



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS (UFG)/
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CATALÃO (UFCAT) em implantação
UNIDADE ACADÊMICA FACULDADE DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

CALEB GOMES PITALUGA

ANÁLISE EM MULTIESCALA DE FLEXÃO DE PLACAS DE CONCRETO
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

CATALÃO

2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE ENGENHARIA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

CALEB GOMES PITALUGA

3. Título do trabalho

ANÁLISE EM MULTIESCALA DE FLEXÃO DE PLACAS DE CONCRETO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(a) autor(a) e ao(a) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Superior, em 25/10/2022, às 15:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **CALEB GOMES PITALUGA, Discente**, em 26/10/2022, às 08:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3288496** e o código CRC **1E2D236C**.

CALEB GOMES PITALUGA

ANÁLISE EM MULTIESCALA DE FLEXÃO DE PLACAS DE CONCRETO
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Unidade Acadêmica Faculdade de Engenharia, da Universidade Federal de Goiás (UFG) / Universidade Federal de Catalão (UFCAT) em implantação, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas e Construção Civil. Linha de pesquisa: Mecânica das Estruturas e dos Materiais.

Orientadora: Professora Doutora Gabriela Rezende Fernandes.

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFCAT.

Pitaluga, Caleb Gomes

Análise em multiescala de flexão de placas de concreto pelo método dos elementos de contorno / Caleb Gomes Pitaluga. - 2022. 107, xviii f.

Orientadora: Profa. Dra. Gabriela Rezende Fernandes.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Catalão, Faculdade de Engenharia, Catalão, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Catalão, 2022.

Bibliografia. Apêndice.

Inclui abreviaturas, símbolos, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Modelagem Multiescala. 2. Flexão de Placas. 3. Concreto. 4. EVR. 5. ZTI. I. Fernandes, Gabriela Rezende, orient. II. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE ENGENHARIA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 7 da sessão de Defesa de Dissertação de **CALEB GOMES PITALUGA**, que confere o título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração em Estruturas e Construção Civil.

"Banca Examinadora de Qualificação/Defesa Pública de Dissertação/Tese realizada em conformidade com a Portaria da CAPES n. 36, de 19 de março de 2020, de acordo com seu segundo artigo: Art. 2º A suspensão de que trata esta Portaria não afasta a possibilidade de defesas de tese utilizando tecnologias de comunicação à distância, quando admissíveis pelo programa de pós-graduação stricto sensu, nos termos da regulamentação do Ministério da Educação."

Aos vinte e seis dias do mês de setembro de dois mil e vinte e dois, a partir das 14 horas, na sala virtual (<https://meet.google.com/zaf-mjuf-erw>), realizou-se a sessão pública de Defesa de Tese/Dissertação intitulada "**ANÁLISE EM MULTI-ESCALA DE FLEXÃO DE PLACAS DE CONCRETO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**" nas dependências da Universidade Federal de Catalão, onde os programas de pós-graduação stricto sensu em funcionamento encontram-se provisoriamente vinculados à Universidade Federal de Goiás, em virtude de procedimentos técnicos relacionados à CAPES, já sendo realizada a transferência da Biblioteca Digital de Dissertações e Teses (BDTD). Assim, justifica-se os nomes das instituições neste documento, uma no cabeçalho (UFG), outra no corpo do texto (UFCAT). Os trabalhos foram instalados pela Orientadora, **Professora Doutora GABRIELA REZENDE FERNANDES (PPGEC/UFCAT)** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: **Professor Doutor SEVERINO PEREIRA CAVALCANTI MARQUES (Centro de Tecnologia / UFAL)**, membro titular externo; **Professor Doutor JOSÉ JULIO DE CERQUEIRA PITUBA (PPGEC/UFCAT)**, membro titular interno. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **Aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pela Professora Doutora Gabriela Resende Fernandes, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos vinte e seis dias do mês de setembro de dois mil e vinte e dois.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

ANÁLISE EM MULTIESCALA DE FLEXÃO DE PLACAS DE CONCRETO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO



Documento assinado eletronicamente por **Gabriela Rezende Fernandes, Professora do Magistério Superior**, em 31/10/2022, às 14:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **José Júlio De Cerqueira Pituba, Professor do Magistério Superior**, em 31/10/2022, às 15:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



em 31/10/2022, às 18:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3301205** e o código CRC **4B1862E6**.

Referência: Processo nº 23070.049393/2022-45

SEI nº 3301205

Aos meus Pais,
Lionicio e Eliane
e a minha irmã, Anabel.

AGRADECIMENTOS

Ao soberano Deus, o criador e sustentador da vida.

À professora Dra. Gabriela Rezende Fernandes, pelos ensinamentos, paciência e apoio que obtive ao longo deste trabalho. Pela excelente orientação em todas as fases da dissertação, por contribuir para minha formação profissional.

Aos meus pais: Lionicio Pitaluga e Eliane Pitaluga pelo compromisso e incentivo em todos os momentos. À minha irmã, Anabel Pitaluga pelo estímulo e por apoiar minhas decisões estudantis.

Aos amigos do departamento de estrutura pelo convívio ao longo dos anos, em especial aos amigos Felipe Furtado e Leandro Oliveira, agradeço a ajuda e a amizade nos momentos alegres e árduos.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram de forma direta ou indiretamente para realização deste trabalho, especialmente aos professores Júlio Pituba e Wanderlei pelos comentários e sugestões durante a qualificação.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	VIII
LISTA DE TABELAS.....	XI
LISTA DE SÍMBOLOS.....	XII
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	XV
RESUMO	XVI
ABSTRACT	XVII
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 OBJETIVOS.....	3
1.2 JUSTIFICATIVA	3
1.3 METODOLOGIA E FORMA DE ANÁLISE DOS RESULTADOS	4
1.4 ESTADO DA ARTE	5
1.4.1 Mapeamento sistêmico.....	5
1.4.2 Teoria clássica de placas.....	8
1.4.3 Flexão de placas.....	9
1.4.4 Análise em multiescala.....	10
2 FORMULAÇÃO DA MACROESTRUTURA	13
2.1 EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE FLEXÃO DE PLACAS ATRAVÉS DO MEC.....	13
2.1.1 Equações integrais considerando campo de momentos iniciais	14
2.1.2 Equações básicas	14
2.1.3 Equação integral de deslocamento para um ponto no domínio da placa.....	15
2.1.4 Solução do problema fundamental de placas	18
2.1.5 Equação integral de deslocamento de um ponto no contorno.....	19
2.1.6 Equações integrais para curvaturas nos pontos internos	20
2.1.7 Transformações das integrais de domínio em integrais de contorno	21
2.2 SOLUÇÃO NUMÉRICA ATRAVÉS DO MEC	23
2.2.1 Introdução.....	23
2.2.2 Discretização do contorno da placa em elementos	24
2.2.3 Discretização do domínio da placa	26
2.2.4 Obtenção da solução numérica	30
2.2.4.1 Procedimento para obtenção da equação algébrica.....	30
2.2.4.2 Equações algébricas.....	31

2.2.4.3	Sistema de equações	33
2.2.5	Técnica de solução.....	34
2.2.5.1	Cálculo dos deslocamentos w do domínio e as variáveis no contorno	34
2.3	PROCESSO INCREMENTAL-ITERATIVO COM FORMULAÇÃO TANGENTE CONSISTENTE	36
2.3.1	Introdução.....	36
2.3.1.1	Equação de resíduos.....	36
2.3.2	Matriz tangente consistente.....	39
3	FORMULAÇÃO DA MICROESTRUTURA.....	41
3.1	FORMULAÇÃO NÃO-LINEAR DO ELEMENTO DE VOLUME REPRESENTATIVO .	41
3.1.1	Equações básicas	41
3.1.2	Equação integral de deslocamento do MEC para um ponto interno do EVR.....	43
3.1.3	Equação integral do MEC para deslocamento de pontos no contorno ou interface do EVR	46
3.1.4	Equação integral do MEC da derivada do deslocamento para pontos internos do EVR	50
3.2	SOLUÇÃO NUMÉRICA DO EVR ATRAVÉS DO MEC.....	51
3.2.1	Aproximação das variáveis no contorno e domínio do EVR.....	51
3.2.2	Aproximação das variáveis no domínio	53
3.2.2.1	Aproximação da integral de domínio englobando deslocamento	53
3.2.2.2	Relação entre deformação e deslocamentos na célula	54
3.2.2.3	Integral de domínio envolvendo esforços plásticos	54
3.2.3	Equações algébricas e sistema de equações do MEC para o EVR.....	55
3.3	PROBLEMA DE EQUILÍBRIO DO EVR.....	58
3.3.1	Introdução.....	58
3.3.2	Campo de deslocamento do EVR.....	58
3.3.3	Equação de equilíbrio do EVR	60
3.3.4	Matriz tangente consistente do EVR	62
3.3.5	Modelo de flutuações periódicas sobre o contorno do EVR.....	63
3.3.6	Vetor de tensão homogeneizada.....	65
3.3.7	Tensor constitutivo homogeneizado	66
4	ALGORITMO DA MODELAGEM MULTIESCALA.....	68
5	ANÁLISES NUMÉRICAS.....	71
5.1	INTRODUÇÃO.....	71
5.2	ANÁLISES NUMÉRICAS EM ESCALA ÚNICA UTILIZANDO-SE O MODELO DE DANO DE MAZARS	72

5.2.1	Definição das propriedades do material nas análises em escala única	72
5.2.2	Placa simplesmente apoiada.....	72
5.2.3	Viga em balanço	76
5.2.4	Placa submetida a carga distribuída em pequena região do centro	80
5.3	ANÁLISE EM MULTIESCALA	84
5.3.1	Introdução.....	84
5.3.2	Definição da microestrutura e das propriedades das fases dos EVRs.....	85
5.3.3	Resultados numéricos do concreto representado por EVR-25i e EVR-5i.....	88
5.3.4	Análise multiescala de uma chapa	92
5.3.5	Análise multiescala de uma placa simplesmente apoiada.....	95
5.3.6	Análise multiescala de uma viga em balanço.....	96
5.3.7	Análise multiescala da placa submetida a carga distribuída em pequena região do centro	97
5.4	TEMPO DE EXECUÇÃO DAS ANÁLISES MULTIESCALA	99
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	100
	REFERÊNCIAS	103
	APÊNDICE A FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PLACAS.....	108
A.1	INTRODUÇÃO.....	108
A.2	SUPOSIÇÕES BÁSICAS	109
A.3	RELAÇÕES BÁSICAS.....	109
A.3.1	Deslocamentos na placa	109
A.3.2	Deformações	110
A.3.3	Tensões	111
A.3.4	Relações de equilíbrio	111
A.3.5	Equação diferencial de placas	114
A.3.6	Sistema genérico de coordenadas	114
A.3.7	Força cortante equivalente	114
A.3.8	Reação de canto.....	115
A.4	CONDIÇÃO DE CONTORNO PARA FLEXÃO SIMPLES	116
A.5	EQUAÇÕES DA PLACA EM COORDENADAS POLARES	117
	APÊNDICE B EXPRESSÕES FUNDAMENTAIS PARA EQUAÇÃO INTEGRAL DE MOMENTOS NOS PONTOS INTERNOS	120
	APÊNDICE C INTEGRAÇÃO NUMÉRICA SOBRE OS ELEMENTOS.....	122
C.1	INTEGRAÇÃO NORMAL	122
C.2	TÉCNICA DE SUB-ELEMENTOS.....	122

APÊNDICE D	EXPRESSÕES FUNDAMENTAIS PARA EQUAÇÃO INTEGRAL DA DERIVADA DOS DESLOCAMENTOS PARA O EVR.....	125
APÊNDICE E	MODELO CONSTITUTIVOS	127
E.1	MODELO DE DANO DE MAZARS	127
E.2	MOHR-COULOMB	130
E.3	MODELO DE CONTATO E FRATURA COESIVA.....	131
APÊNDICE F	RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	134

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 – Evolução dos artigos publicados com base nas palavras-chave utilizadas no mapeamento.	7
FIGURA 1.2 – Periódicos relacionadas ao tema.	8
FIGURA 2.1 – Placa bidimensional.	13
FIGURA 2.2 – Placa Infinita.	16
FIGURA 2.3 – Adicionando um contorno circular no canto Q da placa.	19
FIGURA 2.4 – Área de carregamento (Ω_g) de uma placa de domínio Ω	22
FIGURA 2.5 – Discretização da placa em elementos e células.	24
FIGURA 2.6 – Divisão da Placa em Células no Domínio.	27
FIGURA 2.7 – Discretização do domínio em células e definição dos pontos de colocação para momentos (P_M).	28
FIGURA 2.8 – Pontos de Colocação.	33
FIGURA 3.1 – Microestrutura representada por uma placa.	42
FIGURA 3.2 – EVR com Sub-regiões.	44
FIGURA 3.3 – Interface matriz-inclusão.	49
FIGURA 3.4 – Discretização do contorno/interface e domínio.	52
FIGURA 3.5 – Ponto do macrocontínuo relacionado com o EVR.	59
FIGURA 3.6 – Definição de EVRs para meios periódicos.	64
FIGURA 5.1 – Placa simplesmente apoiada - Geometria.	73
FIGURA 5.2 – Malhas utilizadas no estudo da placa simplesmente apoiada.	73
FIGURA 5.3 – Curva de fator de carga por deslocamento, para o ponto central da placa simplesmente apoiada.	74
FIGURA 5.4 – Comparação entre a malha mais refinada (malha 1) e a malha escolhida (malha 3) no exemplo da placa simplesmente apoiada.	74
FIGURA 5.5 – Deslocamento no ponto central da placa simplesmente apoiada, obtido com a malha 3 e variando-se o número de pontos de Gauss na espessura	75
FIGURA 5.6 – Deslocamento no ponto central da placa simplesmente apoiada, considerando-se a malha 3 com 6 PG e a malha 1 com 12 PG.	76
FIGURA 5.7 – Viga em balanço - Geometria.	77
FIGURA 5.8 – Malhas utilizadas no estudo da viga em balanço.	77
FIGURA 5.9 – Curva de fator de carga por deslocamento, para o ponto P na extremidade da viga em balanço.	78
FIGURA 5.10 – Comparação entre a malha mais refinada (malha 1) e a malha escolhida (malha 4) no exemplo da viga em balanço.	79

FIGURA 5.11 – Deslocamento no ponto P na extremidade da viga em balanço, obtido com a malha 4 e variando-se o número de pontos de Gauss na espessura.	79
FIGURA 5.12 – Deslocamento no ponto P na extremidade da viga em balanço, considerando-se a malha 4 com 6 PG e a malha 1 com 12 PG.....	80
FIGURA 5.13 – Placa submetida a carga distribuída em pequena região do centro - Geometria	81
FIGURA 5.14 – Malhas utilizadas no estudo – Placa submetida a carga distribuída em pequena região do centro.....	81
FIGURA 5.15 – Curva de fator de carga por deslocamento, para o ponto central da placa submetida a carga distribuída em pequena região do centro.	82
FIGURA 5.16 – Comparação entre a malha mais refinada (Malha 1) e a malha escolhida (malha 3) no exemplo da placa submetida a carga distribuída em pequena região do centro.	82
FIGURA 5.17 – Deslocamento no ponto central da placa submetida a carga distribuída em pequena região do centro, obtido com a malha 3 e variando-se o número de pontos de Gauss na espessura.	83
FIGURA 5.18 – Deslocamento no ponto central da placa submetida a carga distribuída em pequena região do centro, considerando-se a malha3 com 4 PG e a malha 1 com 12 PG.	84
FIGURA 5.19 – Modelagem da microestrutura e discretização para: a) EVR-25i com 25 inclusões e 12 vazios e b) EVR-5i com 5 inclusões grandes e 4 vazios.	86
FIGURA 5.20 – Gráfico tensão homogeneizada na direção x (σ_x) versus deformação na direção x (ϵ_x), EVR-25i com variação da curva de plasticidade.....	88
FIGURA 5.21 – Gráfico tensão homogeneizada da direção x (σ_x) versus deformação na direção x (ϵ_x), EVR-5i em comparação com Delalibera (2002) e Silva (2022).....	89
FIGURA 5.22 – Variação da tensão coesiva (σ_c) com EVR-5i.....	90
FIGURA 5.23 – Variação da tensão coesiva (σ_c) com EVR-25i.....	91
FIGURA 5.24 – Tensão coesiva ($\sigma_c = 2\text{MPa}$) com EVR-25i e EVR 5i, com diferentes modelos numéricos.	92
FIGURA 5.25 – Chapa submetida à força normal a) geometria b) discretização de um quarto da chapa.	93
FIGURA 5.26 – Deslocamento no contorno do nó 21, para o exemplo da chapa.....	93
FIGURA 5.27 – Gráfico Tensão na direção y (σ_{22}) versus Deformação (ϵ_{22}) no ponto 21.....	95
FIGURA 5.28 – Deslocamento transversal (w) do ponto central no domínio da placa simplesmente apoiada.	96
FIGURA 5.29 – Deslocamento transversal (w) do ponto P na extremidade do contorno da viga em balanço.	97
FIGURA 5.30 – Deslocamento transversal (w) do ponto central da placa submetida a carga concentrada.	98
FIGURA A.1 – Placa Bidimensional.	108

FIGURA A.2 – Deslocamentos devidos à flexão da placa.....	110
FIGURA A.3 – Tensões na Placa.....	112
FIGURA A.4 – Esforços em um Elemento de Placa.....	112
FIGURA A.5 – Momento volvente no contorno.....	115
FIGURA A.6 – Reação de Canto.	116
FIGURA A.7 – Ponto P do contorno da placa e os vetores n e s.	118
FIGURA C.1 – Sub-elementos.	123
FIGURA E.1 – a) Critério de escoamento de Mohr-Coulomb no plano σ, τ , b) em plano octaédrico	130

LISTA DE TABELAS

TABELA 1.1 – Resumo dos resultados obtidos em uma pesquisa no banco de dados.....	6
TABELA 5.1 – Parâmetros de Mazars.....	72
TABELA 5.2 – Propriedades físicas do material.....	72
TABELA 5.3 – Quantidade e dimensões dos agregados para cada EVR.....	86
TABELA 5.4 – Discretização dos EVRs.....	87
TABELA 5.5 – Parâmetros dos modelos nos elementos finitos de fratura e contato.....	87
TABELA 5.6 – Propriedades da matriz e inclusões para cada EVR.....	88
TABELA 5.7 – Tempo de processamento - Placa.....	99
TABELA 5.8 – Tempo de processamento - Chapa.....	99
TABELA A.1 – Condições de Contorno.....	116

LISTA DE SÍMBOLOS

*	:é usado para definir carregamento e soluções fundamentais;
.	:ponto superior indicando que a variável é dada por sua derivada no tempo;
Γ_∞	:contorno infinito;
$\dot{\epsilon}_{ij}$:deformação contínua;
\dot{N}_{ij}^e	:força da membrana;
$\dot{\epsilon}_{ij}^{cf}$:deformação de fratura;
$\frac{\partial w^*}{\partial n}$:valor de $\partial w/\partial n$ na solução fundamental;
A_e	:área da célula;
$C^{ep(Taylor)}$:média volumétrica do tensor constitutivo incremental;
$[C_\mu^{ep}]$:tensor constitutivo da célula;
K_{ef}	:rigidez do elemento finito de contato coesivo e fratura;
M_{ij}	:momentos que atuam no ponto (tensor dos momentos);
M_{ij}^e	:momentos elásticos devido as tensões elásticas (que no processo iterativo são chamadas de tensões de tentativa);
$\{P^T\}$:vetor dos esforços nodais de valores do contorno da placa;
Q_j	:forças cortantes;
$\{R_c^T\}$:vetor que contém as reações de canto;
$\{U^T\}$:vetor de valores nodais de deslocamento do contorno da placa;
V_μ	:volume do EVR;
W_{ig}	:fator de ponderação do ponto de Gauss ig definido ao longo da espessura da placa;
$w_{,ij}$:curvaturas;
$\{w_c^T\}$:vetor que contém os deslocamentos nos cantos;
δ_{ij}	:delta de Kronecker;
ϵ_{ij}	:campo de deformação total;
ϵ_{ij}^e	:deformação elástico-linear;
ξ_{ig}	:coordenadas homogêneas;
σ_{ij}	:tensor das tensões devido ao carregamento;
σ_{ij}^e	:tensão elástica;
$[\psi^T]$:matriz que contém as funções de aproximação linear;
$\partial w/\partial n$:rotação normal ao contorno;
g^*	:carregamento fundamental;

L_j	:comprimento do elemento j ;
M_n	:momento fletor;
n	:direção normal;
$\{P\}$:vetor de valores nodais de esforços no contorno;
R	:raio de curvatura do contorno no ponto P ;
r	:distância do local onde a carga unitária é aplicada até o ponto onde deseja obter a força ou deslocamento na solução fundamental;
r, θ	:sistema de coordenadas polares;
$\{R_c\}$:Vetor que contém as reações de canto;
R_M	:resíduo de momentos;
s	:direção tangencial ao contorno;
t	:espessura da placa;
$\{U\}$:vetor dos deslocamentos em todos os nós;
V_n	:esforço cortante equivalente;
w	:deslocamento (flexa na direção x_3);
w^*	:o valor de w na solução fundamental;
$x_1, x_2, x_3,$:sistema de coordenada cartesiana;
β_c	:angulosidade do canto da placa;
Γ	:coordenada ao longo do contorno;
Γ_1, Γ_2	:coordenadas dos limites do contorno onde se faz a integração;
Γ_j	:elemento de contorno;
ξ	:coordenada adimensional do ponto no qual a equação integral é calculada;
Ω	:coordenada de domínio;
Ω_m	:domínio da célula;
D	:rigidez à flexão da placa;
E	: módulo de elasticidade longitudinal do material;
G	:módulo de elasticidade transversal do material da placa;
$[S]$:influência dos momentos plásticos;
$T(Q)$:coeficiente referente a carga;
g	:carregamento uniformemente distribuído;
$\Delta\tilde{u}$:incremento de flutuação dos deslocamentos;
$\{\Delta\varepsilon\}$:vetor do incremento de deformação imposto pelo macrocontínuo;
ΔK_n	:incremento de momentos elásticos;
$\{\Delta M_n\}$:incremento de momentos na placa;
Ω_∞	:domínio infinito;
Ω_g	:área do carregamento distribuído;

$\delta(q, p)$:delta de Dirac;
ν	:coeficiente de Poisson do material;
$\sigma(x, t)$:tensão homogeneizada;
\tilde{u}	:campo de flutuação dos deslocamentos;
V_μ	:volume do EVR;
i, j, k	:índice numérico utilizado como elemento base na notação indicial;
μ	:símbolo para denotar uma variável que se refere à microescala;
a_{ks}	:comprimento do sub-elemento ks;
N_C	:número de nós do contorno;
N_{cel}	:número de células;
N_e	:número de elementos;
N_g	:número de pontos de Gauss;
N_{Sub}	:número de sub-elementos;
N_S	:número de sub-regiões;
N_{Vazios}	:número de vazios;
N_{inc}	:número de inclusões;
C_{ki}	:valor do termo livre para uma carga unitária na direção k para um deslocamento na direção i;
$\delta\tilde{u}_\mu^{i+1}$:correção das flutuações dos deslocamentos;
D^{Taylor}	:operador tangente do modelo de Taylor;
M_{ij}^0	:campo de momento iniciais (devido ao fenômeno dissipativo);
$\{M^0\}$:vetor que contém os momentos iniciais nos nós de contorno e do domínio;
ε_{ij}^0	:deformação residual (devido ao fenômeno dissipativo);
σ_{ij}^0	:tensão plástica;

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MDF	Método das Diferenças Finitas
EVR	Elemento de Volume Representativo
OTC	Operador Tangente Consistente
ZTI	Zona de Transição Interfacial

RESUMO

PITALUGA, C. G. **Análise em multiescala de flexão de placas de concreto pelo método dos elementos de contorno**. Catalão. Dissertação (Mestrado) - Unidade Acadêmica Faculdade de Engenharia, Regional Catalão, Universidade Federal de Goiás, 2022, 107 p.

Neste trabalho é apresentado uma modelagem em multiescala utilizando o MEC para analisar o problema de flexão de placas de concreto. A microestrutura do concreto é representada pelo Elemento de Volume Representativo (EVR), onde o comportamento da pasta cimentícia é regido pelo critério de Mohr-Coulomb e os agregados são considerados elásticos. Além disso, a porosidade da pasta cimentícia é modelada definindo vazios em seu domínio, e o processo de microfissura na ZTI (Zona de Transição Interfacial) é modelado por elementos finitos de contato e fratura coesiva na interface entre a pasta cimentícia e os agregados. Para definir a microestrutura do EVR e seus parâmetros, considera-se um concreto cuja curva experimental de compressão é conhecida. Além disso, foi analisado se realmente é necessário a utilização de um EVR complexo, com grande quantidade de agregados e vazios, ou se a adoção de um EVR mais simples também consegue reproduzir de forma satisfatória o comportamento mecânico das placas, mantendo-se constante a porcentagem volumétrica de inclusões e vazios. Além do que, compara-se os resultados com uma formulação multiescala onde o MEF (Método dos Elementos Finitos) é considerado na microescala. Por fim, mostra-se que o modelo proposto é muito mais rápido que o modelo MEC/MEF acoplado.

Palavras-chave: Modelagem Multiescala, Flexão de Placas, Concreto, EVR, ZTI.

ABSTRACT

PITALUGA, C. G. **A BEM multi-scale formulation applied to the bending problem of concrete plates**. Catalão. Dissertação (Mestrado) - Unidade Acadêmica Faculdade de Engenharia, Regional Catalão, Universidade Federal de Goiás, 2022, 107 p.

A BEM multi-scale modelling for analysing the bending problem of concrete plates is presented. The concrete microstructure is represented by the Representative Volume Element (RVE), where the cement paste behaviour is governed by the Mohr-Coulomb criterion while the aggregates are considered elastics. Besides, the porosity of the cement paste is modelled by defining voids into its domain and the microcracking process in the ITZ (Interfacial Transition Zone), is modelled by defining additional cohesive-contact finite elements on interfaces between cement paste and aggregates. To define the microstructure of the RVE and its parameters, a concrete whose experimental compression curve is known is considered. In addition, it was analysed whether it is really necessary to use a complex EVR, with a large number of aggregates and voids, or if the adoption of a simpler RVE can also satisfactorily reproduce the mechanical behaviour of the plates, keeping the volumetric percentage constant. of inclusions and voids. Furthermore, the results are compared with a multiscale formulation where the FEM (Finite Element Method) is considered at the microscale. Finally, it is shown that the proposed model is much faster than the coupled BEM/FEM model.

Keywords: *Multi-scale modelling, plate bending, concrete, RVE, ITZ.*

NOTA

Os Programas de Pós-Graduação *stricto sensu* em funcionamento na Universidade Federal de Catalão (UFCAT), em virtude de procedimentos técnicos relacionados à CAPES, continuam provisoriamente vinculados à Universidade Federal de Goiás (UFG), por isso, todos os elementos pré-textuais do trabalho apresentado estão identificados como Universidade Federal de Goiás/Universidade Federal de Catalão em implantação, em função da migração da BDTD ter ocorrido a partir de 16 de agosto de 2021, assim como pelo fato das pesquisas e produtos serem realizados na UFCAT.

1 INTRODUÇÃO

A maioria dos problemas de engenharia não pode ser resolvida por métodos analíticos, devido à complexidade da geometria dos sólidos, das leis constitutivas dos materiais, dos carregamentos e condições de contorno. Todavia, com o avanço em muitas áreas do conhecimento humano e a evolução dos computadores, tornou-se possível e prático usar métodos numéricos para resolver vários problemas complexos de engenharia, no qual, a resolução analítica de problemas governados por equações diferenciais é conhecida apenas para casos muito particulares. Com isso, a necessidade de resolução de problemas mais complexos deu origem a diversas técnicas numéricas para analisar de forma aproximada estes tipos de equações. Dessa forma, surgiram os chamados métodos numéricos, onde se destacam o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Por meio desses métodos, o problema pode ser resolvido após a resolução de um grande sistema de equações calculado por meios computacionais.

Neste trabalho é abordado apenas o MEC que, embora seja um método recente, tem suas origens como uma evolução natural das técnicas de resolução de equações integrais de contorno, conhecidas há muito tempo, sendo a primeira aplicação dessas equações na teoria da elasticidade foi devido a BETTI (1872). Porém, BREBBIA (1978) conseguiu generalizar ainda mais o método, apresentando sua formulação com base na técnica dos Resíduos Ponderados, e o método passou a se chamar "Método dos Elementos de Contorno", passando a ser extensivamente estudado os mais variados problemas de engenharia em diversos centros de pesquisa.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é um método computacional para solução de sistemas de equações integrais. Sendo formulado por equações integrais de contorno, sua principal característica é, portanto, redução do tamanho do problema, o que na prática significa menor quantidade de dados de entrada, tempo de processamento reduzido e menor consumo de memória do computador. O MEC evoluiu muito nas últimas décadas e hoje oferece uma variedade de aplicações que o torna uma ferramenta de cálculo eficiente para os problemas de engenharia mais comuns.

De modo geral, os materiais (aço, concreto e madeira) envolvidos nos projetos estruturais são heterogêneos na microescala. No entanto, na análise convencional, os materiais da macroescala são considerados homogêneos e seu comportamento é governado por modelos constitutivos fenomenológicos. A fim de representar com uma maior precisão o comportamento de materiais heterogêneos, uma abordagem multiescala é empregada neste trabalho. Para realizar este tipo de modelagem, pontos de interesse devem ser definidos no domínio do macrocontínuo, que são chamados de Elementos de Volume Representativo (EVR), que representam a microestrutura do material. Esses pontos de interesse são aqueles pontos da placa onde é necessário calcular as tensões e o tensor constitutivo, a fim de fazer a verificação da equação de equilíbrio da placa. Nesse trabalho, esses pontos são dados pelos nós das células definidas no domínio da placa.

Na modelagem multiescala, as diferentes fases do material podem ser estabelecidas na microestrutura, onde diferentes modelos constitutivos podem ser definidos para cada fase. Portanto, os fenômenos dissipativos podem ser modelados no domínio da microestrutura de maneira mais apropriado. Como os processos de deformação e fratura ocorrem na microescala, analisar estruturas compostas por materiais heterogêneos em diferentes escalas é muito importante para representar de forma mais adequada o comportamento de materiais tão complexos. Portanto, em análises multiescala, a modelagem do comportamento desses materiais tem melhor precisão.

No presente trabalho o EVR representa a microestrutura do concreto, sendo modelada definindo várias inclusões elásticas, que caracteriza os agregados, dentro de uma matriz, que representa a pasta cimentícia. O comportamento mecânico da pasta cimentícia é governado pelo critério de Mohr-Coulomb enquanto a porosidade é modelada pela definição de vazios no domínio da matriz. Assim, para resolver o problema de equilíbrio do macrocontínuo, devemos atribuir um EVR para cada ponto onde é necessário o cálculo do tensor de tensão. Para representar o fenômeno de descolamento de fases, relacionado ao processo de microfissuração que ocorre nas interfaces entre a pasta cimentícia e agregados, define-se elementos finitos de contato e fratura coesiva.

Assim, para obter a resposta homogeneizada do EVR, o tensor de deformação relacionado ao ponto no macrocontínuo deve ser imposto ao EVR e seu problema de equilíbrio resolvido. Então, obtêm-se o campo de tensões e os tensores constitutivos nas células do EVR que satisfazem sua equação de equilíbrio. Em seguida, através de princípios de homogeneidade e conceito de média volumétrica, passa-se da microescala para a macroescala e atualiza-se as tensões e a relação constitutiva para aquele ponto do macro. Com a relação constitutiva atualizada para todos os pontos da placa, dá-se novo incremento de carga obtendo-se, através do modelo na macroescala (placa), novos campos de deformações a serem aplicados nos EVRs.

A formulação do MEC não linear para análise do problema de flexão de placas apresentada para modelar a macroestrutura, é necessário um procedimento iterativo para resolver o problema do macrocontínuo, utilizando-se uma convergência quadrática. Como a análise multiescala é muito cara computacionalmente, ter convergência quadrática é muito importante para reduzir o esforço computacional. Neste trabalho, ambas as escalas são modeladas pelo MEC, no qual, é uma formulação geral, ou seja, pode ser aplicada para diferentes materiais, bastando definir a matriz, inclusões e vazios adequadamente para representar o material, mas nos exemplos numéricos, considera-se placas de concreto.

1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo realizar análises numéricas não lineares, considerando uma abordagem multiescala, de flexão de placas de concreto utilizando apenas o Método dos Elementos de Contorno. As análises numéricas são feitas através de um *software*, desenvolvido em linguagem FORTRAN, que acopla as formulações do macrocontínuo apresentada em FERNANDES e SOUZA NETO (2013) e do microcontínuo SILVA (2022). Pretende-se comprovar que utilizando a formulação aqui apresentada, os resultados alcançados são muito bons se comparados aos obtidos com o acoplamento MEC/MEF (FERNANDES, PITUBA e SOUZA NETO (2015)), mas com um menor esforço computacional. Além disso, deseja verificar se um EVR mais simples, com pequena quantidade de agregados e vazios também consegue reproduzir adequadamente o comportamento mecânico do concreto e, conseqüentemente da placa.

1.2 Justificativa

A placa é um elemento onde a superfície média é considerada plana. Na engenharia, uma placa é um elemento estrutural que pode ser aproximado geometricamente por uma superfície bidimensional e que trabalha principalmente na flexão. Na idealização de um projeto estrutural, as placas são elementos que aparecem com frequência, e a solução de problemas envolvendo esses elementos estruturais constitui uma questão de grande importância para o campo da engenharia estrutural. Portanto, para o aprimoramento dos projetos estruturais, é imprescindível conhecer o comportamento das placas submetidas a diferentes tipos de carregamentos.

No Brasil, o concreto é o principal material de construção utilizado atualmente, sendo um elemento heterogêneo composto por cimento, água e agregados como rocha e areia, podendo ainda adicionar outros aditivos. Quando associado ao aço, se trata de uma estrutura que pode fornecer resistência à compressão e à tração, essa importância torna-se ainda maior diante das diversas aplicações. O desenvolvimento de uma formulação em multiescala através do MEC é importante pois permite analisar e reproduzir o comportamento do concreto considerando a microestrutura representada pelo EVR.

No presente trabalho, o problema de flexão de placas é modelado por uma formulação não linear do método dos elementos de contorno (MEC), considerando o Operador Tangente Consistente (OTC). A fim de resolver o problema da microescala, caracterizada pelo elemento de volume representativo (EVR), a formulação é desenvolvida também através do MEC. Portanto, será feita a análise em multiescala de flexão de placas utilizando apenas o método dos elementos de contorno (MEC), que é uma ferramenta numérica adequada para lidar com problemas de flexão. Em muitos problemas de engenharia, este método tem se mostrado uma alternativa muito interessante e precisa, se comparado a outros métodos comumente usados, ele pode obter respostas mais confiáveis. Este método é

particularmente recomendado para avaliar a concentração interna de tensões, causada pela distribuição de carga em pequenas áreas que frequentemente ocorrem em problemas práticos, bem como, em casos onde o domínio em estudo tende ao infinito ou semi-infinito, visto que na maioria dos casos não há necessidade de discretizar o domínio, apenas o contorno.

Os resultados mostram que a formulação adotada do MEC para análise não linear de flexão de placas é eficiente, ou seja, que por meio da modelagem em multiescala, onde modelos constitutivos simples são usados na microescala, pode-se reproduzir um comportamento constitutivo complexo na macroescala.

1.3 Metodologia e forma de análise dos resultados

A princípio, foi feita uma pesquisa em busca de bibliografias pertinente ao conteúdo proposto no trabalho, englobando teses, dissertações e artigos que contribuem ao desenvolvimento desta dissertação. Então, foi iniciado um estudo sobre análise não linear de flexão de placas através do MEC, onde a obtenção da solução física do problema (seja para o EVR ou macrocontínuo) requer um processo iterativo incremental, no qual a correção deve ser obtida a partir de uma matriz tangente consistente. É considerada uma modelagem multiescala, na qual a microestrutura do material é caracterizada pelo EVR, e seu problema de equilíbrio deve ser resolvido de forma a obter os valores homogêneos da tensão e do tensor constitutivo do ponto do macro referente ao EVR analisado.

A formulação não linear do MEC para o macrocontínuo (no caso, a placa) é baseada no trabalho proposto por FERNANDES e SOUZA NETO (2013), onde define-se um procedimento iterativo incremental necessário para resolver o problema não linear de flexão de placas com convergência quadrática, sendo a solução obtida a partir do Operador Tangente Consistente (OTC). Essa formulação é acoplada com o modelo proposto por FERNANDES et. al (2019) com base no conceito de EVR contendo elementos de fratura, onde a resposta constitutiva de materiais heterogêneos pode ser obtida através do MEC para lidar com os fenômenos dissipativos sobre o domínio e o descolamento de fase na zona de interface.

Para alcançar a solução do problema utilizando o MEC, na formulação da macroescala, o contorno da placa deve ser discretizado em elementos, onde são aproximados os esforços e deslocamentos. Além do que, na análise não linear, o domínio da placa deve ser discretizado em células, onde os momentos iniciais ou inelásticos são aproximados. Uma vez que o EVR, que representa a microestrutura do material, também será modelado pelo MEC, células no domínio do EVR, elementos ao longo de seu contorno externo e das interfaces entre matriz e inclusão e entre matriz e vazios, também devem ser definidos para resolver o problema de equilíbrio do EVR.

Em um ponto qualquer da placa, os momentos são calculados integrando numericamente a tensão ao longo da espessura, utilizando um sistema gaussiano. Portanto, a fim de obter uma solução em multiescala, um EVR deve ser definido em cada ponto de Gauss estabelecido ao longo da espessura e

referente a um nó de célula do macrocontínuo. A discretização, dimensão e definição dos nós no EVR são totalmente independentes da dimensionalidade ou discretização do problema em estudo na macroescala, que neste trabalho é representado pela placa.

Para formulação numérica da microestrutura neste trabalho será considerado o modelo de EVR desenvolvido por SILVA (2021) no qual representa o concreto. Nestes EVRs um modelo constitutivo elasto-plástico é utilizado para simular o comportamento da matriz (pasta cimentícia), e as inclusões que representam os agregados (definidas em sub-regiões do EVR) têm comportamento elástico, além disso, o fenômeno de descolagem de fase (relativo ao processo de fissuração na zona de transição interfacial) entre a matriz e agregados é modelado por elementos finitos de contato e fratura que são adicionados à malha do MEC e são superpostos aos elementos de interface da malha do MEC. Nesses elementos finitos adicionais, definidos nas interfaces entre matriz e inclusão, o comportamento do material é regido por um modelo de fratura ou de contato (ver PITUBA, FERNANDES E SOUZA NETO (2016)). Nesses EVRs também serão considerados vazios para representar a porosidade do concreto.

Posteriormente, serão analisados exemplos numéricos de flexão de placas, a partir de um *software* de cálculo desenvolvido em linguagem FORTRAN, que reúne as formulações do macrocontínuo (FERNANDES e SOUZA NETO (2013)) e do microcontínuo (SILVA (2022)), onde os resultados obtidos serão apresentados em gráficos e tabelas para fácil compreensão. Os resultados numéricos serão comparados com os resultados que utiliza a formulação desenvolvida por FERNANDES, PITUBA e SOUZA NETO (2015), onde a placa é modelada pela mesma formulação adotada nesse trabalho, mas o EVR é modelado pelo MEF. Por último, serão descritas as considerações finais sobre o trabalho desenvolvido.

1.4 Estado da arte

A fim de realizar os objetivos proposto neste trabalho, inicialmente foi elaborado uma pesquisa de mapeamento sistemático (*Mapping Study*), que compreende em utilizar palavras chaves (*keywords*) pertinentes ao tema do trabalho e combinações dessas palavras, a fim de encontrar bibliografias pertinentes ao assunto. Através do banco de dados da CAPES e SCOPUS foram realizadas as buscas em 18 de junho de 2021.

1.4.1 Mapeamento sistêmico

A princípio, as buscas foram realizadas de uma maneira mais abrangente utilizando as seguintes palavras-chave: "*Multi-scale*" AND "*Homogenization*" AND "*RVE*", alcançando 690 artigos na CAPES e 187 artigos na SCOPUS. Posteriormente, foi realizada uma busca mais refinada acrescentando a palavra-chave "*boundary elements*" na busca anterior, a fim de alcançar apenas os artigos relacionados com MEC, resultando em 32 artigos na CAPES e 8 artigos na SCOPUS. Por fim, substituiu-se a palavra-

chave “*Plate Bending*” no lugar de “*boundary elements*” na busca anterior, com a intenção de encontrar apenas artigos pertinente a flexão de placas, resultando, finalmente em 18 artigos na CAPES e 1 artigo na SCOPUS.

Além das pesquisas alcançadas através do mapeamento sistêmico (*Mapping Study*), outras buscas foram realizadas em diferentes plataformas de banco de dados, resultando em teses, dissertações, artigos aderentes ao tema proposto no trabalho. Vale ressaltar que essas pesquisas não se limitaram apenas a flexão de placas utilizando o MEC, mas de uma maneira ampla incluindo trabalhos com uma abordagem em multiescala em diferentes aplicações.

O objetivo deste mapeamento sistemático é analisar referências de trabalhos relacionados ao tema flexão de placa com abordagem em multiescala por meio do método numérico de elementos de contorno. Após realizar as buscas nas bases de dados, os resultados obtidos foram organizados em tabelas e gráficos, de forma a apresentar os resultados de uma maneira mais prática. Os artigos encontrados foram selecionados de acordo com títulos que correspondam ao tema, em seguida, os resumos foram lidos. Finalmente tem-se o número de artigos selecionados após leitura do título e resumo, como é mostrado na Tab. (1.1) a seguir:

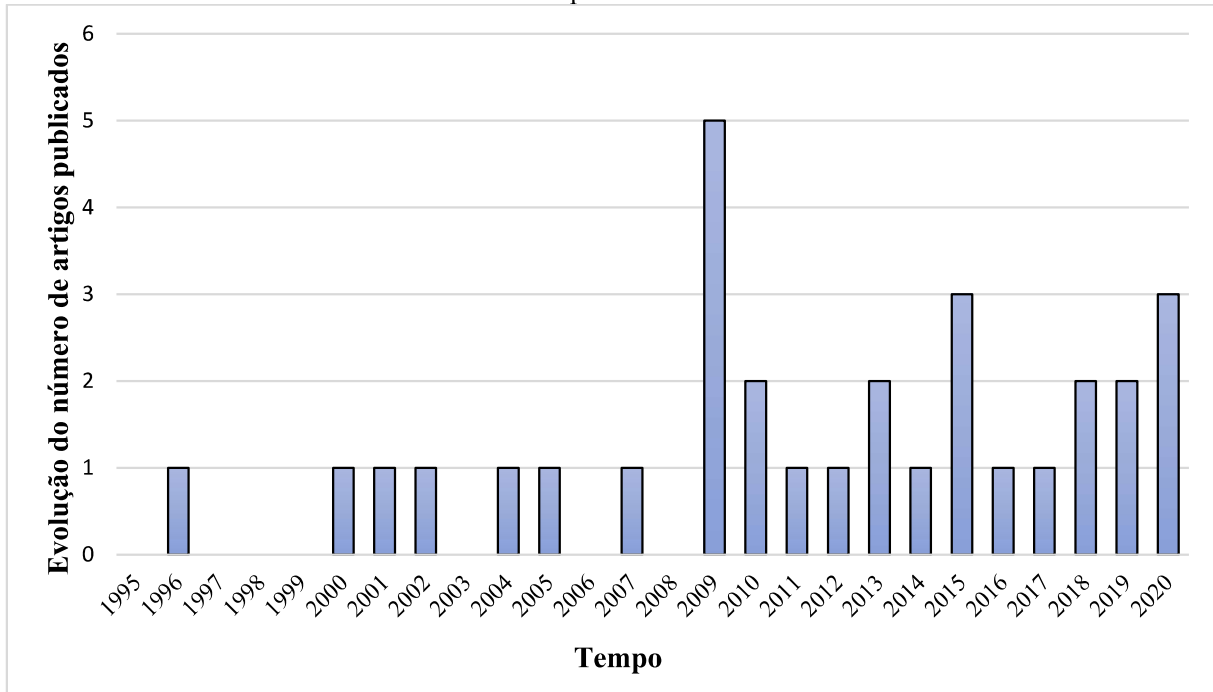
TABELA 1.1 – Resumo dos resultados obtidos em uma pesquisa no banco de dados.

BASE DE DADOS	<i>Expressões-chave</i>					
	<i>"Multi-scale" AND "Homogenization" AND "RVE"</i>	<i>"Multi-scale" AND "Homogenization" AND "RVE" AND "boundary elements"</i>	<i>"Multi-scale" AND "Homogenization" AND "RVE" AND "Plate Bending"</i>			
Número de artigos						
	Inicial	Com título aderente	Inicial	Com título aderente	Inicial	Com título aderente
Periódicos Capes	690	39	32	6	18	2
Scopus	187	18	8	6	1	1
Total	877	57	40	12	19	3
Número total de artigos sem repetições entre as bases de dados	51					
Número de artigos selecionados após leitura do título e resumo	31					

Fonte: Autoria própria (2022).

A evolução anual da publicação dos artigos selecionados na busca internacional após a leitura do título e resumo é mostrada na Fig. (1.1). Pode-se notar que artigos relacionados ao tema abordado neste trabalho foram publicados nas últimas décadas, e o número de publicações aumentou desde 2000. Acredita-se que este seja um tema relativamente novo e possui uma grande área de exploração, surgido pela primeira vez em 1996, e desde 2009, o número de publicações tem crescido mais rapidamente.

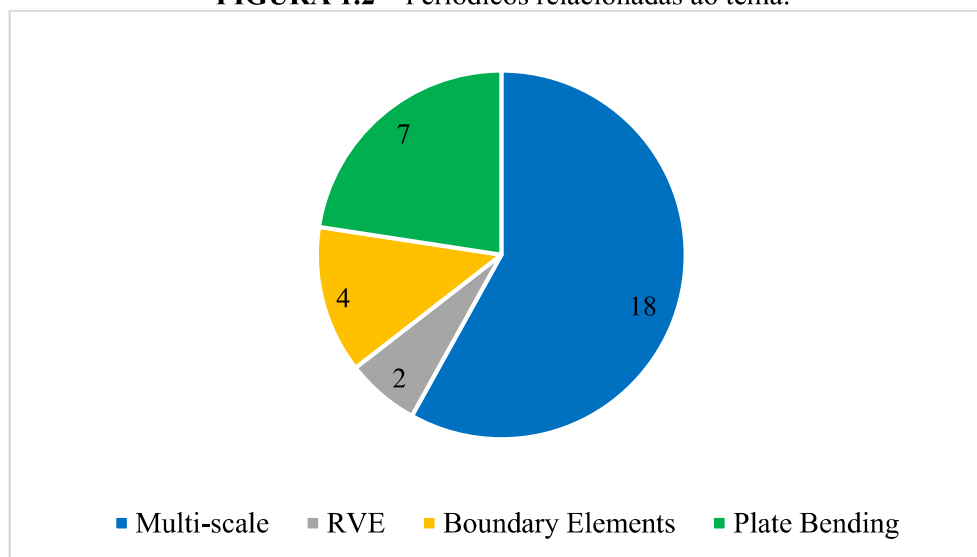
FIGURA 1.1 – Evolução dos artigos publicados com base nas palavras-chave utilizadas no mapeamento.



Fonte: Autoria própria (2022).

A pesquisa realizada sobre "análise em multiescala de flexão de placas, considerando a microestrutura do material representada pelo EVR" também permite a exploração de novos tópicos. Descobriu-se trabalhos que usam o método do elemento finito (MEF) em diferentes aplicações, trabalhos que usam formulação que acopla dois métodos, sendo: Método dos Elementos de Contorno e Método dos Elementos Finito (MEC/MEF). À medida que a pesquisa foi sendo concluída, constatou que existem poucos trabalhos de multiescala que utilizam apenas MEC na sua formulação. Portanto, o MEC pode ser utilizado para aprofundar o estudo de flexão de placas adotando uma abordagem em multiescala, por se tratar de uma área ainda pouco pesquisada.

A Figura (1.2) mostra os artigos de periódicos relacionadas ao tema do trabalho. Nota-se na figura abaixo, que 18 artigos utiliza uma abordagem em multiescala em diversas aplicações, 2 artigos referente ao processo de homogeneização e a identificação do EVR, 4 artigos que utilizam uma formulação através do MEC para análise de diversos materiais e estruturas e 7 artigos relacionadas a flexão de placas utilizando diferentes métodos numéricos.

FIGURA 1.2 – Periódicos relacionadas ao tema.

Fonte: Autoria própria (2022).

1.4.2 Teoria clássica de placas

A teoria das placas consiste em uma aproximação bidimensional do problema tridimensional da teoria da elasticidade, por meio da consideração de hipóteses simplificadoras. O primeiro trabalho neste campo é atribuído a KIRCHHOFF (1850), que estabeleceu a chamada Teoria Clássica, que representa bem o comportamento de placas delgadas sob cargas transversais. Nessa teoria, a deformação transversal por cisalhamento é desprezada e a solução do problema leva a uma equação diferencial de quarta ordem. Portanto, envolve a definição de quatro variáveis num determinado ponto, devendo ser definida duas condições de contorno em cada ponto. Essa teoria será aquela a ser adotada nesse trabalho.

Como alternativa à teoria clássica, REISSNER (1944, 1945) e MINDLIN (1951) desenvolveram teorias semelhantes, na qual a deformação transversal por cisalhamento foi considerada. As equações diferenciais obtidas são de sexta ordem, nas quais três condições de contorno devem ser satisfeitas num ponto qualquer do contorno da placa, as quais estão relacionadas às condições físicas do problema. Para pontos localizados no contorno, essas teorias apresentam resultados melhores do que a teoria de Kirchhoff, e permitem a análise de placas moderadamente espessas, além das placas delgadas.

Ao mesmo tempo, outras teorias sobre o deslocamento do plano médio da placa e a rotação do plano também surgiram, incluindo os trabalhos de HENCHY (1947) e KROMM (1953). Posteriormente, CHENG (1979) desenvolveu uma teoria e obteve uma equação diferencial de ordem infinita de deslocamento transversal, na qual as principais derivadas de quarta ordem são multiplicadas pelo quadrado da espessura da placa. Quando a espessura tende a zero, no limite, obtém-se a equação bi-harmônica da teoria clássica de Kirchhoff.

1.4.3 Flexão de placas

LEVINSON (1980) formulou uma nova teoria que leva em consideração a deformação por cisalhamento, que permite a análise dinâmica e estática da placa. WAN e GREGORY (1985) provaram que o problema de flexão da placa foi resolvido satisfazendo certas condições de contorno, e a equação de deslocamento de Cheng foi usada para reduzir com precisão o problema à equação de Kirchhoff.

REISSNER (1986) apresentou uma nova formulação que estendeu as equações de análise de placas considerando grande deformação e alcançando as equações diferenciais de décima ordem. Em 1991, o mesmo autor publicou um trabalho sobre a análise de placas ortotrópicas. Finalmente, BARRET e ELLIS (1988) estenderam a teoria de Cheng para obter expressões de deslocamento e componentes de tensão relacionados ao deslocamento transversal da superfície média da placa e suas derivadas.

Problemas de flexão de placas foram analisados usando equações integral de contorno, inicialmente por JASWON, MAITI e SYMM (1967), que propôs a solução da equação bi-harmônica por equações integrais e a aplicou à solução de placas. HANSEN (1976) propôs uma formulação direta para a análise de placas infinitas com furos de contorno não carregado usando a equação integral do deslocamento transversal e a sua derivada.

ALTIERO e SIKARSKIE (1978) estudaram apenas placas engastadas em razão da complexidade da técnica utilizada, que consistia em considerar uma placa real contida em uma placa fictícia cuja função de Green era conhecida. Esta técnica, considerada como uma formulação indireta, foi posteriormente estendida por WU e ALTIERO (1979) para incluir condições de contorno arbitrárias.

Outros trabalhos importantes também foram apresentados por KAMIYA et al (1982), que aplicaram o método a placas sujeitas aos efeitos da temperatura, TANAKA e KAMIYA (1982), consideraram em seus trabalhos, com base na teoria de Reissner, os efeitos de grandes deslocamentos transversais na análise de placas espessas. COSTA e BREBBIA (1985) e BÈZINE, CIMETIERRE e GELBERT (1985) analisaram placas sujeitas a instabilidade usando células internas para calcular a integral de domínio. MORJARIA e MUKHERJEE (1980) desenvolveram formulações que levam em consideração a não linearidade física para a análise de placas.

Nesse sentido, algumas contribuições podem ser citadas ao longo dos anos, RODRÍGUES (1986), estudou problemas elásticos bidimensionais utilizando o Método dos Elementos de Contorno. PAIVA (1987) apresentou a possibilidade de associar placas a vigas e pilares, propondo como alternativa para a solução do problema, a utilização de equações integrais apenas para deslocamentos transversais nos pontos do contorno e fora do domínio. AKHER e HARTLEY (1989) apresentaram formulações para calcular equações integrais usando funções de interpolação.

PILTNER e TAYLOR (1989) desenvolveram uma formulação que considera as deformações de cisalhamento, no mesmo ano KATSIKADELIS e ARMENAKAS (1989) adotaram a combinação do Método dos Elementos de Contorno com o Método dos Elementos Finitos. KARAMI et al (1992) desenvolveram uma formulação usando um sistema no qual uma equação bi-harmônica e uma equação

harmônica são acopladas. CHUEIRI (1994) estudou a formulação do MEC para a análise elastoplástica das placas. FERNANDES (1998) desenvolveu a formulação do MEC aplicada à análise não linear de placas, baseada na teoria clássica de Kirchhoff.

SOARES, TELLES e GUIMARÃES (2009) publicou um artigo baseado na teoria de flexão de placas de Reissner usando o MEC. HAN, REN e HUANG (2009), utilizou o MEF para demonstrar a formulação de flexão de placa delgada desenvolvida pelo princípio de trabalho virtual. O artigo apresentado por HUANG e LIU (2013), demonstrou o uso do MEC baseado na teoria de placa de Kirchhoff e na equação bi-harmônica para resolver problemas de flexão de placa delgada na macroescala. LIU, CHEN e LU (2020), propôs um procedimento para resolver o problema de flexão de placas usando o Método dos Elementos Finitos, baseado na Teoria das placas de Mindlin e Reissner.

1.4.4 Análise em multiescala

A análise em multiescala tornou-se uma ferramenta amplamente usada em muitos campos e seu uso continua em desenvolvimento. A ideia básica por trás do método multiescala, utilizado nesse trabalho, é analisar pontos de interesse denominado Elemento de Volume Representativo (EVR), cuja resposta homogeneizada representa o modelo constitutivo do ponto do macrocontínuo. Ou seja, nesse caso, o modelo constitutivo de um ponto do macrocontínuo (dado pela placa nesse trabalho) não é dado por um modelo matemático, é definido pela resposta do EVR homogeneizada. Assim, a microestrutura do material é representada pelo EVR, que deve ser definido de forma que inclua as diferentes fases (ou materiais) observadas a nível microscópico no material.

A formulação em multiescala tem sido usada em diferentes aplicações, podendo citar alguns trabalhos como: GHOSH, LEE e RAGHAVAN (1996) que descreve a teoria de homogeneização assintótica e um modelo de elementos finitos em multiescala é desenvolvido para a análise de elastoplasticidade de materiais heterogêneos. Os mesmos autores no ano de 2001 publicou um artigo que desenvolveu um método adaptativo para criar uma estrutura hierárquica de subdomínios computacionais com diferentes resoluções para problemas em multiescala, a fim de realizar análise de danos em materiais compostos e porosos. KOUZNETSOVA, GEERS e BREKELMANS (2002) mostrou um procedimento de homogeneização computacional, que permite a modelagem dos efeitos do tamanho da microestrutura. LADEVÈZE (2004) desenvolveu uma formulação de um modelo para análise estrutural dos compósitos.

MARKOVIC (2005) apresentou uma modelagem em multiescala para análises de estruturas heterogêneas com comportamento constitutivo inelástico. TEMIZER (2007) publicou um artigo onde é abordada a homogeneização de materiais heterogêneos no contexto da elasticidade, no qual se busca o comportamento constitutivo efetivo de materiais heterogêneos. SOMER et. al (2009) desenvolveu uma formulação utilizando uma abordagem em multiescala propondo um procedimento que visa economizar o tempo geral de cálculo na solução de elementos finitos de problemas de mecânica dos sólidos não

lineares, GIUSTI et. al (2009), avaliou o critério de rendimento de Gurson com o método de cálculo em multiescala, ILIC e HACKL (2009) demonstrou uma contribuição com a modelagem de materiais compósitos, com a aplicação do Método dos Elementos Finitos em multiescala.

SHEN (2010) através de um novo método estocástico de elementos finitos é proposto para simular problemas de valor de contorno envolvendo materiais heterogêneos aleatórios. No mesmo ano BURCZYŃSKI (2010) apresentou um algoritmo numérico em multiescala que acopla dois domínios: domínio atomístico discreto e domínio contínuo. PERIC (2011) descreveu um programa baseado em homogeneização que é usado para calcular a resposta de microestruturas não lineares a pequenas deformações. ZHANG (2011) desenvolveu um novo método de cálculo em multiescala para análise elasto-plástica de materiais contínuos heterogêneos com microestruturas periódicas e aleatórias. MONTERO e CHACON (2013) publicou um artigo com o objetivo de usar uma abordagem discreta para determinar o tamanho do Elemento de Volume Representativo (EVR) de materiais quase frágeis.

TRIANATAYLLOU (2014) apresentou uma formulação histerética em multiescala para análise dinâmica não linear de materiais compósitos. OGIERMAN e KOKOT (2015) através de uma abordagem em multiescala modelou o comportamento constitutivo de material compósito anisotrópico. Com base no conceito de elemento de volume representativo BLANCO (2016), uma teoria variacional unificada é proposta para um modelo multiescala geral. MOYEDA E FISH (2018) apresentou uma nova abordagem multiescala para a análise de elementos estruturais de concreto, onde proposta foi verificada por meio de simulações numéricas diretas e validada por resultados experimentais.

Recentemente FERNANDES, PITUBA e SOUZA NETO (2015), desenvolveu uma formulação em multiescala para análise de flexão de placas por meio do acoplamento MEC/MEF, em que o MEC foi utilizado para modelar o macrocontínuo, e o MEF foi considerado para resolver o problema de equilíbrio na microescala representado pelo EVR. Os mesmos autores publicaram em (2015) uma formulação em multiescala para analisar o problema de chapas compostas por materiais heterogêneos. Nessas formulações, o macrocontínuo é modelado pela formulação não linear do MEC, levando em consideração o Operador Tangente Consistente (OTC). Utilizando as formulações apresentadas nesses dois artigos, FERNANDES, JÚNIOR e PITUBA (2017) analisaram placas sujeitas à flexão e compostas por materiais de microestrutura heterogênea, onde diferentes distribuições de inclusões foram consideradas na microestrutura, a fim de verificar seu efeito no comportamento mecânico do macrocontínuo. No mesmo ano, FERNANDES, FURTADO e PITUBA (2017), considerando a modelagem multiescala de chapas compostas de materiais heterogêneos, verificaram a influência na resposta macromecânica do problema de chapa, quando consideram-se diferentes distribuições de vazios na microestrutura. Nesses trabalhos também estudou-se o efeito de considerar diferentes modelos constitutivos para a matriz do EVR.

FERNANDES, OHLAND e VIEIRA (2018) levando em consideração a teoria multiescala baseada no EVR, desenvolveu uma formulação de elementos de contorno para a obtenção da resposta constitutiva de microestruturas heterogêneas. Neste caso, a microestrutura do material é definida pelo

EVR, que é modelado pela placa em sub-regiões, onde cada sub-região representa a matriz ou inclusões, e vazios também podem ser definidos na matriz para simular porosidade na microestrutura do material. Porém, nesse artigo a formulação era limitada ao caso de comportamento elástico. FERNANDES et. al (2019) estende a formulação anterior para lidar com fenômenos dissipativos sobre o domínio. FERNANDES, PONTES e OLIVEIRA (2020) propõe uma formulação do MEC para modelar o EVR onde além de fenômenos dissipativos, pode-se ter também o descolamento de fase na zona de interface entre matriz e agregado. Em todos esses trabalhos, os resultados homogeneizados são comparados a um modelo do MEF para validar a formulação proposta.

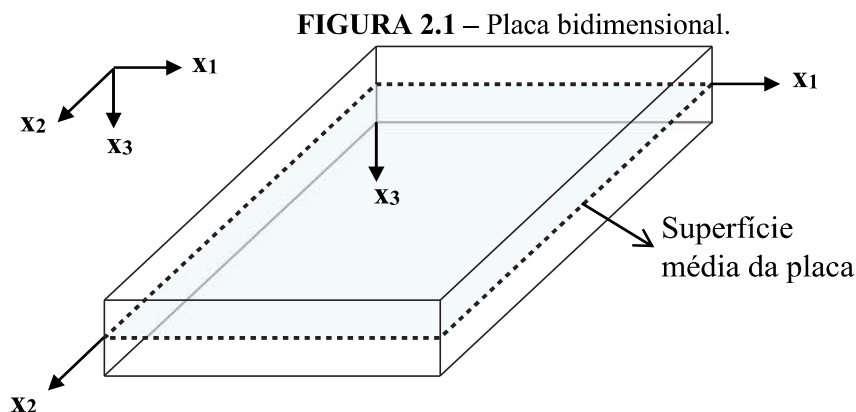
FERNANDES et. al (2020) propôs uma formulação multiescala totalmente acoplada do MEC para analisar o problema bidimensional de chapas compostas por materiais heterogêneos, em que fenômenos dissipativos podem ser considerados. Para validar o modelo apresentado, os resultados numéricos são comparados àqueles onde a microestrutura do material (EVR) é modelada pelo MEF e cuja formulação foi desenvolvida por FERNANDES, PITUBA e SOUZA NETO (2015).

2 FORMULAÇÃO DA MACROESTRUTURA

2.1 Equações integrais para análise não-linear de flexão de placas através do MEC

A fim de analisar o problema de flexão de placas, uma formulação não linear é utilizada para modelar o macrocontínuo, devido ao fenômeno dissipativo que ocorrem na microestrutura. Neste capítulo, será desenvolvida uma formulação não linear do MEC com convergência quadrática no processo iterativo, que reduz bastante o esforço computacional. Tal redução é principalmente importante na análise em multiescala, que exige grande esforço computacional. Para obter a solução do problema não-linear de uma placa sujeita à flexão simples, serão considerados momentos iniciais que surgem devido a campos de deformação iniciais, como o efeito da temperatura ou retração. Porém, nesse trabalho essas deformações serão aquelas resultantes do processo dissipativo na placa. Maiores detalhes sobre o desenvolvimento das equações básicas do problema de flexão de placas serão omitidos aqui, devido ao fato de serem bastante conhecidas e já demonstradas por vários autores. No entanto, esse desenvolvimento está descrito no Apêndice A do presente trabalho.

Para determinar o problema de flexão, inicialmente consideramos uma placa delgada de espessura t (definida na direção do eixo x_3), contorno Γ e domínio Ω relacionado a um sistema cartesiano de coordena x_1 e x_2 . Considera-se que a placa suporta apenas carregamentos perpendiculares à superfície média da mesma (direção do eixo x_3). As variáveis associadas ao problema de flexão são: deslocamento w , sua derivada, $\partial w/\partial n$, o momento fletor M_n , e o esforço cortante equivalente V_n . (ver definição de V_n no Apêndice A) no plano médio, sendo n direção normal ao plano e s direção tangencial ao contorno. A placa é representada por sua superfície média, portanto, a representação geométrica utilizada é bidimensional, com eixos x_1 x_2 , conforme mostrado na Fig. (2.1):



Fonte: Autoria própria (2022).

2.1.1 Equações integrais considerando campo de momentos iniciais

2.1.2 Equações básicas

Supondo que, além da carga transversal genérica, haja um campo de deformação inicial, a deformação total em uma análise não linear pode ser expressa da seguinte forma:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^0 \quad (2.1)$$

sendo:

- ε_{ij} é o campo de deformação total;
- ε_{ij}^e é a deformação elástico-linear;
- ε_{ij}^0 , a deformação residual (devido ao fenômeno dissipativo).

A tensão σ_{ij} pode ser determinada, pela lei de Hooke, se usar a deformação elástica (ver Eq. (2.2)). Porém, a relação entre tensão σ_{ij} e deformação total é feita através do tensor constitutivo obtido a partir do modelo constitutivo adotado para governar o comportamento do material.

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}^e + \frac{2G\nu}{1-\nu}\varepsilon_{kk}^e\delta_{ij} \quad (i,j,k=1,2,3) \quad (2.2)$$

onde:

- $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ é o módulo de elasticidade transversal do material da placa;
- ν é o coeficiente de Poisson do material;
- E é o módulo de elasticidade longitudinal do material.

Por outro lado, a tensão elástica σ_{ij}^e se relaciona, pela lei de Hooke, com a deformação total e a tensão plástica com a deformação plástica. Assim, aplicando a Lei de Hooke à Eq. (2.1), tem-se:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e - \sigma_{ij}^0 \quad (2.3)$$

Como as deformações estão relacionadas às curvaturas $w_{,ij}$ (ver Eq. (A.3) do Apêndice A), pode ser obtida a expressão da tensão em função das curvaturas (ver Eq. (A.12) do Apêndice A). Dessa forma, realizando a integração dessas tensões ao longo da espessura da placa, obtém-se o campo de momentos atuando na placa, que é dado pela seguinte equação:

$$M_{ij} = M_{ij}^e - M_{ij}^0 \quad (i,j=1,2) \quad (2.4)$$

sendo:

- M_{ij} são os momentos que atuam no ponto;
- M_{ij}^0 é o campo de momento iniciais (devido ao fenômeno dissipativo);
- M_{ij}^e momentos elásticos devido as tensões elásticas (que no processo iterativo são chamadas de tensões de tentativa) e que considerando Eq. (2.2) podem ser expressos em termos das curvaturas, através da seguinte equação:

$$M_{ij}^e = -D[vw_{,kk} \delta_{ij} + (1 - \nu)w_{,ij}] \quad (2.5)$$

Levando em conta a equação de equilíbrio (A.15) do Apêndice A, as forças cortantes podem ser obtidas derivando a Eq. (2.4), ou seja:

$$Q_j = M_{ij,i} = -Dw_{,kkj} - M_{ij,i}^0 \quad (i,j,k=1,2) \quad (2.6)$$

Derivando a Eq. (2.6) e substituindo-a na equação de equilíbrio (A.13) do Apêndice A, chegamos à equação diferencial das placas, envolvendo os momentos iniciais, dado por:

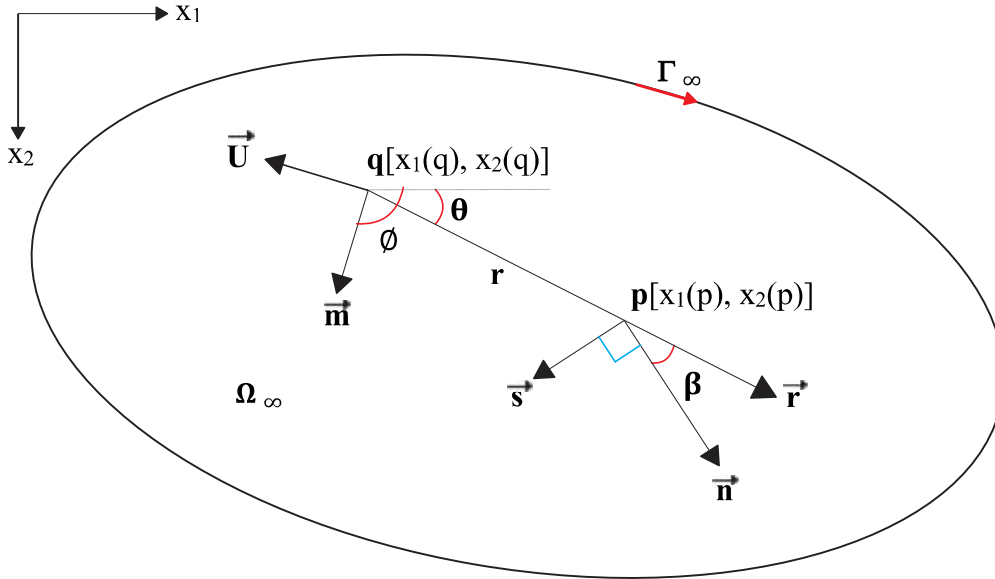
$$w_{,kkll} = \frac{1}{D}(g - M_{ij,i}^0) \quad (2.7)$$

2.1.3 Equação integral de deslocamento para um ponto no domínio da placa

Seja qualquer placa isotrópica com domínio Ω e contorno Γ , submetida a uma carga g distribuída sobre área de domínio Ω_g . Admite-se então, que a placa está integrada em outra, de contorno infinito Γ_∞ e domínio infinito Ω_∞ , na qual está definido o problema fundamental, cuja carga g^* é definida pela função delta de Dirac. O símbolo $*$ é usado para definir carregamento e soluções fundamentais. Assim, assume-se que a placa de domínio finito está sujeita a dois carregamentos independentes g e g^* , aos quais estão relacionados, respectivamente, os deslocamentos w e w^* , os estados de tensões σ_{ij} e σ_{ij}^* e os

estados de deformação ε_{ij} e ε_{ij}^* . O centro do sistema de coordenadas polares relaciona-se com o ponto q , conforme mostrado na Fig. (2.2).

FIGURA 2.2 – Placa Infinita.



Fonte: Autoria própria (2022).

sendo r distância entre q e p , dado por:

$$r = \sqrt{[x_1(p) - x_1(q)]^2 + [x_2(p) - x_2(q)]^2} \quad (2.8)$$

Como a carga g^* é definida pela distribuição delta de Dirac, deduz-se que a resultante do carregamento $\delta(q, p)$ no domínio fundamental é uma força unitária aplicada ao ponto q .

As equações integrais de contorno para placas de Kirchhoff é deduzida a partir do teorema de BETTI (1872) que relaciona esses dois estados diferentes de tensão e deformação em um sólido, de volume V . O teorema é dado por:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV \quad (i,j=1,2,3) \quad (2.9)$$

Expandindo a equação (2.9) do lado direito:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV = \int_V (\sigma_{11} \varepsilon_{11}^* + \sigma_{22} \varepsilon_{22}^* + \sigma_{33} \varepsilon_{33}^* + \tau_{12} \gamma_{12}^* + \tau_{13} \gamma_{13}^* + \tau_{23} \gamma_{23}^*) dV \quad (2.10)$$

No caso das hipóteses de Kirchhoff (ver no Apêndice A.2), pode-se desprezar os termos em \mathbf{x}_3 e, portanto, (2.10) resulta:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* = \int_V (\sigma_{11} \varepsilon_{11}^* + \sigma_{22} \varepsilon_{22}^* + \tau_{12} \gamma_{12}^*) dV \quad (2.11)$$

Designando como U a segunda parte da Eq. (2.11), considerando a Eq. (A.3) do Apêndice A e fazendo a integração dos esforços ao longo da espessura, a expressão de U pode ser escrita como:

$$U = \int_{\Omega} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^*) dx_3 d\Omega = - \int_{\Omega} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_{ij} x_3 w_{,ij}^*) dx_3 d\Omega = \quad (i,j=1,2) \quad (2.12)$$

$$- \int_{\Omega} (M_{ij}^e) w_{,ij}^* d\Omega$$

Considerando as equações (2.4) e (2.12), o teorema da reciprocidade de Betti (1872) (Eq. (2.9)), resulta em:

$$\int_{\Omega} (M_{ij}^* w_{,ij}) d\Omega = \int_{\Omega} (M_{ij} + M_{ij}^0) w_{,ij}^* d\Omega \quad (2.13)$$

Integrando-se por partes duas vezes a Eq. (2.13), é possível obter a equação integral do deslocamento em qualquer ponto q do domínio da placa, em função dos esforços e deslocamento do contorno, dados em termos do sistema local de coordenadas (n, s), onde n e s são, respectivamente, as direções normal e tangencial ao contorno. A equação integral da flecha resulta em:

$$w(q) + \int_{\Gamma} \left(V_n^*(q, P) w(P) - M_{nn}^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q, P) w_{ci}(P) =$$

$$= \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w^*(q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) + \quad (2.14)$$

$$+ \int_{\Omega_g} (g(p) w^*(q, P)) d\Omega_g(p) - \int_{\Omega} (M_{ij}^0(p) w_{,ij}^*(q, P)) d\Omega(p)$$

Observe que na Eq. (2.14) referente à análise não linear física da placa, existe uma integral de domínio envolvendo os momentos iniciais, que no presente trabalho, serão referentes aos momentos que ocorrem devido ao fenômeno dissipativo.

2.1.4 Solução do problema fundamental de placas

A solução fundamental se refere ao deslocamento w^* do ponto p , que é provocada por uma carga unitária transversal aplicada ao ponto q . A expressão de w^* é obtida a partir da equação de equilíbrio da placa escrita em termos das variáveis do problema fundamental (Eq. (A.22) do Apêndice A), onde g^* é adotada como a distribuição delta de Dirac (ver mais detalhes em FERNANDES (1998)). A expressão da solução fundamental é dada por:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \quad (2.15)$$

Derivando a Eq. (2.15) em relação a normal n , obtém-se a expressão para a rotação fundamental de um ponto p , resultando em:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r (r_{,i} n_i) \quad (2.16)$$

As expressões dos esforços do problema fundamental podem ser obtidas derivando a Eq. (2.15) e considerando as equações do Apêndice A(A.28), (A.29) e (A.36), as quais relacionam os esforços com as derivadas de w^* e são escritas de acordo com um sistema local de coordenadas (n, s) . As expressões dos esforços fundamentais resultam em:

$$M_n^* = -\frac{1}{4\pi} [(1 + \nu) \ln r + (1 - \nu) (r_{,i} n_i)^2 + \nu] \quad (2.17)$$

$$M_{ns}^* = -\frac{1}{4\pi} (1 - \nu) (r_{,i} n_i) (r_{,j} s_j) \quad (2.18)$$

$$V_n^* = \frac{r_{,i} n_i}{4\pi r} [2(1 - \nu) (r_{,j} s_j)^2 - 3 + \nu] + \frac{1 - \nu}{4\pi R} [1 - 2(r_{,i} s_i)^2] \quad (2.19)$$

onde:

- R é o raio da curvatura do contorno no ponto P ;

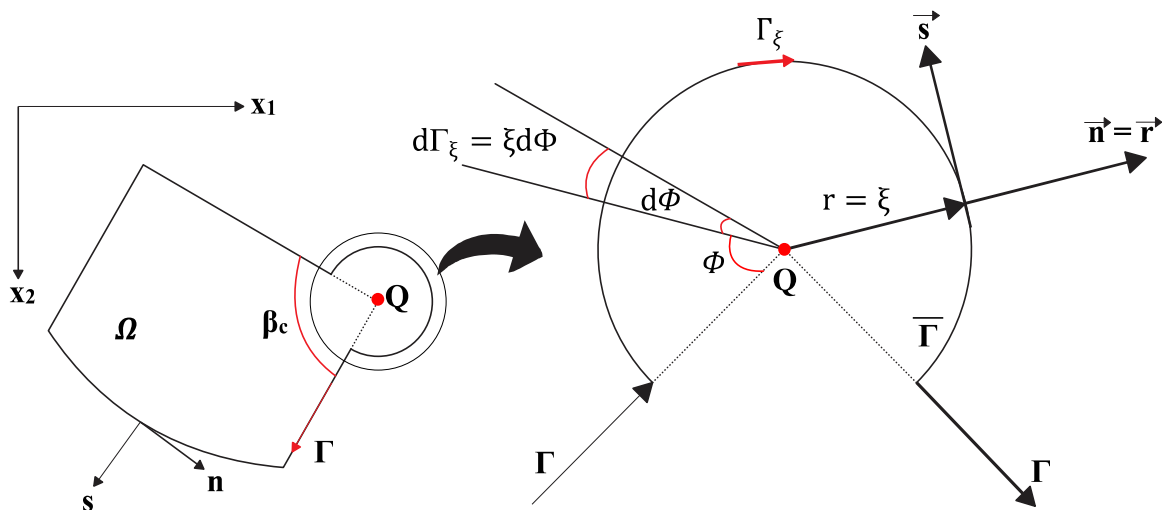
Observe que se o contorno da placa for aproximado por elementos de linha reta, a curvatura R em qualquer ponto do contorno tende ao infinito. Esse é o caso do presente trabalho (como detalhado a seguir), pois os elementos de contorno são adotados retos.

Observe que as expressões fundamentais acima se referem à equação integral do deslocamento transversal (w). Mas para obter a solução da placa outras equações integrais são necessárias, como a equação da derivada da flecha e a equação dos momentos em pontos internos. Portanto, expressões fundamentais adicionais referentes a essas equações integrais também terão que ser deduzidas para se obter a solução final da placa (ver detalhes em FERNANDES (1998)).

2.1.5 Equação integral de deslocamento de um ponto no contorno

A equação (2.14) é válida para qualquer ponto q no domínio. Entretanto, para obter a solução numérica do problema, a integral do ponto Q sobre o contorno deve ser obtida. A Eq. (2.14) pode ser escrita para o ponto Q , se adicionar um contorno circular Γ_ξ tendo Q como centro e raio ξ . Dessa forma, Q fica dentro do domínio e parte do contorno é removida, resultando no novo contorno dado por $\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\xi$, como mostrado na Fig. (2.3). Deve-se então fazer o raio ξ e o contorno $\bar{\Gamma}$ tendem a zero, para que Q possa ser considerado sobre o contorno.

FIGURA 2.3 – Adicionando um contorno circular no canto Q da placa.



Fonte: Autoria própria (2022).

Através da Fig. (2.3), obtém-se as seguintes relações:

$$r = R = \xi \quad (2.20)$$

$$r_{,i} n_i = 1 \quad (2.21)$$

$$r_{,i} s_i = 0 \quad (2.22)$$

$$d\Gamma_\xi(P) = \xi d\Phi \quad (2.23)$$

Assim sendo, a Eq. (2.14), que é a equação integral de um ponto Q no contorno, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & K(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left(V_n^*(Q, P)w(P) - M_{nn}^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\ & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(Q, P)w_{ci}(P) = \\ & \int_{\Gamma} \left(V_n(P)w^*(Q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(Q, P)w_{ci}^*(P) + \\ & + \int_{\Omega_g} (g(p)w^*(Q, p))d\Omega_g(p) - \int_{\Omega} (M_{ij}^0(p)w_{,ij}^*(Q, p))d\Omega(p) \end{aligned} \quad (2.24)$$

sendo: $K(Q) = \frac{\beta_c}{2\pi}$ se o ponto Q coincide com um canto; $K(Q) = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$ se o ponto Q não coincide com um canto.

2.1.6 Equações integrais para curvaturas nos pontos internos

Conforme o trabalho apresentado por FERNANDES (1998), o cálculo dos momentos M_{ij} para um ponto interno é realizado a partir da Eq. (2.4), onde M_{ij}^e é dado em função das curvaturas $w_{,ij}$ (ver Eq. (2.5)), cuja equação integral é obtida derivando a Eq. (2.14) do deslocamento $w(q)$ em relação as direções x_1 e x_2 . Dessa forma, a equação das curvaturas nos pontos internos, é expressa da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & w_{,ij}(q) + \int_{\Gamma} \left(V_{n,ij}^*(q, P)w(P) - M_{nn,ij}^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\ & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci,ij}^*(q, P)w_{ci}(P) = \\ & = \int_{\Gamma} \left(V_n(P)w_{,ij}^*(q, P) - M_{nn}(P)w_{nij}^*(q, P) \right) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P)w_{ci,ij}^*(q, P) + \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega_g} \left(g(p) w_{,ij}^* (q, P) \right) d\Omega_g(p) - \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Omega} \left(M_{ij}^0(p) w_{,iji}^* (q, P) \right) d\Omega(p) + \\
& - \int_{\Omega} \bar{e}_{,ijkl}^* (q, p) M_{kl}^0(p) d\Omega(p) - \bar{g}_{ijkl}(q) M_{kl}^0(q)
\end{aligned}$$

sendo:

- $\bar{e}_{,ijkl}^* (q, p) = w_{,ijkl}^* (q, p)$;
- $\bar{g}_{ijkl}(q) = \frac{1}{8D} (\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{li}\delta_{kj} + \delta_{kl}\delta_{ij})$.

Os últimos termos da Eq. (2.25) é devido ao tratamento de singularidade que aparece quando o ponto de colocação pertence ao domínio que está sendo integrado. Para se fazer o tratamento dessa singularidade, é retirado do domínio Ω um domínio circular Ω_c , onde há singularidade, com um pequeno raio ξ e que se origina do ponto fonte q , definindo o domínio $\Omega_\varepsilon = \Omega - \Omega_c$. Então escreve-se a integral para esse novo domínio e aplica-se técnicas específicas para tratamento de singularidades (para mais detalhes ver FERNANDES (1998)).

As expressões fundamentais que aparecem na Eq. (2.25) encontram-se no Apêndice B deste trabalho.

2.1.7 Transformações das integrais de domínio em integrais de contorno

As integrais de domínio que aparecem nas equações (2.14) e (2.24), que correspondem às influências da carga distribuída, na área Ω_g , podem ser calculadas assumindo várias cargas concentradas equivalentes. Embora esta solução leve a bons resultados no contorno da placa, ela não permite o cálculo direto dos esforços nos pontos de aplicação desses esforços. Para evitar este problema, as integrais de domínio, devido à carga distribuída, são transformadas em integrais sobre o contorno Γ_g . Dessa forma considerando a Fig. (2.4), que representa a área Ω_g , seu contorno Γ_g e o ponto de carregamento q , pode-se deduzir as seguintes relações, que possibilitam a transformação de coordenadas:

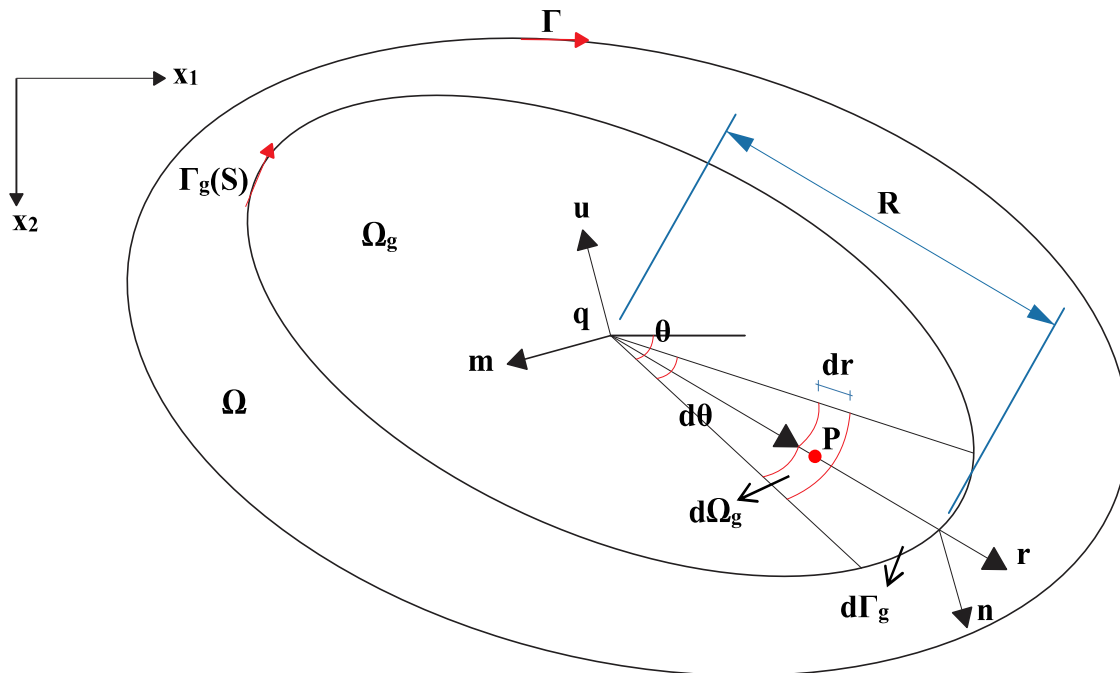
$$d\theta = \frac{r_{,i} n_i}{R} d\Gamma_g \quad (2.26)$$

$$d\Omega_g = r dr d\theta = r dr = \frac{r_{,i} n_i}{R} d\Gamma_g \quad (2.27)$$

onde R é o valor de r em qualquer ponto do contorno Γ_g . Considerando a transformação de coordenadas dadas por (2.27), pode-se obter:

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, d) d\Omega_g(p) = \int_{\Gamma_g} \left(\int_0^R g(p) w^*(q, p) r dr \right) \frac{r_i n_i}{R} d\Gamma_g \quad (2.28)$$

FIGURA 2.4 – Área de carregamento (Ω_g) de uma placa de domínio Ω .



Fonte: Autoria própria (2022).

Assumindo que a carga $g(p)$ varie linearmente na região Ω_g , e considerando a relação entre o sistema de coordenadas cartesianas e o sistema de coordenadas polares, com origem em q , a carga $g(p)$ pode ser definida como:

$$g(p) = g(q) + Ar \cos \theta + Br \sin \theta \quad (2.29)$$

sendo:

- $g(q) = Ax_1(q) + Bx_2(q) + C$, é uma constante, correspondente ao valor de g no ponto q ;
- A, B e C são constantes.

Com a solução fundamental dado pela Eq. (2.15) que se refere ao deslocamento w^* do ponto p e a expressão da carga com variação linear (ver Eq. (2.29)), substituindo ambas na Eq. (2.28), e realizando a integração em relação a r , obtém-se a seguinte integral sobre o contorno:

$$\int_{\Omega_g} g(p)w^*(Q,p)d\Omega(p) = \frac{g(q)}{32\pi D} \int_{\Gamma_g} R^3 \left(\ln R - \frac{3}{4} \right) r_{,i} n_i d\Gamma_g +$$

$$+ \frac{1}{40\pi D} \int_{\Gamma_g} R^4 \left(\ln R - \frac{7}{10} \right) (A \cos \theta + B \operatorname{sen} \theta) r_{,i} n_i d\Gamma_g \quad (2.30)$$

2.2 Solução numérica através do MEC

2.2.1 Introdução

Este capítulo apresenta uma formulação numérica para a resolução aproximada das equações integrais da placa. A solução que fornece resultados de forma analítica das integrais é limitada a alguns problemas, cuja simplificação é aceitável para a redução do grau de liberdade a um número limitado. Dessa forma, como a solução analítica não é possível, a alternativa é resolvê-los numericamente, transformando-os em equações algébricas.

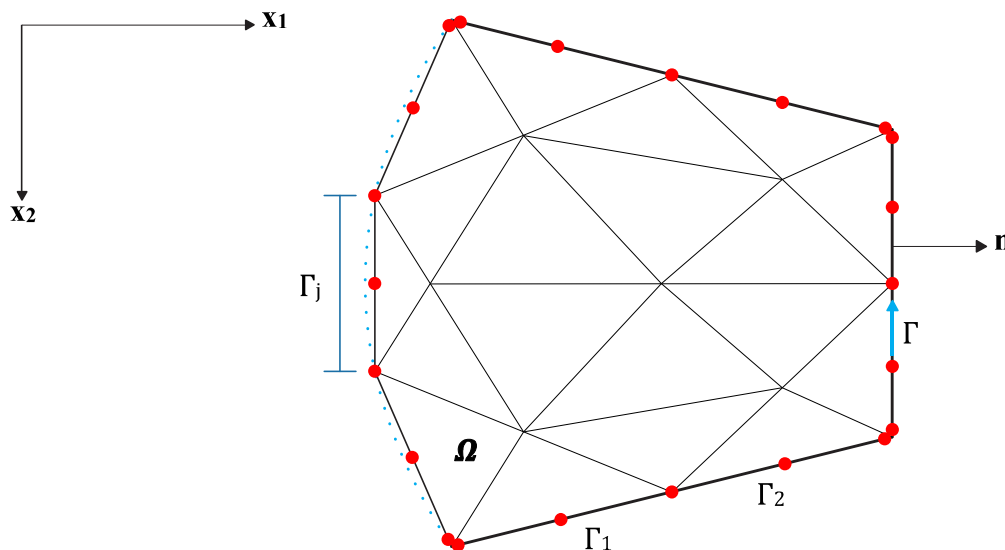
No presente trabalho apenas será empregado o Método dos Elementos de Contorno, a fim de realizar as transformações de equações integrais em equações algébricas e obter o sistema de equações lineares em que as incógnitas são forças e deslocamentos em pontos definidos no contorno. Além disso, em análises não-lineares tem-se também como incógnitas os momentos iniciais em pontos internos. Estas transformações consistem em discretizar o contorno da placa em elementos de contorno, onde os esforços e deslocamentos (w , $\partial w/\partial n$, V_n e M_n) são aproximados pelas funções interpoladoras, estipuladas de acordo com pontos preliminarmente estabelecido em cada elemento, os referentes nós ou pontos nodais. Com o intuito de converter essas equações integrais obtidas em equações algébricas, não apenas o contorno, mas também o domínio da placa deve ser discretizado em células em razão de esforços plásticos que aparecem na integral de domínio.

Existem duas incógnitas no nó de contorno, porque duas das quatro variáveis nodais são fornecidas como uma condição de contorno. Portanto, escrevendo para cada nó do contorno duas equações, um sistema de equações lineares é obtido, onde forças e deslocamentos dos nós do contorno são desconhecidos. Na análise não linear, também é necessário escrever a equação dos momentos elásticos em pontos internos, para conseguir chegar à solução final da placa. Ao impor as condições de contorno no sistema de equações, as variáveis de contorno são obtidas e a seguir, pode-se obter as variáveis dos pontos no domínio, a partir dos valores nodais já conhecidos no contorno.

2.2.2 Discretização do contorno da placa em elementos

A solução aproximada da equação integral é obtida dividindo o contorno em segmentos e o domínio em células. Primeiramente as aproximações do elemento de contorno serão definidas e, em seguida, serão definidas as aproximações nas células. O número e a forma dos elementos devem ser selecionados para representar de forma precisa ou aproximadamente adequada o contorno real da placa, conforme mostrado na Fig. (2.5), onde cada elemento tem três nós, a fim de aproximar as variáveis de forma quadrática e L_j é comprimento do elemento j . Nos cantos são adotados nós duplos, coincidentes com os cantos, ou seja, dois nós com as mesmas coordenadas, para expressar a descontinuidade das variáveis.

FIGURA 2.5 – Discretização da placa em elementos e células.



Fonte: Autoria própria (2022).

Neste trabalho, a aproximação da geometria dos segmentos será expressa como uma função linear, ou seja, os segmentos serão retilíneos. Como a integral é resolvida numericamente, é apropriado expressar as coordenadas de cada ponto P como uma função de coordenadas locais homogêneas ξ , sendo que o elemento possui comprimento L , $-1 \leq \xi \leq 1$.

Dessa forma, através da discretização do contorno em N_e (número de elementos), considerando que $\Gamma_j = \xi \frac{L_j}{2}$, uma integral de contorno é obtida de forma aproximada, considerando a seguinte relação:

$$\int_{\Gamma} F(\Gamma) d\Gamma = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} F(\Gamma_j) d\Gamma_j = \frac{L}{2} \sum_{j=1}^{N_e} \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \quad (2.31)$$

Nos elementos de contorno, as variáveis são aproximadas por funções polinomiais quadráticas, então três pontos nodais são necessários em cada elemento, adotados nas extremidades e no meio do mesmo (veja Fig. (2.5)). A função Φ_i , é definida igual a um ($\Phi_i = 1$) para o nó i e nula para os outros nós. As funções de interpolação são dadas por:

$$\Phi_1(P) = -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi) \quad (2.32)$$

$$\Phi_2(P) = 1 - \xi^2 \quad (2.33)$$

$$\Phi_3(P) = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi) \quad (2.34)$$

Os vetores de deslocamentos $\{u\}$ e esforços $\{p\}$ de qualquer ponto P do elemento, são expressos da seguinte maneira:

$$\{u(P)\} = [\Phi^T](P)\{U^N\} \quad (2.35)$$

$$\{p(P)\} = [\Phi^T](P)\{P^N\} \quad (2.36)$$

ou de forma explícita:

$$\{u(P)\} = \begin{Bmatrix} u_1(P) \\ u_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(P) & 0 & \Phi_2(P) & 0 & \Phi_3(P) & 0 \\ 0 & \Phi_1(P) & 0 & \Phi_2(P) & 0 & \Phi_3(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\{p(P)\} = \begin{Bmatrix} p_1(P) \\ p_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(P) & 0 & \Phi_2(P) & 0 & \Phi_3(P) & 0 \\ 0 & \Phi_1(P) & 0 & \Phi_2(P) & 0 & \Phi_3(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_1^3 \\ p_2^3 \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

sendo:

- $\{u_i^N\}$ são deslocamentos na direção i do nó N ;
- $\{p_i^N\}$ são esforços na direção i do nó N ;
- $u_1 = w = \text{flexão}$;
- $u_2 = \frac{\partial w}{\partial n} = \text{rotação}$;

- $p_1 = V_n =$ cortante equivalente;
- $p_2 = M_n =$ momento na direção normal ao contorno.

Se não houver descontinuidade nos valores das variáveis entre dois elementos adjacentes, esses elementos são chamados de contínuos. A descontinuidade das variáveis ocorre quando as condições de contorno entre dois elementos mudam repentinamente, como no caso dos nós de canto, onde é definido um nó duplo, que se refere a dois nós com as mesmas coordenadas. No entanto, no sistema de equações deve-se ter duas equações independentes para esses nós. Uma maneira de conseguir isso é ter pontos de colocação em posições diferentes. Para isso, recalculam-se as coordenadas do nó duplo para que o ponto de colocação se torne dentro do elemento e não mais coincida com seus pontos de extremidade, e então escrever uma equação para esse novo ponto. Observa-se, no entanto, que nesse trabalho, os nós 1 e 3 continuam sendo definidos nos pontos finais do elemento, ou seja, considerando $\xi_1 = -1$ e $\xi_3 = 1$, apenas o ponto de colocação é deslocado para dentro do elemento.

Adotando $0,4 \leq |\xi| \leq 0,6$ para cálculo da posição do nó duplo, se o ponto de colocação for o nó inicial do elemento, o valor de ξ será negativo, e se for o nó final, será positivo. O valor de ξ tem essas restrições para que haja uma distância conveniente entre os nós locais do elemento para evitar o problema de singularidade quando há duas equações linearmente relacionadas no sistema de equações. Uma vez que as variáveis são expressas nas duas extremidades e no meio do elemento, a flexa w do nó duplo Q precisa ser expressa em função dos valores nodais da flecha do elemento, ou seja:

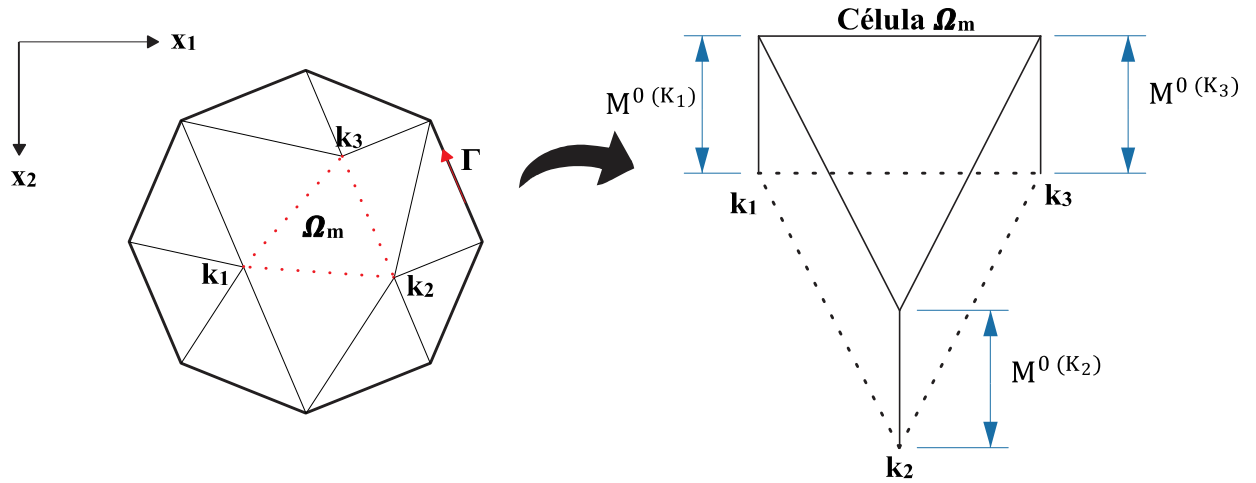
$$w(Q) = \Phi_1 w^1 + \Phi_2 w^2 + \Phi_3 w^3 \quad (2.39)$$

sendo w^i o deslocamento w do nó i do elemento ao qual Q pertence

2.2.3 Discretização do domínio da placa

As equações de deslocamento transversal (2.14) e (2.24), e a equação de curvatura (2.25), possuem uma integral de domínio abrangendo o campo dos momentos iniciais, que podem ser calculadas numericamente dividindo o domínio em pequenas células triangulares, conforme mostrado na Fig. (2.6).

FIGURA 2.6 – Divisão da Placa em Células no Domínio.



Fonte: Autoria própria (2022).

Os momentos iniciais $\{M_{ij}^0\}(p)$, em qualquer ponto p da célula, são aproximados por uma função linear e expressos por:

$$\{M_{ij}^0(p)\} = [\psi^T](p)\{M^{0(N)}\} \quad (2.40)$$

sendo:

- $\{M_{ij}^0(p)\} = \begin{Bmatrix} M_{11}^0(p) \\ M_{12}^0(p) \\ M_{22}^0(p) \end{Bmatrix}$ Vetor contendo momentos iniciais no ponto p ;
- $\{M^{0(N)}\} = \begin{Bmatrix} M^{0(k1)} \\ M^{0(k2)} \\ M^{0(k3)} \end{Bmatrix}$ Vetor contendo momentos iniciais nos nós (k_1 , k_2 e k_3) da célula a qual o

ponto p pertence;

- $[\psi^T]$ é a matriz que contém as funções de aproximação linear:

$$[\psi^T] = \begin{bmatrix} \xi_1^p & 0 & 0 & \xi_2^p & 0 & 0 & \xi_3^p & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1^p & 0 & 0 & \xi_2^p & 0 & 0 & \xi_3^p & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1^p & 0 & 0 & \xi_2^p & 0 & 0 & \xi_3^p \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

sendo:

$$\xi_\alpha^p = \frac{1}{2A} (2A_0^\alpha + b^\alpha X_1^p + a^\alpha X_2^p) \quad \alpha = 1,2,3; j = 1,2,3; k = 1,2,3 \quad (2.42)$$

$$a^\alpha = X_1^k - X_1^j \quad (2.43)$$

$$b^\alpha = X_2^k - X_2^j \quad (2.44)$$

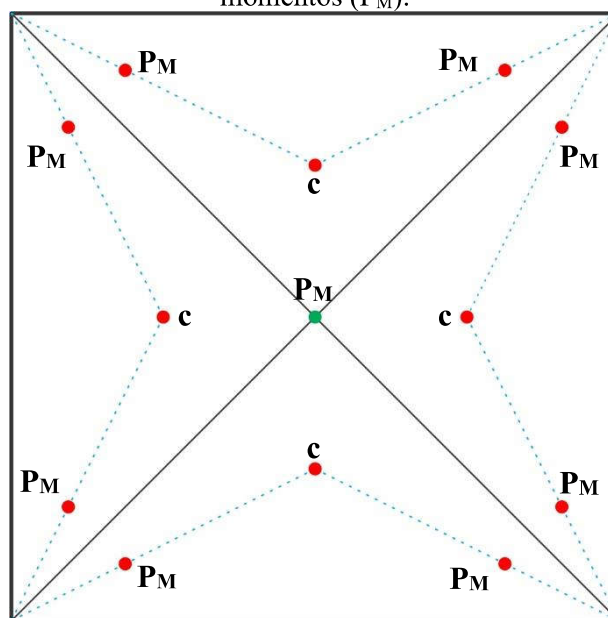
$$2A_0^\alpha = X_1^j X_2^k - X_1^k X_2^j \quad (2.45)$$

A área do triângulo (A), é dada por:

$$A = \frac{1}{2}(b^1 a^2 - b^2 a^1) \quad (2.46)$$

Para realizar a integração em cada célula, neste trabalho será adotado um esquema semi-analítico de integração, utilizado por FERNANDES (2003) e VENTURINE (1982), no qual apresenta bons resultados. Integrais de célula serão transformados em integrais de linha sobre do contorno da célula. No caso de células triangulares, os nós da célula coincidem com os pontos P_M , que são pontos onde os momentos são calculados. Para defini-los, pode-se considerar o modelo em que tais nós serão definidos dentro da célula onde os momentos elásticos dos pontos P_M são obtidos a partir da integração numérica das curvaturas, o que resulta em uma maior precisão de seus valores, conforme demonstrado na Fig. 2.7 onde c corresponde ao centroide da célula triangular, P_M é o ponto de colocação para momentos e o contorno contínuo das células, no qual as funções são integradas.

FIGURA 2.7 – Discretização do domínio em células e definição dos pontos de colocação para momentos (P_M).



Fonte: Autoria própria (2022).

Aplicando o esquema semi-analítico de integração à integral de domínio da equação do deslocamento (2.14), adota-se um sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ) com o ponto de carregamento centrado em q , que permite calcular analiticamente a integral na coordenada r . Então faz-se mudança de

coordenadas de tal forma que se obtenha integrais ao longo do contorno da célula (ver mais detalhes em FERNANDES 2003). Dessa forma um coeficiente e_{kl} resulta em:

$$e_{kl}^{cel}(q) = -\frac{1}{4\pi D} \int_{\Gamma} \left\{ \xi_{\alpha}^{-q} \frac{R}{2} \left[r_{,k} r_{,l} + \delta_{kl} \left(\ln R - \frac{1}{2} \right) \right] + \xi_{\alpha}^{-R} \frac{R}{3} \left[r_{,k} r_{,l} + \delta_{kl} \left(\ln R - \frac{1}{3} \right) \right] \right\} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \quad (k,l=1,2) \quad (2.47)$$

Quanto às coordenadas dos nós das células, tem-se: se os vértices da célula são definidos por pontos internos ou sobre o contorno e os nós da célula coincidem com os vértices da célula. Porém, se o ponto estiver no contorno externo da placa, as coordenadas do nó devem ser recalculadas, determinando uma linha reta conectando o centroide c e o vértice da célula (ver Fig. 2.7).

Tendo em conta que a célula tem três lados, calcula-se a equação (2.47) ao longo do contorno de cada lado. A expressão deve ser integrada numericamente através da formula quadratura de Gauss e empregando a técnica de sub-elementos. Para isso é necessário fazer a mudança de coordenadas homogêneas, dessa forma, o coeficiente e_{kl} dado pela equação (2.47) é calculado numericamente da seguinte maneira (veja mais detalhes em FERNANDES 2003):

$$e_{kl}^{cel}(q) = \sum_{i=1}^3 \sum_{ks=l}^{Nsub} \sum_{ig=l}^{Ng} -\frac{a_{ks}}{8\pi D} \int_{\Gamma} \left\{ \xi_{\alpha}^q \frac{R}{2} \left[r_{,k} r_{,l} + \delta_{kl} \left(\ln R - \frac{1}{2} \right) \right] + \xi_{\alpha}^R \frac{R}{3} \left[r_{,k} r_{,l} + \delta_{kl} \left(\ln R - \frac{1}{3} \right) \right] \right\} (r_{,i} n_i) W_{ig} \quad (2.48)$$

sendo:

- $\begin{Bmatrix} \bar{\xi}_1^q \\ \bar{\xi}_2^q \\ \bar{\xi}_3^q \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\bar{A}} \begin{bmatrix} 2\bar{A}_0^1 & \bar{b}^1 & \bar{a}^1 \\ 2\bar{A}_0^2 & \bar{b}^2 & \bar{a}^2 \\ 2\bar{A}_0^3 & \bar{b}^3 & \bar{a}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ X_1^q \\ X_2^q \end{Bmatrix};$
- $\begin{Bmatrix} \bar{\xi}_1^r \\ \bar{\xi}_2^r \\ \bar{\xi}_3^r \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\bar{A}} \begin{bmatrix} 0 & \bar{b}^1 & \bar{a}^1 \\ 0 & \bar{b}^2 & \bar{a}^2 \\ 0 & \bar{b}^3 & \bar{a}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{Bmatrix},$ onde $r = R$;
- $Nsub$ é o número de sub-elementos;
- a_{ks} é o comprimento do sub-elemento k,s ;

2.2.4 Obtenção da solução numérica

2.2.4.1 Procedimento para obtenção da equação algébrica

Realizando-se a discretização do contorno em elementos N_e , e substituindo-se as variáveis por seus valores aproximados em cada elemento dadas por (2.35) e (2.36) e também a discretização do domínio em células, onde os momentos são aproximados de forma linear (ver item 3.2.2), a integral do deslocamento de um ponto Q dada pela Eq. (2.24) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
K(Q)w(Q) + \sum_{j=1}^{N_e} \left[\int_{\Gamma} \{p^*\}(Q, P)[\Phi^T](P) d\Gamma \right] \{U_j^N\} + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(Q, P)w_{ci}(P) = \\
+ \sum_{i=1}^{N_e} \left[\int_{\Gamma} \{u^*\}(Q, P)[\Phi^T](P) d\Gamma \right] \{P_j^N\} + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P)w_{ci}^*(Q, P) + \\
+ \int_{\Omega_g} (g(p)w^*(Q, p))d\Omega_g(p) - \sum_{cel=1}^{N_{cel}} \left[\int_{\Omega_{cel}} \{k^*\}(Q, p)[\Psi^T](p) d\Omega \right] \{\Delta M\}_{cel}^p
\end{aligned} \tag{2.49}$$

onde:

- $\{p^*\}(Q, P) = \{V_n^*(Q, P) - M_{nn}^*(Q, P)\}$
- $\{u^*\}(Q, P) = \left\{w^*(Q, P) - \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P)\right\}$
- $[\Phi^T]$ são as funções interpoladoras quadráticas, definidas em (2.32), (2.33) e (2.34).

Definindo:

$$\{h^j\}(Q) = \int_{\Gamma} \{p^*\}(Q, P)[\Phi^T](P) d\Gamma \tag{2.50}$$

$$\{g^j\}(Q) = \int_{\Gamma} \{u^*\}(Q, P)[\Phi^T](P) d\Gamma \tag{2.51}$$

$$t(Q) = \int_{\Omega_g} g(p)w^*(Q, p)d\Omega_g(p) \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}
\{e_{kl}^{cel}\}(Q) &= \int_{\Omega_{cel}} \{k^*\}(Q, p) [\Psi^T](p) d\Omega \\
&= \int_{\Omega_{cel}} w_{,kl}^*(Q, P) \xi_{\alpha}^p(P) d\Omega_{cel}(p)
\end{aligned} \tag{2.53}$$

(k,l=1,2; α=1,2)

onde as funções da Eq. (2.53) estão definidas nas Eqs. (2.41) e (2.42), e após a aplicação do esquema semi-analítico de integração, o coeficiente e_{kl} é calculado da forma definida em (2.48).

A equação (2.49) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
K(Q)w(Q) + \sum_{j=1}^{N_e} \{h^j\}(Q) \{u^j\} + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) = \\
+ \sum_{i=1}^{N_e} \{g^i\}(Q) \{p^i\} + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + t(Q) - \sum_{cel=1}^{N_{cel}} \{e^{cel}\} \{\Delta M\}_{cel}^0
\end{aligned} \tag{2.54}$$

2.2.4.2 Equações algébricas

Considerando o trabalho de FERNANDES (1998), onde depois de calcular os vetores $\{h^j\}(Q)$ e $\{g^i\}(Q)$ em todos os elementos da discretização do contorno e também depois de realizar a integração numérica em todas as células, pode ser obtida a seguinte equação algébrica aproximada para o deslocamento w de um ponto do contorno Q , em sua forma matricial, dada por:

$$\{H\}(Q)\{U\} + \{H_c\}(Q)\{w_c\} = \{G\}(Q)\{P\} + \{G_c\}(Q)\{R_c\} + T(Q) + \{E\}(Q)\{M^0\} \tag{2.55}$$

sendo:

- $\{E\}(Q)$ é o vetor que descreve a influência do campo de momentos iniciais sobre o valor do deslocamento $w(Q)$ do ponto do contorno;
- $\{H\}(Q)$ e $\{G\}(Q)$ são vetores de dimensão $1 \times 2N_n$;
- $\{H_c\}(Q)$ e $\{G_c\}(Q)$ são vetores de dimensão $1 \times N_c$;
- $\{R_c\}$ vetor que contém as reações de todos os cantos da placa;
- N_n , o número de nós do contorno da placa;
- N_c , o número de nós de cantos;
- $\{U^T\} = \left\{ w^1 \quad \frac{\partial w^1}{\partial n} \quad \dots \quad w^i \quad \frac{\partial w^i}{\partial n} \quad \dots \quad w^{N_n} \quad \frac{\partial w^{N_n}}{\partial n} \right\}$ é o vetor de valores nodais de deslocamento do contorno da placa;

- $\{w_c^T\} = \{w_{c_1} \ \dots \ w_{c_i} \ \dots \ w_{c_{N_c}}\}$ é o vetor que contém os deslocamentos nos cantos;
- $\{R_c^T\} = \{R_{c_1} \ \dots \ R_{c_i} \ \dots \ R_{c_{N_c}}\}$ é o vetor que contém as reações de canto;
- $\{P^T\} = \{V_n^1 \ M_n^1 \ \dots \ V_n^i \ M_n^i \ \dots \ V_n^{N_n} \ M_n^{N_n}\}$ é o vetor dos esforços nodais de valores do contorno da placa;
- $T(Q)$ é o coeficiente referente a carga;
- $\{M^0\} = \left\{ \begin{matrix} \dots \\ M^{0(i)} \\ \dots \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \dots \\ \left(\begin{matrix} M_{11}^{0(i)} \\ M_{12}^{0(i)} \\ M_{22}^{0(i)} \end{matrix} \right) \\ \dots \end{matrix} \right\}$ é o vetor que contém os momentos iniciais nos nós de contorno

e do domínio, a dimensão é $3(N_i) \times 1$, no qual N_i é o número de nós de células.

De forma análoga, o deslocamento $w(q)$ de um ponto interno q é obtido pela equação matricial:

$$\begin{aligned} w(q) + \begin{bmatrix} [H^*](q) & [H_c^*](q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{w_c\} \end{Bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} [G^*](q) & [G_c^*](q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\} \\ \{R_c\} \end{Bmatrix} + \{T^*\}(q) + [E^*]\{M^0\} \end{aligned} \quad (2.56)$$

onde os termos são análogos àqueles da Eq. (2.55), mas nesse caso o deslocamento $w(q)$ não pertence ao vetor $\{U\}$ e por isso aparece explicitamente na equação algébrica.

Observe que a equação algébrica em um ponto externo A é análoga à Eq. (2.56), basta trocar q por A , e também considerar o primeiro termo $w(A)$ nulo, devido à propriedade da função delta de Dirac, que anula a função para pontos externos ao domínio.

A equação matricial das curvaturas $\left\{ \frac{1}{r} \right\}$ de um ponto interno q é dada por:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{r} \right\}(q) + \begin{bmatrix} [H'](q) & [H_c'](q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{w_c\} \end{Bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} [G'](q) & [G_c'](q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\} \\ \{R_c\} \end{Bmatrix} + \{T'\}(q) + [E']\{M^0\} \end{aligned} \quad (i,j=1,2) \quad (2.57)$$

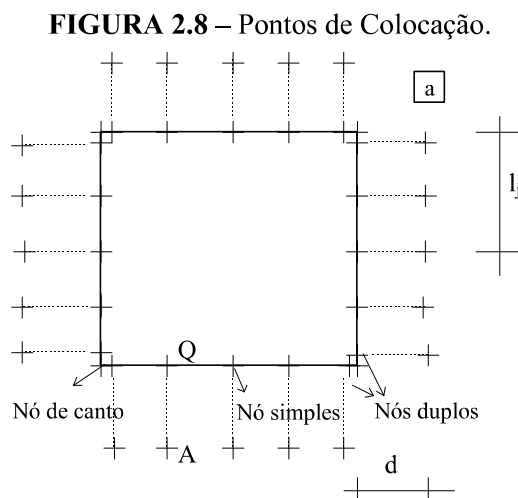
onde os termos são análogos àqueles da Eq. (2.55), mas modificando as expressões fundamentais, que nesse caso são aquelas indicadas na Eq.(2.25).

Utilizando a equação dos momentos elásticos (2.5), para N_i pontos internos a equação dos momentos pode ser obtida a partir da Eq. (2.57), sendo expressa por:

$$\{M^e\} = -\begin{bmatrix} [\bar{H}'''] & [\bar{H}_c'''] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{w_c\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\bar{G}'''] & [\bar{G}_c'''] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\} \\ \{R_c\} \end{Bmatrix} + \{\bar{T}'''\} + [\bar{E}''']\{M^0\} \quad (2.58)$$

2.2.4.3 Sistema de equações

Cada ponto do contorno possui dois valores de variáveis desconhecidos, e em cada canto possui um valor incógnito, portanto, é necessário escrever duas equações para cada nó do contorno e uma equação para cada vértice para obter a solução do problema. Na análise considerando o campo de momentos iniciais é essencial discretizar o domínio como mostrado no item 2.2.3, portanto, para cada nó interno tem momentos iniciais como incógnita, desse modo, é necessário escrever também a equação dos momentos elásticos nos pontos internos. Neste trabalho, para cada nó do contorno, será utilizada a opção de escrita da equação de algébrica de deslocamento w . O sistema de equações é obtido, escrevendo a equação de deslocamento w em cada ponto do contorno Q e num ponto externo A , que é próximo ao contorno. A integração numérica nos elementos e células, é feita usando a técnica do subelemento (descrita no Apêndice C.2). Portanto, para cada nó duplo ou simples no contorno, há dois pontos de colocação e para cada nó de canto, há um ponto de colocação. Três nós (2 nós duplos e um nó de canto) são definidos em cada canto, o que resulta em 5 pontos de colocação, conforme mostrado na Fig. (3.2).



Fonte: Fernandes (1998).

sendo:

$$d = aL_m \quad (2.59)$$

- L_m se for nó interno ao elemento é igual ao comprimento do elemento, ou é a média dos comprimentos dos elementos concorrentes no nó;
- a pode variar de 0,0001 a 1,5 para evitar problemas numéricos;
- L_j é o comprimento do elemento j .

Nesse trabalho, o sistema de equações é obtido escrevendo uma equação de deslocamento transversal w em cada nó do contorno e outra em seu correspondente ponto externo A (ver Fig. (3.2)), além de escrever uma equação de w em cada canto. O sistema de equações pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} [H_{cont}] & [H_c] \\ [\bar{H}_{cont}] & [\bar{H}_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{w_c\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{cont}] & [G_c] \\ [\bar{G}_{cont}] & [\bar{G}_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\} \\ \{R_c\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{T_{cont}\} \\ \{T_c\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [E_{cont}] \\ [E_c] \end{bmatrix} \{M^0\} \quad (2.60)$$

sendo $[H_{cont}]$ e $[H_c]$ referentes à equação de deslocamento w escrita no ponto do contorno e seu respectivo ponto externo, e $[\bar{H}_{cont}]$ e $[\bar{H}_c]$ referentes à equação do deslocamento w escrita nos cantos. O subscrito “cont” se refere ao contorno externo “c” se refere ao canto.

ou de forma simplificada:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + \{T\} + [E]\{M^0\} \quad (2.61)$$

onde:

- $\{U\}$ é o vetor de valores nodais dos deslocamentos no contorno;
- $\{P\}$ é o vetor de valores nodais de esforços no contorno;
- $\{T\}$ é o vetor da carga externa.

A matriz $[H]$ tem propriedades que podem ser determinadas considerando certas configurações de equilíbrio de uma placa, obtidas impondo-se movimentos de corpo rígido à mesma (ver detalhes em PAIVA (1987) e FERNANDES (1998)). Essas propriedades são importantes para verificação se a matriz $[H]$ está implementada corretamente.

2.2.5 Técnica de solução

2.2.5.1 Cálculo dos deslocamentos w do domínio e as variáveis no contorno

Da solução do sistema de Eq. (2.60), obtêm-se as incógnitas dos N_n nós do contorno e N_c cantos. Então, a partir da equação matricial (2.56), os deslocamentos w nos pontos internos de N_i podem ser obtidos.

Com a finalidade de obter o procedimento numérico para a análise não linear, são realizadas operações matriciais na Eq. (2.61), com o objetivo de deixar isolados os termos referentes aos momentos iniciais. Então, todas as incógnitas do contorno são armazenadas em um vetor $\{X\}$, mudando as respectivas colunas entre as matrizes $[H]$ e $[G]$. Em seguida, em $\{B\}$, os efeitos dos deslocamentos ou

forças prescritas no contorno são somados ao efeito da carga atuando na placa. Depois de aplicar as condições de contorno, o sistema pode ser resolvido para obter as incógnitas nos nós de contorno, obtendo-se o seguinte sistema:

$$[A] \{X\} = \{B\} + [E]\{M^0\} \quad (2.62)$$

sendo $\{X\}$ o vetor solução, que é composto pelo deslocamento e esforços no contorno da placa e nos nós dos cantos.

Multiplicando ambos os lados da equação pelo inverso da matriz $[A]^{-1}$ para isolar o vetor $\{X\}$, a fim de obter as incógnitas do contorno, tem-se:

$$\{X\} = \{L\} + [R] \{M^0\} \quad (2.63)$$

sendo: $\{L\}$ caracteriza a resposta elástica, sem considerar os momentos iniciais, onde: $\{L\} = [A^{-1}]\{B\}$; $[R]$ caracteriza a influência dos momentos iniciais nos deslocamentos do contorno, onde: $[R] = [A^{-1}][E]$

Para deslocamentos internos, à semelhança do que foi feito anteriormente, e considerando a Eq. (2.63) temos:

$$\{w(q)\} = \{L^*\} + [R^*]\{M^0\} \quad (2.64)$$

onde o vetor $\{L^*\}$ e a matriz $[R^*]$ são análogas àquelas definidas para a Eq.(2.63), mas em (2.64) eles são referentes à equação do deslocamento w escrito no ponto interno q .

Similarmente ao que foi feito para a Eq. (2.58) e considerando a equação (2.63) obtemos:

$$\{M^e\} = \{B''\} - [A'']\{X\} + [E'']\{M^0\} = \{K\} + [S]\{M^0\} \quad (2.65)$$

sendo $\{K\}$ o vetor que caracteriza a resposta elástica e a matriz $[S]$ indica a influência dos momentos iniciais nos momentos de pontos do contorno e internos; os mesmos são dados por:

$$\{K\} = \{B''\} - [A'']\{L\} \quad (2.66)$$

$$[S] = [E''] - [A''] [R] \quad (2.67)$$

2.3 Processo incremental-iterativo com formulação tangente consistente

2.3.1 Introdução

Para obter a convergência quadrática no processo iterativo associado à análise não linear convencional de uma placa submetida a flexão simples, inicialmente é deduzida a equação de resíduos em termos de momentos e curvaturas, e sua linearização define a matriz tangente consistente do problema. Além do mais, a equação residual também define o valor de correção do momento que deve ser dado em cada iteração, definindo a correção para a curvatura da placa.

2.3.1.1 Equação de resíduos

A partir da formulação apresentada anteriormente para análise de placas, são calculados os incrementos de momento elástico em todos os pontos da placa que atendem às condições de equilíbrio estático da estrutura. Em seguida, verifica-se esses esforços estaticamente admissíveis também satisfazem o modelo constitutivo usado. Se não forem satisfeitos, os resíduos de momento aplicado à placa são calculados pela equação residual, que geram correções no estado de curvatura da placa e o modelo constitutivo é verificado novamente.

De acordo com a tolerância adotada para a convergência do processo iterativo, o processo de correção no estado de curvatura da placa continua até que os momentos residuais em todos os pontos da placa se anulem, ou fiquem abaixo da tolerância estipulada. Portanto, a solução não-linear é obtida por meio de um processo iterativo incremental, onde a carga total é subdividida em incrementos de carga. A correção que deve ser feita ao estado de curvatura em uma dada iteração é obtida através do operador tangente consistente, que é atualizado à cada iteração, e o resíduo de momentos nos pontos da placa. Para cada incremento de carga, o equilíbrio da estrutura é verificado considerando o respectivo incremento de curvatura acumulado (após somar as correções do processo iterativo), e também utilizando-se as matrizes constitutivas atualizadas para os nós de célula.

Para o caso geral, a equação residual de incremento n é dada por:

$$\{R_M\} = \{\Delta F_n^{ext}\} - \{\Delta F_n^{int}\} \quad (2.68)$$

sendo $\{\Delta F_n^{ext}\}$ o vetor do incremento de forças externas estaticamente admissível; $\{\Delta F_n^{int}\}$ é o incremento de forças internas.

Para problemas de flexão simples, a equação residual (2.68) é dada por:

$$\{R_M\} = \{\Delta K_n\} - \{\Delta M_n\} \quad (2.69)$$

sendo:

- $\{\Delta K_n\}$ é o incremento de momentos elásticos obtidos através da formulação linear do MEC para análise de flexão de placas, definido pela Eq. (2.66);
- $\{\Delta M_n\}$ é o incremento de momentos na placa (definidos pela equação algébrica da formulação não-linear do MEC, a ser deduzida adiante);
- $\{R_M\}$ é o resíduo de momentos.

De acordo com a tolerância adotada, o equilíbrio da placa é alcançado quando $\{R_M\} \cong 0$. Para obter uma solução não linear para o problema, no processo iterativo, a incógnita do problema é a correção da curvatura que deve ser dada em cada iteração até que o equilíbrio seja alcançado. Para isso, a Eq. (2.69) deve ser escrita em termos dos incrementos nodais de curvatura $\Delta\{1/r\}_n$, dos tensores constitutivos e dos momentos $\{\Delta M^L\}$, nos nós das células obtidos de acordo com o modelo constitutivo adotado para governar o comportamento do material da placa (ver Eq. (2.81)). Para tal, necessita-se definir a equação algébrica do MEC referente aos momentos $\{\Delta M\}$. A fim de se obter essa equação, deve-se antes definir alguns termos necessários a sua dedução. Seja inicialmente o incremento de momentos elásticos ΔM_{ij}^e (definido na Eq. (2.5)) e que no processo iterativo é chamado de momentos de tentativa. Esses podem ser calculados, de forma local, a partir da Lei de Hooke e do incremento de curvaturas do ponto k. Nesse caso, eles são designados como $\{\Delta M^{e(L)}\}_k$ e considerando a Eq. (2.5) podem ser expressos pela seguinte expressão matricial:

$$\{\Delta M^{e(L)}\}_k = [C_m]_k \Delta \left\{ \frac{1}{r} \right\}_k \quad (2.70)$$

sendo: $\Delta \left\{ \frac{1}{r} \right\}_k$ o vetor de curvatura do ponto k da placa; $[C_m]_k$ o tensor constitutivo do nó k.

Agrupando todas as matrizes $[C_m]_k$ numa mesma matriz, tem-se a seguinte matriz quadrada, na qual a diagonal é formada por matrizes elásticas (que relacionam momento e curvaturas), e os demais termos são nulos:

$$[C_M] = \begin{bmatrix} [C_m]_1 & [0] & \dots & \dots & [0] \\ [0] & \dots & \dots & \dots & [0] \\ \dots & \dots & [C_m]_i & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [C_m]_N \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Considerando-se as equações. (2.4)e (2.70), a equação algébrica do MEC referente ao incremento de momentos ΔM , em todos os nós de células, é obtida a partir de:

$$\{\Delta M_n\} = [C_M] \left\{ \Delta \frac{1}{r} \right\} - \{\Delta M_n^0\} \quad (2.72)$$

sendo $\{\Delta M_n^0\}$ se refere à equação algébrica do MEC relacionada ao incremento de momentos iniciais, que será definida a partir da relação:

$$\{\Delta M^0\}_n = \{\Delta M^e\}_n - \{\Delta M^L\}_n \quad (2.73)$$

onde $\{\Delta M^e\}_n$ é a equação algébrica do MEC relacionada ao incremento do momento de tentativa dada pela Eq. (2.65) e $\{\Delta M^L\}_n$ é calculado localmente para cada ponto k, a partir das tensões no ponto k que satisfazem o modelo constitutivo adotado. Assim, considerando-se as equações. (2.65), (2.72) e (2.73), obtém-se as seguintes equações algébricas do MEC:

$$\{\Delta M^0\} = \{K\} + [S] \{\Delta M^{0(L)}\} - \{\Delta M^L\}_n \quad (2.74)$$

$$\{\Delta M_n\} = [C_M] \left\{ \Delta \frac{1}{r} \right\} - \{K\} - [S] \{\Delta M^{0(L)}\} + \{\Delta M^L\}_n \quad (2.75)$$

onde considerando a Eq. (2.4), os momentos iniciais $\{\Delta M^{0(L)}\}$ a nível local pode ser obtido considerando-se apenas as curvaturas e os momentos do próprio ponto k, ou seja:

$$\{\Delta M^{0(L)}\}_k = [C_M] \left\{ \Delta \left(\frac{1}{r} \right) \right\}_k - \{\Delta M^L\}_k \quad (2.76)$$

Dessa forma, substituindo-se Eq. (2.78) em (2.69) (ver mais detalhes em FERNANDES e NETO (2013)), a equação de resíduos pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\{R_M\} = 2\Delta\{K_n\} - [C_M] \left\{ \Delta \left(\frac{1}{r} \right) \right\} + [S] \left([C_M] \left\{ \Delta \left(\frac{1}{r} \right) \right\}_n - \{\Delta M^L\}_n \right) - \{\Delta M_n^L\} \quad (2.77)$$

sendo $\left\{ \Delta \left(\frac{1}{r} \right) \right\}$ o vetor de incremento das curvaturas; $[S]$ representa a influência dos momentos plásticos, de todos os pontos da placa, dada pela Eq. (2.67).

Observe que no processo iterativo, a cada iteração, o valor de correção a ser dado no incremento da curvatura é obtido, e o incremento da curvatura da iteração anterior é somado para obter o incremento

da curvatura total da placa. Portanto, uma vez que a curvatura do ponto k é conhecida, sua tensão de tentativa pode ser calculada de acordo com a lei de Hooke e o critério pode ser verificado para obter a tensão atuante no ponto.

2.3.2 Matriz tangente consistente

A matriz tangente do problema de flexão simples é obtida pela linearização da Eq. (2.77) de resíduos, utilizando o Método de Newton-Raphson, ou seja, para uma determinada iteração i , a correção no estado de curvaturas $\delta\Delta\{1/r\}_n^i$ é calculada pela seguinte equação:

$$\{R\}_n^{i-1} + \frac{\partial\{R\}_n^{i-1}}{\partial\left\{\Delta\left(\frac{1}{r}\right)\right\}_n^{i-1}} \left\{\delta\Delta\left(\frac{1}{r}\right)\right\}_n^i = 0 \quad (2.78)$$

Isto é, a matriz tangente consistente é dada por:

$$[K^{TC}]^i = -\frac{\partial\{R\}_n^{i-1}}{\partial\left\{\Delta\left(\frac{1}{r}\right)\right\}_n^{i-1}} \quad (2.79)$$

Derivando-se a equação (2.77) de resíduos em relação à curvatura, obtém:

$$[K^{TC}]_n^i = [S] \left([C_M^{ep}]_n^{i-1} - [C_M] \right) + [C_M] + [C_M^{ep}]_n^{i-1} \quad (2.80)$$

onde $[C_M^{ep}]_n^{i-1}$ é uma matriz quadrada, cuja diagonal é composta pelas matrizes elásto-plásticas, e os outros termos são nulos, isto é:

$$[C_M^{ep}] = \begin{bmatrix} [C_m^{ep}]_1 & [0] & \dots & \dots & [0] \\ [0] & \dots & \dots & \dots & [0] \\ \dots & \dots & [C_m^{ep}]_k & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [C_m^{ep}]_N \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

sendo N o número de nós de célula e para um ponto qualquer k da placa, $[C_m^{ep}]_k$ é dado por:

$$[C_m^{ep}]_k^{i-1} = \int_{-t/2}^{t/2} (x_3)^2 [C^{ep}]_k^{i-1} dx_3 \quad (2.82)$$

onde $[C^{ep}]_k^{i-1}$ é a matriz constitutiva que se obtém do modelo constitutivo adotado, ou seja, é a matriz tangente que relaciona a tensão real ao incremento de deformação. Assim, fazendo-se a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas homogêneas (ξ_{ig}) , a integração numérica é realizada ao longo da espessura, através da fórmula da quadratura de Gauss, ou seja:

$$[C_m^{ep}]_k^i = \frac{t^3}{8} \sum_{ig=1}^{Ng} [C^{ep}]_{k(ig)}^i (\xi_{ig})^2 W_{ig} \quad (2.83)$$

sendo W_{ig} o fator de ponderação do ponto de Gauss ig definido ao longo da espessura da placa, N_g o n° de pontos de Gauss definido ao longo da espessura da placa.

Considerando que os momentos são obtidos a partir da integração das tensões ao longo da espessura (ver Eq. (2.5)), os incrementos de momentos são calculados numericamente da seguinte maneira:

$$\{\Delta M_{ij}\} = \frac{t^2}{4} \sum_{ig=1}^{Ng} \Delta \sigma_{ij}^{(ig)} \xi_{ig} W_{ig} \quad (2.84)$$

sendo $\Delta \sigma_{ij}^{(ig)}$ o incremento de tensões no ponto de Gauss ig , obtido a partir do modelo constitutivo adotado, que nesse trabalho se refere ao incremento de tensão homogeneizada obtido após solução do problema de equilíbrio do EVR.

3 FORMULAÇÃO DA MICROESTRUTURA

3.1 Formulação não-linear do Elemento de Volume Representativo

Neste tópico, o MEC será usado para modelar o Elemento de Volume Representativo (EVR), que corresponderá ao material concreto. Tal formulação é desenvolvida detalhadamente em (FERNANDES et. al. 2019), sendo as microestruturas dos EVR que serão adotadas nesse trabalho, assim como suas discretizações, definidas por SILVA (2021). Para essa análise numérica, é necessário discretizar o contorno externo do EVR, assim como as interfaces entre matriz e inclusões ou entre matriz e vazios em elementos, além do domínio em células. Nos elementos sobre o contorno externo, as forças e deslocamentos são aproximados, mas nos elementos sobre as interfaces apenas os deslocamentos são aproximados. Por fim, nas células devem ser aproximadas as forças inelásticas e os deslocamentos.

Como detalhado a seguir, os deslocamentos nas células devem ser aproximados apenas se o coeficiente de Poisson for diferente nas diferentes fases do EVR. O domínio do EVR será determinado pela matriz (pasta cimentícia), inclusões (representando o agregado) e vazios (representando a porosidade do concreto), no qual, o comportamento do material da matriz é governado pelo modelo elasto-plástico de *Mohr-Coulomb* e as inclusões são consideradas elásticas. Também será modelada (através de elementos finitos retangulares de contato e fratura adicionados à malha do MEC) a ZTI (Zona de Transição Interfacial), que é uma região ao redor das inclusões em que ocorre um processo de fraturamento acentuado, portanto, a microestrutura do material é heterogênea.

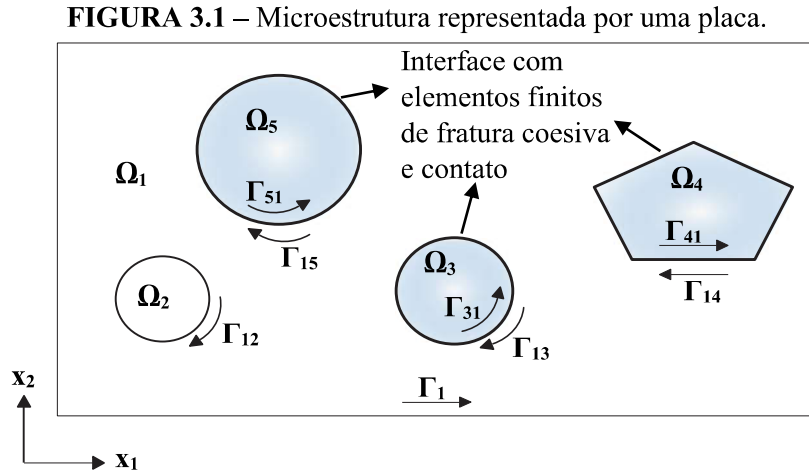
Para um determinado ponto da placa, seu tensor de deformação, resultante da análise do macrocontínuo (placa), será aplicado de forma constante ao contorno de seu EVR para calcular a resposta homogeneizada do EVR, que equivalerá ao modelo constitutivo do concreto. Para tal, inicialmente deve resolver o problema de equilíbrio no EVR para obter os campos de tensão, deformação e deslocamento no EVR e, em seguida, calcular sua resposta homogeneizada.

Para simular o comportamento mecânico da matriz do EVR, a teoria da plasticidade será utilizada para descrever o processo de deformação irreversível na matriz da microestrutura. Para a região de interface, a mecânica da fratura será empregada para modelar o processo o da fissuração nesta região. E para considerar a penetrabilidade entre a superfície do corpo do modelo, será utilizada a mecânica de contato.

3.1.1 Equações básicas

A modelagem do EVR é feita pelo MEC, levando em consideração a divisão de uma placa em sub-regiões. Na Fig. (3.1) tem-se um EVR genérico, que representa a microestrutura do material analisado, sendo que Ω_1 define a matriz (que possui um comportamento elasto-plástico) e as sub-regiões,

Ω_2 , Ω_3 , Ω_4 e Ω_5 representam inclusões e/ou vazios, no qual, cada sub-região representa uma fase com diferentes propriedades elásticas. Observe que como Ω_2 representa um vazio, a interface Γ_{21} não existirá. Além disso, sobre as interfaces entre matriz e inclusões podem ser definidos elementos finitos adicionais, que são superpostos à malha do MEC, onde admite-se dois modelos constitutivos: um que modela contato e outro que modela fratura.



Fonte: Autoria própria (2022).

Segundo Fernandes et al., (2019), para o caso de pequenas deformações, com deformações plásticas, a taxa da deformação total ($\dot{\epsilon}_{ij}$) é dividida em duas partes, ou seja, taxa da deformação plástica ($\dot{\epsilon}_{ij}^p$) e taxa da deformação elástica ($\dot{\epsilon}_{ij}^e$), que podem ser escritos da seguinte forma, em função de suas taxas (\dot{x}) = $\frac{\partial x}{\partial t}$, ou suas variáveis de tempo:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (3.1)$$

Como a fratura entre as fases é considerada neste trabalho, ela deve ser levada em conta no cálculo da deformação. Nesse caso, a taxa da deformação total ($\dot{\epsilon}_{ij}$) é dividida em taxa da deformação contínua ($\dot{\epsilon}_{ij}$) e taxa da deformação de fratura ($\dot{\epsilon}_{ij}^{cf}$), de acordo com a seguinte equação:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\epsilon}_{ij}^{cf} \quad (3.2)$$

Aplicando a lei de Hooke à deformação total ($\dot{\epsilon}_{ij}$), definida em (3.2), obtém-se a força da membrana (\dot{N}_{ij}^e) que, considerando caso de tensão plana, resulta em:

$$\begin{aligned}\dot{N}_{ij}^e &= \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} [\nu \dot{\varepsilon}_{kk}^e \delta_{ij} + (1-\nu) \dot{\varepsilon}_{ij}^e] + \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} [\nu \dot{\varepsilon}_{kk}^{cf} \delta_{ij} + (1-\nu) \dot{\varepsilon}_{kk}^{cf}] = \\ &= \dot{N}_{ij} + \dot{N}_{ij}^{cf}\end{aligned}\quad (3.3)$$

sendo: \dot{N}_{ij} são as forças associada às deformações contínuas, \dot{N}_{ij}^{cf} são as forças associada à deformação de fratura, $E = E_t$, sendo E o módulo de Young, ν é o coeficiente de Poisson, t é a espessura da placa e o δ_{ij} delta de Kro-necker.

Após aplicar as tensões $\dot{\sigma}_{ij}^e$, ao critério de plasticidade, obtém-se a taxa do tensor de tensão ($\dot{\sigma}_{ij}$) e a força da membrana (\dot{N}_{ij}), ou seja: $\dot{\sigma}_{ij} = C \dot{\varepsilon}_{ij}$, onde C é o tensor constitutivo elasto-plástico. Alternativamente, as forças \dot{N}_{ij} podem ser expressas pela lei de Hooke, na forma:

$$\dot{N}_{ij} = \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} \nu \dot{\varepsilon}_{kk}^e \delta_{ij} + (1-\nu) \dot{\varepsilon}_{ij}^e \quad (3.4)$$

Levando em consideração as equações (3.1), (3.2) e (3.3), a taxa de membrana \dot{N}_{ij} pode ser escrita da seguinte maneira:

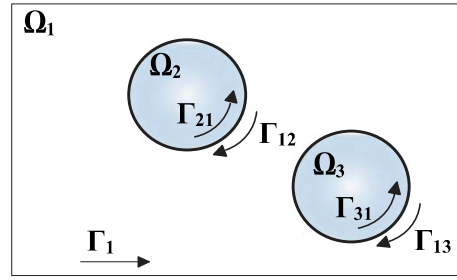
$$\dot{N}_{ij} = \dot{N}_{ij} + \dot{N}_{ij}^p - \dot{N}_{ij}^{cf} = \dot{N}_{ij} + \dot{N}_{ij}^0 \quad (3.5)$$

Observe que a força inelástica \dot{N}_{ij}^0 tem uma parcela definida pela força plástica e outra dada pelo fenômeno de fratura ou contato, que é modelado nos elementos finitos sobre as interfaces, ou seja:

$$\dot{N}_{ij}^0 = \dot{N}_{ij}^p - \dot{N}_{ij}^{cf} \quad (3.6)$$

3.1.2 Equação integral de deslocamento do MEC para um ponto interno do EVR

Com a finalidade de utilizar o Método dos Elemento de Contorno, primeiro é necessário obter a equação integral de deslocamento (u_i) para um ponto interno do EVR. A partir desta equação, outras equações necessárias para resolver o problema podem ser obtidas. Para tal, seja a Fig. 3.2 que representa um EVR composto por três sub-regiões, sendo que, cada sub-região pode ser definida por diferentes materiais. Sendo assim, o domínio da placa Ω é a soma do domínio da matriz Ω_1 com as inclusões Ω_2 e Ω_3 .

FIGURA 3.2 – EVR com Sub-regiões.

Fonte: Autoria própria (2022).

Através do teorema de Betti, a equação relacionada ao problema bidimensional é deduzida escrevendo integrais sobre todo o domínio Ω da placa, em relação apenas a deformação fundamental ε_{kij}^* da sub-região onde o ponto de colocação está posicionado. Tendo em conta a Fig. 3.2, onde tem-se um EVR com três sub-domínios de materiais diferentes, sendo $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3$, dessa forma, pode-se escrever a seguinte equação:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega = \int_{\Omega_1} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega_2 + \int_{\Omega_3} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega_3 \quad (i, j, k=1,2) \quad (3.7)$$

onde o subscrito k é a direção da carga fundamental e \bar{N}_{ij} é definido na Eq. (3.5), e a solução fundamental ε_{kij}^* é em função de \bar{E} da sub-região onde o ponto de colocação está posicionado.

Considerando-se apenas uma sub-região Ω_s qualquer da Eq. (3.7), sua integral de domínio pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega_s} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega_s = \int_{\Omega_s} \varepsilon_{kij}^* \frac{\bar{E}_s}{(1-\nu_s^2)} [v_s \delta_{ij} \varepsilon_{ll} + (1-\nu_s) \varepsilon_{ij}] d\Omega_s \quad (3.8)$$

A equação (3.8) pode ser multiplicada pela parcela $\frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} \frac{(1-\nu^2)\nu}{\bar{E}\nu}$, visto que, não modifica seu valor. Isso é feito a fim de escrever o integrando em razão das propriedades, \bar{E} e ν , que são valores relacionados à sub-região onde o ponto de colocação está posicionado. Considerando as relações $\bar{E}_s = \frac{\bar{E}_s}{(1-\nu_s^2)}$ e atentando que $\varepsilon_{kll}^* = \varepsilon_{kij}^* \delta_{ij}$ e $\varepsilon_{ll} = \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$, a Eq. (3.8) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega_s} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega_s = \frac{\bar{E}_s \nu_s}{\bar{E} \nu} \int_{\Omega_s} \varepsilon_{ij} \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} \left[v \varepsilon_{kll}^* \delta_{ij} + \left(\frac{\nu}{\nu_s} - \nu \right) \varepsilon_{kij}^* \right] d\Omega_s \quad (3.9)$$

A lei de Hooke Eq. (2.2) pode ser aplicada na Eq. (3.9) a qual resulta em:

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega_S = \frac{\bar{E}_S \nu_S}{\bar{E} \nu} \left[\int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega_S + \bar{E} \left(\frac{\nu}{\nu_S} - 1 \right) \int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega_S \right] \quad (3.10)$$

Percebe-se que quando o ponto de colocação pertence à sub-região Ω_S onde ocorre a integração, $\bar{E}_S = \bar{E}$ e $\nu_S = \nu$, logo a Eq. (3.10) será expressa como o Teorema de Betti escrito para o problema da placa, que não é dividido em sub-regiões, isto é:

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega_S = \int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega_S \quad (3.11)$$

Levando em consideração a Eq. (3.5), para o caso geral em que existem N_S sub-regiões, a Eq. (3.10) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* (N_{ij} + N_{ij}^0) d\Omega_S &= \sum_{S=1}^{N_S} \frac{\bar{E}_S \nu_S}{\bar{E} \nu} \left[\int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega_S \right] + \\ &+ \sum_{S=1}^{N_S} \bar{E}_S \left(1 - \frac{\nu_S}{\nu} \right) \left[\int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega_S \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Com o objetivo de obter a expressão de deslocamento u_k para um ponto de domínio na placa, a Eq. (3.12) será integrada por partes, tornando-se, as integrais de domínio em integrais com variáveis no contorno, interface e domínio, (para mais detalhes ver CROZARIOL (2017)). Dessa maneira, obtém a seguinte expressão, onde N_{inc} inclusões e N_{vazios} vazios são definidos na microestrutura constituída por N_S sub-regiões:

$$\begin{aligned} u_k(q) &= \int_{\Gamma_1} (u_{k1}^*(q, P) \dot{p}_1(P) + u_{k2}^*(q, P) \dot{p}_2(P)) d\Gamma + \\ &- \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E} \nu} \int_{\Gamma_1} (\dot{u}_1(P) p_{k1}^*(q, P) + \dot{u}_2(P) p_{k2}^*(q, P)) d\Gamma + \\ &- \sum_{j=1}^{N_{vazios}} \frac{\bar{E}_j \nu_j}{\bar{E} \nu} \int_{\Gamma_{1j}} (\dot{u}_1(P) p_{k1}^*(q, P) + \dot{u}_2(P) p_{k2}^*(q, P)) d\Gamma_{1j} + \\ &- \sum_{j=1}^{N_{inc}} \frac{(\bar{E}_j \nu_j - \bar{E}_1 \nu_1)}{\bar{E} \nu} \int_{\Gamma_{j1}} (\dot{u}_1(P) p_{k1}^*(q, P) + \dot{u}_2(P) p_{k2}^*(q, P)) d\Gamma_{j1} + \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{E}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \int_{\Gamma_1} (\dot{u}_1(P) \varepsilon_{k1}^*(q, P) + \dot{u}_2(P) \varepsilon_{k2}^*(q, P)) d\Gamma + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \bar{E}_j \left(1 - \frac{\nu_j}{\nu}\right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \right\} \int_{\Gamma_{j1}} (\dot{u}_1(P) \varepsilon_{k1}^*(q, P) + \dot{u}_2(P) \varepsilon_{k2}^*(q, P)) d\Gamma_{j1} + \\
& + \sum_{S=1}^{N_S} \bar{E}_S \left(1 - \frac{\nu_S}{\nu}\right) \int_{\Omega_S} \dot{u}_i(p) \varepsilon_{kij,j}^*(q, p) d\Omega_S + \sum_{S=1}^{N_S} \int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^*(q, P) \dot{N}_{ij}^0(p) d\Omega(p)
\end{aligned}$$

sendo u_1, u_2 deslocamentos no plano da placa e p_1, p_2 as forças no plano da placa; \bar{E} e ν referem-se à sub-região onde o ponto de colocação está posicionado, e N_{ij}^0 são os esforços iniciais, que nesse trabalho são as forças associadas aos fenômenos dissipativos.

3.1.3 Equação integral do MEC para deslocamento de pontos no contorno ou interface do EVR

Na formulação numérica através do MEC, podem ocorrer problemas de singularidade (indeterminações do tipo $\ln(r)$, $1/r$ e $1/r^2$) quando o ponto de colocação q pertencer ao elemento a ser integrado, pois quando q e p coincidem, o raio é zero, ou seja, $r(Q, P) = 0$. Portanto, um processo de cálculo algébrico é necessário para lidar com essa singularidade que aparece nas expressões fundamentais e obter como resultado o valor ou expressão designada como termo livre. Também, deve-se lembrar que ao integrar o contorno ou elemento de interface ao qual pertence o ponto Q , devido à singularidade, a integração é realizada analiticamente.

Na análise da microescala diferentes termos livres podem ser definidos, em comparação com a macroescala. Dessa forma, na microescala além da possibilidade de o ponto de colocação pertencer ao elemento a ser integrado no contorno externo do EVR, existem elementos nas interfaces entre as sub-regiões. Portanto, o ponto de colocação pode estar no contorno externo do EVR, entre a matriz e as inclusões ou entre a matriz e vazios, existindo diferentes termos livres para cada caso. A obtenção desses termos livres é descrita em detalhes em CROZARIOL (2017).

A equação integral de deslocamento para pontos de colocação coincidentes com o contorno externo ou localizados sobre a interface, resulta igual àquela de pontos internos do EVR, apenas acrescentando os termos livres C_{k1} e C_{k2} , ou seja:

$$\begin{aligned}
C_{k1} u_1(Q) + C_{k2} u_2(Q) &= \int_{\Gamma_1} (u_{k1}^*(q, P) \dot{p}_1(P) + u_{k2}^*(q, P) \dot{p}_2(P)) d\Gamma + \\
& - \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E} \nu} \int_{\Gamma_1} (\dot{u}_1(P) p_{k1}^*(q, P) + \dot{u}_2(P) p_{k2}^*(q, P)) d\Gamma +
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^{N_{vazios}} \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} \int_{\Gamma_{1j}} (\dot{u}_1(P) p_{k1}^*(q, P) + \dot{u}_2(P) p_{k2}^*(q, P)) d\Gamma_{1j} + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{inc}} \frac{(\bar{E}_j v_j - \bar{E}_1 v_1)}{\bar{E} v} \int_{\Gamma_{j1}} (\dot{u}_1(P) p_{k1}^*(q, P) + \dot{u}_2(P) p_{k2}^*(q, P)) d\Gamma_{j1} + \\
& - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \int_{\Gamma_1} (\dot{u}_1(P) \varepsilon_{k1}^*(q, P) + \dot{u}_2(P) \varepsilon_{k2}^*(q, P)) d\Gamma + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \bar{E}_j \left(1 - \frac{v_j}{v}\right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \right\} \int_{\Gamma_{j1}} (\dot{u}_1(P) \varepsilon_{k1}^*(q, P) + \dot{u}_2(P) \varepsilon_{k2}^*(q, P)) d\Gamma_{j1} + \\
& + \sum_{S=1}^{N_S} \bar{E}_S \left(1 - \frac{v_S}{v}\right) \int_{\Omega_S} \dot{u}_i(p) \varepsilon_{kij,j}^*(q, p) d\Omega_S + \sum_{S=1}^{N_S} \int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^*(q, P) \dot{N}_{ij}^0(p) d\Omega(p)
\end{aligned}$$

na qual os termos livres são dados pelo vetor $\{C_{ki}^T\} = \{C_{k1} \quad C_{k2}\}$, onde a dedução detalhada pode ser vista em CROZARIOL (2017) e resultam em:

- Ponto sobre o contorno externo não coincidente com o canto:

$$C_{11} = C_{22} = \frac{1}{2} \quad (3.15)$$

$$C_{12} = C_{21} = 0 \quad (3.16)$$

- Para ponto de colocação localizado no canto de uma interface entre a matriz e uma inclusão:

$$\begin{aligned}
C_{11} = \frac{\beta}{2\pi} + \left(\frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} + \frac{\bar{E}_1}{4\bar{G}} \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \left(\frac{2 - 3v'}{1 - v'}\right) \right) \left(1 - \frac{\beta}{2\pi}\right) + \\
\left(\frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} - 1 + \frac{\bar{E}_1 (1 - v')}{2\bar{G}} \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \right) \left(\frac{\cos 2\theta_1 \sin 2\beta + \sin 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1 - v')} \right)
\end{aligned} \quad (3.17)$$

$$C_{12} = C_{21} = \left(\frac{1}{8\pi(1 - v')} \left(1 - \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v}\right) - \frac{\bar{E}_1}{16\pi\bar{G}} \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \right) * \quad (3.18)$$

$$* (-\sin 2\theta_1 \sin 2\beta + \cos 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta))$$

$$\begin{aligned}
C_{22} = \frac{\beta}{2\pi} + \left(\frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} + \frac{\bar{E}_1}{4\bar{G}} \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \left(\frac{2 - 3v'}{1 - v'}\right) \right) \left(1 - \frac{\beta}{2\pi}\right) + \\
- \left(\frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} - 1 + \frac{\bar{E}_1 (1 - v')}{2\bar{G}} \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \right) \left(\frac{\cos 2\theta_1 \sin 2\beta + \sin 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1 - v')} \right)
\end{aligned} \quad (3.19)$$

- Para ponto de colocação localizado em uma interface entre matriz e inclusão não coincidente com canto (basta adotar $\beta = \pi$ nas Eqs. (3.18) e (3.19)):

$$C \begin{cases} C_{1i} = \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E} \nu} \right) + \frac{\bar{E}_1}{8\bar{G}} \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \left(\frac{2 - 3\nu'}{1 - \nu'} \right) \quad 0 \right\}^T \\ C_{2i} = \left\{ 0 \quad \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E} \nu} \right) + \frac{\bar{E}_1}{8\bar{G}} \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \left(\frac{2 - 3\nu'}{1 - \nu'} \right) \right\}^T \end{cases} \quad (3.20)$$

- Para ponto de colocação localizado no canto de uma interface entre a matriz e um vazio:

$$C_{11} = 1 - \frac{\beta}{2\pi} + \left(\frac{\cos 2\theta_1 \sin 2\beta + \sin 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1 - \nu')} \right) \quad (3.21)$$

$$C_{12} = C_{21} = \left(\frac{1}{8\pi(1 - \nu')} \right) (-\sin 2\theta_1 \sin 2\beta + \cos 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)) \quad (3.22)$$

$$C_{22} = 1 - \frac{\beta}{2\pi} - \left(\frac{\cos 2\theta_1 \sin 2\beta + \sin 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1 - \nu')} \right) \quad (3.23)$$

De forma semelhante à macroescala, nós duplos são utilizados para o tratamento de cantos no contorno externo. Neste caso, não há necessidade de definir um termo livre para o ponto de colocação que coincide com o canto, já que recai no caso de pontos sobre o contorno sem angulosidade. Entretanto, quando se faz a modelagem do fenômeno de descolagem de fase, o campo de deslocamento nas interfaces entre a matriz e as inclusões não é mais contínuo, ou seja, diferentes deslocamentos podem ser associados aos nós na interface, por esse motivo é necessário adotar nós duplos nas interfaces para resolver o problema. Nesse caso os nós duplos tem mesma coordenada, mas um pertence à matriz e outro pertence à inclusão. Os termos livres definidos em (3.20) a (3.23) são referentes ao ponto de colocação pertencente à inclusão. No caso em que ele pertencer à matriz, seus valores resultam em (ver essa dedução detalhada em SILVA (2021)):

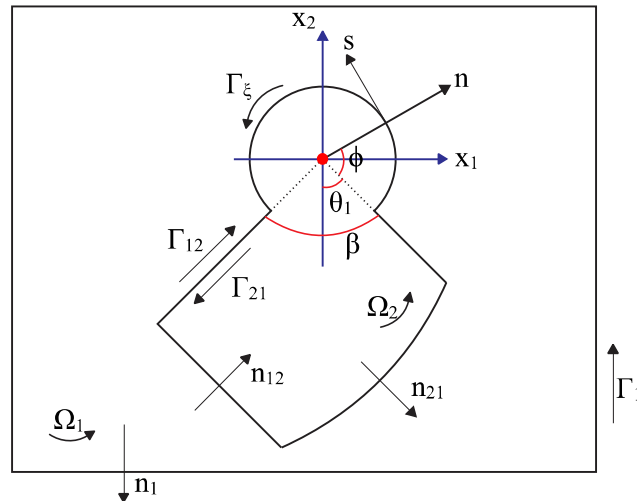
$$C_{11} = \frac{2\pi - \beta}{2\pi} + \frac{\beta}{2\pi} \left(\frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E} \nu} + \frac{\bar{E}_1 (2 - 3\nu')}{4\bar{G}(1 - \nu')} \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \right) + \left(\frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E} \nu} - 1 + \frac{\bar{E}_1 (1 - \nu')}{2\bar{G}} \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \right) \left(\frac{\cos 2\theta_1 \sin 2\beta + \sin 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1 - \nu')} \right) \quad (3.24)$$

$$C_{22} = \frac{2\pi - \beta}{2\pi} + \frac{\beta}{2\pi} \left(\frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E} \nu} + \frac{\bar{E}_1 (2 - 3\nu')}{4\bar{G}(1 - \nu')} \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \right) \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E} \nu} - 1 + \frac{\bar{E}_1 (1 - \nu')}{2\bar{G}} \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \right) \left(\frac{\cos 2\theta_1 \sin 2\beta + \sin 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1 - \nu')} \right) \\
C_{12} = C_{21} & = \left[\frac{1}{8\pi(1 - \nu')} \left(1 - \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E} \nu} \right) - \frac{\bar{E}_1}{16\pi\bar{G}} \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \right] * \\
& * [\sin 2\theta_1 \sin 2\beta - \cos 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)]
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Para a definição dos ângulos " β " e " θ_1 " que aparecem nas expressões dos termos livres, ver a Fig. 3.3, que mostra a inserção do contorno circular de raio infinitesimal, necessário para o tratamento da singularidade, no caso em que o ponto de colocação "Q" se encontra em um canto sobre a interface entre a matriz (domínio " Ω_1 ") e a inclusão (domínio " Ω_2 "). O ângulo " β " é aquele formado no canto onde está o ponto Q, já o ângulo " θ_1 " é aquele entre a interface e o eixo " x_2 ". Além disso, no caso da Fig. 5.3 adota-se o ponto Q pertencente à inclusão, e por isso, o contorno circular é definido de tal forma que o ponto Q seja interno à inclusão. Para posições diferentes do ponto Q, a definição desses ângulos é análoga. As direções normais " n_1 ", " n_{12} " e " n_{21} " na figura referem-se, respectivamente, ao contorno externo " Γ_1 ", interface " Γ_{12} " e interface " Γ_{21} ". Além disso, no contorno circular " Γ_ξ " as direções normal e tangencial são definidas como "n" e "s". Os termos livres são obtidos após fazer o limite do raio infinitesimal tender a zero (ver detalhes em OHLAND (2017) e CROZARIOL (2017)).

FIGURA 3.3 – Interface matriz-inclusão.



Fonte: Autoria própria (2022).

3.1.4 Equação integral do MEC da derivada do deslocamento para pontos internos do EVR

Para resolver o problema de equilíbrio do EVR, a equação da derivada de deslocamento é necessária, uma vez que, é a partir dela que se obtém a equação algébrica das forças elásticas. Derivando a Eq.(3.13) para qualquer direção m , a seguinte expressão é obtida:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_k(q)}{\partial m} = & \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial u_{k1}^*(q, P)}{\partial m} \dot{p}_1(P) + \frac{\partial u_{k2}^*(q, P)}{\partial m} \dot{p}_2(P) \right) d\Gamma + \\
& - \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} \int_{\Gamma_1} \left(\dot{u}_1(P) \frac{\partial p_{k1}^*(q, P)}{\partial m} + \dot{u}_2(P) \frac{\partial p_{k2}^*(q, P)}{\partial m} \right) d\Gamma + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{\text{vazios}}} \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} \int_{\Gamma_{1j}} \left(\dot{u}_1(P) \frac{\partial p_{k1}^*(q, P)}{\partial m} + \dot{u}_2(P) \frac{\partial p_{k2}^*(q, P)}{\partial m} \right) d\Gamma_{1j} + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{\text{inclusões}}} \left(\frac{\bar{E}_j v_j}{\bar{E} v} - \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} \right) \int_{\Gamma_{j1}} \left(\dot{u}_1(P) \frac{\partial p_{k1}^*(q, P)}{\partial m} + \dot{u}_2(P) \frac{\partial p_{k2}^*(q, P)}{\partial m} \right) d\Gamma_{j1} + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{\text{inclusões}}} \left\{ \bar{E}_j \left(1 - \frac{v_j}{v} \right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) \right\} * \\
& * \int_{\Gamma_{j1}} \left(\dot{u}_1(P) \frac{\partial \varepsilon_{k1}^*(q, P)}{\partial m} + \dot{u}_2(P) \frac{\partial \varepsilon_{k2}^*(q, P)}{\partial m} \right) d\Gamma_{j1} + \\
& + \sum_{s=1}^{N_S} \bar{E}_s \left(1 - \frac{v_s}{v} \right) \int_{\Omega_s} \dot{u}_i(p) \frac{\partial \varepsilon_{kij}^*(q, p)}{\partial m_s} + \\
& + \sum_{s=1}^{N_S} \frac{\partial}{\partial m} \int_{\Omega_s} \varepsilon_{kij}^*(q, P) \dot{N}_{ij}^0(p) d\Omega(p)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

As expressões fundamentais da Eq. (3.27) está no Apêndice D.

É importante ressaltar que não haverá problema de singularidade na integral de domínio envolvendo deslocamento, pois quando o ponto de colocação pertencer ao domínio de integração, tem-se que $v = v_s$, o que o anula. O mesmo não é verdade para integrais de domínio envolvendo forças normais plásticas. Para lidar com essa singularidade, é retirado do domínio Ω um domínio circular Ω_c onde a singularidade está localizada, com um pequeno raio ξ , com origem no ponto q , para obter o domínio, que é dado por: $\Omega_\varepsilon = \Omega - \Omega_c$, (para mais detalhes ver CROZARIOL (2017)). Após o tratamento dessa singularidade, a integral de domínio que aparece na Eq. (3.27) resulta em:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial m} \int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^*(q, P) N_{ij}^0(p) d\Omega(p) &= \\
= \int_{\Omega} N_{ij}^0(p) \varepsilon_{kijm}^*(q, p) d\Omega + \frac{1}{16\bar{G}(1-\nu')} [(6-8\nu') N_{km}^0(q) - N_{mm}^0(q) \delta_{km}] &
\end{aligned} \tag{3.28}$$

3.2 Solução numérica do EVR através do MEC

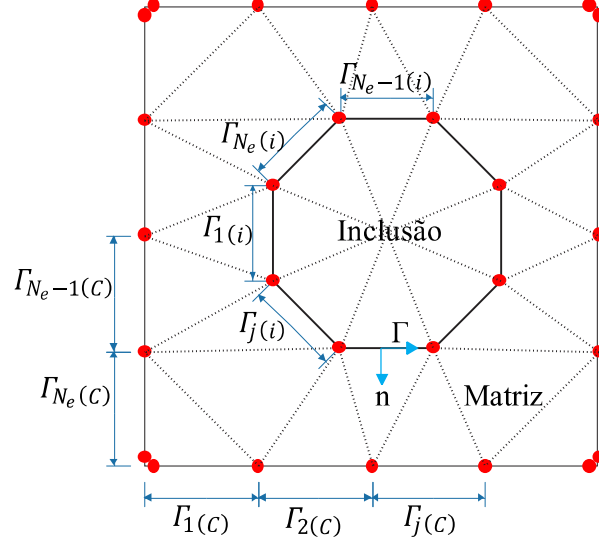
Este capítulo apresenta como transformar as equações integrais do EVR em equações algébricas, por meio da aplicação do Método dos Elementos de Contorno. Para isso, além de discretizar o contorno externo do EVR, também é preciso realizar a discretização das interfaces em elementos e do domínio em células, pois as incógnitas do problema também são definidas nesses locais. Assim sendo, as incógnitas do problema são os deslocamentos nos nós de interface e internos, as forças nodais no contorno e as forças plásticas nos nós internos. Porém, no caso de todas as fases do EVR terem mesmo coeficiente de Poisson, não tem deslocamentos incógnitos nos nós internos de células. Portanto, ao inserir funções interpoladoras nos elementos e células para aproximar as variáveis do problema, as equações integrais são transformadas em equações algébricas. Esse processo de transformar as equações integrais em algébricas é feito de maneira semelhante ao visto na macroescala (que utiliza uma aproximação quadrática das variáveis nos elementos) e, portanto, será mostrado aqui de forma mais resumida.

Levando em consideração a análise em multiescala, a solução do EVR é alcançada pela aplicação da deformação constante obtida na macroescala em todos os nós do contorno externo do EVR. Na microestrutura heterogênea, por conter inclusões e vazios, o campo de deformação não é constante e isso gera o chamado campo de flutuação de deslocamento e vinculado a esse campo de flutuação de deslocamento tem o campo de flutuação da deformação. No entanto, o valor final da flutuação de deslocamento só pode ser conhecido após a resolução do problema de equilíbrio EVR. Além disso, na microestrutura, o campo de deslocamento é definido como a soma da parte linear (calculada a partir da deformação constante da macroescala) mais a parte chamada flutuação de deslocamento.

3.2.1 Aproximação das variáveis no contorno e domínio do EVR

Ao discretizar o contorno em $N_{e(c)}$ elementos retos, interface em $N_{e(i)}$ elementos retos e o domínio em células triangulares, conforme mostrado na Fig. 3.4, as integrais no contorno, interfaces e domínio podem ser aproximadas. A função utilizada para a aproximação das variáveis nos elementos é linear, o que requer dois nós por elemento. Observe que os nós duplos são definidos nos cantos do contorno externo, em virtude da descontinuidade do valor da força de superfície, e não há necessidade de utilizar os nós duplos na interface, pois apenas o deslocamento é incógnito.

FIGURA 3.4 – Discretização do contorno/interface e domínio.



Fonte: Autoria própria (2022).

A aproximação da variável no elemento é realizada para expressar o valor da variável u_i ou p_i em qualquer ponto P do elemento j em função de seu valor nodal e funções de interpolação, ou seja:

$$\{u(P)\} = \phi' U = \begin{Bmatrix} u_1^P \\ u_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1'(P) & 0 & \phi_2'(P) & 0 \\ 0 & \phi_1'(P) & 0 & \phi_2'(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\{p(P)\} = \phi' P = \begin{Bmatrix} p_1^P \\ p_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1'(P) & 0 & \phi_2'(P) & 0 \\ 0 & \phi_1'(P) & 0 & \phi_2'(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

sendo o sobrescrito 1 o nó inicial do elemento, o sobrescrito 2 o nó final e os subscritos são as direções das variáveis. É importante notar que a função e a matriz de interpolação são escritas como ϕ_i' e ϕ' , respectivamente para distingui-las daquelas no capítulo 0 referente à macroescala. As funções interpoladoras lineares são dadas pelas seguintes equações:

$$\phi_1'(P) = 0,5(1 - \xi) \quad (3.31)$$

$$\phi_2'(P) = 0,5(1 + \xi) \quad (3.32)$$

3.2.2 Aproximação das variáveis no domínio

Existem duas integrais de domínio a serem resolvidas na Eq. (3.13), uma envolvendo deslocamento e a outra envolvendo esforços iniciais. Para resolver esses problemas, o domínio será discretizado por células triangulares, onde os deslocamentos serão linearmente aproximados, e os esforços iniciais serão considerados constantes.

3.2.2.1 Aproximação da integral de domínio englobando deslocamento

Para a integral de domínio onde tem-se deslocamentos definidos no integrando, optamos por usar uma função de interpolação linear para permitir diferentes deslocamentos em diferentes nós da célula. Observe que no caso de se ter o mesmo coeficiente de Poisson nas fases do EVR, essa integral não precisa ser levada em conta. Portanto, as funções de aproximação usadas para aproximar o valor de deslocamento em um dado ponto "P" da célula são as mesmas definidas no item 2.2.3 deste trabalho, que foram utilizadas para aproximar os momentos iniciais nas células do macrocontínuo. Entretanto, devido às diferentes dimensões dos vetores de interpolação em cada caso, a matriz interpoladora $[\Psi']$ é diferente da Eq. (2.41), e os deslocamentos no ponto "P" é calculado pela seguinte equação:

$$\{u^P\} = \begin{Bmatrix} u_1^P \\ u_2^P \end{Bmatrix} = [\Psi'] \{u^{(N)}\} \quad (3.33)$$

sendo que o vetor $\{u^{(N)}\}$, refere-se aos deslocamentos dos nós nodais da célula; os subscritos referem-se à direção dos deslocamentos, e a matriz interpoladora $[\Psi']$ é dado por:

$$[\Psi'] = \begin{bmatrix} \xi_1^P & 0 & \xi_2^P & 0 & \xi_3^P & 0 \\ 0 & \xi_1^P & 0 & \xi_2^P & 0 & \xi_3^P \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

onde as funções de aproximação estão definidas na Eq. (2.41).

Dessa forma, segue-se o mesmo raciocínio aplicada na placa (macroescala): transforma-se as integrais de domínio em integrais de contorno para facilitar o cálculo e aplica-se a técnica de sub-elementos, a fim de, melhorar a precisão dos resultados. Portanto, o coeficiente relativo ao nó α da célula é calculado numericamente ao longo dos três lados da célula, conforme mostrado na seguinte equação (ver mais detalhes em CROZARIOL (2017)):

$$\bar{e}_{ki}^{cel(\alpha)}(q) = \sum_{l=1}^3 \sum_{ks=1}^{Nsub} \sum_{IG=1}^{Ng} \frac{v' a_{ks}}{4\pi \bar{G} (1 - v')} \left(\frac{\partial r}{\partial m} (\delta_{ik} - 4r_{,i} r_{,k}) + r_{,1} m_k + r_{,k} m_i \right) \quad (3.35)$$

$$\left[-\xi_{\alpha}^q + \xi_{\alpha}^R \ln R\right] \frac{1}{R^2} \frac{\partial r}{\partial n} W_{IG}$$

3.2.2.2 Relação entre deformação e deslocamentos na célula

Os deslocamentos variam linearmente nas células, sendo as deformações nas células obtidas a partir dos deslocamentos, de forma análoga ao que se faz no Método dos Elementos Finitos. Portanto, as deformações são constantes nas células, o que leva a esforços plásticos (ou esforços iniciais) também com variação constante na célula. Portanto, apenas um nó é necessário na célula, e o nó é definido em seu centro.

É importante definir uma relação entre deslocamento e deformação na célula, porque o problema de equilíbrio do EVR é resolvido em termos de deslocamentos. Desse modo, de acordo com a correção de deslocamentos, deve-se determinar a correção de deformações para obter as tensões em todos os nós de células e verificar a equação do equilíbrio do EVR. Dessa forma, a relação entre deformação $\{\varepsilon\}$ e deslocamentos $\{U\}$ em uma célula qualquer é dada por (ver mais detalhes em CROZARIOL (2017)):

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \gamma_{12} \\ \varepsilon_{22} \end{Bmatrix} = [B_{cel}]\{U\} \quad (3.36)$$

onde a matriz $[B_{cel}]$ é dada por:

$$[B_{cel}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

onde $b_1, b_2, b_3, a_1, a_2, a_3$ estão definidos em (2.43) e (2.44), respectivamente.

3.2.2.3 Integral de domínio envolvendo esforços plásticos

A fim de analisar a integral de domínio que aparece na Eq. (3.13) do deslocamento u_k , englobando os esforços plásticos, as sub-regiões são discretizadas por células triangulares e uma função de interpolação constante é usada para aproximar os esforços plásticos, logo essa função assume valor de 1. Portanto, a célula triangular necessita apenas de um nó, que será definido em seu centro. Aqui, a integral de domínio também é transformada em integral ao longo do contorno da célula e a técnica de sub-elementos também é utilizada (similar ao item 3.2.2.1). Nesse caso, a integral de domínio é calculada de forma aproximada como:

$$\bar{e}''_{kijm}{}^{cel}(q) = \frac{1}{8\pi\bar{G}(1-\nu')} \sum_{s=1}^3 \sum_{ks=1}^{Nsub} \sum_{IG=1}^{Ng} \left\{ \int_{\Gamma_s} \frac{f_{kijm}(\theta)}{R} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_s \right\} \quad (k, i, j, m=1, 2) \quad (3.38)$$

3.2.3 Equações algébricas e sistema de equações do MEC para o EVR

Com a finalidade de montar o sistema de equações a ser resolvido na microestrutura (EVR), primeiramente, de acordo com o mesmo princípio utilizado na placa (macroescala) e também pode ser visto em trabalhos como o de CROZARIOL (2017), as equações integrais são convertidas em equações algébricas. Portanto, realizando-se a discretização do contorno e interface em N_e elementos e do domínio em N_{cel} células e substituindo-se as incógnitas por seus valores aproximados, a seguinte equação pode ser obtida:

$$\begin{aligned} C_{k1}u_1(Q) + C_{k2}u_2(Q) &= \sum_{j=1}^{Ne} g_{ki}^{N(j)}(Q)p_{i(j)}^N + \\ &- \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E}} \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{Ne} h_{ki}^{N(j)}(Q)u_{i(j)}^N - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \sum_{j=1}^{Ne} \bar{h}_{ki}^{N(j)}(Q)u_{i(j)}^N + \\ &- \sum_{m=1}^{Nvaz} \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E}} \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{Ne} h_{ki}^{N(j)}(Q)u_{i(j)}^N - \sum_{m=1}^{Ninc} \left[\frac{\bar{E}_m \nu_m}{\bar{E}} \frac{1}{\nu} - \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E}} \right] \sum_{j=1}^{Ne} h_{ki}^{N(j)}(Q)u_{i(j)}^N + \\ &- \sum_{m=1}^{Ninc} \left\{ \bar{E}_m \left(1 - \frac{\nu_m}{\nu}\right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \right\} \sum_{j=1}^{Ne} \bar{h}_{ki}^{N(j)}(Q)u_{i(j)}^N + \\ &+ \sum_{s=1}^{Ns} \bar{E}_s \left(1 - \frac{\nu_s}{\nu}\right) \sum_{cel=1}^{Ncel} e_{ki}^{cel}(q) u_{i(cel)}^N + \sum_{S=1}^{Ns} \sum_{cel=1}^{Ncel} e''_{kij}{}^{cel}(q) N_{ij(cel)}^{0(N)} \end{aligned} \quad (3.39)$$

De maneira análoga à macroescala, calcula-se os vetores $\{h^j\}(Q)$, $\{\bar{h}^j\}(Q)$ e $\{g^j\}(Q)$ de todos os elementos, e ainda, os vetores referentes às células do EVR: $\{e^{cel}\}(q)$ e $\{e''^{cel}\}(q)$. Então, agrupa-se os coeficientes relacionados a um mesmo valor nodal, para que a Eq. (3.39) possa ser escrita de forma matricial. Além disso, o termo livre deve ser adicionado à coluna correspondente do vetor $\{H\}$ relacionado ao ponto de colocação. Assim, obtém-se a equação algébrica referente à equação do deslocamento no ponto Q:

$$\{H_\mu\}(Q)\{U_\mu\} = \{G_\mu\}(Q)\{P_\mu\} + \{E_\mu\}(q)\{N^0\} \quad (3.40)$$

onde: $\{U_\mu\}$ é o vetor dos valores nodais dos deslocamentos nos nós sobre o contorno, internos e interfaces; $\{P_\mu\}$ é o vetor dos valores nodais das forças de superfície no contorno externo e $\{N^0\}$ é o vetor dos esforços iniciais nos nós de células.

Considerando o contorno externo do EVR, os valores nodais são as forças de superfície (p_1 e p_2), e duas componentes de deslocamentos (u_1 e u_2), onde uma componente em cada direção deve ser dada como uma condição de contorno. Entretanto, no caso específico deste trabalho, os deslocamentos são aplicados a todos os nós do contorno, assim as forças obtidas são reações a esses deslocamentos aplicados. Já no domínio, os valores definidos nos nós são três componentes de forças iniciais (N_{11}^0 , N_{12}^0 e N_{22}^0) e duas componentes de deslocamentos (u_1 e u_2). Escrevendo-se duas equações de deslocamentos para cada nó sobre o contorno, interface ou pertencente a uma célula, chega-se a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} [H_\mu]_{CC} & [H_\mu]_{Ci} \\ [H_\mu]_{iC} & [H_\mu]_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_\mu\}_C \\ \{U_\mu\}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_\mu]_{CC} \\ [G_\mu]_{iC} \end{bmatrix} \{P_\mu\}_C + [E_\mu] \{N^0\} \quad (3.41)$$

sendo que o subíndice C está relacionado ao contorno externo, e o subíndice i está associado aos valores do domínio e interface. Os vetores $\{U_\mu\}$, $\{P_\mu\}$ e $\{N^0\}$, são os valores nodais de deslocamento, forças de superfície e esforços iniciais, respectivamente (já definidos na Eq. (3.40)). A matriz $[H_\mu]$ resulta da integração sobre os elementos de contorno e de interface e também sobre as células sendo referente às integrais que têm os deslocamentos no integrando. A matriz $[G_\mu]$ resulta da integração sobre os elementos de contorno, sendo referente às integrais que têm forças de superfície no integrando. E por fim, a matriz $[E_\mu]$ representa os valores integrais das células que têm os esforços iniciais no integrando.

Este trabalho estuda a análise de flexão de placas considerando uma microestrutura heterogênea no contexto da análise em multiescala. Após aplicar a macro-deformação, que é calculada pelo problema de flexão da placa, ao contorno externo do EVR, na forma de deslocamentos lineares nos nós de contorno, deve-se agrupar todas as incógnitas no vetor do lado esquerdo da equação trocando-se as colunas da matriz $[H_\mu]$ e $[G_\mu]$. Dessa forma, a Eq. (3.41) pode ser descrita da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} -[G_\mu]_{CC} & [H_\mu]_{Ci} \\ -[G_\mu]_{iC} & [H_\mu]_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_\mu\}_C \\ \{U_\mu\}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[H_\mu]_{CC} \\ -[H_\mu]_{iC} \end{bmatrix} \{U_\mu\}_C + [E_\mu] \{N^0\} \quad (3.42)$$

O sistema constituído pela Eq. (3.42), pode ser escrito de maneira simplificada, dado por:

$$[A_\mu] \{X_\mu\} = \{B_\mu\} + [E_\mu] \{N^0\} \quad (3.43)$$

onde $[A_\mu] = \begin{bmatrix} -[G_\mu]_{CC} & [H_\mu]_{Ci} \\ -[G_\mu]_{iC} & [H_\mu]_{ii} \end{bmatrix}$, o vetor $\{B_\mu\} = \begin{bmatrix} -[H_\mu]_{CC} \\ -[H_\mu]_{iC} \end{bmatrix} \{U_\mu\}_C$, $\{X_\mu\} = \begin{Bmatrix} \{P_\mu\}_C \\ \{U_\mu\}_i \end{Bmatrix}$ é o vetor das incógnitas que é dado pelas forças de superfície no contorno e dos deslocamentos nas interfaces e nós internos das células.

Multiplicando ambos lados da equação pelo inverso da matriz $[A]^{-1}$ para isolar o vetor $\{X\}$, de forma análoga ao macrocontínuo (ver capítulo 0), obtêm-se as incógnitas:

$$\{X_\mu\} = \{L_\mu\} + [R_\mu]\{N^0\} \quad (3.44)$$

sendo: $\{L_\mu\} = [A_\mu]^{-1}\{B_\mu\}$; $[R_\mu] = [A_\mu]^{-1}[E_\mu]$.

A fim de solucionar o problema de equilíbrio do EVR, a soma das forças nodais em todas as células deve ser zero, isto é, as forças do EVR devem estar em equilíbrio. Para isso, faz-se necessário também escrever as equações algébricas das forças normais elásticas $\{N^e\}$ (de tentativa), que são obtidas após escrever as equações da derivada dos deslocamentos em todos os nós centrais das células e aplicar a lei de Hooke, obtendo-se:

$$\{N^{e(MEC)}\} = -\begin{bmatrix} [H'_\mu]_C & [H'_\mu]_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_\mu\}_C \\ \{U_\mu\}_i \end{Bmatrix} + [G'_\mu]_C \{P'_\mu\}_C + [E'_\mu]\{N^0\} \quad (3.45)$$

Depois de aplicar as condições de contorno no EVR, a Eq. (3.45) pode ser descrita da seguinte maneira:

$$\{N^{e(MEC)}\} = \begin{bmatrix} [G'_\mu]_C & -[H'_\mu]_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P'_\mu\}_C \\ \{U_\mu\}_i \end{Bmatrix} - [H'_\mu]_C \{U_\mu\}_C + [E'_\mu]\{N^0\} \quad (3.46)$$

Ou de maneira simplificada:

$$\{N^{e(MEC)}\} = -[A'_\mu]\{X_\mu\} + \{B'_\mu\} + [E'_\mu]\{N^0\} \quad (3.47)$$

Substituindo o vetor $\{X_\mu\}$ (Eq. (3.44)) na Eq. (3.47), tem-se:

$$\{N^{e(MEC)}\} = \{K_\mu\} + [S_\mu]\{N^0\} \quad (3.48)$$

onde o vetor $\{K_\mu\} = \{B'_\mu\} - [A'_\mu]\{L_\mu\}$ e a matriz $[S_\mu] = [E'_\mu] - [A'_\mu][R_\mu]$.

O procedimento numérico é o seguinte: antes de resolver o problema de equilíbrio do EVR, que será visto no próximo capítulo, o cálculo do vetor das incógnitas elásticas $\{\Delta L_\mu\}$ e dos incrementos de força elástica $\{\Delta K_N\}$ são calculados, sendo que esses não consideram o campo de flutuação de deslocamento que satisfaz a equação de equilíbrio do EVR, nem o campo de forças iniciais. Porém, após resolver o problema de equilíbrio do EVR obtêm-se as forças iniciais nodais e os deslocamentos dos nós de contorno devem ser atualizados, pois deve-se somar aos mesmos o campo de flutuação. Com esses valores, atualiza-se os valores das incógnitas $\{X_\mu\}$ (Eq (3.44)) e a partir das forças nodais no contorno calcula-se o vetor de tensão homogeneizado (ver detalhes no próximo capítulo). Vale ressaltar que para calcular os vetores $\{\Delta L_\mu\}$ e $\{\Delta K_N\}$, as seguintes matrizes, que são constantes, devem ser montadas:

$$[A_\mu]^{-1}; \begin{bmatrix} -[H_\mu]_{BB} \\ -[H_\mu]_{iB} \end{bmatrix}; [A'_\mu]^{-1}; [R_\mu] \text{ e } [H'_\mu]_B. \text{ Assim, essas matrizes são construídas apenas na primeira}$$

iteração do primeiro incremento do problema macrocontínuo.

3.3 Problema de Equilíbrio do EVR

3.3.1 Introdução

Uma microestrutura geralmente é constituída de vários materiais com comportamentos diferentes, ou seja, a microestrutura do material é complexa (matriz, inclusões, vazios, fraturas), portanto, os campos de tensões e deformações não são uniformes na microescala. Para calcular as tensões do ponto do macrocontínuo levando em conta os diferentes comportamentos das fases que caracterizam a microestrutura, é necessário ser realizada uma modelagem multiescala, no qual a microestrutura será representada por EVRs. A transição da microescala para a macroescala será realizada através do princípio da homogeneidade e do conceito de média volumétrica.

3.3.2 Campo de deslocamento do EVR

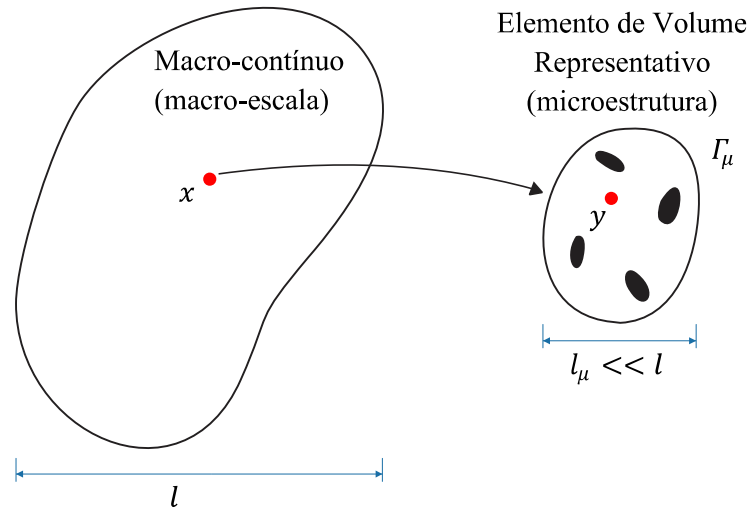
Para realizar a modelagem multiescala, pontos de interesse devem ser definidos no domínio do macrocontínuo, aos quais são associados um EVR (Elemento de Volume Representativo), que representa a microestrutura do material em nível dos grãos. Portanto, assume-se que o EVR é composto por diferentes fases (ou materiais) com módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson característicos, e também apresentam diferentes comportamentos mecânicos, podendo esses serem elásticos ou apresentarem fenômenos dissipativos.

O tensor de deformação constante será aplicado no contorno da microestrutura para calcular a resposta homogeneizada do EVR, que corresponderá ao modelo constitutivo do concreto. O material, por haver vazios e/ou inclusões, é tido como heterogêneo, dessa forma, haverá um campo de flutuação

de deslocamento no EVR, pois a deformação no EVR não será uniforme (constante). Desta maneira, quando um campo de flutuação de deslocamento que satisfaz sua equação de equilíbrio é encontrado, o problema de equilíbrio do EVR é resolvido. Quando o equilíbrio do EVR é resolvido, os campos de tensão, deformação e deslocamento podem ser obtidos e, em seguida, a resposta homogeneizada pode ser calculada. É importante enfatizar que, para resolver o problema de equilíbrio do EVR, é necessário impor condições de contorno à microestrutura em termos de flutuações de deslocamento.

Seja a Fig. 3.5, onde l define o comprimento característico do macrocontínuo e x é qualquer ponto do macrocontínuo. Cada ponto x do macrocontínuo deve ser associado a um EVR que representa a microestrutura do material, que pode ser composto por inclusões e vazios, e y é qualquer ponto do EVR.

FIGURA 3.5 – Ponto do macrocontínuo relacionado com o EVR.



Fonte: Autoria própria (2022).

De acordo com esta definição, a deformação neste ponto x é dada pela média volumétrica da deformação no EVR, isto é:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \varepsilon_\mu(y, t) dV \quad (3.49)$$

Da mesma forma, a tensão em um ponto do macrocontínuo é dada por:

$$\sigma(x, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu(y, t) dV \quad (3.50)$$

sendo que os valores com índice μ referem-se ao EVR, isto é: V_μ é o volume, Ω_μ o seu domínio, σ_μ a tensão, ε_μ a deformação e Γ_μ o contorno.

Portanto, nas equações (3.49) e (3.50), temos tensões e deformações médias, que é o processo de transformar quantidade microscópica em quantidade macroscópica.

No modelo com MEC, a deformação constante será aplicada aos nós de contorno. Assim, como processo de solução, define-se que o campo de deslocamento no EVR é composto por duas partes, sendo: uma que é produzida pela macro-deformação aplicada e a outra dada pela flutuação do deslocamento. Portanto, considerando y , um ponto genérico do EVR e x um ponto genérico do macrocontínuo, o campo de deslocamento u_μ do EVR é dado por:

$$u_\mu(y, t) = u_\mu^\varepsilon(y, t) + \tilde{u}_\mu(y, t) \quad (3.51)$$

onde $u_\mu(y, t)$ é o campo de deslocamento microscópico; $u_\mu^\varepsilon(y, t)$ é resultante da macro-deformação $\varepsilon(x, t)$ imposta de forma constante ao contorno do EVR; $\tilde{u}_\mu(y, t)$ é o campo de flutuação de deslocamento; $u_\mu^\varepsilon(y, t) = \varepsilon(x, t)y$ para os nós de contorno, onde y representa o vetor das coordenadas do ponto do EVR.

De forma análoga temos:

$$\varepsilon_\mu(y, t) = \varepsilon(x, t) + \tilde{\varepsilon}_\mu(y, t) \quad (3.52)$$

sendo ε a deformação imposta ao EVR (obtida a partir do problema da macroestrutura), e $\tilde{\varepsilon}_\mu$ é o campo de flutuações de deformação.

Note que $\varepsilon(x, t)$ é imposta de forma constante apenas nos nós de contorno, pois nos nós de interface e internos, ela é calculada posteriormente a partir das forças elásticas e não será constante, devido à heterogeneidade da micro-estrutura.

3.3.3 Equação de equilíbrio do EVR

O princípio de Hill-Mandel deve ser observado para que haja uma equivalência de energia entre as escalas micro e macro. Portanto, com base nesta condição, é obtida a equação de equilíbrio do EVR, que define que a soma das tensões ou forças nodais em todas as células deve ser zero, ou seja, o EVR encontra-se em um estado de equilíbrio, quando um campo de tensão auto equilibrado é obtido. Dessa forma, o campo de tensões ou forças nodais no EVR é resultante da macro-deformação aplicada na microestrutura e a equação de equilíbrio pode ser escrita da seguinte maneira:

$$R = \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu(y) dV = 0 \quad (3.53)$$

Observe que, de forma análoga ao que ocorre a nível do macrocontínuo, a tensão microscópica pode ser escrita em termos da deformação microscópica, ou seja:

$$\sigma_\mu(y, t) = f_y(\varepsilon_\mu(y, t)) \quad (3.54)$$

onde f_y é a função constitutiva definida por um critério adotado, ou dado pela lei de Hooke, se um comportamento elástico for adotado para a fase.

Após a discretização do domínio do EVR em N_{cel} células é possível escrever a Eq. (3.53) em termos de forças nodais nas células:

$$\{R\} = \sum_{e=1}^{N_{cel}} [B_\mu]_e^T \{\Delta N^e\} A_e = 0 \quad (3.55)$$

Nesse caso, o problema de equilíbrio é satisfeito quando o campo de força está em equilíbrio. Considerando as Eqs. (3.52) e (3.54) é possível definir a Eq. (3.55) do problema de equilíbrio EVR através de flutuações de deslocamento. Nesse caso, para resolver o problema de equilíbrio do EVR, a equação a seguir deve ser satisfeita.

$$\{R\} = \sum_{e=1}^{N_{cel}} [B_\mu]_e^T [C_\mu^{ep}]^{(e)} (\{\Delta \varepsilon\} + [B_\mu]_e \{\Delta \tilde{u}\}) A_e t \cong 0 \quad (3.56)$$

sendo:

- $[C_\mu^{ep}]$ é o tensor constitutivo da célula;
- A_e é a área da célula;
- $\{\Delta \varepsilon\}$ é o vetor do incremento de deformação imposto pelo macrocontínuo;
- t é a espessura;
- $[B_\mu]$ é a matriz que associa deslocamentos com deformações nas células (ver eq. (3.43));
- $\{\Delta \tilde{u}\}$ é o incremento de flutuação dos deslocamentos.

Para obter o vetor de macro-deformação $\{\Delta \varepsilon\}$ em todos os nós de célula, primeiramente calcula $\{\Delta K\}$ definido na Eq. (3.48), que resulta da imposição dos deslocamentos lineares no contorno, obtidos a partir da deformação constante do macrocontínuo, que é imposta aos nós do contorno. Então, usando o inverso da lei de Hooke, obtemos $\{\Delta \varepsilon\}$ nos nós internos ou sobre as interfaces. Observe que a

macro-deformação $\{\Delta\varepsilon\}$ aplicada é constante apenas para os pontos de contorno, o que é diferente da formulação utilizando o MEF, que é constante em todos os nós do EVR. Por isso, no caso de usar o MEC para modelar o EVR, a deformação aplicada pelo macrocontínuo irá gerar automaticamente um campo de flutuação dentro do EVR. Note que na Eq. (3.56), a flutuação de deslocamento dos nós do EVR é uma variável desconhecida do problema. Portanto, a solução para o problema de equilíbrio EVR é encontrar o incremento de flutuações $\{\Delta\tilde{u}\}$ que satisfaz a Eq. (3.56).

3.3.4 Matriz tangente consistente do EVR

Considerando o trabalho de FERNANDES et. al. (2019), se a equação de equilíbrio não for satisfeita, após a aplicação de um campo de deslocamento linear ao contorno do EVR, é necessário aplicar o método de *Newton-Raphson*, no qual deve ser realizado o processo iterativo e encontrado o campo de flutuação de deslocamento da seguinte maneira:

$$\tilde{u}_\mu^{i_{EVR}+1} = \tilde{u}_\mu^{i_{EVR}} + \delta\tilde{u}_\mu^{i_{EVR}+1} \quad (3.57)$$

sendo, $\delta\tilde{u}_\mu^{i_{EVR}+1}$ as correções das flutuações impostas à interação $i_{EVR} + 1$, que necessita ser calculada pelo operador tangente através da seguinte equação:

$$\{F^{i_{EVR}}\} + [K^{i_{EVR}}] \{\delta\tilde{u}_\mu^{-i_{EVR}+1}\} = 0 \quad (3.58)$$

sendo $\{F\}$ o vetor de forças internas; $[K]$ o operador tangente consistente e $i \geq 0$.

De acordo com CROZARIOL e FERNANDES (2020), a matriz tangente do problema é obtida pela linearização da Eq. (3.56), e a correção do estado de flutuação do deslocamento é dada por:

$$\{\delta\Delta\tilde{u}\}_n^{i_{EVR}} = \left[-\frac{\partial\{R_F\}_n^{i_{EVR}-1}}{\partial\{\Delta\tilde{u}\}_n^{i_{EVR}-1}} \right]^{-1} \{R_F\}_n^{i_{EVR}-1} \quad (3.59)$$

sendo $\left[-\frac{\partial\{R\}_n^{i_{EVR}-1}}{\partial\{\Delta\tilde{u}\}_n^{i_{EVR}-1}} \right] = [-K]_n^{i_{EVR}-1}$ denominado de matriz tangente consistente, e que associa a correção do estado de flutuações do deslocamentos $\{\delta\Delta\tilde{u}\}_n^{i_{EVR}}$ com os resíduos da iteração anterior $\{R_F\}_n^{i_{EVR}-1}$, que define a seguinte matriz:

$$[K^{i_{EVR}}] = \sum_{e=1}^{N_{cel}} [B]_e^T [C_\mu^{ep(e)}] [B]_e t A_e + \sum_{ef=1}^{N_f} [K_{ef}^{(i_{EVR})}] t \quad (3.60)$$

sendo $[K_{ef}]$ a rigidez do elemento finito de contato coesivo e fratura, a ser definida adiante.

Caso o erro residual da Eq. (3.56), não for zero ou aproximadamente zero, a correção de flutuação de deslocamento a ser aplicada ao EVR deve ser calculada para obter novos campos de deslocamento, deformação e tensões (após verificação do modelo constitutivo). Em seguida, verifica-se a Eq. (3.56) de equilíbrio do EVR novamente. De acordo com a tolerância adotada para a convergência do processo iterativo, o processo de correção continua até que a soma das forças em todos os pontos do EVR seja menor que a tolerância.

Como já discutido anteriormente, a solução não linear do problema de flexão de placas é obtida por meio de um processo iterativo incremental, no qual a carga é dividida em incrementos de carga, devendo o equilíbrio da placa ser verificado a cada incremento de carga. Mas para isso, deve-se realizar um processo iterativo para cada incremento de carga. Assim, para cada iteração do macrocontínuo, calculam-se o incremento de deformação em todos os nós de célula da placa, os quais estão associados a um EVR. Então para obter o vetor de tensão em um nó de célula do macrocontínuo, deve-se aplicar esse incremento de deformação ao seu respectivo EVR. Mas para resolver o problema de equilíbrio do EVR, outro processo iterativo é necessário, no qual a correção que deve ser feita ao estado de flutuação de deslocamento do EVR em uma dada iteração é obtida pelo operador tangente consistente e pelo vetor resíduos de forças do EVR. Após a solução do EVR, calculam-se o vetor de tensões e o tensor constitutivo referentes ao nó de célula da placa (macrocontínuo). Após resolver todos os EVRs referentes aos nós de células da placa, verifica-se a equação de equilíbrio da placa. Se o equilíbrio não for verificado, passa-se à iteração seguinte do macrocontínuo repetindo todo o processo; caso contrário passa-se ao próximo incremento de carga da placa.

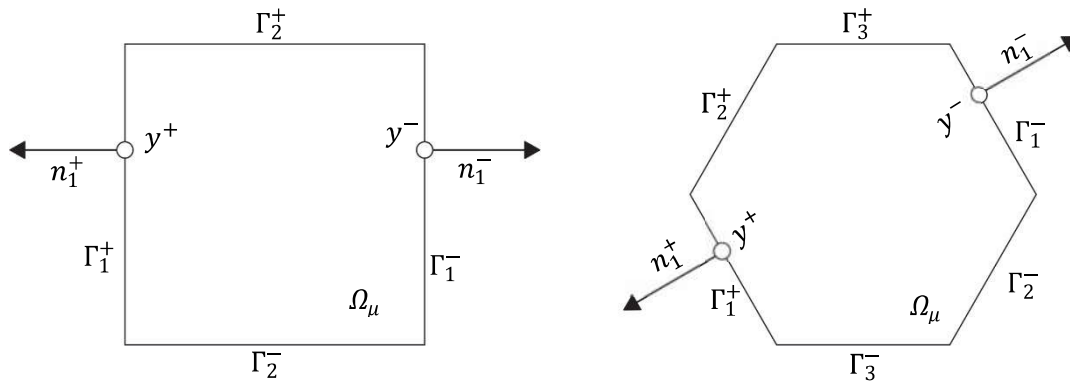
3.3.5 Modelo de flutuações periódicas sobre o contorno do EVR

Para resolver a Eq. (3.56) de equilíbrio, as condições de contorno em termos de flutuação de deslocamento devem ser impostas ao EVR. Conforme essas condições de contorno, alguns valores nodais das flutuações prescritos podem ser escritos como funções dos valores nodais de outros nós, o que diminui o número de incógnitas do sistema de equações. Portanto, a correção do estado de flutuação do deslocamento do EVR é calculada de acordo com o conjunto de equações definido em (3.59), que pode ser reduzida de acordo com as condições de contorno a serem aplicadas ao EVR. Na forma reduzida, a Eq. (3.59) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\{R_R\}_n^{i_{EVR-1}} - [K_R]_n^{i_{EVR-1}} \{\delta\Delta\tilde{u}_R\}_n^{i_{EVR}} = 0 \quad (3.61)$$

Neste trabalho será considerado apenas a condição de contorno em termos de flutuação periódica dos deslocamentos sobre o contorno, que é um modelo suficiente para descrever o comportamento de materiais com microestruturas periódicas. Mas qualquer material pode ser modelado por esta condição de contorno quando se considera uma discretização fina do macrocontínuo. A fim de definir essa condição, seja a Fig. 3.6, que representa um EVR retangular e um hexagonal.

FIGURA 3.6 – Definição de EVRs para meios periódicos.



Fonte: Fernandes (2012).

Nota-se que nos EVRs definido na Fig. 3.6, cada lado Γ_i^+ corresponde a uma aresta igual e oposta Γ_i^- . Portanto, temos n_i^+ e n_i^- como a direções normais aos contornos Γ_i^+ e Γ_i^- , respectivamente. Sendo assim, para cada ponto y^+ pertencente ao contorno Γ_i^+ , existe um ponto de contorno Γ_i^- correspondente y^- .

Sob esta condição de contorno, assume-se que as flutuações dos pontos y^+ e y^- são iguais, dessa forma temos:

$$\tilde{u}_\mu(y^+) = \tilde{u}_\mu(y^-) \quad \forall \text{ par de pontos } \{y^+, y^-\} \in \Gamma_\mu \quad (3.62)$$

A fim de satisfazer o princípio de Hill-Mandel, a força de superfície t^e deve ser anti-periódica Γ_μ :

$$t^e(y^+) = -t^e(y^-) \quad \forall \text{ par de pontos } \{y^+, y^-\} \in \Gamma_\mu \quad (3.63)$$

Para iteração i_{EVR} , devido à periodicidade das condições de contorno, a Eq. (3.61) será decomposta em várias partes. O sub-índice i é relativo aos nós internos; p e m refere-se ao par de pontos

y^+ e y^- que são definidos no contorno (não coincidente com canto), também se considera que $\delta\tilde{u}_m = \delta\tilde{u}_p$, dessa forma tem-se:

$$\begin{Bmatrix} R_{F(p)} + R_{F(m)} \\ R_{F(i)} \end{Bmatrix}^{i_{EVR}-1} - \begin{bmatrix} K_{pp} + K_{pm} + K_{mp} + K_{mm} & K_{pi} + K_{mi} \\ K_{ip} + K_{im} & K_{ii} \end{bmatrix}^{i_{EVR}-1} \begin{Bmatrix} \delta\tilde{u}_p \\ \delta\tilde{u}_i \end{Bmatrix}_\mu^{i_{EVR}} = 0 \quad (3.64)$$

sendo $R_{F(p)}$, $R_{F(m)}$ e $R_{F(i)}$ as forças nos pontos p , m e i , onde as variáveis do problema são as flutuações dos pontos p do contorno e nós internos.

Considerando-se a Eq. (3.64), para o modelo de flutuações periódicas, os vetores e matrizes reduzidos definidos na Eq. (3.61), são dados por:

$$\{F_R\}^{i_{EVR}} = \begin{Bmatrix} F_p + F_m \\ F_i \end{Bmatrix}^{i_{EVR}} \quad (3.65)$$

$$\{\delta\tilde{u}_R\}_n^{i_{EVR}+1} = \begin{Bmatrix} \delta\tilde{u}_p \\ \delta\tilde{u}_i \end{Bmatrix}_n^{i_{EVR}+1} \quad (3.66)$$

$$[K_R] = \begin{bmatrix} K_{pp} + K_{pm} + K_{mp} + K_{mm} & K_{pi} + K_{mi} \\ K_{ip} + K_{im} & K_{ii} \end{bmatrix}^{i_{EVR}-1} \quad (3.67)$$

3.3.6 Vetor de tensão homogeneizada

Para se fazer a homogeneização, que é um processo que converte uma quantidade microscópica $\sigma_\mu = \sigma_\mu(y, t)$ em uma macroscópica $\sigma(x, t)$, utiliza-se a Eq. (3.50), e assumindo que o EVR tem partes sólidas e vazios ($\Omega_\mu = \Omega_\mu^v + \Omega_\mu^s$), a tensão homogeneizada $\sigma(x, t)$, definida na Eq. (3.50), pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\sigma(x, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu(y, t) dV = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^s} \sigma_\mu(y, t) dV + \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^v} \sigma_\mu(y, t) dV \quad (3.68)$$

Na definição da Eq.(3.68), considera que o EVR é um meio contínuo, portanto, o conceito de tensão ainda é válido na escala microscópica. Dessa forma, o EVR deve ser grande o suficiente para que faça sentido representá-lo como meio contínuo. Fazendo uso do teorema de Green, a Eq. (3.68) pode ser escrita da seguinte forma (ver detalhes no trabalho de CROZARIOL (2017)):

$$\sigma(x, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\partial\Omega_\mu} t^e(y, t) \otimes_s y dA \quad (3.69)$$

onde t^e são as forças de superfície dos nós no contorno e y o vetor das coordenadas x_1 e x_2 do ponto y do EVR; no cálculo da integral utiliza-se a seguinte expressão $u \otimes_s v = \frac{1}{2}(u \otimes v + v \otimes u)$ válida para quaisquer vetores u e v .

Com a discretização do contorno do EVR em elementos a tensão homogeneizada, definida na Eq. (3.69), é calculada de forma aproximada como:

$$\sigma(x, t) = \frac{1}{2V_\mu} (\bar{\sigma} + \bar{\sigma}^T) \quad (3.70)$$

sendo:

$$\bar{\sigma} = \sum_{i=1}^{Nb} \{F_c\}_i \{y\}_i^T \quad (3.71)$$

onde as forças F_c é calculada pelas forças nodais do contorno P_c obtida da Eq. (3.43).

Para obter as forças finais $\{\Delta P_c\}$, definida na Eq. (3.43), o vetor de deslocamentos nodais do contorno $\{\Delta U_c\}$, deve ser atualizado após a resolução do problema de equilíbrio EVR, a fim de somar ao mesmo o campo de flutuações de deslocamento que satisfaz a equação de equilíbrio do EVR. Ou seja, deve-se fazer: $\{\Delta U_c\} = \{\Delta U_c^\varepsilon\} + \{\Delta \tilde{U}_c\}$, onde o campo $\{\Delta U_c^\varepsilon\}$ é aquele calculado a partir da deformação constante ε aplicada pelo macrocontínuo. Dessa forma, deve-se recalculer o vetor $\{\Delta L\}$ e calcular também, a parte que se refere ao campo de esforços inelásticos N^0 , que é obtido após atingir o equilíbrio do EVR (ver Eq. (3.43)). Assim obtém o vetor final das forças no contorno $\{\Delta P_c\}$. Note, porém, que as forças P_c são dadas por unidade de comprimento, mas as forças F_c são definidas apenas em unidade de força. Portanto, deve-se multiplicar $\{\Delta P_c\}$ pelo comprimento de influência do nó correspondente, a fim de obter $\{\Delta F_c\}$. Para uma determinada iteração i de um incremento n do macrocontínuo, tem-se: $\{P_c\}_n^i = \{P_c\}_{n-1} + \{\Delta P_c\}_n^i$

3.3.7 Tensor constitutivo homogeneizado

A tensão homogeneizada referente a um ponto do macrocontínuo em um incremento n é dada por:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} : \Delta \varepsilon_{n+1} \quad (3.72)$$

Da Eq. (3.72), define-se o tensor constitutivo homogeneizado como:

$$C_{n+1}^{ep} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \quad (3.73)$$

Considerando o trabalho de CROZARIOL (2017), pode-se observar que o tensor constitutivo homogeneizado (C^{ep}) é obtido por meio do processo de homogeneização, conforme a seguinte equação:

$$\begin{aligned} C^{ep}(x) &= \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_{\mu S}} \frac{\partial \sigma_\mu(y)}{\partial \varepsilon(x)} dV = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_{\mu S}} C_\mu^{ep} dV + \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_{\mu S}} C_\mu^{ep} \frac{\partial \nabla^S \tilde{u}_\mu}{\partial \varepsilon(x)} dV \\ &= C^{ep(Taylor)} + \tilde{C}^{ep} \end{aligned} \quad (3.74)$$

sendo:

$$C^{ep(Taylor)} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} C_\mu^{ep} dV = \sum_{e=1}^{N_{cel}} \frac{V_e}{V_\mu} [C_\mu^{ep(e)}] \quad (3.75)$$

$$\tilde{C}^{ep} = -\frac{1}{V_\mu} G_R K_R^{-1} G_R^T \quad (3.76)$$

onde V_μ indica o volume do EVR, $C^{ep(Taylor)}$ é a média volumétrica do tensor constitutivo incremental; as matrizes $[G_R]$ e $[K_R]$ (definida na Eq. (3.67)) são formas reduzidas das matrizes $[G]$ e $[K]$, que dependem da condição de contorno adotada em termos de flutuação de deslocamento (ver mais detalhes em FERNANDES et. al. 2019), sendo:

$$G = \sum_{e=1}^{N_{cel}} [C_\mu^{ep(e)}] [B_e] V_e \quad (3.77)$$

4 ALGORITMO DA MODELAGEM MULTIESCALA

Neste tópico, será apresentado o algoritmo de obtenção da solução não-linear da placa sujeita à flexão simples, por meio da modelagem em multiescala.

- 1) Para cada ponto de colocação do EVR, são escritas as equações algébricas dos deslocamentos no plano, e as submatrizes “[H_μ]” da Eq. (3.41), que se referem aos valores da integração dos elementos do contorno e da interface do EVR, e também das células, as submatrizes “[G_μ]” da Eq. (3.41), referente à integração dos elementos de contorno e a matriz “[E_μ]” da Eq. (3.41), que apresenta os valores da integração das células definida na matriz e nas inclusões, assim como as matrizes [H'_μ] [G'_μ] e [E'_μ] da Eq. (3.45) são construídas apenas para a primeira iteração do primeiro incremento de carga “n”, já que essas matrizes são constantes;
- 2) Os incrementos de momentos nodais elásticos da placa ΔK_n é obtido pela Eq. (2.66);
- 3) O incremento da curvatura $\left\{ \Delta \left(\frac{1}{r} \right) \right\}_n^{i+1}$, é obtido a partir da lei de Hooke Eq. (2.5);
- 4) Para cada ponto de Gauss estabelecido ao longo da espessura da placa e referente a um nó de célula da placa, deve-se calcular a matriz das macro-deformações: $[\Delta \varepsilon]_n^i = -x_3 \left\{ \Delta \left(\frac{1}{r} \right) \right\}_n^i$ e proceder da seguinte maneira:
 - 4.1 O incremento de deformação “[$\Delta \varepsilon$]” é aplicado ao contorno do seu respectivo EVR, e seu problema de equilíbrio é resolvido (com o procedimento iterativo $i_{EVR} \geq 0$) a fim de obter o vetor de tensão e o tensor constitutivo do respectivo ponto do macrocontínuo. Para isso, deve-se:
 - a) $i_{EVR} = 0$: Calcular o deslocamento do contorno do EVR pela seguinte equação: $\{\Delta U\}_C = [\Delta \varepsilon] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$;
 - b) $i_{EVR} = 0$: Aplicar o vetor dos deslocamentos de contorno “[ΔU]” ao EVR como uma condição de contorno e calcular as variáveis elásticas “[ΔL_μ]” (vetor que possui as incógnitas no nós de contorno, interface e nós internos do EVR) (Eq. (3.43)) e calcular também as forças elásticas $\{\Delta K\}_\mu$ nos nós de células (Eq. (3.48));
 - c) $i_{EVR} = 0$: A partir da Lei de Hooke e do vetor $\{\Delta K\}_\mu$, calculam-se as deformações $\{\Delta \varepsilon\}_n$ nos nós internos e sobre as interfaces do EVR;
 - d) Calcular as forças internas nas células $\{F\}_{n+1}^{i_{EVR}}$ (adicionando a parcela $\{F\}^e = [B]_e^T \{\sigma\}_e V_e$ de todas as células do EVR à parcela $\{F^{ef}\}_{n+1}^{i_{EVR}}$ de todos os elementos de contato e fratura). Para isso, os seguintes valores devem ser calculados para cada célula do EVR:

- O vetor de incremento de tentativa da deformação da célula do EVR: se $i_{EVR} = 0$: $\{\Delta\varepsilon_\mu^{e(t)}\}_n^0 =$

$\{\Delta\varepsilon\}_n$; caso contrário: $\{\Delta\varepsilon_\mu^{e(t)}\}_n^{i_{EVR}} = \{\Delta\varepsilon\}_n + [B_e] \{\Delta\tilde{u}_\mu^{e(t)}\}_n^{i_{EVR}}$;

- O vetor de incremento de tentativa das tensões da célula do EVR $\{\Delta\sigma_\mu^{e(t)}\}_n^{i_{EVR}}$, através da lei de Hooke;

- O vetor de tentativa das tensões da célula do EVR: $\{\sigma_\mu^{e(t)}\}_{n+1}^{i_{EVR}+1} = \{\sigma_n^e\} + \{\Delta\sigma_\mu^{e(t)}\}_n^{i_{EVR}}$;

- A tensão verdadeira $\{\sigma_\mu^e\}_{n+1}^{i_{EVR}+1}$ e o tensor constitutivo $[C_m^{ep}]_n^{i_{EVR}}$ são obtidos a partir do modelo constitutivo adotado para a célula. Obs: nessa etapa, todas as variáveis internas relacionadas ao modelo constitutivo devem ser atualizadas a partir dos valores do incremento anterior da placa ao invés dos valores da iteração anterior;

e) O vetor $\{F_R\}_{n+1}^{i_{EVR}}$ é calculado com base no modelo multiescala adotado, que nesse caso é o modelo de flutuação periódica (Eq. (3.64));

f) A convergência é verificada: $\frac{\sqrt{F_R^T F_R}}{\sqrt{F_P^T F_P}} \leq tol$, onde $\{F_P\}$ são as forças internas dos nós de célula

sobre o contorno Γ_i^+ e tol é a tolerância adotada para o procedimento iterativo. Se o critério de convergência for satisfeito, prosseguir pelo item (0); caso contrário, o procedimento iterativo continua na etapa g;

g) A matriz de rigidez do EVR deve ser atualizada (3.60);

h) A matriz $[K_R]_{(n)}^{i_{EVR}}$ (Eq. (3.61)) deve ser calculada, com base no modelo da multiescala adotado, que no presente trabalho é o de flutuação periódica (Eq. (3.64));

i) As correções de flutuação $\{\delta\tilde{u}_R\}_n^{i_{EVR}+1}$, dado pela Eq. (3.59) são obtidas pela resolução do sistema de equações;

j) O vetor $\{\delta\tilde{u}\}_n^{i_{EVR}+1}$ contendo as correções de flutuação pode ser obtido para todos os nós do EVR de acordo com o modelo adotado;

k) O novo incremento de tentativa do deslocamento a ser imposto ao EVR é obtido:

$$\{\Delta u_\mu^t\}_n^{i_{EVR}+1} = \{\Delta u_\mu^\varepsilon\}_n + \{\Delta\tilde{u}_\mu\}_n^{i_{EVR}+1}, \quad \text{onde:} \quad \{\Delta\tilde{u}_\mu\}_n^{i_{EVR}+1} = \{\Delta\tilde{u}_\mu\}_n^{i_{EVR}} + \{\delta\tilde{u}\}_n^{i_{EVR}+1}$$

voltando para a etapa d);

4.2 O tensor constitutivo homogeneizado $[C^{ep}]_n^{i_{EVR}}$ (Eq. (3.74)) é obtido;

4.3 O vetor de tensão homogeneizada $\{\sigma\}_{n+1}^{i_{EVR}+1}$ é calculado (3.50). Em seguida, o incremento de tensão verdadeiro $\{\Delta\sigma\}_n^{i_{EVR}} = \{\Delta\sigma\}_{n+1}^{i_{EVR}+1} - \{\sigma\}_{n-1}$ pode ser obtido;

5) Após solução dos EVRs associados aos pontos de Gauss definidos ao longo da espessura e referentes a um determinado nó de célula, o incremento de momento $\{\Delta M\}_n^i$, dado pela Eq. (2.84) e o tensor

constitutivo $[C_m^{ep}]_n^i$ (Eq. (2.83)) são obtidos para esse nó de célula do macrocontínuo. Após realizar o mesmo procedimento em todos os nós de célula da placa, ou seja, após a solução do problema de equilíbrio de todos os EVRs definidos na placa, o equilíbrio relacionado ao macrocontínuo é verificado (Eq. (2.77)). Se o vetor de resíduos $\{R_M\}$ não for menor que a tolerância adotada:

- a) O Operador Tangente Consistente (OTC) Eq. (2.80) deve ser atualizado;
- b) a correção $\{\delta\Delta(\frac{1}{r})\}_n^i$ é calculada. Em seguida, o incremento de curvatura $\{\Delta(\frac{1}{r})\}_n^{i+1}$ a ser aplicado na próxima iteração é obtida pela Eq. $\{\Delta(\frac{1}{r})\}_n^{i+1} = \{\Delta(\frac{1}{r})\}_n^i + \{\delta\Delta(\frac{1}{r})\}_n^i$ retornando à etapa 4 para iniciar a nova iteração $i + 1$ da placa.
- c) Se o critério de convergência for nulo de acordo com uma tolerância adotado, o algoritmo continua na etapa 7;
- 6) Os deslocamentos e esforços incógnitas no contorno da placa dados pela Eq. $\{\Delta X\}_n = \{\Delta L\}_n + [R]\{\Delta M^{0(L)}\}_n$ devem ser atualizados para considerar a correção devido ao incremento do momento inicial $\{\Delta M^{0(L)}\}$;
- 7) Retorne à etapa 2 para iniciar um novo incremento de carga da placa, $n + 1$.

5 ANÁLISES NUMÉRICAS

5.1 Introdução

Com a finalidade de verificar a formulação descrita acima, serão apresentados três exemplos numéricos com uma abordagem em multiescala, no qual, a resposta constitutiva do ponto do macrocontínuo é definida pela resposta do EVR homogeneizada, que representa o ponto do problema analisado na placa (macrocontínuo). Os resultados serão comparados com aqueles obtidos a partir do modelo proposto em FERNANDES, PITUBA e SOUZA NETO (2015), onde uma formulação multiescala com acoplamento MEF/MEC é desenvolvida, sendo o MEC adotado para o macrocontínuo e o MEF para a microescala. Além disso, os exemplos serão analisados com abordagem não-linear convencional (sem utilizar multiescala), onde será adotado como modelo constitutivo o modelo de dano isotrópico de Mazars.

Inicialmente, considerando análise não-linear em escala única com o modelo de MAZARS (1984), foi realizada uma análise prévia dos exemplos, onde várias discretizações são consideradas, a fim de se estudar a convergência dos resultados com o refinamento da malha, e definir a malha a ser utilizada na macroescala na abordagem multiescala. Observe que quanto maior a discretização da malha, melhor é a convergência dos resultados, porém mais tempo leva para obtê-los. Assim, deseja-se obter resultados precisos com menor esforço computacional. Além disso, é feito um estudo para definir a quantidade mínima de pontos de Gauss a ser definida ao longo da espessura da placa, necessários para o cálculo dos momentos, que gere resultados com boa precisão. Como o esforço computacional na análise em multiescala é muito grande, a escolha da menor malha do macrocontínuo, assim como a menor quantidade de pontos de Gauss ao longo da espessura da placa, que produzam resultados com boa precisão, são imprescindíveis. Considerando-se que a malha mais refinada obtém os resultados mais precisos, foi utilizado isso como um parâmetro para encontrar uma malha que nos permite obter resultados semelhantes com a menor discretização possível.

O concreto utilizado nesse trabalho foi analisado por meio de ensaios experimentais por DELALIBERA (2002). Assim, tanto as propriedades do EVR, quanto os parâmetros do modelo de dano, são definidos considerando-se trabalhos que fizeram a análise paramétrica do material tendo como referência esse concreto. É interessante ressaltar que utilizando-se modelos constitutivos elasto-plásticos, ou seja, considerando um material diferente daquele adotado nesse trabalho, no trabalho de FERNANDES e NETO (2013) foram analisadas, em escala única, a placa simplesmente apoiada e a viga em balanço, enquanto a placa submetida à carga concentrada foi analisada, considerando abordagem multiescala, em FERNANDES, PITUBA e SOUZA NETO (2015). Em FERNANDES e NETO (2013) os resultados numéricos foram comparados com outros trabalhos da literatura, evidenciando a precisão da formulação do MEC, em escala única, utilizada no item 5.2 a seguir.

5.2 Análises numéricas em escala única utilizando-se o modelo de dano de Mazars

5.2.1 Definição das propriedades do material nas análises em escala única

Nas análises numéricas em escala única, foi utilizado o modelo de dano de MAZARS (1984), que tem bons resultados na análise de danos no concreto sob carregamento proporcional ou cíclica. A variável de dano é função da deformação equivalente que caracteriza o estado de alongamento local do material FERNANDES (1998). Os parâmetros do modelo de dano de Mazars, assim como as propriedades elásticas do concreto analisado nesse trabalho, encontram-se definidos no trabalho de PITUBA E LACERDA (2012), e estão descritos nas Tabs. 5.1 e 5.2.

TABELA 5.1 – Parâmetros de Mazars.

$A_T = 1,71$	$A_C = - 2,280$
$B_T = 11300$	$B_C = 12800$
$ed_0 = 0,0000675$	

Fonte: Aatoria própria (2022).

TABELA 5.2 – Propriedades físicas do material.

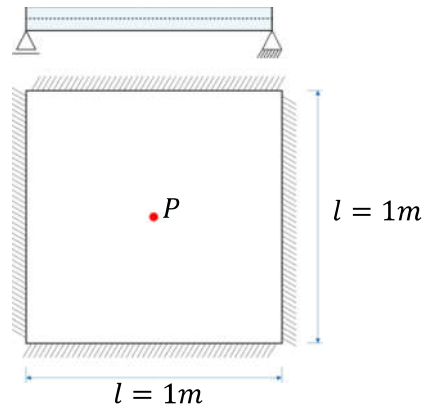
Propriedade	Valor
Módulo de elasticidade (GPa)	32,3
Coefficiente de Poisson	0,2

Fonte: Aatoria própria (2022).

5.2.2 Placa simplesmente apoiada

Para o primeiro exemplo foi considerado uma placa simplesmente apoiada nos quatro lados, de espessura $t = 0,01\text{m}$, sujeita a uma carga normal distribuída em toda a superfície média da placa, com um valor de $1,6\text{ KN/m}^2$, sendo a geometria da placa definida na Fig. 5.1. Além disso, foram consideradas quatro malhas diferentes para o domínio: 128, 72, 32 e 16 células, as quais requerem 49, 25, 9 e 3 nós definidos no domínio da placa, respectivamente, para a definição das células. Todas essas malhas têm a seguinte discretização do contorno: 48 elementos com aproximação quadrática, resultando em 100 nós ao longo do contorno. Uma tolerância de $1,0\text{ E-}4$ foi adotado para a convergência do procedimento iterativo e 12 pontos de Gauss foram definidos ao longo da espessura da placa.

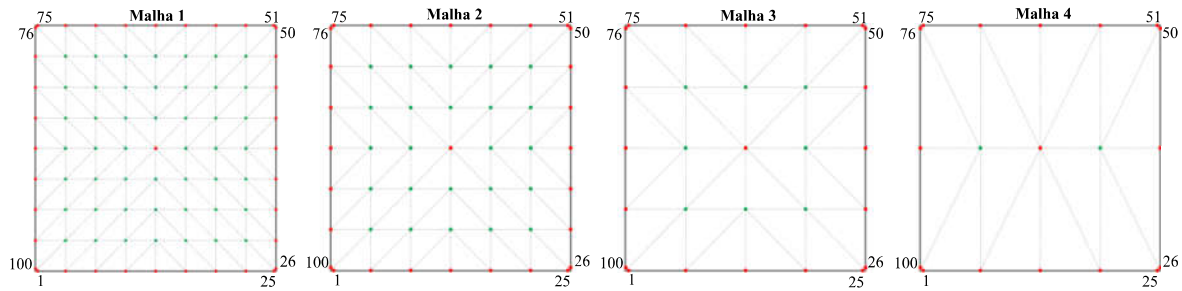
FIGURA 5.1 – Placa simplesmente apoiada - Geometria.



Fonte: Autoria própria (2022).

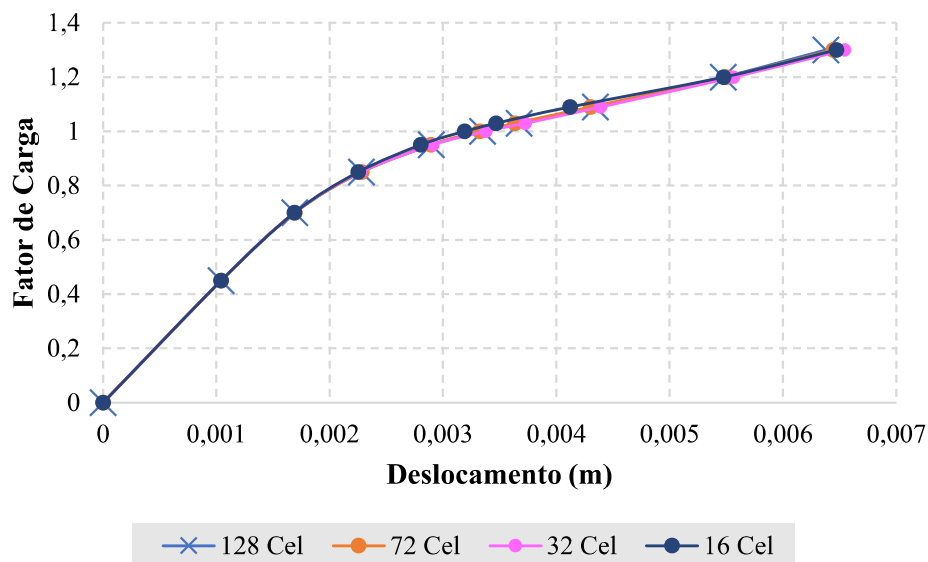
Para verificar a convergência dos resultados com o refinamento da malha, analisa-se o deslocamento do nó central P (definido na Fig. 5.1) ao longo dos incrementos de carga. Define-se como malha 1, a mais refinada (128 células), e como malha 4, com a menor discretização (16 células). Na Fig. 5.3 têm-se os resultados obtidos, sendo as malhas testadas definidas na Fig. 5.2 e as propriedades do material apresentadas no item 5.2.1.

FIGURA 5.2 – Malhas utilizadas no estudo da placa simplesmente apoiada.



Fonte: Autoria própria (2022).

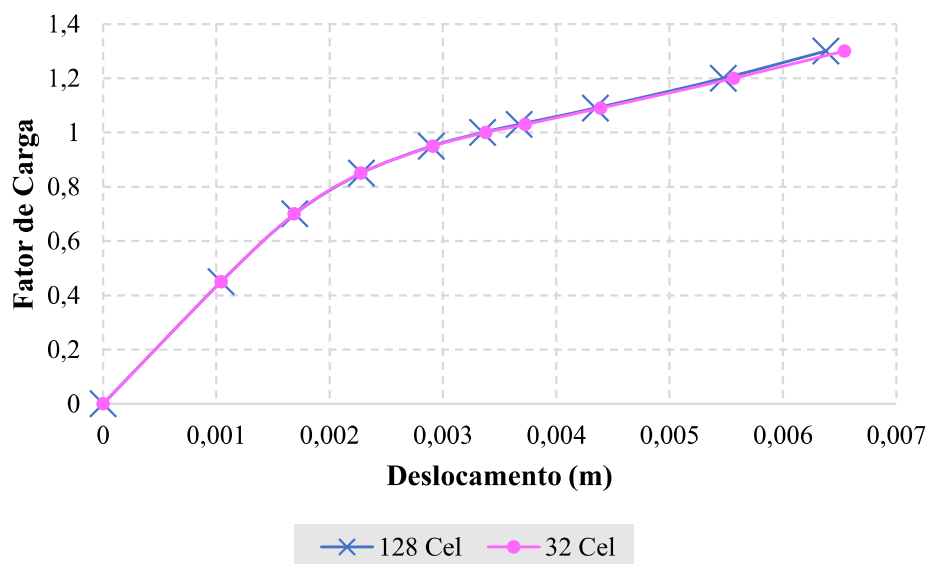
FIGURA 5.3 – Curva de fator de carga por deslocamento, para o ponto central da placa simplesmente apoiada.



Fonte: Autoria própria (2022).

Para este primeiro exemplo, observando a Fig.5.3, conclui-se que as malhas mais refinadas (128, 72 e 32 células) possuem resultados com uma boa precisão, apenas a malha 4 (16 células) apresentou uma pequena discrepância nos resultados. Dessa forma definiu-se a malha 3 (32 células) para representar a discretização na macroescala. A seguir foi plotado um gráfico para comparar a malha escolhida com a malha mais refinada, a fim de constatar melhor a similaridade dos resultados.

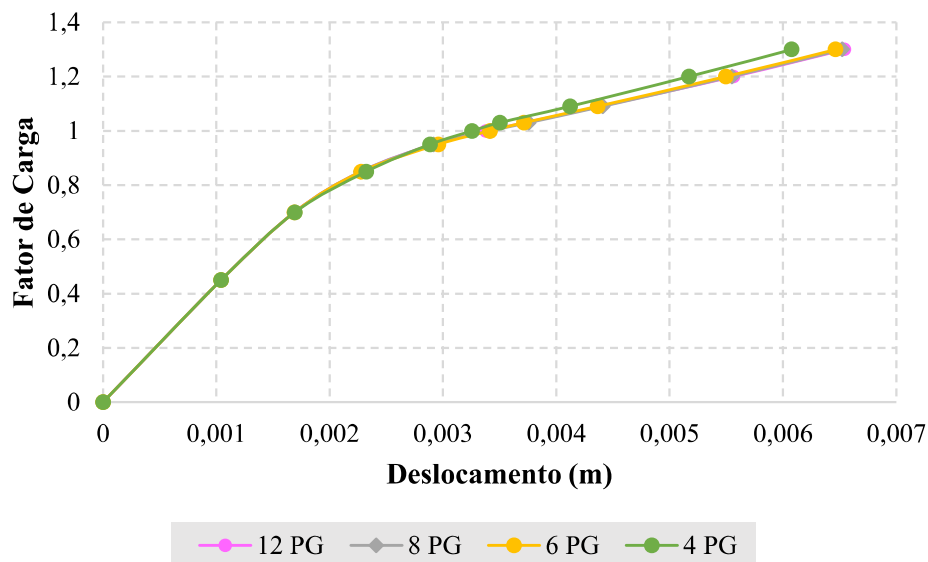
FIGURA 5.4 – Comparação entre a malha mais refinada (malha 1) e a malha escolhida (malha 3) no exemplo da placa simplesmente apoiada.



Fonte: Autoria própria (2022).

Analisando a Fig. 5.4, pode-se notar que os resultados das malhas analisadas são muito semelhantes, e com o objetivo de reduzir ainda mais o esforço computacional, a malha 3 que contém 12 pontos de Gauss foi na sequência testada através da mudança no número de pontos gaussianos (PG) ao longo da espessura da placa, tendo sido adotada as respectivas quantidades: 8, 6 e 4.

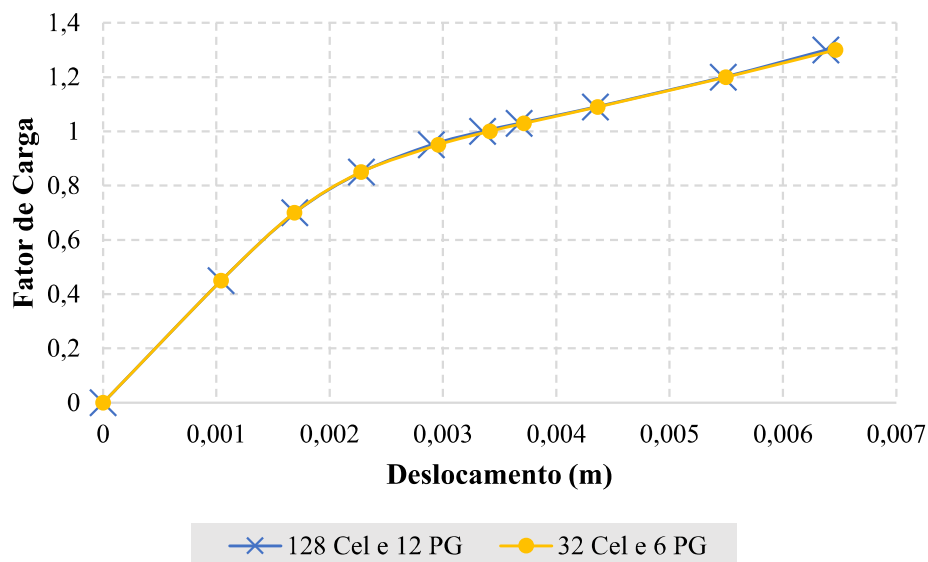
FIGURA 5.5 – Deslocamento no ponto central da placa simplesmente apoiada, obtido com a malha 3 e variando-se o número de pontos de Gauss na espessura



Fonte: Autoria própria (2022).

Observando a Fig.5.5, nota-se que os resultados com 4 pontos de Gauss, apresenta diferença significativa das outras análises. Dessa forma, conclui-se que 6 pontos de Gauss já apresentam boa precisão. Em seguida foi plotado um gráfico comparando a análise com 32 células e 6 pontos de Gauss com aquela referente à malha de 128 células e 12 pontos de Gauss (ver Fig 5.6).

FIGURA 5.6 – Deslocamento no ponto central da placa simplesmente apoiada, considerando-se a malha 3 com 6 PG e a malha 1 com 12 PG.



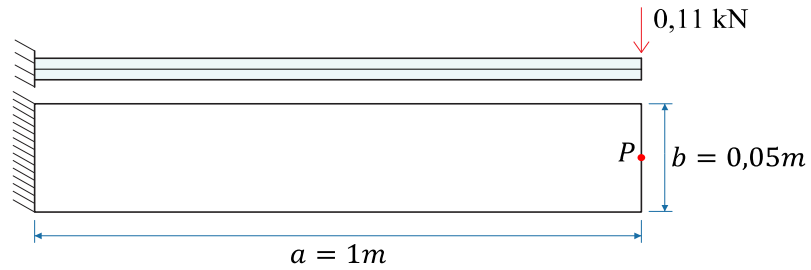
Fonte: Autoria própria (2022).

Analisando a Fig. 5.6, nota-se uma boa precisão da malha escolhida de 32 células e 6 pontos de Gauss e concluímos que está será utilizada na análise em multiescala.

5.2.3 Viga em balanço

No segundo exemplo, analisamos uma viga em balanço com um carregamento de 0,0055kN aplicado na extremidade, o que gera uma força $V_n=0,0055/0,05=0,11\text{kN/m}$ aplicada nos nós da extremidade da placa como mostrado na Fig. 5.7. A viga é representada por um domínio de placa estreita, com um lado menor assumido como engastado ($w=w_n=0$) e os outros três considerados livres, sendo $V_n=M_n=0$ nos lados maiores e $M_n=0$ e $V_n=0,11\text{kN/m}$ no lado menor. A geometria da placa é dada por: espessura $t=0,1\text{m}$, largura $b=0,05\text{m}$, comprimento $a=1,0\text{m}$. A discretização do contorno da placa é igual para todas as malhas, onde tem 52 elementos quadráticos resultando em 108 nós ao longo do contorno. Também, foram consideradas cinco malhas diferentes para o domínio: 384, 192, 128, 64 e 32 células, para as quais a definição de 141, 69, 45, 15 e 7 pontos internos são necessários, respetivamente. Para convergência do processo iterativo foi adotado uma tolerância de $1,0 \text{ E-}4$ e 12 pontos de Gauss foram definidos ao longo da espessura da placa.

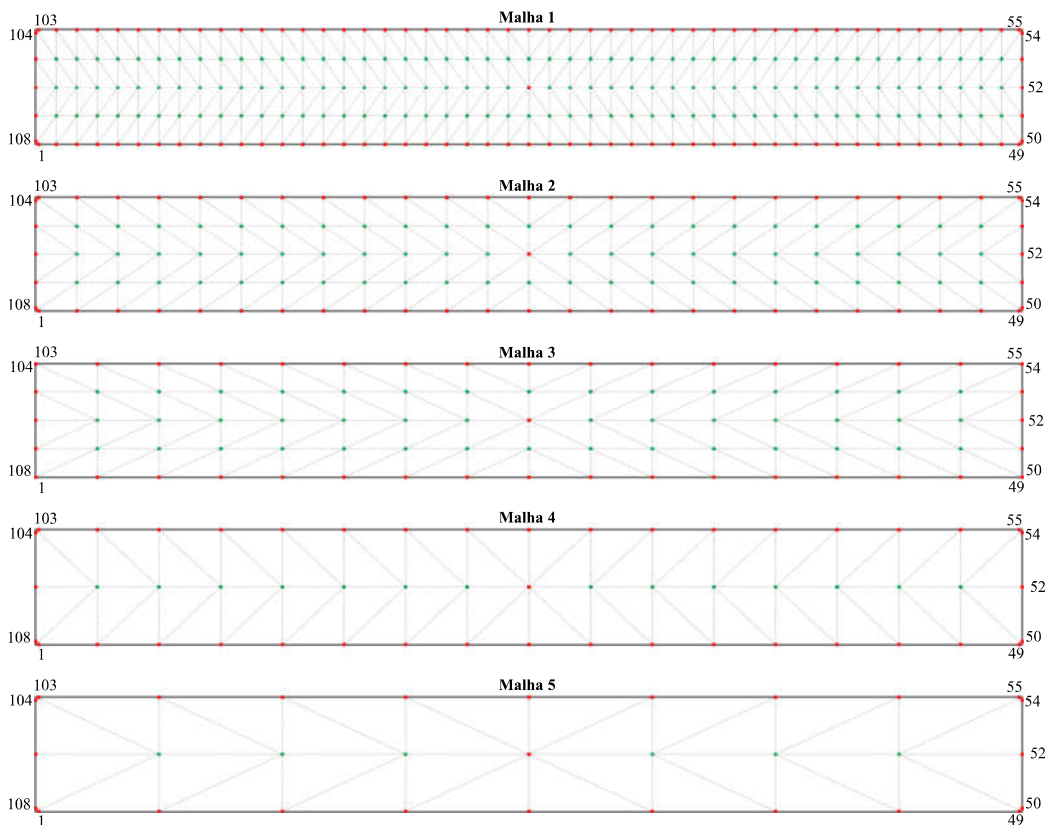
FIGURA 5.7 – Viga em balanço - Geometria



Fonte: Autoria própria (2022).

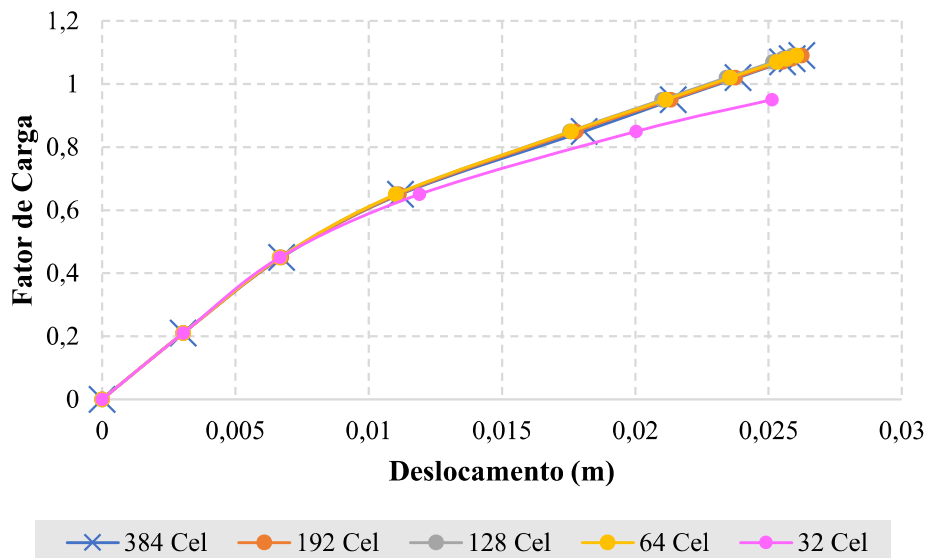
Para verificar a convergência dos resultados com o refinamento das malhas, será analisado o deslocamento do nó central do canto direito do contorno da placa (nó P da Fig. 5.7). Estabelece-se como malha 1, a mais refinada (384 células), e como malha 5, a mais simples (32 células). Na Fig. 5.9 tem-se os resultados obtidos, onde as malhas testadas estão definidas na Fig. 5.8, e as propriedades do material apresentadas no item 5.2.1.

FIGURA 5.8 – Malhas utilizadas no estudo da viga em balanço.



Fonte: Autoria própria (2022).

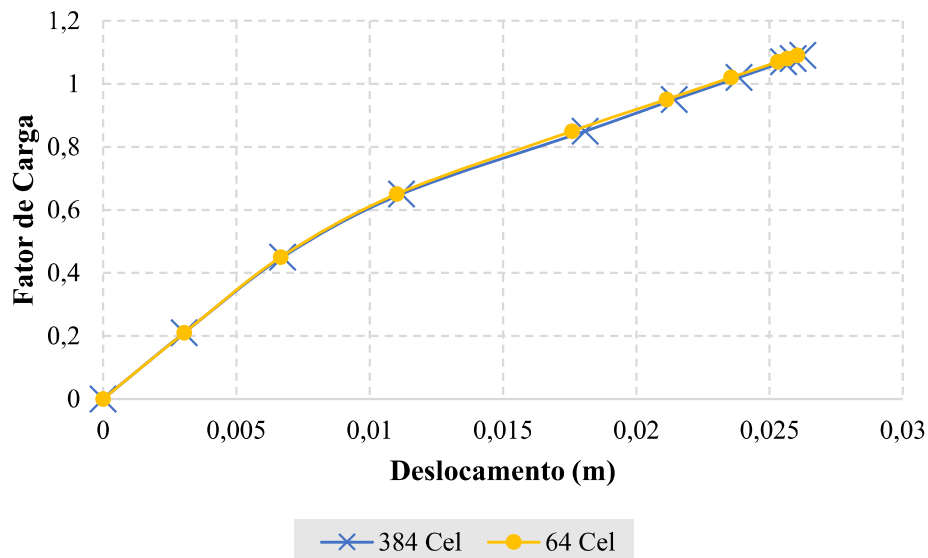
FIGURA 5.9 – Curva de fator de carga por deslocamento, para o ponto P na extremidade da viga em balanço.



Fonte: Autoria própria (2022).

Observando a Fig. 5.9 onde a malha 1 (384 células) tem a melhor discretização, e tomando-a como referência para verificação dos resultados das outras malhas, nota-se que a malha 5 (32 células) apresenta uma diferença notável nos resultados. Já a malha 4 (64 células), malha 3 (128 células) e a malha 2 (192 células), têm resultados próximos à malha 1 (384 células). Dessa forma, optou-se por utilizar, na análise multiescala, a malha 4 que possui resultados satisfatórios. A seguir é apresentado um gráfico para comparar a malha escolhida com a malha mais refinada, a fim de constatar melhor a similaridade dos resultados.

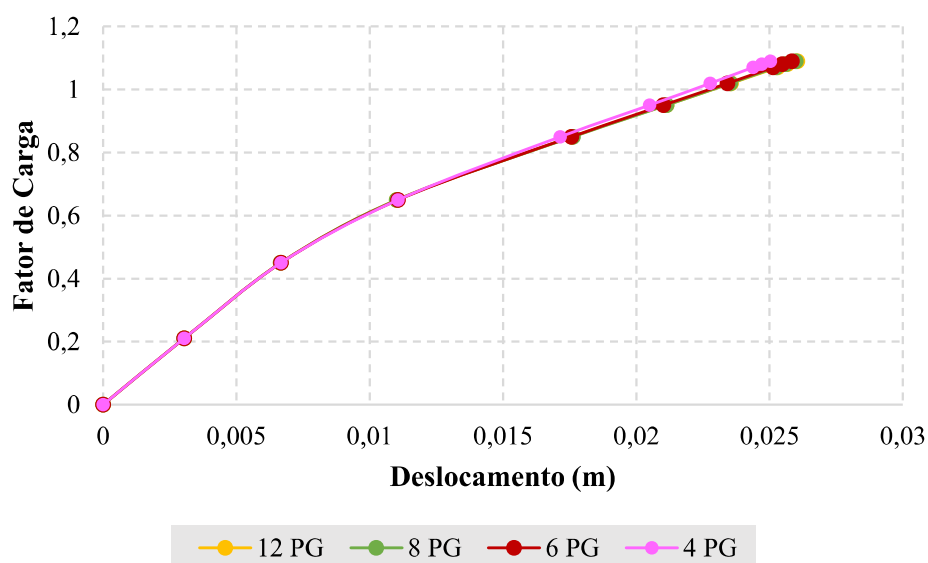
FIGURA 5.10 – Comparação entre a malha mais refinada (malha 1) e a malha escolhida (malha 4) no exemplo da viga em balanço.



Fonte: Autoria própria (2022).

A fim de reduzir o esforço computacional, em seguida, considerando a malha 4, será alterado o número de pontos gaussianos (PG) ao longo da espessura da placa, tendo sido adotados os correspondentes números: 8, 6 e 4, além de 12 PG já considerado na Fig. 5.9.

FIGURA 5.11 – Deslocamento no ponto P na extremidade da viga em balanço, obtido com a malha 4 e variando-se o número de pontos de Gauss na espessura.

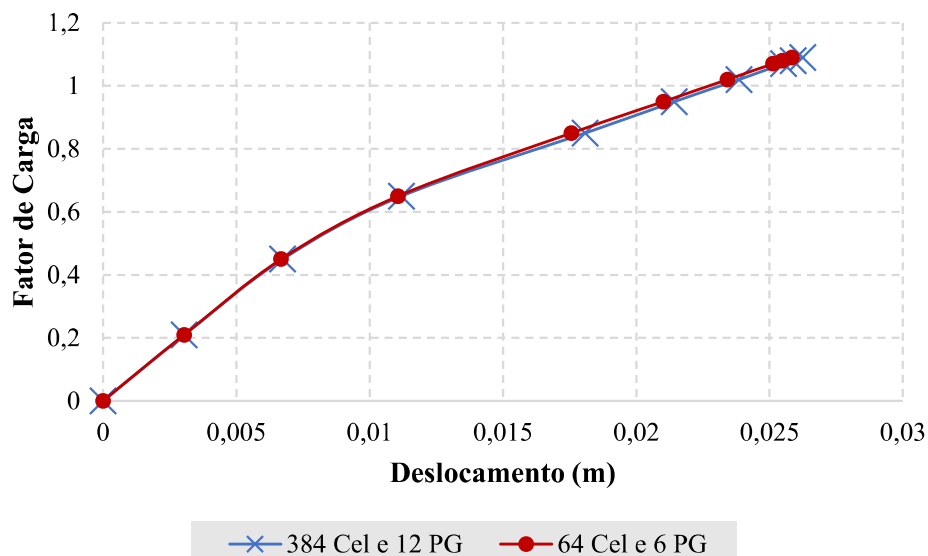


Fonte: Autoria própria (2022).

Observe que os resultados da Fig. 5.11 com 4 pontos gaussianos são significativamente diferentes das demais análises. A partir disso conclui-se que a malha de 64 células e 6 pontos Gaussianos

já possuem boa precisão. Um gráfico foi plotado a seguir comparando a análise com 64 células e 6 pontos de Gauss à malha de referência de 384 células e 12 pontos de Gauss (veja a Fig. 5.9).

FIGURA 5.12 – Deslocamento no ponto P na extremidade da viga em balanço, considerando-se a malha 4 com 6 PG e a malha 1 com 12 PG.

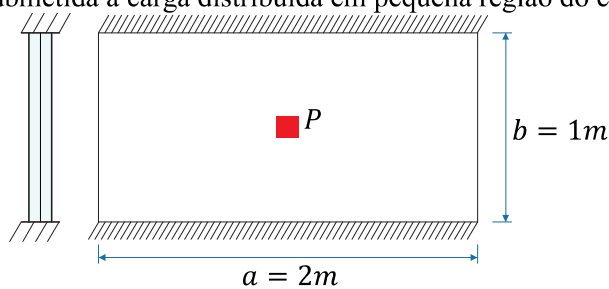


Fonte: Autoria própria (2022).

Analisando a Fig. 5.12, podemos ver que os resultados são similares, portanto, pode-se concluir que 6 pontos de Gauss já apresentam uma boa precisão, sendo esse o número a ser adotado na análise multiescala.

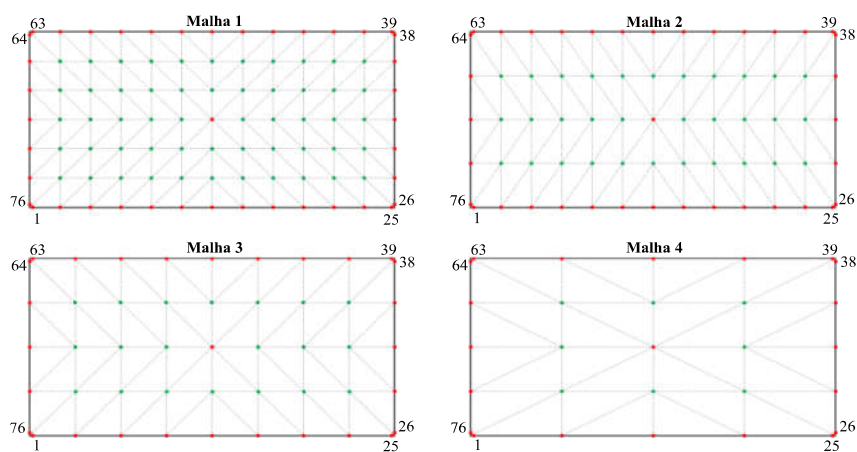
5.2.4 Placa submetida a carga distribuída em pequena região do centro

No terceiro exemplo numérico é analisada uma placa submetida a uma carga concentrada no seu centro, onde os lados menores da placa são assumidos como livres ($V_n=M_n=0$) enquanto os outros dois são engastados ($w=w_n=0$). A geometria da placa é dada por: espessura $t=0,01\text{m}$, $a=2,0\text{m}$, $b=1,0\text{m}$. Uma carga distribuída uniforme $g=0,076\text{kN/m}^2$ é considerada sobre o domínio central quadrado, de dimensão $0,15 \times 0,15\text{m}$, definido na Fig. 5.13, a fim de representar uma carga concentrada de $1,71\text{E-}03\text{kN}$. Foram consideradas quatro malhas diferentes para o domínio: 144, 96, 64 e 32 células, as quais requerem 55, 33, 21 e 9 nós no domínio da placa, respectivamente, para definição das células. Todas essas malhas possuem a seguinte discretização de contorno: 36 elementos quadráticos e 76 nós ao longo do contorno. Uma tolerância de $1,0 \text{E-}4$ foi adotado para a convergência do procedimento iterativo e 12 pontos de Gauss foram definidos ao longo da espessura da placa.

FIGURA 5.13 – Placa submetida a carga distribuída em pequena região do centro - Geometria

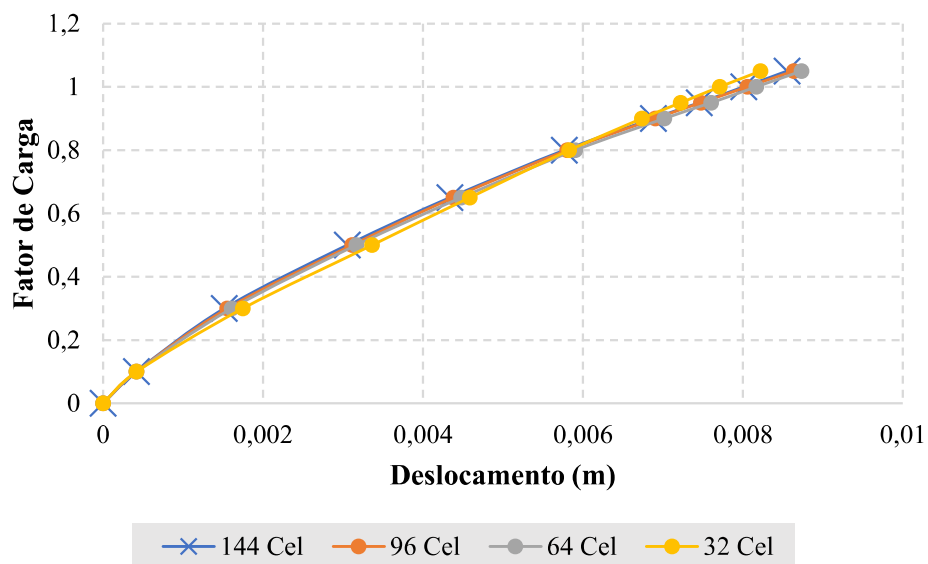
Fonte: Autoria própria (2022).

A fim de verificar a convergência dos resultados com o refinamento das malhas, analisa-se o deslocamento do nó central P (ver na Fig. 5.13) ao longo dos incrementos de carga. É definido como malha 1, a mais refinada (144 células), e como malha 4, a mais simples (32 células). Na Fig. 5.15 são demonstrados os resultados e as propriedades do material são descritas no item 5.2.1.

FIGURA 5.14 – Malhas utilizadas no estudo – Placa submetida a carga distribuída em pequena região do centro.

Fonte: Autoria própria (2022).

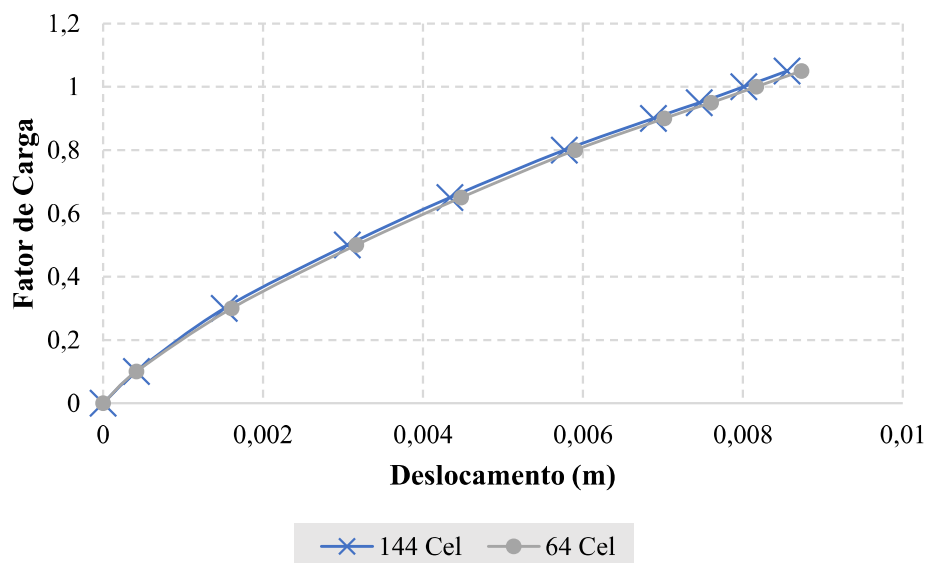
FIGURA 5.15 – Curva de fator de carga por deslocamento, para o ponto central da placa submetida a carga distribuída em pequena região do centro.



Fonte: Autoria própria (2022).

Analisando a Fig. 5.15 deste terceiro exemplo, onde a malha 1 (144 células) tem a melhor discretização, usando-a como referência e comparando com outras malhas, é possível notar que a malha 4 (32 células) possui uma discrepância notável nos resultados. Portanto, definiu-se a malha 3 (64 células) para representar a discretização na macroescala. Em seguida, um gráfico foi plotado para comparar melhor a similaridade dos resultados da malha escolhida com a malha mais refinada (ver Fig. 5.16).

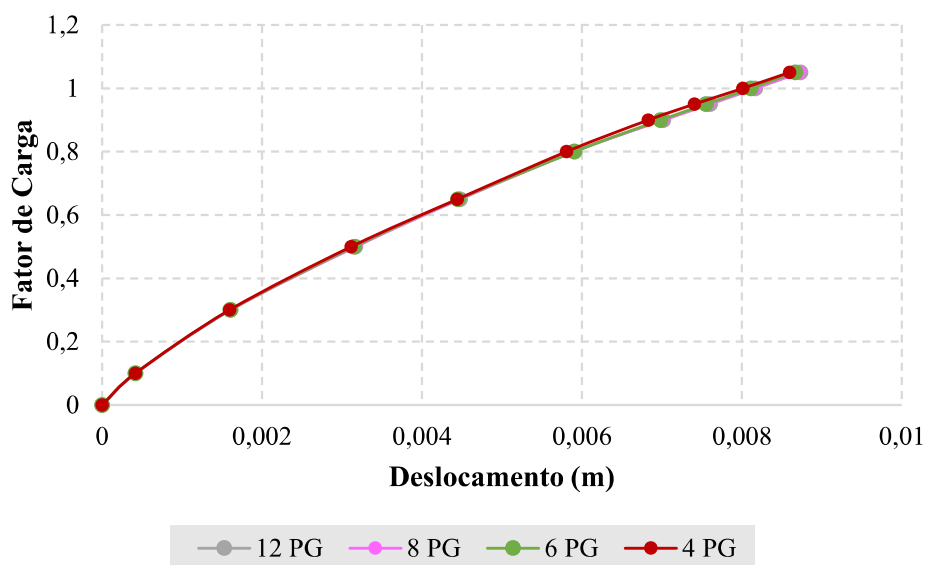
FIGURA 5.16 – Comparação entre a malha mais refinada (Malha 1) e a malha escolhida (malha 3) no exemplo da placa submetida a carga distribuída em pequena região do centro.



Fonte: Autoria própria (2022).

Analisando a Fig. 5.16, pode-se notar que os resultados das malhas que foram testadas são muito semelhantes. Para reduzir ainda mais o esforço computacional, a malha 3 contendo 12 pontos de Gauss foi na sequência analisada alterando o número de pontos de Gauss (PG) ao longo da espessura da placa, tendo sido adotado as respectivas quantidades: 8, 6 e 4.

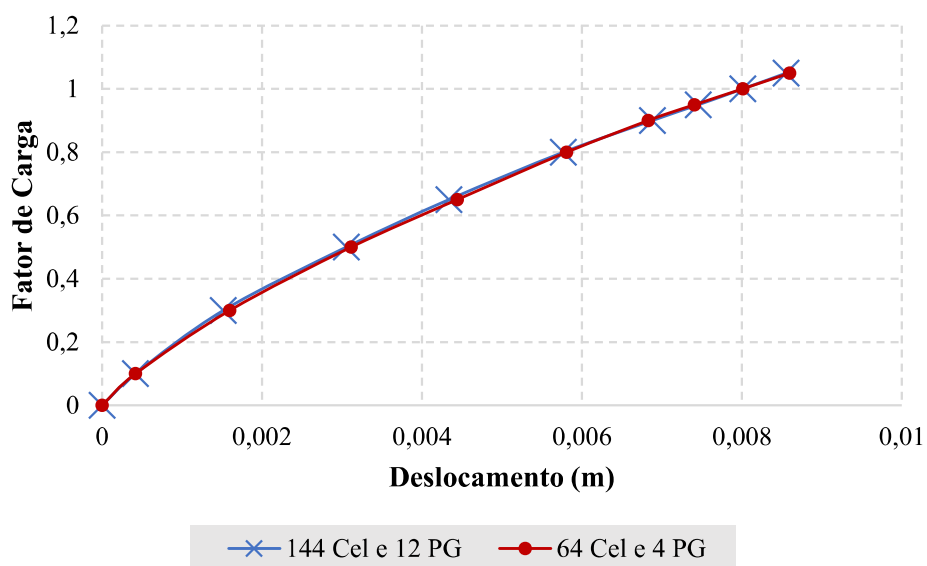
FIGURA 5.17 – Deslocamento no ponto central da placa submetida a carga distribuída em pequena região do centro, obtido com a malha 3 e variando-se o número de pontos de Gauss na espessura.



Fonte: Autoria própria (2022).

Observando a Fig. 5.17, nota-se uma similaridade em todas as análises realizadas, em vista disso, conclui-se que 4 pontos de Gauss já apresentam boa precisão. Em seguida, um gráfico foi plotado para comparar a malha selecionada que contém 64 células e 4 pontos de Gauss com a malha mais precisa de 128 células e 12 pontos de Gauss (ver Fig. 5.18).

FIGURA 5.18 – Deslocamento no ponto central da placa submetida a carga distribuída em pequena região do centro, considerando-se a malha3 com 4 PG e a malha 1 com 12 PG.



Fonte: Autoria própria (2022).

Analisando a Fig. 5.18, nota-se que a malha selecionada tem boa precisão e concluímos que a malha de 64 células e 4 pontos de Gauss será usada para análises em multiescala.

5.3 Análise em multiescala

5.3.1 Introdução

Neste item é realizada a análise em multiescala levando em consideração as malhas da macroescala definidas no item 5.2. O comportamento mecânico do material é definido pela resposta homogeneizada do EVR (Elemento de Volume Representativo), sendo que, dois EVRs diferentes foram adotados neste trabalho, denominados EVR-25i contendo 25 inclusões e 12 vazios (ver Fig. 5.19 a) e o EVR-5i com 5 inclusões e 4 vazios (ver Fig. 5.19 b), que foi desenvolvido com características semelhantes ao EVR proposto por SILVA (2022), porém contendo um número reduzido de agregados e vazios, o que leva a uma malha também bastante reduzida quando comparada à malha definida para o EVR proposto por SILVA (2022). Os EVRs adotado neste trabalho tem a forma de um quadrado, e o volume de agregados e vazios representa cerca de 40% e 3,39% respectivamente do volume total do EVR, definindo assim uma microestrutura heterogênea. A porosidade do concreto também é devido ao descolamento de fase (que ocorre entre a matriz e os agregados), por isso que a porcentagem adotada para os vazios (3,39%) não é grande.

A ideia de desenvolver o EVR mais simples é devido ao alto custo computacional da análise multiescala totalmente acoplada. Com isso, deseja-se verificar se realmente é necessário utilização de um EVR complexo, com quantidade grande de agregados e vazios, ou se a adoção de um EVR mais simples também consegue reproduzir de forma satisfatória o comportamento mecânico das placas. Foi realizado análise paramétrica do EVR-5i, no qual foi desenvolvido com os mesmos valores de parâmetros utilizados em SILVA (2022), com a exceção da curva de plasticidade, que adotou-se novos valores (0; 11,7) (0,22; 46), a fim de obter resultados numéricos mais próximos da curva experimental mostrada em DELALIBERA (2002). A malha do EVR, relativa ao MEF (Método dos Elementos Finitos), foi criada pelo *software* ANSYS® e contém 5 inclusões e 4 vazios. Então deve-se fazer modificações na malha do ANYS, a fim de transformá-la em uma malha do MEC (para mais detalhes sobre esse processo, ver SILVA (2022)).

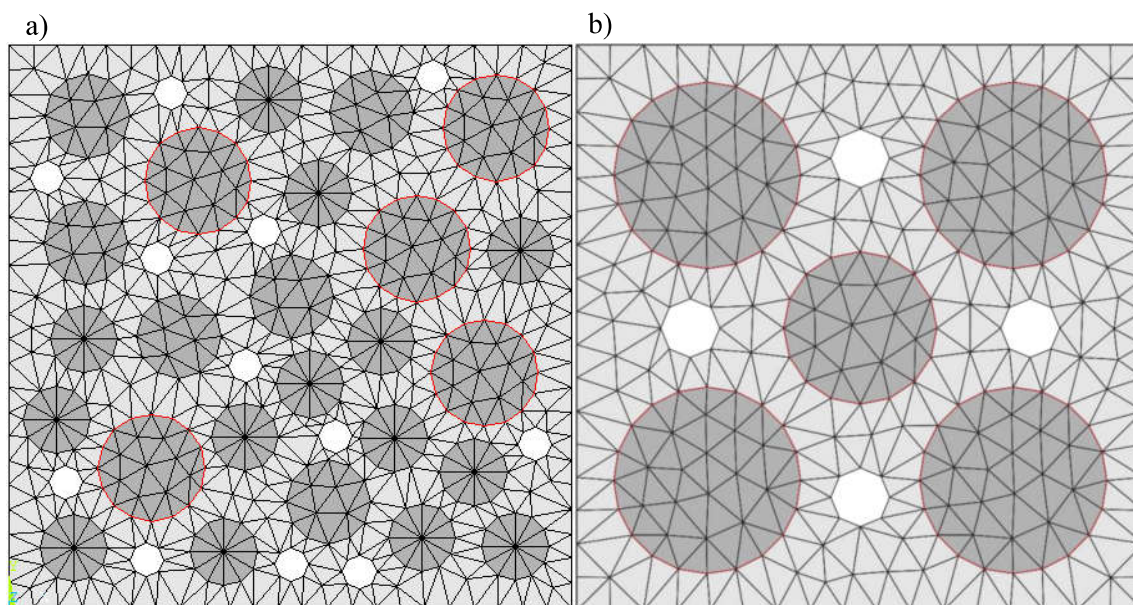
Nesse item serão analisadas as mesmas placas do item anterior onde serão comparadas diferentes modelagens, quanto à microestrutura. Assim, para representar a resposta constitutiva do material será adotado o EVR-25i desenvolvido em SILVA (2022) e o EVR-5i mais simples proposto nesse trabalho, sendo que ambos EVRs também serão considerados uma modelagem multiescala MEC/MEF, onde o MEF é adotado a nível da microescala. Observe que a formulação do EVR pelo MEF é similar àquela onde se utiliza o MEC. Porém, as características particulares de cada método numérico, leva a diferenças importantes nos modelos numéricos (para mais detalhes ver CROZARIOL e FERNANDES (2020)). Dessa forma, deseja verificar se a formulação proposta neste trabalho obtém resultados satisfatórios quando comparados com diferentes modelos numéricos. Nesse item o modelo de dano de Mazars não é considerado, uma vez que os modelos de contato e fratura coesiva são usados na análise multiescala a seguir. Além disso, como não se conhece a resposta experimental do concreto ensaiado em DELALIBERA (2002), submetido à tração, não é possível afirmar que os parâmetros adotados para o Modelo de Mazars na última seção de fato representam o comportamento do concreto ensaiado em DELALIBERA (2002).

5.3.2 Definição da microestrutura e das propriedades das fases dos EVRs

Neste trabalho serão adotados agregados e vazios circulares, devido aos estudos mostrados em SILVA (2022), que apresenta resultados satisfatórios, além de proporcionar menos instabilidade com o emprego de formas circulares. A figura 5.19 a mostra o EVR-25i, onde existem, 25 inclusões e 12 vazios, contendo 1116 células triangulares, 721 nós, dos quais 496 são nós de interface, 96 são nós na interface com vazios e 80 elementos de fratura ao redor dos agregados maiores. Para este EVR adotamos três dimensões de agregados, que estão detalhados na Tab. 5.3, e 12 vazios circulares de 6mm de diâmetro. A Fig. 5.19 b mostra o EVR-5i, onde foram inseridos elementos de contato e fratura em todas as interfaces pasta cimentícia/agregado. Este EVR tem um total de 403 nós, 520 células triangulares, 68 nós de contorno (onde nós duplos são adotados nos cantos), 192 nós de interface (onde os nós são duplos para

representar deslocamentos de fase) e 32 nós sobre interfaces da matriz com vazios. Para este EVR definimos 4 vazios circulares de 10,4mm de diâmetro, 4 agregados circulares que estão detalhados na Tab. 5.3.

FIGURA 5.19 – Modelagem da microestrutura e discretização para: a) EVR-25i com 25 inclusões e 12 vazios e b) EVR-5i com 5 inclusões grandes e 4 vazios.



Fonte: Autoria própria (2022).

Na tabela 5.3 é pode-se observar os parâmetros referentes à quantidade e dimensão dos agregados de ambos os EVRs.

TABELA 5.3 – Quantidade e dimensões dos agregados para cada EVR.

EVR	Número total de agregados	Diâmetro agregado/ Quantidade agregado			Fração volumétrica dos agregados
EVR-25i	25	19 mm	15 mm	12 mm	40,61%
		5	6	14	
EVR-5i	5	33 mm	27 mm		40,00%
		4	1		

Fonte: Autoria própria (2022).

Na tabela 5.4 é possível observar a discretização de ambos os EVRs.

TABELA 5.4 – Discretização dos EVRs.

Discretização						
EVR	Número total de nós	Número de células Triangulares	Número de elementos de Contorno	Número de nós da interface de inclusão	Número de nós de interface vazios	Número de elementos de contato e fratura coesiva
RVE 25i	721	1116	129	496	96	80
RVE 5i	403	520	68	192	32	96

Fonte: A autoria própria (2022).

A pasta de cimento (matriz) foi considerada como meio elasto-plástico seguindo o critério de Mohr-Coulomb, onde para a lei de encruamento foram adotados dois pontos para a curva de plastificação $(\bar{\epsilon}_p, \bar{\sigma}_y)$, que relaciona deformação plástica com tensão de escoamento. Além disso, os ângulos de fricção e dilatação são definidos iguais.

Ao redor dos agregados (inclusões) podem ser inseridos elementos finitos de contato e fratura coesiva. Os parâmetros referentes aos modelos constitutivos usados nesses elementos são definidos na Tab. 5.5 a seguir, sendo β_c o escorregamento entre as bordas que atribui valores diferentes aos deslocamentos; σ_c a máxima tensão de tração normal coesiva; δ_c a abertura crítica e λ_p penalty que é usado para modelar a rigidez entre células triangulares e é considerado no modelo de contato e fratura coesiva.

TABELA 5.5 – Parâmetros dos modelos nos elementos finitos de fratura e contato

Fase	Propriedades			
	β_c	σ_c (MPa)	δ_c (mm)	Penalty (λ_p)
ZTI	0,707	2	0,0568	2,00E+05

Fonte: Silva (2022).

Os agregados (inclusões) são considerados elásticos, sendo as propriedades do material na matriz e inclusões são definidas na tabela a seguir, onde o sub-índice M se refere à matriz; o sub-índice I se refere à inclusão e ϕ é o ângulo de dilatância e fricção do Mohr-Coulomb. Esses valores foram definidos no trabalho desenvolvido por SILVA (2022). Observe que apenas a curva plástica relacionada ao Mohr-Coulomb $(\bar{\epsilon}_p, \sigma_y)$, onde $\bar{\epsilon}_p$ é a deformação plástica efetiva e σ_y a tensão de escoamento, é adotada de forma diferente nos EVRs, que estão detalhadas na Tab. 5.6.

TABELA 5.6 – Propriedades da matriz e inclusões para cada EVR.

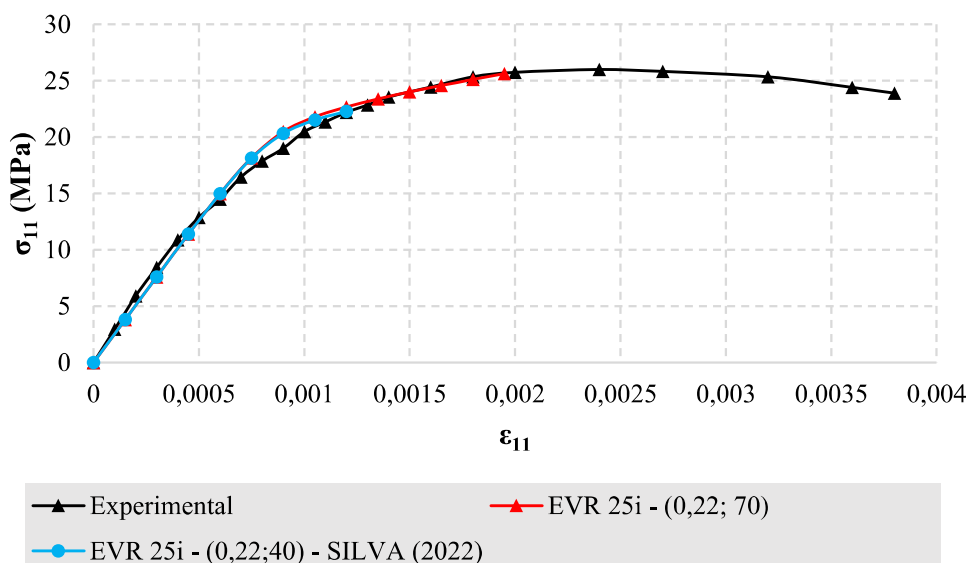
EVR	Propriedades					
	E_M (GPa)	E_I (GPa)	ν_M	ν_I	Ângulo de atrito (ϕ)	Curva de plasticidade ($\bar{\epsilon}_p, \sigma_y$ (MPa))
EVR-25i	23	40	0,2	0,3	4°	(0;11,0) (0,22;40)
EVR-5i	23	40	0,2	0,3	4°	(0;11,7) (0,22;46)

Fonte: Silva (2022).

5.3.3 Resultados numéricos do concreto representado por EVR-25i e EVR-5i.

Através do trabalho de SILVA (2022) concluiu-se que o EVR-25i com 12 vazios e 1116 células já conseguiu gerar resultados satisfatórios, portanto, será esse utilizado nesse trabalho. Como pode ser visto no trabalho de SILVA (2022) os EVRs com poros tiveram uma aproximação maior com a curva experimental. No entanto, no EVR com poros considerado em SILVA (2022), a resistência estava abaixo à observada experimentalmente. Logo, no presente trabalho foi dada continuidade da análise paramétrica utilizando o EVR-25i com poros. Adotou-se novos valores para curva de plasticidade sendo (0; 11,0) (0,22; 70), obtendo-se resultados satisfatórios em relação a curva experimental, como mostrado na Fig. 5.20. Nestas análises numéricas, que foram realizadas apenas ao nível da microestrutura, estabelecemos no contorno dos EVRs o seguinte vetor de deformação: $\epsilon_{11} = -0,003$; $\epsilon_{22} = 0,0006$ e $\epsilon_{12} = 0$, dividido em 20 incrementos.

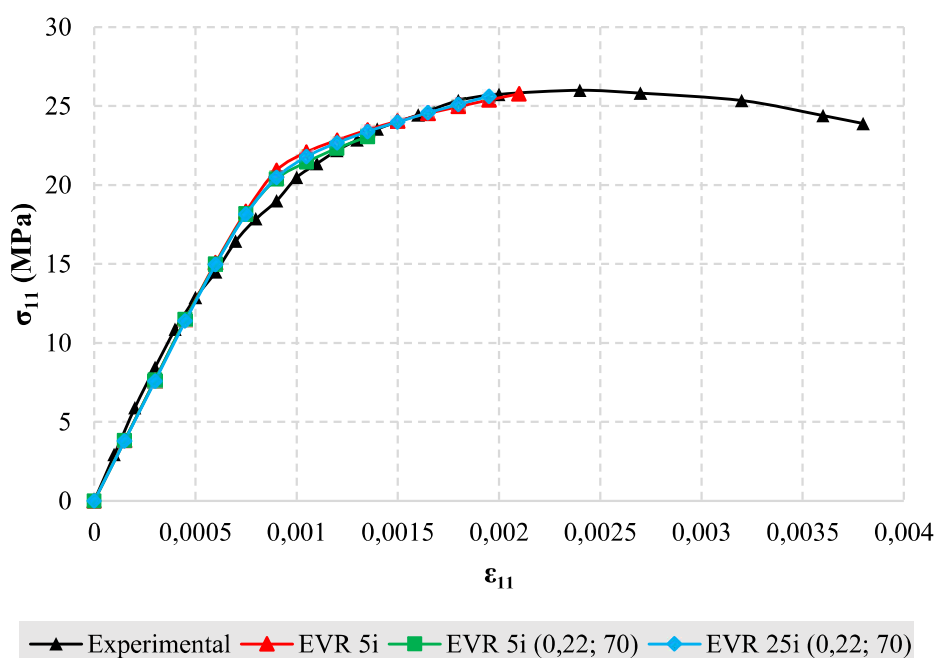
FIGURA 5.20 – Gráfico tensão homogeneizada na direção x (σ_x) versus deformação na direção x (ϵ_x), EVR-25i com variação da curva de plasticidade.



Fonte: Autoria própria (2022).

Na figura 5.21, mostramos que as microestruturas definidas no item 5.3.2, e intituladas como EVR-25i e EVR-5i, podem representar o comportamento mecânico do concreto ensaiado experimentalmente em DELLALIBERA (2002), considerando o estado predominante de compressão. Nestas análises numéricas, que foram realizadas apenas ao nível da microestrutura, estabelecemos no contorno dos EVRs o seguinte vetor de deformação: $\varepsilon_{11} = -0,003$; $\varepsilon_{22} = 0,0006$ e $\varepsilon_{12} = 0$, dividido em 20 incrementos. Observe na Fig. 5.21 que quando adotamos para EVR-5i a mesma curva plástica considerada para EVR-25i (ver curva EVR 5i (0,22; 70)), a resistência do EVR é reduzida. Isso pode ser explicado pelo fato do EVR-5i possuir maior número de elementos finitos coesivos nas interfaces (ver Tab. 5.4). A resistência do EVR é diretamente influenciada pelo número desses elementos finitos, pois quanto maior a sua quantidade, mais acentuado é o processo de fratura na região da ZTI. Assim modificamos a curva plástica do EVR com 5 inclusões para melhor comparar com os resultados experimentais. Dessa forma, conclui-se que o EVR-25i e o EVR-5i gera bons resultados, sendo esses aqueles utilizados nesse trabalho nas análises em multiescala do problema de flexão de placas.

FIGURA 5.21 – Gráfico tensão homogeneizada da direção x (σ_x) versus deformação na direção x (ε_x), EVR-5i em comparação com Delalibera (2002) e Silva (2022).

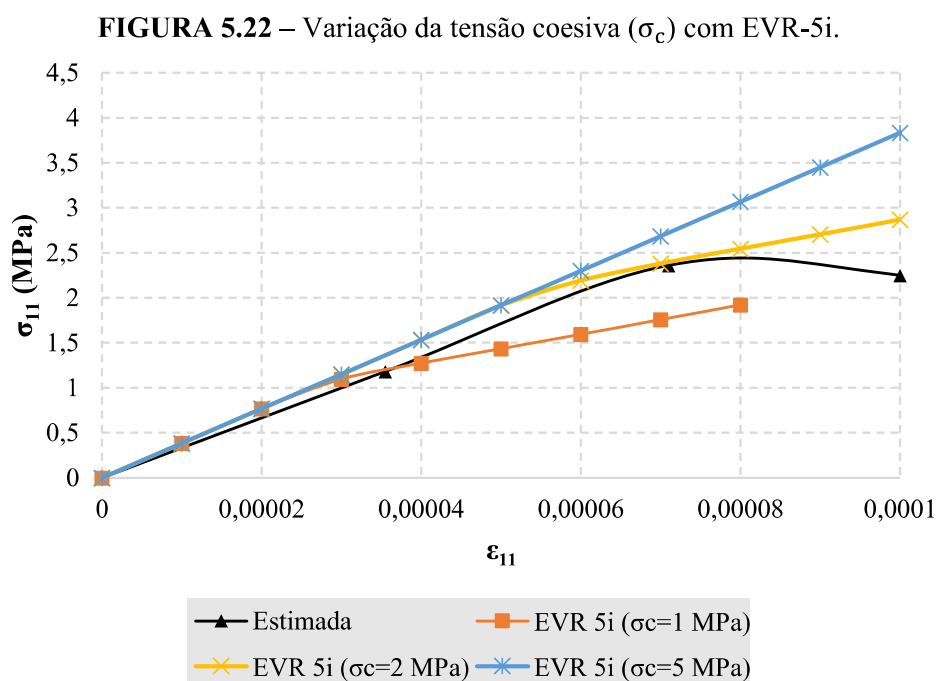


Fonte: Autoria própria (2022).

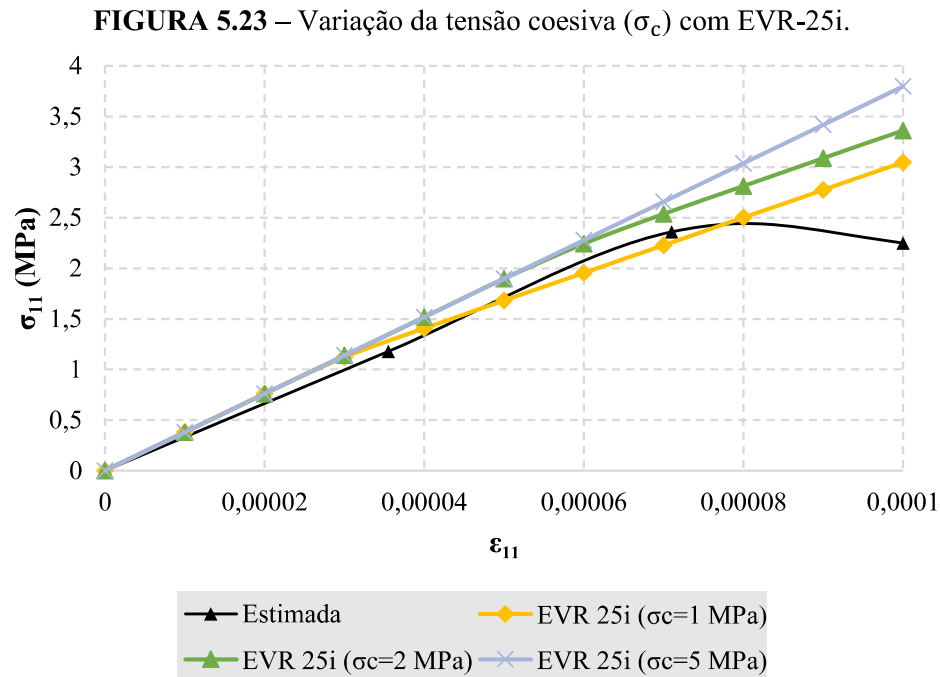
Como Dellalibera (2002) não testou experimentalmente o concreto para os estados predominantes de tração, na Fig. 5.22, Fig. 5.23 e Fig. 5.24 comparamos os resultados numéricos com os estimados por PITUBA E LACERDA (2012), onde simulações numéricas considerando o mesmo concreto foi realizado. Para isso, aplicamos ao contorno dos EVRs o seguinte vetor de tensão: $\varepsilon_{11} = 0,0003$; $\varepsilon_{22} = -0,00006$ e $\varepsilon_{12} = 0$, que é dividido em 20 incrementos. Além disso, consideramos os seguintes

valores para a Tensão Coesiva (σ_c) de tração: $\sigma_c = 1\text{MPa}$, $\sigma_c = 2\text{MPa}$ e $\sigma_c = 5\text{MPa}$, a fim de definir o valor a ser adotado nas análises multiescala do problema de flexão de placas realizadas nos próximos itens. Observe que para os estados predominantes de compressão (ver Fig. 5.21) esses diferentes valores de σ_c produzem os mesmos resultados numéricos.

A figura 5.22 mostra os resultados para o RVE-5i enquanto os relacionados ao RVE-25i são apresentados na Fig. 5.23. Como as curvas relacionadas a $\sigma_c = 2\text{MPa}$ se comparam melhor aos resultados estimados por PITUBA E LACERDA (2012), escolhemos esse valor para as análises posteriores.



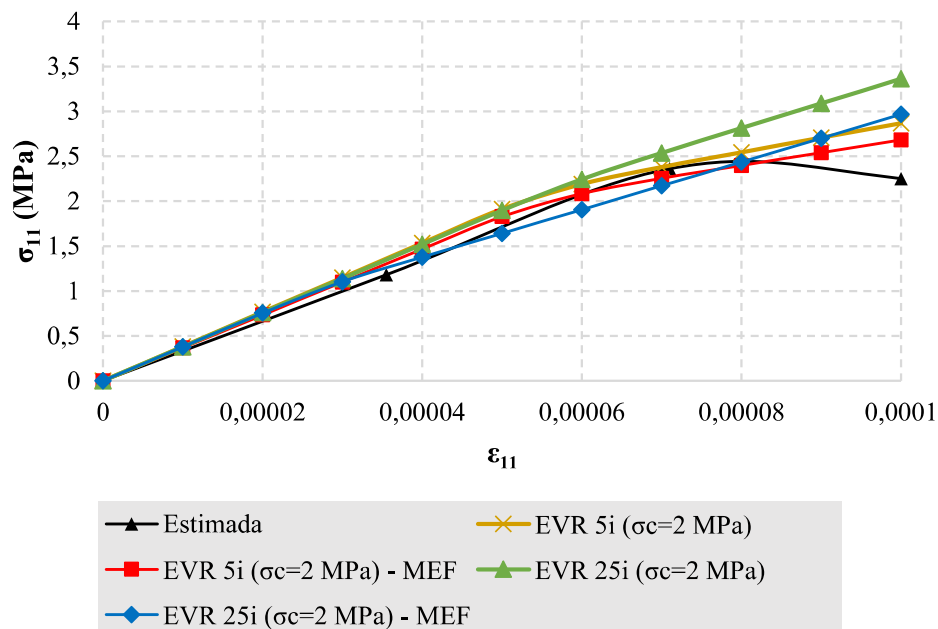
Fonte: Autoria própria (2022).



Fonte: Autoria própria (2022).

A variação da Tensão Coesiva apresentou algumas mudanças significativas nas curvas, o que é coerente, pois como tem-se um estado predominante de tração, se espera mudanças significativas na curva com a alteração dessa tensão, pois a mesma está ligada diretamente com o momento da abertura de fratura. Desta forma, adotou-se $\sigma_c = 2\text{Mpa}$, que se aproximou da curva mostrada em PITUBA E LACERDA (2012). Os resultados obtidos do EVR-5i e EVR-25i foram comparados com a modelagem MEC/MEF utilizando a Tensão Coesiva $\sigma_c = 2\text{Mpa}$, no qual são mostrados na figura a seguir.

FIGURA 5.24 – Tensão coesiva ($\sigma_c = 2\text{MPa}$) com EVR-25i e EVR 5i, com diferentes modelos numéricos.



Fonte: Autoria própria (2022).

5.3.4 Análise multiescala de uma chapa

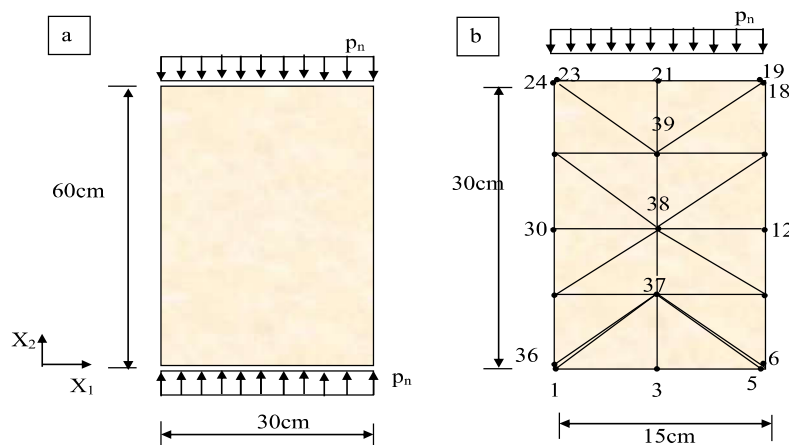
A fim de verificar a formulação multiescala, antes de analisar as placas submetidas à flexão, realizamos uma análise multiescala de uma chapa submetida a tensão normal (ver Fig.5.25 a), assumindo condição no estado plano de tensões. Esse exemplo simula o teste de compressão do corpo de prova e, portanto, deve gerar os mesmos resultados apresentados em DELALIBERA (2002), que analisou por meio de ensaios experimentais o teste uniaxial em compressão de um corpo de prova. Por razões de simetria, apenas um quarto da placa é considerado com as restrições cinemáticas apropriadas sendo impostas ao longo do contorno da simetria. A geometria, bem como a discretização, contem 16 elementos, 36 nós ao longo do contorno e 16 células sobre o domínio da placa é mostrada na Fig.5.25 (b).

Foi adotada uma tolerância $tol = 1,0 \text{ E-}3$ para a convergência de ambos os procedimentos iterativos: um relacionado ao macrocontínuo e outro necessário para atingir o equilíbrio EVR. A espessura da chapa foi assumida igual a $t=1\text{mm}$ e a força $p_n=25\text{N/mm}$ foi aplicada nos nós 19 a 23 (ver Fig.5.25 b). Completando as condições de contorno, os lados relativos aos nós 6 a 18 foram adotados livres (ver Fig.5.25 b), enquanto $u_n=0$ e $p_s=0$ foram prescritos aos nós 1 a 5 e 24 a 36, sendo n e s direções normal e tangencial ao contorno, respectivamente.

A ideia de realizar uma análise de uma chapa é para validar o método numérico com abordagem multiescala empregado neste trabalho, assim como verificar que o EVR-5i consegue reproduzir de forma satisfatória o comportamento mecânico de uma chapa sem a necessidade de um EVR complexo, como

o EVR-25i. Nos exemplos com abordagem multiescala considera-se como Placa 1 aquela que usou EVR-5i e Placa 2 aquela que usou EVR-25i.

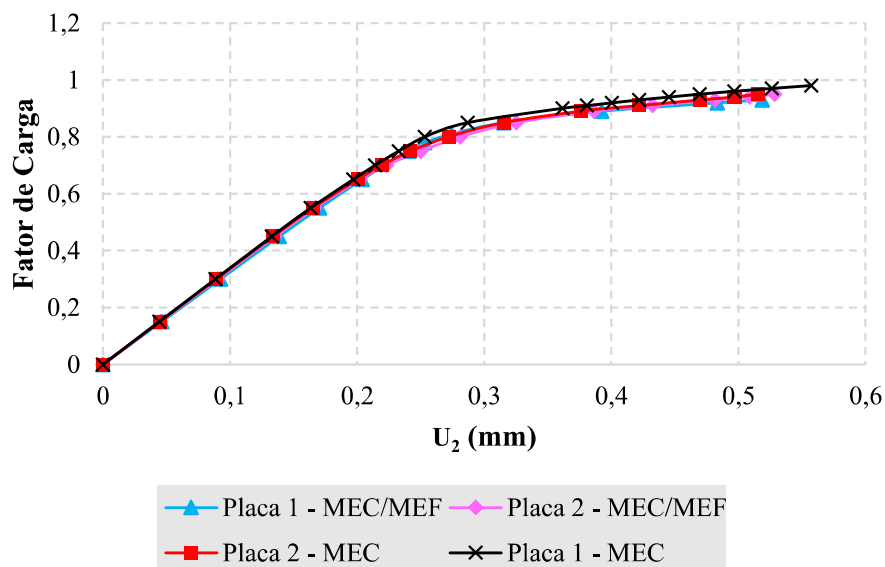
FIGURA 5.25 – Chapa submetida à força normal a) geometria b) discretização de um quarto da chapa.



Fonte: Pontes (2019).

O deslocamento na borda (nó 21, ver Fig.5.25 b) na direção x_2 é exibido na Fig. 5.26, onde β é o fator de carga.

FIGURA 5.26 – Deslocamento no contorno do nó 21, para o exemplo da chapa.



Fonte: Autoria própria (2022).

Para modelar o comportamento do concreto, consideramos os dois EVRs definidos no item 5.3.2: EVR-5i e EVR-25i. A Fig. 5.26, no qual mostra o deslocamento do nó 21 com a formulação do MEC (descrita neste trabalho) e MEC-MEF, através do processo incremental de carga. Os resultados

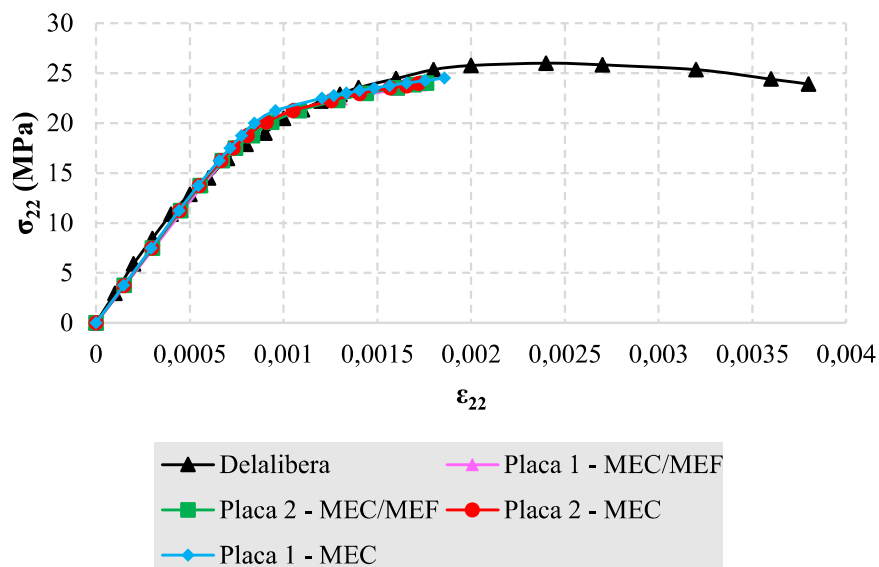
obtidos pelos modelos são idênticos na fase elástica e algumas diferenças na fase plástica. Pode-se observar que comparando os EVRs com a formulação do MEC após um fator de carga de 0,80 (onde está localizada a fase plástica), o EVR-5i é um pouco mais rígido que o EVR-25i, mas essa diferença não altera significativamente os resultados da chapa. Enquanto a Fig. 5.27 compara a curva experimental com os resultados numéricos.

Nas figuras 5.26 e 5.27 podemos observar que a placa onde o EVR-25i é adotado apresenta resistência reduzida em relação à placa onde usamos o EVR-5i para modelar a microestrutura do concreto, apesar dos resultados serem muito semelhantes. Além disso, mostramos na Fig. 5.27 que a curva de tensão *versus* deformação na direção x_2 no ponto 21, através do processo incremental de carga, se compara muito bem ao teste experimental. Além disso, essa curva é idêntica aos resultados numéricos apresentados no item 5.3.3, como esperado, porque neste exemplo simulamos um caso de tensão constante sobre o domínio da placa. Portanto, qualquer ponto da placa deve apresentar tensor de tensão idêntico àquele onde a análise é realizada apenas na microescala. Mostramos nesta seção que o programa de multiescala proposto é capaz de capturar o teste experimental apresentado em DELALLIBERA (2002) para o estado predominante de compressão.

De maneira geral os resultados obtidos pelo modelo apresentado neste trabalho são satisfatórios quando comparados com outros modelos, embora existe uma pequena diferença isso não altera significativamente a resposta numérica da chapa. A partir disso, pode-se dizer que o EVR mais simples pode ser usado para análise multiescala através do MEC, e o complexo EVR não precisa ser utilizado na análise para o estado predominante de compressão, pois o concreto está satisfatoriamente representado por um EVR mais simples.

O gráfico abaixo mostra a deformação ($\varepsilon_{22} = U \text{ (mm)} / 300 \text{ (mm)}$) *versus* tensão na direção x_2 , onde observa-se que a chapa tem o comportamento semelhante ao comportamento do EVR (ver Fig. 5.21) analisado isoladamente. Além disso os resultados comparam-se bem aos resultados experimentais. Note que no presente exemplo tem-se um EVR em cada nó de célula do macrocontínuo, representado pela chapa.

FIGURA 5.27 – Gráfico Tensão na direção y (σ_{22}) versus Deformação (ϵ_{22}) no ponto 21.

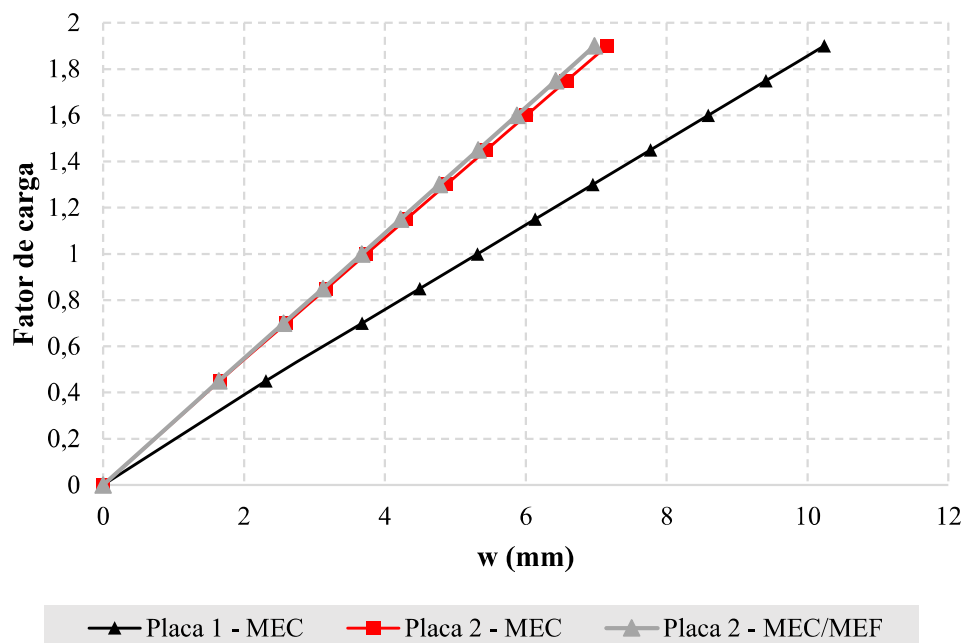


Fonte: Autoria própria (2022).

5.3.5 Análise multiescala de uma placa simplesmente apoiada

Para o primeiro exemplo em multiescala foi considerado uma placa simplesmente apoiada nos quatro lados, com dimensões e geometria definidas no item 5.2.2, sujeita a uma carga normal distribuída em toda a superfície média da placa, com um valor de $0,0016 \text{ N/mm}^2$. Além disso, considerou-se a malha de 32 células (Fig. 5.2) e 6 pontos de Gauss conforme as análises no item 5.2. Na Fig. 5.28 é demonstrado o deslocamento w no ponto central, ao longo do processo incremental de carga da placa. Para representar a microestrutura do concreto, adotamos os dois EVRs definidos no item 5.3.2: EVR-5i e EVR-25i. Considerando o EVR-25i, também realizamos uma análise usando a formulação MEC/MEF desenvolvida em FERNANDES, PITUBA e SOUZA NETO (2015), que obtém resultados semelhantes à formulação proposta.

FIGURA 5.28 – Deslocamento transversal (w) do ponto central no domínio da placa simplesmente apoiada.



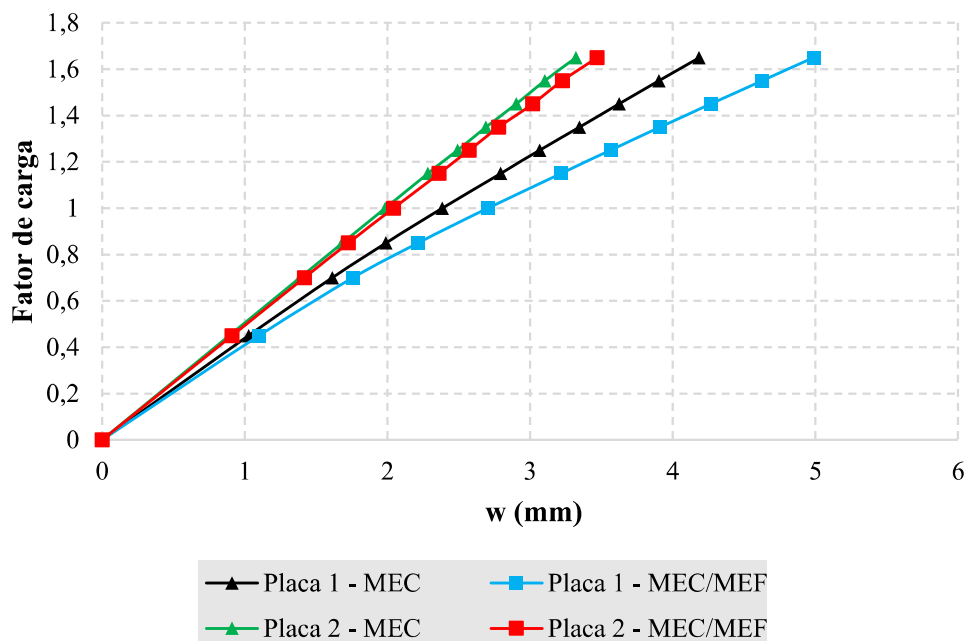
Fonte: Autoria própria (2022).

Contudo diferentemente do exemplo anterior, onde foram adotados estados de compressão predominantes, a placa onde se considera o EVR-25i apresenta rigidez muito maior do que a placa onde adotamos o EVR-5i. Como no presente exemplo temos tanto estados de compressão predominantes quanto estados de tração predominantes, podemos concluir que o processo de fratura é muito mais acentuado no EVR-5i, reduzindo assim a rigidez da placa. Observe que o número de elementos finitos de contato e fratura coesiva é maior no EVR-5i que também possui inclusões maiores. Como no EVR-5i esses elementos finitos são colocados ao redor de todas inclusões, a distribuição desses elementos finitos é bastante diferente para os dois EVRs, o que afeta diretamente o comportamento mecânico para estados de tração predominantes. Já o EVR-25i com MEC apresentou uma pequena diferença de 2.53% mais frágil do que o MEC/MEF, isso demonstra a eficácia do método numérico apresentado neste trabalho, quando comparado com o modelo MEC/MEF, no qual se utilizou o mesmo EVR.

5.3.6 Análise multiescala de uma viga em balanço

Para o segundo exemplo em multiescala foi considerado uma viga em balanço com um carregamento de 0,01kN/m aplicado nos nós da extremidade da placa (como mostrado na Fig. 5.7). A geometria e dimensões da viga estão definidas no item 5.2.3 e a malha utilizada na multiescala foi de 64 células (Fig. 5.8) e 6 pontos de Gauss. Na figura a seguir é demonstrado o gráfico com o deslocamento w do ponto P (Fig. 5.7) na extremidade da placa.

FIGURA 5.29 – Deslocamento transversal (w) do ponto P na extremidade do contorno da viga em balanço.



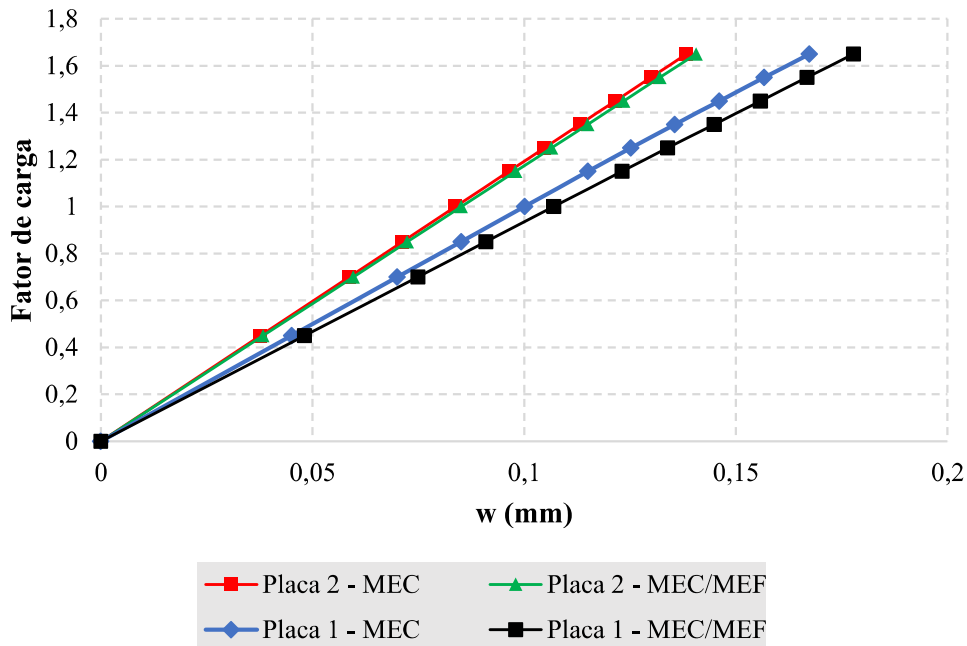
Fonte: Autoria própria (2022).

De maneira semelhante ao exemplo anterior, percebe-se uma diferença entre um EVR mais complexo e um EVR mais simples, neste exemplo numérico o EVR-25i apresentou uma rigidez maior no valor 20.67% em comparação com o EVR-5i, ambos utilizando o MEC. Porém quando o EVR-5i é usado para modelar a microestrutura, se considerarmos o modelo MEC/MEF, a rigidez da placa é reduzida. Pode-se observar quando se adota o EVR-25i, considerando o modelo proposto e o modelo MEC/MEF, os resultados são muito semelhantes, com uma pequena diferença de rigidez de 4.32% menor do que o modelo MEC/MEF, essa diferença é pequena e não altera significativamente os resultados numéricos. Com base nestes resultados, valida a eficácia do método numérico proposto neste trabalho em relação ao modelo MEC/MEF.

5.3.7 Análise multiescala da placa submetida a carga distribuída em pequena região do centro

No terceiro exemplo numérico em multiescala é analisada uma placa submetida a uma carga distribuída uniforme $g=0,001\text{N/mm}^2$ sobre o domínio central quadrado, de dimensão $0,15 \times 0,15\text{m}$, definido na Fig. 5.13, a fim de representar uma carga concentrada de $0,0225\text{KN}$. A malha no domínio da placa contém 64 células (Fig. 5.14) e são definidos 4 pontos de Gauss ao longo da espessura da placa. Na Fig. 5.30 demonstra-se o deslocamento w transversal no ponto central da placa, ao longo do processo incremental de carga.

FIGURA 5.30 – Deslocamento transversal (w) do ponto central da placa submetida a carga concentrada.



Fonte: Autoria própria (2022).

Como pode ser observado, os resultados considerando o modelo proposto e o modelo MEC/MEF são muito semelhantes quando se adota o EVR-25i. Mas quando se adota o EVR-5i modelando a microestrutura, a placa apresenta menor rigidez se considerarmos o modelo MEC/MEF. Similarmente ao exemplo anterior, a placa onde o comportamento mecânico do concreto é modelado pelo EVR-5i apresenta rigidez muito menor que a placa onde o EVR-25i é adotado.

Portanto, esses três exemplos numéricos do problema de flexão indicam que quando o processo de fratura na região da ZTI é modelado, o diâmetro das inclusões e, conseqüentemente, a distribuição dos elementos finitos de contato e fratura coesiva no domínio EVR, têm grande influência na evolução do processo de fratura na ZTI, o que afeta diretamente a rigidez do EVR. Por outro lado, para problemas em que apenas os estados de compressão predominantes são considerados (ver item 5.3.4), o comportamento mecânico do problema do macrocontínuo é muito semelhante, independentemente de qual EVR é usado. É interessante notar que o EVR-5i tem o dobro do comprimento da interface (500mm), onde são definidos os elementos finitos de contato e fratura coesiva, comparado ao EVR-25i (240mm). Portanto, espera-se um processo de fratura mais acentuado no EVR-5i, o que está de acordo com os resultados numéricos.

5.4 Tempo de execução das análises multiescala

Como todas essas análises foram realizadas na mesma máquina e tiveram os mesmos valores na entrada de dados, o tempo necessário para convergir cada modelo pôde ser comparado para avaliar o desempenho de cada EVR e de cada modelo numérico. Considerando as análises multiescala apresentada no item 5.3, como base para esta comparação, na tabela abaixo é mostrada a relação entre os tempos necessários para convergir com cada modelo, sendo: t_{MEC} o tempo que levou com o modelo onde se usa apenas o MEC em ambas escalas e $t_{(MEC/MEF)}$ o modelo onde o MEC é usado na macroescala e o MEF na microescala. Foi realizada a comparação entre o tempo $t_{Placa 1}$ referente à análise da placa na qual é usado o EVR-5i na microescala e o tempo $t_{Placa 2}$ que se refere à placa onde o EVR-25i é usado na microescala, a fim de analisar a relação de tempo de processamento quando se usa um EVR mais simples e outro complexo, empregando os modelos numéricos MEC e MEC/MEF. Também foi realizada a comparação entre o tempo $t_{Chapa 1}$ e $t_{Chapa 2}$, de maneira semelhante.

Nas Tabs. 5.7 e 5.8 observa-se que para as placas e chapas 1 e 2, o modelo MEC tem um custo computacional de aproximadamente 45% menor do que o modelo MEC/MEF (relação $t_{MEC} / t_{(MEC/MEF)}$). Por outro lado, quando o EVR-5i é adotado na microescala obtemos um ganho computacional de aproximadamente 82% quando comparado ao EVR-25i mais complexo (relação $t_{Placa 1} / t_{Placa 2}$ e $t_{Chapa 1} / t_{Chapa 2}$), o que foi observado para ambos modelos numéricos MEC e MEC/MEF. Isso demonstra a eficiência do modelo onde apenas o MEC foi usado, onde observa-se nos exemplos de compressão e flexão um menor custo computacional. Além disso, no caso do teste de compressão apresentado, ressalta a eficiência do EVR mais simples, uma vez que resultados semelhantes foram obtidos quando se usou o EVR-25i mais complexo, porém com um menor esforço computacional.

TABELA 5.7 – Tempo de processamento - Placa.

Placa 1	Placa 2	MEC	MEC/MEF
$t_{MEC}/t_{(MEC/MEF)}$	$t_{MEC}/t_{(MEC/MEF)}$	$t_{Placa 1}/t_{Placa 2}$	$t_{Placa 1}/t_{Placa 2}$
0.566	0.5665	0.1787	0.1789

Fonte: A autoria própria (2022).

TABELA 5.8 – Tempo de processamento - Chapa.

Chapa 1	Chapa 2	MEC	MEC/MEF
$t_{MEC}/t_{(MEC/MEF)}$	$t_{MEC}/t_{(MEC/MEF)}$	$t_{Chapa 1}/t_{Chapa 2}$	$t_{Chapa 1}/t_{Chapa 2}$
0.584	0.581	0.165	0.161

Fonte: A autoria própria (2022).

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste trabalho, é apresentado uma formulação MEC para análise não linear de flexão de placas de concreto, que emprega uma abordagem multiescala para representar com uma maior precisão o comportamento do material, levando em consideração fenômenos dissipativos. Neste tipo de análise, considera-se na modelagem as diferentes fases do material, e o comportamento do material não é regido por um modelo constitutivo, mas é definida pela a resposta homogeneizada da tensão e do tensor constitutivo da microestrutura, chamada EVR (Elemento de Volume Representativo). O concreto é um material heterogêneo, composto por três fases que consiste na pasta cimentícia (matriz), vazios, agregados e uma zona de transição interfacial (ZTI) entre os agregados e a matriz.

Inicialmente, de forma abrangente, são abordados alguns conceitos e definições pertinentes à temática que percorrem o trabalho: teoria clássica de placas, flexão de placas e análise em multiescala. Através da realização do mapeamento sistemático, pode-se obter várias bibliografias que se enquadram no tema apresentado, expondo um número crescente de publicações ao longo dos últimos anos, comprovando assim o potencial desta pesquisa. O objetivo geral deste trabalho em realizar uma análise numérica não linear da flexão de placas utilizando apenas o MEC, demonstrando a eficácia deste modelo numérico em relação ao acoplamento MEC/MEF, porém com menor custo computacional, foi alcançado, mostrando que a formulação apresentada no contexto da teoria multiescala é uma alternativa promissora para representar o comportamento mecânico de placas de concreto.

Para o problema de flexão de placas utilizando o MEC, é necessária uma solução de problemas de equilíbrio em diferentes escalas. Um desses problemas de equilíbrio está relacionado ao macrocontínuo, que no presente trabalho é definido pelo problema de flexão de placas. A outra se refere ao problema bidimensional definido para a microestrutura do material que pode ser composto por diferentes fases sendo representado pelo EVR. No problema de flexão de placas, os momentos são calculados numericamente considerando um esquema gaussiano. Portanto, neste tipo de modelagem um EVR deve ser atribuído para cada ponto de Gauss colocado ao longo da espessura da placa.

Nos exemplos numéricos, a formulação foi aplicada ao caso de placas de concreto. Para isso, definimos vazios dentro do domínio do EVR a fim de representar a porosidade do concreto, os agregados foram representados por inclusões elásticas e adotamos o critério elasto-plástico de Mohr-Coulomb para modelar o comportamento mecânico da matriz, que representa a pasta cimentícia. Além disso, consideramos elementos finitos de contato e fratura coesiva inseridas ao redor dos agregados, para modelar o processo de fratura na Zona de Transição Interfacial. Nos exemplos numéricos, foi considerado dois EVRs diferentes para modelar o comportamento mecânico do concreto, cujas microestruturas são bastante diferentes, mas eles têm a mesma fração de volume de inclusões e vazios. Um EVR possui 5 inclusões e 4 vazios, sendo o processo de fratura modelado em torno de todas as inclusões, e outro EVR contendo 25 inclusões e 12 vazios.

Inicialmente foi realizado as análises apenas ao nível da microestrutura para mostrar que os comportamentos mecânicos de ambos os RVEs estão de acordo com o ensaio experimental de compressão. Essas análises mostram que, para estados de compressão predominantes, não é necessária uma microestrutura complexa para representar o comportamento mecânico do concreto. Em seguida, consideramos o problema de equilíbrio bidimensional para o macrocontínuo, onde uma carga normal de compressão é aplicada à chapa para simular o teste experimental de compressão. Realizamos duas análises multiescala para esta chapa: em uma o modelo constitutivo é definido pelo EVR com 25 inclusões e na outra utilizamos o EVR com 5 inclusões. Mostramos que ambas as placas possuem rigidez e resistência de acordo com o teste experimental, mostrando que para estados de compressão predominantes ambos os EVRs apresentam comportamento mecânico semelhante. Estes resultados estão de acordo com os discutidos anteriormente onde as análises foram realizadas apenas ao nível da microestrutura. Além disso, mostramos neste exemplo que o algoritmo multiescala proposto é capaz de capturar satisfatoriamente os resultados experimentais.

Por fim, realizamos a análise de flexão para três placas diferentes: uma simplesmente apoiada submetida a carga uniformemente distribuída, uma viga em balanço com carregamento aplicado nos nós da extremidade e outra com carga central concentrada onde dois lados opostos estão livres e os outros dois são fixos. Mostramos nestes exemplos que quando são considerados os estados de tração predominantes, como é o caso do problema de flexão, a placa onde é adotado o EVR com 5 inclusões tem rigidez muito menor do que a placa onde consideramos o EVR com 25 inclusões. Esses resultados mostram que para estados de tração predominantes, a definição da microestrutura é muito importante, ou seja, o tamanho das inclusões e vazios, bem como sua distribuição no domínio do EVR. Entretanto com maior importância é a definição da região da ZTI onde o processo de fratura é modelado. Observe que para o EVR com 25 inclusões o processo de fratura é modelado apenas em torno das inclusões maiores, onde o comprimento total dessas interfaces é igual a 240mm. No outro EVR com 5 inclusões os elementos finitos de contato coesivo são definidos em torno de todos os agregados, resultando no comprimento total das interfaces igual a 500mm. Portanto, como o comprimento da interface, onde o processo de fratura é modelado, do EVR com 5 inclusões é muito maior, espera-se um processo de fraturamento mais acentuado neste caso o que reduz a rigidez da placa.

Em algumas aplicações numéricas comparamos o custo computacional da presente formulação com o discutido em FERNANDES, PITUBA e SOUZA NETO (2015) onde MEC é adotado para modelar o macrocontínuo enquanto o problema do microcontínuo é resolvido pelo MEF. Por fim, mostramos que a presente formulação tem um esforço computacional reduzido o que é muito importante porque a análise multiescala é muito cara computacionalmente. Além disso, nos exemplos numéricos mostramos que o algoritmo multiescala proposto é robusto, estável e preciso, capaz de reproduzir resultados experimentais, comprovando a sua efetividade.

Com base no modelo apresentado neste trabalho, algumas sugestões para trabalhos futuros são apresentadas:

- Desenvolver uma programação em paralelo deste modelo numérico apresentado, a fim de reduzir o custo computacional das análises em multiescala.
- Realizar outras modelagens com o EVR-5i, reduzindo o comprimento das interfaces onde a fratura é inserida, a fim de aumentar a rigidez do EVR e com isso obter resultados mais próximos do EVR-25i.

REFERÊNCIAS

- AKHER, A. A.; HARTLEY, G. A. Evaluation of Boundary Integrals for Plate Bending. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 28, pp. 75-93, 1989.
- ALTIERO, N.J.; SIKARSKIE, L. D. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form. *Comp. & Struct.*, n.9, p.163-168, 1978.
- BARRET, K.E.; ELLIS, S. An exact theory of elastic plates. *Int. Journal Solids Struct.*, v.24, n.9, p.859-880, 1988.
- BETTI, E. Teoria dell elasticita. *Il Nuovo Cimento*, v. 7, n. 1, p. 5–21, 1872.
- BÉZINE, G.A.; CIMETIERRE, A.; GELBERT, J.P. Unilateral buckling on thin plates by the boundary integral equation method, *Int. J. Num. Meth. Engrg*, n.21, p.2189-2199, 1985.
- BLANCO, P. et al. Variational Foundations and Generalized Unified Theory of RVE-Based Multiscale Models. *Archives of Computational Methods in Engineering*, v. 23, n. 2, p. 191–253, 2016.
- BREBBIA, C. A. **The boundary element method for engineers**. London: Pentech Press, 1978.
- BURCZYŃSKI, T. et al. Molecular statics coupled with the subregion boundary element method in multiscale analysis. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, v. 8, n. 3, p. 319–330, 2010
- CHENG, S. Elastic theory of plates and a refined theory. *J. Appl. Mech.*, n.46, p.644- 650, 1979.
- CHUEIRI, L.H.M. **Formulação do método dos elementos de contorno para análise elastoplástica de placas**. São Carlos. 219p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1994.
- COSTA Jr.; BREBBIA C.A. Elastic buckling of plates using the boundary element method. In: BREBBIA, C.A.; MAIER, G. eds. *Boundary element VII*. Berlin, **Springer Verlag**, 1985.
- CROZARIOL, L. H. DE R.; FERNANDES, G. R. Análise da resposta constitutiva de materiais heterogêneos pelo Método dos Elementos de Contorno, considerando-se diferentes microestruturas para o EVR. *Matéria (Rio de Janeiro)*, v. 25, n. 1, 2020.
- CROZARIOL, L. H. R. **Análise do comportamento de microestruturas heterogêneas através do método dos elementos de contorno considerando-se não-linearidade física**. 121f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Ilha Solteira, 2017.
- CROZARIOL, L. H. R. FERNANDES, G. R. Análise da resposta constitutiva de materiais heterogêneos pelo Método dos Elementos de Contorno, considerando-se diferentes microestruturas para o EVR. *Materia*: Rio de Janeiro, v. 25, p. e-12550, 2020.
- DELALIBERA, R. G. **Análise teórica e experimental de vigas de concreto armado com armadura de confinamento**. 2002. 232 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2002.

- FERNANDES, G. R. **Análise não-linear de estruturas de pavimentos de edifícios através do método dos elementos de contorno**. São Paulo. 272p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2003.
- FERNANDES, G. R. et al. A 2D boundary element formulation to model the constitutive behavior of heterogeneous microstructures considering dissipative phenomena. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 99, n. November 2018, p. 1–22, 2019.
- FERNANDES, G. R. et al. A 2D RVE formulation by the boundary element method considering phase debonding. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 104, n. January, p. 259–276, 2019.
- FERNANDES, G. R.; DE SOUZA NETO, E. A. Self-consistent linearization of non-linear BEM formulations with quadratic convergence. **Computational Mechanics**, v. 52, n. 5, p. 1125–1139, 2013.
- FERNANDES, G. R.; FURTADO, A. S.; PITUBA J. J. C.; DE SOUZA NETO, E. A. Multiscale analysis of structures composed of metal matrix composites considering phase debonding. **Journal Multiscale Modell**, v. 8:1740004, p. 1–29, 2017.
- FERNANDES, G. R.; OHLAND, G. A.; VIEIRA, J. F. A boundary element formulation to perform elastic analysis of heterogeneous microstructures. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 87, n. December 2017, p. 47–65, 2018.
- FERNANDES, G. R.; PITUBA, J. J. C.; DE SOUZA NETO, E. A. Multi-scale modelling for bending analysis of heterogeneous plates by coupling BEM and FEM. **Engineering analysis with boundary elements**, v. 51, p. 1–13, 2015.
- FERNANDES, G. R.; PONTES, G. B. S.; OLIVEIRA, V. N. A 2D BEM formulation considering dissipative phenomena and a full coupled multiscale modelling. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 119, n. July, p. 25–43, 2020.
- FERNANDES, G.; PITUBA, J.; NETO, E. FEM/BEM formulation for multi-scale analysis of stretched plates. **Engineering Analysis With Boundary Elements**, v. 54, p. 47–59, 2015.
- FERNANDES, G.R. **O método dos elementos de contorno aplicado à análise não linear de placas**. São Carlos. 178p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1998.
- FURTADO, A. S.; DE CERQUEIRA PITUBA, J. J.; FERNANDES, G. R. Análise da influência de microestruturas heterogêneas na resposta macromecânica do problema bidimensional de placas. **Revista Materia**, v. 22, n. 2, 2017.
- GHOSH, S.; LEE, K.; MOORTHY, S. Two scale analysis of heterogeneous elastic-plastic materials with asymptotic homogenization and Voronoi cell finite element model. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 132, n. 1–2, p. 63–116, 1996.

- GHOSH, S.; LEE, K.; RAGHAVAN, P. A multi-level computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous materials. **International journal of solids and structures**, v. 38, n. 14, p. 2335–2385, 2001.
- GIUSTI, S. M. et al. An assessment of the Gurson yield criterion by a computational multi-scale approach. **Engineering Computations**, v. 26, n. 3, p. 281–301, 2009.
- HAN, J.-G.; REN, W.-X.; HUANG, Y. A spline wavelet finite element formulation of thin plate bending. **Engineering with Computers**, v. 25, n. 4, p. 319–326, 2009.
- HANSEN, E.B. Numerical Solution of integro-differential and singular integral equations for plate bending problems. **Journal of Elasticity** v.6, n.1, p.39-56, 1976.
- HENCHY, H. Über die berücksichtigung der schubverzerrungen in ebenen platten. **Ing. Arch.**, n.16, 1947.
- HUANG, S.; LIU, Y. J. A fast multipole boundary element method for solving the thin plate bending problem. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 37, n. 6, p. 967–976, 2013.
- ILIC, S.; HACKL, K. Application of the multiscale FEM to the modeling of nonlinear multiphase materials. **Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, v. 47, n. 3, p. 537–551, 2009.
- JASWON M.A.; MAITI, M.; SYMM, G.J. Numerical biharmonic analysis and some applications. **Int. J. Solids Structures**, n.3, p.309-332, 1967.
- JÚNIOR, N. S. DE S. Formulação multiescala para a análise de flexão de placas considerando processos dissipativos na microestrutura e acoplamento MEC/MEF. **Revista Materia**, v. 22, n. 2, 2017.
- JÚNIOR, N. S. DE S. Formulação multiescala para a análise de flexão de placas considerando processos dissipativos na microestrutura e acoplamento MEC/MEF. **Revista Materia**, v. 22, n. 2, 2017.
- KAMIYA, N. et. al. An approximate finite deflection analysis of a heated elastic plate by the boundary element method. **Appl. Math. Modelling**, 1982.
- KATSIKADELIS, J.T.; ARMENAKAS, A.E. Analysis of clamped plates on elastic foundation by the boundary integral method. **J. Appl. Mech.**, ASCE, v.110, n.7, p.1085-1104, 1984.
- KIRCHHOFF, G. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen schleibe. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, n.40, p.51-58, 1850.
- KOUZNETSOVA, V.; GEERS, M. G. D.; BREKELMANS, W. A. M. Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 54, n. 8, p. 1235–1260, 2002.
- KROMM, A. Verallgemeinerte theorie der plattenstatik. **Ing. Arch.**, n.21, 1953.
- LADEVÈZE, P. Multiscale modelling and computational strategies for composites. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 60, n. 1, p. 233–253, 2004.
- LEVINSON, M. An accurate simple theory of statics and dynamics of elastic plates. **Mech. Res. Comm.**, v.7, n.6, p.343-350, 1980.

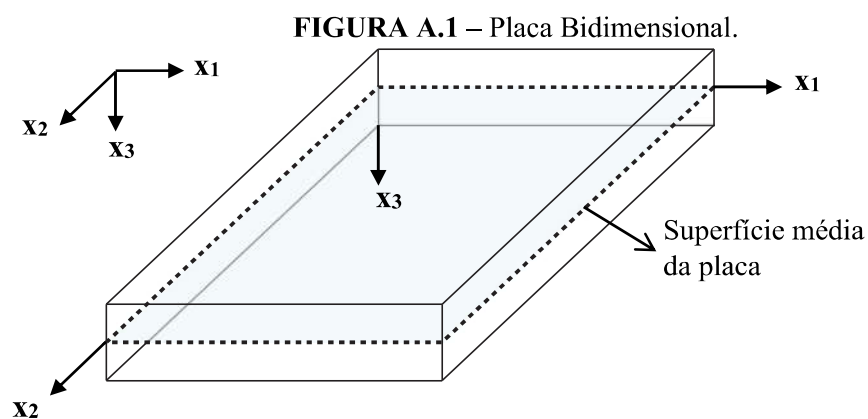
- LIU, D. S.; CHEN, Y. W.; LU, C. J. Development of High-Order Infinite Element Method for Bending Analysis of Mindlin–Reissner Plates. **Mathematical problems in engineering**, v. 2020, 2020.
- MARKOVIC, D. et al. Multi-scale modeling of heterogeneous structures with inelastic constitutive behaviour: Part I - Physical and mathematical aspects. **Engineering Computations (Swansea, Wales)**, v. 22, n. 5–6, p. 664–683, 2005.
- MAZARS, J. **Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure**. 1984. 283 f. Tese (Doutorado), Université Paris 6, 1984.
- MAZARS, J.; PIJAUDIER-CABOT, G. Continuum damage theory – application to concrete. **Journal of Engineering Mechanics**, vol. 115, n. 2, p. 345–365, 1989.
- MINDLIN, R.D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. **J. Appl. Mech.**, n.13, p.31-38, 1951.
- MONTERO-CHACÓN, F.; MEDINA, F. A lattice-particle approach to determine the RVE size for quasi-brittle materials. **Engineering Computations**, v. 30, n. 2, p. 246–262, 2013.
- MORJARIA, M.; MUKHERJEE, S. Inelastic analysis of transverse deflection of plates by the boundary element method. **J. Appl. Mech.**, ASME, v.47, n.2, p.291-296, 1980.
- MOYEDA, A.; FISH, J. Towards practical multiscale approach for analysis of reinforced concrete structures. **Computational Mechanics**, v. 62, n. 4, p. 685–700, 2018.
- OGIERMAN, W.; KOKOT, G. **Modeling of constitutive behaviour of anisotropic composite material using multiscale approach** *Mechanika*, 2015.
- PAIVA, J.B. **Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estrutura**. São Carlos. 195p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1987.
- PITUBA, J. J. C.; LACERDA, M. M. S. Simplified damage models applied in the numerical analysis of reinforced concrete structures. **Ibracon Structures and Materials Journal**, vol. 5, n. 1, 2012.
- PITUBA, J.J.C.; FERNANDES, G.R.; SOUZA NETO, E.A. Modelling of cohesive fracture and plasticity processes in composite microstructures. **Journal of Engineering Mechanics**. v. 142, 2016.
- PONTES, G. B. **Análise não linear física de chapas considerando-se uma abordagem Multiescala pelo Método dos Elementos de Contorno**. Dissertação de Mestrado – Faculdade de Engenharia, UNESP, Ilha Solteira. 2019.
- REISSNER, E. On bending of elastic plates, **J. Math. Physics**, n.23, p.184-191, 1944.
- _____. On small deflections of shear deformable elastic plates. **Meth. Appl. Mech. Engrg.**, n.59, p.227-233, 1986.
- _____. The effect of transverse shear deformation on bending of elastic plates. **J. Appl. Mech**, n.12, 1945.
- RODRÍGUES, J. C. G. **Sobre o emprego do Método dos elementos de Contorno em problemas elásticos bidimensionais**. São Carlos. 131p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1986.

- SHEN, L.; XU, X. Multiscale stochastic finite element modeling of random elastic heterogeneous materials. **Computational Mechanics**, v. 45, n. 6, p. 607–621, 2010.
- SILVA, M. J. M. **Análise do comportamento mecânico da microestrutura do concreto em regime de compressão por meio de uma abordagem multiescala e o MEC**. Catalão. Dissertação (Mestrado) – Unidade Acadêmica Especial de Engenharia, Regional Catalão, Universidade Federal de Goiás, 2022, 162 p.
- SOARES, D.; TELLES, J.; GUIMARÃES, S. Boundary elements with equilibrium satisfaction: a consistent formulation for plate bending analysis considering Reissner’s theory. **Computational Mechanics**, v. 43, n. 4, p. 443–450, 2009.
- SOMER, D. D. et al. A sub-stepping scheme for multi-scale analysis of solids. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 9–12, p. 1006–1016, 2009.
- TEMIZER, I.; ZOHDI, T. A numerical method for homogenization in non-linear elasticity. **Computational Mechanics**, v. 40, n. 2, p. 281–298, 2007.
- TRIANAFYLLOU, S. P.; CHATZI, E. N. A hysteretic multiscale formulation for nonlinear dynamic analysis of composite materials. (ORIGINAL PAPER). **Computational Mechanics**, v. 54, n. 3, p. 763, 2014.
- WU, B.C.; ALTIERO, N.J. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions. **Comput. & Struct.**, n.10, p.703-707, 1979.
- ZHANG, H.; WU, J.; LV, J. A new multiscale computational method for elasto-plastic analysis of heterogeneous materials. **Computational Mechanics**, v. 49, n. 2, p. 149–169, 2012.

APÊNDICE A FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PLACAS

A.1 Introdução

Entre os elementos estruturais de superfície, a placa é geralmente definida como um corpo delimitado por duas superfícies planas. Uma de suas características é que a distância entre duas superfícies, chamada de espessura, é pequena se comparada às demais dimensões do corpo. O plano intermediário das duas faces que definem a placa é chamado de superfície média da placa, onde a representação geométrica utilizada é bidimensional, com os eixos x_1 x_2 , conforme a Fig. (A.1):



Fonte: Autoria própria (2022).

A placa suporta apenas carregamentos transversais paralela à x_3 , ou seja, sujeita a flexão simples. Dado o fato de que uma placa é fina o suficiente, o deslocamento vertical de qualquer ponto do plano é igual ao ponto correspondente ao plano do meio na mesma vertical. Esta consideração pressupõe implicitamente que a deformação normal na direção x_3 pode ser desprezada:

$$w(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2) \quad (\text{A.1})$$

Neste trabalho será adotado o modelo de placa utilizando a teoria clássica desenvolvida por Kirchhoff. Ele fornece resultados precisos para placas delgadas (finas), onde os efeitos da deformação por cisalhamento são desprezados ao longo da espessura t , onde cada ponto é definido pela cota: $-\frac{t}{2} \leq x_3 \leq \frac{t}{2}$.

A.2 Suposições básicas

Ao definir o elemento estrutural conforme descrito no item A.1, as seguintes hipóteses são necessárias para escrever as equações diferenciais fundamentais de placas delgadas:

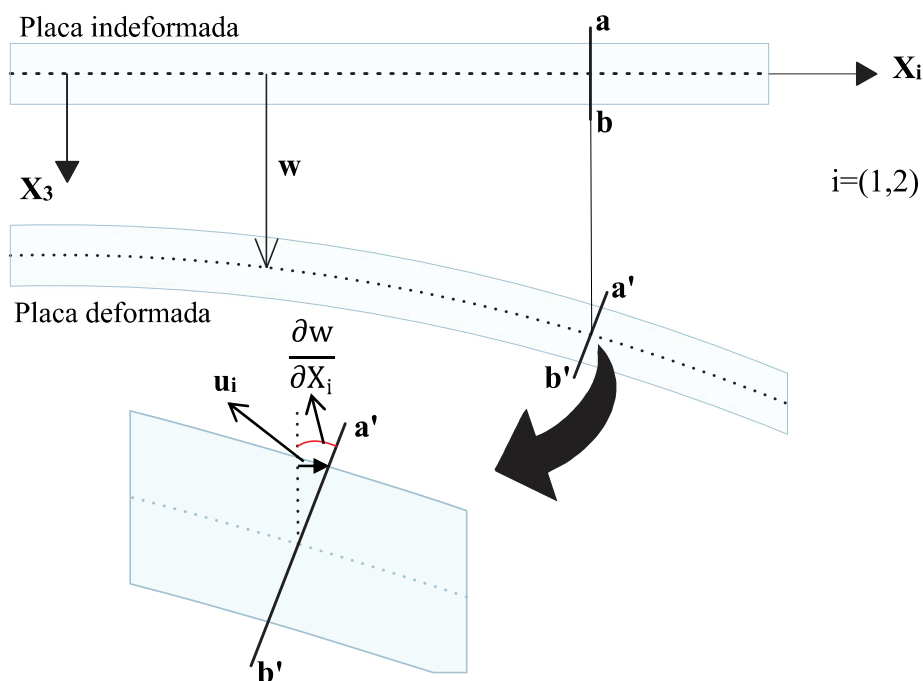
- A tensão normal transversal da placa (σ_{x3}) pode ser ignorada;
- Comparando com a espessura t da placa, o deslocamento transversal é pequeno;
- Devido à carga transversal, não há deformação na superfície média da placa;
- O ponto que estava inicialmente perpendicular à superfície média da placa permanece nesta normal após a curvatura. Isso corresponde à afirmação de que a seção transversal permanece plana após a flexão e rotaciona apenas em relação ao eixo neutro. Isso significa que a força de cortante não tem efeito sobre a flecha, ocorre apenas devido à flexão.
 - Essa hipótese permite que as deformações de cisalhamento transversais sejam desprezadas, ou seja: $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$;
 - Logo as componentes de tensão $\tau_{13} = \tau_{23} = 0$;
 - Sendo assim as deformações ε_3 não são levadas em consideração na formulação do problema, uma vez que o componente de tensão σ_3 é desprezado.

A.3 Relações Básicas

A.3.1 Deslocamentos na placa

Os deslocamentos u_1, u_2, u_3 , nas direções x_1, x_2, x_3 , e a rotação em relação às direções x_1, x_2 , são as componentes do vetor deslocamento de qualquer ponto da placa. Assumindo que o ponto pertence ao plano médio da placa os deslocamentos u_1, u_2 , podem ser ignorados, ou seja: $u_1 = u_2 = 0$ e $u_3 \neq 0$.

Portanto, como a placa é definida pela superfície média, apenas o deslocamento u_3 , que é chamado de flexa w , fará parte da definição do problema. Porém, para os pontos que não pertencem à superfície média, a quarta suposição permite conhecer u_1 e u_2 a partir de $w(x_1, x_2)$, conforme mostrado na Fig. (A.2) a seguir:

FIGURA A.2 – Deslocamentos devidos à flexão da placa.

Fonte: Autoria própria (2022).

onde $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ é a inclinação em relação a x_i da deformada.

Como o valor de w é muito pequeno, o ângulo que define a inclinação em relação a x_i da deformada é confundido com seu valor tangente, portanto, os deslocamentos u_1 e u_2 podem ser escritos da seguinte maneira:

$$u_i = -x_3 w_{,i} \quad (i=1,2) \quad (\text{A.2})$$

A.3.2 Deformações

Com base nas suposições feitas no item (A.2), e considerando a Eq. (A.2), o tensor das deformações é dado de maneira indicial, por:

$$\varepsilon_{ij} = -x_3 w_{,ij} \quad (i,j=1,2) \quad (\text{A.3})$$

sendo:

- $w_{,ij}$ o tensor das curvaturas, onde $w_{,13}$ é seu componente no plano paralelo a $x_1 x_3$ e $w_{,23}$ é seu componente no plano paralelo a $x_2 x_3$;
- $\varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{12}}{2}$.

A.3.3 Tensões

De acordo com as suposições apresentadas no item (A.2), e o estado plano de tensões, as tensões são obtidas pela lei de Hooke, que forma na forma indicial é dada por:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (i,j,k=1,2) \quad (\text{A.4})$$

sendo:

- G é o módulo de elasticidade transversal do material;
- ν o coeficiente de Poisson;
- E o modulo de elasticidade longitudinal do material.

Substituindo a Eq. (A.3) em (A.4), obtêm:

$$\sigma_{ij} = \frac{Ex_3}{(1-\nu^2)} [\nu W_{,kk} \delta_{ij} + (1-\nu)W_{,ij}] \quad (i,j,k=1,2) \quad (\text{A.5})$$

A.3.4 Relações de equilíbrio

Considere o elemento infinitesimal de placa de dimensões (dx_1, dx_2, dx_3) , em que seu estado de tensão é demonstrado na Fig. (A.3) juntamente com a carga transversal g distribuída em sua área. Integrando-se as tensões ao longo da espessura, obtêm-se os esforços, dados por: M_{11} e M_{22} (momentos de flexão), M_{12} e M_{21} (momentos volventes), Q_1 e Q_2 (esforços cortantes) conforme é mostrado na Fig. (A.4) e definidos nas equações (A.6) a (A.8).

$$M_{11} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} x_3 \sigma_{11} dx_3 \quad (\text{A.6})$$

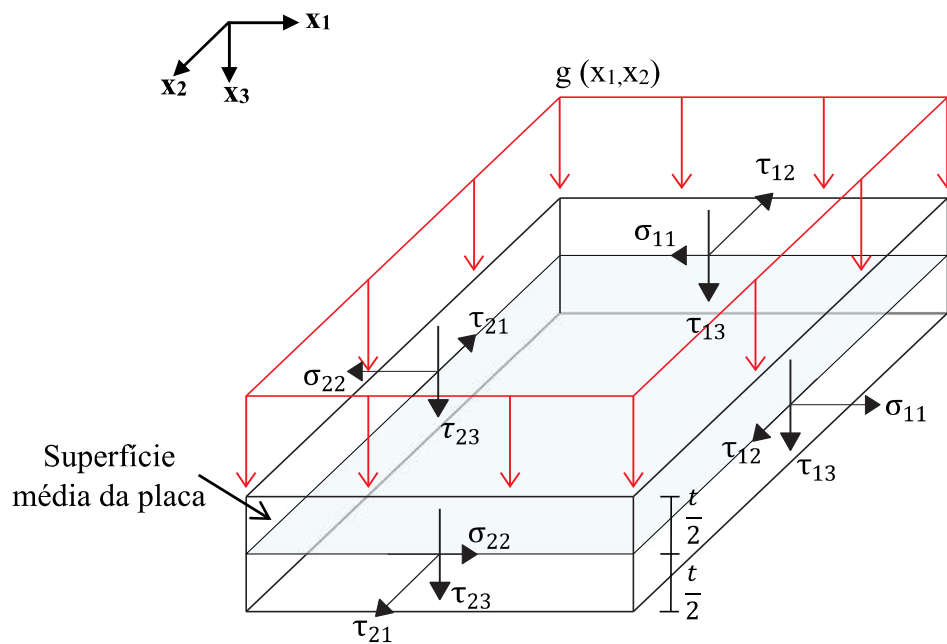
$$M_{22} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} x_3 \sigma_{22} dx_3 \quad (\text{A.7})$$

$$M_{12} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} x_3 \tau_{12} dx_3 \quad (\text{A.8})$$

$$Q_1 = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{13} dx_3 \quad (\text{A.9})$$

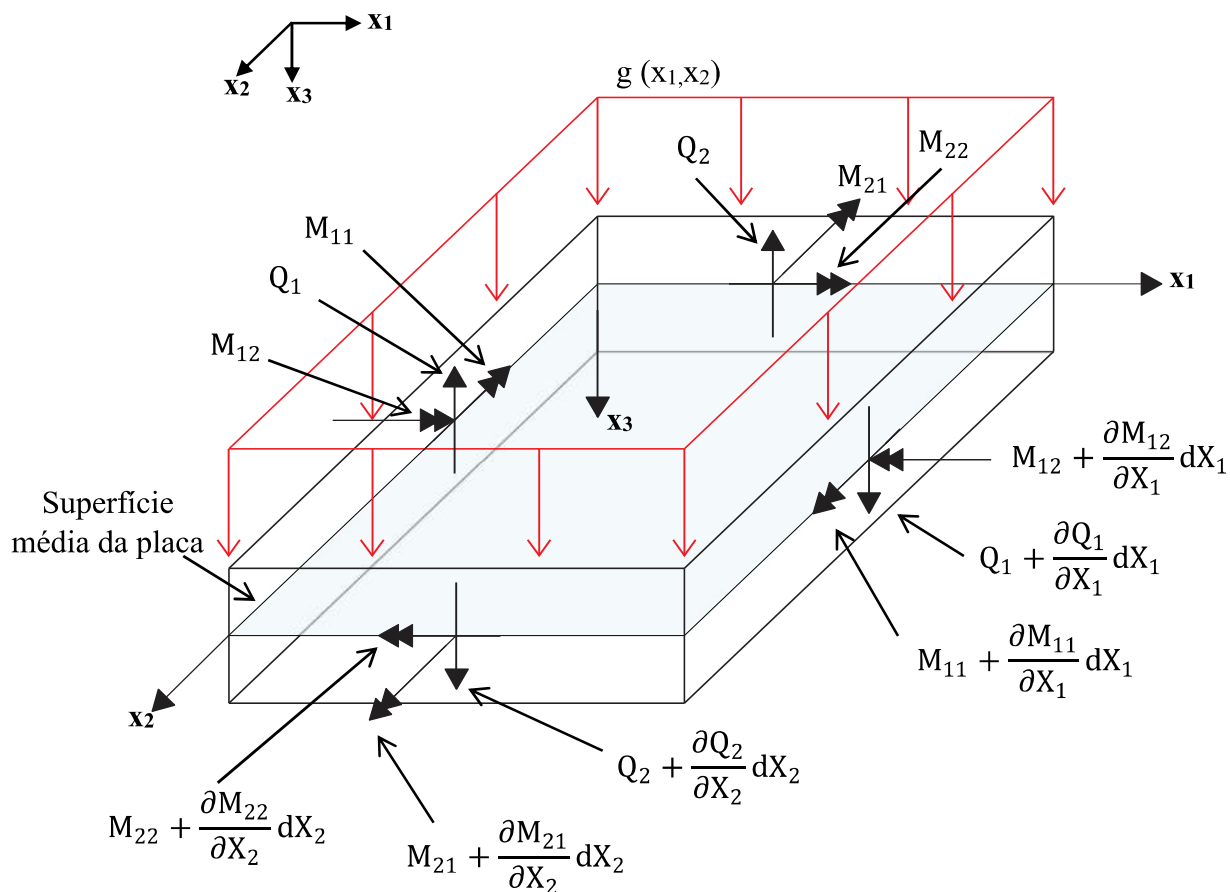
$$Q_2 = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{23} dx_3 \quad (\text{A.10})$$

FIGURA A.3 – Tensões na Placa.



Fonte: Autoria própria (2022).

FIGURA A.4 – Esforços em um Elemento de Placa.



Fonte: Autoria própria (2022).

Substituindo a Eq. (A.5) nas equações integrais (A.6), (A.7) e (A.8), obtemos a equação do momento por unidade de comprimento, que é obtida pela integração das tensões ao longo da espessura x_3 , conforme mostrado a seguir na forma indicial:

$$M_{ij} = -D[vW_{,kk} \delta_{ij} + (1 - \nu)W_{,ij}] \quad (i,j,k=1,2) \quad (A.11)$$

sendo:

- $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ caracteriza a rigidez à flexão da placa.

Através da Eq. (A.11), as curvaturas são obtidas a partir dos momentos:

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix} = \frac{12}{t^3 E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \nu) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{33} \end{pmatrix} \quad (i,j,k=1,2) \quad (A.12)$$

No entanto, uma vez que as componentes de tensão τ_{23} e τ_{13} são desprezadas, a força de cisalhamento será obtida pela equação de equilíbrio do elemento, pois embora a carga transversal gere força de cisalhamento, sua influência na flexão da placa delgada pode ser desprezada, mas não pode ser ignorada na equação de equilíbrio do elemento. Portanto, considerando a carga distribuída g que equilibra as forças verticais e momentos em torno de x_1 e x_2 , obtemos duas relações de equilíbrio, demonstrada a seguir de forma indicial:

$$Q_{i,i} + g = 0 \quad (i=1,2) \quad (A.13)$$

$$M_{ij,i} - Q_j = 0 \quad (i,j=1,2) \quad (A.14)$$

Levando em conta as equações (A.11) e (A.14), obtém-se:

$$Q_j = M_{ij,i} = -DW_{,kkj} \quad (i,j,k=1,2) \quad (A.15)$$

A.3.5 Equação diferencial de placas

Levando em consideração as equações (A.11), (A.13), (A.14) e (A.15) e fazendo as simplificações necessárias, pode-se escrever a equação diferencial:

$$\nabla^2 \nabla^2 W = \frac{g}{D} \quad (\text{A.16})$$

sendo:

- $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} \right)$ é o operador de Laplace.

A.3.6 Sistema genérico de coordenadas

As componentes de momento, originalmente definidas nas direções x_1 e x_2 , podem ser reescritas em relação a um sistema local de coordenadas (n e s), onde n é a direção normal do contorno e s direção tangente do contorno. Inicialmente, obtêm os momentos agindo no plano de normal n , nas direções x_1 e x_2 . A partir desses valores, obtemos a componente do momento M_{nn} na direção n e a componente do momento M_{ns} na direção s , dados por:

$$M_{nn} = M_{ij} n_i n_j \quad (i,j=1,2) \quad (\text{A.17})$$

$$M_{ns} = M_{ij} n_i s_j \quad (i,j=1,2) \quad (\text{A.18})$$

onde s_j (com $j=1,2$) definem os cossenos diretores da direção s ; n_1 e n_2 são os cossenos diretores na direção normal n .

Ao equilibrar as forças verticais, obtemos:

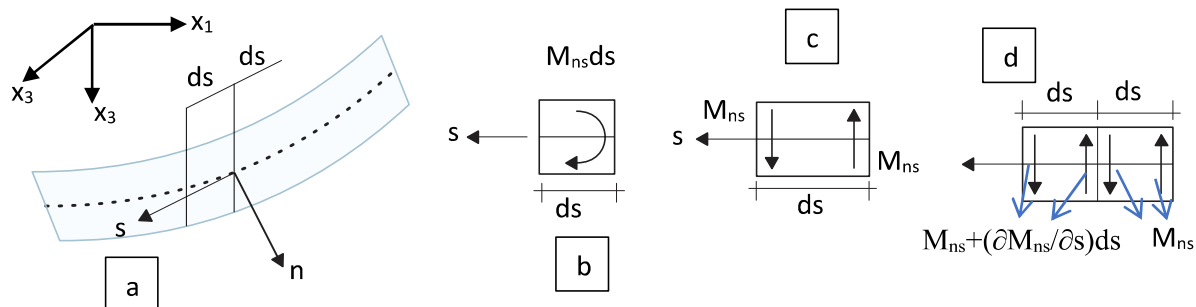
$$Q_n = Q_i n_i \quad (i,j=1,2) \quad (\text{A.19})$$

A.3.7 Força cortante equivalente

Usualmente, no problema de placas tem-se cinco incógnitas: deslocamento w , sua derivada, $\partial w / \partial n$, e os esforços M_n , M_{ns} e Q_n . Visto que a equação diferencial (A.16) é de quarta ordem, pode haver somente quatro variáveis, duas das quais devem ser fornecidas como condições de contorno, ou seja, devem ser valores prescritos. Kirchhoff (1850), certificou que as condições de contorno de cisalhamento,

Q_n e momento volvente, M_{ns} , podem ser agrupados em uma única variável, dessa maneira eliminando uma incógnita. Considere uma placa de contorno curvo para o qual, em um ponto genérico, P, se define um sistema de referência cartesiano (n, s), nas direções normal e tangente do contorno.

FIGURA A.5 – Momento volvente no contorno.



Fonte: Autoria própria (2022).

O momento volvente resultante em um elemento de contorno de comprimento ds é $M_{ns}ds$. Este momento pode ser considerado como resultado das forças com intensidade M_{ns} aplicadas na extremidade do elemento ds . A Fig. (A.5d) é a interpretação binária da justaposição de dois elementos de comprimento ds e os momentos volventes correspondentes. A resultante das forças aplicadas na junção dos dois elementos é $(\partial M_{ns}/\partial s)ds$. Essa força, que é adicionada à força de cisalhamento, $Q_n ds$, leva a um esforço designado como força cortante equivalente, cuja intensidade é por unidade de comprimento, dado por:

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \quad (\text{A.20})$$

Segundo o princípio de St. Venant, esta substituição de forças não altera a curvatura da placa, pois não alterará os valores de M_{ns} , apenas afetará a distribuição de tensões próximo ao contorno.

A.3.8 Reação de canto

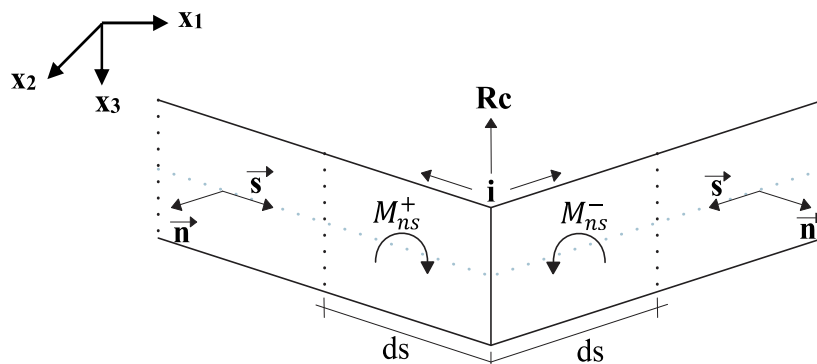
Devido à substituição de força feita no item A.3.7, uma R_c (Reação de Canto) aparecerá em qualquer canto i da placa. Conforme demonstrado na Fig. (A.6), uma resultante diferente de zero devido às reações de apoio correspondente a cada lado necessariamente aparece no canto. Este resultado é chamado de reação de canto e é dado por:

$$R_{ci} = M_{nsi}^+ - M_{nsi}^- \quad (\text{A.21})$$

onde:

- M_{nsi}^+ é Momento volvente posterior;
- M_{nsi}^- é Momento volvente anterior.

FIGURA A.6 – Reação de Canto.






Fonte: Autoria própria (2022).

A.4 Condição de contorno para flexão simples

As bordas de uma placa podem ser constituídas de três vinculações clássicas: borda engastada, borda simplesmente apoiada e borda livre. Conforme Kirchhoff (1850), existem quatro variáveis em cada nó do contorno: A força cortante equivalente V_n , o momento fletor M_n , a flecha w e a rotação $\partial w/\partial n$, dos quais duas incógnitas são conhecidas, pois são impostos como uma condição de contorno.

De modo geral, quando o deslocamento U_i ($U_1=w$, $U_2=\partial w/\partial n$) é conhecido, a força correspondente P_i ($P_1=V_n$, $P_2=M_n$) é desconhecida, e vice-versa. Neste trabalho, deslocamento e reações de canto também são considerados como variáveis do problema e em cada canto um deles deve ser atribuído como uma condição de contorno.

TABELA A.1 – Condições de Contorno.

Borda Engastada		$w = \partial w/\partial n = 0$; V_n e M_n são desconhecidos
Borda Simplesmente Apoiada		$w = M_n = 0$; V_n e $\partial w/\partial n$ são desconhecidos.
Borda Livre		$V_n = M_n = 0$. w e $\partial w/\partial n$ são desconhecidos.

Fonte: Autoria própria (2022).

A.5 Equações da placa em coordenadas polares

Alguns problemas de análise estrutural são analisados mais facilmente quando a equação diferencial das placas é referida num sistema de coordenadas polares. Portanto, um ponto P com coordenadas (x_1, x_2) é possível ser estabelecido como uma função de r (a distância deste ponto até a origem do sistema de coordenadas (x_1, x_2)) e φ (o ângulo entre o segmento \overline{OP} e o eixo Ox_1). Conforme demonstrado no trabalho de FERNANDES (1998), é possível obter as seguintes equações:

Equação diferencial em coordenadas polares, dada por:

$$\nabla^2 \nabla^2 W = \frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{g}{D} \quad (\text{A.22})$$

Equação dos momentos na forma indicial:

$$M_{ij} = -D \left\{ \frac{d^2 w}{dr^2} [\delta_{ij} \nu + (1 - \nu)(r_{,i} r_{,j})] + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} [\delta_{ij} \nu + (1 - \nu)(t_i t_j)] \right\} \quad (\text{A.23})$$

Derivada de terceira ordem:

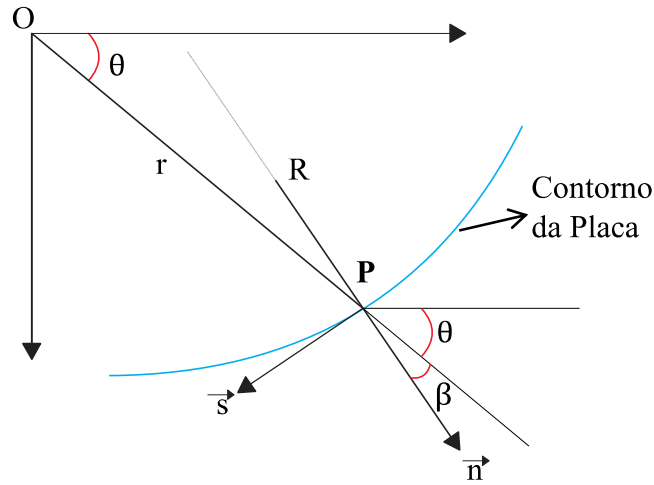
$$w_{,kki} = r_{,i} \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \quad (\text{A.24})$$

Considerando a Eq. (A.24) e substituindo na Eq. (A.15), que representam os esforços cortante, sua forma final é dado por:

$$Q_j = -Dr_{,j} \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \quad (i,j=1,2) \quad (\text{A.25})$$

Tendo as expressões conhecidas, em coordenadas polares, de M_{ij} e Q_j , é possível deduzir, neste mesmo sistema de coordenadas, as equações de M_n , M_{ns} e V_n em um ponto P genérico do contorno, onde n e s são vetores normal e tangentes do contorno e a origem em P conforme a Fig. (A.7).

FIGURA A.7 – Ponto P do contorno da placa e os vetores n e s.



Fonte: Autoria própria (2022).

onde:

- $n_1 = \cos\alpha$ e $n_2 = \sin\alpha$;
- $S_1 = \sin\alpha$ e $s_2 = \cos\alpha$;
- R é o raio da curvatura do contorno no ponto P.

Considerando (n, s) um sistema de coordenadas cartesianas, podemos escrever a relação entre suas coordenadas e as do sistema (x, y):

$$r_{,i} n_i = \cos\beta \quad (\text{A.26})$$

$$r_{,i} s_i = \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\beta \quad (\text{A.27})$$

Substituindo (A.23) em (A.17) e (A.18), bem como (A.25) em (A.19), obtemos as equações:

$$M_{nn} = -D \left\{ \frac{d^2 w}{dr^2} [v + (1-v)(r_{,i} n_i)] + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} [v + (1-v)(r_{,i} s_i)^2] \right\} \quad (\text{A.28})$$

$$M_{ns} = -D(1-v)(r_{,i} n_i)(r_{,j} s_j) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (\text{A.29})$$

$$Q_n = -D(r_{,i} n_i) \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \quad (\text{A.30})$$

Substituindo (A.26) e (A.27) em (A.29), obtemos uma nova expressão para M_{ns} :

$$M_{ns} = D(1 - \nu)\cos\beta\text{sen}\beta \left(\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (\text{A.31})$$

Para obter V_n é necessário ter a expressão da derivada M_{ns} em relação à direção s , que é dada por:

$$\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s} \quad (\text{A.32})$$

sendo:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = r_{,i} s_i = -\text{sen}\beta \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{1}{R} - \frac{\cos\beta}{r} \quad (\text{A.34})$$

Desse modo, derivando a Eq. (A.31) em relação a b e r , obtemos os outros dois termos de (A.32), que se traduz em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = D(1 - \nu)\cos\beta \left[\text{sen}^2\beta \left(\frac{d^3w}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) + \left(\frac{4 \text{sen}^2(\beta)1}{r} \right) \left(\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right] \\ + \frac{D(1-\nu)}{R} (1 - 2 \text{sen}^2\beta) \left(\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Considerando (A.35) e (A.30) em (A.20), obtemos a expressão de V_n :

$$\begin{aligned} V_n = -D(1 - \nu)(n_i r_{,i}) \left\{ \left[(s_j r_{,j})^2 + \frac{1}{1-\nu} \right] \left(\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) + \right. \\ \left. \frac{1-4(s_j r_{,j})^2}{r} \left(\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right\} + \frac{D(1-\nu)}{R} [1 - 2(s_i r_{,i})^2] \left(\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

APÊNDICE B EXPRESSÕES FUNDAMENTAIS PARA EQUAÇÃO INTEGRAL DE MOMENTOS NOS PONTOS INTERNOS

$$\frac{\partial w^*}{\partial x_i}(q, p) = -\frac{r \ln(r)}{4\pi D} r_{,i} \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, p) = \frac{1}{4\pi D} (r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij} \ln(r)) \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, p) = \frac{1}{4\pi D} (1 + 2\ln(r)) \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, p) \right) = \frac{-r_{,i}}{2\pi D r} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, p) \right) = \frac{-1}{4\pi D} [r_{,i} (r_{,k} n_k) + \ln(r) n_i] \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, p) \right) = \frac{1}{4\pi D r} [(\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j})(r_{,k} n_k) + r_{,i} n_j + r_{,j} n_i] \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, p) \right) = \frac{r_{,k} n_k}{2\pi D r} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, p) \right) \right) = \frac{1}{2\pi D r^2} [2r_{,i} (r_{,k} n_k) - n_i] \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial M_{ns}^*}{\partial x_i}(q, p) = \frac{(1-v)}{4\pi r} [n_i (r_{,l} s_l) + s_i (r_{,k} n_k) - 2r_{,i} (r_{,k} n_k) (r_{,l} s_l)] \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, p) &= \frac{-(1-v)}{4\pi r^2} \{ [2(\delta_{ij} + 4r_{,i} r_{,j})(r_{,l} s_l) - 2s_i r_{,j} - 2r_{,i} s_j] (r_{,k} n_k) \\ &\quad - 2(r_{,j} n_i + r_{,i} n_j) (r_{,l} s_l) + n_i s_j + s_i n_j \} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, p) = \frac{(1-v)}{\pi r^2} \{ (s_l r_{,l}) (r_{,k} n_k) \} \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, p) \right) = \frac{(1-v)}{\pi r^3} [4r_{,i} (r_{,k} s_k) (r_{,l} n_l) - n_i (r_{,k} s_k) + -s_i (r_{,l} n_l)] \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\partial M_n^*}{\partial x_i}(q, p) = \frac{1}{4\pi r} \{ (1+v)r_{,i} - 2(1-v)(r_{,k} n_k) [r_{,i} (r_{,k} n_k) - n_i] \} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, p) &= -\frac{1}{4\pi r^2} \{ (1+v)(\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) \\ &\quad + 2(1-v) [n_i n_j + -2r_{,j} n_i (r_{,k} n_k) - (\delta_{ij} - 2r_{,j} r_{,k}) (r_{,k} n_k)^2 \\ &\quad + -2r_{,i} (r_{,k} n_k) [n_j - r_{,j} (r_{,k} n_k)]] \} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, p) = -\frac{1}{4\pi r^2} \{2(1-v)[1 - 2(r_{,k} n_k)^2]\} \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, p) \right) = \frac{-(1-v)}{\pi r^3} \{r_{,i} + 2n_i(r_{,k} n_k) - 4r_{,i}(r_{,k} n_k)^2\} \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n^*}{\partial x_i}(q, p) &= \frac{1}{4\pi r^2} \{2(1-v)(r_{,l} s_l)^2 [4r_{,i}(r_{,k} n_k) - n_i] \\ &\quad + -4(1-v)(r_{,l} s_l)(r_{,k} n_k) s_i + (3-v)[n_i - 2r_{,i}(r_{,k} n_k)]\} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, p) &= \frac{1}{4\pi r^3} \left\{ 2(1-v)(r_{,l} s_l)^2 \left[24r_{,i} r_{,j}(r_{,k} n_k) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + -4[r_{,i} n_j + r_{,j} n_i + \delta_{ij}(r_{,k} n_k)] \right] \right. \\ &\quad \left. + 2(1-v)(r_{,l} s_l) [2(n_i s_j + n_j s_i) + -8(r_{,k} n_k)(r_{,i} s_j + r_{,j} s_i)] \right. \\ &\quad \left. + 4(1-v)(r_{,k} n_k)(s_i s_j) \right. \\ &\quad \left. + (3-v)[2\delta_{ij}(r_{,k} n_k) - 8r_{,i} r_{,j}(r_{,k} n_k) + 2(r_{,i} n_j + r_{,j} n_i)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, p) &= -\frac{(1-v)}{4\pi r^3} (r_{,k} n_k) [4(r_{,l} s_l)^2 - 1] \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, p) \right) \\ &= -\frac{(1-v)}{\pi r^4} \{ (r_{,l} s_l)^2 [24r_{,i}(r_{,k} n_k) - 4n_i] \\ &\quad - (r_{,k} n_k) [8s_i(r_{,l} s_l) + 4r_{,i}] + n_i \} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

APÊNDICE C INTEGRAÇÃO NUMÉRICA SOBRE OS ELEMENTOS

C.1 Integração normal

Em alguns casos, o ponto de colocação não pertence ao elemento a ser integrado e a integração desses elementos pode ser calculada numericamente. Como uma equação relacionada aos pontos internos, seja deslocamento, curvatura ou derivada da curvatura, o ponto interno do carregamento q não pertence a nenhum elemento de contorno, e a integral sobre os elementos que aparecem nele sempre pode ser realizada numericamente. O mesmo é verdade para a equação de deslocamento escrita pelo ponto de carregamento externo A . Porém, quando o ponto de carregamento é o ponto limite Q , se não pertencer ao elemento considerado, só pode ser integrado numericamente.

Para integração numérica, é conveniente escrever essas expressões em coordenadas homogêneas. Portanto, tomando a integral dos elementos que aparece na equação de deslocamento do ponto Q do contorno como exemplo, alterando as coordenadas, a seguinte equação é obtida:

$$h_k^n(Q) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p_k^*(Q, P) \Phi_n(P) d\xi(P) \quad (n=1,2,3) \quad (k=1,2) \quad (C.1)$$

$$g_k^n(Q) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_k^*(Q, P) \Phi_n(P) d\xi(P) \quad (n=1,2,3) \quad (k=1,2) \quad (C.2)$$

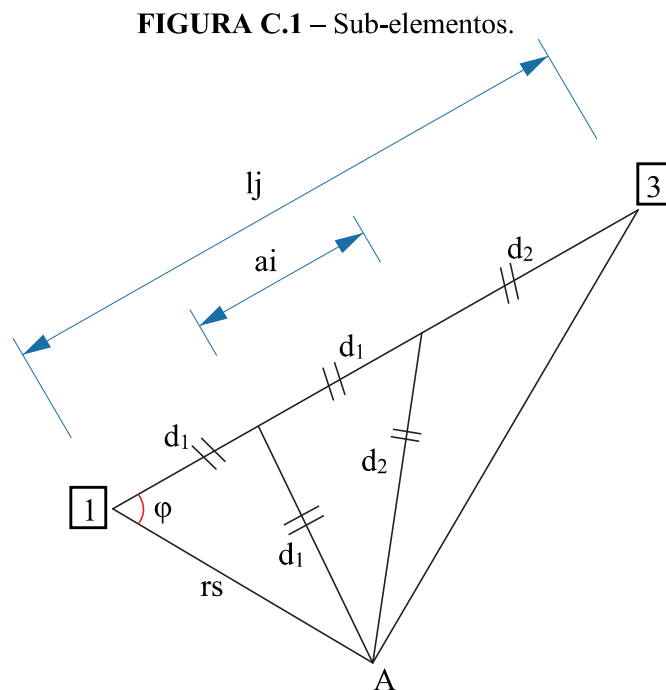
A integração numérica é realizada usando uma fórmula de quadratura de Gauss, que é dada pela seguinte maneira:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=0}^{N_g} f(\xi_i) W_i \quad (C.3)$$

C.2 Técnica de sub-elementos

Quanto mais próximo o ponto de carregamento ou ponto de colocação A , Q ou q estiver do elemento a ser integrado, maior será sua influência que ele tem sobre o valor do ponto variável em consideração. Para ter uma boa precisão de cálculo, a distância entre o ponto de carregamento e o ponto médio do elemento não deve ser muito grande, e quanto menor a distância, mais de pontos de Gauss são usados na integração. Dessa forma, o método de utilização de sub-elementos adotado neste trabalho inclui dividir o elemento considerado durante a integração em sub-elementos, de modo que a distância

entre o ponto de carregamento e seu ponto médio não seja menor que seu comprimento, conforme mostrado na Fig. (C.1).



Fonte: Autoria própria (2022).

sendo:

- \$rs\$ é a distância ao nó inicial do sub-elemento;
- \$a_i\$ é o comprimento do sub-elemento \$i\$;
- \$l_j\$ é o comprimento do elemento \$j\$;
- \$\varphi\$ é o ângulo entre \$rs\$ e o elemento \$j\$;
- Se \$\varphi \leq 60\$, o comprimento do sub-elemento será tal que forme um triângulo isósceles entre seu nó final e nó inicial, dado por:

$$d = \frac{rs}{2 \cos \varphi} \quad (C.4)$$

- Se \$\varphi > 60\$, o comprimento do sub-elemento será igual à distância entre \$A\$ e o nó final do sub-elemento anterior.

Considerando o trabalho apresentado por FERNANDES (2003) as integrais (C.1) e (C.2) podem ser calculadas da seguinte forma:

$$\int_{-\frac{L_j}{2}}^{\frac{L_j}{2}} F d\Gamma_j = \frac{L_j}{2} \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{N_{sub}} \frac{a_i}{2} \int_{-1}^1 F(\xi) d\eta = \sum_{i=1}^{N_{sub}} \frac{a_i}{2} \sum_{ig=1}^{N_g} (F(\xi))_{ig} W_{ig} \quad (C.5)$$

APÊNDICE D EXPRESSÕES FUNDAMENTAIS PARA EQUAÇÃO INTEGRAL DA DERIVADA DOS DESLOCAMENTOS PARA O EVR

No processo de derivação da Eq. (3.13), novas expressões fundamentais são obtidas. As equações descritas a seguir são utilizadas para a dedução dessas novas expressões:

$$\frac{\partial}{\partial m(q)} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} (-r_{,j} m_j) \quad (\text{D.1})$$

$$\frac{\partial r_{,k}}{\partial m(q)} = -\frac{\partial r_{,k}}{\partial x_j(P)} = -\frac{1}{r} \{ \delta_{kj} - r_{,k} r_{,j} \} m_j \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{\partial}{\partial m(q)} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) = -\frac{1}{r} \left\{ n_j - r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} m_j \quad (\text{D.3})$$

Assim sendo, as expressões fundamentais contidas na Eq. (3.14) são descritas da seguinte maneira, sendo $k, i, j = 1, 2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{ki}^*}{\partial m} = & \frac{1}{4\pi(1-v')r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[-2(1-2v') \frac{\partial r}{\partial m} \delta_{ik} + 8r_{,i} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial m} + \right. \right. \\ & + 2r_{,k} m_i + 2r_{,i} m_k \left. \right] + (1-2v') \left[-2n_k r_{,i} \frac{\partial r}{\partial m} + 2n_i r_{,k} \frac{\partial r}{\partial m} + \right. \\ & \left. \left. + n_j m_j \delta_{ik} - n_i m_k + n_k m_i \right] + 2r_{,i} r_{,k} n_j m_j \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

$$\frac{\partial u_{ki}^*}{\partial m} = \frac{1}{8\pi G(1-v')r} \left[(3-4v') \frac{\partial r}{\partial m} \delta_{ki} - m_k r_{,i} - m_i r_{,k} + 2r_{,i} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial m} \right] \quad (\text{D.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{ki}^*}{\partial m} = & \frac{1}{8\pi(1-v')\bar{G}r^2} \left\{ (1-2v') \left(\delta_{ki} n_j m_j + n_k m_i - 2n_k r_{,i} \frac{\partial r}{\partial m} - 2\delta_{ki} \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial r}{\partial n} \right) \right. \\ & \left. + 2r_{,k} \left(n_i \frac{\partial r}{\partial m} + r_{,i} m_j n_j \right) - n_i m_k + 2 \frac{\partial r}{\partial n} (r_{,i} m_k + r_{,k} m_i) + 8r_{,k} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kijl}^* = & \frac{1}{8\pi\bar{G}(1-v')r^2} \left\{ (1-2v') \left[\delta_{jl} \delta_{ki} + \delta_{il} \delta_{kj} - 2\delta_{ki} r_{,j} r_{,l} - 2\delta_{kj} r_{,i} r_{,l} \right] + \right. \\ & \left. + \delta_{ij} (2r_{,k} r_{,l} - \delta_{kl}) + 2\delta_{kl} r_{,i} r_{,j} + 2\delta_{il} r_{,k} r_{,j} + 2\delta_{jl} r_{,i} r_{,k} - 8r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,l} \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

sendo $\bar{G} = Gt$ e $v' = \frac{v}{1+v}$, uma vez que, se trata do estado plano de tensão.

Observe que não existirá problemas de singularidade na integral de domínio envolvendo os deslocamentos, visto que, quando o ponto de colocação pertencer à célula a ser integrada, tem-se que $v = v_s$ e, por isso, a integral não precisa ser calculada. Assim, pode-se dizer que:

$$\frac{\partial}{\partial m} \int_{\Omega_S} u_i(p) \varepsilon_{kij,j}^*(q,p) d\Omega_S = \int_{\Omega_S} u_i(p) \frac{\partial \varepsilon_{kij,j}^*}{\partial m}(q,p) d\Omega_S \quad (\text{D.8})$$

Apêndice D: Expressões fundamentais para equação integral da derivada dos deslocamentos para o EVR

Deste modo, derivando-se a expressão fundamental contida na equação (3.27), tem-se:

$$\frac{\partial \varepsilon_{kij,j}^*}{\partial m} = \frac{\nu'}{2\pi(1-\nu')\bar{G}r^3} \left[\frac{\partial r}{\partial m} (\delta_{ik} - 4r_{,i} r_{,k}) + r_{,i} m_k + r_{,k} m_i \right] \quad (\text{D.9})$$

APÊNDICE E MODELO CONSTITUTIVOS

Nesse apêndice, discute-se, de forma breve, os modelos constitutivos utilizados ao longo do trabalho, que são: i) o modelo de dano de Mazars, utilizado nas análises em escala única; ii) o modelo elasto-plástico de Mohr coulomb utilizado na matriz do EVR; iii) os modelos de contato e fratura utilizados nos elementos finitos para modelar o fraturamento na zona de transição.

E.1 Modelo de dano de Mazars

A mecânica do dano contínuo tem sido empregada para resolver diversos problemas na engenharia. O modelo de dano é baseado na termodinâmica de processos irreversíveis, descrevendo a evolução local do processo de deterioração do material através de variáveis internas, partindo de uma configuração inicial ideal sem defeitos, até o estado final onde podem ocorrer fissuras ou microfissuras. O meio deteriorado é considerado um meio contínuo com rigidez e resistência reduzidas. O dano começa em pequenas deformações, desenvolve-se gradualmente, atinge uma taxa máxima após o pico de tensão e tende a um valor assintótico com o aumento da deformação.

O modelo de MAZARS (1984) funciona bem na análise de danos ao concreto submetido a carregamentos proporcionais ou cíclicos. A variável de dano é em função da deformação equivalente, que caracteriza o estado de alongamento local do material. Esse modelo possui as seguintes hipóteses:

- O concreto que sofre dano evolutivo tem comportamento elástico, ou seja, nenhuma deformação plástica evolui durante o descarregamento, conforme observado experimentalmente.
- Supõe-se que o dano é causado apenas pela presença de extensão (alongamento), que ocorrerá ao longo de uma ou mais direções de deformação principais.
- Em geral, o dano causa anisotropia no concreto, mas para simplificar o modelo, o dano será considerado isotrópico.
- O dano é representado pela variável escalar D_c , e sua evolução ocorre quando a deformação equivalente $\bar{\epsilon}$ ultrapassa um determinado limite elástico.

De acordo com a lei de Hooke, em uma iteração n , o estado de tensão elástica no caso de um estado plano de tensão é dado por:

$$\sigma_n^e = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \epsilon_n \quad (\text{E.1})$$

Passando as tensões dada por (E.1) para o sistema principal, escreve-se a tensão em uma dada direção principal i da seguinte maneira:

$$\sigma_i = \sigma_i^+ + \sigma_i^- \quad (i=1,2) \quad (E.2)$$

onde

$$\begin{aligned} \text{se } \sigma_i > 0 \quad \sigma_i^+ &= \sigma_i \quad \sigma_i^- = 0 \\ \text{se } \sigma_i < 0 \quad \sigma_i^- &= \sigma_i \quad \sigma_i^+ = 0 \end{aligned} \quad (i=1,2) \quad (E.3)$$

Portanto, de acordo com a lei de Hooke, a deformação ε_{T_i} devido às tensões de tração e a deformação ε_{C_i} devido às tensões de compressão podem ser obtidas em uma determinada direção principal:

$$\varepsilon_{T_i} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_i^+ - \frac{\nu}{E} \sum_{j=1}^3 \sigma_j^+ \quad (E.4)$$

$$\varepsilon_{C_i} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_i^- - \frac{\nu}{E} \sum_{j=1}^3 \sigma_j^- \quad (E.5)$$

A deformação total ε_i em uma direção principal i , é dada por:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{T_i} + \varepsilon_{C_i} \quad (E.6)$$

Com base nas deformações principais dada pela Eq. (E.6), é possível obter os alongamentos ε_i^+ nas direções principais i , para mais detalhes ver FERNANDES (1998). Com o valor dos alongamentos ε_i^+ , obtém-se a deformação equivalente $\bar{\varepsilon}$, que caracteriza o estado de alongamento no sistema principal:

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_1^{+2} + \varepsilon_2^{+2} + \varepsilon_3^{+2}} \quad (E.7)$$

O dano aparece quando $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{d_0}$, que é a deformação equivalente ao esforço máximo em uma prova de tração uniaxial, dessa forma o critério de dano é dado por:

$$f(\bar{\varepsilon}, D_C) = \bar{\varepsilon} - S(D_C) \leq 0 \quad (E.8)$$

sendo $S(0) = \varepsilon_{d_0}$, é o limite elástico inicial e $S(D_C)$ é igual à deformação equivalente da iteração anterior, se o ponto já estiver danificado, pois caso contrário, $S(D_C) = S(0)$.

Não é permitido $f > 0$, quando isso acontece, a variável de dano evolui e o novo limite elástico passa a ser $S(D_C)$, dado pelo estado de alongamento atual:

$$S(D_C) = \sqrt{\varepsilon_1^{+2} + \varepsilon_2^{+2} + \varepsilon_3^{+2}} \quad (\text{E.9})$$

Para o cálculo da variável de dano, as microfissuras são perpendiculares à direção da tensão na tração uniaxial e paralelas à direção da tensão na compressão uniaxial. Dessa forma, para descrever esse comportamento assimétrico do concreto, duas variáveis escalares de dano devem ser definidas, uma para compressão D_{CC} e outra para tração D_{CT} , cuja evolução é regida por leis independentes. No caso multiaxial, cada componente de tensão pode contribuir para a evolução do dano, então a variável de dano é uma combinação linear de D_{CT} e D_{CC} .

$$D_C = \alpha_T D_{CT} + \alpha_C D_{CC} \quad (\text{E.10})$$

sendo:

$$0 \leq \alpha_C \leq 1, 0 \leq \alpha_T \leq 1 \text{ e } \alpha_T + \alpha_C = 1$$

$$D_{CT} = 1 - \frac{\varepsilon_{d_0}(1 - A_T)}{\bar{\varepsilon}} - \frac{A_T}{\exp[B_T(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_{d_0})]} \quad (\text{E.11})$$

$$D_{CC} = 1 - \frac{\varepsilon_{d_0}(1 - A_C)}{\bar{\varepsilon}} - \frac{A_C}{\exp[B_C(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_{d_0})]} \quad (\text{E.12})$$

$$\alpha_T = \frac{\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{T_i}^+}{\varepsilon_V^+} \quad (\text{E.13})$$

$$\alpha_C = \frac{\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{C_i}^+}{\varepsilon_V^+} \quad (\text{E.14})$$

$$\varepsilon_V^+ = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{T_i}^+ + \varepsilon_{C_i}^+ \quad (\text{E.15})$$

sendo A_T e B_T parâmetros característicos do material em tração uniaxial, A_C e B_C são parâmetros do material em compressão uniaxial, ε_{d_0} é a deformação elástica limite, $\varepsilon_{T_i}^+$ e $\varepsilon_{C_i}^+$ são componentes de deformação.

O estado de tensão verdadeiro $\{\sigma_n^V\}$ é dado por:

$$\{\sigma_n^V\} = (1 - D_{c(n)})[D_0]\{\varepsilon_n\} \quad (\text{E.16})$$

sendo $\{D_0\}$ o tensor elástico do material íntegro.

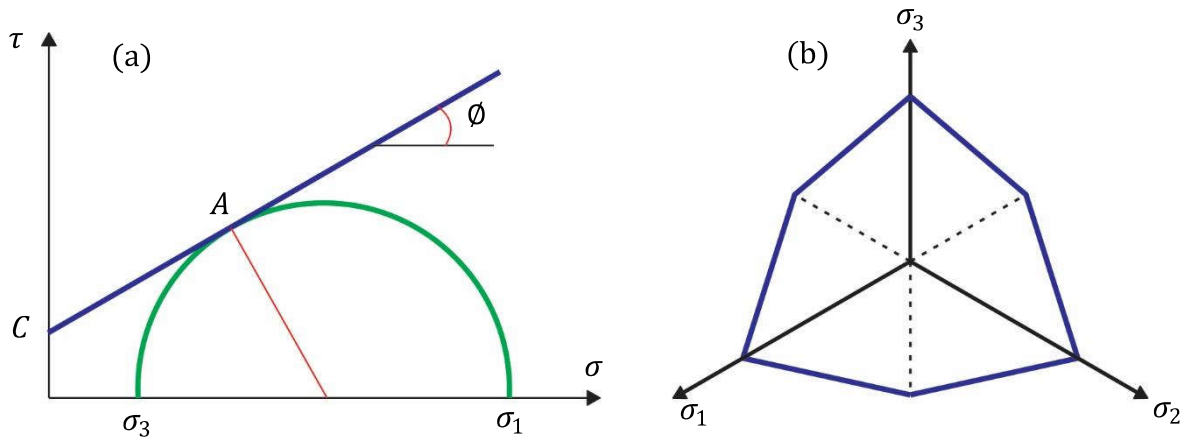
E.2 Mohr-coulomb

Nesse modelo, a resistência ao cisalhamento τ na iminência da ruptura, no plano de ruptura, é definida pela seguinte equação:

$$\tau = c + \tan \phi \quad (\text{E.17})$$

sendo c a coesão e ϕ o ângulo de atrito interno do material. Ambos os parâmetros podem ser estabelecidos com base em ensaios de compressão triaxial convencionais, levando o material até o estado de ruptura, conforme a figura a seguir.

FIGURA E.1 – a) Critério de escoamento de Mohr-Coulomb no plano (σ, τ) , b) em plano octaédrico



Fonte: Autoria própria (2022).

A função de escoamento para o critério de Mohr Coulomb pode ser expressa em termos de tensões principais σ_1 e σ_3 , que é a tensão principal maior e a tensão principal menor, respectivamente.

$$F = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \phi - c \cos \phi = 0 \quad (\text{E.18})$$

No espaço de tensões principais, a função de escoamento Eq. (E.18) representa uma pirâmide de seção transversal hexagonal irregular em um plano octaédrico. De acordo com o segundo critério, a tensão de escoamento sob compressão é maior do que a tensão de escoamento de tração. Vale ressaltar que o critério de Mohr-Coulomb não leva em consideração o efeito da tensão principal intermediária σ_2 .

E.3 Modelo de contato e fratura coesiva

O modelo de fratura coesiva proposto por PITUBA, FERNANDES e NETO (2016) é utilizado neste trabalho para simular o fenômeno de descolagem de fases que ocorre na zona de interface, denominada ZTI (zona de transição interfacial). Os modelos de contato e fratura coesiva, assim como o elemento finito retangular, são brevemente descritos neste item, mas mais detalhes podem ser encontrados no artigo mencionado anteriormente e em FERNANDES, FURTADO e PITUBA (2017), na qual, uma formulação acoplada de MEC/MEF foi desenvolvida para realizar análises em multiescala de chapas.

O deslocamento de abertura efetivo δ é baseado na fratura coesiva de modo misto e é dado por:

$$\delta = \sqrt{\beta_c^2 \delta_s^2 + \delta_n^2} \quad (\text{E.19})$$

onde δ_s e δ_n são os deslocamentos de abertura tangencial e normal respectivamente, o parâmetro β_c atribui pesos diferentes aos deslocamentos tangencial e de abertura normal. Além disso, assume-se que o potencial de energia livre Φ depende de δ , ou seja:

$$\Phi = \sigma_c \delta_c \left[1 - e^{\left[-\left(1 + \frac{\delta}{\delta_c} \right) \right]} \right] \quad (\text{E.20})$$

onde e é o número-e, σ_c é a tração normal coesiva máxima e δ_c é um deslocamento de abertura característico que indica uma abertura crítica.

Dessa forma, pode propor a Lei de coesão, e a forma adotada pode ser escrita da seguinte maneira:

$$t = \frac{t_c}{\delta} (\beta_c^2 \delta_s + \delta_n n) \quad (\text{E.21})$$

onde t é o vetor de tração coesiva sobre a fissura, t_c é uma tração escalar efetiva, n representa a direção normal da fissura, δ_s é o vetor de deslocamento da abertura tangencial localizada na superfície da fissura.

Além disso, nos elementos coesivos de contato localizados na zona de interface, antes da nucleação da fratura ou para estado compressivo, um modelo de contato simples é assumido para governar o comportamento mecânico. Para tanto, é adotada uma estratégia que consiste em definir uma rigidez entre as células triangulares utilizando o conceito de fator de penalidade (λ_p). Isso evita que os nós de uma célula da matriz penetrem na célula definida na inclusão ou vice-versa. Portanto, a lei constitutiva nessas situações é dada por:

$$t_c = \lambda_p \delta \quad \text{se } \lambda_p \delta \leq \sigma_c \quad (\text{E.22})$$

Agora, as forças internas referentes a esses elementos finitos retangulares (F_{ef}^{int}) serão definidos. Para isso, consideremos o sistema de coordenadas n e s , que são as direções normal e tangencial ao elemento finito retangular, respectivamente. Definindo u_{ef}^+ e F_{ef}^{int+} como os deslocamentos nodais e vetores de forças internas relacionados ao lado positivo (Γ_e^+), u_{ef}^- e F_{ef}^{int-} os valores relacionados ao lado negativo (Γ_e^-), também podemos dividir a matriz das funções de forma (N_e) em contribuições dos lados Γ_e^+ e Γ_e^- , ou seja: N_e^- e N_e^+ (veja mais detalhes em PITUBA, FERNANDES e NETO (2016)). A fim de determinar o vetor δ^{ef} de deslocamento de abertura, uma função de vazios em cada ponto de Gauss g é usada, que é dada por:

$$\begin{aligned} \delta^{ef}(\xi_g) &= N_e^-(\xi_g(s)) u_{ef}^- - N_e^+(\xi_g(s)) u_{ef}^+ = \\ &= u_{ef}^-(\xi_g) - u_{ef}^+(\xi_g) = N_e \Delta u^{ef} \end{aligned} \quad \text{g=1,2,3} \quad (\text{E.23})$$

Usando o Princípio do Trabalho Virtual, pode-se obter o vetor F_{ef}^{int} de forças internas, que também é dividido nas contribuições dos lados positivo e negativo (F_{ef}^{int+} e F_{ef}^{int-}). Essas forças são calculadas a partir das seguintes expressões:

$$F_{ef}^{int+} = \frac{l_e}{2} \int_{-1}^{+1} N_e^{+T}(\xi) t(s(\xi)) d\xi \cong \frac{l_e}{2} \sum_{g=1}^{nGauss} N_e^{+T}(\xi) t(s(\xi_g)) \quad (\text{E.24})$$

$$F_{ef}^{int-} = \frac{l_e}{2} \int_{-1}^{+1} N_e^{-T}(\xi) t(s(\xi)) d\xi \cong \frac{l_e}{2} \sum_{g=1}^{nGauss} N_e^{-T}(\xi) t(s(\xi_g)) \quad (\text{E.25})$$

Por outro lado, o tensor de rigidez tangente consistente K_{ef} relacionado ao elemento finito de contato e fratura coesiva é obtido derivando as forças internas em relação aos deslocamentos, ou seja:

$$K_{ef} = \frac{dF_{ef}^{int}}{du_e} = \begin{bmatrix} \frac{dF_{ef}^{int+}}{du_e} \\ \frac{dF_{ef}^{int-}}{du_e} \end{bmatrix} \quad (\text{E.26})$$

Os detalhes para obter os componentes do tensor de rigidez tangente consistente, bem como os cálculos específicos relativos à fratura coesiva e modelos de contato podem ser encontrados em PITUBA, FERNANDES e NETO (2016).

APÊNDICE F RELAÇÕES TRIGONÔMETRICAS

Para a dedução dos termos livres, as seguintes relações trigonométricas são usadas:

$$\cos(\theta - \gamma) = \cos \gamma \cos \theta + \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \theta \quad (\text{F.1})$$

$$\operatorname{sen}(\theta - \gamma) = -\cos \theta \operatorname{sen} \gamma + \operatorname{sen} \theta \cos \gamma \quad (\text{F.2})$$

$$\cos(\theta + \gamma) = \cos \theta \cos \gamma - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \gamma \quad (\text{F.3})$$

$$\operatorname{sen}(\theta + \gamma) = \cos \theta \operatorname{sen} \gamma + \operatorname{sen} \theta \cos \gamma \quad (\text{F.4})$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad (\text{F.5})$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad (\text{F.6})$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \quad (\text{F.7})$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta \quad (\text{F.8})$$

$$\cos(\theta) = \cos(-\theta) \quad (\text{F.9})$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = -\operatorname{sen}(-\theta) \quad (\text{F.10})$$