k-1)}]^{-1} [\bar{K}]_{Guyan}, \quad (3.34)$$

$$[T]^{(k)} = \begin{bmatrix} [I_{m,m}] \\ [T]^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$$[M_d^{(k-1)}] = \left([m_{mm}] + [m_{ms}] [T]^{(k-1)} \right) + [T_{Guyan}]^T \left([m_{sm}] + [m_{ss}] [T]^{(k-1)} \right) \quad (3.36)$$

Utilizando a matriz de transformação obtida na eq. (3.35), as eqs.(3.31) e (3.32) são requeridas para estimar os autovetores e autovalores associados.

As versões algorítmicas do IIRS apresentadas acima são comumente utilizadas na redução de modelos por capturarem a dinâmica dos modelos completos com maior precisão. No entanto, ainda assim, esses esquemas iterativos são dependentes da definição do subespaço estático.

3.3.4 System Equivalent Reduction Expansion Process – SEREP

Devido certas deficiências do método IRS e suas variantes, o método SEREP proposto inicialmente por O’Callahan, Avitabile e Riemer (1989) com metodologia similar, em Kammer (1987), é uma abordagem amplamente difundida em inúmeras investigações da mecânica estrutural.

De acordo com Friswell e Inman (1999), Friswell, Penny e Garvey (2001) e Koutsovasilis e Beitelschmidt (2008) esta abordagem é proveniente da matriz modal da estrutura discretizada por elementos finitos, sendo os autovetores dispostos em colunas. Sendo $[\Phi]$ uma matriz modal, de ordem $n \times q$, em que os termos n e q indicam, respectivamente, a dimensão do modelo completo e os autovetores retidos, e considerando a eq. (3.5) como não amortecida e descrita no domínio da frequência, mediante aplicação da transformação de Laplace, pode-se obter a equação que relaciona o vetor de estados com o vetor de coordenadas modais $\{p\}$, de ordem $q \times 1$, segundo:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_m \\ u_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_{m,q}] \\ [\Phi_{s,q}] \end{bmatrix} \{p\}. \quad (3.37)$$

Considerando a primeira parte da equação acima e aplicando a definição da pseudo-inversa, as coordenadas modais podem ser expressas em termos das coordenadas mestres da seguinte forma:

$$\{p\} = [\Phi_{q,m}]^+ \{u_m\} = ([\Phi_{q,m}]^T [\Phi_{m,q}])^{-1} [\Phi_{q,m}]^T \{u_m\}. \quad (3.38)$$

Substituindo a eq. (3.38) na eq. (3.37), a matriz de transformação de coordenadas SEREP é obtida:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_m \\ u_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_{m,q}] \\ [\Phi_{s,q}] \end{bmatrix} [\Phi_{q,m}]^+ \{u_m\} = [T_{SEREP}] \{u_m\}. \quad (3.39)$$

A precisão do método SEREP está relacionada com a seleção dos autovetores retidos, diferentemente das técnicas anteriores. No entanto, para a aplicação desse método, recorre-se ao cálculo da matriz modal, que em modelos de grande dimensão é uma tarefa onerosa. Essa dificuldade pode ser superada mediante à utilização de técnicas algébricas (DAVIS, 2006; SAAD, 2003; GOLUB; LOAN, 1996) e ainda considerando apenas os primeiros autovetores.

A eficácia da abordagem SEREP ainda é dependente da definição dos gdl mestres e do número de modos selecionados ou modos de interesse. O número de gdl mestres deve ser maior ou igual ao número de modos de interesse. Caso contrário, a matriz de massa do sistema reduzido pode não ser positiva definida e as características dinâmicas não serão preservadas (DAS; DUTT, 2008; QU, 2004; O'CALLAHAN; AVITABILE; RIEMER, 1989).

3.3.5 Síntese Modal de Componentes – CMS

Atualmente é crescente a utilização da Síntese Modal de Componentes na análise de modelos de elementos finitos estocásticos e otimização estrutural. Essa técnica permite a divisão de uma estrutura complexa em vários problemas de dimensão reduzida, denominados de componentes que são analisados de forma independente. Na maioria dos casos em que o processamento é paralelo, onde diversos computadores trabalham simultaneamente e desempenham funções diferentes, tal técnica de redução oferece uma vantagem significativa

para um baixo custo computacional (GUEDRI, 2006; MASSON *et al.*, 2006; MASSON *et al.*, 2002).

Inúmeras variantes CMS foram desenvolvidas, onde os componentes são usualmente representados pelos vetores de Ritz, modos de vibrações normais, modos de corpo rígidos, modos estáticos e modos de interface. Essas variantes são classificadas em três grupos: os métodos de interfaces fixas (HURTY, 1965; CRAIG JR.; BAMPTON, 1968); os métodos de interfaces livres (GOLDMAN, 1969; HOU, 1969) e os métodos híbridos (MACNEAL, 1971). Neste trabalho, ênfase é dada no método CMS de interface fixa.

A principal característica do método de redução CMS é de prever o comportamento dinâmico da estrutura mediante comportamento dinâmico de subestruturas menores. A particularidade do algoritmo CMS está na consideração do vetor $\{u_s\}$ dos gdl internos ou omitidos como uma sobreposição dos vetores dos gdl escravos de outras técnicas de redução, tais como àqueles gerados de acordo com a redução de Guyan e os modos de Craig Jr. e Bampton.

Os modos de Graig Jr. e Bampton são compostos por alguns autovetores dos gdl omitidos da estrutura, fazendo $\{u_m\} = \{\ddot{u}_m\} = \{0\}$, conduz a:

$$[m_{ss}]\{\ddot{u}_s\} + [k_{ss}]\{u_s\} = \{F_s\}. \quad (3.40)$$

Fazendo $\{F_s\} = \{0\}$ e escrevendo a eq. (3.40) no domínio da frequência, a matriz modal da parte escrava da estrutura pode ser calculada:

$$([k_{ss}] - [m_{ss}]\omega_{ss}^2)\Phi_{ss} = \{0\}, \quad (3.41)$$

A equação acima descreve o problema geral de autovalor da parte escrava da estrutura. Considera-se para os modos Craig Jr. e Bampton (1968) apenas p autovetores (KOUTSOVASILIS; BEITELSCHMIDT, 2008),

$$[u_s]_{CB} = [\Phi_{CB}], \quad (3.42)$$

$$[\Phi_{ss}] = ([\Phi_{CB}]_{s,p} \quad [\Phi_2]_{s,s-p}) \quad (3.43)$$

Calculados os modos de Craig Jr. e Bampton, tem-se,

$$[u_s] = [u_s]_{Guyan} + [u_s]_{CB}, \quad (3.44)$$

Substituindo a eq. (3.42) e (3.43) na (3.44), obtém-se a seguinte relação:

$$\{u_s\} = (-[k_{ss}]^{-1}[k_{sm}])\{u_m\} + \sum_{i=1}^p \{\phi\}_i \{u_{m_{CB}}\}_i = [T_{Guyan}]\{u_m\} + [\Phi_{CB}]\{u_{m_{CB}}\}, \quad (3.45)$$

A partir da equação acima, a matriz de transformação de coordenadas CMS é obtida:

$$\begin{Bmatrix} u_m \\ u_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{u_m\} \\ [T_{Guyan}]\{u_m\} + [\Phi_{CB}]\{u_{m_{CB}}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_{m,m}] & [0] \\ [T_{Guyan}] & [\Phi_{CB}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m \\ u_{m_{CB}} \end{Bmatrix} = [T_{CMS}] \begin{Bmatrix} u_m \\ u_{m_{CB}} \end{Bmatrix}. \quad (3.46)$$

Apesar da grande vantagem do CMS citada acima, assim como as outras técnicas abordadas, o procedimento algorítmico CMS possui determinadas desvantagens. Em concordância com Koutsovasilis e Beitelschmidt (2008), a exatidão desse método de redução está relacionado com o número e a posição dos gdl retidos no modelo reduzido que por sua vez afeta diretamente tanto o conjunto dos $\{u_s\}$ estáticos quanto os dinâmicos.

3.3.6 Método da Base Modal e Enriquecimento

O cálculo de todos os modos próprios associados à dimensão do sistema é uma tarefa dispendiosa. No entanto, a grande maioria de sistemas de alta complexidade respondem preponderantemente em uma determinada faixa de frequência bem definida, o que motiva a utilização de apenas as bandas de interesse para aproximações. Geralmente adota-se o dobro da banda de frequência de interesse (GERGES, 2013).

A redução por coordenadas modais é definida com por truncamento modal. De acordo com Gerges (2013), a equação de segunda ordem que descreve o equilíbrio dinâmico do sistema discreto não amortecido, a eq. (3.1), admite uma solução particular com $\{F(t)\} = \{0\}$, da forma:

$$u(t) = \sum_{i=1}^n [\varphi]_i \{q(t)\}_i = [\Phi]\{q(t)\}, \quad (3.47)$$

onde $[\varphi]$ é o vetor que representa a forma própria do movimento, $\{q(t)\}$ é um escalar diferente de zero.

Uma vez resolvido o problema de autovalor mediante algoritmos numéricos (CHATELIN,1988), todos estes vetores formam bases modais. Por truncamento modal da eq. (3.47) em p modos, com $p \ll n$, obtém-se:

$$u(t) \approx \sum_{i=1}^p [\varphi]_i \{q(t)\}_i = [T] \{q(t)\}. \quad (3.48)$$

Este esquema de redução é utilizado extensivamente em modelos lineares. Para modelos não lineares, o princípio da sobreposição modal não é válido e ferramentas como bancos de dados de Ritz atualizados, os modos não lineares normais (NNM) ou a Decomposição Ortogonal Própria (POD) são utilizadas (LÜLF; TRAN; OHAYON, 2013).

A redução de base de Ritz, em dinâmica não linear, devido à natureza iterativa das matrizes de rigidez ou de força, exige mudanças durante o processo de simulação (GERGES, 2013), o que demanda alto custo computacional. Tal problema pode ser superado com enriquecimento de base estática e dinâmica (LIMA *et al.*, 2015; GUEDRI, 2006; GUEDRI; BOUHADDI; MAJED, 2006; MASSON *et al.*, 2006), e uso de métodos de aproximações combinadas (GERGES, 2013; KIRSCH; LIU, 1995; KIRSCH, 2002; KIRSCH, 2003a; KIRSCH, 2003b; KIRSCH; BOGOMOLNI; SHEINMAN, 2006a; KIRSCH; BOGOMOLNI; SHEINMAN, 2006b; KIRSCH; BOGOMOLNI, 2007).

Em sistemas dotados de não linearidades a matriz de alguns métodos de redução de modelos é insuficiente na representação da dinâmica do modelo. Assim, são requeridas estratégias de enriquecimento de base, tais como, os vetores residuais estáticos, que já foram utilizados em sistemas amortecidos por materiais viscoelásticos (LIMA *et al.*, 2015).

De acordo com de Lima *et al.* (2015), para enriquecer a base utiliza-se de resíduos estáticos baseados nos deslocamentos associados ao carregamento imposto, que podem ser obtidos através da seguinte relação:

$$[R] = [K]^{-1} \{F\}, \quad (3.49)$$

Tal procedimento é chamado de correção estática de primeira ordem. Desta forma, a nova matriz de transformação de coordenadas enriquecida pode ser expressa como segue:

$$[T_{enriquecida}] = [[T] \quad [R]]. \quad (3.50)$$

Para a redução de alguns modelos propostos nesse trabalho, bases de enriquecimentos compostas por modos próprios retidos são sugeridas, o que permite maior robustez aos modelos reduzidos. Dessa forma, a nova matriz de transformação de coordenadas enriquecida é dada como:

$$[T_{enriquecida}] = [[T] \quad [\varphi_p]]. \quad (3.51)$$

em que $[T]$ é a matriz transformação de coordenadas particular em cada método de redução e $[\varphi_p]$ são autovetores retidos em p modos.

Capítulo 4

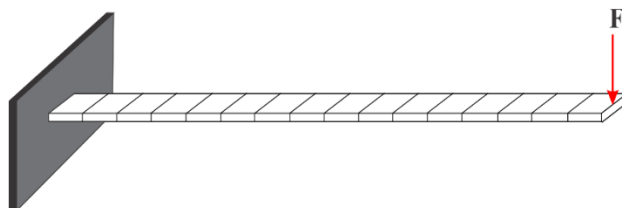
SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo, simulações numéricas em estruturas do tipo vigas são realizadas com o objetivo de verificar a eficiência dos métodos de redução de modelos apresentados no capítulo anterior. Avalia-se o desempenho dos modelos reduzidos comparados ao modelo completo, com todos os graus de liberdade, bem como a redução do custo computacional. Nas simulações numéricas as estruturas são submetidas a situações diversas, com o intuito de explicitar as vantagens e desvantagens no uso de modelos reduzidos

4.1 Caso 1: Viga de Euler-Bernoulli Engastada-Livre

Neste caso considerou-se um exemplar de viga de Euler-Bernoulli, cuja modelagem foi estudada no capítulo 2 deste trabalho, sendo submetida à força externa como indicado na Figura 4.1.

Figura 4. 1. Viga de Euler - Bernoulli engastada - livre.



Fonte: o autor.

Na Tabela 4.1 estão dispostos os valores referentes as propriedades geométricas e físicas da viga.

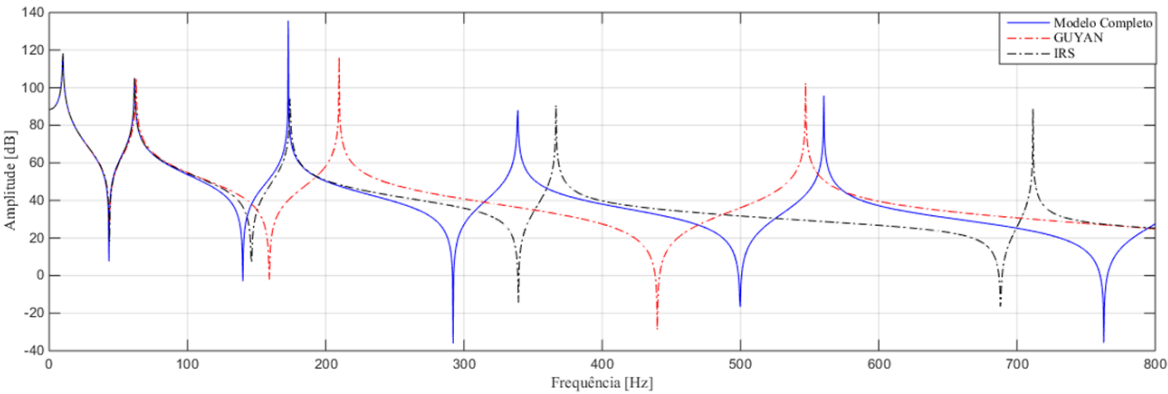
Tabela 4. 1. Propriedades Físicas e Geométricas da viga.

Viga de Alumínio		
Propriedades Geométricas	Número de elementos	16
	Comprimento [m]	0,5
	Largura [m]	0,01
	Espessura [m]	0,003
Propriedades Físicas	Densidade volumétrica [kg/m^3]	2.710
	Módulo de Elasticidade [MPa]	7.10^9

Fonte: o autor.

A Figura 4.2 ilustra as Funções Respostas em Frequência (FRFs) estimadas em uma faixa de 0 a 800 Hz do modelo completo confrontadas com as FRFs obtidas por dos modelos reduzidos dos métodos de redução de Guyan e IRS. Em ambos os modelos reduzidos, foram considerados 12 gdl retidos.

Figura 4. 2. FRFs do modelo completo e dos modelos reduzidos por Guyan e IRS para o caso 1.



Fonte: o autor.

A qualidade de resposta dos métodos de Guyan e IRS está restrita às primeiras frequências de ressonâncias. O modelo reduzido por Guyan mostrou-se eficiente nos dois primeiros modos, compreendidos em uma pequena faixa de frequência de 0 a 100 Hz, enquanto que o método IRS proporcionou resultados satisfatórios para os três primeiros modos compreendidos em uma faixa de 0 a 200 Hz. Tal fato é evidenciado na Tab. 4.2, que representa

os valores numéricos das frequências de ressonâncias estimadas para o modelo completo e os modelos reduzidos.

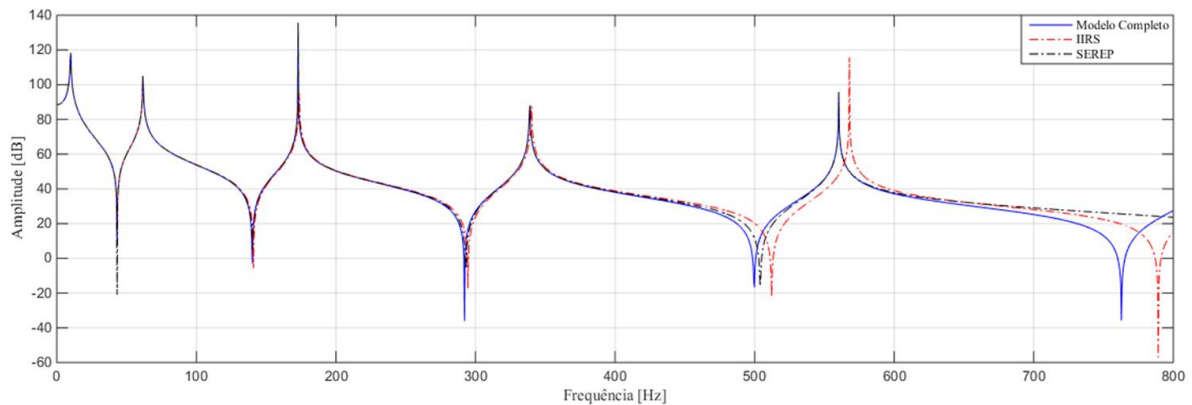
Tabela 4. 2. Valores das frequências de ressonâncias estimadas para o modelo completo e modelos reduzidos pelos métodos de redução de Guyan e IRS. (rad/s).

	Modelo Completo	Guyan	IRS
1	9,85	9,85	9,85
2	61,74	62,72	61,75
3	172,89	209,69	173,09
4	338,82	547,11	342,36
5	560,24	1145,73	711,64

Fonte: o autor.

A Figura 4.3 ilustra as FRFs estimadas em uma faixa de 0 a 800 Hz do modelo completo e dos modelos reduzidos pelos métodos de redução SEREP e IIRS. Para o primeiro considerou-se apenas 5 gdl retidos, enquanto para o último considerou-se 12 gdl retidos.

Figura 4. 3. FRFs do modelo completo e dos modelos reduzidos por IIRS e SEREP para o caso 1.



Fonte: o autor.

A particularidade na obtenção da matriz de transformação de coordenadas para o método de redução SEREP, se comparado a outros métodos de redução, permite a utilização de um número bem menor de gdl retidos sem perda significativa nas aproximações. O modelo reduzido pelo método SEREP proporcionou excelentes resultados. Já o método IIRS proporcionou curvas próximas as do modelo completo e os valores de frequências de ressonâncias apresentam discrepâncias que vão aumentando gradativamente nos valores posteriores, fato percebido ainda na Tab. 4.3.

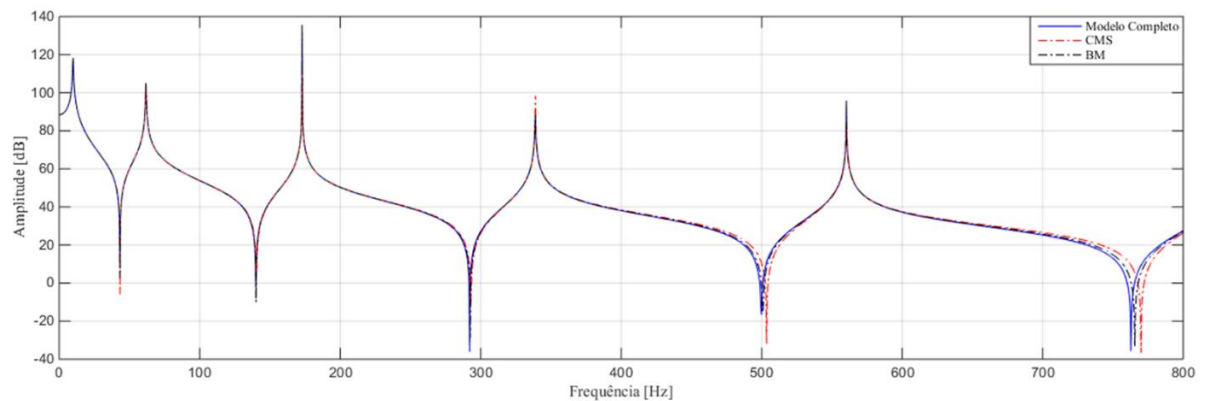
Tabela 4. 3. Valores das frequências de ressonâncias estimadas para o modelo completo e modelos reduzidos pelos métodos de redução de IIRS e SEREP. (rad/s).

	Modelo Completo	IIRS	SEREP
1	9,85	9,85	9,85
2	61,74	62,75	61,74
3	172,89	173,55	172,89
4	338,82	340,01	338,82
5	560,24	567,88	560,24

Fonte: o autor.

A Figura 4.4 ilustra as FRFs estimadas em uma faixa de 0 a 800 Hz do modelo completo e dos modelos reduzidos pelos métodos de redução CMS e BM. Em ambos foram considerados 12 gdl retidos.

Figura 4. 4. FRFs do modelo completo e dos modelos reduzidos por CMS e BM para o caso 1.



Fonte: o autor.

Observa-se pela Fig.4.4 que os modelos reduzidos pelos métodos CMS e BM proporcionaram curvas próximas as do modelo completo. O método BM apresentou os 5 primeiros valores de frequências de ressonâncias idênticos aos do modelo completo, enquanto que o método CMS apresentou pequena discrepância em alguns valores, conforme apresentado na Tab. 4.4.

Tabela 4. 4. Valores das frequências de ressonâncias estimadas para o modelo completo e modelos reduzidos pelos métodos de redução de CMS e BM. (rad/s).

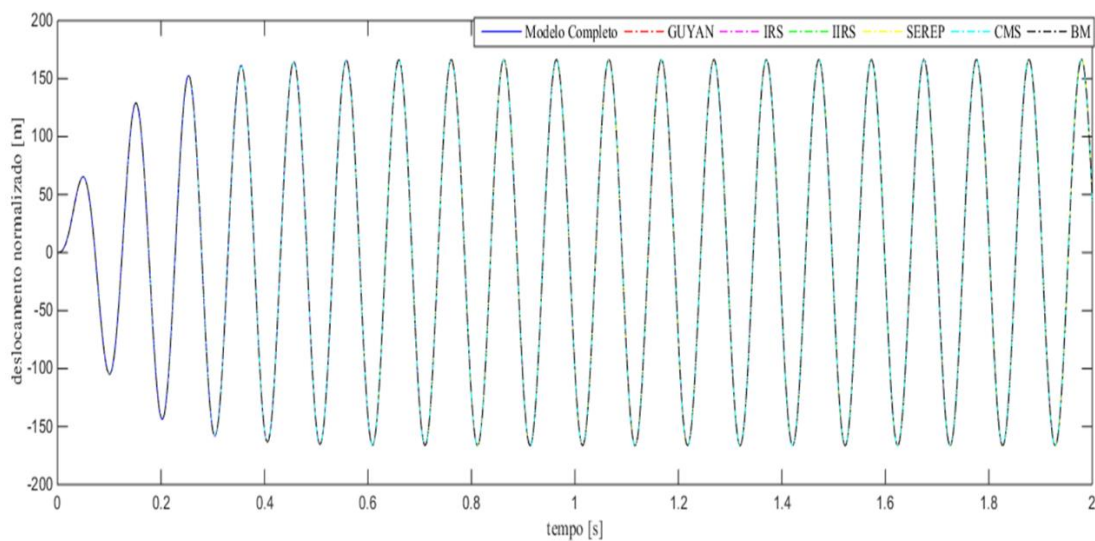
	Modelo Completo	CMS	BM
1	9,85	9,85	9,85
2	61,74	62,74	61,74
3	172,89	172,91	172,89
4	338,82	338,92	338,82
5	560,24	560,38	560,24

Fonte: o autor.

Para melhor verificação da eficiência dos métodos de redução propõe-se a validação dos modelos reduzidos mediante à caracterização do comportamento dinâmico do sistema. Para este caso, optou-se por considerar um amortecimento proporcional.

A Figura 4.5 ilustra as respostas no domínio do tempo referentes ao gdl excitado com força do tipo $F(t) = F \sin(\omega t)$, em que $F = 80N$ é a amplitude de excitação e ω é a frequência de excitação. Utilizou-se o método de integração numérica de Newmark com intervalo de tempo de 0 a 2s, passo de tempo $\Delta t = 1 \times 10^{-4} s$, consistindo na obtenção dos deslocamentos transversais normalizados. Neste trabalho, adotou-se em todos os casos o fator de normalização: $1 \times 10^2 u(t) / L$.

Figura 4. 5. Respostas no domínio do tempo para o modelo completo e dos modelos reduzidos para o caso 1



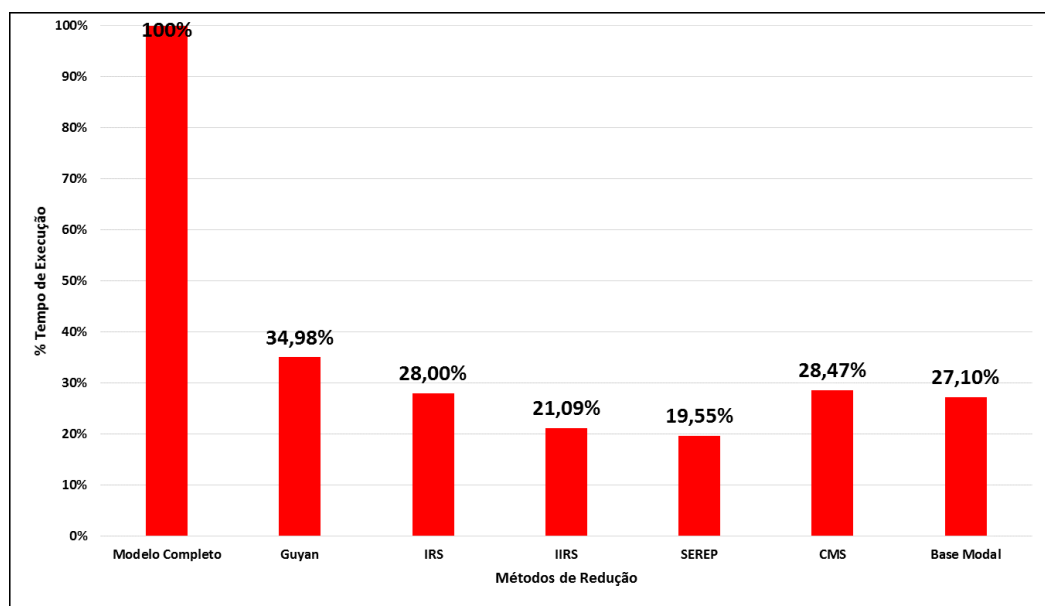
Fonte: o autor.

Observa-se que as curvas estimadas para a resposta dinâmica dos modelos reduzidos foram próximas as do modelo completo, inclusive para os modelos reduzidos pelos métodos de Guyan e IRS que não obtiveram boa aproximação nas FRFs do modelo. Fato que se deve ao curto intervalo de tempo considerado nas simulações e que a frequência de excitação considerada é coincidente com a primeira frequência natural do modelo que para todos os métodos de redução analisados foi bem aproximada.

Para verificar a economia de tempo proporcionada pelos modelos reduzidos em relação ao modelo completo, estimou-se o tempo gasto na discretização da estrutura, montagem das matrizes globais, determinação da matriz de transformação de coordenadas e redução das matrizes globais do modelo, cálculo das FRFs e respostas dinâmicas.

A Fig. 4.6 representa a economia de tempo de cada método de redução de modelos utilizados.

Figura 4. 6. Tempo computacional estimado para o caso 1.



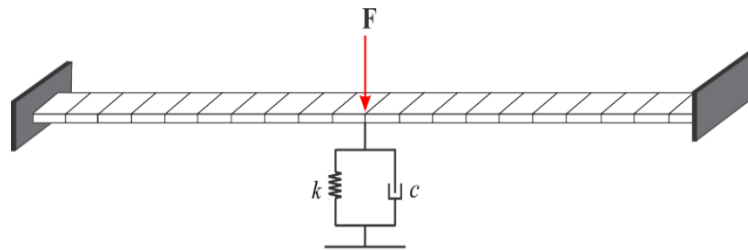
Fonte: o autor.

Durante o processo de análises numéricas, todos os modelos reduzidos obtiveram tempo de execução inferior a 35% se comparados ao modelo completo. O método de redução SEREP, em comparação com outros métodos abordados, foi o de melhor eficiência. O modelo reduzido por esse método proporcionou excelente qualidade de resposta e ainda considerável economia de tempo de aproximadamente 80%. Em aplicações posteriores, optou-se pela não utilização dos métodos de Guyan e IRS por não oferecerem boa aproximação

4.2 Caso 2: Viga de Euler-Bernoulli Engastada com Mola Linear e Amortecimento Viscoso

Nesta aplicação considerou-se uma viga engastada pelas duas extremidades com 20 elementos finitos, sujeitas às mesmas condições indicadas na Tab. 4.1, no entanto, insere-se mola linear com rigidez $k_{linear} = 1 \times 10^3 \text{ N/m}$, amortecedor do tipo viscoso e carregamentos externos são impostos nos graus de liberdade indicados na Figura 4.7.

Figura 4. 7. Viga bi engastada de Euler Bernoulli com mola linear e amortecimento viscoso.

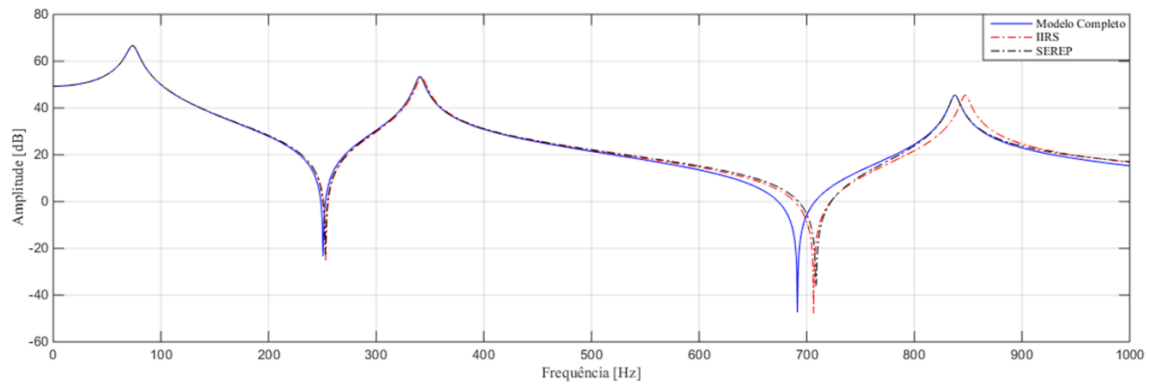


Fonte: o autor.

Como conceituado no capítulo 3 deste trabalho, para a determinação da matriz de transformação de coordenadas em todos os métodos de redução estudados, considerava-se um sistema não amortecido. Pretende-se neste caso, verificar a representação dos modelos reduzidos em sistemas com amortecimento viscoso.

Considerando um fator de amortecimento modal $c = 1 \text{ N/m}$, a Fig. 4.8 ilustra as FRFs estimadas em uma faixa de 0 a 1000 Hz do modelo completo e dos modelos reduzidos pelo método de redução IIRS no qual considerou-se 12 gdl como retidos e SEREP, com apenas 7 gdl retidos.

Figura 4. 8. FRFs do modelo completo e dos modelos reduzidos por IIRS e SEREP para o caso 2.



Fonte: o autor.

Conforme visto na Fig. 4.8, as curvas obtidas pelos modelos reduzidos foram próximas as do modelo completo. O modelo reduzido pelo método SEREP proporcionou ótimos resultados e o modelo reduzido pelo método IIRS, apresentam discrepâncias crescentes nos valores de frequências de ressonâncias, fato evidenciado na Tab. 4.5.

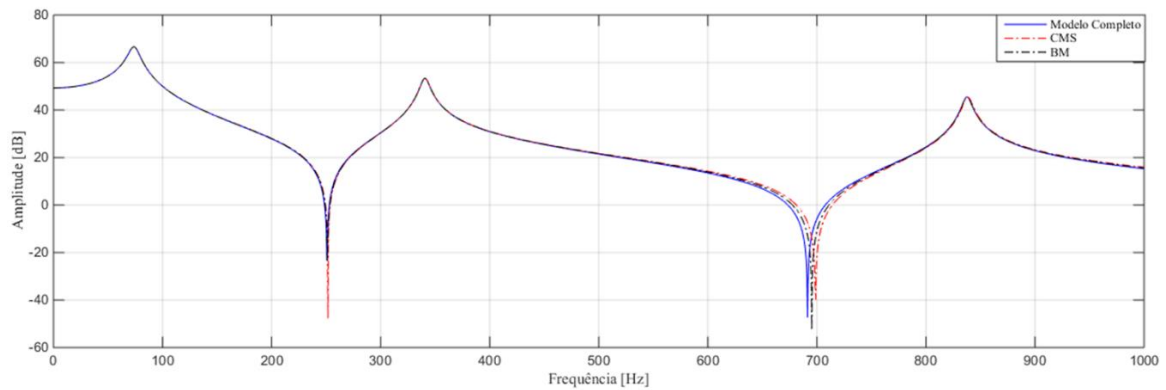
Tabela 4. 5. Valores das frequências de ressonâncias estimadas para o modelo completo e modelos reduzidos pelos métodos de redução de IIRS e SEREP. (rad/s).

	Modelo Completo	IIRS	SEREP
1	74,03	74,03	74,03
2	172,81	172,89	172,81
3	340,63	342,07	340,63
4	560,11	561,92	560,11
5	837,63	847,34	837,63

Fonte: o autor.

Considerando o mesmo fator de amortecimento modal, a Fig. 4.9 ilustra as FRFs estimadas em uma faixa de 0 a 1000 Hz do modelo completo e dos modelos reduzidos pelo método de redução CMS e BM. Para ambos os métodos de redução, foram considerados 12 gdl como retidos.

Figura 4. 9. FRFs do modelo completo e dos modelos reduzidos por CMS e BM para o caso 2.



Fonte: o autor.

Observa-se na Fig. 4.9 que os modelos reduzidos produziram curvas bem aproximadas das estimadas para o modelo completo. Referente aos valores de frequências de ressonâncias, apresentados na Tab. 4.6, o método BM forneceu valores iguais ao modelo completo. O método CMS apresentou valores razoáveis, com pequenas discrepâncias nos últimos valores considerados.

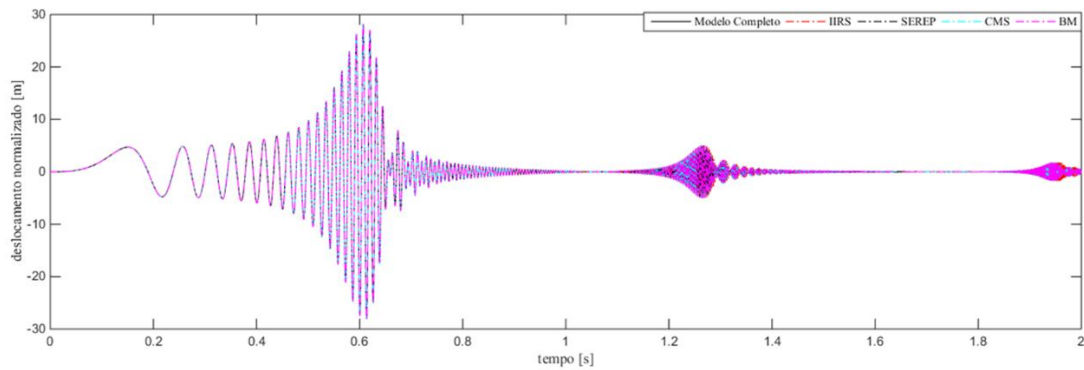
Tabela 4. 6. Valores das frequências de ressonâncias estimadas para o modelo completo e modelos reduzidos pelos métodos de redução de CMS e BM. (rad/s).

	Modelo Completo	CMS	BM
1	74,03	74,06	74,03
2	172,81	172,81	172,81
3	340,63	340,74	340,63
4	560,11	560,54	560,11
5	837,63	838,30	837,63

Fonte: o autor.

A Figura 4.10 ilustra as respostas no domínio do tempo referentes ao gdl excitado com força não linear $F(t) = F \sin(\omega t^3)$ em que $F = 80N$ é a amplitude de excitação e ω é a frequência de excitação.

Figura 4. 10. Respostas no domínio do tempo do modelo completo e dos modelos reduzidos para o caso 2.

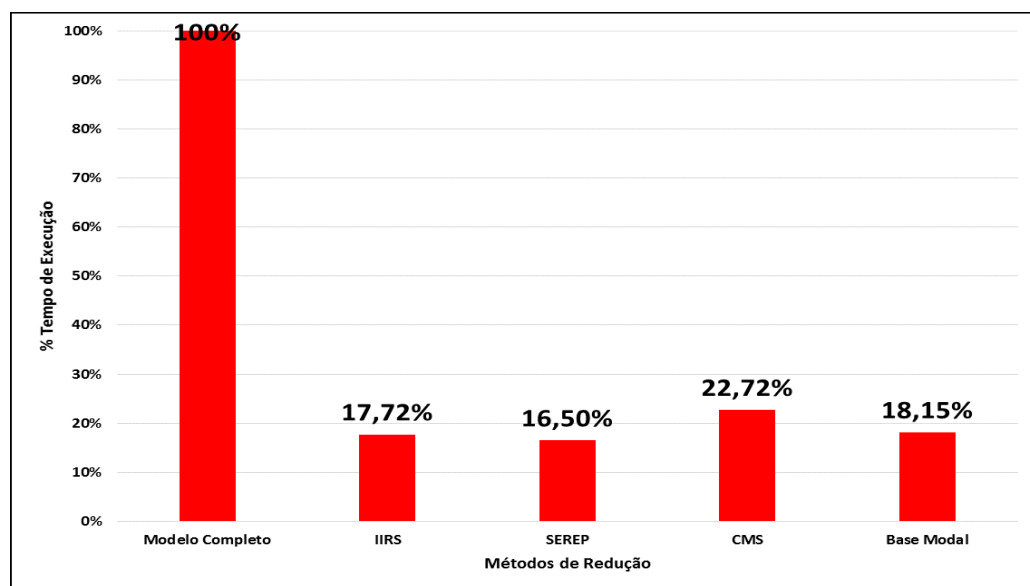


Fonte: o autor.

Para os parâmetros considerados, conforme mostrado na Fig. 4.10 todos os modelos reduzidos apresentaram curvas próximas as obtidas pelo modelo completo.

Referente ao tempo computacional, a Fig. 4.11 apresenta a economia de tempo de cada método de redução de modelos utilizados.

Figura 4. 11. Tempo Computacional estimado para o caso 2.



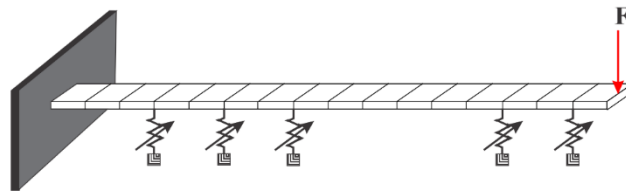
Fonte: o autor.

Durante o processo de análises numéricas, todos os modelos reduzidos obtiveram tempo de execução inferior a 25% se comparados ao modelo completo. Todos os métodos de redução utilizados foram eficientes no quesito qualidade de resposta. Referente à economia de tempo o método SEREP foi superior apresentando um ganho computacional de aproximadamente 84%.

4.3 Caso 3: Viga de Euler-Bernoulli Engastada Livre com Não Linearidade Localizada

Conforme o esquema da Fig. 4.12, para essa aplicação considerou-se uma viga engastada conforme as propriedades descritas na tab. 4.1, discretizada em 16 elementos finitos e sujeita a inserção de molas com características não lineares cuja rigidez é dada por $k_{\text{não linear}} = 1 \times 10^5 \text{ N/m}$. A contribuição não linear é dada segundo a eq. (2.23). As curvas estimadas são referentes ao gdl excitado com força de $F(t) = F \sin(\omega t)$, com $F = 40 \text{ N}$. Optou-se por um intervalo de tempo de 0 a 1s com passo de tempo $\Delta t = 1 \times 10^{-4} \text{ s}$.

Figura 4. 12. Viga de Euler - Bernoulli com molas com características não lineares.

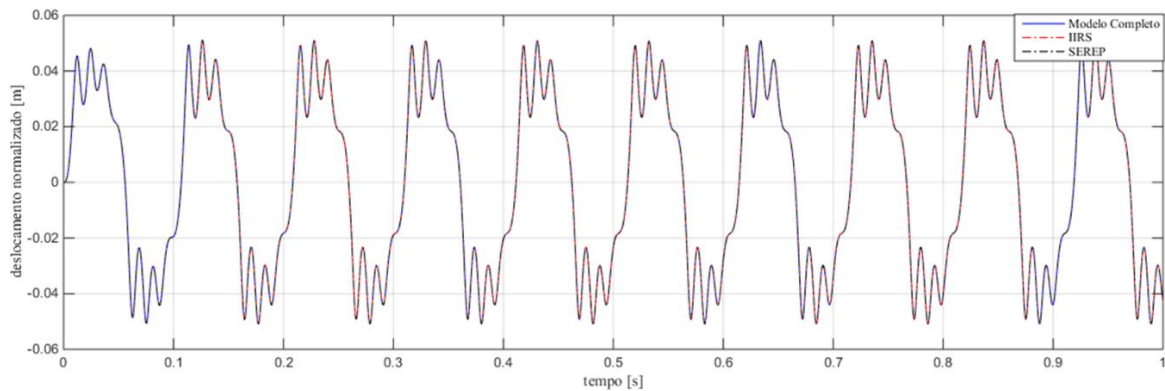


Fonte: o autor.

Em um primeiro momento os métodos IIRS, CMS e BM apresentaram resultados divergentes, fato que foi contornado utilizando vetores residuais estáticos como enriquecimento de base, assim a matriz de redução de base foi composta por 10 gdl retidos e um vetor de enriquecimento para os métodos CMS e BM. Já para o método IIRS considerou-se, além dos 10 gdl retidos, 3 vetores modais de enriquecimento. Para o método SEREP utilizou-se 12 gdl retidos, no entanto, não houve necessidade da utilização de enriquecimento.

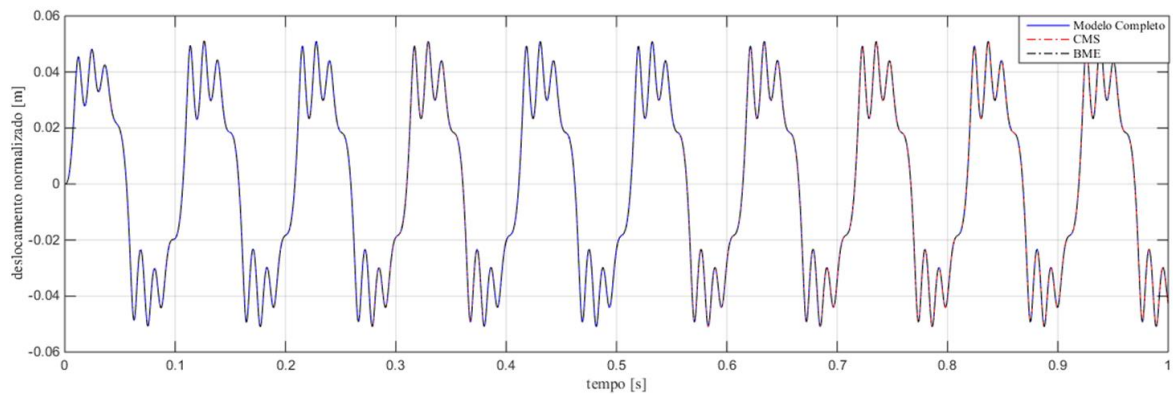
Observa-se que a inclusão de molas com características não lineares acarretou em comportamento não linear nas respostas obtidas. A boa representação dos métodos IIRS, CMS e BME (Base Modal Enriquecida) está relacionada ao enriquecimento de base.

Figura 4. 13. Respostas no domínio do tempo do modelo completo e dos modelos reduzidos por IIRS e SEREP para o caso 3.



Fonte: o autor.

Figura 4. 14. Respostas no domínio do tempo do modelo completo e dos reduzidos por CMS e BME para o caso 3.

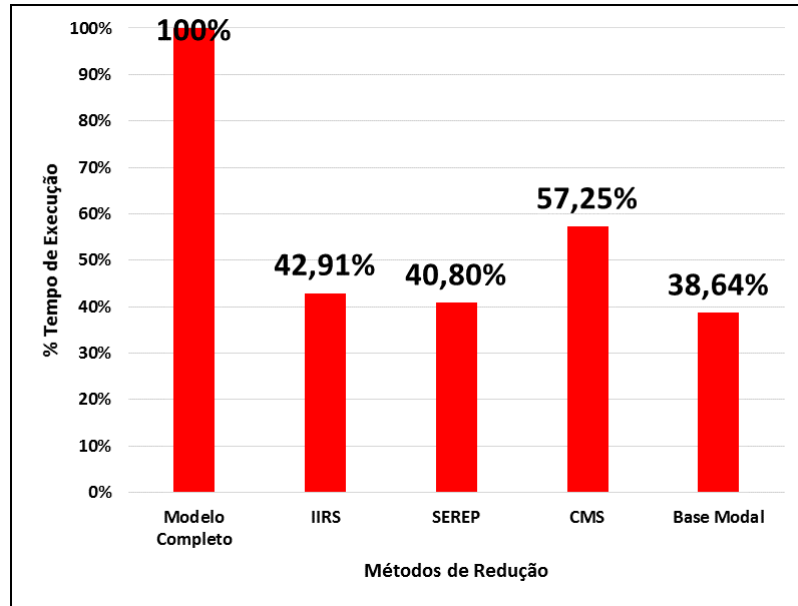


Fonte: o autor.

A Figura 4.15 apresenta a economia de tempo proporcionada por cada método de redução de modelos utilizados.

Devido a não linearidade, o tempo computacional dos modelos reduzidos foi elevado se comparado aos casos anteriores. Ainda assim, todos os modelos reduzidos obtiveram tempo de execução inferior a 60% que é um ganho de tempo satisfatório. Referente a economia de tempo, o método BME apresentou melhor ganho computacional, aproximadamente 61%, porém para uma boa qualidade de resposta foi necessário a utilização de bases de enriquecimento.

Figura 4. 15. Tempo computacional estimado para o caso 3.

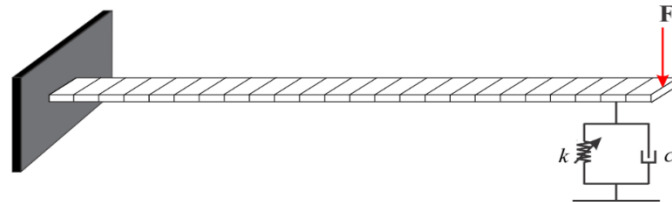


Fonte: o autor.

4.4 Caso 4: Viga de Euler-Bernoulli Engastada com Mola Não Linear e Amortecedor Viscoso

Para este caso considera-se uma viga discretizada em 24 elementos finitos sujeita a amortecimento viscoso, fator de amortecimento $c=1N/m$, e a mola com característica não linear de rigidez $k_{n\tilde{a}o\tilde{l}i\tilde{n}e\tilde{a}r} = 1 \times 10^5 \frac{N}{m^3}$, como indicado na Figura 4.16.

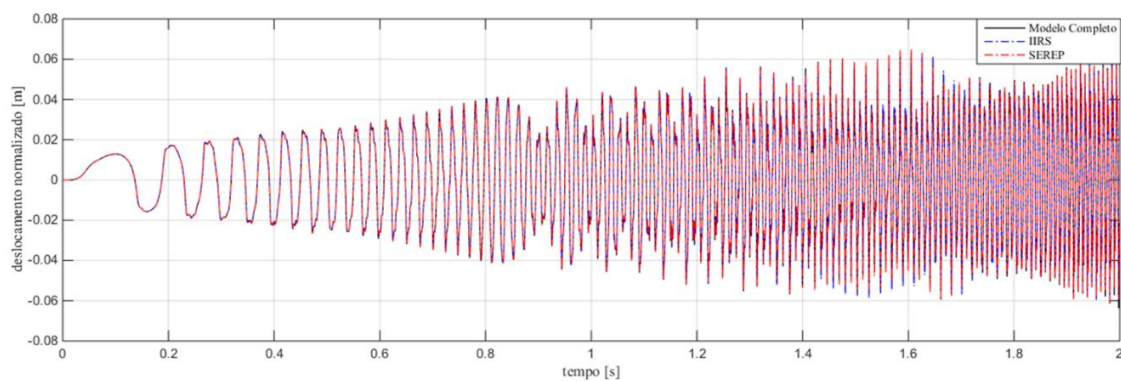
Figura 4. 16. Viga de Euler - Bernoulli com mola com característica não linear e amortecimento viscoso.



Fonte: o autor.

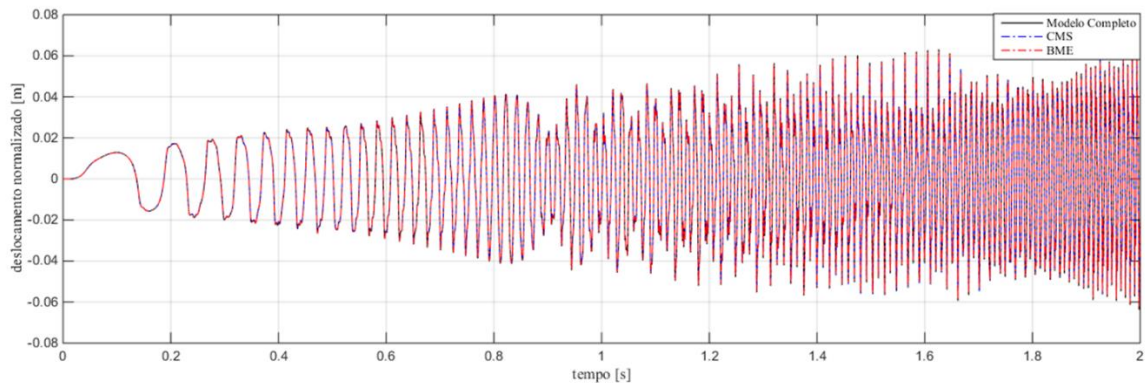
Nessa aplicação, considerou-se 12 gdl retidos para o método CMS, 12 gdl retidos para o método BM e mais um vetor de enriquecimento residual estático, 12 gdl retidos para o método IIRS e mais 3 vetores modais de enriquecimento. Para o método SEREP considerou-se 10 gdl retidos. Na estimação das respostas no domínio do tempo representadas nas Fig. 4.17 e 4.18, utilizou-se uma força de excitação do tipo $Fe(t) = 160t \sin(60\pi t^2)$, com intervalo de tempo de 0 a 2s e passo de tempo $\Delta t = 1 \times 10^{-4} s$.

Figura 4. 17. Respostas no domínio do tempo do modelo completo e dos modelos reduzidos por IIRS e SEREP para o caso 4.



Fonte: o autor.

Figura 4. 18. Respostas no domínio do tempo do modelo completo e dos modelos reduzidos por CMS e BME para o caso 4.

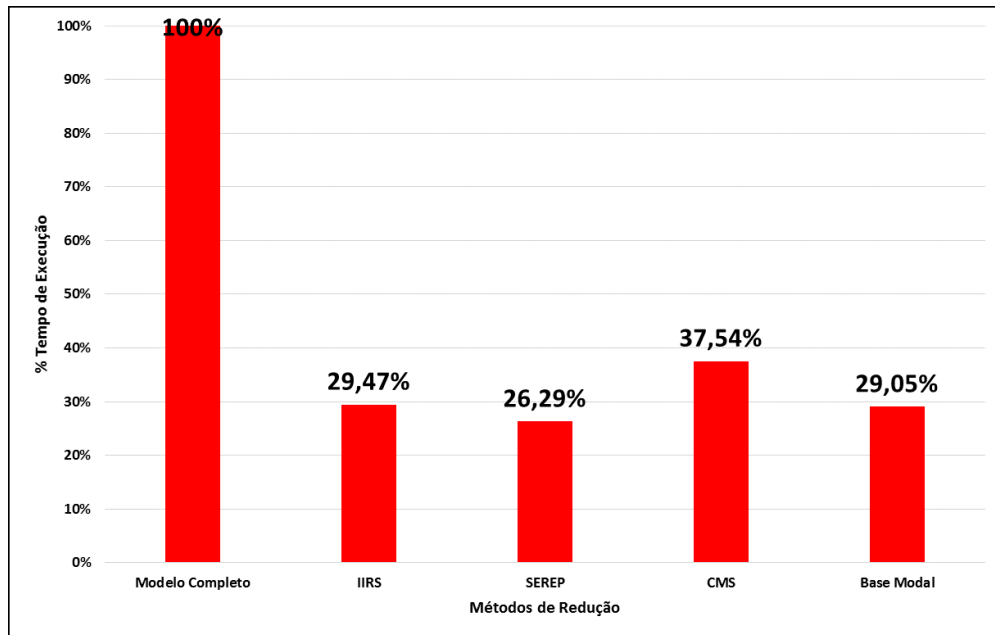


Fonte: o autor.

Percebe-se que as respostas dinâmicas obtidas pelos modelos reduzidos por IIRS e SEREP, Fig. 4.17, e pelos modelos reduzidos por CMS e BME, Fig. 4.18, foram próximas as curvas proporcionadas pelo modelo completo.

Apesar de todos os modelos reduzidos proporcionarem boa qualidade de resposta, o modelo reduzido apresentou maior eficiência devido ao ganho computacional de aproximadamente 73%, como pode ser visto na Fig. 4.19 que apresenta o tempo computacional de cada método durante os processos de análises numéricas.

Figura 4. 19. Tempo computacional estimado para o caso 4.

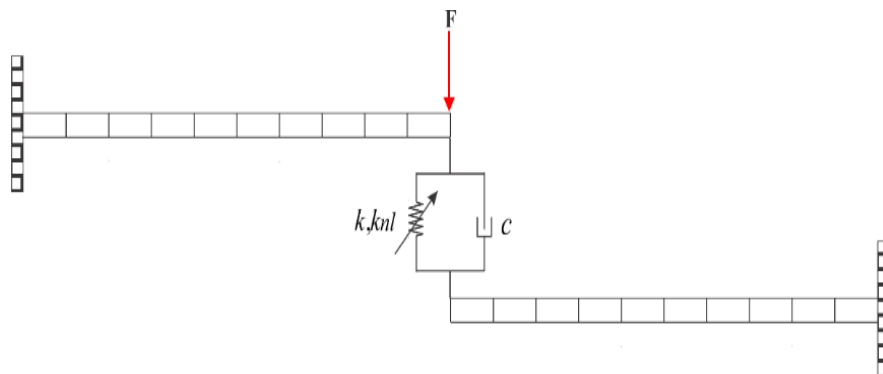


Fonte: o autor.

4.5 Caso 5: Vigas de Euler – Bernoulli Conectadas por Mola Não Linear e Amortecedor Viscoso

Considera-se duas vigas, conforme Fig. 4.20, discretizadas em 30 elementos finitos, sendo engastadas em lados opostos e conectadas entre si por mola com característica linear e não linear de rigidez $k_{linear} = 1 \times 10^3 \text{ N/m}$ e $k_{não linear} = 1 \times 10^6 \text{ N/m}^3$ e amortecedor viscoso cujo fator de amortecimento modal é dado por $c = 1 \text{ N/m}$

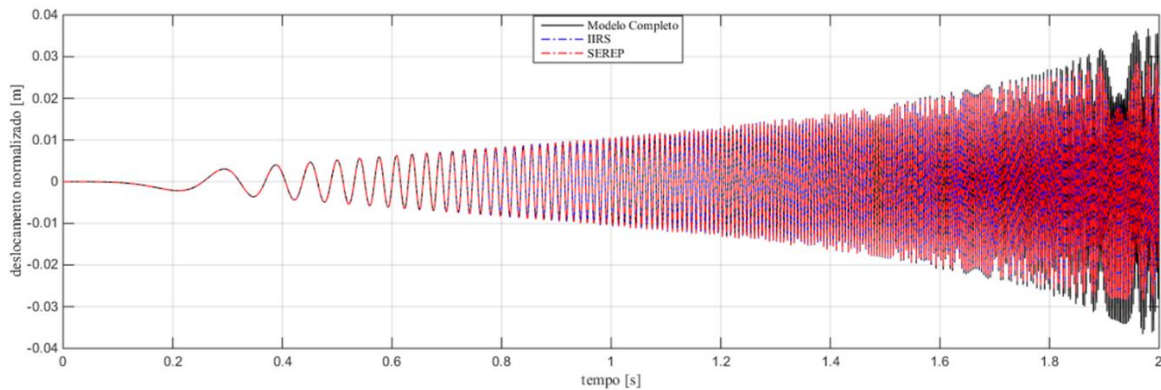
Figura 4. 20. Vigas de Euler - Bernoulli conectadas por mola com característica não linear e amortecimento viscoso.



Fonte: o autor.

Nessa aplicação, considerou-se 10 gdl retidos para o método CMS, 10 gdl retidos para o método BM e mais um vetor de enriquecimento residual estático, 10 gdl retidos para o método IIRS e mais 2 vetores modais de enriquecimento. Para o método SEREP considerou-se 8 gdl retidos. Para a estimação das respostas no domínio do tempo representadas na Figura 4.21 e 4.22, utilizou-se uma força de excitação do tipo $Fe(t) = 60t \sin(60\pi t^3)$, com intervalo de tempo de 0 a 2s e passo de tempo $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$ na integração numérica.

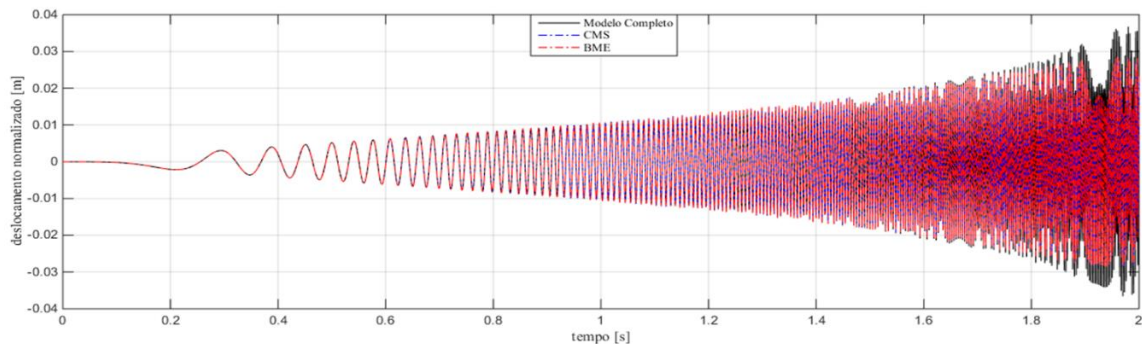
Figura 4. 21. Respostas no domínio do tempo do modelo completo e dos modelos reduzidos por IIRS e SEREP para o caso 5.



Fonte: o autor.

Percebe-se que a inserção do amortecedor viscoso pouco contribuiu para a atenuação da amplitude de vibração do modelo, isso devido a própria configuração do modelo, ao lugar de aplicação da força excitadora, acoplamento das molas não lineares e do amortecedor.

Figura 4. 22. Respostas no domínio do tempo do modelo completo e dos modelos reduzidos por CMS e BME para o caso 5.

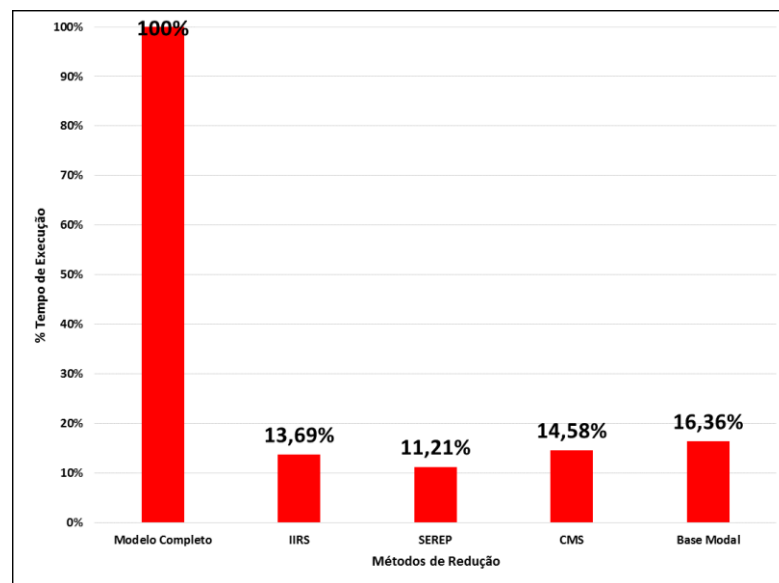


Fonte: o autor.

Conforme as curvas obtidas pelos modelos reduzidos por IIRS e SEREP, Fig. 4.21, e pelos modelos reduzidos por CMS e BME, Fig. 4.22, todos os métodos de redução de modelos apresentaram boa aproximação. No entanto, à medida em que o intervalo aumenta as curvas entre os modelos reduzidos e o completo começam a apresentar algumas divergências.

Para a modelagem das duas vigas conectadas sugeridas nessa aplicação, considerou-se um número maior de elementos finitos e, conseqüentemente, um número maior de gdl. No entanto, os métodos de redução de modelos apresentaram excelentes aproximações com um número menor ou igual ao utilizado nos casos anteriores. Esse fato proporcionou um tempo de execução das análises numéricas inferior a 20% para todos os modelos reduzidos, com destaque para o método SEREP que apresentou uma economia de tempo de aproximadamente 88,5%.

Figura 4. 23. Tempo Computacional estimado para o caso 5.



Fonte: o autor.

Capítulo 5

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Para o desenvolvimento desse trabalho de dissertação, foram realizados estudos voltados a investigação de métodos de redução de modelos. Em particular, foram analisados os métodos de redução de Guyan, *Improved Reduction System* (IRS), *Iterative Improved Reduction System* (IIRS), *System Equivalent Reduction Expansion Process* (SEREP), *Component Mode Synthesis* (CMS) e *Base Modal* (BM). Os modelos foram implementados em modelos de elementos finitos permitindo a modelagem do comportamento dinâmico de sistemas estruturais do tipo vigas com diferentes configurações e submetidas à não linearidades. A partir dos modelos de elementos finitos, a caracterização do comportamento dinâmico do modelo completo por modelos reduzidos foi realizada por análises de funções de resposta em frequência e de respostas no domínio do tempo.

As simulações numéricas realizadas e os resultados alcançados permitiram verificar e avaliar o desempenho dos métodos de redução de modelos como ferramenta relevante na análise de modelos não lineares. Os modelos reduzidos mostraram-se eficientes para a caracterização e preservação do comportamento dinâmico de sistemas estruturais em modelos de elementos finitos. No entanto, estes métodos apresentam vantagens e desvantagens que devem ser consideradas.

Alguns métodos de redução de modelos apresentaram forte natureza estática e em problemas dinâmicos apresentaram baixa representatividade. Nas análises das FRFs estimadas para os modelos reduzidos pelos métodos de Guyan e IRS apresentaram aproximação razoável em apenas uma pequena faixa de frequências.

Conforme as frequências de ressonâncias aumentam os tempos referentes à inércia do modelo tornam-se significativos o que torna a utilização dos métodos de Guyan e IRS inconveniente.

A abordagem iterativa para o método IRS é proporciona melhores aproximações que o método IRS e ainda melhor economia de tempo apesar da natureza iterativa. No entanto, a representatividade das FRFs de modelos lineares está sujeita a algumas discrepâncias que tendem a aumentar à medida em que é considerado valores de ressonâncias maiores. Para esse método, o enriquecimento de base por vetores modais se mostrou eficiente, permitindo melhor representatividade do modelo reduzido em modelos não lineares.

O método da Base Modal além da praticidade é um método de redução de grande confiabilidade na representação de modelos lineares e não lineares. Para este método a utilização de enriquecimento de base por resíduos estáticos é necessária principalmente quando se deseja analisar modelos com algum tipo de não linearidade.

Algumas técnicas de redução, como o CMS, utilizam particularidades positivas oriundas de outros métodos, fato que possibilita a obtenção de melhores aproximações em problemas mais complexos. O método CMS apesar de pequenas discrepâncias, é um método de redução promissor em problemas de análise robusta de modelos estocásticos e otimização estrutural, onde os componentes podem ser reduzidos e analisados independentemente, permitindo que diversas máquinas trabalhem simultaneamente e desempenhando funções diferentes.

O método de maior destaque foi o SEREP. Em todas as aplicações sugeridas nesse trabalho, este apresentou excelente qualidade de resposta e grande economia de tempo, em alguns casos obtendo um ganho computacional de até 88,5%. A técnica de redução SEREP é altamente dependente da escolha correta dos gdl a serem retidos. Nesse trabalho, conseguiu-se excelentes resultados, utilizando-se de um número menor de gdl retidos se comparado aos outros métodos.

A realização deste trabalho de pesquisa, permitiu identificar diferentes temas para investigações futuras relacionadas ao estudo de métodos de redução de modelos.

Em um primeiro momento, pretende-se aplicar esses métodos em modelos de maior complexidade e de dimensão elevada, visando a qualidade de resposta e economia de tempo desses métodos de redução em estruturas de cunho industrial, automobilísticas e aeroespaciais.

Referente a modelos com não linearidades geométricas, investigações e estudos de métodos híbridos de redução e cuja a matriz de redução de base é atualizada, assim como as matrizes de rigidez e de força não linear, estão sendo realizados. Aplicações envolvendo não

linearidades são, usualmente restritas à análise no domínio do tempo. Almeja-se a implementação de procedimentos numéricos eficientes na realização de análise modal, análise de respostas no domínio do tempo e domínio da frequência.

Deve-se considerar ainda que a utilização de métodos de redução de modelos é uma ferramenta de grande utilidade na otimização estrutural, análise de incertezas, análise robusta de modelos estocásticos, etc. Fato que merece atenção especial mediante a presença de projetos cada vez mais ousados na engenharia moderna.

5.1 Trabalhos Complementares

Com base no trabalho desenvolvido nesta dissertação, alguns trabalhos complementares foram realizados, dentre os quais destaca-se:

5.1.1 Publicações e apresentações em congresso internacional e nacionais

GONÇALVES, D. F.; FONSECA JR, L. A.; de REZENDE, S.M. F.; BORGES R. A.; de LIMA A. M.G., **Reduction Model Reduction Methods Applied of Mechanical Nonlinear System**. Em *XXXVI Ibero – Latin American Congress on Computational Methods in engineering, CILAMCE*, Rio de Janeiro – Brasil, 2015. Versão estendida submetida para publicação em Edição Especial em *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, CMES.

GONÇALVES, D. F.; FONSECA JR, L.; BORGES R. A.; de LIMA A.M. G., **Study and Comparison of Reduction Methods of Mechanical Systems**. Em *23rd ABCM Internacional Congresso of Mechanical Engineering, COBEM*, Rio de Janeiro – Brasil, 2015.

FONSECA JR, L.; GONÇALVES, D. F.; BORGES R. A.; de LIMA A. M. G., **Model Reduction Methods Applied on Nonlinear Mechanical Systems**. Em *23rd ABCM Internacional Congresso of Mechanical Engineering, COBEM*, Rio de Janeiro – Brasil, 2015.

GONÇALVES, D. F.; FONSECA JR, L.; de LIMA A. M. G.; BORGES R. A., **Técnicas de Redução de Modelos Aplicados à Análise de Estruturas Mecânicas**. Em *II Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria, CNMAI, Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional, ERMAC, Semana de Matemática Industrial, SeMI*, Fortaleza – Brasil, 2015.

FONSECA JR, L.; GONÇALVES, D. F.; BORGES R. A.; de LIMA A. M. G., **Métodos de Redução de Modelos Aplicados a sistemas com Não Linearidade Localizada**. Em *II Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria, CNMAI, Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional, ERMAC, Semana de Matemática Industrial, SeMI*, Fortaleza – Brasil, 2015.

REFERÊNCIAS

ALLEMANG, R. J.; BROWN, D. L. A correlation coefficient for modal vector analysis. In: SEM, ORLANDO. *Proceedings of the 1st international modal analysis conference*. [S.l.], 1982. v. 1, p. 110–116.

AZEVEDO, Á. F. Método dos elementos finitos. *Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto*, v. 1, 2003.

BATHE, K.-J. *Finite Element Procedures*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1996. v. 1.

BORGES, R. A. *Contribuição ao estudo dos absorvedores dinâmicos de vibrações não-lineares*. Tese (Doutorado), 2008.

BOUHADDI, N.; FILLOD, R. Substructuring using a linearized dynamic condensation method. *Computers & structures*, Elsevier, v. 45, n. 4, p. 679–683, 1992.

CHATELIN, F. Valeurs propres de matrices. 1988.

CRAIG JR., R. R.; BAMPTON, M. C. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, v. 6, n. 7, p. 1313–1319, 1968.

DAS, A.; DUTT, J. Reduced model of a rotor-shaft system using modified serep. *Mechanics Research Communications*, Elsevier, v. 35, n. 6, p. 398–407, 2008.

DAVIS, T. A. *Direct methods for sparse linear systems*. [S.l.]: Siam, 2006. v. 2.

DIMAROGONAS, A. D. *Vibration for engineers*. [S.l.]: Prentice Hall, 1996. Citado na página 23.

DOWNS, B. Accurate reduction of stiffness and mass matrices for vibration analysis and a rationale for selecting master degrees of freedom. *Journal of Mechanical Design*, American Society of Mechanical Engineers, v. 102, n. 2, p. 412–416, 1980.

FRISWELL, M.; GARVEY, S.; PENNY, J. Model reduction using dynamic and iterated irs techniques. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 186, n. 2, p. 311–323, 1995.

_____. The convergence of the iterated irs method. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 211, n. 1, p. 123–132, 1998.

FRISWELL, M.; PENNY, J.; GARVEY, S. Model reduction for structures with damping and gyroscopic effects. In: KU LEUVEN; 1998. *PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL SEMINAR ON MODAL ANALYSIS*. [S.l.], 2001. v. 3, p. 1151–1158.

FRISWELL, M. I.; INMAN, D. J. Reduced-order models of structures with viscoelastic components. *AIAA journal*, v. 37, n. 10, p. 1318–1325, 1999.

GAVASSONI, N. E. *Aplicação dos modos de vibração não lineares a modelos conceituais de estruturas offshore*. Tese (Doutorado) — PUC-Rio, 2012.

GERGES, Y. *Méthodes de réduction de modèles en vibroacoustique non-linéaire*. Tese (Doutorado) — Université de Franche-Comté, 2013.

GOLDMAN, R. L. Vibration analysis by dynamic partitioning. *AIAA journal*, v. 7, n. 6, p. 1152–1154, 1969.

GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. *Matrix computations*. *Johns Hopkins studies in the mathematical sciences*. [S.l.]: Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD., 1996.

GUEDRI, M. *Synthèse modale/approches stochastiques en élastodynamique linéaire et nonlinéaire*. Tese (Doutorado) — Thèse, Faculté des sciences de Tunis de l'université El Manar, Nabeul, Tunisie, 2006.

GUEDRI, M.; BOUHADDI, N.; MAJED, R. Reduction of the stochastic finite element models using a robust dynamic condensation method. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 297, n. 1, p. 123–145, 2006.

GUEDRI, M.; WEISSER, T.; BOUHADDI, N. Reanalysis of nonlinear structures by a reduction method of combined approximations. In: *Proceedings of the tenth international conference on computational structures technology, Valencia-Spain*. [S.l.: s.n.], 2010.

GUYAN, R. J. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA journal*, v. 3, n. 2, p. 380–380, 1965.

HAPPAWANA, G.; BAJAJ, A.; AZENE, M. An analytical solution to non-similar normal modes in a strongly non-linear discrete system. *Journal of sound and vibration*, Academic Press, v. 183, n. 2, p. 361–367, 1995.

HARTOG, J. P. D. *Mechanical vibrations*. 4. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 1985.

HENSHELL, R.; ONG, J. Automatic masters for eigenvalue economization. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Wiley Online Library, v. 3, n. 4, p. 375–383, 1975.

HOU, S. N. Review of modal synthesis techniques and a new approach. *Shock and vibration bulletin*, DTIC Document, v. 40, n. 4, p. 25–39, 1969.

HUGHES, T. J. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. [S.l.]: Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987.

HURTY, W. C. Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA journal*, v. 3, n. 4, p. 678–685, 1965.

IRONS, B. Structural eigenvalue problems-elimination of unwanted variables. *AIAA journal*, v. 3, n. 5, p. 961–962, 1965.

KAMMER, D. C. Test-analysis model development using an exact modal reduction. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, v. 2, n. 4, p. 174–179, 1987.

KERSCHEN, G. *et al.* Nonlinear normal modes, part i: An attempt to demystify them. In: 26th *International Modal Analysis Conference, Orlando, 2008*. [S.l.: s.n.], 2008.

KIM, J.; BURTON, T. D. Reduction of nonlinear structural models having non-smooth nonlinearity. In: *IMACXX: A Conference & Exposition on Structural Dynamics, Los Angeles, CA*. [S.l.: s.n.], 2002.

KIRSCH, U. *Design-oriented analysis of structures: a unified approach*. [S.l.]: Springer Science & BusinessMedia, 2002. v. 95.

_____. Design-oriented analysis of structures-unified approach. *Journal of engineering mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 129, n. 3, p. 264–272, 2003.

_____. A unified reanalysis approach for structural analysis, design, and optimization. *Structural andMultidisciplinary Optimization*, Springer, v. 25, n. 2, p. 67–85, 2003.

KIRSCH, U.; BOGOMOLNI, M. Nonlinear and dynamic structural analysis using combined approximations. *Computers & structures*, Elsevier, v. 85, n. 10, p. 566–578, 2007.

KIRSCH, U.; BOGOMOLNI, M.; SHEINMAN, I. Efficient procedures for repeated calculations of the structural response using combined approximations. *Structural andMultidisciplinary Optimization*, Springer, v. 32, n. 6, p. 435–446, 2006.

_____. Nonlinear dynamic reanalysis of structures by combined approximations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 195, n. 33, p. 4420–4432, 2006.

KIRSCH,U.; LIU, S. Exact structural reanalysis by a first-order reduced basis approach. *Structural andMultidisciplinary Optimization*, Springer, v. 10, n. 3-4, p. 153–158, 1995.

KOUTSOVASILIS, P.; BEITELSCHMIDT, M. Model reduction comparison for the elastic crankshaft mechanism. *Proceedings of the 2nd International Operational Modal Analysis Conference, IOMAC 2008*, v. 1, p. 95–106, 2008.

LANGLEY, R. Harmonic linearisation of geometrically non-linear finite element models. *Computers & structures*, Elsevier, v. 28, n. 2, p. 165–172, 1988.

LEUNG, A. Y.-T. An accurate method of dynamic condensation in structural analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 12, n. 11, p. 1705–1715, 1978.

De LIMA, A. D. *et al.* A time-domain finite element model reduction method for viscoelastic linear and nonlinear systems. *Latin American Journal of Solids and Structures*, SciELO Brasil, v. 12, n. 6, p. 1182–1201, 2015.

_____. Component mode synthesis combining robust enriched ritz approach for viscoelastically damped structures. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 32, n. 5, p. 1479–1488, 2010.

LÜLF, F. A.; TRAN, D.-M.; OHAYON, R. Reduced bases for nonlinear structural dynamic systems: A comparative study. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 332, n. 15, p. 3897–3921, 2013.

MACNEAL, R. H. A hybrid method of component mode synthesis. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 1, n. 4, p. 581–601, 1971.

MASSON, G. *et al.* Component mode synthesis (cms) based on an enriched ritz approach for efficient structural optimization. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 296, n. 4, p. 845–860, 2006.

_____. Parameterized reduced models for efficient optimization of structural dynamic behavior. In: *Proceedings of the 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, paper. [S.l.: s.n.], 2002. p. 22–25.

MATTA, K. Selection of degrees of freedom for dynamic analysis. *Journal of pressure vessel technology*, American Society of Mechanical Engineers, v. 109, n. 1, p. 65–69, 1987.

MEI, C. Finite element displacement method for large amplitude free flexural vibrations of beams and plates. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 3, n. 1, p. 163–174, 1973.

MOORE, B. C. Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 26, n. 1, p. 17–32, 1981.

NAYFEH, A. H. Perturbation methods and non-linear hyperbolic waves. *Journal of Sound and Vibration*, Academic Press, v. 54, n. 4, p. 605–609, 1977.

_____. *Introduction to perturbation techniques*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.

O'CALLAHAN, J.; AVITABILE, P.; RIEMER, R. Systemequivalent reduction expansion process (serep). In: *Seventh International Modal Analysis Conference*. [S.l.: s.n.], 1989. p. 29–37.

O'CALLAHAN, J. C. A procedure for an improved reduced system (irs) model. In: UNION COLLEGE PRESS, SCHENECTADY, NY. *Proceedings of the 7th international modal analysis conference*. [S.l.], 1989. v. 1, p. 17–21.

PALACIOS, R. Nonlinear normal modes in an intrinsic theory of anisotropic beams. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 330, n. 8, p. 1772–1792, 2011.

PENNY, J.; FRISWELL, M.; GARVEY, S. The automatic choice of measurement locations for dynamic testing. In: SAN DIEGO, CALIFORNIA. *Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference*. [S.l.], 1992. v. 1, p. 30–36.

_____. Automatic choice of measurement locations for dynamic testing. *AIAA journal*, v. 32, n. 2, p. 407–414, 1994.

POPPLEWELL, N.; BERTELS, A.; ARYA, B. A critical appraisal of the elimination technique. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 31, n. 2, p. 213–233, 1973.

QU, Z.-Q. *Model order reduction techniques with applications in finite element analysis*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2004.

RADE, D. A. *Método dos Elementos Finitos Aplicados à Engenharia Mecânica*. 2011.

RAMSDEN, J.; STOKER, J. Mass condensation: A semi-automatic method for reducing the size of vibration problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 1, n. 4, p. 333–349, 1969.

RAO, S. S. *Vibrações mecânicas*. 4. ed. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2008.

RIGAUD, E.; PERRET-LIAUDET, J. Experiments and numerical results on non-linear vibrations of an impacting hertzian contact. part 1: harmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 265, n. 2, p. 289–307, 2003.

SAAD, Y. *Iterative methods for sparse linear systems*. [S.l.]: Siam, 2003.

SHAH, V.; RAYMUND, M. Analytical selection of masters for the reduced eigenvalue problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 18, n. 1, p. 89–98, 1982.

SINGH, M.; SUAREZ, L. Dynamic condensation with synthesis of substructure eigenproperties. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 159, n. 1, p. 139–155, 1992.

THOMSEN, J. J. Vibrations and stability : Advanced theory . *Analysis, and Tools*. Springer, Berlin, 2003.

THOMSON, W. *Theory of vibration with applications*. [S.l.]: CRC Press, 1996.

TRUESDALL, C.; NOLL, W. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.

WORDEN, K.; TOMLINSON, G. R. *Nonlinearity in structural dynamics : detection, identification and modelling*. [S.l.]: CRC Press, 2001.

XIA, Y.; LIN, R. Improvement on the iterated irs method for structural eigensolutions. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 270, n. 4, p. 713–727, 2004.

YU, P.; ZHU, S. Computation of the normal forms for general m-dof systems using multiple time scales. part i: autonomous systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 10, n. 8, p. 869–905, 2005.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The finite element method: solid mechanics*. [S.l.]: Butterworth-heinemann, v. 2, 2000.

ZIENKIEWICZ, O. C. *et al.* *The finite element method*. 4. ed. [S.l.]: Mc Graw-Hill International Editions, v. 1, 1989.