



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS (UFG)/
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CATALÃO (UFCAT) em implantação
FACULDADE DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL (PPGEC)

MARIA JÚLIA MARQUES SILVA

ABORDAGEM MULTIESCALA DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DA
MICROESTRUTURA DO CONCRETO UTILIZANDO O MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO

CATALÃO

2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE ENGENHARIA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

MARIA JÚLIA MARQUES SILVA

3. Título do trabalho

ABORDAGEM MULTIESCALA DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DA MICROESTRUTURA DO CONCRETO UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **Gabriela Rezende Fernandes, Professora do Magistério**



Superior, em 02/08/2022, às 15:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **MARIA JULIA MARQUES SILVA, Discente**, em 02/08/2022, às 15:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site

[https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0)

[acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3085480** e o código CRC **A48BCE6A**.

MARIA JÚLIA MARQUES SILVA

ABORDAGEM MULTIESCALA DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DA
MICROESTRUTURA DO CONCRETO UTILIZANDO O MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Faculdade de Engenharia, da Universidade Federal de Goiás (UFG) / Universidade Federal de Catalão (UFCAT) em implantação, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas e Construção Civil. Linha de pesquisa: Mecânica das Estruturas e dos Materiais.

Orientadora: Professora Doutora Gabriela Rezende Fernandes.

Coorientador: Professor Doutor José Julio de Cerqueira Pituba.

CATALÃO
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFCAT.

Silva, Maria Júlia Marques
ABORDAGEM MULTIESCALA DO COMPORTAMENTO
MECÂNICO DA MICROESTRUTURA DO CONCRETO UTILIZANDO
O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO / Maria Júlia
Marques Silva. - 2022.
166, CLXVI f.

Orientadora: Profa. Dra. Gabriela Rezende Fernandes;
co-orientador Prof. José Julio de Cerqueira Pituba.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Catalão,
Faculdade de Engenharia, Catalão, Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil, Catalão, 2022.

1. Concreto. 2. Método dos Elementos de Contorno. 3. Abordagem
Multiescala . 4. Fratura Coesiva. I. Fernandes, Gabriela Rezende ,
orient. II. Título.

CDU 624



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE ENGENHARIA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 2 da sessão de Defesa de Dissertação de **MARIA JULIA MARQUES SILVA**, que confere o título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração em Estruturas e Construção Civil.

"Banca Examinadora de Qualificação/Defesa Pública de Dissertação/Tese realizada em conformidade com a Portaria da CAPES n. 36, de 19 de março de 2020, de acordo com seu segundo artigo: Art. 2º A suspensão de que trata esta Portaria não afasta a possibilidade de defesas de tese utilizando tecnologias de comunicação à distância, quando admissíveis pelo programa de pós-graduação stricto sensu, nos termos da regulamentação do Ministério da Educação."

Aos vinte dias do mês de abril de dois mil e dois e dois partir das 14 horas, na sala virtual (<https://meet.google.com/fsq-nvfk-gvc>), realizou-se a sessão pública de Defesa de Tese/Dissertação intitulada "ANÁLISE DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DA MICROESTRUTURA DO CONCRETO EM REGIME DE COMPRESSÃO POR MEIO DE UMA ABORDAGEM MULTIESCALA E O MEC" nas dependências da Universidade Federal de Catalão, onde os programas de pós-graduação stricto sensu em funcionamento encontram-se provisoriamente vinculados à Universidade Federal de Goiás, em virtude de procedimentos técnicos relacionados à CAPES, já sendo realizada a transferência da Biblioteca Digital de Dissertações e Teses (BDTD). Assim, justifica-se os nomes das instituições neste documento, uma no cabeçalho (UFG), outra no corpo do texto (UFCAT). Os trabalhos foram instalados pela Orientadora, Professora Doutora GABRIELA REZENDE FERNANDES (PPGEC/UFCAT) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor GUILHERME ARIS PARSEKIAN (DECiv/ UFSCar), membro titular externo; Professor Doutor WANDERLEI MALAQUIAS PEREIRA JUNIOR (PPGEC/UFCAT), membro titular interno. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido a candidata (X) Aprovada () Reprovada pelos seus membros. Proclamados os resultados pela Professora Doutora GABRIELA REZENDE FERNANDES, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos vinte dias do mês de abril de dois mil e vinte e dois.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

ABORDAGEM MULTIESCALA DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DA MICROESTRUTURA DO CONCRETO UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO



Documento assinado eletronicamente por **Wanderlei Malaquias Pereira Junior, Professor do Magistério Superior**, em 20/04/2022, às 16:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gabriela Rezende Fernandes, Professora do Magistério Superior**, em 20/04/2022, às 16:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Guilherme Aris Parsekian, Usuário Externo**, em 20/04/2022, às 16:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2810439** e o código CRC **B736B96D**.

Referência: Processo nº 23070.017516/2022-89

SEI nº 2810439

AGRADECIMENTOS

À professora Gabriela Rezende Fernandes, pelos ensinamentos e incentivo que recebi ao longo deste trabalho. Pela dedicada orientação e estímulo em todas as etapas da dissertação, contribuindo para a minha formação profissional.

Aos meus pais: Carlos e Lerci, que me apoiaram incondicionalmente desde o início do mestrado. Por incentivarem os meus estudos e por serem exemplos de pessoas. À minha irmã Ana Carla, por todo companheirismo.

Aos colegas da Universidade Federal de Catalão: Donizetti, Felipe e Luiz Felipe. E aos amigos: Carolina e Thiago. Pela companhia, apoio e incentivo, principalmente nos momentos difíceis. Cada um de vocês tem uma qualidade que eu aprecio e me espelho. Agradeço por tudo o que fizeram por mim.

Agradeço a todos os professores do PPGEC que contribuíram direta e indiretamente na execução deste trabalho. Agradeço principalmente aos professores Júlio Pituba e Wanderlei pelas observações e sugestões que me propuseram na qualificação e que tornaram esse trabalho melhor.

À CAPES, pela bolsa de estudo que tornou possível minha dedicação à elaboração deste trabalho.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	17
APRESENTAÇÃO	17
1.	17
1.1. INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA	17
1.2. ESTADO DA ARTE	19
1.2.1. Mapeamento Sistemico	19
1.2.2. Microestrutura do Concreto	23
1.2.3. Análise Experimental feita em Delalibera (2002)	25
1.2.4. Pesquisas que modelaram numericamente o comportamento constitutivo do concreto	28
1.2.4.1. <i>Kim e Al-Rub (2011)</i>	28
1.2.4.2. <i>Quaresma (2016)</i>	29
1.2.4.3. <i>Borges (2015)</i>	30
1.2.5. Pesquisas que modelaram numericamente o comportamento constitutivo de materiais compósitos e/ou porosos	32
1.2.5.1. <i>Fernandes et al. (2019b)</i>	32
1.2.5.2. <i>Fernandes et. al. (2019a)</i>	34
1.2.5.3. <i>Santos e Pituba (2017)</i>	34
1.2.6. Breve Histórico sobre a Mecânica da Fratura	35
1.3. OBJETIVOS	36
1.4. CONTEÚDO DO TRABALHO	37
CAPÍTULO 2	39
CONCRETO: MICROESTRUTURA E PROPRIEDADES MECÂNICAS	39
2.	39
2.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS	39
2.2. ESTRUTURA DO CONCRETO	41
2.3. COMPORTAMENTO MECÂNICO DO CONCRETO	44
2.3.1. Comportamento macroscópico do concreto à tração e compressão ..	44
2.3.2. Comportamento da microestrutura do concreto	48
CAPÍTULO 3	51
MODELAGEM DA MICROESTRUTURA SEGUNDO UMA ABORDAGEM MULTIESCALA	51
3.	51
3.1. DEFINIÇÃO DO EVR E SEU CAMPO DE DESLOCAMENTOS	53
3.2. EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO DO EVR	55
3.3. MATRIZ TANGENTE CONSISTENTE	57

3.4. MODELO DE FLUTUAÇÕES DE DESLOCAMENTOS PERIÓDICAS SOBRE O CONTORNO	59
3.5. TENSÃO HOMOGENEIZADA.....	61
3.6. TENSOR ELASTO-PLÁSTICO HOMOGENEIZADO	62
CAPÍTULO 4.....	65
FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO CONSIDERANDO UMA MICROESTRUTURA HETEROGÊNEA	65
4.	65
4.1. INTRODUÇÃO.....	65
4.2. EQUAÇÕES BÁSICAS.....	65
4.3. EQUAÇÃO INTEGRAL DO DESLOCAMENTO PARA UM PONTO INTERNO.....	68
4.4. EQUAÇÃO INTEGRAL DOS DESLOCAMENTOS PARA PONTOS SOBRE O CONTORNO OU INTERFACE DA MICROESTRUTURA	71
4.5. EQUAÇÃO INTEGRAL DA DERIVADA DOS DESLOCAMENTOS u_k PARA OS PONTOS DO DOMÍNIO.....	78
4.6. APLICAÇÃO DO MEC ÀS EQUAÇÕES INTEGRAIS.....	79
4.6.1. Discretização do EVR em elementos e células	80
4.6.1.1. Aproximação das variáveis nos elementos	80
4.6.1.2. Aproximação das variáveis nas células.....	83
4.7. TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS EM EQUAÇÕES ALGÉBRICAS.....	88
4.8. SISTEMAS DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS.....	89
4.9. ALGORITMO.....	92
CAPÍTULO 5.....	95
MODELAGEM CONSTITUTIVA DO EVR UTILIZANDO A MECÂNICA DA FRATURA.....	95
5.	95
5.1. ASPECTOS GERAIS SOBRE A MECÂNICA DA FRATURA	95
5.2. MODELO DE FRATURA COESIVA	95
5.3. MODELOS DE CONTATO E DE FRATURA COESIVA	97
CAPÍTULO 6.....	106
APLICAÇÕES NUMÉRICAS	106
6.	106
6.1. ANÁLISE PARAMÉTRICA DO CONCRETO UTILIZADO EM DELALIBERA (2002)	110
6.1.1. Variação dos ângulos de atrito e dilatância do critério de Mohr-Coulomb.....	112
6.1.2. Variação do Módulo de Elasticidade da Matriz e Inclusões.....	113

6.1.3.	Variação da curva de plasticidade do critério de Mohr-Coulomb ..	115
6.1.4.	Variação da Tensão Coesiva relativa aos Modelos de contato e fratura coesiva	117
6.2.	ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DA DIMENSÃO E QUANTIDADE DOS AGREGADOS NA MATRIZ CIMENTÍCIA	118
6.3.	ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DA QUANTIDADE DOS ELEMENTOS DE FRATURA E CONTATO	123
CAPÍTULO 7		133
CONCLUSÕES E SUGESTÕES		134
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		137
APÊNDICE A – SOLUÇÃO FUNDAMENTAL		142
APÊNDICE B – UTILIZAÇÃO DO AUTOCAD PARA A GERAÇÃO DAS COORDENADAS DO EVR		147
APÊNDICE C – UTILIZAÇÃO DO ANSYS PARA A GERAÇÃO DE MALHA		148
APÊNDICE D – CRIAÇÃO DOS ELEMENTOS RETANGULARES DE CONTATO E FRATURA COESIVA		162
APÊNDICE E – ELIMINAÇÃO DOS NÓS DUPLOS QUANDO NÃO EXISTE FRATURA.....		164

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 – Progresso anual das publicações.....	21
FIGURA 1.2 – Progresso anual das publicações.....	21
FIGURA 1.3 – Principais vertentes sobre “Multi-scale” AND “Heterogeneous microstructures”.....	22
FIGURA 1.4 – Principais vertentes sobre “Representative Volume Element” AND “Heterogeneous microstructures”.....	23
FIGURA 1.5 – Diferentes escalas de observação.....	24
FIGURA 1.6 – Diagrama tensão x deformação do corpo de prova CP08-VC01.....	26
FIGURA 2.1 – Níveis de observação do concreto: (a) Microescala (b) Mesoescala (c) Macroescala.....	40
FIGURA 2.2 – Concreto escaneado através de imagem CT.	40
FIGURA 2.3 – Comparação de mesoestruturas geradas com mesoestruturas reais.....	41
FIGURA 2.4 – Exsudação interna e externa.	42
FIGURA 2.5 – Intervalo dos vazios na pasta endurecida.....	43
FIGURA 2.6 – Microestrutura da Zona de Transição: (a) Micrografia obtida por microscopia eletrônica de varredura dos cristais de hidróxido de cálcio na zona de transição (b) representação esquemática da zona de transição e da matriz da pasta de cimento no concreto.....	44
FIGURA 2.7 – Diagrama Tensão x Deformação em compressão.....	45
FIGURA 2.8 – Comportamento de isotropia transversal em compressão uniaxial do concreto.	46
FIGURA 2.9 – Representação do comportamento do concreto sob compressão uniaxial	47
FIGURA 2.10 – Comportamento de isotropia transversal em compressão uniaxial do concreto.	47
FIGURA 2.11 – Variação do coeficiente de Poisson.	48
FIGURA 2.12 – Danificação em tração com início na Zona de Transição.....	49
FIGURA 2.13 – Comportamento de isotropia transversal em tração uniaxial no concreto.	49
FIGURA 2.14 – Danificação em compressão com início na Zona de Transição.....	50
FIGURA 3.1 – Esquema representativo da Multiescala.....	52
FIGURA 3.2 – Esquema de estudo do EVR.	53
FIGURA 3.3 – EVR relacionado ao ponto do macrocontínuo.....	54
FIGURA 3.4 – Definição de EVRs para meios periódicos: célula retangular e hexagonal.....	60
FIGURA 4.1 – Microestrutura heterogênea representada por uma chapa em sub-regiões.....	66
FIGURA 4.2 – EVR com sub-regiões.	68
FIGURA 4.3 – Ponto de colocação na interface matriz-inclusão (canto), adotando que Q pertence à matriz.....	74
FIGURA 4.4 – Discretização do contorno externo e da interface em elementos.....	80
FIGURA 4.5 – Geometria do elemento aproximada por função linear.....	81
FIGURA 4.6 – Célula triangular com sistema coordenadas homogêneas.....	84
FIGURA 4.7 – Sistema de coordenadas cilíndricas nas células triangulares.	85
FIGURA 5.1 – Configuração do Modelo em Elementos Finitos.	99
FIGURA 5.2 – Modelo de Elemento Finito de Contato e Fratura Coesiva.....	101
FIGURA 6.1 – EVR com 16 inclusões pequenas, médias e grandes correspondentes a 40% de volume do EVR: (a) modelagem do EVR (b) elementos de contato e fratura. 111	

FIGURA 6.2 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ) x Deformação na direção x (ε) do EVR16-GM com a variação angular.	112
FIGURA 6.3 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ε_x) do EVR16-GM com a variação de EM	114
FIGURA 6.4 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ε_x) do EVR16-GM com a variação de EI	115
FIGURA 6.5 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ε_x) do EVR16-GM com a variação dos pares de plasticidade.	116
FIGURA 6.6 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ε_x) do EVR16-GM com a variação da Tensão Coesiva σ_c	117
FIGURA 6.7 – EVRs com variação da quantidade e dimensão dos agregados que representam 40% de volume: (a) EVR 1a com 16 inclusões, 598 células (b) EVR 2a com 25 inclusões, 634 células (c) EVR 3a com 36 inclusões, 788 células (d) EVR 4a com 45 inclusões, 1030 células (e) EVR 1b com 16 inclusões, 810 células (f) EVR 2b com 25 inclusões, 882 células (g) EVR 3b com 36 inclusões, 1094 células (h) EVR 4b com 45 inclusões, 1734 células (i) EVR 1c com 16 inclusões, 2174 células (j) EVR 2c com 25 inclusões, 2214 células (k) EVR 3c com 36 inclusões, 2282 células (l) EVR 4c com 45 inclusões, 2274 células.	119
FIGURA 6.8 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ε_x) com a análise de convergência para o EVR 1 com 16 inclusões.	121
FIGURA 6.9 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ε_x) com a análise de convergência para o EVR 2 com 25 inclusões.	121
FIGURA 6.10 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ε_x) com a análise de convergência para o EVR 3 com 36 inclusões.	122
FIGURA 6.11 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ε_x) com a análise de convergência para o EVR 4 com 45 inclusões.	122
FIGURA 6.12 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ε_x) com a análise da quantidade e dimensão dos agregados.	123
FIGURA 6.13 – (a), (e), (i) e (m): discretizações em células do EVR1a, EVR2a, EVR3a e EVR4a; figuras com definição dos elementos de contato e fratura: (b): EVR1-T, (c) EVR1-GM, (d) EVR1-G, (f): EVR2-T, (g) EVR2-GM, (h) EVR2-G, (j): EVR3-T, (k) EVR3-GM, (l) EVR3-G, (n): EVR4-T, (o) EVR4-GM, (p) EVR4-G.	124
FIGURA 6.14 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ε_x) com a análise da variação da quantidade dos Elementos de Fratura e Contato no EVR 1a com 16 inclusões.	125
FIGURA 6.15 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ε_x) com a análise da variação da quantidade dos Elementos de Fratura e Contato no EVR 2a com 25 inclusões.	126
FIGURA 6.16 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ε_x) com a análise da variação da quantidade dos Elementos de Fratura e Contato no EVR 3a com 36 inclusões.	126
FIGURA 6.17 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ε_x) com a análise da variação da quantidade dos Elementos de Fratura e Contato no EVR 4 com 45 inclusões.	127
FIGURA 6.18 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ε_x) com a análise da quantidade de agregados e fratura.	129
FIGURA 6.19 – EVR com 25 inclusões e vazios: (a) 18 vazios e 1230 células, (b) 12 vazios e 1116 células, (c) 7 vazios e 1066 células.	130
FIGURA 6.20 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ε_x) com a análise da influência da presença de vazios no concreto.	130

FIGURA 6.21 – EVR 2-G V4 com 25 inclusões, sendo 3 delas com fratura e 12 vazios.	131
FIGURA 6.22 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ε_x) com a análise da influência da presença de vazios no concreto.....	132
FIGURA 6.23 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ε_x) com a comparação entre MEC e MEF.	133
FIGURA 6.24 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ε_x) com a comparação entre MEC e MEF.	133
FIGURA B.1 – Nomeação e Local de salvamento do arquivo da malha.	148
FIGURA B.2 – Tipo de análise.	148
FIGURA B.3 – Tipo de elemento.	149
FIGURA B.4 – Configuração do Elemento PLANE182.	149
FIGURA B.5 – Configuração de Real Constants.	150
FIGURA B.6 – Material da Matriz.	150
Figura B.7 – Parâmetros da Matriz.	151
FIGURA B.8 – Material da Inclusão.	151
FIGURA B.9 – Modelagem da Malha.	152
FIGURA B.10 – Modelagem da Inclusão.	152
Figura B.11 – Definição de Vazio.	153
Figura B.12 – Vazio.	153
FIGURA B.13 – Configurações de malha quanto ao tamanho dos elementos.	154
Figura B.14 – Configurações de malha quando ao tipo de elementos.	154
FIGURA B.15 – Material da matriz.	155
FIGURA B.16 – Malha da matriz.	155
FIGURA B.17 – Criação da Inclusão.	156
FIGURA B.18 – Material da Inclusão.	156
FIGURA B.19 – Malha da Inclusão.	157
FIGURA B.20 – Conferência de malha.	157
FIGURA B.21 – Visualização de materiais na malha.	158
FIGURA B.22 – Adição de elementos de contato na interface.	158
FIGURA B.23 – Seleção da área de contato 1.	159
FIGURA B.24 – Seleção da área de contato 2.	159
FIGURA B.25 – Parâmetros do Contato.	160
FIGURA B.26 – Extração de Coordenadas.	160
FIGURA B.27 – Extração de Conectividade.	161

LISTA DE TABELAS

TABELA 1.1 – Resumo dos resultados obtidos.	20
TABELA 1.2 – Principais periódicos com publicações nos artigos selecionados.	22
TABELA 6.1 – Parâmetros iniciais da matriz e inclusões para a análise paramétrica do EVR.	111
TABELA 6.2 – Parâmetros iniciais dos elementos finitos de fratura e contato para a análise paramétrica do EVR.	112
TABELA 6.3 – Testes para análise da influência de <i>EM</i> utilizando o EVR16-GM. ...	113
TABELA 6.4 – Testes para análise da influência de <i>EI</i> utilizando o EVR16-GM.	114
TABELA 6.5 – Variação dos pares de plasticidade utilizando o EVR16-GM.	116
TABELA 6.6 – Definição dos EVRs quanto a quantidade e dimensão dos agregados.	118
TABELA 6.7 – Discretização dos EVRs estudados nesta seção.	120
TABELA 6.8 – Discretização dos EVRs com elementos de contato e fratura ao redor de todas as inclusões (EVR-T) ou ao redor das inclusões médias e grandes (EVR-GM).	124

LISTA DE SÍMBOLOS

*	:é usado para definir carregamento e soluções fundamentais;
Γ_∞	:contorno infinito;
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}$:deformação contínua;
\dot{N}_{ij}^e	:força da membrana;
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{cf}$:deformação de fratura;
$\frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial \mathbf{n}}$:valor de $\partial \mathbf{w} / \partial \mathbf{n}$ na solução fundamental;
A_e	:área da célula;
$\mathbf{C}^{ep(\text{Taylor})}$:média volumétrica do tensor constitutivo incremental;
$[\mathbf{C}_\mu^{ep}]$:tensor constitutivo da célula;
\mathbf{K}_{ef}	:rigidez do elemento finito de contato coesivo e fratura;
\mathbf{M}_{ij}	:momentos que atuam no ponto (tensor dos momentos);
\mathbf{M}_{ij}^e	:momentos elásticos devido as tensões elásticas (que no processo iterativo são chamadas de tensões de tentativa);
\mathbf{M}_{ij}^0	:campo de momento iniciais (devido ao fenômeno dissipativo);
$\{\mathbf{M}^0\}$:vetor que contém os momentos iniciais nos nós de contorno e do domínio;
$\{\mathbf{P}^T\}$:vetor dos esforços nodais de valores do contorno da placa;
\mathbf{Q}_j	:forças cortantes;
$\{\mathbf{R}_c^T\}$:vetor que contém as reações de canto;
$\{\mathbf{U}^T\}$:vetor de valores nodais de deslocamento do contorno da placa;
V_μ	:volume do EVR;
\mathbf{W}_{ig}	:fator de ponderação do ponto de Gauss ig definido ao longo da espessura da placa;
$\mathbf{w}_{,ij}$:curvaturas;
$\{\mathbf{w}_c^T\}$:vetor que contém os deslocamentos nos cantos;
δ_{ij}	:delta de Kronecker;
$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$:campo de deformação total;
$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e$:deformação elástico-linear;
$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^0$:deformação residual (devido ao fenômeno dissipativo);

ξ_{ig}	:coordenadas homogêneas;
σ_{ij}	:tensor das tensões devido ao carregamento;
σ_{ij}^e	:tensão elástica;
σ_{ij}^0	:tensão plástica;
$[\Psi^T]$:matriz que contém as funções de aproximação linear;
$\partial w / \partial \mathbf{n}$:rotação normal ao contorno;
\mathbf{g}^*	: carregamento fundamental;
L_j	:comprimento do elemento \mathbf{j} ;
M_n	:momento fletor;
\mathbf{n}	:direção normal;
$\{\mathbf{P}\}$:vetor de valores nodais de esforços no contorno;
R	:raio da curvatura do contorno no ponto \mathbf{P} ;
r	:distância do local onde a carga unitária é aplicada até o ponto onde deseja obter a força ou deslocamento na solução fundamental;
r, θ	:sistema de coordenadas polares;
$\{\mathbf{R}_c\}$:Reação de canto;
\mathbf{R}_M	:resíduo de momentos;
\mathbf{s}	:direção tangencial ao contorno;
t	:espessura da placa;
$\{\mathbf{U}\}$:vetor dos deslocamentos em todos os nós;
V_n	: esforço cortante equivalente;
w	:deslocamento (flexa na direção \mathbf{x}_3);
w^*	:o valor de w na solução fundamental;
$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3,$:sistema de coordenada cartesiana;
β_c	:angulosidade do canto da placa;
Γ	:coordenada ao longo do contorno;
Γ_1, Γ_2	:coordenadas dos limites do contorno onde se faz a integração;
Γ_j	:elemento de contorno:
ξ	:coordenada adimensional do ponto no qual a equação integral é calculada;
Ω	:coordenada de domínio;
Ω_m	:domínio da célula;
D	:rigidez à flexão da placa;

E	: módulo de elasticidade longitudinal do material;
G	: módulo de elasticidade transversal do material da placa;
[S]	: influência dos momentos plásticos;
T(Q)	: coeficiente referente a carga;
g	: carregamento uniformemente distribuído;
$\Delta\tilde{u}$: incremento de flutuação dos deslocamentos;
$\{\Delta\epsilon\}$: vetor do incremento de deformação imposto pelo macro-contínuo;
ΔK_n	: incremento de momentos elásticos;
$\{\Delta M_n\}$: incremento de momentos na placa;
Ω_∞	: domínio infinito;
Ω_g	: área do carregamento distribuído;
$\delta(\mathbf{q}, \mathbf{p})$: delta de Dirac;
v	: coeficiente de Poisson do material;
$\sigma(\mathbf{x}, t)$: tensão homogeneizada;

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAPES – Conselho de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior;

EVR – Elemento de Volume Representativo;

MEF – Método dos Elementos Finitos;

MEC – Método dos Elementos de Contorno;

ZTI – Zona de Transição Interfacial;

CP – Corpo de Prova.

RESUMO

SILVA, M. J. M. **Análise do comportamento mecânico da microestrutura do concreto em regime de compressão por meio de uma abordagem multiescala e o MEC.** Catalão. Dissertação (Mestrado) – Unidade Acadêmica Especial de Engenharia, Regional Catalão, Universidade Federal de Goiás, 2022, 166 p.

Este trabalho trata do estudo do comportamento mecânico do concreto utilizando uma proposta de modelagem numérica bidimensional em escala microscópica. O material é considerado composto por três fases sendo matriz, inclusões e zona de interface, onde cada constituinte é modelado adequadamente. É apresentada ainda, a formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para a análise multi-escala de chapas, onde Elementos de Volume Representativos (EVRs) representam a estrutura do material, modelada como uma placa com sub-regiões. A abordagem modela a zona de transição interfacial por meio de elementos finitos coesivos de contato, onde um modelo de fratura e contato é incorporado ao elemento, a inclusão é modelada como sendo um material elástico linear, já a matriz é considerada como material elastoplástico obedecendo ao modelo de Mohr-Coulomb. O principal objetivo do trabalho é mostrar como uma formulação baseada na homogeneização computacional é uma alternativa vantajosa quando comparada aos modelos constitutivos macroscópicos complexos para o comportamento mecânico de materiais frágeis. Uma série de exemplos envolvendo a parametrização das propriedades do concreto, a análise da influência da dimensão e quantidade de agregados, a análise da influência da quantidade de elementos de fratura e contato e a análise da inserção de vazios para representar a porosidade do concreto, é apresentada de modo a ilustrar a performance da modelagem proposta. Os resultados encontrados evidenciam que as modelagens propostas apresentam resultados promissores para o emprego numa modelagem multiescala. Mostra também a importância da utilização da fratura, bem como de poros para representar de maneira mais fiel os materiais heterogêneos.

Palavras-chave: Concreto, Método dos Elementos de Contorno, Abordagem Multiescala, Fratura Coesiva.

ABSTRACT

SILVA, M. J. M. **Análise do comportamento mecânico da microestrutura do concreto em regime de compressão por meio de uma abordagem multiescala e o MEC.** Catalão. Dissertação (Mestrado) – Unidade Acadêmica Especial de Engenharia, Regional Catalão, Universidade Federal de Goiás, 2022, 165 p.

This paper deals with the study of the mechanical behavior of concrete using a two-dimensional numerical modeling proposal on a microscopic scale. The material is considered to be composed of three phases being matrix, inclusions and interface zone, where each constituent is modeled appropriately. A Boundary Element Method (BEM) formulation for the multi-scale analysis of sheets is also presented, where Representative Volume Elements (RVEs) represent the structure of the material, modeled as a plate with sub-regions. The approach models the interfacial transition zone by means of cohesive contact finite elements, where a fracture and contact model is incorporated into the element, the inclusion is modeled as being a linear elastic material, while the matrix is considered as an elastoplastic material obeying the Mohr-Coulomb model. The main objective of the work is to show how a formulation based on computational homogenization is an advantageous alternative when compared to complex macroscopic constitutive models for the mechanical behavior of brittle materials. A series of examples involving the parameterization of concrete properties, the analysis of the influence of the size and amount of aggregates, the analysis of the influence of the amount of fracture and contact elements, and the analysis of the insertion of voids to represent concrete porosity, are presented in order to illustrate the performance of the proposed modeling. The results found show that the proposed modeling presents promising results for employment in a multiscale modeling. It also shows the importance of using fracture as well as pores to more faithfully represent heterogeneous materials.

Keywords: Concrete, Boundary Element Method, Multiscale Approach, Cohesive Fracture.

CAPÍTULO 1

APRESENTAÇÃO

Neste capítulo são definidos os objetivos da pesquisa, é apresentada a justificativa para o desenvolvimento da mesma, além de discutir aspectos gerais da metodologia a ser utilizada para obtenção das respostas numéricas. Por fim é apresentado o estado da arte envolvendo o tema da dissertação, onde além de apresentar bibliografias que tratam do assunto são discutidos mais detalhadamente trabalhos que nortearam as simulações numéricas a serem desenvolvidas na dissertação.

1.1. INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

O concreto é o material de construção mais utilizado no Brasil. Mehta e Monteiro (2014, p. 03) trazem três razões principais para o concreto ser tão utilizado, apesar de não ser tão resistente e rígido quanto o aço: a primeira razão refere-se à excelente resistência do concreto à água, diferente da madeira e do aço comum, que faz dele um material ideal para utilização em elementos estruturais expostos à umidade como fundações, lajes, vigas, barragens, etc.; o segundo motivo é a facilidade de se moldar diferentes formas e tamanhos de elementos estruturais constituídos por concreto, pois em estado fresco é de consistência plástica, favorecendo o fluxo do material para o interior de fôrmas; o terceiro motivo para a popularidade do concreto entre os engenheiros é o baixo custo e a rápida disponibilidade do material para uma obra.

O concreto é definido como um material composto, como já dito anteriormente, por cimento, água, agregados e ar, podendo também conter adições de outros materiais como cinza, sílica e aditivos químicos com a finalidade de melhorar ou modificar o desempenho desse compósito. Isso faz com que o concreto possua uma microestrutura altamente complexa e heterogênea, que acarreta numa dificuldade muito grande de elaborar modelos realistas de sua microestrutura e que reproduzam o comportamento do material com confiabilidade (MEHTA; MONTEIRO, 2014, p. 23).

Segundo Borges (2015), para que o material fosse modelado considerando as diferentes fases presentes em sua microestrutura, foi desenvolvida a teoria multiescala que faz a integração do comportamento que ocorre desde a maior escala do material até o nível microscópico, possibilitando a obtenção da resposta constitutiva do mesmo de forma mais precisa. Os modelos desenvolvidos em multiescala são atrativos por terem

grande potencial de desenvolvimento e utilização, pois esses modelos permitem que cada material componente dos compósitos possa ter propriedades elásticas diferentes e sejam regidos por modelos constitutivos próprios, além de possibilitar a definição de características relevantes como imperfeições e fissuras na microestrutura.

Nesse contexto da abordagem multiescala, a nível macroscópico, o concreto se comporta como um material contínuo, porém sua microestrutura é composta por vários materiais que apresentam comportamentos distintos entre si. Por ser uma mistura, a própria fabricação faz com que algumas regiões tenham comportamentos distintos, onde algumas áreas podem ter mais ou menos fissuração.

Para a modelagem do comportamento micromecânico de materiais heterogêneos, por uma abordagem multiescala, modelos constitutivos baseados nas teorias da Mecânica da Fratura, Mecânica do Contato, Mecânica do Dano e Teoria da Plasticidade podem ser definidos para as diferentes fases do material. No caso do concreto, os processos de plastificação da matriz e de propagação de microfissuras, principalmente na Zona de Transição entre a interface matriz-agregado, são importantes fenômenos a serem modelados. Assim, nesse trabalho um modelo de plasticidade será adotado para modelar o comportamento da matriz (argamassa) e um modelo de fratura será adotado nas interfaces entre matriz e agregados, a fim de simular o processo de fissuração nessa região, levando ao descolamento de fases (entre argamassa e agregado). Portanto, este trabalho pretende contribuir com o estudo do comportamento mecânico do concreto no âmbito de uma formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) e segundo uma abordagem multiescala.

Como já dito anteriormente, o concreto é considerado um material compósito possuindo três fases: matriz de pasta de cimento hidratada, agregados e Zona de Transição Interfacial (ZTI) entre o agregado e a matriz. No entanto, a maioria das pesquisas sobre análise numérica de estruturas de concreto, não considera essa diversidade de fases na microestrutura do concreto, tratando-o como um material homogêneo na escala macroscópica, impedindo que se estabeleça a relação entre a microestrutura e as propriedades do material em termos de perda de resistência e rigidez de forma mais realística, considerando os processos de plastificação e fratura.

O estudo da modelagem da microestrutura não é trivial devido à complexidade de se medir experimentalmente as propriedades mecânicas da ZTI. Além disso, na análise multiescala o acoplamento completo entre as escalas possui um custo computacional muito alto. Porém, devido aos recentes avanços na compreensão da composição química,

espessura e resistência da zona de transição e os desenvolvimentos na área de Mecânica Computacional, é possível simular o comportamento micromecânico de materiais como o concreto, podendo abordar o efeito de várias características da microestrutura como por exemplo o tamanho, a distribuição, a fração volumétrica dos agregados, a presença de porosidade, além das propriedades mecânicas de tal material estrutural.

Acredita-se que esse estudo seja justificado pela possibilidade de ganho em acurácia de resultados macromecânicos de estruturas compostas por materiais heterogêneos, como o concreto, sem necessidade de recorrer a modelos constitutivos complexos, podendo ainda reproduzir o comportamento do mesmo já constatado em pesquisas experimentais.

1.2. ESTADO DA ARTE

Para se chegar à idealização dos EVRs, que serão criados para representar o material concreto, foi realizado um estudo de mapeamento sistêmico (*Mapping Study*), que foi proposto inicialmente por Bailey et al. (2007). Esta pesquisa foi feita conforme a metodologia adotada por Paula e Ilha (2016) e Costa et al. (2014), que consiste em uma busca sistêmica, utilizando palavras relacionadas ao tema pesquisado, a combinação dessas palavras forma as *strings* de busca. As buscas foram realizadas em fevereiro de 2021 e foi utilizada a base de dados CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior). Com o mapeamento sistêmico é possível encontrar bibliografias aderentes ao tema, além de tomar conhecimento de como estão as pesquisas relacionadas, os locais onde elas se encontram, os principais pesquisadores, etc. Procurou-se também conhecer melhor o concreto e seu comportamento através das bibliografias estudadas.

Assim, a seguir faz-se o relato dos resultados obtidos com o mapeamento sistêmico, além de discutir mais detalhadamente algumas referências que são importantes para o desenvolvimento do trabalho proposto.

1.2.1. Mapeamento Sistêmico

Inicialmente, a pesquisa foi realizada empregando as *strings*: “*Multi-scale*” AND “*Heterogeneous microstructures*”, obtendo 127 resultados, e “*Representative Volume Element*” AND “*Heterogeneous microstructures*”, obtendo 168 resultados. Em seguida, a pesquisa foi refinada utilizando os filtros: Periódicos revisados por pares em inglês e

Período de publicação de 25 anos (1994-2019), sendo os resultados das buscas transferidos para uma planilha no Microsoft Excel®. Diante desses resultados, foram selecionados os artigos com títulos aderentes ao tema e realizada a leitura dos resumos desses artigos, selecionando-se assim, resumos que também possuíam aderência ao tema de estudo: Microestrutura heterogênea e Multiescala. Os dados encontrados foram classificados como aderentes para cada *string* e em seguida organizados e resumidos em forma de tabelas. Os dados relativos ao país, ano de publicação, periódico e vertente dos artigos selecionados foram organizados como gráficos e tabelas.

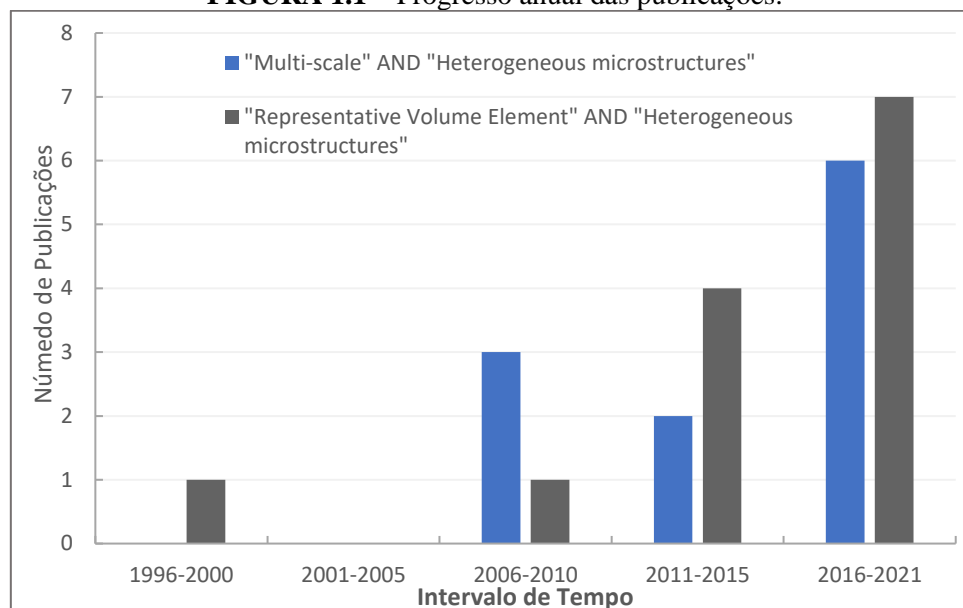
Inicialmente, examinando os títulos de artigos encontrados no Portal de Periódicos CAPES, foram obtidos 27 artigos com título aderente para a expressão-chave “*Multi-scale*” AND “*Heterogeneous microstructures*” e 71 artigos com título aderente para a expressão-chave “*Representative Volume Element*” AND “*Heterogeneous microstructures*”. Destes artigos encontrados haviam apenas 4 repetições para a segunda expressão-chave, que é um valor pouco significativo. Após essa análise, foi feita a leitura dos resumos dos artigos com títulos aderentes, para verificar a compatibilidade do resumo com a pesquisa desejada. Assim, chegou-se à Tab. (1.1).

TABELA 1.1 – Resumo dos resultados obtidos.

Base de Dados	“Multi-scale” AND “Heterogeneous microstructures”		“Representative Volume Element” AND “Heterogeneous microstructures”	
	Número de artigos			
	Inicial	Com título aderente	Inicial	Com título aderente
Periódicos Capes	127	27	168	71
Nº total de artigos sem repetições		27		67
Nº de artigos após a leitura do resumo		11		13
Percentual		8,67%		7,74%

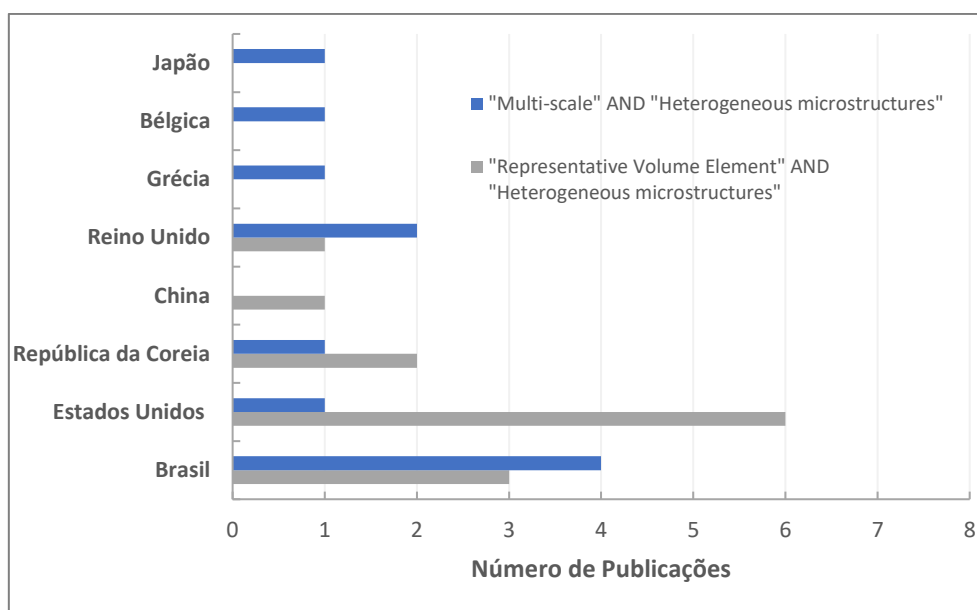
Fonte: Autoria própria (2021).

Na Fig. (1.1) é possível observar o progresso da pesquisa ao decorrer dos anos. Percebe-se que é um tema relativamente novo, sendo que as primeiras ocorrências aparecem em 2006 e há um maior crescimento no número de publicações a partir de 2015.

FIGURA 1.1 – Progresso anual das publicações.

Fonte: Autoria própria (2021).

Ainda analisando quantitativamente, observou-se o volume de publicações em relação aos países de origem. É possível observar que Brasil e Estados Unidos apresentaram, na última década, o maior número de publicação, cada um com 7 publicações.

FIGURA 1.2 – Progresso anual das publicações.

Fonte: Autoria própria (2021).

Foi feita uma análise também dos periódicos que possuem a maior quantidade de artigos selecionados, que está disposta na Tab. (1.2). Apenas dois periódicos apresentaram um maior número de publicações, sendo *Engineering Analysis with Boundary Elements* com 6 e *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* com 5.

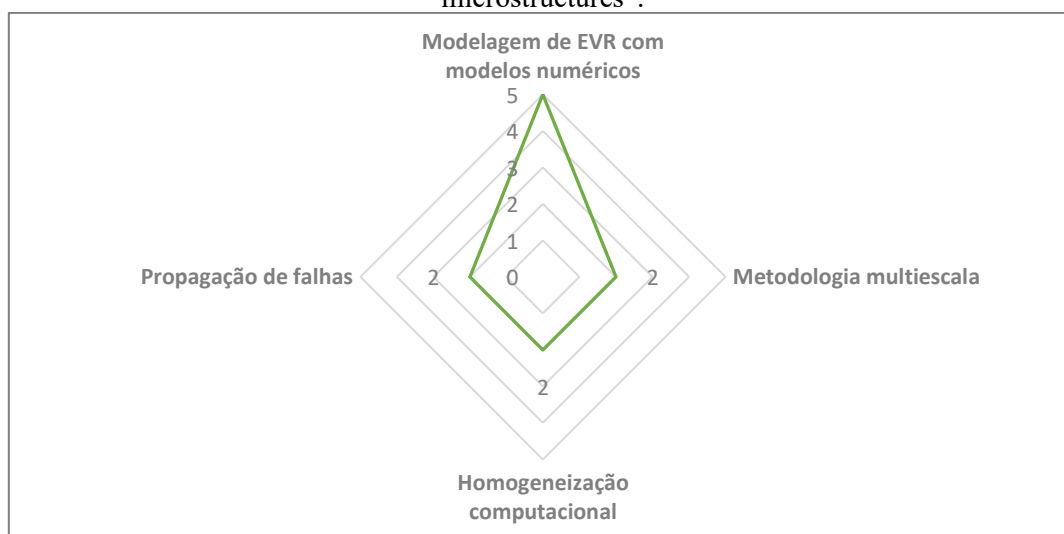
TABELA 1.2 – Principais periódicos com publicações nos artigos selecionados.

Periódicos	Número de artigos publicados
Engineering Analysis with Boundary Elements	6
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering	5
Outras	13

Fonte: Autoria própria (2021).

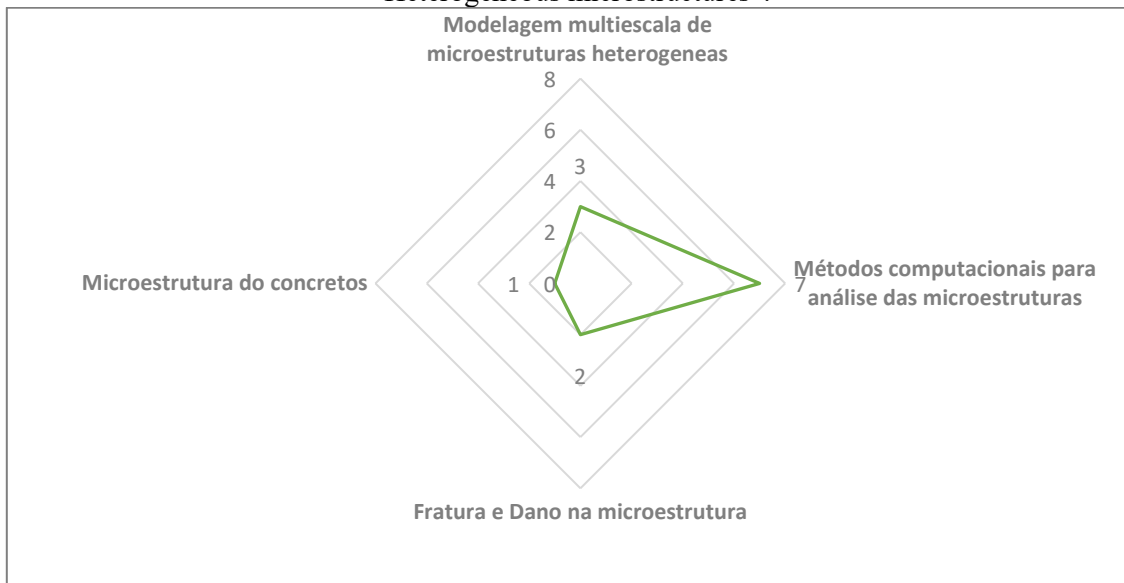
Os artigos selecionados foram classificados também quanto à vertente adotada, os resultados são apresentados nas Fig. (1.3) e Fig. (1.4). As vertentes foram separadas em tópicos relacionados a “*Multi-scale*” AND “*Heterogeneous microstructures*” e “*Representative Volume Element*” AND “*Heterogeneous microstructures*”. Dentro do primeiro tópico a vertente mais abordada é Modelagem de EVR com modelos numéricos, com 5 vertentes. Quanto ao segundo tópico a vertente mais abordada é Métodos computacionais para análise das microestruturas, com 7 vertentes.

FIGURA 1.3 – Principais vertentes sobre “*Multi-scale*” AND “*Heterogeneous microstructures*”.



Fonte: Autoria própria (2021).

FIGURA 1.4 – Principais vertentes sobre “Representative Volume Element” AND “Heterogeneous microstructures”.

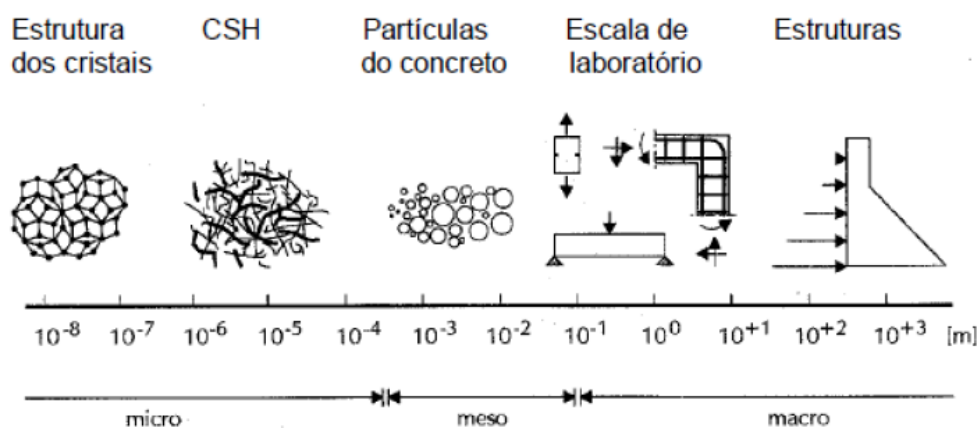


Fonte: Autoria própria (2021).

Os gráficos acerca das vertentes possibilitam a separação das áreas que mais têm atraído a atenção de pesquisadores. Nota-se que, de todos os trabalhos encontrados no mapeamento sistêmico, apenas um trata de microestrutura do concreto. Sabendo que esse é um dos focos do trabalho, é necessária uma busca mais avançada em relação a tal vertente para fazer uma análise se há uma lacuna nessa subárea.

1.2.2. Microestrutura do Concreto

O concreto, em geral, é composto por agregado miúdo, agregado graúdo, água e cimento Portland. Suas principais vantagens são resistência à água e baixo custo econômico. Sendo um material compósito, os materiais constituintes apresentam dimensões variadas e propriedades mecânicas distintas. Van Mier (1997) e Bittencourt (1999) dividiram as estruturas do concreto em níveis de observação, como mostrado na Fig. (1.5). É possível observar na escala nanométrica (10^{-9} m) diferentes estruturas atômicas do concreto. Na escala micrométrica (10^{-6} m) observa-se os grãos do cimento. Na escala mesométrica (10^{-3} m) as partículas de areia e agregados podem ser observadas, além dos poros grandes e a interação entre os agregados e a pasta de cimento. A escala macrométrica (10 m) corresponde ao nível em que os laboratórios realizam experimentos.

FIGURA 1.5 – Diferentes escalas de observação.

Fonte: Bittencourt (1999).

De acordo com Mehta e Monteiro (2014, p. 276), a classificação dos agregados é feita de acordo com a dimensão das partículas. Por exemplo, o agregado graúdo é utilizado para descrever partículas maiores que 4,75mm (retidas na peneira de nº 4), e o termo agregado miúdo é utilizado para partículas com menos de 4,75mm. O agregado graúdo tem partículas com tamanhos que variam entre 4,75mm a cerca de 50mm.

Ainda segundo Mehta e Monteiro (2014, p. 295), existem vários motivos para especificar os limites granulométricos e a dimensão máxima do agregado. O mais importante deles é sua influência sobre a trabalhabilidade e o custo. Por exemplo, areias muito grossas produzem misturas de concreto ásperas e não trabalháveis, e areias muito finas aumentam a demanda de água, conseqüentemente aumentam o consumo de cimento para uma dada relação a/c, não sendo econômicas. Agregados de granulometria contínua, ou seja, que não apresentam deficiência ou excesso de qualquer dimensão de partícula produzem misturas mais trabalháveis e econômicas.

Como as partículas grandes tendem a produzir uma quantidade maior de microfissuras na zona de transição na interface entre agregado graúdo e pasta de cimento, a dimensão máxima do agregado geralmente fica limitada a 19mm para concretos de alta resistência (MEHTA E MONTEIRO, 2014 p. 295).

Com relação a porosidade do concreto, Mehta e Monteiro (2014, p. 34) afirmam que em pastas de cimento bem hidratadas com baixa relação água/cimento, os vazios capilares podem variar entre 10 e 50 nm. Em pastas com alta relação água/cimento, os vazios capilares podem ser maiores, entre 3 e 5 μm . Sugere-se que a distribuição de tamanho dos poros, e não a porosidade capilar total, seja um melhor critério para avaliar as características da pasta de cimento hidratada. Vazios capilares maiores que 50 nm,

chamados macroporos, têm mais influência na determinação das características de resistência.

Ainda de acordo com Mehta e Monteiro (2014, p. 38), uma pequena quantidade de ar normalmente fica aprisionada na pasta de cimento durante a mistura do concreto, gerando vazios com dimensão máxima de 3mm. A porosidade do concreto pode chegar a no máximo a 30% de fração volumétrica do EVR, sendo que traços de concreto com fator água/cimento de 0,6, que se aproxima daquele traço utilizado nos experimentos de Delalibera (2002) ($a/c = 0,65$), acumulam cerca de 30% de porosidade.

Mehta e Monteiro (2014, p. 38) afirma ainda que a presença de ar no concreto como um grande problema relacionado a corrosão, pois a presença de muitos vazios possibilita a entrada de água e outros agentes degradantes no material.

Diferente dos vazios capilares, os vazios de ar incorporado geralmente são esféricos. Uma pequena quantidade de ar normalmente fica aprisionada na pasta de cimento durante a mistura do concreto. Esses vazios de ar aprisionado chegam a 3mm e os vazios de ar incorporado normalmente variam entre 50 e 200 μm , ambos bem maiores que os vazios capilares. (MEHTA E MONTEIRO, 2014 p. 34).

1.2.3. Análise Experimental feita em Delalibera (2002)

Um dos objetivos deste trabalho é obter, através da análise utilizando o Método dos Elementos de Contorno com uma abordagem multiescala, valores que se aproximem de análises experimentais realizadas por Delalibera (2002), onde corpos de prova de concreto foram ensaiados sob compressão resultando em gráficos tensão x deformação. Para a produção dos corpos de prova citados, o concreto utilizado foi feito em uma dosagem que possibilitou que sua resistência média à compressão chegasse a 25 MPa aos 21 dias de idade. Com relação aos materiais utilizados, tem-se a seguir a caracterização dos mesmos.

- **Cimento:**

O cimento utilizado foi o CP-II E-32 da marca Itaú. De acordo com o fabricante a massa específica é de 3,10 g/cm^3 a 3,15 g/cm^3 .

- Agregado miúdo

O agregado miúdo utilizado na pesquisa foi areia do tipo quartzosa, proveniente do Rio Mogi-Guaçu. A granulometria determinada segundo a NBR 7217:1987, sendo o módulo de finura igual a 2,12 e a dimensão máxima do agregado igual a 2,4mm. A massa específica do agregado miúdo foi de $2,65 \text{ kg/dm}^3$ e a massa unitária de $1,5 \text{ kg/dm}^3$.

- Agregado Graúdo

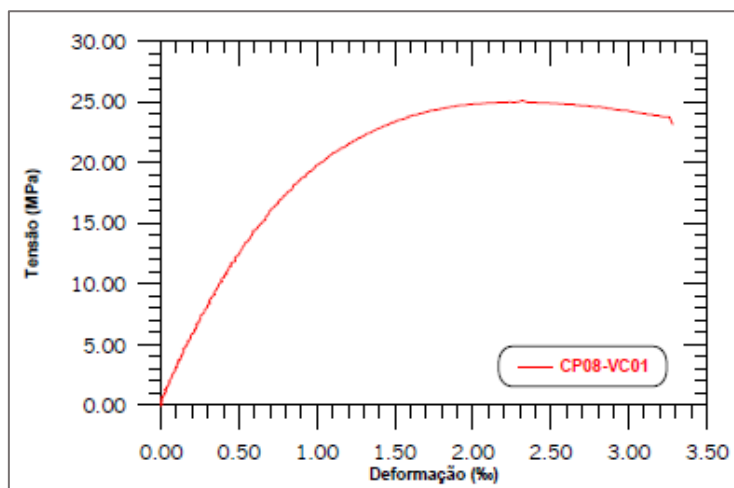
O agregado graúdo utilizado foi pedra britada de origem basáltica, proveniente da região de São Carlos. O módulo de finura é igual a 6,49 com diâmetro máximo do agregado igual a 19mm. A massa específica foi de $2,82 \text{ kg/dm}^3$ e $1,53 \text{ kg/dm}^3$.

- Água

A massa específica considerada foi de $1,00 \text{ kg/dm}^3$.

Com relação à dosagem do concreto, determinou-se o traço ideal para a resistência média à compressão de 25 MPa aos 21 dias de idade. Para tanto, o traço em massa foi de 1:2,37:3,55:a/c=0,65, em que o primeiro número se refere a quantidade de concreto, o segundo à quantidade de areia e o terceiro à quantidade de brita, a/c significa o fator água/cimento da mistura.

FIGURA 1.6 – Diagrama tensão x deformação do corpo de prova CP08-VC01.



Fonte: Delalibera (2002).

Para calcular o volume de agregados ou inclusões, é necessário levar em consideração o volume do concreto, que será dada pela Eq. (1.1).

$$V_{\text{concreto}} = V_{\text{cimento}} + V_{\text{areia}} + V_{\text{brita}} + V_{\text{água}} \quad (1.1)$$

Onde,

$$V = \frac{M}{\rho} \quad (1.2)$$

Sendo assim, considerando as massas específicas dadas em Delalibera (2002), o volume do concreto é dado abaixo.

$$V_{\text{concreto}} = \frac{1}{3,125} + \frac{2,37}{2,65} + \frac{3,55}{2,82} + \frac{0,65}{1} = 3,123 \text{ uv}$$

Como a parcela importante para esta pesquisa é a parcela de agregados graúdos (3º parcela), chega-se que há 40,30% de agregados graúdos. Portanto, esta será a fração volumétrica aproximada de agregados, em relação ao volume total do EVR, utilizada nesta pesquisa.

Com relação às dimensões dos agregados, será adotado agregado que tenha no máximo 19mm de diâmetro, para ficar de acordo com as especificações de Delalibera (2002) citadas anteriormente.

Não é especificado em Delalibera (2002) qual o teor de ar presente no corpo de prova, desta forma o volume de vazios terá embasamento teórico.

Assim, neste trabalho, as características dos EVRs serão adotadas de modo que as especificações apresentadas neste item, para as diferentes fases da microestrutura, sejam atendidas, como por exemplo: dimensão dos agregados e fração volumétrica dos agregados.

1.2.4. Pesquisas que modelaram numericamente o comportamento constitutivo do concreto

1.2.4.1. Kim e Al-Rub (2011)

Kim e Al-Rub (2011) em seu trabalho, investiga, utilizando o Método dos Elementos Finitos, a contribuição de cada fase do concreto (matriz de argamassa, agregados e Zona de Transição Interfacial) em sua resistência. Foram feitas simulações 2-D e 3-D do concreto na meso-escala, utilizando um modelo de plasticidade-dano acoplado. Para as simulações foram utilizados Elementos Representativos de Volume de 100mm x 100mm.

Os agregados são modelados como um material elástico-linear, enquanto a matriz de argamassa e ZTI são modeladas usando um modelo de plasticidade-dano acoplado utilizando diferentes mecanismos para tração e compressão. Nas análises, considera-se a influência da forma do agregado, da sua distribuição e da fração de volume dos mesmos. Além disso, o efeito da espessura da ZTI, a resistência da ZTI e da matriz de argamassa também são avaliadas.

Algumas das conclusões obtidas na pesquisa e que são de interesse do presente trabalho foram:

- A fissuração é iniciada na ZTI, que é a região mais fraca; a resistência do concreto começa a ser reduzida, assim que os danos se propagam através da matriz de argamassa e à medida que a carga aumenta.
- O efeito da distribuição dos agregados pode ser desconsiderado, com exceção de algum modelo em que os agregados estejam agrupados numa região localizada.
- Devido às pequenas diferenças nas previsões da resistência à tração e da capacidade de deformação do concreto, ao considerar diferentes formas agregados, grande parte das simulações utilizou agregados de forma circular, devido à instabilidade numérica causada ao modelar a ZTI com agregados pontiagudos e à simplicidade utilizando agregados circulares na realização das simulações numéricas com o Método dos Elementos Finitos.

- A fração volumétrica de agregados e as propriedades mecânicas da ZTI têm efeito significativo no comportamento mecânico geral do concreto.

1.2.4.2. Quaresma (2016)

Outro trabalho que realizou análises numéricas do comportamento mecânico do concreto, foi o trabalho de Quaresma (2016). As análises foram feitas na meso-escala também, utilizando o Método dos Elementos Finitos, onde procurou-se evidenciar a influência das propriedades geométricas dos materiais constituintes do concreto no seu comportamento macromecânico. As características avaliadas foram: forma e distribuição dos agregados, fração volumétrica e espessura da zona de transição interfacial. Foram consideradas duas modelagens: utilizando elementos finitos de fratura e contato ou elementos finitos triangulares para modelar o comportamento da ZTI. Os EVRs propostos foram baseados no trabalho de Kim e Al-Rub (2011).

Quaresma (2016) procurou analisar: influência da forma dos agregados; influência da distribuição dos agregados; influência da fração volumétrica/distribuição de agregados; efeito da espessura da ZTI.

Como principais conclusões do trabalho, é possível dizer que a forma do agregado, assim como sua distribuição não interferiram significativamente na resistência à tração do concreto. É importante ressaltar que, para a análise de diferentes formas de agregados, foi mantida a mesma distribuição, e que na mudança de distribuição foram usados agregados de forma circular, em que foram fixados três tamanhos para os mesmos, mudando apenas sua disposição no EVR.

Já para a mudança de fração volumétrica de agregados, é possível observar uma diferença evidente nas curvas de tensão-deformação homogeneizada dos EVRs, sendo possível afirmar, que o aumento da fração volumétrica de agregados aumenta a rigidez da resposta macroscópica.

Uma última constatação importante a se fazer, é que quando foram utilizados elementos de fratura para modelar a Zona de Transição Interfacial, todas as análises apresentaram instabilidade numérica, que impossibilitou a obtenção de resultados mais expressivos.

1.2.4.3. *Borges (2015)*

Este trabalho realizou a modelagem numérica do comportamento mecânico da microestrutura de materiais heterogêneos e frágeis, tal como o concreto. Foi utilizado um modelo 2D de escala mesoscópica para representar o material, análogo ao modelo utilizado nesse trabalho, porém formulado pelo Método dos Elementos Finitos.

Considerando o material concreto, Borges (2015) analisou em seu trabalho:

- A influência do faturamento na zona de transição, utilizando dois EVRs com número de inclusões diferentes e consequentemente quantidade de elementos finitos de contato e fratura diferentes;
- A influência paramétrica na resposta homogeneizada do EVR, fazendo a variação dos parâmetros de fratura, do modelo de plasticidade (usado para modelar a matriz) e das condições de contorno;
- A anisotropia do EVR, onde se estudou o comportamento nas diferentes direções quando se tem a simetria das inclusões e a não simetria;
- As respostas homogeneizadas em tração e compressão, avaliando a influência do processo de faturamento da Zona de Transição;
- A zona de transição do concreto, onde foram adotados, além dos elementos finitos de fratura, uma faixa da zona de transição de 40 μm representada também por células triangulares, mas onde o material tem propriedades diferentes daquelas adotadas para o domínio do EVR;
- A influência da inclusão de elementos de fraturas no interior da pasta de cimento.

Como conclusões interessantes para este trabalho, Borges (2015) afirma que a inclusão de elementos finitos de contato e fratura coesiva na modelagem apresentou resultados coerentes com o comportamento esperado quando incluídos na Zona de Transição do concreto, evidenciando a perda de rigidez na resposta homogeneizada, sem que haja a perda total de transmissão das tensões. Além disso, a utilização apenas de modelo de plasticidade na pasta cimentícia não foi satisfatório sem a inclusão de elementos finitos de contato e fratura coesivas, pois os agregados apresentam uma maior rigidez e resistência pela adoção do comportamento elástico linear, fazendo com que a resposta homogeneizada fosse mais rígida devido a transmissão total das tensões entre o agregado e a pasta de cimento.

Entre as sugestões para trabalhos futuros apontados por Borges (2015), está a avaliação de respostas com uma visão mais quantitativa, procurando-se comparar com resultados experimentais e a consideração dos efeitos de ar incorporado que surgem durante o processo de produção do concreto. Ambas serão utilizadas no presente trabalho.

Nesse trabalho têm-se ainda algumas referências importantes para a definição das propriedades elásticas das fases do EVR e dos parâmetros utilizados nos modelos constitutivos. Foi a partir dessas referências que se adotou, nesse trabalho, os valores dessas propriedades e parâmetros. Assim, Borges (2015) cita que:

- Para o módulo de elasticidade da pasta de cimento, Mehta e Monteiro (2008) afirmam que o valor deve ficar compreendido entre 7 e 27 GPa. Ramesh *et al.* (1996) e Yang (1988) utilizam em suas análises o valor de 20 GPa, o que fica dentro da faixa do estudo citado acima.
- Para o coeficiente de Poisson, Brooks (2014) diz que para a pasta cimentícia o valor varia entre 0,20 e 0,23, tendo sido utilizado em Oliver *et al.* (2014) o valor de 0,20.
- Para os valores dos ângulos de atrito, autores como Nielsen e Hoang (2011) adotam 0°, porém num estudo mais recente de Assad *et al.* (2014), define que o valor do ângulo de atrito pode estar compreendido entre 2° e 7,4°.
- Para o concreto deve-se usar a regra associativa no modelo de Mohr-Coulomb adotado na pasta de cimento, ou seja: o ângulo de dilatância é igual ao ângulo de fricção ($\phi = \Psi$).
- Os agregados, representados pelas inclusões, são considerados como meios elásticos. Mehta e Monteiro (2008) afirmam que, para concretos com porosidade média, os valores de seus módulos de elasticidade ficam entre o intervalo de 20 GPa e 50 GPa.
- Os parâmetros referentes aos modelos constitutivos usados nos elementos de contato e fratura coesiva inseridos na região de interface matriz/agregado, de acordo com Ortiz (1999), Oliver *et al.* (2014), Pituba e Souza Neto (2015), têm os seguintes valores: $\beta_c = 0,707$, tensão coesiva $\sigma_c = 1$ MPa, abertura da fratura $\delta_c = 0,0568$ mm e um penalty = 200000. Na parametrização feita em Borges (2015), chega-se a todos esses valores, com exceção da tensão coesiva, em que ele adotou $\sigma_c = 0,09$ MPa.

1.2.5. Pesquisas que modelaram numericamente o comportamento constitutivo de materiais compósitos e/ou porosos

Nesse item, citam-se três trabalhos (Fernandes *et al.* (2019 a,b) e Santos e Pituba (2017)), que não fizeram análise numérica do comportamento do concreto, mas que são importantes para este trabalho, pois analisaram a influência da distribuição dos poros na microestrutura, mantendo constante a fração de volume de poros. Além disso, em Fernandes *et al.* (2019b), cuja formulação será adotada neste trabalho, fez-se também estudo sobre a influência dos parâmetros dos elementos de contato e fratura na resposta homogeneizada do EVR, o que pode também ser útil para a modelagem proposta nesse trabalho.

1.2.5.1. Fernandes et al. (2019b)

No trabalho de Fernandes *et al.* (2019b), foi desenvolvida uma formulação do MEC para obter a resposta constitutiva de microestruturas heterogêneas, onde é adotada uma abordagem multiescala baseada no EVR. A plasticidade foi adotada como o fenômeno dissipativo existente na matriz do EVR, além de considerar o fenômeno de descolamento de fase que ocorre na interface entre matriz e inclusão. As análises numéricas foram feitas com diferentes microestruturas compostas por uma matriz metálica dúctil reforçada por inclusões elásticas, representando os CMMs (Compósitos de Matriz Metálica). Apesar de ser um material diferente do material estudado neste trabalho, algumas conclusões do trabalho citado, também podem ser aplicadas ao presente estudo.

Concluiu-se que malhas muito refinadas não são necessárias nesse tipo de análise, pois nos exemplos numéricos existiam malhas com número de células variando entre 200 e 2000, porém malhas com cerca de 500 células já produziram bons resultados.

Nas aplicações numéricas utilizaram duas frações volumétricas de inclusão: 10% e 40%. Para a fração de 10% de inclusão foi considerado um EVR com uma inclusão centrada. Já para a fração de 40%, foram utilizados 4 EVRs: um primeiro com apenas uma inclusão centrada; um segundo EVR com 4 inclusões de mesma dimensão distribuídas de forma simétrica na matriz; o terceiro EVR com 5 inclusões de dimensões

diversas e distribuídas de forma aleatória e por fim, um EVR com 6 inclusões de mesma dimensão distribuídas de forma aleatória em torno do eixo x .

Para a fração de 10%, variou-se os parâmetros do modelo de fratura e contato, tendo sido impostos dois vetores de deformação macroscópica: $\varepsilon = \{0,00455; -0,00455; 0\}$ e $\varepsilon = \{0; 0; 0,00275\}$. Para a segunda fração volumétrica de inclusões (40%), foram utilizados 4 tipos de EVR e o vetor de deformação imposto foi $\varepsilon = \{0,00034125; -0,00034125; 0,000075\}$. Para as duas análises, quando considerada a perfeita aderência entre as fases, as respostas numéricas homogeneizadas são as mesmas para ambas as direções, já quando elementos finitos de fratura e contato são definidos nas interfaces, ocorre descolamento em uma das direções e contato na outra direção, ou seja, este elemento finito leva a superfícies de fissuras não necessariamente paralelas. Com isso, quando há elementos de contato e fratura, as respostas ficam diferentes nas direções x_1 e x_2 .

Nesse trabalho, para o EVR com 10% de inclusão, três diferentes condições de contorno em termos de flutuações de deslocamentos foram impostas ao contorno do EVR: deslocamento linear, flutuações periódicas e forças uniformes. A condição de contorno de deslocamento linear resulta numa resposta homogeneizada do EVR mais rígida, enquanto a de forças uniformes gera uma resposta mais flexível. Porém, como também já observado em trabalhos anteriores do Prof. Eduardo de Souza Neto, quando se utilizam malhas refinadas, a condição de flutuações periódicas pode ser usada, mesmo que o material não tenha microestrutura periódica. Assim, nesse trabalho, essa será a condição de contorno a ser imposta ao EVR, pois é aquela que normalmente é usada nesses tipos de simulação.

Quanto à influência dos parâmetros do modelo de fratura e contato na resposta homogeneizada do EVR, variou-se os seguintes parâmetros: escorregamento entre as bordas β_c e a máxima tensão de tração normal coesiva σ_c . Certificou-se que o aumento do parâmetro de tensão máxima σ_c resulta em diminuição da tensão homogeneizada. Quanto ao parâmetro de abertura crítica que deve ter valores entre 0 e 1, a variação utilizando valores de $\beta_c = 0,5$, $\beta_c = 0,707$ e $\beta_c = 0,9$ não resultou em diferenças significativas na resposta homogeneizada.

1.2.5.2. *Fernandes et al. (2019a)*

Em seu trabalho, Fernandes *et al.* (2019a), investigou a resposta constitutiva do EVR, mas sem modelar o descolamento de fases, ou seja, a matriz foi considerada perfeitamente aderida às inclusões. No primeiro estudo foram utilizados EVRs com mesma fração volumétrica de inclusões, sendo que um deles possuía uma inclusão centrada e o segundo EVR possuía cinco inclusões de tamanhos diferentes e distribuídas de forma aleatória, em seguida foram adotados vazios no local das inclusões. No segundo estudo, considerou-se os EVRs com inclusões e investigou-se como a resposta homogeneizada do EVR muda quando diferentes modelos constitutivos são adotados para a matriz e para as inclusões. No terceiro estudo, foi considerado o EVR com vazios e adotando diferentes modelos constitutivos para a matriz investigou-se como a resposta constitutiva do EVR muda. No quarto estudo também foi adotado o EVR com vazios, porém para mostrar a influência das condições de contorno em termos de flutuações de deslocamentos na resposta homogeneizada. Por fim, diferentes vetores de deformações foram impostos aos EVRs, tanto com inclusões quanto com vazios para ilustrar os diferentes casos de deformações que podem ocorrer caso uma análise multiescala completa seja realizada, para isso foi considerado a) cisalhamento puro; b) três deformações não nulas e c) apenas a deformação de cisalhamento nula.

Como no presente trabalho, será considerado o descolamento de fases, as conclusões do trabalho de Fernandes *et al.* (2019a) que mais nos interessa são aqueles referentes aos EVRs apenas com vazios. Nesse contexto, é possível afirmar que quando o vazio está centralizado a resposta constitutiva é mais rígida se comparada à resposta do EVR com cinco vazios distribuídos. No segundo e terceiro estudos, em que foram adotados modelos constitutivos diferentes na matriz, verificou-se que adotando o modelo elasto-plástico perfeito para a matriz, a rigidez e resistência do EVR são reduzidas, como esperado. No quarto estudo, assim como em Fernandes *et al.* (2019b), verificou-se que a condição de deslocamentos lineares causa um comportamento mais rígido, enquanto a condição de trações uniformes apresentou a menor rigidez para a resposta constitutiva.

1.2.5.3. *Santos e Pituba (2017)*

O trabalho de Santos e Pituba (2017) trata de simulação numérica do comportamento mecânico de materiais porosos, utilizando uma abordagem multiescala e

considerando processos de plasticidade na matriz. Além disso, faz-se a análise de EVRs contendo diferentes distribuições e proporções de volume de vazios, sendo elas 5% e 10% de volume de vazios em relação ao volume total do EVR.

Com relação a porosidade, Santos e Pituba (2017) concluíram que o aumento da fração de volume de vazios leva a superfícies de escoamento com menores valores. Além disso, a distribuição de vazios no EVR teve uma grande influência na tensão efetiva de Von Mises, sendo que, quando a fração de volume de vazio foi mantida constante, os EVRs com vazios distribuídos aleatoriamente apresentam valores elevados para a tensão efetiva de Von Mises, diferente dos EVRs com vazios concentrados, que apresentam valores mais baixos para a tensão efetiva de Von Mises.

Comparando um vazio centrado com aqueles em que a porosidade era distribuída em quatro vazios menores, obteve-se uma diferença máxima de 14% e 16% no valor da tensão máxima, respectivamente, para frações volumétricas de 5% e 10%.

1.2.6. Breve Histórico sobre a Mecânica da Fratura

De acordo com Anderson (2005), os estudos de fratura se iniciaram entre os anos 1452 e 1519, quando Leonardo da Vinci obteve resultados que mostravam que a resistência de arames de um mesmo material variava inversamente ao comprimento do fio. Da Vinci entendeu então, que a probabilidade de encontrar defeitos internos em um fio longo é maior.

Inglis (1913¹ *apud* ANDERSON, 2005) em seu trabalho, realizou um estudo de concentrações de tensões em placas planas com furos submetidas a um estado de tração axial. Ele observou que próximo a esses furos existia uma concentração de tensão sendo proporcional às dimensões dos furos. A partir dessa observação, o trabalho de Inglis continuou a ser objeto de estudo.

Com base no modelo de Inglis, Griffith (1922² *apud* ANDERSON, 2005) propôs que as trincas só aconteceriam se a lei da conservação de energia fosse obedecida. Conforme a fissura aumenta, a energia potencial armazenada pelo sistema diminui, dissipando a energia potencial elástica, provocada pela formação da nova fissura. Com

¹Inglis, C.E., "Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners." Transactions of the Institute of Naval Architects, Vol. 55, 1913, pp. 219–241.

²Griffith, A.A., "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids." Philosophical Transactions, Series A, Vol. 221, 1920, pp. 163–198.

um estudo em vidros, ele propôs o critério de energia para a propagação de fissuras, considerando que a fratura ocorria em um material frágil ideal, com uma trinca dentro de uma chapa infinita.

Irwin (1957³ *apud* SAOUMA, 2000), após a Segunda Guerra Mundial utilizou-se das ideias de Griffith e propôs os fundamentos da Mecânica da Fratura. Ele foi responsável por iniciar o desenvolvimento da taxa de alívio de energia potencial G , a qual é definida como a taxa de variação na energia potencial por unidade de área da trinca para um material elástico.

Em meados de 1970, o estudo da Mecânica da Fratura passou de aplicações em materiais metálicos e frágeis para aplicações no concreto, obtendo importantes avanços. As contribuições se basearam no desenvolvimento de modelos mecânicos de fratura não-linear, levando em conta o comportamento da estrutura e o do concreto em si. Ao longo das últimas décadas, realizaram-se pesquisas intensivas, e as aplicações da mecânica da fratura para o projeto de vigas, ancoragens e grandes barragens estão se tornando mais comuns (MEHTA; MONTEIRO, 2014).

1.3. OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é avaliar as potencialidades e limitações de uma proposta de modelagem do comportamento mecânico do concreto via MEC e segundo uma abordagem multiescala. Portanto, pretende-se obter as respostas macroscópicas do comportamento mecânico do concreto utilizando modelos constitutivos mais simples, em formulação e quantidade de parâmetros, empregados na microescala segundo uma modelagem baseada em técnicas de homogeneização, usando o Método dos Elementos de Contorno.

Este trabalho de pesquisa apresenta como objetivos específicos:

- Obtenção de resultados próximos ao experimental da análise numérica de microestruturas heterogêneas considerando EVRs com inclusões elásticas que representem o concreto, onde haverá elementos coesivos de fratura e contato na interface entre matriz e inclusão.

³ Irwin, G. R.: 1957, Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, Transactions ASME, Journal of Applied. Mechanics, v.24, p 361-364.

- Abordar o modelo numérico do MEC e os conceitos de homogeneização utilizados para se obter a análise numérica dos EVRs e cuja formulação foi desenvolvida em Fernandes et. al. (2019).
- Obtenção de resultados próximos ao experimental para EVRs com diferentes distribuições e dimensões de agregados com resultados experimentais de Delalibera (2002), além da comparação com EVRs que possuem vazios para representar a porosidade no concreto.
- Além disso, os resultados numéricos obtidos a partir do MEC serão comparados com resultados utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) com a finalidade de verificar a proximidade dos resultados.

1.4. CONTEÚDO DO TRABALHO

De forma geral, a pesquisa é organizada em 6 capítulos, que são divididos da seguinte forma:

O Capítulo 1 é composto por considerações iniciais, objetivos, justificativa, estado da arte e idealizações dos EVRs que representarão a microestrutura do concreto.

O Capítulo 2 apresenta o material concreto propriamente dito, definindo suas características mecânicas e físicas, desde a sua macroestrutura até sua microestrutura.

O Capítulo 3 aborda o problema de equilíbrio do EVR e a técnica de homogeneização no âmbito da modelagem multiescala, a ser utilizada nesse trabalho, sendo que essa teoria é necessária para fazer a passagem da microescala para a macroescala.

O Capítulo 4 traz a formulação do Método dos Elementos de Contorno para a análise não linear da microestrutura de acordo com Fernandes *et al.* (2019b), onde fenômenos dissipativos podem ocorrer nas diferentes fases do EVR. Então será mostrado como se faz o acoplamento dessa formulação com aquela apresentada no capítulo 3, a fim de obter a resposta numérica do EVR.

O Capítulo 5 aborda os conceitos básicos da Mecânica da Fratura, assim como a formulação constitutiva do elemento finito de contato e fratura coesiva proposto por Pituba et. al. (2016).

No Capítulo 6 são apresentadas as análises numéricas dos EVRs idealizados, comparando-se os resultados numéricos a resultados experimentais obtidos em Dellalibera (2002)

Por fim são apresentadas as conclusões e sugestões para futuros trabalhos no Capítulo 7.

CAPÍTULO 2

CONCRETO: MICROESTRUTURA E PROPRIEDADES MECÂNICAS

Neste capítulo é apresentado o objeto de estudo desta dissertação, o concreto e sua microestrutura. A ciência moderna dos materiais possui como um dos focos conhecer as relações das propriedades com a microestrutura, pois acredita-se que tanto o conhecimento da microestrutura quanto das propriedades individuais dos constituintes dos compósitos pode auxiliar no controle e estudo do seu comportamento.

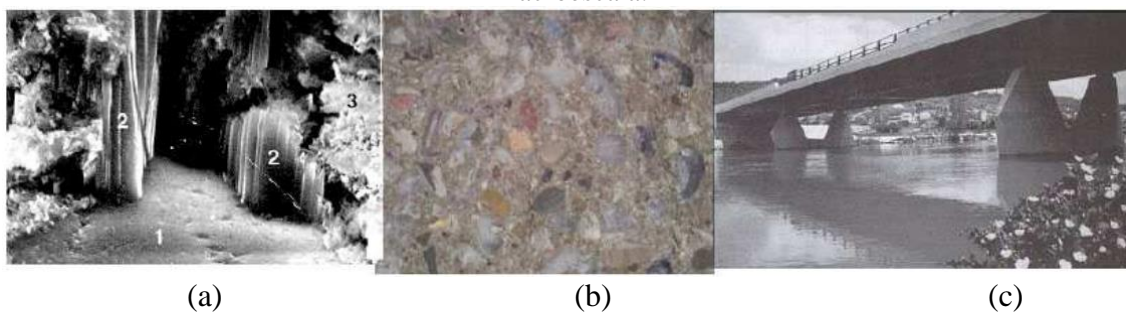
Neste capítulo também é abordado o comportamento mecânico do concreto. A resistência desse material é a propriedade mais valorizada quando se fala do estudo de suas propriedades mecânicas. Sendo assim, alguns fatores dentro da mecânica do concreto ganham destaque, como a relação água/cimento, que influencia na porosidade da matriz, na zona de transição na interface e, portanto, na resistência do concreto. Outros fatores como mineralogia e dimensão do agregado, tipos de aditivos, adições, adensamento e condições de cura, condições de umidade e geometria do corpo de prova, tipo de tensão e velocidade de carregamento podem ter efeito importante na resistência. Neste trabalho, é utilizada apenas a compressão uniaxial, sendo assim, essa será a abordada a seguir.

2.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

De acordo com Mehta e Monteiro (2014) a microestrutura é a porção com grandeza microscópica da macroestrutura. O limite de resolução do olho humano é de 200 μm e é dentro desta resolução que se encontra a macroestrutura do material, ou seja, ela é definida pela porção visível a olho nu de uma seção transversal do concreto.

Na Engenharia, costuma-se utilizar três diferentes escalas estruturais, chamadas de micro, meso e macro escalas. Na microescala, a estrutura interna do cimento e a pasta de cimento endurecida são as características mais relevantes. Na mesoescala, as partículas da estrutura tornam-se mais importantes, sendo que, a natureza heterogênea do material provoca concentração local das tensões e a existência de poros e impurezas no material diminui sua resistência. Por fim, há a macroescala onde nenhuma estrutura interna do material pode ser reconhecida (BITTENCOURT, 1999). Essas escalas estruturais podem ser visualizadas na Fig. (2.1).

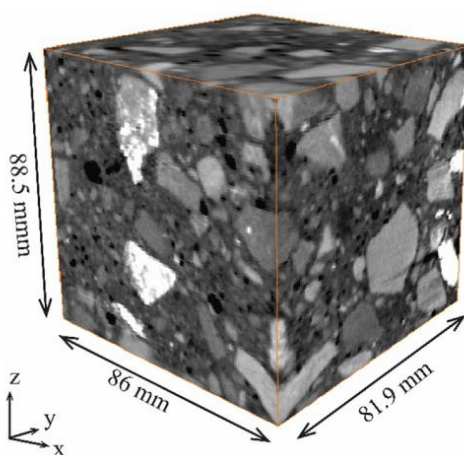
FIGURA 2.1 – Níveis de observação do concreto: (a) Microescala (b) Mesoescala (c) Macroescala.



Fonte: Bittencourt (1999).

O trabalho de Dong e Qiao (2021) traz que a microestrutura do concreto é composta de vazios, argamassa, agregados graúdos, agregados miúdos e ZTI localizada entre a matriz de argamassa e os agregados. Ainda em seu trabalho, a fim de se obter uma microestrutura realista do concreto, uma amostra de concreto cúbico com um tamanho de 100 mm foi escaneado por uma máquina CT médica convencional (Philips MX-16). É possível observar o resultado do concreto escaneado na Fig. (2.2), destacando-se que os agregados foram renderizados com cores brilhantes e os vazios renderizados como cor escura (preta) devido à sua atenuação de raios-X. É possível observar também, que os agregados miúdos são homogeneizados com a matriz de argamassa, os agregados graúdos possuem formas irregulares, porém dimensão contínua, já os vazios possuem formas aproximadamente esféricas.

FIGURA 2.2 – Concreto escaneado através de imagem CT.

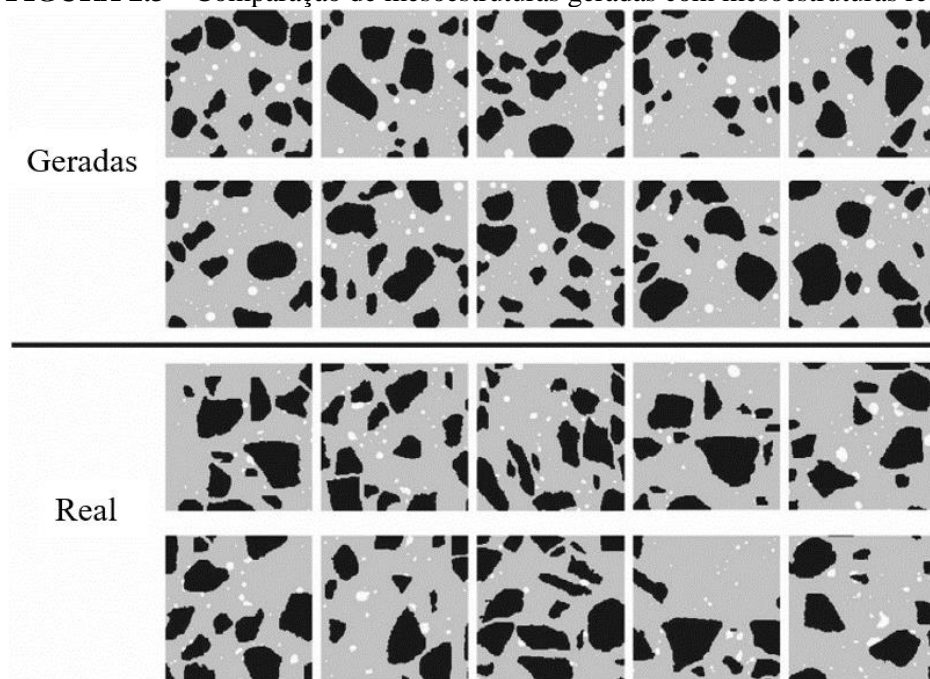


Fonte: Dong e Qiao (2021).

Dong e Qiao (2021) criaram ainda um gerador de imagens semelhantes a imagens reais. Na Fig. (2.3) é possível observar a comparação entre as imagens geradas e as reais

e observar que o gerador fornece agregados aproximadamente circulares, sendo possível observar também o tamanho e a quantidade de vazios presentes na matriz de argamassa.

FIGURA 2.3 – Comparação de mesoestruturas geradas com mesoestruturas reais.



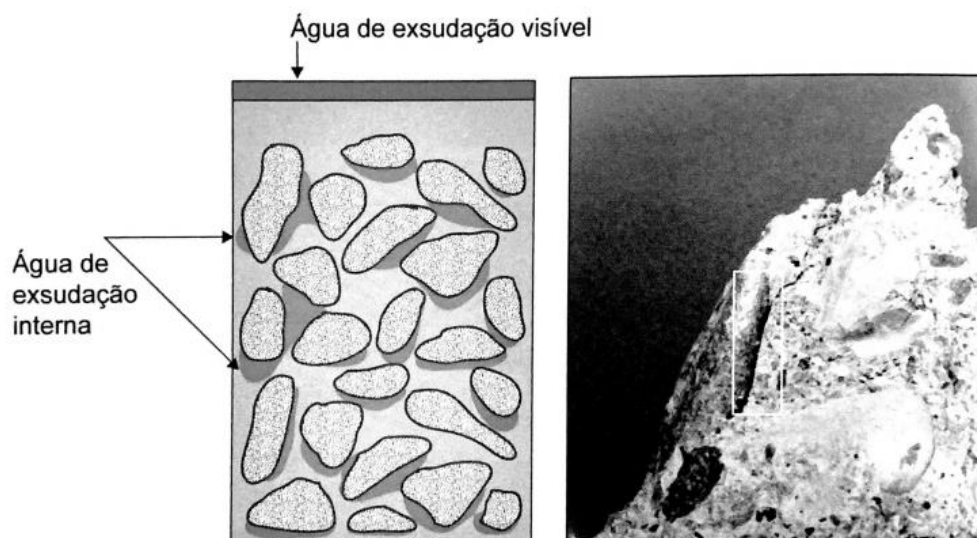
Fonte: Dong e Qiao (2021).

2.2. ESTRUTURA DO CONCRETO

O estudo de compreensão das fases da microestrutura do concreto é essencial para o controle das propriedades do compósito estudado, o concreto. Devido à natureza altamente heterogênea e dinâmica da microestrutura do concreto, que os modelos teóricos que relacionam microestrutura e suas propriedades são uma excelente ferramenta de estudo, uma vez que as análises experimentais na microestrutura são difíceis de serem realizadas.

Falando das fases do concreto, a quantidade em volume de cada uma delas influencia diretamente em suas principais propriedades mecânicas, como módulo de elasticidade, massa unitária, dentre outras. Porém, de acordo com Mehta e Monteiro (2008), quanto maior o tamanho do agregado, maior será a tendência do filme d'água se acumular próximo à sua superfície, enfraquecendo assim a ZTI. Esse fenômeno é chamado de exsudação interna, ilustrado na Fig. (2.4).

FIGURA 2.4 – Exsudação interna e externa.



Fonte: Mehta e Monteiro (2014).

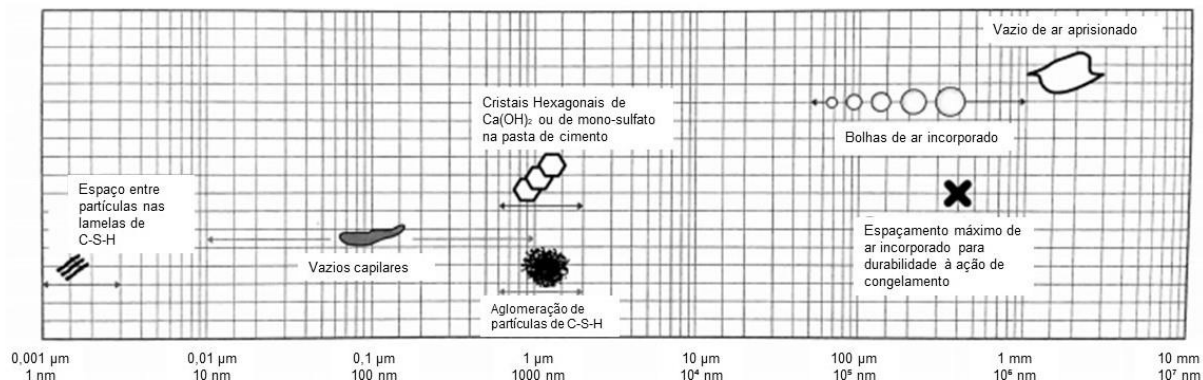
A fase pasta (ou matriz) origina-se da mistura dos materiais cimento e água. A reação química produzida forma cristais ao redor dos grãos de cimento que, passado um período de tempo, solidifica e forma a pasta de concreto. O endurecimento do concreto fresco se dá com vários processos químicos e, como consequência, surgem os chamados vazios na pasta. De acordo com Mehta e Monteiro (2008), a origem desses vazios ocorre de diversas fontes e em diferentes escalas:

- O processo químico provocado pelo CSH (silicato de cálcio hidratado) faz com que surjam os vazios conhecidos como espaço interlamelar. Devido à sua dimensão ser muito pequena, entre 5 e 25 Å ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$), esses vazios não produzem efeito sobre a resistência da pasta.
- Os vazios capilares originam-se através do excesso de água de amassamento. Durante os processos químicos, o espaço inicialmente ocupado pela água é substituído gradativamente pelos produtos de hidratação. Os espaços que não são ocupados pela hidratação dão origem a esses vazios capilares, que podem assumir diversos tamanhos. Se tiverem dimensão maior que 50 μm , são considerados macroporos e prejudicam a resistência da pasta. Vazios com dimensão menor que 50 μm são conhecidos como microporos e são importantes para retração e fluência.
- Os vazios conhecidos como Ar incorporado são provocados durante o processo de mistura. Têm dimensão de 50 μm a 200 μm e conforme a

quantidade de ar incorporado presente na pasta são capazes de afetar resistência e impermeabilidade.

Em termos de escala, as dimensões dos vazios são mostradas na Fig. (2.5).

FIGURA 2.5 – Intervalo dos vazios na pasta endurecida.

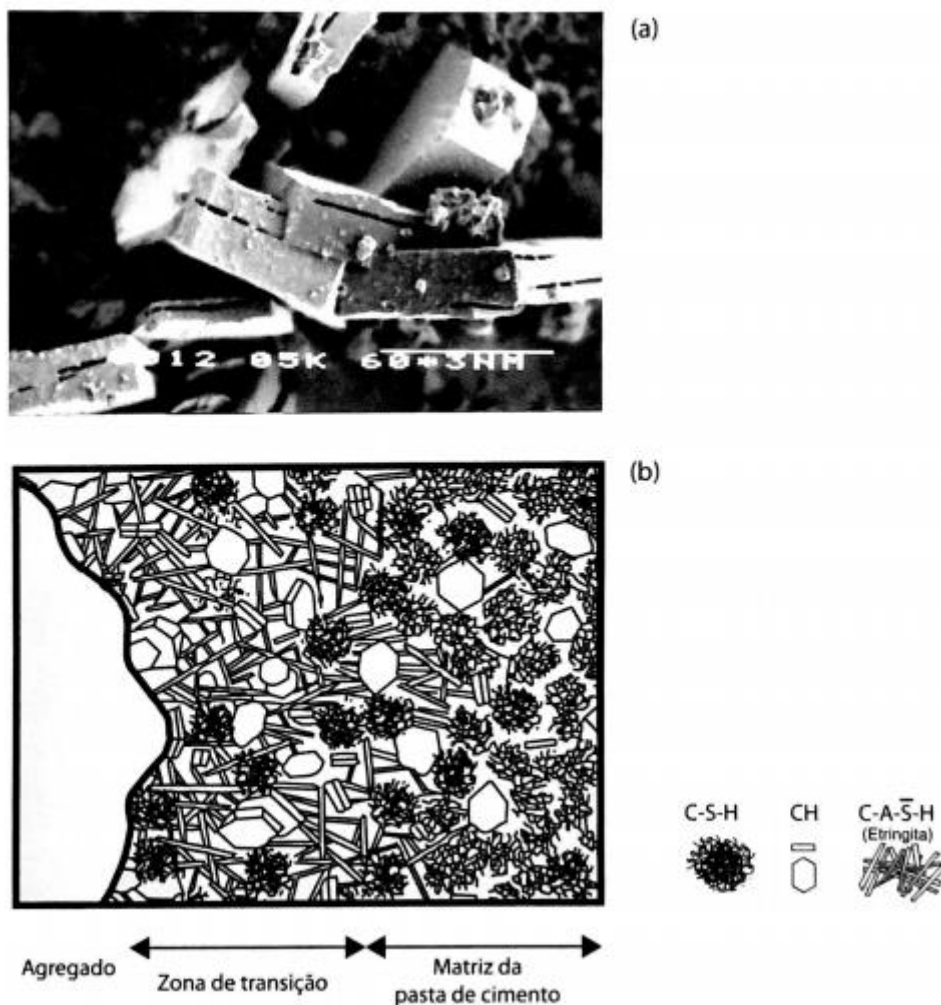


Fonte: Mehta e Monteiro (2014).

A Zona de Transição está localizada entre as fases agregado e pasta. Ela é a parte mais fraca do concreto devido ao acúmulo de água na superfície do agregado juntamente com o surgimento de vazios internos na pasta. A Zona de Transição é uma região de 10 a 50 μm de espessura ao redor do agregado graúdo. Por ser a parte mais fraca, comparada as fases agregado e pasta, exerce uma grande influência sobre o comportamento mecânico do concreto (MEHTA; MONTEIRO, 2014). Na Fig. (2.6) é possível ver a microestrutura da Zona de Transição detalhada.

Na Zona de Transição existem microfissuras devido a vários fatores como, por exemplo, a presença de vazios capilares. A quantidade depende de vários aspectos como relação água/cimento, vibração, umidade, grau de adensamento, etc. Desta forma, o concreto, especialmente na Zona de Transição, é um material que contém microfissuras antes mesmo de qualquer carregamento. Por esta razão, o concreto apresenta um comportamento frágil em regime de tração e dúctil em regime de compressão.

FIGURA 2.6 – Microestrutura da Zona de Transição: (a) Micrografia obtida por microscopia eletrônica de varredura dos cristais de hidróxido de cálcio na zona de transição (b) representação esquemática da zona de transição e da matriz da pasta de cimento no concreto.



Fonte: Mehta e Monteiro (2014).

2.3. COMPORTAMENTO MECÂNICO DO CONCRETO

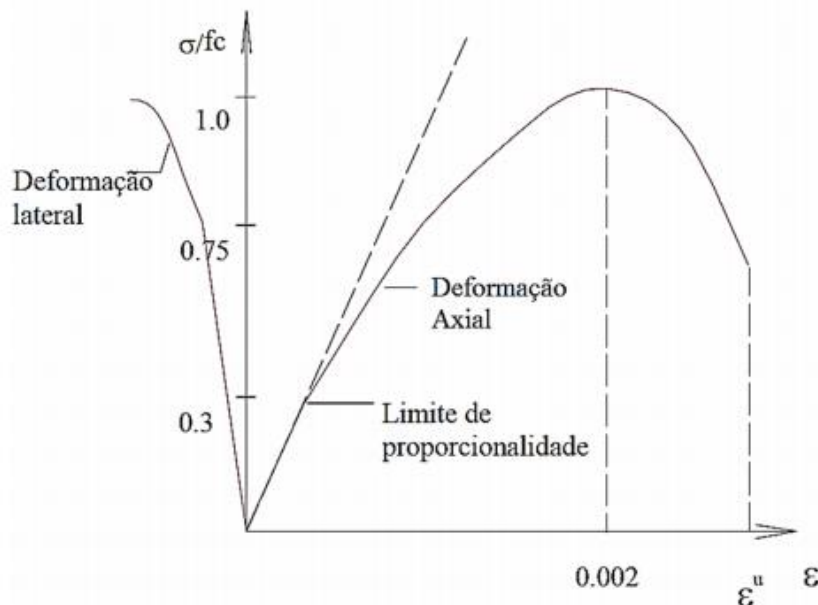
As fraturas do concreto devido aos esforços atuantes se propagam de maneiras distintas para cada tipo de esforço. Além disso, os esforços que acontecem na macroestrutura, impactam diretamente a meso e a microestrutura do concreto.

2.3.1. Comportamento macroscópico do concreto à tração e compressão

O comportamento do concreto submetido a um carregamento de compressão uniaxial é influenciado pelo surgimento de fissuras internas, levando a uma perda gradual

de rigidez e resistência. Na Fig. (2.7) podemos observar o diagrama típico de Tensão x Deformação de um ensaio de compressão uniaxial.

FIGURA 2.7 – Diagrama Tensão x Deformação em compressão.



Fonte: Proença (1988).

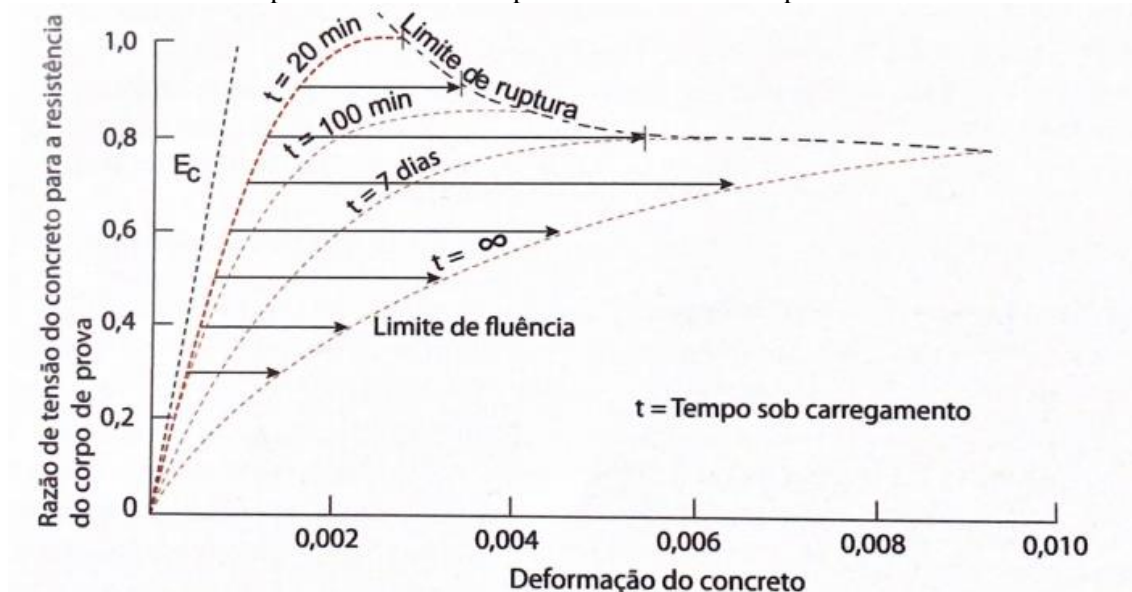
De acordo com Proença (1998), Pituba (2003), Oliveira (2013) e Mehta e Monteiro (2014), o concreto possui as seguintes características quando submetido à compressão uniaxial:

- A curva tensão-deformação mostra um comportamento elástico-linear até cerca de 30% da resistência inicial f'_c , pois sob carregamento de curto prazo, as microfissuras na zona de transição na interface permanecem inalteradas. Até essa marca de 30% são mantidos a rigidez e o coeficiente de Poisson do material. Para tensões acima desse ponto, a curva apresenta um aumento gradual na curvatura.
- Entre 30 e 50% de f'_c , as microfissuras na zona de transição apresentam certa extensão devido à concentração de tensão nas extremidades das fissuras. Porém, não ocorre fissuração na matriz de argamassa. Até este ponto, assume-se que a propagação de fissuras é estável e o coeficiente de Poisson ainda permanece o mesmo.
- Com o nível de tensão entre 50 e 75% de f'_c , o sistema de fissuração tende a ser cada vez mais instável à medida que as fissuras da zona de transição começam a crescer novamente.

- Para valores acima de 75% de f'_c , o sistema torna-se instável. Existe a conexão das fissuras da Zona de Transição e da pasta de cimento, resultando no colapso da peça. A partir desse valor, acontece o efeito Rusch. Esse efeito diz que, se o concreto for submetido a valores superiores a essa marca, mesmo em um regime constante, o material continuaria a ruir com o tempo. Na microescala, há a evolução e a integração das fissuras na argamassa.

Acima do nível crítico de tensão, o concreto mostra uma ruptura dependente do tempo. Ou seja, sob condições de tensão constante e contínua, a união da fissuração entre a zona de transição na interface e a matriz leva à ruptura com uma tensão menor do que a resistência de carregamento de curto prazo f'_c . O limite de ruptura de longo prazo encontrado foi de cerca de 80% da resistência final de curto prazo, como pode ser observado na Fig. (2.8).

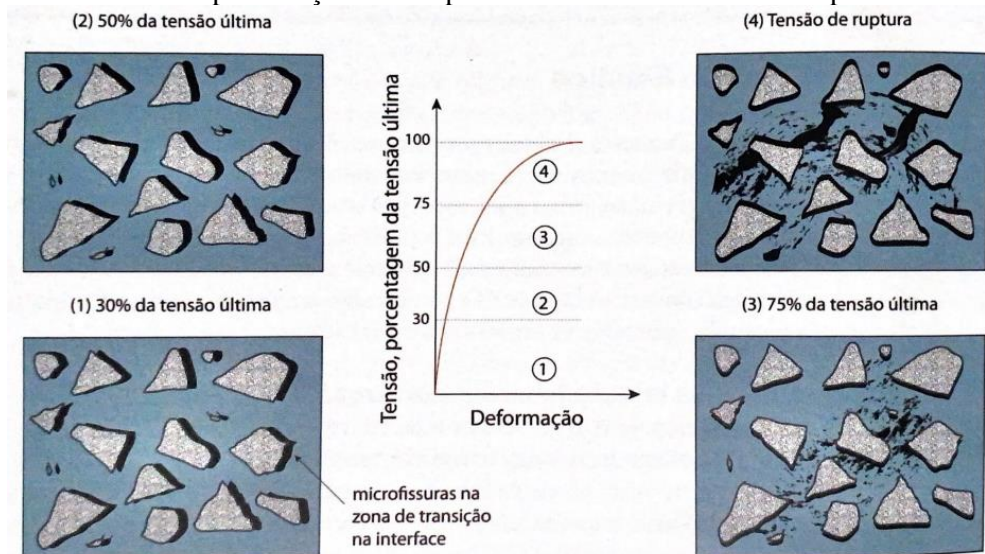
FIGURA 2.8 – Comportamento de isotropia transversal em compressão uniaxial do concreto.



Fonte: Rusch (1960⁴ apud MEHTA; MONTEIRO, 2014).

Na Fig. (2.9) é possível observar o comportamento do concreto sob compressão uniaxial.

⁴ RUSCH, H. J., ACI, Proc., v. 57, n. 1, 1960.

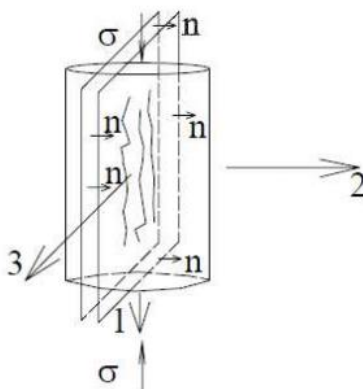
FIGURA 2.9 – Representação do comportamento do concreto sob compressão uniaxial

Fonte: Mehta e Monteiro (2014).

Além das características citadas acima, existem alguns aspectos com relação à resposta macroscópica: variação volumétrica, isotropia transversal e a mudança do coeficiente de Poisson.

De acordo com Proença (1988), à medida que há um acréscimo de tensão, tem-se a diminuição proporcional do volume de concreto. Se o concreto atinge, por exemplo, um valor de 75% de f'_c , o volume inverte o sentido de variação e passa-se a expansão.

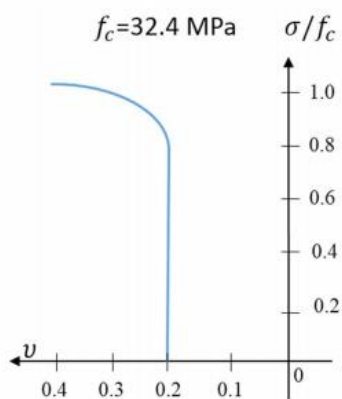
Segundo Pituba (2003), outro aspecto importante é que durante a evolução da fissuração nas fases não-lineares, o material torna-se anisotrópico (isotropia transversal). Conforme mostrado na Fig. (2.10), esse fato é observado pela orientação da microfissuração na direção paralela ao carregamento.

FIGURA 2.10 – Comportamento de isotropia transversal em compressão uniaxial do concreto.

Fonte: Pituba (2003).

Com relação ao coeficiente de Poisson, Proença (1988) afirma que, conforme se aproxima da tensão de pico, o valor do coeficiente aumenta em consequência da área superficial de fissuras, conforme ilustrado na Fig. (2.11).

FIGURA 2.11 – Variação do coeficiente de Poisson.



Fonte: Proença (1988⁵ apud BORGES, 2015).

2.3.2. Comportamento da microestrutura do concreto

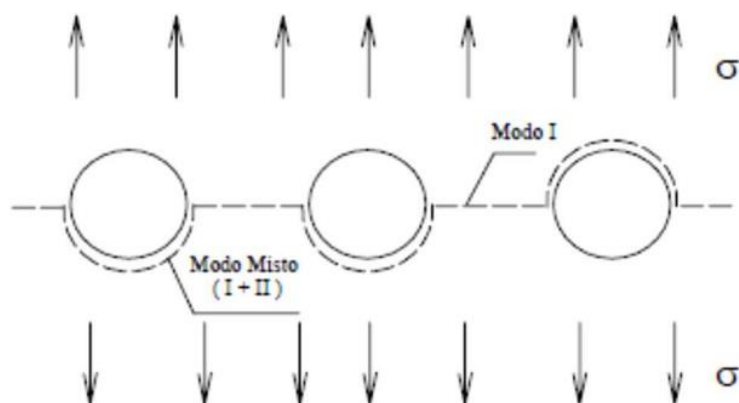
Segundo Pituba (2003), o concreto, de forma simplificada é constituído por agregados graúdos de forma geométrica circular e apresentam as seguintes características predominantes da tração:

- Durante o processo de carregamento, tem-se a ocorrência dos modos I (representa abertura devido à força normal) e modo II (representa a abertura devido à força cisalhante) ao longo de seu hemisfério dependendo do seu estado inicial de fissuração.
- Com o avanço do carregamento e com uma fissuração completa ao redor do grão, a propagação de fissura é instável e em modo I, na direção perpendicular a direção do carregamento.

A Fig. (2.12) apresenta esse modelo de fissuração para concreto simples.

⁵ PROENÇA, S. P. B. Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: análise crítica e contribuições. 1988. 330 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988.

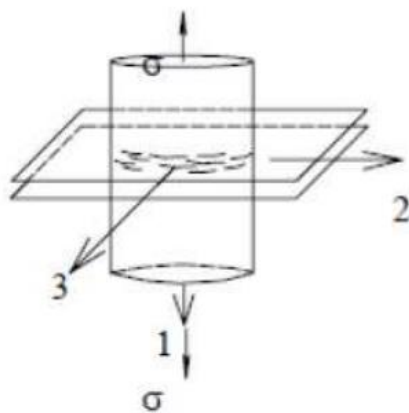
FIGURA 2.12 – Danificação em tração com início na Zona de Transição.



Fonte: Mazars (1984⁶ apud PITUBA, 2003).

O processo de fissuração em tração uniaxial pode render ao concreto um comportamento de isotropia transversal, pois ele terá comportamentos diferentes se comparada a direção paralela ao carregamento com as outras duas direções. (PITUBA, 2003). Na Fig. (2.13) é possível observar essa anisotropia.

FIGURA 2.13 – Comportamento de isotropia transversal em tração uniaxial no concreto.



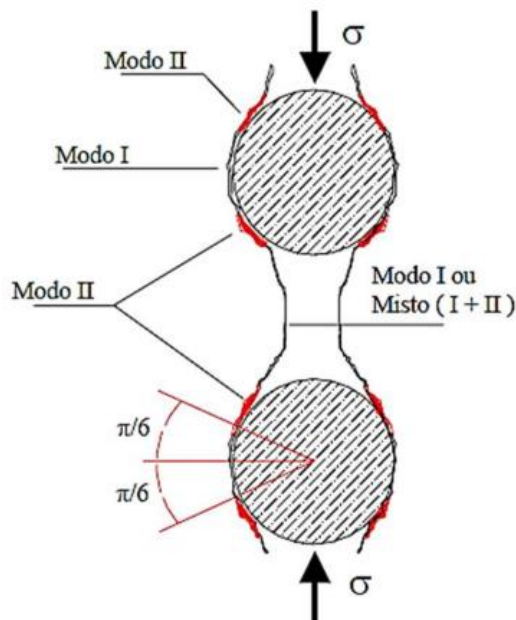
Fonte: Pituba (2003).

Já na compressão uniaxial, Pituba (2003) afirma que a primeira fissura aparece com o modo II de abertura na região do contorno do agregado, aproximadamente a 30° em relação à horizontal. A fissura progride ao longo da interface passando a apresentar modo I de abertura. Em seguida, sua evolução se dá na direção da solicação, deixando a região de interface para se propagar através da matriz. Para níveis elevados de

⁶ MAZARS, J. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire at à la rupture du béton de structure*. PhD thesis, Université Paris, 1984. 184p.

solicitação, evidencia-se um panorama de fissuras paralelas à direção de carregamento. Essas características podem ser visualizadas na Fig. (2.14).

FIGURA 2.14 – Danificação em compressão com início na Zona de Transição.



Fonte: Buyukozturk *et al.* (1971⁷ apud PITUBA, 2003).

Com isso, é possível observar que o comportamento mecânico do concreto na macroestrutura é um reflexo do que ocorre na microestrutura. Portanto, estudar o comportamento em escalas menores mostra o comportamento da peça estrutural na macroescala.

⁷ BUYUKOZTURK, O.; NILSON, A. H.; SLATE, F. O. **Deformation and fracture of particulate composite.** Journal of the Engineering Mechanics Divisuin, v.98, n.3, p.581-593, 1972.

CAPÍTULO 3

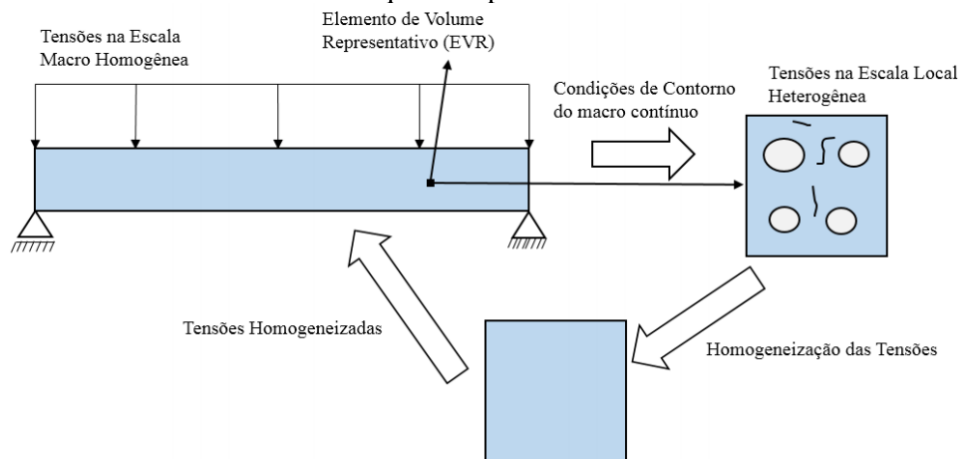
MODELAGEM DA MICROESTRUTURA SEGUNDO UMA ABORDAGEM MULTIESCALA

Na Engenharia diversos tipos de materiais, com diferentes microestruturas são utilizados, os quais apresentam diferentes comportamentos mecânicos. Para modelar esses comportamentos, diversos modelos constitutivos que utilizam princípios da Termodinâmica e da Mecânica do Contínuo são propostos (FERNANDES *et al.*, 2015a). Essas teorias, denominadas Teorias Fenomenológicas Constitutivas, apresentam respostas eficientes para várias situações, porém não consideram de forma direta os fenômenos que acontecem na microestrutura. Dessa forma, surgiram as teorias Multiescala que permitem apresentar respostas que consideram as características da microestrutura e seus efeitos dissipativos.

Para a análise Multiescala, alguns passos devem ser seguidos:

- São definidos pontos de interesse a serem estudados no domínio da macroestrutura, os quais são representados por Elementos de Volume Representativos (EVR). Para o caso do concreto (material estudado neste trabalho), esses pontos representam esse material ao nível de seus constituintes. Os processos dissipativos, como evolução de microfissuras são monitoradas individualmente em cada EVR.
- A estrutura é submetida a um carregamento qualquer e, através de um modelo na macroescala, obtém-se para cada EVR um campo de deformações.
- Um modelo constitutivo é adotado para as diferentes fases da microestrutura e, através dele, o comportamento do material do EVR é estudado conforme a macro-deformação imposta ao mesmo.
- Através da teoria de homogeneização e do conceito de média volumétrica, passa-se da microescala para a macroescala e atualiza-se a relação constitutiva e as tensões para aquele ponto do macro-contínuo.
- Com a relação constitutiva e o vetor de tensões atualizados para todos os pontos do macrocontínuo, ou seja, após a solução de todos os EVRs, é aplicado um novo incremento de carga à estrutura, obtendo-se, através do modelo na macroescala, novos campos de deformações a serem aplicadas nos EVRs.

A Fig. (3.1) representa o esquema de uma análise Multiescala.

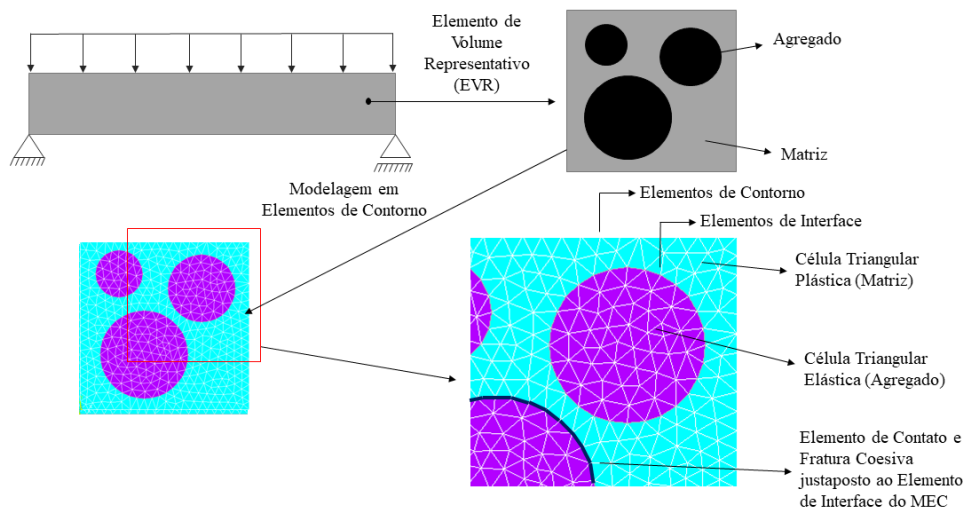
FIGURA 3.1 – Esquema representativo da Multiescala.

Fonte: Borges (2015).

A formulação da modelagem Multiescala segue a proposta de Germain *et al.* (1983⁸ *apud* GIUSTI, 2009) e sua estrutura variacional está descrita detalhadamente por Souza Neto e Feijóo (2006), Fernandes *et al.* (2015a) e Fernandes *et al.* (2015b). Para este trabalho, a análise é restrita ao estudo de um modelo proposto para a simulação do comportamento do EVR, ou seja, ao nível da microescala, sendo que é feita uma abordagem multiescala pois o EVR é submetido a um estado imposto de deformação macroscópica. Note que é importante que a formulação do EVR seja apresentada no contexto da modelagem multiescala, para facilitar no futuro o acoplamento da formulação apresentada aqui com uma formulação do macro-contínuo.

Para simular o comportamento mecânico do concreto, uma modelagem na microestrutura é realizada considerando o comportamento mecânico de cada material constituinte e suas interações. O estudo da microescala é realizado através da definição de um EVR, sendo que seu domínio é discretizado através do Método dos Elementos de Contorno (MEC), conforme a Fig. (3.2). Os agregados seguem o regime elástico e a pasta cimentícia segue uma lei de evolução elastoplástica dada pelo modelo de Mohr-Coulomb. A Zona de Transição é discretizada por elementos finitos de contato e fratura coesiva, apresentados por Pituba *et al.* (2016) de modo a simular a abertura e/ou fechamento de fraturas naquela região, onde a mesma é a responsável pelos principais fenômenos dissipativos durante o processo de fraturamento na microestrutura do concreto.

⁸ GERMAIN, P.; NGUYEN, Q. S.; SUQUET, P. Continuum thermodynamics. **Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME**, 50(4):1010-1020, 1983.

FIGURA 3.2– Esquema de estudo do EVR.

Fonte: Autoria própria (2021).

Observe que na Fig. (3.2) todas as interfaces são discretizadas em elementos retos, de acordo com a formulação do MEC, detalhada no Capítulo 4, sendo que justapostos a esses elementos de interface podem existir elementos finitos retangulares que modelam o descolamento de fases. Neste trabalho esses elementos retangulares não são obrigatoriamente definidos em todas as interfaces, apenas naquelas onde se deseja representar o descolamento de fases, ou seja, nas interfaces onde não há elementos finitos as fases são consideradas perfeitamente aderidas.

Após a obtenção das tensões em cada célula nos diferentes materiais, que possuem comportamentos mecânicos distintos dentro do EVR, é utilizada a teoria de homogeneização com o objetivo de avaliar o comportamento do material como um todo e assim, aproximar esse meio heterogêneo a um meio homogêneo.

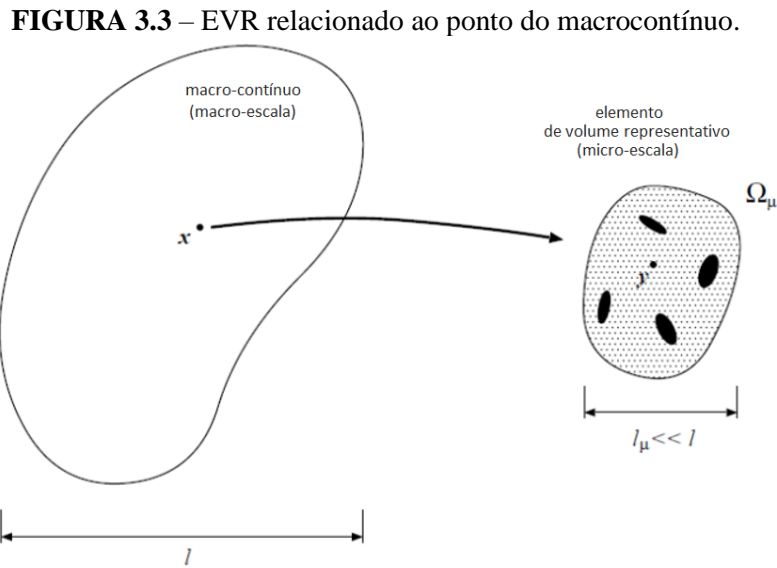
Neste capítulo é apresentada a teoria da homogeneização empregada neste trabalho.

3.1. DEFINIÇÃO DO EVR E SEU CAMPO DE DESLOCAMENTOS

Como mostrado anteriormente, o EVR representa a microestrutura, ao nível dos grãos, do macrocontínuo na vizinhança infinitesimal do ponto (SOUZA NETO; FEIJOÓ, 2006). Desta forma, assume-se que o EVR é composto de diferentes fases (ou materiais) que possuem módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson característicos, além de apresentar comportamento não-linear distintos.

Na Fig (3.2) é possível observar o macrocontínuo de comprimento l , sendo x um ponto arbitrário do macrocontínuo. A cada ponto x do macrocontínuo deve estar

associado um EVR que representa a microestrutura do material, que pode ser composto por inclusões e vazios, sendo y um ponto arbitrário do EVR.



Fonte: Fernandes (2012).

Com essa definição, tem-se que a deformação no ponto x é dada pela média volumétrica da deformação no EVR, como pode ser observado na Eq. (3.1).

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \varepsilon_\mu(y, t) dV \quad (3.1)$$

De forma análoga, tem-se que a tensão de um ponto x do macrocontínuo é dada pela Eq. (3.2).

$$\sigma(x, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu(y, t) dV \quad (3.2)$$

onde: μ é o índice que se refere ao EVR; V_μ é o volume; Ω_μ é o domínio; ε_μ é a deformação; σ_μ é a tensão.

Assim, as Eq. (3.1) e (3.2) representam a homogeneização, que é o processo de transformar uma quantidade microscópica em uma quantidade macroscópica. Portanto $\varepsilon(x, t)$ e $\sigma(x, t)$ são respectivamente, a deformação macroscópica ou homogeneizada e tensão macroscópica ou homogeneizada.

No modelo com o MEC, a deformação constante é aplicada aos nós de contorno. Desta forma, define-se que o campo de deslocamentos no EVR é composto por duas partes: uma que é produzida pela macro-deformação aplicada e a outra dada pela flutuação dos deslocamentos. Considerando y um ponto genérico do EVR e x um ponto genérico do macro-contínuo, o campo de deslocamentos é dado pela Eq. (3.3).

$$u_{\mu}(y, t) = u_{\mu}^{\varepsilon}(y, t) + \tilde{u}_{\mu}(y, t) \quad (3.3)$$

onde: $u_{\mu}^{\varepsilon}(y, t)$ representa o campo dos deslocamentos obtido a partir da imposição da macrodeformação $\varepsilon(x)$ ao contorno do EVR; $\tilde{u}_{\mu}(y, t)$ representa a flutuação dos deslocamentos necessária para satisfazer a equação de equilíbrio do EVR.

De forma análoga tem-se a Eq. (3.4).

$$\varepsilon_{\mu}(y, t) = \varepsilon(x, t) + \tilde{\varepsilon}_{\mu}(y, t) \quad (3.4)$$

onde: $\varepsilon(x, t)$ é a deformação imposta ao EVR obtida a partir do problema da macroestrutura; $\tilde{\varepsilon}_{\mu}(y, t)$ representa o campo de flutuação de deformação.

É importante ressaltar que $\varepsilon(x, t)$ é imposta de forma constante aos nós de contorno; já nos nós internos e de interface ela é calculada posteriormente a partir das forças elásticas e não será constante, devido à heterogeneidade da microestrutura (o cálculo das forças elásticas no EVR é detalhado no capítulo 4).

3.2. EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO DO EVR

Para que haja equivalência energética entre as escalas micro e macro, o Princípio de Hill-Mandel deve ser obedecido. Assim, a partir dessa condição, chega-se à equação de equilíbrio do EVR, que define que o somatório das tensões ou das forças nodais em todas as células deve ser nulo. Portanto, o campo de tensões ou forças nodais no EVR são reações devido à deformação imposta à microestrutura, sendo assim, a equação de equilíbrio do EVR pode ser escrita como mostra a Eq. (3.5).

$$R = \int_{\Omega_{\mu}} \sigma_{\mu}(y) dV = 0 \quad (3.5)$$

De forma análoga ao que ocorre a nível do macro-contínuo, a tensão microscópica pode ser escrita em termos de deformação microscópica, como pode ser observado na Eq. (3.6).

$$\sigma_{\mu}(y, t) = f_y(\varepsilon_{\mu}(y, t)) \quad (3.6)$$

onde: f_y é a função constitutiva definida por um critério adotado, ou dada pela lei de Hooke se um comportamento elástico for adotado para a fase.

Após a discretização do domínio do EVR em N_{cel} células é possível escrever a Eq. (3.5) em termos de forças nodais nas células, como mostrado na Eq. (3.7).

$$\{R\} = \sum_{e=1}^{N_{cel}} [B_{\mu}]_e^T \{\Delta N^e\} A_e = 0 \quad (3.7)$$

onde: $[B_{\mu}]$ é a matriz que relaciona deformação e deslocamento na célula definida abaixo na Eq. (3.8); A_e é a área da célula; e N_{cel} é o número de células.

$$[B]_{cel} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

onde: $b_1, b_2, b_3, a_1, a_2, a_3$ são definidos nas Eqs. (3.9) e (3.10).

$$a^{\alpha} = X_1^k - X_1^j \quad \alpha = 1,2,3; j = 2,3,1; k = 3,1,2 \quad (0.9)$$

$$b^{\alpha} = X_2^k - X_2^j \quad \alpha = 1,2,3; j = 2,3,1; k = 3,1,2 \quad (0.10)$$

Nesse caso, o problema de equilíbrio é satisfeito quando o campo de força também está em equilíbrio. Considerando as Eqs. (3.4) e (3.6) é possível reescrever a Eq. (3.7) através de flutuações de deslocamentos. Sendo assim, para resolver o problema de equilíbrio do EVR a Eq. (3.11) deve ser satisfeita.

$$\{R\} = \sum_{e=1}^{N_{cel}} [B_{\mu}]_e^T [C_{\mu}^{ep}]^{(e)} \left(\{\Delta\varepsilon\} + [B_{\mu}]_e \{\Delta\tilde{u}\} \right)_e A_e t \cong 0 \quad (3.11)$$

onde: $[C_{\mu}^{ep}]$ é o tensor constitutivo da célula; A_e é a área da célula; $\{\Delta\varepsilon\}$ é o vetor do incremento de deformação imposto pelo macro-contínuo; t é a espessura; $\{\Delta\tilde{u}\}$ é o incremento de flutuação dos deslocamentos.

Para se obter o vetor de macro-deformação $\{\Delta\varepsilon\}$ em todos os nós de célula, primeiramente calcula-se o vetor $\{\Delta K\}$ (ver próximo capítulo) que resulta da imposição dos deslocamentos lineares no contorno, obtidos a partir da deformação constante do macro-contínuo, que é imposta aos nós do contorno. Em seguida, utilizando o inverso da lei de Hooke obtém-se $\{\Delta\varepsilon\}$ nos nós internos ou sobre as interfaces. É importante observar que a macro-deformação $\{\Delta\varepsilon\}$ aplicada é constante apenas para os pontos do contorno, o que difere-se da formulação utilizando o MEF, na qual essa deformação é imposta constante em todos os nós do EVR. Sendo assim, com a utilização do MEC para modelar o EVR, a deformação aplicada pelo macro-contínuo irá gerar automaticamente um campo de flutuação dentro do EVR. Note que na Eq. (3.11), a flutuação de deslocamentos é uma variável desconhecida do problema. Portanto, a solução para o problema de equilíbrio do EVR é encontrar o incremento de flutuações $\{\Delta\tilde{u}\}$ que satisfaz a Eq. (3.11).

3.3. MATRIZ TANGENTE CONSISTENTE

De acordo com Fernandes *et al.* (2019b), se a Eq. (3.11) não for satisfeita após a aplicação de um campo de deslocamento linear ao contorno do EVR, é necessário aplicar o método de Newton-Raphson, no qual deve ser realizado o processo iterativo e encontrado o campo de flutuação de deslocamento através da Eq. (3.12)

$$\tilde{u}_{\mu}^{i_{EVR}+1} = \tilde{u}_{\mu}^{i_{EVR}} + \delta\tilde{u}_{\mu}^{i_{EVR}+1} \quad (3.12)$$

onde: $\delta\tilde{u}_{\mu}^{i_{EVR}+1}$ representa as correções das flutuações impostas à iteração $i_{EVR} + 1$, que necessita ser calculada pelo operador tangente através Eq. (3.13):

$$\{F^{i_{EVR}}\} + [K^{i_{EVR}}]\{\delta\tilde{u}_{\mu}^{-i_{EVR}+1}\} = 0 \quad (3.13)$$

onde: $\{F\}$ é o vetor de forças internas; $[K]$ é o operador tangente consistente.

No caso do presente trabalho, tem-se elementos finitos retangulares adicionais sobre as interfaces, dessa forma, as forças internas têm uma parcela resultante das células modeladas com o MEC e outra parcela proveniente dos elementos finitos retangulares, o que ocorre de forma similar com a matriz de rigidez.

De acordo com Crozariol e Fernandes (2020), a matriz tangente do problema é obtida pela linearização da Eq. (3.11) e a correção do estado de flutuação do deslocamento é dada pela Eq. (3.14).

$$\{\delta\Delta\tilde{u}\}_n^{iEVR} = \left[-\frac{\partial\{R_F\}_n^{iEVR-1}}{\partial\{\Delta\tilde{u}\}_n^{iEVR-1}} \right]^{-1} \{R_F\}_n^{iEVR-1} \quad (3.14)$$

onde: $\left[-\frac{\partial\{R\}_n^{iEVR-1}}{\partial\{\Delta\tilde{u}\}_n^{iEVR-1}} \right] = [-K]_n^{iEVR-1}$ é denominada matriz tangente consistente e relaciona a correção no estado de flutuação dos deslocamentos $\{\delta\Delta\tilde{u}\}_n^{iEVR}$ com os resíduos da iteração anterior $\{R_F\}_n^{iEVR-1}$. Sendo assim a matriz é definida pela Eq. (3.15).

$$[K^{iEVR}] = \sum_{e=1}^{N_{cel}} [B]_e^T [C_\mu^{ep(e)}] [B_e]_t A_e + \sum_{ef=1}^{N_f} [K_{ef}^{(iEVR)}]_t \quad (3.15)$$

onde: $[K_{ef}]$ é a rigidez do elemento finito de contato coesivo e fratura, a ser definido adiante.

Se os resíduos, Eq. (3.11), não forem nulos, as correções de flutuações dos deslocamentos devem ser calculadas e aplicadas ao EVR, obtendo-se novos campos de deslocamentos, de deformações e de tensões (após verificação do modelo constitutivo). Então, checka-se novamente a equação de equilíbrio do EVR (Eq. (3.11)). Esse processo de correção continua até que os resíduos de esforços em todos os pontos do EVR se anulem, de acordo com a tolerância adotada para a convergência do processo iterativo. Assim, chega-se a solução não-linear através de um procedimento incremental-iterativo, no qual a deformação imposta ao EVR é subdividida em incrementos de deformação. As correções que devem ser dadas aos estados de flutuações dos deslocamentos em uma determinada iteração, são obtidas através do operador tangente consistente que é atualizado a cada iteração, e do resíduo de esforços do EVR, Eq. (3.11). Mas no presente

trabalho deve-se adicionar à Eq. (3.11) a parcela referente aos elementos finitos retangulares (usados para modelar o descolamento de fases). Logo, as forças internas resultam na Eq. (3.16).

$$F^i = \int_{\Omega_\mu^k} B^T f_y (\varepsilon_{n+1} + B \tilde{u}_\mu^i) dV + \int_{\Omega_\mu^k} F_f^{\text{int}(i)} dV = \sum_{e=1}^{N_e} B_e^T \sigma_\mu^{e(i)} V_e + \sum_{e_f=1}^{N_f} F_{ef}^{\text{int}(i)} \quad (3.16)$$

onde: B_e é a matriz que relaciona deslocamento e deformação do elemento (ver Eq. (3.8)); N_e é o número de células triangulares; f_y é a tensão em cada ponto y ; ε é a deformação macroscópica; σ_μ é a tensão microscópica; F_{ef}^{int} é a força interna no elemento finito de contato e fratura coesiva; N_f é o número de elementos de contato e fratura coesiva;

3.4. MODELO DE FLUTUAÇÕES DE DESLOCAMENTOS PERIÓDICAS SOBRE O CONTORNO

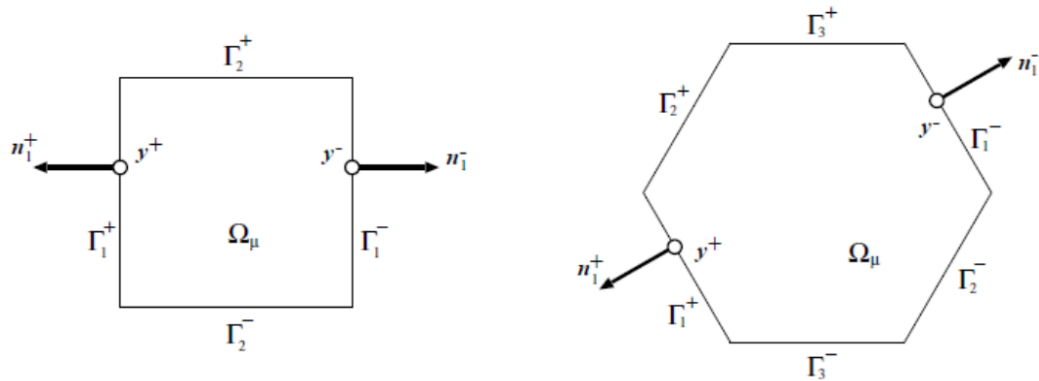
Para resolver a Eq. (3.11) de equilíbrio, as condições de contorno em termos de flutuação de deslocamento devem ser impostas ao EVR. Conforme essas condições de contorno alguns valores nodais das flutuações prescritos podem ser escritos como funções dos valores nodais de outros nós, o que reduz o número de incógnitas do sistema de equações (Eq. 3.14). Portanto, a correção do estado de flutuação do deslocamento do EVR é calculada de acordo com o conjunto de equações definido na Eq. (3.14), que pode ser reduzido de acordo com as condições de contorno a serem aplicadas ao EVR, conforme mostra a Eq. (3.17).

$$\{R_R\}_n^{\text{EVR}-1} - [K_R]_n^{\text{EVR}-1} \{\delta \Delta \tilde{u}_R\}_n^{\text{EVR}} = 0 \quad (3.17)$$

Além da condição de contorno citada (modelo de flutuações periódicas), existem outras duas condições de contorno: modelo de deslocamentos lineares e modelo de forças uniformes, que alteram a definição dos vetores e matrizes da Eq. (3.17) e geram resultados numéricos diferentes daqueles referentes ao modelo de flutuações periódicas Mas nesse

trabalho, apenas será considerado o modelo de flutuações periódicas, que é o mais adequado para descrever o comportamento de materiais com microestrutura periódica. Porém, de acordo com Crozariol (2017), pode-se demonstrar que quando é considerada uma discretização fina do macro-contínuo, qualquer material pode ser modelado por essa condição de contorno. A fim de definir esse modelo, seja a Fig. (3.4) onde são representados dois EVRs, um retangular e outro hexagonal, ambos com microestrutura periódica.

FIGURA 3.4 – Definição de EVRs para meios periódicos: célula retangular e hexagonal.



Fonte: Fernandes (2012).

Observe que nos EVRs definidos na Fig. (3.4), cada lado Γ_i^+ corresponde a um lado igual e oposto Γ_i^- . Desse modo tem-se n_i^+ e n_i^- como direções normais aos contornos Γ_i^+ e Γ_i^- , respectivamente. Portanto, para cada ponto y^+ pertencente ao contorno Γ_i^+ , existe um ponto correspondente y^- do contorno Γ_i^- .

Nessa condição de contorno, adota-se que as flutuações para o par de ponto y^+ e y^- são iguais, como pode ser visto na Eq. (3.18).

$$\tilde{u}_\mu(y^+) = \tilde{u}_\mu(y^-) \quad \forall \text{ par de pontos } \{y^+, y^-\} \in \Gamma_\mu \quad (3.18)$$

Para satisfazer o Princípio de Hill-Mandel, a força de superfície t^e deve ser anti-periódica em Γ_μ , como mostrado na Eq. (3.19).

$$t^e(y^+) = -t^e(y^-) \quad \forall \text{ par de pontos } \{y^+, y^-\} \in \Gamma_\mu \quad (3.19)$$

Para uma iteração i_{EVR} , a Eq. (3.16) será decomposta em parcelas devido às características periódicas desta condição de contorno. O subíndice i é relativo aos nós internos; p e m se referem aos pares de pontos y^+ e y^- definidos no contorno (sem coincidir com canto), portanto, tem-se que $\delta\tilde{u}_m = \delta\tilde{u}_p$. Nesse caso, a Eq. (3.17) resulta na Eq. (3.20).

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{c} R_{F(p)} + R_{F(m)} \\ R_{F(i)} \end{array} \right\}^{i_{EVR}-1} + \\ & - \left[\begin{array}{cc} K_{pp} + K_{pm} + K_{mp} + K_{mm} & K_{pi} + K_{mi} \\ K_{ip} + K_{im} & K_{ii} \end{array} \right]^{i_{EVR}-1} \left\{ \begin{array}{c} \delta\tilde{u}_p \\ \delta\tilde{u}_i \end{array} \right\}_\mu^{i_{EVR}} = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde: $R_{F(p)}$, $R_{F(m)}$ e $R_{F(i)}$ são as forças nos pontos p , m e i .

Considerando a Eq. (3.20) para o modelo de flutuações periódicas, os vetores e matrizes reduzidos definidos na Eq. (3.17) são dados pelas Eqs. (3.21), (3.22) e (3.23).

$$\{F_R\}^{i_{EVR}} = \left\{ \begin{array}{c} F_p + F_m \\ F_i \end{array} \right\}^{i_{EVR}} \quad (3.21)$$

$$\{\delta\tilde{u}_R\}_n^{i_{EVR}+1} = \left\{ \begin{array}{c} \delta\tilde{u}_p \\ \delta\tilde{u}_i \end{array} \right\}_n^{i_{EVR}+1} \quad (3.22)$$

$$[K_R] = \left[\begin{array}{cc} K_{pp} + K_{pm} + K_{mp} + K_{mm} & K_{pi} + K_{mi} \\ K_{ip} + K_{im} & K_{ii} \end{array} \right]^{i_{EVR}-1} \quad (3.23)$$

3.5. TENSÃO HOMOGENEIZADA

A partir da Eq. (3.2), tem-se que a tensão $\sigma(x, t)$ de um ponto x do macrocontínuo é a homogeneização do campo de tensões macroscópicas $\sigma_\mu = \sigma_\mu(y, t)$ que agem no EVR associado a esse ponto x . Admitindo que o EVR tem partes sólidas e vazios ($\Omega_\mu = \Omega_\mu^v + \Omega_\mu^s$), a Eq. (3.2) resulta na Eq. (3.24).

$$\sigma(x, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu(y, t) dV = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^s} \sigma_\mu(y, t) dV + \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^v} \sigma_\mu(y, t) dV \quad (3.24)$$

Na definição da Eq. (3.24) o EVR é considerado um meio contínuo, sendo assim, o conceito de tensão permanece válido na escala microscópica. Por esta razão, o EVR deve ser suficientemente grande para que a representação dele como meio contínuo faça

sentido. Fazendo o uso do teorema de Green, a Eq. (3.24) pode ser escrita como a Eq. (3.25) (ver detalhes em Crozariol (2017)).

$$\sigma(x, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\partial\Omega_\mu} t^e(y, t) \otimes_s y dA \quad (3.25)$$

onde: \otimes representa produto escalar; t^e são as forças de superfície dos nós no contorno; y é o vetor das coordenadas x_1 e x_2 do ponto y do EVR.

Com a discretização do contorno do EVR em elementos (ver formulação apresentada no capítulo 4), a tensão homogeneizada, definida na Eq. (3.25) é calculada de forma aproximada como a Eq. (3.26).

$$\sigma(x, t) = \frac{1}{2V_\mu} (\bar{\sigma} + \bar{\sigma}^T) \quad (3.26)$$

sendo:

$$\bar{\sigma} = \sum_{i=1}^{Nb} \{F_c\}_i \{y\}_i^T \quad (3.27)$$

Na Eq. (3.27) as forças F_c são calculadas a partir das forças nodais do contorno P_c que serão mostradas mais a frente no Capítulo 4, as quais são obtidas a partir do vetor dos deslocamentos nodais do contorno $\{\Delta U_c\}$. Esse vetor de deslocamento $\{\Delta U_c\}$, por sua vez, é obtido após a solução do problema de equilíbrio do EVR, ou seja, somando a parcela imposta ($\{U_c^\varepsilon\}$) ao campo de flutuação de deslocamentos $\{\Delta \tilde{U}_c\}$, em acordo com Eq. (3.3). Observe que as forças P_c são dadas por unidade de comprimento, logo para se obterem as forças F_c deve-se multiplicar P_c pelo comprimento de influência do respectivo nó I.

3.6. TENSOR ELASTO-PLÁSTICO HOMOGENEIZADO

A tensão homogeneizada relativa ao macrocontínuo em um incremento n é dada pela Eq. (3.28).

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} : \Delta \varepsilon_{n+1} \quad (3.28)$$

onde: σ_n é a tensão homogeneizada do incremento anterior; $\frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}}$ é o operador constitutivo tangente homogeneizado do ponto no macrocontínuo, também chamado de C_{n+1}^{ep} ; $\Delta \varepsilon_{n+1}$ é o incremento da macrodeformação.

Logo, considerando-se as equações Eq. (3.2), (3.4) e (3.6), a tensão homogeneizada no incremento $n + 1$ é dada pela Eq. (3.29).

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_{\mu(n+1)} dV = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} f_y(\varepsilon_{\mu(n+1)}) dV \\ &= \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} f_y(\varepsilon_{n+1} + \nabla^S \tilde{u}_{\mu(n+1)}) dV \end{aligned} \quad (3.29)$$

Assim, o operador tangente homogeneizado pode ser escrito da forma:

$$D_{n+1} = C_{n+1}^{ep} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{\frac{1}{V_\mu} \partial \int_{\Omega_\mu} f_y(\varepsilon_{n+1} + B \tilde{u}_{\mu(n+1)}) dV}{\partial \varepsilon_{n+1}} \quad (3.30)$$

Em Souza Neto e Feijó (2006) a Eq. (3.30) é desenvolvida para um caso geral, chegando-se ao operador tangente da forma como apresentado abaixo na Eq. (3.31).

$$C_{n+1}^{ep} = C_{n+1}^{ep(Taylor)} + \tilde{C}_{n+1}^{ep} \quad (3.31)$$

sendo:

$$\tilde{C}_{n+1}^{ep} = \frac{1}{V_\mu} [G_R][K_R]^{-1}[G_R]^T \quad (3.32)$$

onde: $[K_R]$ é uma matriz reduzida obtida a partir da matriz K definida na Eq. (3.10); $[G_R]$ é uma matriz reduzida obtida a partir da matriz $[G]$ total, calculada abaixo na Eq. (3.33).

$$[G] = \sum_{e=1}^{Ne} [C_\mu^{ep}]_e [B]_e V_e \quad (3.33)$$

onde: $[B]_e$ é definida na Eq. (3.7).

Para calcular $C_{n+1}^{\text{ep(Taylor)}}$ é considerado o modelo de Taylor, onde tem-se o campo de flutuações nulo no EVR. A mesma é dada pela Eq. (3.34).

$$\begin{aligned} C_{n+1}^{\text{ep(Taylor)}} &= \frac{1}{V_{\mu}} \int_{\Omega_{\mu}} \left. \frac{\partial \sigma_{\mu}}{\partial \varepsilon_{\mu}} \right|_{n+1} dV = \frac{1}{V_{\mu}} \int_{\Omega_{\mu}} C_{\mu(n+1)}^{\text{ep}} dV \\ &= \sum_{i=1}^{\text{Ncel}} \frac{V_i}{V_{\text{Total}}} C_{\mu(n+1)}^{\text{ep}} \end{aligned} \quad (3.34)$$

ou seja, $C_{n+1}^{\text{ep(Taylor)}}$ é a média volumétrica do tensor constitutivo incremental.

CAPÍTULO 4

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO CONSIDERANDO UMA MICROESTRUTURA HETEROGÊNEA

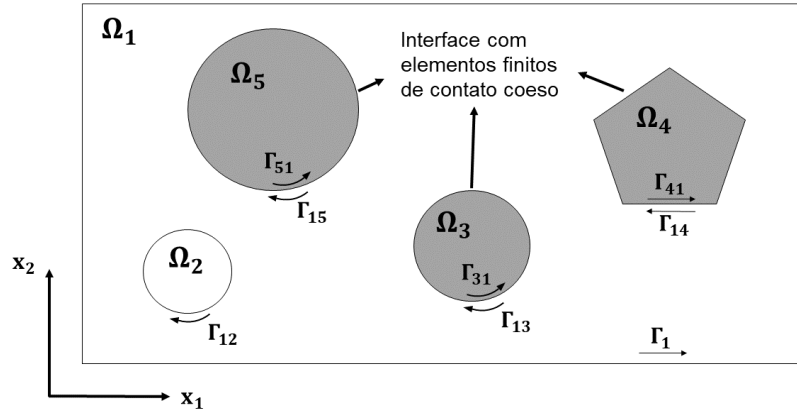
4.1. INTRODUÇÃO

Para aplicar o Método dos Elementos de Contorno, é necessário obter a equação integral do deslocamento para um ponto interno e a partir dessa equação, podem ser obtidas outras equações necessárias para a solução do problema. Neste trabalho a microestrutura ou EVR é modelado por uma chapa dividida em sub-regiões, sendo que as sub-regiões podem ser matriz ou inclusão, podendo ainda conter vazios no interior da matriz. Na dedução da equação integral o Teorema de Reciprocidade de Betti é utilizado, porém com uma abordagem diferente. Nas equações integrais têm-se as variáveis definidas ao longo do contorno, domínio e interface entre sub-regiões, sendo, portanto necessário a discretização do contorno e interface em elementos e do domínio em células (ver detalhes em Crozariol , 2017). Assim, na montagem do sistema de equações, são escritas equações de deslocamentos em pontos do contorno e interface. Portanto, a seguir serão apresentados os termos livres para o contorno, interface matriz-inclusão e e interface matriz-vazio.

4.2. EQUAÇÕES BÁSICAS

A modelagem do EVR é feita pelo MEC, o qual é considerado como uma placa em sub-regiões. Na Fig. (4.1) tem-se um EVR genérico, que representa a microestrutura do material analisado, sendo que Ω_1 define a matriz (que possui um comportamento elasto-plástico) e as sub-regiões, Ω_2 , Ω_3 , Ω_4 e Ω_5 representam inclusões ou vazios. A interface da sub-região Ω_i com a Ω_j é definida como Γ_{ij} e Γ_1 define o contorno externo da chapa. Note que Γ_{ij} é definida quando se analisa o sub-domínio Ω_i , ao passo que Γ_{ji} é referente ao sub-domínio Ω_j . Observe ainda que como Ω_2 representa um vazio, a interface Γ_{21} não existirá e que cada sub-região representa uma fase com diferentes propriedades elásticas. Além disso, sobre as interfaces entre matriz e inclusões podem ser definidos elementos finitos adicionais, que são superpostos à malha do MEC, onde admite-se dois modelos constitutivos: um que modela contato e outro que modela fratura.

FIGURA 4.1 – Microestrutura heterogênea representada por uma chapa em sub-regiões.



Fonte: Autoria Própria (2021).

De acordo com Fernandes *et al.* (2019), para o caso de pequenas deformações, a deformação total ($\hat{\epsilon}_{ij}$) é dividida em duas partes, ou seja, deformação plástica ($\hat{\epsilon}_{ij}^p$) e deformação elástica ($\hat{\epsilon}_{ij}^e$), que podem ser escritos da seguinte forma, em função de suas taxas (\dot{x}) = $\frac{\partial x}{\partial t}$, ou suas variáveis de tempo, como mostra a Eq. (4.1).

$$\hat{\epsilon}_{ij} = \hat{\epsilon}_{ij}^e + \hat{\epsilon}_{ij}^p \quad (4.1)$$

Como a fratura entre as fases é considerada neste trabalho, ela deve ser levada em conta no cálculo da deformação. Nesse caso, a deformação total ($\hat{\epsilon}_{ij}$) é dividida em deformação contínua ($\hat{\epsilon}_{ij}$) e deformação de fratura ($\hat{\epsilon}_{ij}^{cf}$), como mostra a Eq. (4.2)

$$\hat{\epsilon}_{ij} = \hat{\epsilon}_{ij} + \hat{\epsilon}_{ij}^{cf} \quad (4.2)$$

A lei de Hooke é dada pela Eq. (4.3), que aplicada à deformação total ($\hat{\epsilon}_{ij}$), definida na Eq. (4.2), obtém-se a força da membrana (\hat{N}_{ij}^e), que considerando caso de tensão plana, resulta na Eq. (4.4).

$$\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij}^e + \frac{2G\nu}{1-\nu}\epsilon_{kk}^e\delta_{ij} \quad (4.3)$$

onde: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ é o módulo de elasticidade transversal do material; ν é o coeficiente de Poisson do material; E é o módulo de elasticidade longitudinal do material.

$$\begin{aligned} \dot{N}_{ij}^e &= \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} [v\dot{\bar{\epsilon}}_{kk}\delta_{ij} + (1-\nu)\dot{\bar{\epsilon}}_{ij}] \\ &+ \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} [v\dot{\bar{\epsilon}}_{kk}^{cf}\delta_{ij} + (1-\nu)\dot{\bar{\epsilon}}_{ij}^{cf}] = \\ &= \dot{N}_{ij} + \dot{N}_{ij}^{cf} \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde: \dot{N}_{ij} são as forças associadas às deformações contínuas, \dot{N}_{ij}^{cf} são as forças associadas à deformação de fratura, $E = E_t$, sendo E o módulo de Young, ν é o coeficiente de Poisson, t é a espessura da placa e o δ_{ij} delta de Kronecker.

Após aplicar as tensões $\dot{\sigma}_{ij}^e$, ao critério de plasticidade, obtém-se a taxa do tensor de tensão ($\dot{\sigma}_{ij}$) e a força da membrana (\dot{N}_{ij}), ou seja: $\dot{\sigma}_{ij} = C\dot{\epsilon}_{ij}$, onde C é o tensor constitutivo elasto-plástico. Por outro lado, as forças \dot{N}_{ij} também podem ser expressas pela lei de Hooke através da Eq. (4.5).

$$\dot{N}_{ij} = \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} v\dot{\bar{\epsilon}}_{kk}^e\delta_{ij} + (1-\nu)\dot{\bar{\epsilon}}_{ij}^e \quad (4.5)$$

Levando em consideração as Eqs (4.3), (4.4) e (4.5), a taxa de membrana \dot{N}_{ij} pode ser escrita como mostra a Eq. (4.6)

$$\dot{N}_{ij} = \dot{N}_{ij} + \dot{N}_{ij}^p - \dot{N}_{ij}^{cf} = \dot{N}_{ij} + \dot{N}_{ij}^0 \quad (4.6)$$

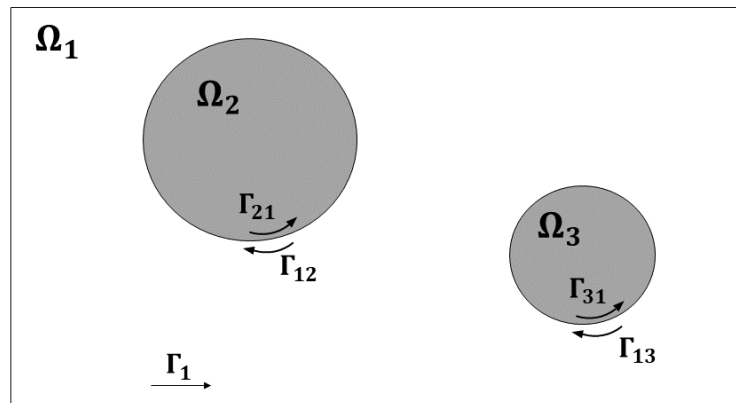
Observe que a força inelástica \dot{N}_{ij}^0 tem uma parcela definida pela força plástica e outra dada pelo fenômeno de fratura ou contato, que é modelado nos elementos finitos sobre as interfaces, como mostra a Eq. (4.7).

$$\dot{N}_{ij}^0 = \dot{N}_{ij}^p - \dot{N}_{ij}^{cf} \quad (4.7)$$

4.3. EQUAÇÃO INTEGRAL DO DESLOCAMENTO PARA UM PONTO INTERNO

Com a finalidade de utilizar o Método dos Elementos de Contorno, deve-se inicialmente obter a equação integral de deslocamento (u_i) para um ponto interno do EVR e a partir dela outras equações necessárias para a resolução do problema podem ser obtidas. Para isso, considere a Fig. (4.2) onde está representada uma chapa de domínio Ω composto pela soma do subdomínio da matriz Ω_1 com o das inclusões Ω_2 e Ω_3 , totalizando três sub-regiões no EVR, com diferentes módulos de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν .

FIGURA 4.2 – EVR com sub-regiões.



Fonte: Autoria Própria (2021).

A equação relativa ao problema bidimensional é deduzida escrevendo-se a integral sobre o domínio Ω da chapa, em função apenas da deformação fundamental ε_{kij}^* da sub-região onde está o ponto de colocação q . Considerando o caso da Fig. (4.2), onde se têm três domínios de características diferentes, tem-se a Eq. (4.8) válida para um sub-domínio genérico Ω_s .

$$\int_{\Omega_s} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega_s = \int_{\Omega_s} \varepsilon_{kij}^* \frac{\bar{E}_s}{(1 - \nu_s^2)} [\nu_s \delta_{ij} \varepsilon_{ll} + (1 - \nu_s) \varepsilon_{ij}] d\Omega_s \quad (4.8)$$

onde: * se refere ao problema fundamental; k é a direção da carga fundamental; \bar{N}_{ij} é definido na Eq. (4.6); ε_{kij}^* é em função de \bar{E} da sub-região onde o ponto de colocação está posicionado.

Multiplicando o lado direito da Eq. (4.8) por $\frac{\bar{E}}{(1-v^2)} \frac{(1-v^2)v}{\bar{E}} \frac{v}{v}$, o que não altera o valor da mesma, sendo que \bar{E} e v são valores referentes à sub-região onde está o ponto de colocação, obtém-se a Eq. (4.9).

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega_S = \frac{\bar{E}_S v_S}{\bar{E}} \int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} \frac{\bar{E}}{(1-v^2)} \left[v \varepsilon_{kij}^* \delta_{ij} + \left(\frac{v}{v_S} - v \right) \varepsilon_{kij}^* \right] d\Omega_S \quad (4.9)$$

sendo $\bar{\bar{E}}_S = \frac{\bar{E}_S}{(1-v_S^2)}$.

Considerando a lei de Hooke definida na Eq. (4.3), a Eq. (4.9) resulta em (4.10).

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega_S = \frac{\bar{\bar{E}}_S v_S}{\bar{E}} \left[\int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega_S + \bar{E} \left(\frac{v}{v_S} - 1 \right) \int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega_S \right] \quad (4.10)$$

Note que quando o ponto de colocação pertence à sub-região Ω_S , onde se faz a integração, tem-se $\bar{\bar{E}}_S = \bar{E}$ e $v_S = v$, logo a Eq. (4.10) vai representar o Teorema de Betti escrito para o problema de chapa, sem estar dividida em sub-regiões, sendo assim, tem-se a Eq. (4.11).

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega_S = \int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega_S \quad (4.11)$$

Para um caso genérico, em que se tenham N_S sub-regiões, considerando-se a Eq. (4.5) a Eq. (4.11) se torna a Eq. (4.12).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* (N_{ij} + N_{ij}^0) d\Omega_S &= \sum_{S=1}^{N_S} \frac{\bar{\bar{E}}_S v_S}{\bar{E}} \left[\int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega_S \right] + \\ &+ \sum_{S=1}^{N_S} \bar{\bar{E}}_S \left(1 - \frac{v_S}{v} \right) \left[\int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega_S \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

Com o objetivo de obter a expressão de deslocamento u_k para um ponto de domínio na placa, a Eq. (4.12) será integrada por partes, transformando-se as integrais de domínio em integrais com variáveis no contorno, interface e domínio, (para mais

detalhes ver CROZARIOL (2017)). Dessa maneira, obtém-se a Eq. (4.13), onde N_{inc} inclusões e N_{vazios} vazios são definidos na microestrutura constituída por N_S sub-regiões:

$$\begin{aligned}
u_k(q) = & \int_{\Gamma_1} (u_{k1}^*(q, P)\dot{p}_1(P) + u_{k2}^*(q, P)\dot{p}_2(P))d\Gamma + \\
& - \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} \int_{\Gamma_1} (\dot{u}_1(P)p_{k1}^*(q, P) + \dot{u}_2(P)p_{k2}^*(q, P))d\Gamma + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{vazios}} \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} \int_{\Gamma_{1j}} (\dot{u}_1(P)p_{k1}^*(q, P) + \dot{u}_2(P)p_{k2}^*(q, P))d\Gamma_{1j} + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{inc}} \frac{(\bar{E}_j v_j - \bar{E}_1 v_1)}{\bar{E} v} \int_{\Gamma_{j1}} (\dot{u}_1(P)p_{k1}^*(q, P) + \dot{u}_2(P)p_{k2}^*(q, P))d\Gamma_{j1} + \\
& - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \int_{\Gamma_1} (\dot{u}_1(P)\varepsilon_{k1}^*(q, P) + \dot{u}_2(P)\varepsilon_{k2}^*(q, P))d\Gamma + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \bar{E}_j \left(1 - \frac{v_j}{v}\right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \right\} \int_{\Gamma_{j1}} (\dot{u}_1(P)\varepsilon_{k1}^*(q, P) \\
& \quad + \dot{u}_2(P)\varepsilon_{k2}^*(q, P))d\Gamma_{j1} + \\
& + \sum_{S=1}^{N_S} \bar{E}_S \left(1 - \frac{v_S}{v}\right) \int_{\Omega_S} \dot{u}_i(p)\varepsilon_{kij}^*(q, p)d\Omega_S \\
& \quad + \sum_{S=1}^{N_S} \int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^*(q, P)\dot{N}_{ij}^0(p)d\Omega(p)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

onde: u_1, u_2 deslocamentos no plano da placa e p_1, p_2 as forças no plano da placa; \bar{E} e v referem-se à sub-região onde o ponto de colocação está posicionado, e N_{ij}^0 são os esforços iniciais, que nesse trabalho são as forças associadas aos fenômenos dissipativos.

Notemos ainda que se na Fig. (4.2) houvesse vazios no lugar das inclusões, os contornos Γ_{21} e Γ_{31} não existiriam e haveria apenas um material que seria aquele da matriz, sendo a dedução da equação integral análoga ao caso já visto onde se tem inclusões.

É importante ressaltar que para se obter a solução do problema de equilíbrio da microestrutura, a ser discutido mais adiante, deve-se fazer um processo incremental, onde a deformação total imposta ao EVR é dividida em incrementos de deformação, sendo que para cada incremento é encontrada a solução do problema. Nesse caso, todas as variáveis relacionadas ao problema real que aparecem na Eq. (4.13) devem ser substituídas por seus respectivos incrementos.

Deve-se notar que como no problema do EVR são prescritos deslocamentos em todos os nós do contorno, todas as incógnitas no contorno externo são relacionadas às forças de superfície, sendo essas dadas pela fórmula de Cauchy, que pode ser vista em Crozariol (2017). Portanto, na análise do EVR as forças obtidas do contorno são reações ao campo de deslocamento imposto como condição de contorno no EVR.

As expressões fundamentais presentes na Eq. (4.13) estão apresentadas no Apêndice A, após as referências bibliográficas.

4.4. EQUAÇÃO INTEGRAL DOS DESLOCAMENTOS PARA PONTOS SOBRE O CONTORNO OU INTERFACE DA MICROESTRUTURA

Na modelagem numérica feita através do MEC, podem existir problemas de singularidade, indeterminações do tipo $\ln(r)$, $1/r$ e $1/r^2$, pois quando o ponto de colocação q pertence ao elemento a ser integrado, o raio é nulo quando q coincide com o ponto p , ou seja, tem-se $r(Q, P) = 0$. Com isso, é necessário um processo de cálculo algébrico para tratar essa singularidade que ocorre nas expressões fundamentais, obtendo como resultado valores ou expressões que são denominados termos livres. Além disso, deve-se lembrar que quando for integrar os elementos sobre o contorno ou interface ao qual o ponto Q pertence, a integral é feita de forma analítica devido à singularidade existente.

No EVR, têm-se elementos ao longo do contorno externo e nas interfaces entre a matriz e inclusões, ou entre a matriz e vazios. Assim, na montagem do sistema de equações adotam-se pontos de colocação sobre o contorno externo e interfaces. Portanto, este tópico irá tratar sobre os vários casos de termos livres que necessitam ser calculados na microestrutura heterogênea.

De modo geral, a equação integral de deslocamento para pontos de colocação coincidentes com o contorno externo ou localizados sobre a interface, resulta igual àquela de pontos internos do EVR, apenas acrescentando os termos livres C_{k1} e C_{k2} , chegando-se à Eq. (4.14).

$$C_{k1}u_1(Q) + C_{k2}u_2(Q) = \int_{\Gamma_1} (u_{k1}^*(q, P)\dot{p}_1(P) + u_{k2}^*(q, P)\dot{p}_2(P))d\Gamma + \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}} \frac{v_1}{v} \int_{\Gamma_1} (\dot{u}_1(P)p_{k1}^*(q, P) + \dot{u}_2(P)p_{k2}^*(q, P))d\Gamma + \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^{N_{\text{vazios}}} \frac{\bar{\bar{E}}_1 v_1}{\bar{\bar{E}} v} \int_{\Gamma_{1j}} (\dot{u}_1(P) p_{k1}^*(q, P) + \dot{u}_2(P) p_{k2}^*(q, P)) d\Gamma_{1j} + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{\text{inc}}} \frac{(\bar{\bar{E}}_j v_j - \bar{\bar{E}}_1 v_1)}{\bar{\bar{E}} v} \int_{\Gamma_{j1}} (\dot{u}_1(P) p_{k1}^*(q, P) + \dot{u}_2(P) p_{k2}^*(q, P)) d\Gamma_{j1} + \\
& - \bar{\bar{E}}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \int_{\Gamma_1} (\dot{u}_1(P) \varepsilon_{k1}^*(q, P) + \dot{u}_2(P) \varepsilon_{k2}^*(q, P)) d\Gamma + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{\text{inc}}} \left\{ \bar{\bar{E}}_j \left(1 - \frac{v_j}{v}\right) - \bar{\bar{E}}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \right\} \int_{\Gamma_{j1}} (\dot{u}_1(P) \varepsilon_{k1}^*(q, P) \\
& \quad + \dot{u}_2(P) \varepsilon_{k2}^*(q, P)) d\Gamma_{j1} + \\
& + \sum_{S=1}^{N_S} \bar{\bar{E}}_S \left(1 - \frac{v_S}{v}\right) \int_{\Omega_S} \dot{u}_i(p) \varepsilon_{kij}^*(q, p) d\Omega_S \\
& \quad + \sum_{S=1}^{N_S} \int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^*(q, P) \dot{N}_{ij}^0(p) d\Omega(p)
\end{aligned}$$

onde: v_1 e $\bar{\bar{E}}_1$ são propriedades da matriz; Γ_1 é o contorno externo da matriz; Γ_{1j} representa a interface entre matriz e inclusão j ; Γ_{j1} representa a interface entre a matriz e um vazio; C_{k1} e C_{k2} são termos livres; \dot{u}_i e \dot{p}_i são, respectivamente, deslocamentos e tensões no plano.

Observe que no caso em que o descolamento de fase não é considerado tem-se $\dot{N}_{ij}^0 = \dot{N}_{ij}^P$ (ver Eq. (4.7)). Outro ponto a se destacar é que quando não há o descolamento de fase apenas uma equação é escrita para um ponto de colocação na interface, visto que o campo de deslocamento é contínuo. No caso do presente trabalho, onde também é considerado o descolamento de fase, o campo de deslocamento das interfaces entre matriz e inclusões não é mais contínuo, ou seja, diferentes deslocamentos no plano devem ser considerados para os nós de interface. Para isso, esses nós de interface onde há o descolamento são duplicados, sendo que inicialmente os mesmos são coincidentes, porém um pertence à matriz e outro à inclusão.

A dedução dos termos livres para as diferentes situações definidas a seguir, podem ser vistas com mais detalhe em Ohland (2017) e Crozariol (2017). Nesse trabalho será deduzido apenas o termo livre relacionado à equação integral de deslocamento quando o ponto de colocação se encontra sobre a interface e pertence à matriz, que é a equação adicional que surge na formulação quando se modela o descolamento de fases.

Os termos livres presentes na Eq. (4.14) podem assumir diversos valores dependendo da posição do ponto de colocação s : interno, no limite externo, na interface matriz/inclusão (onde há o descolamento de fase) ou na interface matriz/vazio

O vetor dos termos livres é dado pela Eq. (4.15).

$$C_{ki}^T = \{C_{k1} \quad C_{k2}\} \quad (4.15)$$

É necessário observar que são obtidos dois valores de termos livres, C_{k1} e C_{k2} que multiplicam, respectivamente, os deslocamentos nas direções X_1 e X_2 que são calculados quando se considera a carga unitária aplicada na direção k . Então, tem-se As Eq. (4.15a) e (4.15b).

$$\text{Para } k = 1, \text{ tem-se:} \quad \{C_{1i}\}^T = \{C_{11} \quad C_{12}\} \quad (4.15a)$$

$$\text{Para } k = 2, \text{ tem-se:} \quad \{C_{2i}\}^T = \{C_{21} \quad C_{22}\} \quad (4.15b)$$

Note que ao longo do contorno externo são definidas duas componentes de deslocamentos e duas componentes de forças em um ponto genérico. Como o vetor normal ao lado anterior ao canto é diferente da direção normal ao lado posterior, para representar a descontinuidade que se tem nos valores das forças de superfície anteriores e posteriores aos cantos sobre o contorno externo, são adotados nós duplos em todos os cantos sobre o contorno externo. Assim, neste trabalho não será considerado o caso em que o ponto de colocação coincide com um canto no contorno externo da chapa. Observe que não há necessidade de se adotar nós duplos em cantos sobre a interface porque nas interfaces têm-se apenas deslocamentos como incógnitas.

Logo, as situações em que se necessita calcular os termos livres, são aquelas em que o ponto de colocação Q está sobre a interface matriz-inclusão (coincidente ou não com um canto), quando o ponto Q está sobre a interface matriz-vazio (coincidente ou não com um canto) ou quando o ponto Q está sobre o contorno externo (nesse caso, adota-se nós duplos nos cantos, então não há necessidade de calcular quando Q coincide com canto).

Com o objetivo de solucionar os problemas de singularidade deve-se fazer com que o ponto de colocação Q se torne interno ao domínio, não se localizando mais sobre o contorno externo ou interface, dependendo do caso, e com isso, pode-se escrever no ponto Q a equação integral referente a um ponto interno. Esse procedimento está exemplificado

na Fig. (4.3) onde estuda-se o caso em que Q está sobre a interface e pertence à matriz. O procedimento geral, descrito a seguir, pode ser visto com mais detalhes em Fernandes (2005):

- Acrescenta-se um contorno circular Γ_ξ de raio ξ infinitesimal e centro em Q;
- Retira-se do contorno Γ_{j1} o trecho de contorno $\bar{\Gamma}$ (linha fina), que contém singularidade;
- Com o acréscimo do contorno Γ_ξ e a retirada do contorno $\bar{\Gamma}$ obtém-se o novo contorno: $\Gamma_{j1} - \bar{\Gamma} + \Gamma_\xi$;
- Fazem-se então os limites de raio ξ e do contorno tenderem a zero, a fim de que o ponto Q possa ser considerado sobre o contorno.

Da Fig. (4.3), onde o contorno é circular, as seguintes relações podem ser definidas:

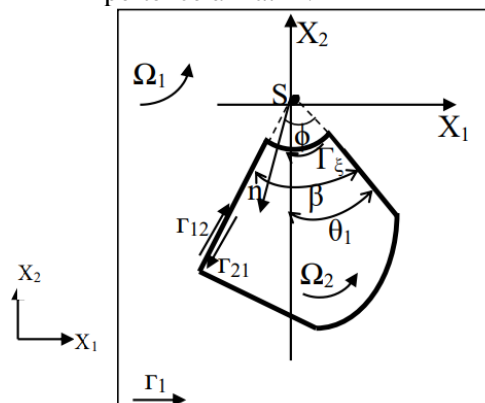
$$r = \xi \quad (4.16a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = r_{,i} n_i = 1 \quad (4.16b)$$

$$\frac{\partial r}{\partial s} = r_{,i} s_i = 0 \quad (4.16c)$$

$$d\Gamma_\xi(P) = \xi d\phi \quad (4.16c)$$

FIGURA 4.3 – Ponto de colocação na interface matriz-inclusão (canto), adotando que Q pertence à matriz.



Fonte: Adaptada de Fernandes *et al.* (2019b).

Desta forma, aplicando o procedimento acima na Eq. (4.13), tem-se a Eq. (4.17), para o caso em que Q está sobre a interface e pertence à matriz:

$$\begin{aligned}
u_k(q) = & \int_{\Gamma_1} (u_{ki}^*(q, P) \dot{p}_i(P)) d\Gamma - \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} \int_{\Gamma_1} (\dot{u}_i(P) p_{ki}^*(q, P)) d\Gamma + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{\text{vazios}}} \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} \int_{\Gamma_{1j}} (\dot{u}_i(P) p_{ki}^*(q, P)) d\Gamma_{1j} + \\
& - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \int_{\Gamma_1} (\dot{u}_i(P) \varepsilon_{ki}^*(q, P)) d\Gamma + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{\text{inc}}} \frac{(\bar{E}_j v_j - \bar{E}_1 v_1)}{\bar{E} v} \left[\lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{j1} - \bar{\Gamma}} (\dot{u}_i(P) p_{ki}^*(q, P)) d\Gamma_{j1} \right] + \\
& - \frac{(\bar{E}_j v_j - \bar{E}_1 v_1)}{\bar{E} v} \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (\dot{u}_i(P) p_{ki}^*(q, P)) d\Gamma_\xi \right] + \tag{4.17} \\
& - \sum_{j=1}^{N_{\text{inc}}} \left\{ \bar{E}_j \left(1 - \frac{v_j}{v}\right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \right\} \left[\lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{j1} - \bar{\Gamma}} (\dot{u}_i(P) \varepsilon_{ki}^*(q, P)) d\Gamma_{j1} \right] \\
& + \\
& - \left\{ \bar{E}_j \left(1 - \frac{v_j}{v}\right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \right\} \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (\dot{u}_i(P) \varepsilon_{ki}^*(q, P)) d\Gamma_\xi \right] + \\
& + \sum_{S=1}^{N_S} \bar{E}_S \left(1 - \frac{v_S}{v}\right) \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega_S + \Omega_\xi} (\dot{u}_i(P) \varepsilon_{kij}^*(q, P)) d\Omega_S \right] + \\
& + \sum_{S=1}^{N_S} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega_S + \Omega_\xi} \varepsilon_{kij}^*(q, p) N_{ij}^0(p) d\Omega(p)
\end{aligned}$$

onde: Ω_ξ é o domínio infinitesimal de contorno Γ_ξ , como mostra a Fig. (4.3).

As integrais da Eq. (4.17) sobre o contorno da interface $\Gamma_{1j} - \bar{\Gamma}$ são resolvidas analiticamente fazendo-se o limite $\bar{\Gamma} \rightarrow 0$, resultando em seus valores principais. Nesse caso, as integrais apresentam singularidade do tipo $1/r$ e são interpretadas no sentido do valor principal de Cauchy, ou seja, ao se fazer a integração analítica pode-se provar que os termos com valor infinito se cancelam.

Considerando a mudança de coordenada $d\Omega = r dr d\theta$ para as integrais envolvendo domínio, e fazendo-se o limite ξ tender a zero, conclui-se que:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega_\xi} \varepsilon_{ki}^*(q, p) N_{ij}^0(p) d\Omega(p) = 0 \tag{4.18}$$

Observe que não haverá problemas de singularidade na integral de domínio envolvendo deslocamentos, pois quando o ponto de colocação pertencer à célula a ser integrada, tem-se $v = v_S$ e, portanto, a integral não precisa ser calculada.

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega_\xi} \dot{u}_i(P) \varepsilon_{kijj}^*(q, p) d\Omega_S = 0 \quad (4.19)$$

Seja agora o cálculo das integrais sobre o contorno infinitesimal. Como nesse caso o ponto de colocação se encontra na matriz, tem-se que suas propriedades elásticas são aquelas da matriz, ou seja: $v=v_1$ e $E=E_1$. Logo as integrais sobre o contorno singular ficam:

$$\begin{aligned} & - \frac{(\bar{E}_j v_j - \bar{E}_1 v_1)}{\bar{E}v} \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (\dot{u}_i(P) p_{ki}^*(q, P)) d\Gamma_\xi \right] = \\ & = \left(1 - \frac{\bar{E}_j v_j}{\bar{E}v} \right) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (\dot{u}_1(P) p_{k1}^*(q, P) + \dot{u}_2(P) p_{k2}^*(q, P)) d\Gamma_\xi \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} & - \left\{ \bar{E}_j \left(1 - \frac{v_j}{v} \right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) \right\} \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (\dot{u}_i(P) \varepsilon_{ki}^*(q, P)) d\Gamma_\xi \right] = \\ & - \bar{E}_j \left(1 - \frac{v_j}{v} \right) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (\dot{u}_1(P) \varepsilon_{k1}^*(q, P) + \dot{u}_2(P) \varepsilon_{k2}^*(q, P)) d\Gamma_\xi \end{aligned} \quad (4.21)$$

Para se obter o termo livre quando o ponto de colocação S está na interface matriz/inclusão e pertence à matriz ($v=v_1$ e $E=E_1$), como mostra a Fig. (4.3), as seguintes integrais devem ser calculadas ao longo da interface infinitesimal:

$$\left(1 - \frac{\bar{E}_j v_j}{\bar{E}v} \right) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (\dot{u}_1(P) p_{k1}^*(s, P) + \dot{u}_2(P) p_{k2}^*(s, P)) d\Gamma_\xi \quad (4.22)$$

$$- \bar{E}_j \left(1 - \frac{v_j}{v} \right) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (\dot{u}_1(P) \varepsilon_{k1}^*(s, P) + \dot{u}_2(P) \varepsilon_{k2}^*(s, P)) d\Gamma_\xi \quad (4.23)$$

onde: o subscrito j se refere à inclusão; v e \bar{E} são propriedades da matriz, pois o ponto de colocação S pertence à matriz.

Considerando que $d\Gamma_\xi = r d\phi = \xi d\phi$, somando $u_1(S) - u_1(S)$ ao primeiro termo de cada integral das Eqs. (4.20) e (4.21) e $u_2(S) - u_2(S)$ ao segundo termo de cada

integral e considerando ainda que ao longo da interface infinitesimal circular $d\Gamma_\xi$ pode-se assumir que $u_2(P) = u_2(S)$ e $u_1(P) = u_1(S)$, as Eqs. (4.22) e (4.23) resultam em:

$$\left(1 - \frac{\bar{E}_j v_j}{\bar{E} v}\right) \left[\dot{u}_1(S) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} p_{k1}^*(S, P) \xi d\phi + \dot{u}_2(S) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} p_{k2}^*(S, P) \xi d\phi \right] \quad (4.24)$$

$$-\bar{E}_j \left(1 - \frac{v_j}{v}\right) \left[\dot{u}_1(S) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \varepsilon_{k1}^*(S, P) \xi d\phi + \dot{u}_2(S) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \varepsilon_{k2}^*(S, P) \xi d\phi \right] \quad (4.25)$$

Note na Fig. (4.3) que ao longo da interface infinitesimal o ângulo tem a seguinte variação $0 \leq \phi \leq \beta$, sendo β o ângulo definido no vértice. Além disso, também é possível observar na Fig. (4.3) que ao longo da interface $d\Gamma_\xi$ a direção normal n é definida como $\bar{n} = \begin{Bmatrix} -\text{sen}(\phi - \theta_1) \\ -\text{cos}(\phi - \theta_1) \end{Bmatrix}$. Portando, após substituir nas Eqs. (4.24) e (4.25) as expressões fundamentais definidas no Apêndice A e considerando $r = \xi$, $0 \leq \phi \leq \beta$ e $\bar{n} = \begin{Bmatrix} -\text{sen}(\phi - \theta_1) \\ -\text{cos}(\phi - \theta_1) \end{Bmatrix}$ tem-se os termos livres mostrados nas Eqs. (4.26), (4.27) e (4.28).

$$\begin{aligned} C_{11} = & \frac{2\pi - \beta}{2\pi} + \frac{\beta}{2\pi} \left(\frac{\bar{E}_j v_j}{\bar{E} v} + \frac{\bar{E}_j (2 - 3v')}{4\bar{G}(1 - v')} \left(1 - \frac{v_j}{v}\right) \right) + \\ & - \left(\frac{\bar{E}_j v_j}{\bar{E} v} - 1 + \frac{\bar{E}_j (1 - v')}{2\bar{G}} \left(1 - \frac{v_j}{v}\right) \right). \quad (4.26) \\ & \cdot \left(\frac{\cos 2\theta_1 \text{sen} 2\beta + \text{sen} 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1 - v')} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{12} = C_{21} = & \left[\frac{1}{8\pi(1 - v')} \left(1 - \frac{\bar{E}_j v_j}{\bar{E} v}\right) - \frac{\bar{E}_j}{16\pi\bar{G}} \left(1 - \frac{v_j}{v}\right) \right]. \quad (4.27) \\ & \cdot [\text{sen} 2\theta_1 \text{sen} 2\beta - \text{cos} 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)] \end{aligned}$$

$$C_{22} = \frac{2\pi - \beta}{2\pi} + \frac{\beta}{2\pi} \left(\frac{\bar{E}_j v_j}{\bar{E} v} + \frac{\bar{E}_j (2 - 3v')}{4\bar{G}(1 - v')} \left(1 - \frac{v_j}{v}\right) \right) + \quad (4.28)$$

$$+ \left(\frac{\bar{E}_j v_j}{\bar{E} v} - 1 + \frac{\bar{E}_j (1 - v')}{2G} \left(1 - \frac{v_j}{v} \right) \right) \cdot \left(\frac{\cos 2\theta_1 \sin 2\beta + \sin 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1 - v')} \right)$$

4.5. EQUAÇÃO INTEGRAL DA DERIVADA DOS DESLOCAMENTOS u_k PARA OS PONTOS DO DOMÍNIO

A equação da derivada dos deslocamentos é necessária para a solução do problema, pois é a partir dela que se obtém a equação algébrica das forças elásticas. Derivando a Eq. (4.17) para qualquer direção m , a seguinte expressão é obtida:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k(q)}{\partial m} = & \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial u_{k1}^*(q, P)}{\partial m} \dot{p}_1(P) + \frac{\partial u_{k2}^*(q, P)}{\partial m} \dot{p}_2(P) \right) d\Gamma + \\ & - \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} \int_{\Gamma_1} \left(\dot{u}_1(P) \frac{\partial p_{k1}^*(q, P)}{\partial m} + \dot{u}_2(P) \frac{\partial p_{k2}^*(q, P)}{\partial m} \right) d\Gamma + \\ & - \sum_{j=1}^{N_{\text{vazios}}} \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} \int_{\Gamma_{1j}} \left(\dot{u}_1(P) \frac{\partial p_{k1}^*(q, P)}{\partial m} + \dot{u}_2(P) \frac{\partial p_{k2}^*(q, P)}{\partial m} \right) d\Gamma_{1j} + \\ & - \sum_{j=1}^{N_{\text{inclusões}}} \left(\frac{\bar{E}_j v_j}{\bar{E} v} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} \right) \int_{\Gamma_{j1}} \left(\dot{u}_1(P) \frac{\partial p_{k1}^*(q, P)}{\partial m} \right. \\ & \quad \left. + \dot{u}_2(P) \frac{\partial p_{k2}^*(q, P)}{\partial m} \right) d\Gamma_{j1} + \\ & - \sum_{j=1}^{N_{\text{inclusões}}} \left\{ \bar{E}_j \left(1 - \frac{v_j}{v} \right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) \right\} * \\ & * \int_{\Gamma_{j1}} \left(\dot{u}_1(P) \frac{\partial \varepsilon_{k1}^*(q, P)}{\partial m} + \dot{u}_2(P) \frac{\partial \varepsilon_{k2}^*(q, P)}{\partial m} \right) d\Gamma_{j1} + \\ & + \sum_{S=1}^{N_S} \bar{E}_S \left(1 - \frac{v_S}{v} \right) \int_{\Omega_S} \dot{u}_i(p) \frac{\partial \varepsilon_{kij}^*(q, p)}{\partial m_S} + \\ & + \sum_{S=1}^{N_S} \frac{\partial}{\partial m} \int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^*(q, P) \dot{N}_{ij}^0(p) d\Omega(p) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Deve-se lembrar que não haverá problema de singularidade na integral de domínio envolvendo deslocamento, pois quando o ponto de colocação pertencer ao domínio de integração, tem-se que $v = v_s$, o que o anula. O mesmo não é verdade para integrais de domínio envolvendo forças normais plásticas. Para lidar com essa singularidade, é retirado do domínio Ω um domínio circular Ω_c onde a singularidade está localizada, com um pequeno raio ξ , com origem no ponto q , para obter o domínio, que é dado por: $\Omega_\varepsilon = \Omega - \Omega_c$, (para mais detalhes ver CROZARIOL (2017)). Após o tratamento dessa singularidade, a integral de domínio que aparece na Eq. (4.29) resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m} \int_{\Omega_s} \varepsilon_{kij}^*(q, P) N_{ij}^0(p) d\Omega(p) = \\ = \int_{\Omega} N_{ij}^0(p) \varepsilon_{kijm}^*(q, p) d\Omega + \frac{1}{16\bar{G}(1-v')} [(6-8v')N_{km}^0(q) - N_{mm}^0(q)\delta_{km}] \end{aligned} \quad (4.30)$$

A expressão fundamental se encontra no Apêndice A.

4.6. APLICAÇÃO DO MEC ÀS EQUAÇÕES INTEGRAIS

Neste item é apresentado como transformar as equações integrais do EVR em equações algébricas por meio da aplicação do Método dos Elementos de Contorno. Para isso, além de discretizar o contorno externo do EVR, também é preciso discretizar as interfaces em elementos e o domínio em células, pois as incógnitas do problema também são definidas nesses locais. Sendo assim, as incógnitas do problema são os deslocamentos nos nós de interface e internos, as forças nodais no contorno e as forças plásticas nos nós internos. Porém, no caso de todas as fases do EVR terem mesmo coeficiente de Poisson, não tem deslocamentos incógnitos nos nós internos de células. Portanto, ao inserir funções interpoladoras nos elementos e células para aproximar as variáveis do problema, as equações integrais são transformadas em equações algébricas.

Levando-se em conta a análise em multiescala, a solução do EVR é alcançada pela aplicação da deformação constante (obtida na análise da macro-escala) em todos os nós do contorno externo do EVR, que é feita através da imposição de deslocamentos lineares aos nós do contorno do EVR. Na microestrutura heterogênea, por conter inclusões e vazios, o campo de deformação não é constante e isso gera o chamado campo de flutuação de deslocamento e vinculado a esse campo de flutuação de deslocamento, tem o campo

de flutuação da deformação. No entanto, o valor final da flutuação de deslocamento só pode ser conhecido, após a resolução do problema de equilíbrio EVR. Desse modo, na microestrutura, o campo de deslocamento é definido como a soma da parte obtida a partir da macrodeformação constante imposta ao EVR, mais a parte chamada flutuação de deslocamento (ver Eq. (3.3)).

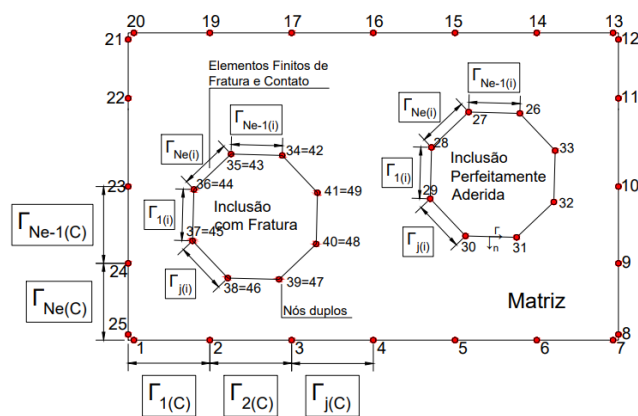
4.6.1. Discretização do EVR em elementos e células

4.6.1.1. Aproximação das variáveis nos elementos

As integrais sobre o contorno e interfaces são calculadas de maneira aproximada, através da discretização das mesmas em elementos. A princípio, a geometria do elemento pode ser aproximada por uma função qualquer, sendo que a quantidade e a forma destes elementos são escolhidas visando-se representar adequadamente o contorno real estudado, de maneira exata ou aproximada. Porém, nesse trabalho, os elementos são adotados retos.

Na Fig. (4.4) é mostrada a discretização de um EVR, onde os elementos representados possuem dois nós, por esta razão a aproximação para as variáveis é linear. Nessa figura, $N_{e(c)}$ indica o número de elementos sobre o contorno e $N_{e(i)}$ o número de elementos sobre a interface. Note que nos cantos do contorno são definidos nós duplos, devido à descontinuidade no valor da força de superfície e na interface onde há fratura são adotados nós duplos, o que é diferente naquela que está perfeitamente aderida, onde não há necessidade da adoção dos nós duplos.

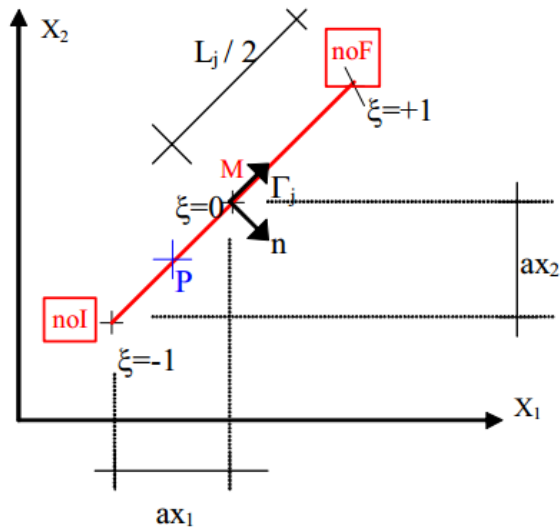
FIGURA 4.4 – Discretização do contorno externo e da interface em elementos.



Fonte: Autoria própria (2022).

Na Fig. (4.5) tem-se a representação de um elemento reto com apenas dois nós para representar sua geometria. Sendo que, noI é o nó inicial, noF o nó final, M é o ponto do meio do elemento, L_j é o comprimento do elemento j , n é a direção normal ao contorno Γ_j .

FIGURA 4.5 – Geometria do elemento aproximada por função linear.



Fonte: Fernandes (2005).

Como as integrais são resolvidas numericamente, quando o ponto de colocação não pertence ao elemento, a variável Γ e as coordenadas cartesianas (X_1^P e X_2^P) de um ponto P qualquer do elemento, devem ser expressas em função de sua coordenada local homogênea ξ . Logo, da Fig. (4.5), tem-se as seguintes deduções:

$$\Gamma_j = \xi \frac{L_j}{2} \quad (4.31)$$

$$X_1^P = X_1^M + \xi ax_1 \quad (4.32)$$

$$X_2^P = X_2^M + \xi ax_2 \quad (4.33)$$

onde: X_i^P é a coordenada na direção i do ponto P (com $i = 1,2$); X_i^M corresponde à coordenada na direção i do ponto M (ponto médio do elemento).

Tem-se ainda as Eq. (4.50) e (4.51).

$$X_i^M = \frac{(X_i^{\text{noI}} + X_i^{\text{noF}})}{2} \quad (4.34)$$

$$ax_i = \frac{(X_i^{\text{noF}} - X_i^{\text{noI}})}{2} \quad (4.35)$$

Substituindo as Eq. (4.34) e (4.35) nas Eq. (4.32) ou Eq. (4.33), são obtidas duas funções interpoladoras lineares, representadas pelas Eq. (4.36) e (4.37).

$$\phi_1(P) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (4.36)$$

$$\phi_2(P) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.37)$$

onde: ξ é a coordenada local homogênea do ponto P.

Assim, pode-se escrever as Eq. (4.32) e (4.33) numa só equação matricial, como mostrado na Eq. (4.38).

$$\begin{Bmatrix} X_1^P \\ X_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & \phi_2(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(P) & \phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{\text{noI}} \\ X_1^{\text{noF}} \\ X_2^{\text{noI}} \\ X_2^{\text{noF}} \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

Portanto, a integral ao longo do contorno ou interface é calculada de forma aproximada, sendo que para fazer a integração numérica, deve-se mudar de coordenadas cartesianas para coordenadas homogêneas (ver mais detalhes em Crozariol (2017)).

A aproximação das variáveis no elemento é feita a fim de se expressar o valor da variável u ou p de um ponto P qualquer de um elemento j em função dos seus valores nodais e de funções de interpolação. Com isso, $U(P)$ e $Q(P)$ são dados, na forma matricial, pelas Eq. (4.39) e (4.40).

$$U(P) = \begin{Bmatrix} u_1^P \\ u_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 \\ 0 & \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix}_j \\ \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix}_j \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

$$\underset{\sim}{P}(P) = \begin{Bmatrix} p_1^P \\ p_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 \\ 0 & \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} p_1^2 \\ p_2^2 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

onde: o sobrescrito 1 é o nó inicial do elemento, o sobrescrito 2 é o nó final e os subscritos são as direções das variáveis. É importante notar que a função e a matriz de interpolação são escritas como ϕ_i' e ϕ_j' , respectivamente para distingui-las daquelas no capítulo 3 **Erro! Fonte de referência não encontrada.** referente à macro-escala. As funções interpoladoras lineares são dadas pelas Eqs. (4.41) e (4.42)

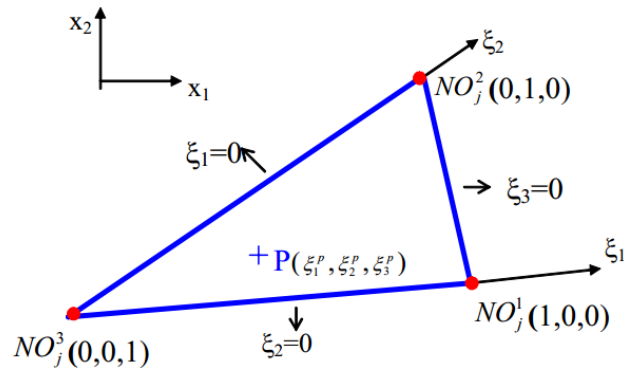
4.6.1.2. Aproximação das variáveis nas células

Na Eq. (4.13) têm-se duas integrais de domínio para serem resolvidas, uma envolvendo os deslocamentos e a outra envolvendo os esforços iniciais ou plásticos. Para resolvê-las, o domínio será discretizado através de células triangulares, onde a aproximação linear será adotada para os deslocamentos e os esforços iniciais que são considerados constantes.

A primeira integral de domínio da Eq. (4.13) nas sub-regiões a ser resolvida é mostrada na Eq. (4.43).

$$\sum_{S=1}^{N_s} \bar{E}_S \left(1 - \frac{\nu_S}{\nu}\right) \int_{\Omega_S} u_i(p) \varepsilon_{kij}^*(q, p) d\Omega_S \quad (4.43)$$

Considere a célula representada na Fig. (4.6), cujos nós NO_j^1 , NO_j^2 e NO_j^3 são coincidentes com seus vértices e na qual está representado o sistema de coordenadas homogêneas.

FIGURA 4.6 – Célula triangular com sistema coordenadas homogêneas.

Fonte: Fernandes (2005).

Os deslocamentos de um ponto P qualquer da célula são obtidos, utilizando-se funções interpoladoras, de maneira aproximada, a partir dos deslocamentos dos nós da mesma. Logo, na Eq. (4.44), pode-se identificar $[\Psi]^T$ como a função interpoladora de aproximação e $\{u^N\}$ sendo o vetor dos deslocamentos nodais.

$$\{u_i(p)\} = [\Psi]^T(p)\{u^N\} \quad (4.44)$$

Sendo:

$$u^{(N)T} = \{u^{(k1)} \quad u^{(k2)} \quad u^{(k3)}\} = \{u_1^{k1} \quad u_2^{k1} \quad u_1^{k2} \quad u_2^{k2} \quad u_1^{k3} \quad u_2^{k3}\} \quad (4.45)$$

$$\Psi^T = \begin{bmatrix} \xi_1^p & 0 & \xi_2^p & 0 & \xi_3^p & 0 \\ 0 & \xi_1^p & 0 & \xi_2^p & 0 & \xi_3^p \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$\xi_\alpha^p = \frac{1}{2A} (2A_0^\alpha + b^\alpha X_1^p + a^\alpha X_2^p) \quad \alpha = 1,2,3; j = 1,2,3; k = 1,2,3 \quad (4.47)$$

$$a^\alpha = X_1^k - X_1^j \quad (4.48)$$

$$b^\alpha = X_2^k - X_2^j \quad (4.49)$$

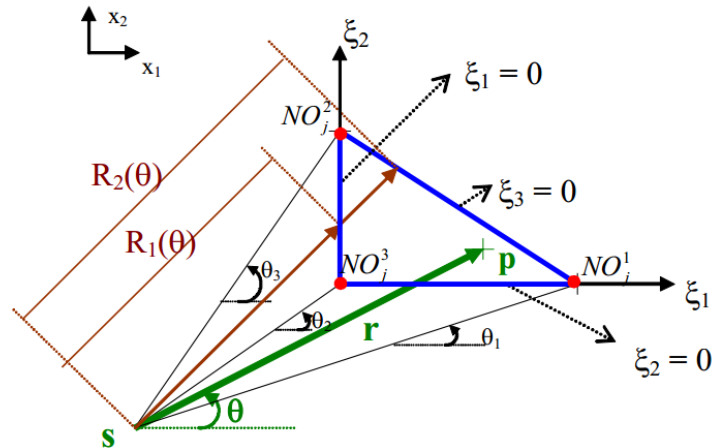
$$2A_0^\alpha = X_1^j X_2^k - X_1^k X_2^j \quad (4.50)$$

A integração sobre cada célula pode ser feita através da fórmula de quadratura de Gauss para domínios triangular, a partir das coordenadas homogêneas. Devido à natureza das funções envolvidas, é necessário um grande número de pontos de integração para se obter uma precisão aceitável. Em consequência da dificuldade citada, adota-se um

esquema semi-analítico de integração, utilizado por Telles e Brebbia (1981) e Venturini (1982), no qual apresentam melhores resultados.

Um sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ) , centrado no ponto de carregamento q , conforme a Fig. (4.7), é adotado para poder calcular analiticamente a integral sobre a coordenada r .

FIGURA 4.7 – Sistema de coordenadas cilíndricas nas células triangulares.



Fonte: Fernandes (2005).

A partir da função de aproximação dos deslocamentos, calculam-se as integrais de domínio. Assim, o domínio é discretizado em N_{ce} células e os deslocamentos são aproximados nas mesmas, onde através da Eq. (4.44), escreve-se a Eq. (4.51) sobre o domínio da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{N_s} \bar{E}_s \left(1 - \frac{v_s}{\nu}\right) \int_{\Omega_s} u_i(p) \varepsilon_{kij}^{*2D}(q, p) d\Omega_s \\ = \sum_{cel=1}^{N_{cel}} \left[\int_{\Omega_{cel}} \{k^*(q, p) [\Psi]^T(p) d\Omega_{cel}(p) \right] \{u_{cel}^N\} \end{aligned} \quad (4.51)$$

onde: $k^*(q, p) = \{\varepsilon_{k1j}^{*2D}(q, p) \quad \varepsilon_{k2j}^{*2D}(q, p)\}$; Ψ é a função de interpolação linear.

A resolução da integral da Eq. (4.68) é feita a partir da transformação de coordenadas dada por $d\Omega_{cel} = r dr d\theta$, onde a integração é realizada analiticamente em termos de r . Então utiliza-se a transformação de coordenadas dada por $d\theta = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial r}{\partial n}\right) d\Gamma$ com o intuito de transformar em integrais ao longo do contorno da célula, o que possibilita

utilizar a técnica dos sub-elementos (como feito em Fernandes (2003)). Como a célula é triangular, é composta por 3 lados, então faz-se o cálculo da integral de contorno em cada um desses lados. De acordo com Fernandes (2003), para se fazer a integração numérica da célula com a técnica de sub-elementos, atribui-se a fórmula da quadratura de Gauss para cada lado e considera-se a mudança do sistema de coordenadas cartesianas de cada elemento para coordenadas homogêneas η (referente ao sub-elemento), sendo a relação $d\Gamma = 0,5Ld\eta$. Desta forma, tem-se a Eq. (4.52).

$$e_{ki}^{cel(\alpha)}(q) = \sum_{l=1}^3 \sum_{ks=1}^{N_{sub}} \sum_{IG=1}^{N_g} \frac{va_{ks}}{8\pi G(1-\nu)} (\delta_{ik} - 2r_{,i}r_{,k}) [\ln R \xi_{\alpha}^q + \xi_{\alpha}^r] \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial n} W_{IG} \quad (4.52)$$

onde: N_{sub} é o número de sub-elementos em que o elemento é dividido; N_g é o número de pontos de Gauss; a_{ks} é o comprimento do sub-elemento ks ; W_{IG} é o fator de ponderação do ponto de Gauss IG ; ξ_{α}^q são as coordenadas homogêneas relativas ao ponto q e ξ_{α}^r relativas ao raio r , dadas pelas Eqs. (4.53) e (4.54).

$$\xi_{\alpha}^q = \frac{1}{2A} (2A_0^a + b^a X_1^q + a^a X_2^q) \quad (4.53)$$

$$\xi_{\alpha}^r = \frac{r}{2A} (b^a \cos\theta + a^a \sin\theta) \quad (4.54)$$

Considerando-se a aproximação feita para os deslocamentos na célula definida anteriormente (Eq. (4.44)) as deformações podem ser obtidas a partir dos deslocamentos pela Eq. (4.55).

$$\{\varepsilon_p\}_{cel} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1^p}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial \xi_2^p}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial \xi_3^p}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial \xi_1^p}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_1^p}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2^p}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2^p}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3^p}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3^p}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial \xi_1^p}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial \xi_2^p}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial \xi_3^p}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{k_1} \\ u_2^{k_2} \\ u_1^{k_2} \\ u_2^{k_2} \\ u_1^{k_3} \\ u_2^{k_3} \end{Bmatrix} = [B]_{cel} \{U\}^N \quad (4.55)$$

onde: a matriz $[B]_{cel}$ é definida pela Eq. (3.8).

A área do triângulo (A), é dada por:

$$A = \frac{1}{2} (b^1 a^2 - b^2 a^1) \quad (4.56)$$

Em se tratando da integral de domínio (Eq. (4.43)) envolvendo os esforços iniciais ou plásticos, presente na equação do deslocamento (E. (4.13)), faz-se seu cálculo através da discretização em células triangulares. Para isso, de acordo com a Fig. (4.7), considera-se a célula com vértices K_1, K_2, K_3 , e utilizam-se as funções interpoladoras constantes para aproximar os esforços iniciais. Logo, necessita-se apenas de 1 (um) nó na célula que será definido no seu centro. Com isso, os esforços de um ponto p qualquer da célula são aproximados pela Eq. (4.57).

$$\{N^0\}(p) = [\Psi]^T(p) \{N^{0(N)}\} \quad (4.57)$$

onde: Ψ é a função interpoladora constante; $\{N^0\}(p)$ é o vetor dos deslocamentos nodais.

A partir da discretização do domínio em células, calcula-se de forma aproximada, a integral de domínio envolvendo os esforços iniciais pela Eq. (4.58).

$$\int_{\Omega} \left(N_{ij}^0(p) \varepsilon_{kij}^*(q, p) \right) d\Omega(p) = \sum_{cel=1}^{N_{cel}} [\{k^{**}\}(q, p) d\Omega_{cel}(p)] \{N_{cel}^{0(N)}\} \quad (4.58)$$

onde:

$$k^{**}(q, p) = \{ \varepsilon_{k11}^*(q, p) \quad 2\varepsilon_{k12}^*(q, p) \quad \varepsilon_{k22}^*(q, p) \} \quad (4.59)$$

De forma análoga a equação integral de domínio envolvendo deslocamentos, escreve-se a Eq. (4.60) para cada célula.

$$\begin{aligned} \bar{e}_{kijl}^{cel}(q) \\ = \frac{1}{8\pi G(1-\nu')} \sum_{s=1}^3 \left\{ \int_{\Gamma_s} \frac{f_{kijl}(\theta)}{R} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_s \right\} \quad k, l, i, j = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.60)$$

Onde a função $f_{kijl}(\theta)$ é dada pela Eq. (4.61).

$$\begin{aligned}
f_{kijl}(\theta) = & \frac{1}{8\pi\bar{G}(1-\nu')} \left\{ (1-2\nu') [\delta_{jl}\delta_{ki} + \delta_{il}\delta_{kj} - 2\delta_{ki}\Gamma_{,i}\Gamma_{,l} - \right. \\
& 2\delta_{kj}\Gamma_{,i}\Gamma_{,l}] + \delta_{ij} (2\Gamma_{,k}\Gamma_{,l} - \delta_{kl}) + 2\delta_{kl}\Gamma_{,i}\Gamma_{,j} + 2\delta_{jl}\Gamma_{,k}\Gamma_{,i} + 2\delta_{il}\Gamma_{,j}\Gamma_{,k} - \\
& \left. 8\Gamma_{,i}\Gamma_{,j}\Gamma_{,k}\Gamma_{,l} \right\} \quad (4.61)
\end{aligned}$$

4.7. TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS EM EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

A Eq. (4.13) do deslocamento u_k de um ponto Q sobre o contorno ou uma interface pode ser escrita, da maneira como mostrada na Eq. (4.62).

$$\begin{aligned}
C_{k1}u_1(Q) + C_{k2}u_2(Q) = & \sum_{j=1}^{Nec} g_{ki}^{N(j)}(Q) p_{i(j)}^N - \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E}} \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{Nec} h_{ki}^{N(j)}(Q) u_{i(j)}^N \\
- & \sum_{m=1}^{N_{vaz}} \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E}} \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{Nei} h_{ki}^{N(j)}(Q) u_{i(j)}^N \\
& - \sum_{m=1}^{N_{inc}} \left[\frac{\bar{E}_m \nu_m}{\bar{E}} \frac{1}{\nu} - \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E}} \frac{1}{\nu} \right] \sum_{j=1}^{Nei} h_{ki}^{N(j)}(Q) u_{i(j)}^N + \\
- & \sum_{m=1}^{N_{inc}} \left\{ \bar{E}_m \left(1 - \frac{\nu_m}{\nu}\right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \right\} \sum_{j=1}^{Nei} \bar{h}_{ki}^{N(j)}(Q) u_{i(j)}^N + \\
+ & \sum_{S=1}^{N_S} \bar{E}_S \left(1 - \frac{\nu_S}{\nu}\right) \sum_{cel=1}^{N_{cel}} e_{ki}^{cel}(q) u_{i(cel)}^N + \sum_{S=1}^{N_S} \sum_{cel=1}^{N_{cel}} e''_{kij}{}^{cel}(q) N_{ij(cel)}^{0(N)} \quad (4.62)
\end{aligned}$$

onde: Nec se refere ao número de elementos de contorno e Nei ao número de elementos de interface.

Para todos os elementos são calculados os vetores $\{h^j\}(Q)$, $\{\bar{h}^j\}(Q)$ e $\{g^j\}(Q)$, que são dados por:

$$h_{ki}^{N(j)}(Q) = \int_{\Gamma_j} p_{ki}^*(Q, P) \phi_N(P) d\Gamma_j \quad (4.63)$$

$$h_{ki}^{-N(j)}(Q) = \int_{\Gamma_j} \varepsilon_{ki}^*(Q, P) \phi_N(P) d\Gamma_j \quad (4.64)$$

$$g_{ki}^{N(j)}(Q) = \int_{\Gamma_j} u_{ki}^*(Q, P) \phi_N(P) d\Gamma_j \quad (4.65)$$

onde: k é a direção da carga fundamental, i é a direção (da força fundamental ou do deslocamento fundamental) na qual se calcula o coeficiente e N é o nó local do elemento j .

Além disso, tem-se os vetores referentes às células do EVR: $\{e^{cel}\}(q)$ e $\{e''^{cel}\}(q)$ dadas nas Eqs. (4.53) e (4.61). Dessa forma, agrupa-se os coeficientes relacionados a um mesmo valor nodal, para que a Eq. (4.62) possa ser escrita de forma matricial. Além disso, o termo livre deve ser adicionado à coluna correspondente do vetor $\{H\}$ relacionado ao ponto de colocação, podendo ser visto com mais detalhes em Crozariol (2017). Assim, obtém-se a equação algébrica referente à equação do deslocamento no ponto Q , mostrada na Eq. (4.66).

$$\{H_{\mu}\}(Q)\{U_{\mu}\} = \{G_{\mu}\}(Q)\{P_{\mu}\} + \{E_{\mu}\}(q)\{N^0\} \quad (4.66)$$

onde: $\{U_{\mu}\}$ é o vetor dos valores nodais dos deslocamentos nos nós sobre o contorno, internos e interfaces; $\{P_{\mu}\}$ é o vetor dos valores nodais das forças de superfície no contorno externo e $\{N^0\}$ é o vetor dos esforços iniciais nos nós de células.

4.8. SISTEMAS DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

As equações integrais Eq. (4.13) e (4.31) são transformadas em equações algébricas através da discretização do contorno em elementos e do domínio em células, onde surgem pontos nodais. No contorno externo, os valores nodais são: duas componentes de deslocamentos (u_1 e u_2) e duas forças de superfície (p_1 e p_2), das quais uma componente em cada direção deve ser dada como condição de contorno. Porém, no caso particular tratado nesse trabalho, os deslocamentos são impostos a todos os nós do contorno e, portanto, as forças obtidas são reações a esses deslocamentos impostos. No domínio os valores nodais são: duas componentes de deslocamentos (u_1 e u_2) e três componentes de forças plásticas (N_{11}^0 , N_{12}^0 e N_{22}^0).

Além disso, as funções de forma linear são assumidas para aproximar as variáveis nos elementos, enquanto nas células os deslocamentos são aproximados por funções de forma linear contínuas, porém as forças inelásticas são constantes. Na montagem do sistema de equações, utilizam apenas equações dos deslocamentos (u_1 e u_2) as quais são escritas em pontos de colocação coincidentes com os nós de contorno, com os nós de

interface e com nós de células. Vale lembrar que se o nó de interface é duplo, um ponto de colocação pertence à matriz e o outro pertence à inclusão. Organizando as equações na forma matricial, tem-se o seguinte sistema de equações em termos dos valores de contorno, interfaces e domínio mostrado na Eq. (4.67)

$$\begin{bmatrix} [H_\mu]_{CC} & [H_\mu]_{Ci} \\ [H_\mu]_{iC} & [H_\mu]_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_\mu\}_C \\ \{U_\mu\}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_\mu]_{CC} \\ [G_\mu]_{iC} \end{bmatrix} \{P_\mu\}_C + [E_\mu] \{N^0\} \quad (4.67)$$

Na Eq. (4.67), o sub-índice C está relacionado com o contorno externo, enquanto o sub-índice i está relacionado com valores da interface e domínio. Os vetores $\{U_\mu\}$, $\{P_\mu\}$ e $\{N^0\}$, são os valores nodais de deslocamento, forças de superfície e esforços iniciais, respectivamente. A matriz $[H_\mu]$ resulta da integração sobre os elementos de contorno e de interface e também sobre as células sendo referente às integrais que têm os deslocamentos no integrando. A matriz $[G_\mu]$ resulta da integração sobre os elementos de contorno, sendo referente às integrais que têm forças de superfície no integrando. E por fim, a matriz $[E_\mu]$ representa os valores integrais das células que têm os esforços iniciais no integrando.

Este trabalho estuda o comportamento de uma microestrutura heterogênea no contexto da análise em multiescala. Como já foi descrito anteriormente, os valores da macrodeformação são impostos no contorno externo da microestrutura, o que implica em impor deslocamentos lineares como condição de contorno. Impondo-se as condições de contorno, ou seja, isolam-se todas as incógnitas no vetor do lado esquerdo da equação e são trocadas as respectivas colunas da matriz H e G. A Eq. (4.67) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} -[G_\mu]_{CC} & [H_\mu]_{Ci} \\ -[G_\mu]_{iC} & [H_\mu]_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_\mu\}_C \\ \{U_\mu\}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[H_\mu]_{CC} \\ -[H_\mu]_{iC} \end{bmatrix} \{U_\mu\}_C + [E_\mu] \{N^0\} \quad (4.68)$$

O sistema formado pela Eq. (4.68) pode ser reduzido para a seguinte forma:

$$[A_\mu] \{X_\mu\} = \{B_\mu\} + [E_\mu] \{N^0\} \quad (4.69)$$

onde: $[A_\mu] = \begin{bmatrix} -[G_\mu]_{CC} & [H_\mu]_{Ci} \\ -[G_\mu]_{iC} & [H_\mu]_{ii} \end{bmatrix}$, o vetor $\{B_\mu\} = \begin{bmatrix} -[H_\mu]_{CC} \\ -[H_\mu]_{iC} \end{bmatrix} \{U_\mu\}_C$, $\{X_\mu\} = \begin{Bmatrix} \{P_\mu\}_C \\ \{U_\mu\}_i \end{Bmatrix} \{X\}$ é

o vetor das incógnitas dado pelas forças de superfície no contorno e dos deslocamentos nas interfaces e nós internos;

Isolando o vetor $\{X\}$ A Eq. (4.69) fica:

$$\{X_\mu\} = \{L_\mu\} + [R_\mu]\{N^0\} \quad (4.70)$$

onde: $\{L_\mu\} = [A_\mu]^{-1}\{B_\mu\}$; $[R_\mu] = [A_\mu]^{-1}[E_\mu]$.

Para resolver o problema de equilíbrio do EVR, a soma das forças nodais em todas as células deve ser zero, isto é, as forças do EVR devem estar em equilíbrio. Para isso, faz-se necessário também escrever as equações algébricas das forças normais elásticas $\{N^e\}$ (de tentativa), que são obtidas após escrever as equações da derivada dos deslocamentos em todos os nós centrais das células e aplicar a lei de Hooke, obtendo-se:

$$\{N^{e(MEC)}\} = -\begin{bmatrix} [H'_\mu]_C & [H'_\mu]_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_\mu\}_C \\ \{U_\mu\}_i \end{Bmatrix} + [G'_\mu]_C \{P'_\mu\}_C + [E'_\mu]\{N^0\} \quad (4.71)$$

Após a aplicação das condições de contorno no EVR, a Eq. (4.33) pode ser escrita como Eq. (4.72)

$$\{N^{e(MEC)}\} = \begin{bmatrix} [G'_\mu]_C & -[H'_\mu]_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P'_\mu\}_C \\ \{U_\mu\}_i \end{Bmatrix} - [H'_\mu]_C \{U_\mu\}_C + [E'_\mu]\{N^0\} \quad (4.72)$$

Podendo também ser escrita a Eq. (4.72) da seguinte forma:

$$\{N^{e(MEC)}\} = -[A'_\mu]\{X_\mu\} + \{B'_\mu\} + [E'_\mu]\{N^0\} \quad (4.73)$$

Substituindo o vetor $\{X_\mu\}$ da Eq. (4.70) na Eq. (4.73), tem-se a Eq. (4.90).

$$\{N^{e(MEC)}\} = \{K_\mu\} + [S_\mu]\{N^0\} \quad (4.74)$$

onde: $\{K_\mu\} = \{B'_\mu\} - [A'_\mu]\{L_\mu\}$; $[S_\mu] = [E'_\mu] - [A'_\mu][R_\mu]$.

O procedimento numérico é o seguinte: antes de resolver o problema de equilíbrio do EVR, o cálculo do vetor das incógnitas elásticas $\{\Delta L_\mu\}$ e dos incrementos de força elástica $\{\Delta K_N\}$ são calculados, sendo que esses não consideram o campo de flutuação de deslocamento que satisfaz a equação de equilíbrio do EVR, nem o campo de forças iniciais. Porém, após resolver o problema de equilíbrio do EVR obtêm-se as forças iniciais nodais e os deslocamentos dos nós de contorno devem ser atualizados, pois deve-se somar aos mesmos o campo de flutuação. Com esses valores, atualiza-se os valores das incógnitas $\{X_\mu\}$ (Eq. (3.25)) e a partir das forças nodais no contorno calcula-se o vetor de tensão homogeneizado (Eq. (3.26)). Vale ressaltar que para calcular os vetores $\{\Delta L_\mu\}$ e $\{\Delta K_N\}$, as seguintes matrizes, que são constantes, devem ser montadas: $[A_\mu]^{-1}$; $\begin{bmatrix} -[H_\mu]_{BB} \\ -[H_\mu]_{iB} \end{bmatrix}$; $[A'_\mu]^{-1}$; $[R_\mu]$ e $[H'_\mu]_B$. Assim, essas matrizes são construídas apenas na primeira iteração do primeiro incremento do problema macro-contínuo.

4.9. ALGORITMO

Neste item é apresentado o algoritmo desenvolvido pela Professora DSc. Gabriela Rezende Fernandes na Universidade Federal de Goiás – Regional de Catalão, para resolver o problema de equilíbrio do EVR e calcular a tensão e o tensor elastoplástico homogeneizados.

Para um incremento n , o algoritmo que define os valores homogeneizados de tensão e tensor constitutivo da microestrutura heterogênea, considerando um fenômeno dissipativo é apresentado como:

1. Duas equações algébricas do plano de deslocamentos são escritas para cada nó do EVR para obter o sistema de equações definido na Equação 3.65 os nós das interfaces são duplicados, considerando um ponto de colocação definido na matriz e outro na inclusão, estando muito próximos um do outro
2. A macro deformação ε é imposta ao contorno do EVR e o incremento de deslocamento com variação linear para os nós y do contorno externo são

$$\text{computados: } \{\Delta U_c^L\}_n = [\Delta \varepsilon]_n \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_y ;$$

3. O vetor $\{\Delta U_c^L\}$ é imposto ao EVR como condição de contorno, obtendo as incógnitas elásticas $\{\Delta L\} = \begin{Bmatrix} \Delta P_c \\ \Delta U_i \end{Bmatrix}_n^0$ definidas na Equação 4.70;
4. Três equações algébricas das forças normais de tentativa são escritas no ponto central de cada célula, obtendo $\{\Delta K\}_n$ definida na Equação 3.74. Então, a partir da lei de Hooke (Equação 4.3), o incremento de deformação pode ser calculado para cada célula: $\{\Delta \varepsilon_\mu\}_n^0 = [C_N]^{-1} \{\Delta K\}_n$;
5. Para verificar se (Equação 3.11) o seguinte processo iterativo ($i \geq 0$) deve ser considerado para cada célula:
 - a) O incremento de tensões é calculado pela lei de Hooke: $\{\Delta \sigma_\mu\}_n^i = [C] \{\Delta \varepsilon_\mu\}_n^i$;
 - b) A tensão elástica de tentativa é computada: $\{\sigma_\mu^e\}_n^i = \{\sigma_\mu\}_{n-1}^i + \{\Delta \sigma_\mu^e\}_n^i$;
 - c) O modelo constitutivo é verificado, obtendo: $[C_\mu^{ep}]_n^i, \{\sigma_\mu\}_n^i$ e $\{\Delta \sigma_\mu\}_n^i = \{\sigma_\mu\}_n^i - \{\sigma_\mu\}_{n-1}^i$;
 - d) As forças de membrana são computadas: $\{N\}_n^i = t \{\sigma_\mu\}_n^i$;
6. Para cada elemento de contato e fratura coesiva *ef*:
 - a) O vetor de incremento de intervalo de deslocamento de teste do elemento:
$$\{\delta_\mu^{ef(t)}\}_n^{iRVE} = N_e \{\Delta u_\mu^{ef(t)}\}_n^{iRVE};$$

onde N_e são as funções de forma relacionadas a cada ponto de Gauss.
 - b) O modelo constitutivo é verificado, obtendo os valores nodais reais para a força $\{F_{ef}^{int}\}_n^{iRVE}$ e a rigidez tangente constitutiva real $\{K_{ef}\}_n^{iRVE}$ em conformidade, se a fratura estiver carregando, descarregando ou permaneça fechada.
7. Após obter as forças para todas as células e elementos de contato e fratura coesiva, verifica-se equação de equilíbrio (Equação 3.11) Se a Equação 3.11 é satisfeita para $i = 0$ (EVR uniforme) ou para, calcula-se o item 8. Caso não seja satisfeita, o seguinte procedimento deve ser considerado para $i = i + 1$:
 - e) A matriz $[K]_n^{i-1}$ (Equação 3.15) é atualizada;
 - f) A correção das flutuações dos deslocamentos $\{\delta \tilde{u}\}_n^i$ é obtida (Equação 3.14);
 - g) O vetor da flutuação dos deslocamentos é atualizado: $\{\tilde{u}\}_n^i = \{\tilde{u}\}_n^{i-1} + \{\delta \tilde{u}\}_n^i$;
 - h) Os incrementos de flutuação dos deslocamentos são atualizados: $\{\Delta \tilde{u}_\mu\}_n^i = \{\tilde{u}\}_n^i - \{\tilde{u}\}_{n-1}^i$;

- i) O incremento de deformação é atualizado para cada célula: $\{\Delta\varepsilon_\mu\}_n^i = \{\Delta\varepsilon_\mu\}_n^0 + [B]_{\text{cell}}\{\Delta\tilde{u}\}_n^i$;
- j) Retornar ao item 6.
8. A tensão homogeneizada σ é computada, seguindo o procedimento:
- a) O incremento de deslocamento nodal final ao longo do contorno externo é obtido: $\{\Delta U_c\}_n = \{\Delta U_c^L\}_n + \{\Delta\tilde{u}_c\}_n$;
- b) O incremento das forças de superfície ao longo do contorno $\{\Delta L_c\}_n$ (definido na Equação 4.70) é atualizado considerando $\{\Delta U_c\}_n$;
- c) Calcular o incremento de forças normais plásticas: $\{\Delta N^p\}_n = [C_N]\{\Delta\varepsilon_\mu\}_n - \{\Delta N\}_n$;
- d) As forças de contato e fratura coesiva são obtidas: $\{\Delta N^{\text{ef}}\}_n = \{\Delta K\}_n - [C_N]\{\Delta\varepsilon_\mu\}_n$;
- e) As forças inelásticas são computadas: $\{\Delta N^0\}_n = \{\Delta N^p\}_n + \{\Delta N^{\text{ef}}\}_n$;
- f) Os incrementos das forças ao longo do contorno são atualizados: $\{\Delta P_c\}_n = \{\Delta L_c\}_n + [R]\{\Delta N^p\}_n$;
- g) As forças finais são: $\{P_c\}_n = \{P_c\}_{n-1} + \{\Delta P_c\}_n$;
- h) Multiplicando $\{P_c\}_n$ pelo comprimento de influência do elemento, o tensor das tensões homogeneizado pode ser calculado pela (Equação 3.29);
9. O tensor constitutivo homogeneizado C^{ep} (Equação 3.30) é obtido.

CAPÍTULO 5

MODELAGEM CONSTITUTIVA DO EVR UTILIZANDO A MECÂNICA DA FRATURA

5.1. ASPECTOS GERAIS SOBRE A MECÂNICA DA FRATURA

A fratura, por definição, é a separação de um corpo em duas ou mais partes quando submetido a um esforço mecânico. A Mecânica da Fratura, por sua vez, determina se uma trinca irá ou não levar o material à falha para tensões normais de serviço, permitindo ainda, determinar o grau de segurança efetivo de um componente trincado.

Mehta e Monteiro (2014) afirma que aplicar a mecânica da fratura ao projeto de concreto pode fornecer uma boa compreensão sobre como o tamanho de um elemento estrutural pode afetar a capacidade de carga última, além de ser uma boa ferramenta para prever a propagação de fissuras no material. Dentro desse contexto, neste trabalho será adotado um critério de resistência que preveja que uma fissura irá se propagar quando as tensões alcançarem o valor último ao qual o material resiste. A teoria da elasticidade prevê que as tensões na extremidade da fissura vão ao infinito, pressupondo então que a fissura irá se propagar, não importa quão pequena seja a tensão aplicada, o que é uma consideração que não condiz com a realidade. Já a mecânica da fratura fornece um critério de energia que não tem tais desvantagens e permite previsões mais precisas da estabilidade da fissura. Apesar das vantagens de usar a mecânica da fratura para o concreto, Quaresma (2016) afirma que seu estudo é recente, pois o seu desenvolvimento para o concreto foi lento em comparação com outros materiais.

5.2. MODELO DE FRATURA COESIVA

A Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) depende da espessura do material, que ditará se o regime predominante é Estado Plano de Deformação (EPD) ou Estado Plano de Tensões (EPT). Para o EPT, geralmente a zona de plastificação apresenta dimensões significativas, que invalidam o uso da MFLE e sugerem o uso da Mecânica de Fratura Não Linear (MFNL) (MIRANDA, 2003). A MFLE só é válida quando a deformação não linear do material for confinada a uma pequena região ao redor da ponta da trinca. Em muitas situações é virtualmente impossível caracterizar o comportamento da fratura pela MFLE, e uma Mecânica da Fratura alternativa tem de ser usada.

A zona de fraturamento do concreto se assemelha com a sua região de plastificação, pois este material apresenta um comportamento não-linear quase-frágil. Logo, uma região fraturada impacta diretamente na capacidade de transmissão de esforços. Para esse material, modelos de fratura coesiva apresentam melhor eficiência (BORGES, 2015).

Os trabalhos de Dugdale⁹ e Barenblatt¹⁰(1960, 1962 *apud* ANDERSON, 2005) fundamentaram os modelos discretos de fratura coesiva, que propõem a existência de zonas coesivas e tensões coesivas nas pontas das fissuras, esses modelos são voltados para metais. O modelo não linear de fraturamento coesivo específico para o concreto foi desenvolvido por Hillerborg *et al.* (1976), que estabelece que a zona de processo de fratura pode ser modelada como um prolongamento adequado da fissura dentro da qual ocorram forças coesivas ou fictícias que se relacionam com a abertura da fratura através do amolecimento do material.

Um dos primeiros usos de modelos discretos de fratura em elementos finitos foi proposto por Ngo e Scordelis¹¹ (1967 *apud* LENS, 2009), porém Rots¹² (1988 *apud* LENS, 2009) foi quem aplicou o contexto das interfaces coesivas nas teorias do concreto, utilizando as leis coesivas da teoria de fissura fictícia de Hillerborg *et al.* (1976).

Lens (2009) afirma que a representação das fissuras via elementos finitos apresenta-se de três formas distintas:

- Modelos de fissuras distribuídas, em que, o material fissurado é tratado como contínuo, e a fissura acontece ao longo do elemento, alterando a propriedade do material do elemento. Durante a análise, a estrutura da malha não muda, sendo feita uma atualização da relação tensão-deformação para considerar o dano devido à fissuração. Esse tipo de método é indicado quando as fissuras estão espalhadas ao longo das estruturas, como no caso do concreto armado, porém é menos eficiente quando as fissuras são localizadas, como no caso do concreto simples.
- Modelos de fissuras discretas, que representam cada fissura individualmente, como uma descontinuidade real da malha de elementos finitos. A formação e

⁹ Dugdale, D.S., “Yielding in Steel Sheets Containing Slits.” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 8, 1960, pp. 100–104.

¹⁰ Barenblatt, G.I., “The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture.” *Advances in Applied Mechanics*, Vol. VII, Academic Press, 1962, pp. 55–129.

¹¹ Ngo, D.; Scordelis, A. C. *Finite Elements Analysis of Reinforced Concrete Beams*. ACI Journal, Farmington Hills: ACI, v. 64, n.3, p.152-163, apr 1967.

¹² Rots, J. G. *Computational modeling of concrete fracture*. PhD Thesis, Delft University, 1988.

propagação da trinca ocorrem nos contornos dos elementos finitos e a parte sólida do elemento permanece inalterada, o que gera uma restrição na direção da propagação da fissura. Nos modelos de fratura discreta, podem ser divididos em: métodos adaptativos, onde as fissuras são continuamente reorientadas e a malha é refeita para adaptar-se à nova superfície das fissuras; e o método das superfícies coesivas, onde as fissuras permanecem restritas às faces da malha de elementos finitos.

- Modelos de fissura incorporado, que é um modelo recente, no qual a fissura é incorporada como descontinuidade dentro do elemento finito, podendo se propagar em qualquer direção, independente da malha.

Outro modelo importante que contribuiu para a formulação do elemento coesivo utilizado neste trabalho é o modelo proposto por Camacho e Ortiz (1996), que apresentou uma nova forma de simular os diversos mecanismos de fraturamento. Foi incluído um novo parâmetro para a inicialização do processo de fratura, o que permite que a análise se inicie sem nenhuma fratura coesiva e, conforme o acréscimo de carregamento, os elementos de fratura são incluídos. Ortiz e Pandolfi (1999) estenderam este modelo para o caso em três dimensões. Posteriormente, Cirak *et al.* (2005) desenvolveram um método em elementos finitos para a simulação de fraturas dinâmicas e fragmentação de cascas finas, com base na teoria de Ortiz e Pandolfi (1999).

5.3. MODELOS DE CONTATO E DE FRATURA COESIVA

Dentro do estudo do comportamento mecânico dos materiais utilizando modelos multiescala, muitos trabalhos têm sido desenvolvidos a fim de analisar os fenômenos na microescala usando muitas técnicas e modelos constitutivos de fratura, conforme Azizi (2012), Giusti *et al.* (2009), Fu *et al.* (2008), Cavalcante *et al.* (2011), Ren; Li (2013).

O modelo descrito neste item foi proposto por Pituba *et al.* (2016), que é um modelo de fratura coesiva modificado a partir de Cirak *et al.* (2005) para lidar com meios dúcteis e proposto para simular o processo de fissuração até a falha da matriz da microestrutura. De modo geral, foi desenvolvido para representar o comportamento das fissuras quando são capazes de transmitir cargas entre superfícies, cuja capacidade de transmissão gradualmente decresce até não ter mais transmissão de tensão entre elas.

Para simular o comportamento mecânico do concreto, uma modelagem na microestrutura é realizada considerando o comportamento mecânico de cada material constituinte do mesmo. O estudo da microescala é realizado através da definição de um EVR, como mostrado na Fig. (3.2).

Os agregados seguem regime elástico e a pasta cimentícia segue a lei de evolução elastoplástica dada pelo modelo de Mohr-Coulomb. A Zona de Transição Interfacial é discretizada por elementos finitos de contato e fratura coesiva, apresentados por Pituba *et al.* (2016) de modo a simular a abertura e/ou fechamento de fraturas nessa região denominada ZTI.

O modelo proposto foi inicialmente desenvolvido por Ortiz e Pandolfi (1999), que descreve a lei coesiva de deformação-finita irreversível. A energia coesiva liberada ϕ é dada pela Eq. (5.1).

$$\phi = \phi(\delta_n, \delta_s, q) \quad (5.1)$$

onde: δ_n é a abertura devido ao modo I (normal); δ_s é a abertura devido ao modo II (escorregamento); q é a variável que descreve os processos inelásticos da coesão.

É possível assumir que a deformação devido a abertura por escorregamento é um valor escalar independente da direção de sua fissura na superfície, assim $\delta_s = |\delta_s|$, dando um caráter isotrópico para seu comportamento. Para a formulação da lei coesiva dos modos mistos, é introduzido um deslocamento de abertura efetiva, dado na Eq. (5.2).

$$\delta = \sqrt{\beta^2 \delta_s^2 + \delta_n^2} \quad (5.2)$$

onde β assume valores diferentes para as aberturas, variando de 0 a 1.

Por outro lado, assumindo que a energia potencial liberada ϕ depende de δ , a lei coesiva é escrita como mostrado na Eq. (5.3).

$$\{t\} = \frac{\{t\}}{\delta} (\beta^2 \{\delta_s\} + \delta_n \{n\}) \quad (5.3)$$

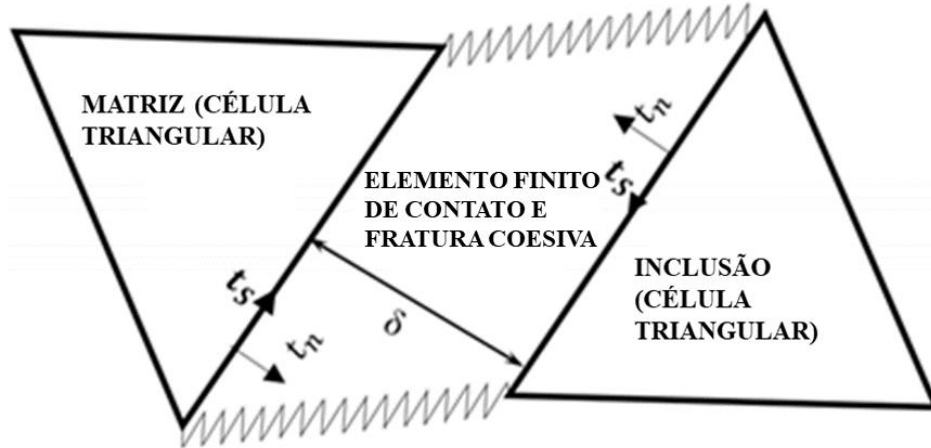
onde n é o vetor normal à fissura; δ_s é o vetor de abertura por escorregamento localizado na superfície da fissura; t é o vetor de tensão coesiva ao longo da fissura.

O valor de t é dado pela Eq. (5.4).

$$\{t\} = \sqrt{\beta^{-2}|\{t_s\}|^2 + \{t_n^2\}} \quad (5.4)$$

A relação mostra que β é definido como sendo um fator de peso para se levar em conta no fenômeno de escorregamento entre as bordas da fissura, conforme a Fig. (5.1).

FIGURA 5.1 – Configuração do Modelo em Elementos Finitos.



Fonte: Borges (2015).

É possível notar que, próximo ao fechamento, a superfície coesiva é sujeita à condição de restrição de contato, incluindo o atrito. É considerado que o contato e o atrito são fenômenos independentes a serem modelados fora da lei coesiva (ORTIZ; PANDOLFI, 1999).

O modelo de fratura coesiva proposto por Pituba *et al.* (2016) foi baseado na proposta de Cirak *et al.* (2005). As relações propostas são descritas nas Eq. (5.4) e (5.5).

$$t = \sigma_c e^{-\delta/\delta_c} \quad \text{se } \delta = \delta_{\max} \text{ e } \dot{\delta} \geq 0 \quad (5.4)$$

$$t = \frac{t_{\max}}{\delta_{\max}} \delta \quad \text{se } \delta < \delta_{\max} \text{ e } \dot{\delta} < 0 \quad (5.5)$$

onde: e é o exponencial ($e \cong 2,71828$); σ_c é a máxima tensão de tração normal coesiva; $\dot{\delta}$ é a velocidade de abertura da fratura; δ_c é a abertura crítica.

Antes do aparecimento das fraturas, uma rigidez entre as bordas da possível fratura presente entre as células triangulares é chamada de fator de penalidade (λ_p). Essa

abordagem foi utilizada por Paulino *et al.* (2008) e é chamada de elementos coesivos intrínsecos. É importante ressaltar que uma das alternativas é a inserção de fraturas a medida que o processo se propague utilizando teorias de malhas adaptativas, porém neste trabalho, se conhece onde possivelmente as fraturas irão surgir, portanto não sendo o foco utilizar ou desenvolver métodos adaptativos de geração de malhas.

O fator de penalidade citado acima é um parâmetro de valor escalar. Na prática, altos valores são adotados para o fator de penalidade a fim de se obter uma aproximação precisa. Tal procedimento garante que a possível fratura permaneça fechada até se atingir o critério de separação e, ao mesmo tempo, garante a admissibilidade física de todo o processo.

De modo geral, essa estratégia pretende criar rigidez nos nós dos pares com contato de elementos finitos coesivos, a fim de não permitir a penetração das superfícies de fissura (CIRAK *et al.* 2005). Por outro lado, em regime de tração, o fator de penalidade efetivamente substitui a porção rígida inicial da lei coesiva por uma resposta linear da forma como mostrado na Eq. (5.6). Para detectar o fenômeno de contato coesivo, é adotado o conceito das diferenças entre os pontos de Gauss do elemento finito de contato e fratura coesiva.

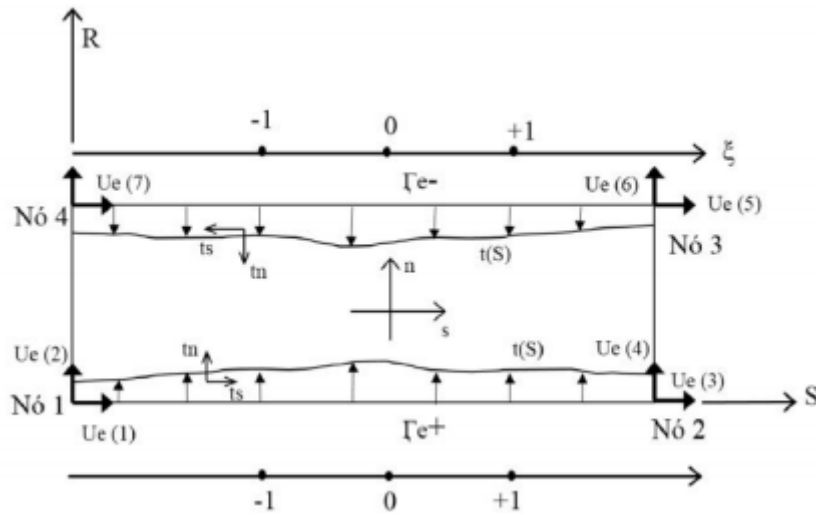
$$t = \lambda_p \delta \quad \text{se } \lambda_p \delta < \sigma_c \quad (5.6)$$

Supondo que a fratura surge e propaga apenas na fronteira do elemento finito de contato e fratura coesiva e que as bordas de uma fissura, por exemplo, de um lado direito e do seu lado oposto, interajam através da tração coesiva, esse fenômeno envolve uma transição da continuidade para a descontinuidade discreta usando o modelo de fratura coesiva. Esse tipo de análise já foi abordada por Paulino *et al.* (2008), podendo ser simulada por funções de enriquecimento ou pelas técnicas de inserção de fratura entre elementos. Para este trabalho utilizou-se a técnica onde o elemento finito de contato e fratura coesiva é inserido entre as células triangulares presentes na matriz e nas inclusões. Apesar de simples, esse tipo de modelagem apresenta respostas precisas evitando a necessidade de uma adaptação na inserção do elemento coesivo.

Os tipos de elementos considerados nesse trabalho são compostos por duas superfícies que são coincidentes na configuração indeformada do EVR, conforme mostrado na Fig. (5.2). O elemento finito de contato e fratura coesiva é definido como um elemento de quatro nós sendo a sua geometria compatível com dois elementos

triangulares bidimensionais (vizinhos) usados para modelar as fases da matriz e das inclusões.

FIGURA 5.2 – Modelo de Elemento Finito de Contato e Fratura Coesiva.



Fonte: Pituba *et al.* (2016).

No sistema local do elemento finito, o eixo s é a direção de cisalhamento e o eixo n a direção normal, mostrados na Fig. (5.2). Os deslocamentos nodais e forças internas são dados nas Eq. (5.7) e (5.8).

$$\{\mathbf{u}_e\} = \begin{Bmatrix} u_e(1) \\ \vdots \\ u_e(4) \\ u_e(5) \\ \vdots \\ u_e(8) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_e^+ \\ u_e^- \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\{\mathbf{F}_e^{\text{int}}\} = \begin{Bmatrix} F_e^{\text{int}}(1) \\ \vdots \\ F_e^{\text{int}}(4) \\ F_e^{\text{int}}(5) \\ \vdots \\ F_e^{\text{int}}(8) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_e^{\text{int}+} \\ F_e^{\text{int}-} \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

onde: $\{u_e^+\}$ é o vetor de deslocamentos nodais relacionados ao lado positivo Γ_e^+ ; $\{F_e^{\text{int}+}\}$ é o vetor de forças internas relacionadas com o lado positivo Γ_e^+ ; $\{u_e^-\}$ é o vetor de

deslocamentos nodais relacionados ao lado negativo Γ_e^- ; $\{F_e^{int-}\}$ é o vetor de forças internas relacionadas com o lado negativo Γ_e^- .

A fim de calcular a função de abertura em cada ponto de Gauss, a Eq. (5.9) é utilizada.

$$\delta_e(\xi_i) = [N_e^-](\xi_i(s))\{u_e^-\} - [N_e^+](\xi_i(s))\{u_e^+\} = u^-(\xi_i) - u^+(\xi_i) \quad (5.9)$$

onde: $u^+(\xi_i)$ é deslocamento relacionado ao ponto de Gauss na superfície positiva; $[N_e^+](\xi_i(s))$ é a função de forma relacionada ao ponto de Gauss na superfície positiva; $u^-(\xi_i)$ é deslocamento relacionado ao ponto de Gauss na superfície negativa; $[N_e^-](\xi_i(s))$ é a função de forma relacionada ao ponto de Gauss na superfície negativa.

Portanto, a matriz N_e tem a contribuição da função de forma de ambos os lados, representa na Eq. (5.10).

$$[N_e] = \begin{bmatrix} [N_e^-] & [N_e^+] \\ N_1(\xi_i) & 0 & N_2(\xi_i) & 0 & N_3(\xi_i) & 0 & N_4(\xi_i) & 0 \\ 0 & N_1(\xi_i) & 0 & N_2(\xi_i) & 0 & N_3(\xi_i) & 0 & N_4(\xi_i) \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Considerando o princípio do trabalho virtual ao longo da fissura no lado positivo Γ_e^+ , por exemplo, pode-se obter a Eq. (5.11).

$$\delta w_e^{int+} = \int_{\Gamma_e^+} \{t\}(s)\{\eta\}(s)d\Gamma_e = \left[\int_{\Gamma_e^+} [N_e^{+T}](s)\{t\}(s)d\Gamma_e \right] \begin{Bmatrix} \eta_1^R \\ \eta_1^S \\ \eta_2^R \\ \eta_2^S \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

No entanto, é possível obter o vetor de forças internas no elemento finito de contato e fratura coesiva conforme mostrado na Eq. (5.12).

$$[F_e^{int+}] = \frac{l_e}{2} \int_{-1}^{+1} [N_e^{+T}](\xi)t(S(\xi))d\xi \quad (5.12)$$

onde: l_e é o comprimento do elemento finito; $t(S(\xi))$ é o vetor de tensão coesiva em cada ponto de Gauss composto pelas componentes de cisalhamento e normal, conforme a Eq. (5.13).

$$\{t\}(S) = \begin{Bmatrix} t_s(S) \\ t_n(S) \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

É importante notar que cada ponto de Gauss contribui para a evolução das forças internas através do vetor de tensão computada ou pela lei coesiva (se a fissura está abrindo no ponto de Gauss) ou pela lei de contato (se a fissura está fechando no ponto de Gauss). Portanto, as superfícies da fissura não são sempre paralelas.

Para as fissuras abertas, no caso de carregamento, o vetor de tensão tem suas componentes são expressas pelas Eq. (5.14) e (5.15).

$$\{t_s\}(\xi_i) = \frac{\sigma_c}{\delta} e^{\frac{\delta(\xi_i)}{\delta_c}} \beta^2 \delta_s(\xi_i) \quad (5.14)$$

$$\{t_n\}(\xi_i) = \frac{\sigma_c}{\delta} e^{\frac{\delta(\xi_i)}{\delta_c}} \beta^2 \delta_n(\xi_i) \quad (5.15)$$

Para as fissuras abertas no caso de descarregamento, nos pontos de Gauss de interesse, suas componentes são expressas pelas Eq. (5.16) e (5.17).

$$\{t_s\}(\xi_i) = \frac{t_{\max}(\xi_i)}{\delta_{\max}(\xi_i)} \beta^2 \delta_s(\xi_i) \quad (5.16)$$

$$\{t_n\}(\xi_i) = \frac{t_{\max}(\xi_i)}{\delta_{\max}(\xi_i)} \delta_n(\xi_i) \quad (5.17)$$

As variáveis escalares $t_{\max}(\xi_i)$ e $\delta_{\max}(\xi_i)$ denotam os últimos valores convergidos do incremento anterior. Entretanto, se as superfícies de fissura fecham no ponto de Gauss de interesse, o vetor de tensão é dado pelas Eq. (5.18) e (5.19).

$$t_s(\xi_i) = \lambda_p l_e \delta_s(\xi_i) \quad (5.18)$$

$$t_n(\xi_i) = \lambda_p l_e \delta_n(\xi_i) \quad (5.19)$$

Finalmente, deve-se notar que a integral referente à Eq. (5.11) é válida ao longo da superfície indeformada do elemento, na sua configuração de referência. Essa integral pode ser numericamente aproximada utilizando um esquema com três pontos de Gauss

definido ao longo do elemento. Em seguida, o vetor das forças internas é dado pelas Eq. (5.20) e (5.21).

$$[F_e^{int+}] \cong \frac{l_e}{2} \sum_{i=1}^{nGauss} [N_e^{+T}](\xi_i) \{t\}(S(\xi_i)) \quad (5.20)$$

$$[F_e^{int}] = \begin{bmatrix} F_e^{int+} \\ F_e^{int-} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

O vetor das forças internas no lado negativo $[F_e^{int-}]$ é obtido visto que o vetor de força coesiva tem valores negativos, a fim de satisfazer o equilíbrio do elemento finito de contato e fratura coesiva, sabendo que $[F_e^{int+}] = [-F_e^{int-}]$.

Para finalizar a formulação do elemento finito, é preciso resolver o problema não-linear de valor de contorno do EVR discretizado através da equação de equilíbrio mostrada na Eq. (5.22).

$$\{R\} + \frac{dF}{du} d\{\tilde{u}\} = 0 \quad (5.22)$$

onde: R é o vetor de forças de equilíbrio; $d\tilde{u}$ é o incremento do campo de flutuação de deslocamento; $\frac{dF}{du}$ é a rigidez, também chamada de K .

Portanto, a rigidez tangente consistente do elemento finito é escrita como mostra a Eq. (5.23).

$$[K_e] = \frac{dF_e^{int}}{du_e} \begin{bmatrix} \frac{dF_e^{int+}}{du_e} \\ \frac{dF_e^{int-}}{du_e} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Nota-se que na Eq. (5.23), a componente relacionada ao lado negativo deve levar em conta a direção do vetor de tensão coesiva para essa superfície. Por outro lado, considerando o lado positivo, é possível observar que:

$$\frac{dF_e^{int+}}{du_e} = \frac{dF_e^{int+}}{d\delta_e} \frac{d\delta_e}{du_e} \quad (5.24)$$

$$\frac{dF_e^{\text{int+}}}{d\delta_e} \cong \frac{l_e}{2} \sum_{i=1}^{\text{nGauss}} N_e^{+T}(\xi_i) \frac{dt}{d\delta_{eS}(\xi_i)} \quad (5.25)$$

$$\frac{d\delta_e}{du_e} = [-N_e^+ \quad N_e^-] \quad (5.26)$$

Para o lado negativo, equações similares podem ser obtidas.

Nota-se também que na Eq. (5.25) a derivada $\frac{dt}{d\delta_{eS}(\xi_i)}$ pode ser calculada para o ponto de Gauss de interesse. No entanto, considerando a fratura aberta, essa derivada é dada para o carregamento (Eq. (5.27)) e para descarregamento (Eq. (5.28)).

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\delta_{eS}(\xi_i)} &= \begin{bmatrix} \frac{d\{t_s\}(\xi_i)}{d\{\delta_s\}} & \frac{d\{t_s\}(\xi_i)}{d\{\delta_n\}} \\ \frac{d\{t_n\}(\xi_i)}{d\{\delta_s\}} & \frac{d\{t_n\}(\xi_i)}{d\{\delta_n\}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \beta^2 \left[1 - \frac{\beta^2 \delta_s^2(\xi_i)}{\delta_s^2(\xi_i)} - \frac{\beta^2 \delta_s^2(\xi_i)}{\delta_c \delta(\xi_i)} \right] & -\frac{\delta_n(\xi_i) \beta^2 \delta_s(\xi_i)}{\delta(\xi_i)} \left[\frac{1}{\delta(\xi_i)} + \frac{1}{\delta_c} \right] \\ -\frac{\delta_n(\xi_i) \beta^2 \delta_s(\xi_i)}{\delta(\xi_i)} \left[\frac{1}{\delta(\xi_i)} + \frac{1}{\delta_c} \right] & 1 - \frac{\delta_n^2(\xi_i)}{\delta_c \delta(\xi_i)} - \frac{\delta_n^2(\xi_i)}{\delta^2(\xi_i)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\frac{dt}{d\delta_{eS}(\xi_i)} = \begin{bmatrix} \frac{d\{t_s\}(\xi_i)}{d\{\delta_s\}} & \frac{d\{t_s\}(\xi_i)}{d\{\delta_n\}} \\ \frac{d\{t_n\}(\xi_i)}{d\{\delta_s\}} & \frac{d\{t_n\}(\xi_i)}{d\{\delta_n\}} \end{bmatrix} = \frac{t_{\max}(\xi_i)}{\delta_{\max}(\xi_i)} \begin{bmatrix} \beta^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Por fim, se a fissura estiver fechada no ponto de Gauss, a matriz $\frac{dt}{d\delta_{eS}(\xi_i)}$ é dada pela Eq. (5.29).

$$\frac{dt}{d\delta_{eS}(\xi_i)} = \lambda_p l_e \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

CAPÍTULO 6

APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Para verificar a viabilidade de emprego da formulação proposta, são realizadas simulações numéricas baseadas no comportamento da microestrutura do concreto. Na formulação multiescala utilizada, o EVR sempre é adotado na forma quadrada, onde o comprimento do lado não interfere nos resultados numéricos, ou seja, os mesmos resultados são obtidos independentemente do comprimento de lado obtido. Os EVRs adotados têm espessura de 1mm, com um volume de inclusões de aproximadamente 40% em relação ao volume total do EVR dispostas na matriz, evidenciando a distinção dos materiais nos EVRs, simulando a estrutura heterogênea do concreto. Tais EVRs são discretizados com elementos de contorno, células triangulares em seu domínio, domínio que por sua vez é a soma dos domínios das sub-regiões presentes no interior do mesmo. Além disso, na interface entre as diferentes fases do EVR existem os elementos de interface e quando deseja-se simular a fratura são inseridos elementos finitos retangulares de fratura e contato nas interfaces.

A matriz foi considerada como meio elastoplástico seguindo o critério de Mohr-Coulomb e os agregados, representados pelas inclusões, são considerados como meios elásticos. Os parâmetros dos modelos constitutivos, assim como as propriedades elásticas das fases do EVR foram definidos a partir de uma análise paramétrica, que foi feita comparando-se os resultados numéricos com aqueles experimentais apresentados em Delalibera (2002). A fim de estabelecer os valores adotados na identificação paramétrica foram consideradas os trabalhos citados no item 1.5.

As bibliografias citadas no item (1.2) foram estudadas com o intuito de conhecer as características do concreto utilizado nas análises experimentais, as estratégias utilizadas por outros autores que simularam numericamente o comportamento do concreto e as conclusões de trabalhos que usam EVR para modelar o comportamento de materiais heterogêneos. Com esse estudo, os EVRs foram idealizados da forma como segue.

- **Quanto à dimensão e forma dos agregados:**

Analisando o item 1.2.2, é possível definir qual será a granulometria utilizada para representar os agregados graúdos, visto que o concreto estudado será modelado como

sendo uma pasta de matriz cimentícia (composta por cimento, areia e água) e agregados graúdos inseridos nessa matriz cimentícia. Dessa forma, serão utilizadas inclusões com diâmetro entre 4,75mm e 19mm, pois apesar dos agregados graúdos possuírem dimensão máxima de 50mm, a utilização de agregados muito grandes compromete a trabalhabilidade do concreto e, além disso, no item 1.2.3, Delalibera (2002) definiu que o agregado graúdo utilizado em seus experimentos possui dimensão máxima de 19mm.

Com relação ao formato das inclusões, que representam os agregados, Kim e Al-Rub (2011) e Quaresma (2016) utilizam, além do formato circular, inclusões de forma pontiagudas foram utilizadas, porém concluiu-se, como mostrado no item 1.2.4 que a forma não interferiu significativamente na resistência do concreto. Além disso, no modelo que utiliza Elementos finitos de fratura na ZTI, houve uma certa instabilidade numérica quando se utilizavam EVRs com inclusões não circulares. Sendo assim, nesta pesquisa serão adotadas apenas inclusões circulares para representar os agregados graúdos.

- **Quanto à dimensão dos EVRs e variação da dimensão dos agregados**

Com relação à dimensão do EVR, será seguido o que foi utilizado em Kim e Al-Rub (2011) e também em Quaresma (2016) (ver item 1.5.4), ou seja, os EVRs terão 100mm x 100mm. Além disso, os EVRs serão definidos com 3 diferentes diâmetros de agregados, também seguindo a estratégia utilizada em Kim e Al-Rub (2011) e Quaresma (2016). Outra justificativa para se adotar apenas 3 diferentes tamanhos de agregados, é que de acordo ao exposto no item (1.5.2), uma granulometria mais contínua produz misturas mais trabalháveis e econômicas. Portanto, entende-se que na prática essa estratégia deve ser seguida.

- **Quanto à fração volumétrica de agregados**

Um dos objetivos desta pesquisa é chegar ao gráfico tensão x deformação apresentado no item 1.2.3, resultado da pesquisa experimental de Delalibera (2002), onde o traço utilizado foi 1:2,37:3,55:a/c=0,65. Para isso, será utilizada a mesma fração volumétrica daquela encontrada no item 1.2.3, que foi de 40% de volume de agregados em relação ao volume total do EVR.

- **Propriedades das fases da microestrutura e dos Elementos de Contato e Fratura**

Observe que os valores finais das propriedades elásticas, assim como dos parâmetros dos modelos constitutivos adotados nas diferentes fases do EVR foram definidos a partir da análise paramétrica detalhada mais adiante no item 6.1, que foi feita comparando-se os resultados numéricos com aqueles experimentais apresentados em Delalibera (2002). Porém para se fazer essa análise paramétrica, necessita-se adotar valores iniciais para essas propriedades e parâmetros, assim como conhecer quais os intervalos que se pode considerar para esses valores. Para isso, considerou-se a parametrização feita em Borges (2015), assim como as referências citadas pelo mesmo, que detalham os limites a serem considerados para esses valores. (ver item 1.2.4.3).

A matriz foi considerada como meio elastoplástico seguindo o critério de Mohr-Coulomb, como considerado nos trabalhos de Pituba e Souza Neto (2015) e Borges (2015), onde são adotadas as seguintes propriedades iniciais: coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$; Módulo de Elasticidade Longitudinal $E = 18$ GPa. Para a lei de encruamento foram adotados dois pontos para a curva de plastificação, que relaciona deformação plástica com tensão de escoamento $(\bar{\epsilon}_p, \bar{\sigma}_y)$, sendo esses iguais a: (0; 11 GPa) e (0,22; 40 GPa). Os ângulos de fricção e dilatação são definidos inicialmente iguais a 0° (ambos).

Na região de interface matriz/agregado, foram inseridos elementos de contato e fratura coesiva. Os parâmetros iniciais referentes aos modelos constitutivos usados nesses elementos são aqueles citados em Borges (2015): escorregamento entre as bordas $\beta_c = 0,707$; máxima tensão de tração normal coesiva $\sigma_c = 1$ MPa; abertura crítica $\delta_c = 0,0568$ mm; e um penalty = 200000.

As inclusões (ou agregados) são consideradas elásticas para as quais adotou-se inicialmente: coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e Módulo de Elasticidade Longitudinal $E = 50$ GPa (de acordo com Mehta e Monteiro (2008) e Borges (2015)).

- **Quantidade e dimensões dos Elementos coesivos de fratura e contato**

Em todos os EVRs estudados, será considerado o descolamento de fase, ou seja, existirão elementos finitos coesivos de fratura na Zona de Transição Interfacial entre matriz e agregados. Porém, como já observado no trabalho de Quaresma (2016), considerar um número grande de agregados e colocar elementos de fratura ao longo de todas as interfaces de agregados, geram grandes instabilidades numéricas, que

impossibilitam a obtenção de resultados numéricos no nível de deformação apresentado nos experimentos. Assim, considerando o exposto no item 1.2.2, sabe-se que as partículas grandes tendem a produzir uma quantidade maior de microfissuras. Portanto, nesse trabalho será feito um estudo para identificar se realmente é necessário definir elementos de fratura ao longo das interfaces de todos os agregados, ou se a definição desses elementos apenas nos agregados maiores ou nos agregados médios e grandes já geram resultados significativos. Além disso, será feito também um estudo para identificar se realmente é necessário definir um número tão grande de agregados (em torno de 80 partículas) na microestrutura do concreto, como feito em Kim e Al Rub (2011) e Quaresma (2016), ou se um número reduzido de agregados já gera resultados significativos. Observa-se que quanto maior o número de agregados na microestrutura, maior a probabilidade de se ter problemas numéricos.

Com isso, inicialmente, serão modelados EVRs que possuem fratura apenas nos agregados de maior dimensão. Em um segundo momento, será considerada a fratura nos agregados médios e grandes, e finalmente serão adotados esses elementos nos três diferentes tamanhos de agregados, sendo possível analisar como isso influencia no comportamento geral do concreto. Juntamente com esse estudo, serão adotadas diferentes quantidades totais de agregados: entre 10 e 50, a fim de evidenciar a influência dessa quantidade na resposta numérica. Destaca-se que nesse estudo, a fração volumétrica de 40% será mantida e, portanto, as três diferentes dimensões dos agregados podem ser mudadas, à medida que a quantidade total de agregados for variada.

- **Porosidade no concreto**

Com as características definidas acima e a aplicação delas na criação dos EVRs, os mesmos serão estudados, a fim de se chegar a um resultado que represente bem as análises experimentais de Delalibera (2002). Então, definido o EVR que produza os melhores resultados numéricos, será feita a inserção de vazios no mesmo, para representar a porosidade existente no concreto.

Conforme item 1.2.2 a porosidade do concreto estudado é em torno de 30%. Porém, parte dessa porosidade já será considerada nesse trabalho através da simulação da descolagem de fases (entre matriz e agregado). Outra parte dessa porosidade é referente a poros que existem na pasta de cimento. É interessante fazer a introdução da porosidade no domínio do EVR de diferentes formas: i) respeitando a dimensão real dos poros igual

a 3mm de acordo com Mehta e Monteiro (2014), ii) distribuindo fração de vazios em um número menor de poros, a fim de verificar se a concentração dos vazios altera significativamente o comportamento do EVR, iii) considerar diferentes frações volumétricas de vazios.

Assim, nos exemplos numéricos foram adicionados poros no interior da matriz, considerando fração volumétrica de 3%, 4% e 5%. A introdução da porosidade no domínio do EVR foi feita com poros de 6 mm ao invés de 3mm como recomendado por Mehta e Monteiro (2014), por facilidade de gerar a malha. Mas em trabalhos futuros, considerando fração volumétrica de 2% e 3%, seria interessante definir poros de 3mm.

6.1. ANÁLISE PARAMÉTRICA DO CONCRETO UTILIZADO EM DELALIBERA (2002)

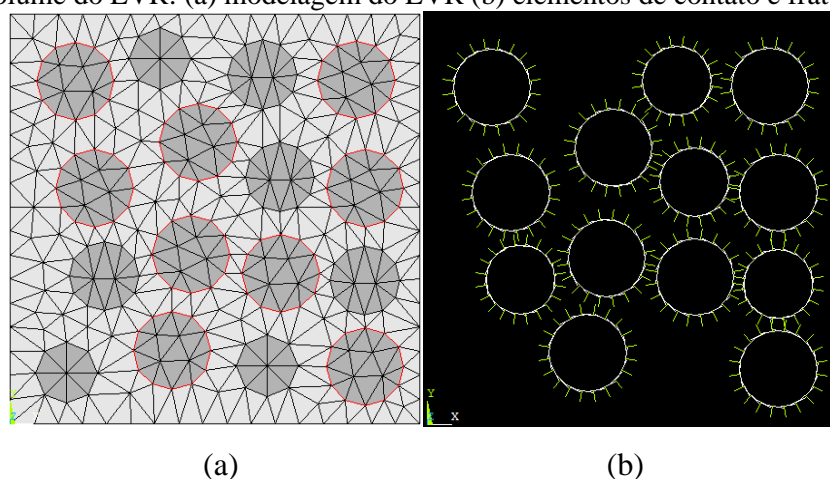
Neste tópico é realizada a análise paramétrica, a fim de se obter uma resposta numérica mais próxima possível da curva experimental mostrada em Delalibera (2002). Nesse estudo são definidos os valores dos módulos de elasticidade da argamassa e dos agregados, assim como os valores dos parâmetros a serem adotados no modelo de Mohr-Coulomb. Mostra-se ainda como cada um desses parâmetros influencia nas respostas homogeneizadas do material.

Para isso, o EVR utilizado, cuja malha do MEF (Método dos Elementos Finitos) foi criada através do software ANSYS®, possui 16 inclusões que representa aproximadamente 40% de volume do EVR. Note que para se fazer a análise do MEC, o programa lê a malha do MEF e a transforma em uma malha do MEC, ou seja, cria os nós duplos nos cantos do EVR, gera os elementos de contorno e os elementos do MEC sobre as interfaces. No entanto, as células do MEC são coincidentes com os elementos finitos triangulares gerados pelo ANSYS.

A fratura foi inserida nas zonas de transição dos agregados médios e grandes, pois como visto no Capítulo 1, são os agregados maiores que tendem produzir uma quantidade maior de microfissuras na zona de transição na interface entre agregado e gráudo e pasta de cimento. É importante ressaltar que existem três variações de agregados: pequenos, médios e grandes. A Fig. (6.1a) mostra o EVR utilizado, denominado EVR16-GM, assim como sua malha, e a Fig. (6.1b) mostra quais as inclusões onde foram inseridos elementos de contato e fratura nas interfaces matriz/agregado. Esse EVR possui um total de 490 nós, 598 células triangulares, 72 nós de contorno (sendo que

no canto são adotados nós duplos), 336 nós de interface (dos quais 312 são nós duplos para representar o descolamento de fases) e 156 elementos finitos retangulares de fratura e contato. Como cada elemento do MEC tem dois nós, na malha são definidos 68 elementos de contorno e 180 elementos do MEC sobre as interfaces. Observe que os nós dos elementos finitos retangulares são coincidentes com os nós dos elementos do MEC sobre a interface.

FIGURA 6.1 – EVR com 16 inclusões pequenas, médias e grandes correspondentes a 40% de volume do EVR: (a) modelagem do EVR (b) elementos de contato e fratura.



Fonte: Autoria Própria (2021).

Além disso, são considerados valores iniciais para os parâmetros dos modelos constitutivos e para as propriedades elásticas das fases, sendo o EVR com esses valores definido como teste T1. Na Tab. (6.1) é possível observar os parâmetros referentes à matriz e inclusões, onde E é o módulo de elasticidade da fase, e na Tab. (6.2) é possível observar os parâmetros referentes à zona de fratura que é representada pelos elementos finitos de fratura e contato. Na sequência, alguns desses valores serão modificados, a fim de se aproximar a resposta numérica daquela experimental.

TABELA 6.1 – Parâmetros iniciais da matriz e inclusões para a análise paramétrica do EVR.

Propriedades					
Fase	Poisson (ν)	E (GPa)	Modelo Constitutivo	Curva de plasticidade ($\bar{\epsilon}_p, \sigma_y$ (MPa))	Ângulo de atrito e dilatância (ϕ)
Matriz	0,2	18	Mohr Coulomb	(0;11) (0,22;40)	0° e 0°
Inclusão	0,3	50	Elástico	---	----

Fonte: Autoria própria (2021).

TABELA 6.2 – Parâmetros iniciais dos elementos finitos de fratura e contato para a análise paramétrica do EVR.

Fase	Propriedades			
	β	σ_c (MPa)	δ_c (mm)	Penalty
ZTI	0,707	1	0,0568	2,00E+05

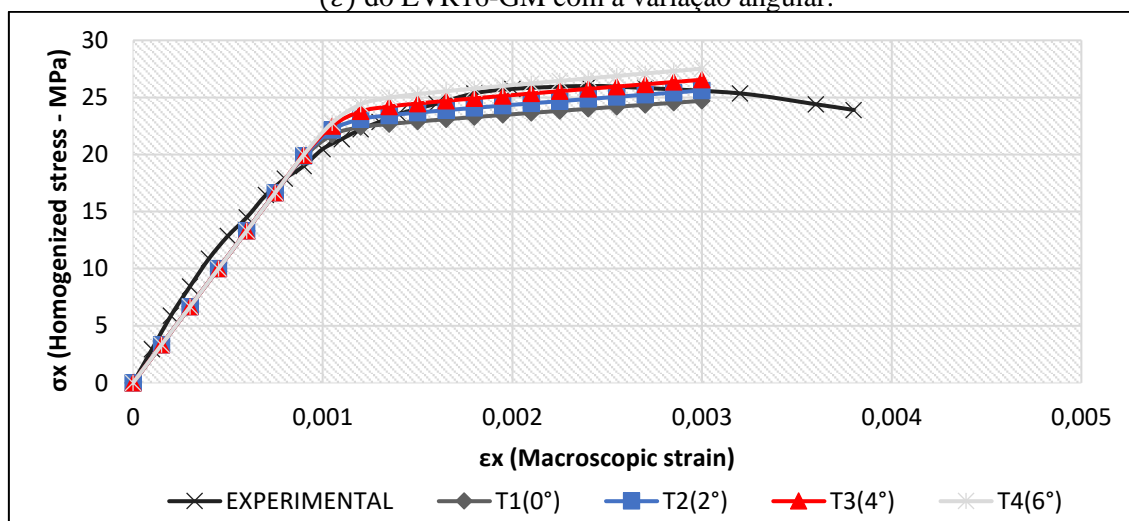
Fonte: Autoria própria (2021).

Será adotado em todas as análises numéricas o modelo com condição de contorno de flutuações periódicas e imposta a seguinte deformação total ao EVR: $\varepsilon_x = -0,003$, $\varepsilon_y = 0,0006$ e $\gamma_{xy} = 0$, a qual é dividida em incrementos de deformação, a fim de gerar a resposta homogeneizada do EVR.

6.1.1. Variação dos ângulos de atrito e dilatância do critério de Mohr-Coulomb

Neste item foi verificada a influência dos ângulos de atrito e dilatância na resposta do EVR, onde além do valor base de 0° , considerou-se: 2° , 4° e 6° , que são numerados como testes T1, T2, T3 e T4, respectivamente. Todos os outros parâmetros são os mesmos definidos na Tab. (6.1) e (6.2). Os resultados obtidos são apresentados na Fig. (6.2).

FIGURA 6.2 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ) x Deformação na direção x (ε) do EVR16-GM com a variação angular.



Fonte: Autoria Própria (2021).

Na Fig. (6.2) é possível notar que a variação dos ângulos de atrito e de dilatância, que possuem o mesmo valor, têm influência na resposta do EVR quando o escoamento

plástico é iniciado, o que é coerente pois são parâmetros do critério de plasticidade. Ressalta-se que quanto menor o ângulo menos resistente se mostrou o EVR, o que já era esperado, visto que o aumento dos ângulos gera uma maior resistência ao cisalhamento.

6.1.2. Variação do Módulo de Elasticidade da Matriz e Inclusões

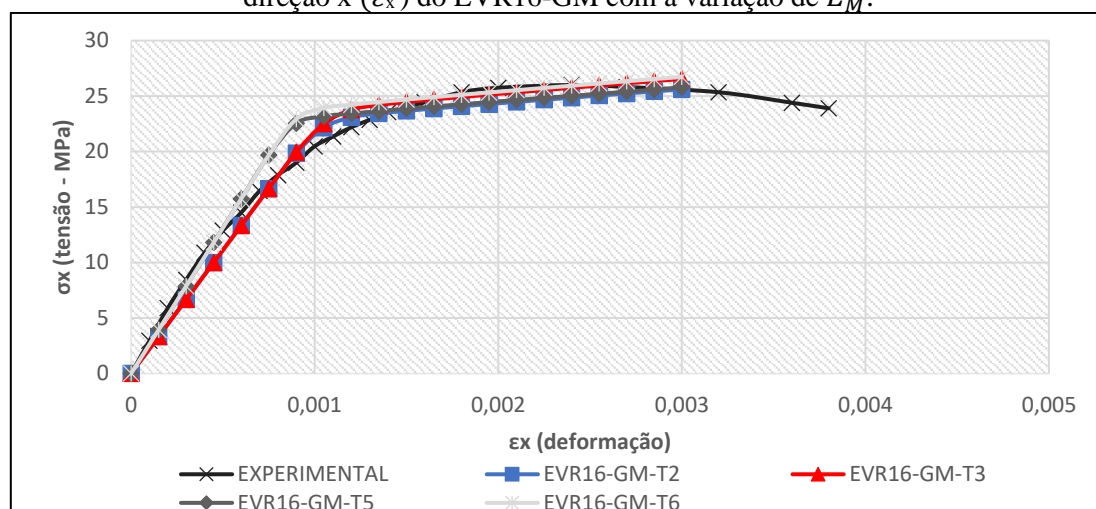
Neste exemplo foi verificada a influência dos módulos de elasticidade tanto da matriz quanto da inclusão. Mas primeiro será mostrada a análise variando apenas o Módulo de Elasticidade da matriz, ou seja, E_M . A variação paramétrica é mostrada na Tab. (6.3) onde são comparados os testes T2 e T5 que possuem ângulo de atrito e dilatação igual a 2° , assim como os testes T3 e T6 que possuem ângulos iguais a 4° são comparados. Os resultados obtidos com os testes abaixo são apresentados na Fig. (6.3).

TABELA 6.3 – Testes para análise da influência de E_M utilizando o EVR16-GM.

Teste	Propriedades				Ângulo de atrito e dilatação (ϕ)	Curva de plasticidade ($\bar{\epsilon}_p, \sigma_y$ (MPa))
	E_M (GPa)	E_I (GPa)	ν_M	ν_I		
T2	18				2° e 2°	
T3	18	50	0,2	0,3	4° e 4°	(0;11) (0,22;40)
T5	23				2° e 2°	
T6	23				4° e 4°	

Fonte: Autoria própria (2021).

FIGURA 6.3 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ϵ_x) do EVR16-GM com a variação de E_M .



Fonte: Autoria Própria (2021).

Com a análise da variação do Módulo de Elasticidade da matriz mostrada na Fig. (6.4), é possível observar uma maior rigidez nos EVRs com o aumento no valor do Módulo de Elasticidade da matriz, o que era esperado, mostrando que o mesmo tem influência significativa no comportamento mecânico do EVR.

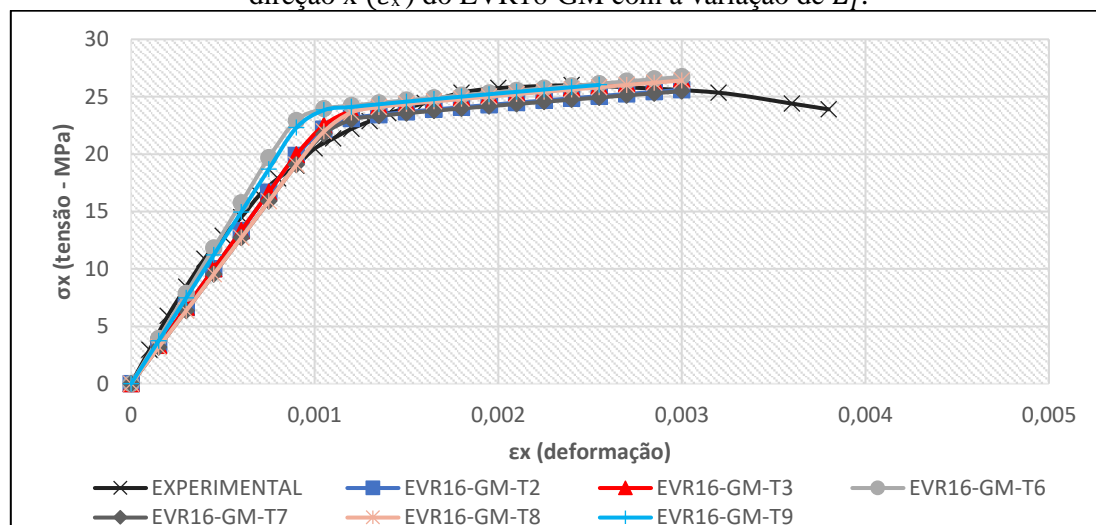
Para verificar a influência do Módulo de Elasticidade das inclusões (E_I) foram considerados os testes da Tab. (6.4). Considerando que as curvas comparadas são aqueles onde apenas o E_I é variado, os pares de testes comparados serão T2 com T7, T3 com T8 e por fim, compara-se T6 com T9. As curvas resultantes da são representadas na Fig. (6.4).

TABELA 6.4 – Testes para análise da influência de E_I utilizando o EVR16-GM.

Teste	Propriedades					Curva de plasticidade ($\bar{\epsilon}_p, \sigma_y$ (MPa))
	E_M (GPa)	E_I (GPa)	ν_M	ν_I	Ângulo de atrito e dilatância (ϕ)	
T2	18	50			2° e 2°	
T3	18	50			4° e 4°	
T6	23	50			4° e 4°	(0;11) (0,22;40)
T7	18	40	0,2	0,3	2° e 2°	
T8	18	40			4° e 4°	
T9	23	40			4° e 4°	

Fonte: Autoria própria (2021).

FIGURA 6.4 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ε_x) do EVR16-GM com a variação de E_I .



Fonte: Autoria Própria (2021).

Com a análise da variação do Módulo de Elasticidade das inclusões mostrada na Fig. (6.4), é possível observar que as curvas não apresentam mudanças significativas, sendo que as curvas de T2 e T7 estão sobrepostas, e as curvas de T3 e T8, assim como e T6 e T9 estão muito próximas. Portanto, conclui-se que a variação do módulo de elasticidade da inclusão não gera mudança significativa na resposta mecânica do EVR. Além disso, não serão adotados valores menores para o módulo E_I , pois se aproximaria do valor E_M adotado para a matriz, o que compromete a representação fiel do concreto, onde os agregados são consideravelmente mais rígidos que a argamassa.

Desta forma, com o intuito de conseguir maior aproximação no trecho plástico, no próximo tópico serão modificados os pares de plasticidade. E as novas curvas base serão aquelas correspondentes aos testes T6 e T9, devido a maior aproximação em relação à parte elástica da curva experimental.

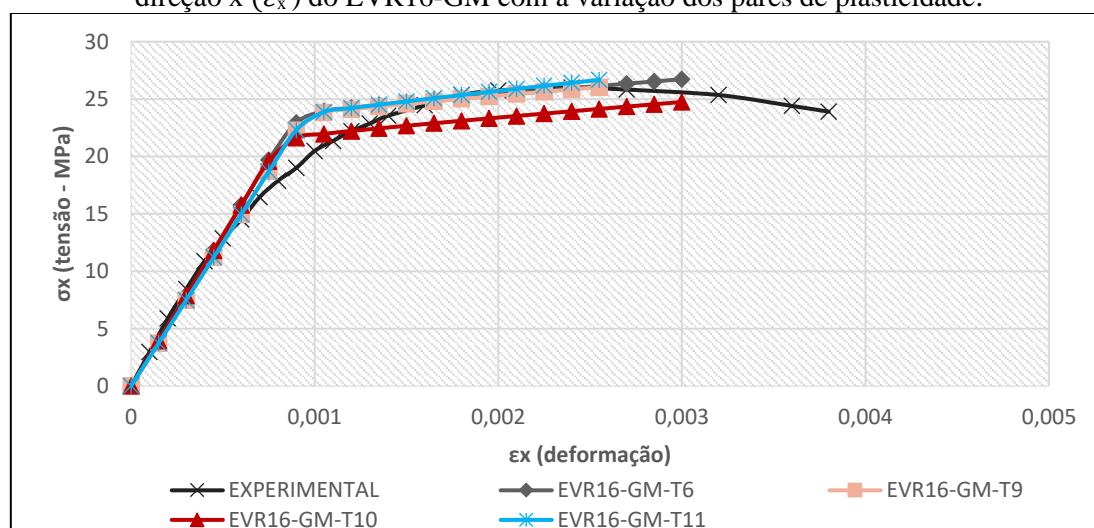
6.1.3. Variação da curva de plasticidade do critério de Mohr-Coulomb

Neste exemplo foi verificada a influência dos pares da curva de plasticidade ($\bar{\varepsilon}_P, \sigma_y$), ou seja, variou-se os pontos curva que relaciona deformação plástica efetiva com tensão de escoamento, quando aplica o critério de Mohr-coulomb. A variação paramétrica é mostrada na Tab. (6.5) e os resultados obtidos com os testes abaixo são apresentados na Fig. (6.5).

TABELA 6.5 – Variação dos pares de plasticidade utilizando o EVR16-GM.

Teste	Propriedades					Curva de plasticidade ($\bar{\epsilon}_p, \sigma_y$ (MPa))
	E_M (GPa)	E_I (GPa)	ν_M	ν_I	Ângulo de atrito e dilatância (ϕ)	
T6		50				(0;11) (0,22;40)
T9	23	40	0,2	0,3	4° e 4°	(0;11) (0,22;40)
T10		50				(0;10) (0,22;40)
T11		40				(0;11) (0,22;50)

Fonte: Autoria própria (2021).

FIGURA 6.5 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ϵ_x) do EVR16-GM com a variação dos pares de plasticidade.

Fonte: Autoria Própria (2021).

Serão comparados os testes: T6 com T10 e de T9 com T11. É possível observar que em T10 diminuiu-se a tensão de escoamento do primeiro par, ou seja, diminuiu a tensão de escoamento inicial, e no teste T11 aumentou-se a tensão de escoamento do segundo par, ou seja, aumentou o encruamento. Com isso, é possível observar na Fig. (6.5) que o teste T10, representado pela curva “EVR16-GM-T10” ficou com o trecho plástico bem abaixo dos demais e da curva experimental, o que é coerente, pois a tensão de escoamento inicial foi diminuída. Já o teste T11 representado pela curva “EVR16-GM-T11”, apresentou resultados muito semelhantes à curva do teste T9, o que indica que a

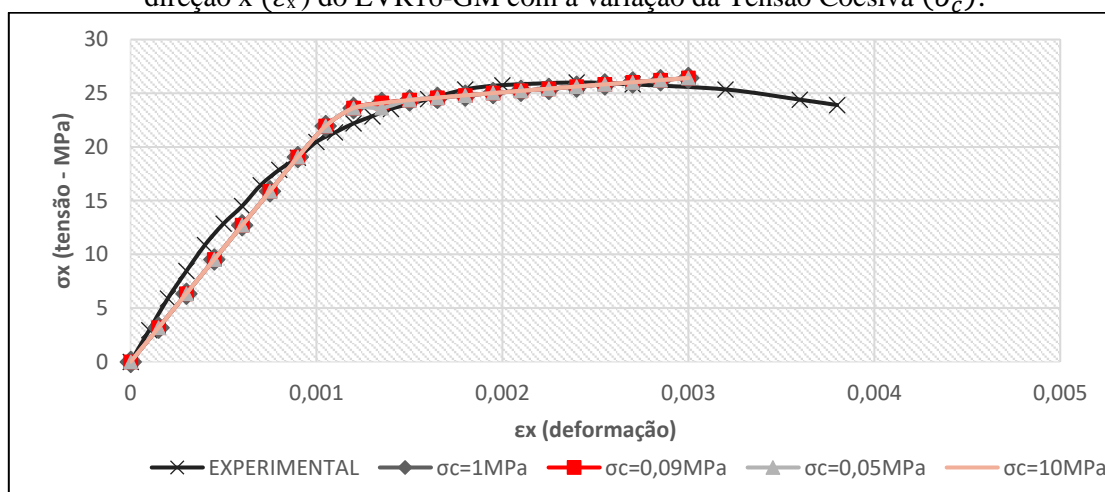
mudança adotada no valor do encruamento não afetou significativamente a resposta do EVR.

Como a curva T9 apresentou boa proximidade à curva experimental, essa será adotada na sequencia como novos parâmetros base. Observe que o teste T9 compara bem à curva experimental na fase elástica e também quando o processo de plasticidade e fraturamento está mais acentuado, mas se afasta um pouco da curva experimental para valores de deformação compreendido no intervalo de 0,0007 e 0,0013. Porém nas próximas análises poderá conseguir uma maior aproximação também nesse trecho, já que serão considerados outras distribuições de agregados, mas mantendo o mesmo volume de agregados (40%). Serão analisados também os casos que se consideram descolamento de fases em todas as interfaces de agregados, ou apenas em um número limitado de agregados.

6.1.4. Variação da Tensão Coesiva relativa aos Modelos de contato e fratura coesiva

Por fim, optou-se por verificar a influência da Tensão Coesiva (σ_c) que integra os parâmetros dos modelos de contato e fratura coesiva, considerados nos elementos finitos retangulares, visto que em Borges (2015) são utilizados outros valores diferentes de 1 Mpa. Utilizando-se o teste T9 (ver tabela 6.5), que apresentou uma maior aproximação com a curva experimental, essa variação paramétrica se deu com $\sigma_c = 10\text{MPa}$, $\sigma_c = 1\text{MPa}$, $\sigma_c = 0,09\text{MPa}$, $\sigma_c = 0,05\text{MPa}$, em que as curvas resultantes da resposta homogeneizada são mostradas na Fig. (6.6).

FIGURA 6.6 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ϵ_x) do EVR16-GM com a variação da Tensão Coesiva (σ_c).



Fonte: Aatoria Própria (2021).

A variação da Tensão Coesiva não trouxe mudanças significativas nas curvas, o que é coerente, pois como tem-se um estado predominante de compressão, não se espera mudanças significativas na curva com a alteração dessa tensão. Porém no caso de estados predominantes de tração essa tensão seria muito importante, pois a mesma está ligada diretamente com o momento da abertura de fratura. Desta forma, será mantido o teste T9 nas próximas análises (ver parâmetros na Tab. (6.5)), onde $\sigma_c = 1\text{MPa}$.

6.2. ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DA DIMENSÃO E QUANTIDADE DOS AGREGADOS NA MATRIZ CIMENTÍCIA

Nesta seção é avaliado o efeito da distribuição dos agregados. Para isso, foram criados 4 tipos de EVR com diferentes quantidades de agregados, porém mantendo a fração volumétrica constante de aproximadamente 40%. Além disso, em cada EVR foram utilizados agregados com 3 variações de dimensão, denominados agregados grandes, médios e pequenos. Assim, avaliou-se também como a dimensão dos agregados influencia na resposta homogeneizada do EVR. A Tab. (6.6) traz a definição dos EVRs quanto a quantidade total de agregados, dimensão e quantidade de cada dimensão.

TABELA 6.6 – Definição dos EVRs quanto a quantidade e dimensão dos agregados.

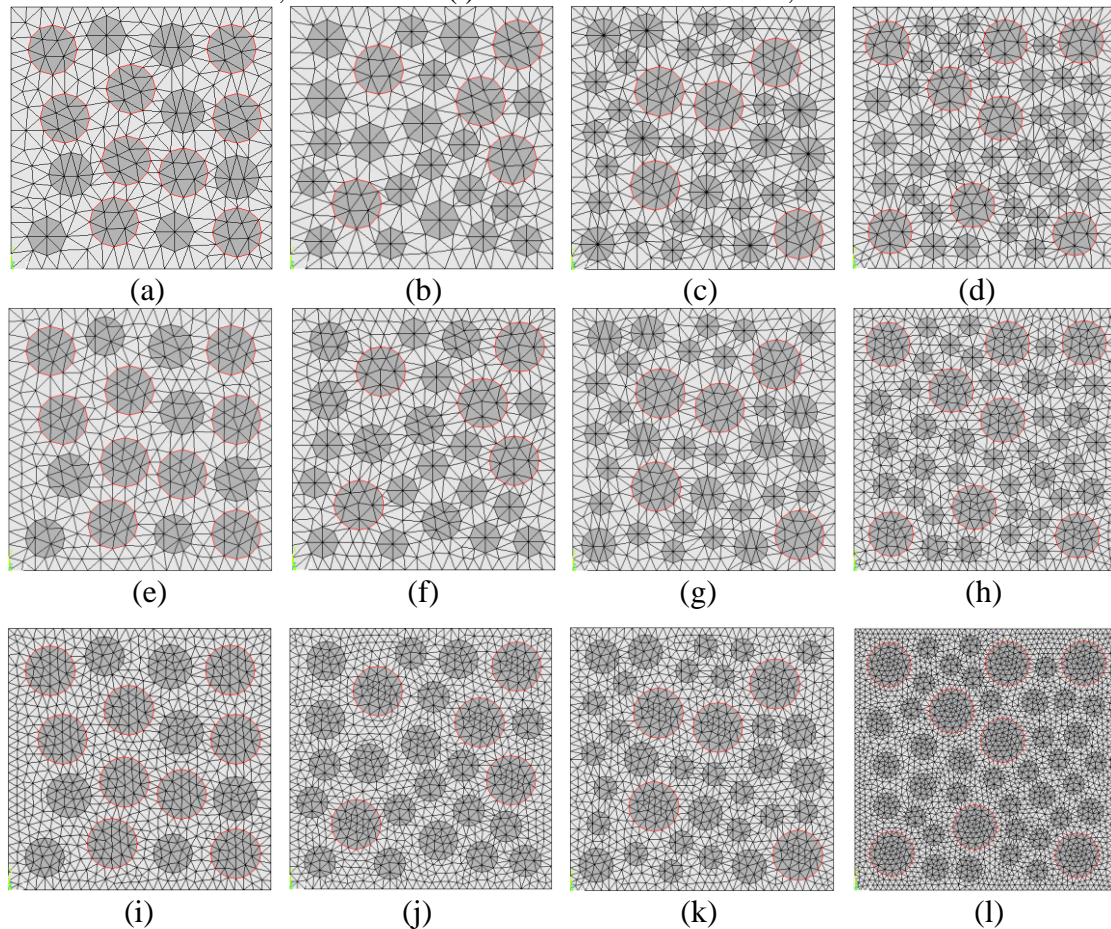
EVR	Nº total de agregados	Diâmetro do agregado / Quantidade de cada agregado			Fração Volumétrica
		19 mm	17 mm	15 mm	
EVR-1	16	9	4	3	39,90%
EVR-2	25	5	6	14	40,61%
EVR-3	36	5	9	22	40,12%
EVR-4	45	8	12	25	40,15%

Fonte: Autoria própria (2021).

Para a análise feita nesta seção foram definidos, para os 4 tipos de EVR, elementos de fratura coesiva e contato sobre as interfaces apenas das inclusões grandes, que representam os agregados. Optou-se por considerar inicialmente esses elementos apenas ao redor das inclusões grandes, pois de acordo com Mehta e Monteiro (2014), o processo de fraturamento se dá principalmente ao redor dos agregados maiores. Na Fig. (6.7) é possível visualizar a variação dos EVRs citados na Tab. (6.6), sendo que são apresentados

três refinamentos para cada um deles com a finalidade de constatar a convergência das respostas homogeneizadas.

FIGURA 6.7 – EVRs com variação da quantidade e dimensão dos agregados que representam 40% de volume: (a) EVR 1a com 16 inclusões, 598 células (b) EVR 2a com 25 inclusões, 634 células (c) EVR 3a com 36 inclusões, 788 células (d) EVR 4a com 45 inclusões, 1030 células (e) EVR 1b com 16 inclusões, 810 células (f) EVR 2b com 25 inclusões, 882 células (g) EVR 3b com 36 inclusões, 1094 células (h) EVR 4b com 45 inclusões, 1734 células (i) EVR 1c com 16 inclusões, 2174 células (j) EVR 2c com 25 inclusões, 2214 células (k) EVR 3c com 36 inclusões, 2282 células (l) EVR 4c com 45 inclusões, 2274 células.



Fonte: Autoria Própria (2021).

A discretização dos EVRs mostrados na Fig. (6.7) é dada na Tab. (6.7). Os parâmetros utilizados para a análise dos mesmos são aqueles definidos na seção anterior, ou seja, os parâmetros do teste T9.

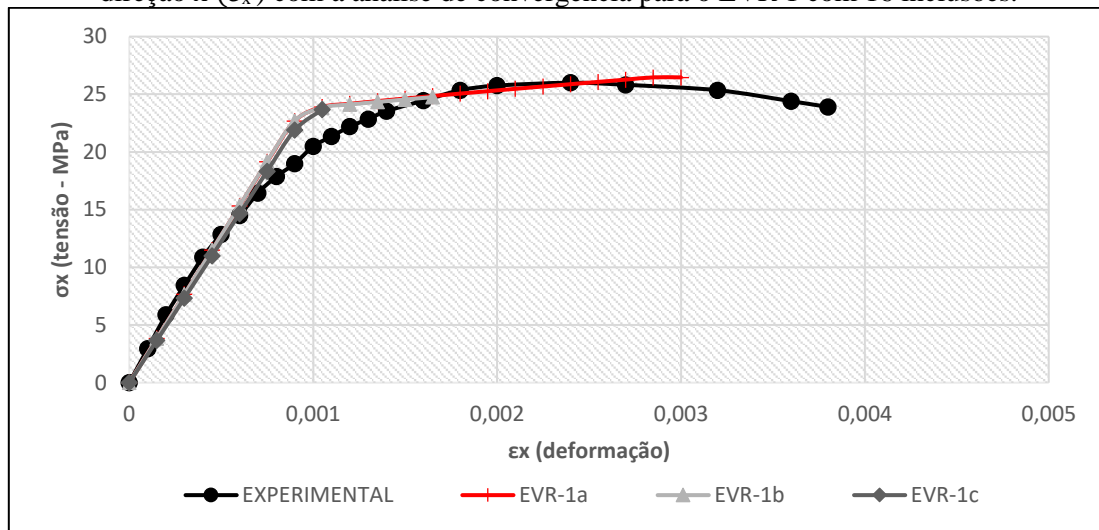
TABELA 6.7 – Discretização dos EVRs estudados nesta seção.

EVR	Discretização					
	Nº de Nós	Nº de Cél. Triangulares	Nº de Nós no Contorno = Nº de elementos de contorno	Nº de Nós de Interface	Nº de Elementos de Interface do MEC	Nº de Elementos de contato e Fratura
EVR-1a	442	598	68	288	180	108
EVR-2a	412	634	68	280	220	60
EVR-3a	592	982	80	404	344	60
EVR-4a	787	1224	92	552	424	128
EVR-1b	554	810	80	300	192	108
EVR-2b	564	882	84	344	264	80
EVR-3b	672	1094	88	444	364	80
EVR-4b	1056	1734	120	600	472	128
EVR-1c	1336	2174	136	488	308	180
EVR-2c	1276	2214	136	520	420	100
EVR-3c	1310	2282	136	608	508	100
EVR-4c	1366	2274	136	764	604	160

Fonte: Aatoria própria (2021).

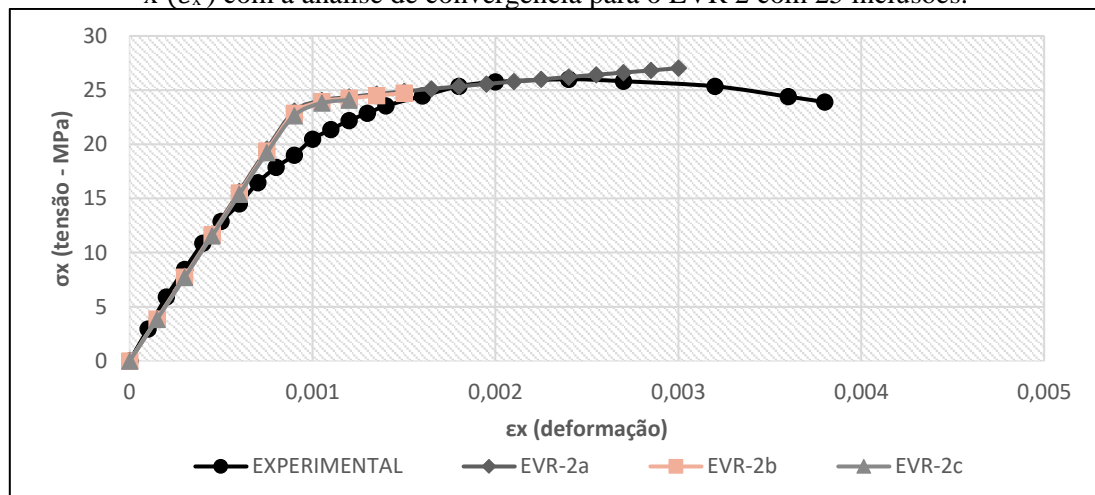
É analisada a convergência para as diferentes malhas de cada EVR, que estão ilustradas nas Figs. (6.8) (6.9) (6.10) e (6.11), onde é possível observar as curvas praticamente sobrepostas, ou seja, a convergência é constatada. Além disso, ressalta-se que os EVRs mais refinados (EVRs 1bc, 2bc, 3bc e 4bc) não retornaram todos os valores de tensão homogeneizada, ou seja, o EVR não conseguiu atingir equilíbrio nos últimos incrementos de deformação. Isso é explicado pelo número de elementos de contato e fratura coesiva, pois estes EVRs possuem um número bem maior desses elementos, se comparados àqueles EVRs menos refinados (EVR 1a, 2a, 3a, 4a). Quanto maior o número desses elementos, maior é o fraturamento ao longo das interfaces, o que diminui a resistência do EVR. Desta forma, é perfeitamente possível utilizar os EVRs com menor refinamento, pois traz uma resposta satisfatória e gera um custo computacional expressivamente menor.

FIGURA 6.8 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ϵ_x) com a análise de convergência para o EVR 1 com 16 inclusões.



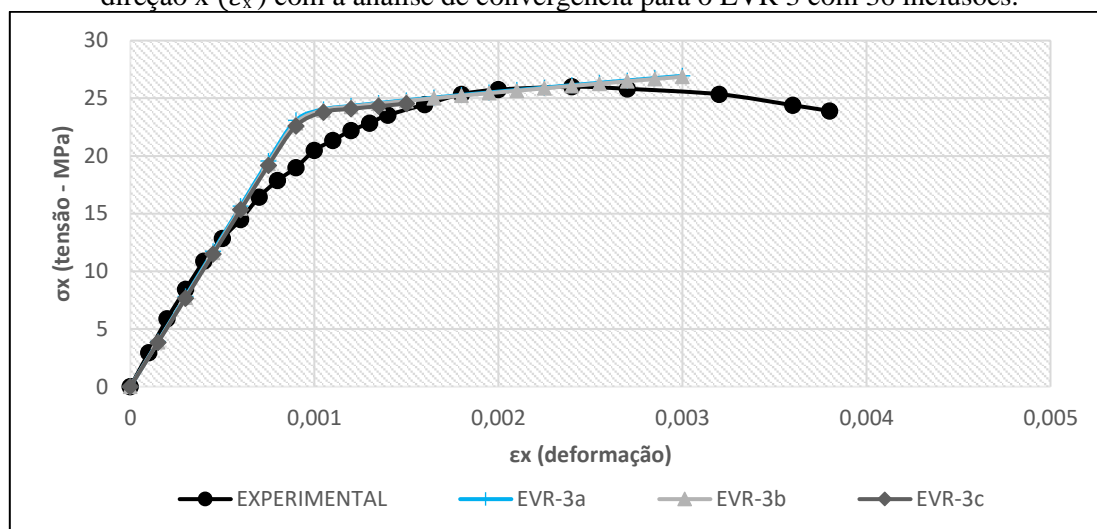
Fonte: Autoria Própria (2021).

FIGURA 6.9 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ϵ_x) com a análise de convergência para o EVR 2 com 25 inclusões.



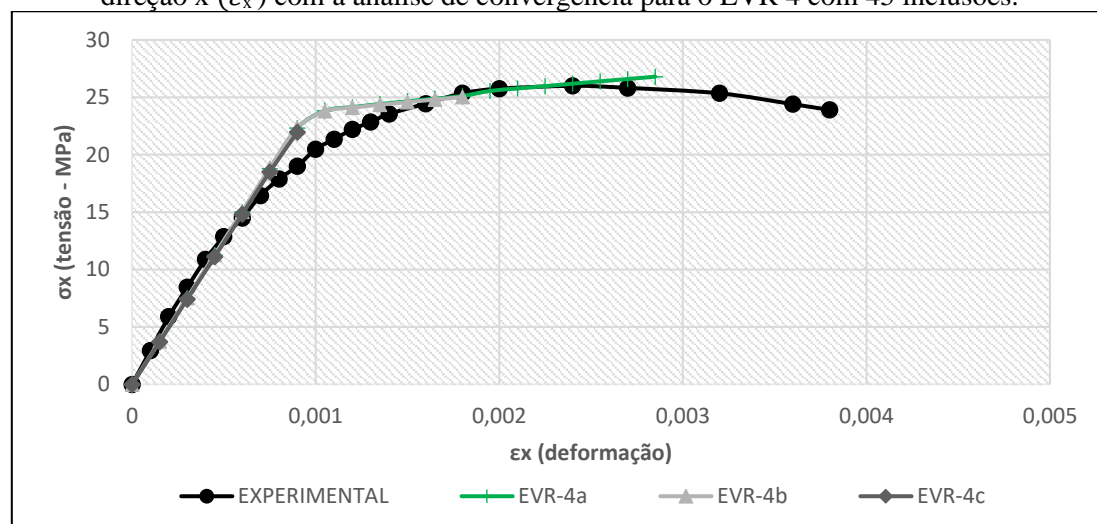
Fonte: Autoria Própria (2021).

FIGURA 6.10 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) *versus* Deformação na direção x (ϵ_x) com a análise de convergência para o EVR 3 com 36 inclusões.



Fonte: Autoria Própria (2021).

FIGURA 6.11 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) *versus* Deformação na direção x (ϵ_x) com a análise de convergência para o EVR 4 com 45 inclusões.

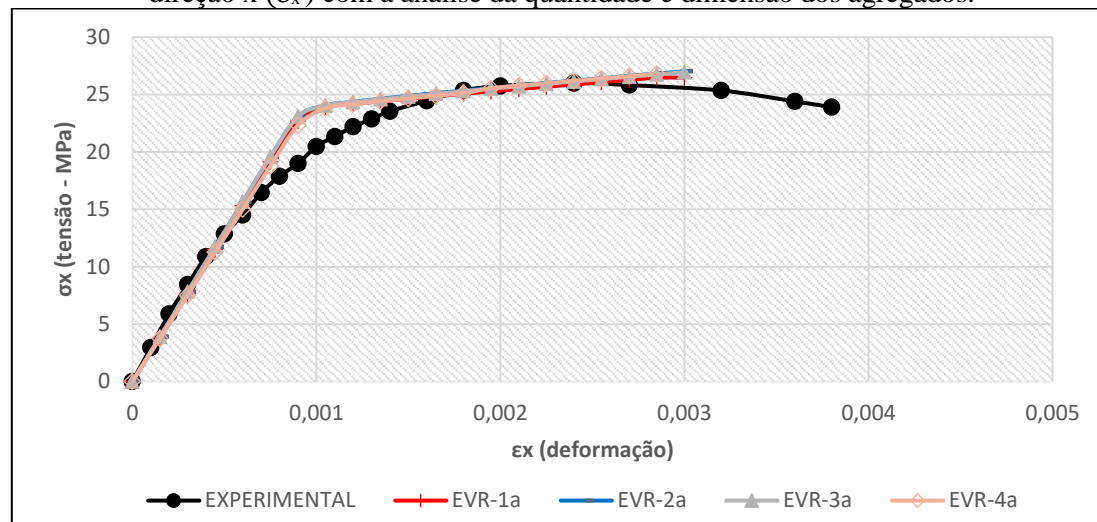


Fonte: Autoria Própria (2021).

Na Fig. (6.12) comparam-se as respostas homogeneizadas dos quatro EVRs definidos anteriormente, considerando os refinamentos que trouxeram melhor resultado (EVR 1a, 2a, 3a, 4a) e as condições dadas na seção anterior, ou seja, a imposição do modelo com condição de contorno de flutuações periódicas e a deformação total ao EVR: $\epsilon_x = -0,003$, $\epsilon_y = 0,0006$ e $\gamma_{xy} = 0$. É possível observar que a variação da resistência e da rigidez é muito pequena, sendo que as curvas ficam praticamente sobrepostas, constatando-se então, que não é necessário um EVR com uma quantidade muito grande

de inclusões para representar o comportamento do concreto, já que a quantidade de 16 inclusões é suficiente.

FIGURA 6.12 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ϵ_x) com a análise da quantidade e dimensão dos agregados.



Fonte: Autoria Própria (2021).

6.3. ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DA QUANTIDADE DOS ELEMENTOS DE FRATURA E CONTATO

Nesta seção, considerando-se os quatro EVRs definidos anteriormente, foi analisada a maneira como a modelagem do processo de fratura na ZTI interfere na resposta homogeneizada do material e qual a representação que traz a resposta mais próxima da experimental. Para isso, além da definição de elementos de fratura e contato sobre todas as interfaces de inclusões, foram criados EVRs com elementos de fratura e contato apenas sobre as interfaces das inclusões médias e grandes e EVRs com esses elementos apenas sobre as interfaces das inclusões grandes (que são aqueles já considerados na seção anterior). A Fig. (6.13) ilustra as interfaces onde se encontram os Elementos de Fratura e Contato.

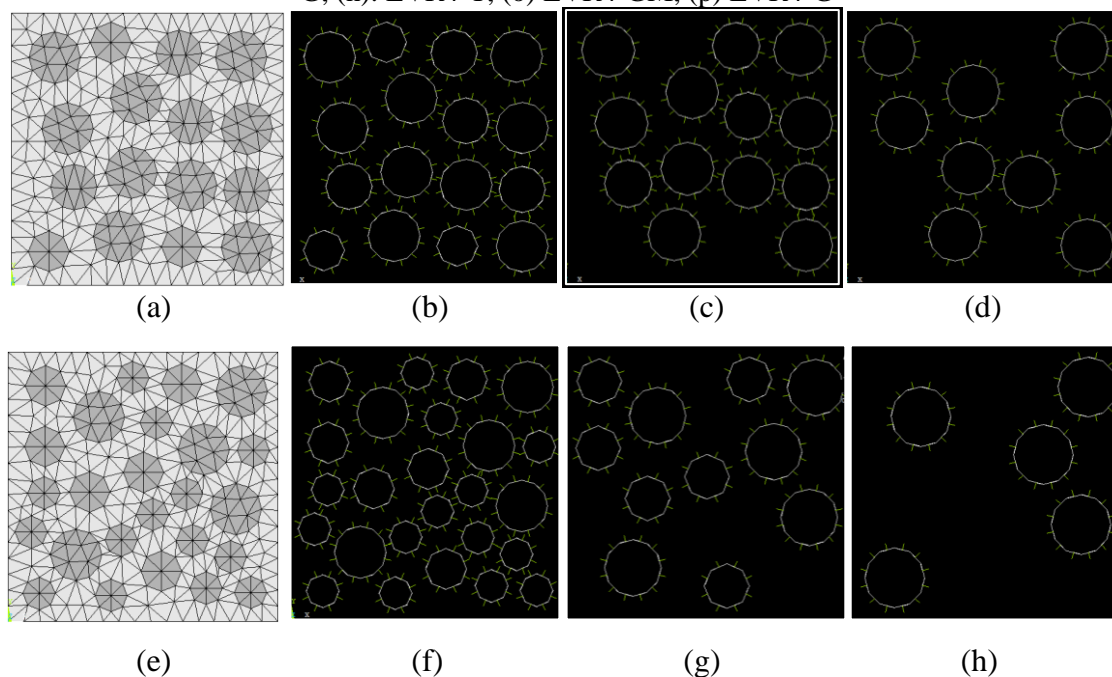
Na Tab. (6.8) tem-se a discretização dos EVRs para dois casos: a) com elementos de contato e fratura ao redor das inclusões médias e grandes (EVR-GM) e b) com elementos de contato e fratura ao redor de todas as inclusões (EVR-T). Note que o número de células triangulares e de nós de contorno não muda em relação às malhas do item anterior, que tem esses elementos apenas ao redor das inclusões grandes (para esses valores consulte a Tab. (6.7)).

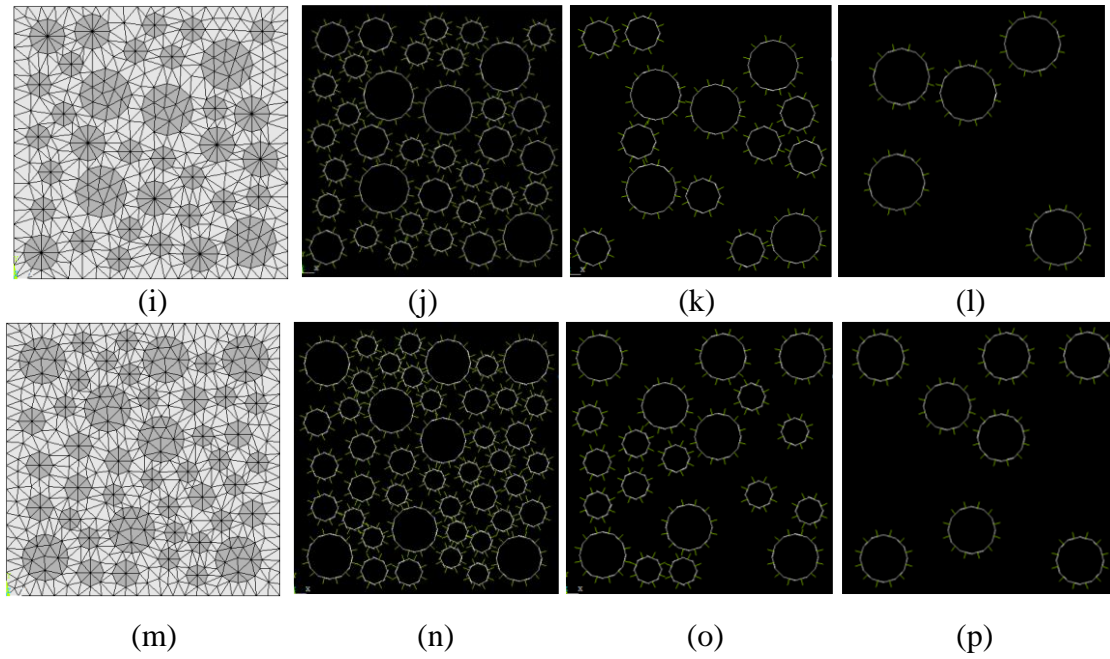
TABELA 6.8 – Discretização dos EVRs com elementos de contato e fratura ao redor de todas as inclusões (EVR-T) ou ao redor das inclusões médias e grandes (EVR-GM)

EVR	Inclusões com Elementos de Fratura	Discretização			
		Nº de Nós	Nº de Nós de Interface	Nº de Elementos de Interface do MEC	Nº de Elementos de Fratura
EVR1-GM	Grandes e Médias	490	336	180	156
EVR1-T	Todas	514	360	180	180
EVR2-GM	Grandes e Médias	460	328	220	108
EVR2-T	Todas	572	440	220	220
EVR3-GM	Grandes e Médias	700	512	344	168
EVR3-T	Todas	876	688	344	344
EVR4-GM	Grandes e Médias	883	648	424	224
EVR4-T	Todas	1083	848	424	424

Fonte: Autoria própria (2021).

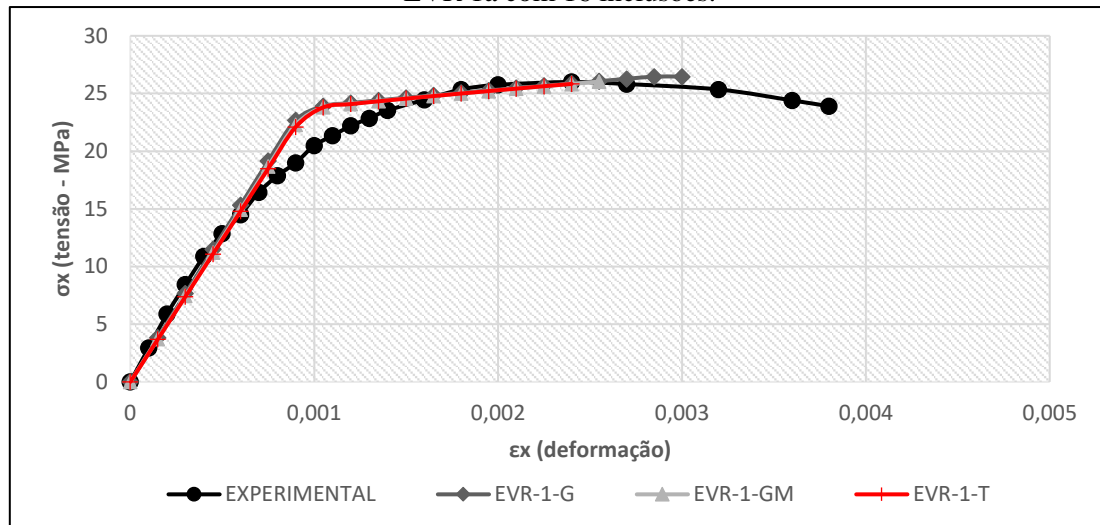
FIGURA 6.13 – (a), (e), (i) e (m): discretizações em células do EVR1a, EVR2a, EVR3a e EVR4a; figuras com definição dos elementos de contato e fratura: (b): EVR1-T, (c) EVR1-GM, (d) EVR1-G, (f): EVR2-T, (g) EVR2-GM, (h) EVR2-G, (j): EVR3-T, (k) EVR3-GM, (l) EVR3-G, (n): EVR4-T, (o) EVR4-GM, (p) EVR4-G





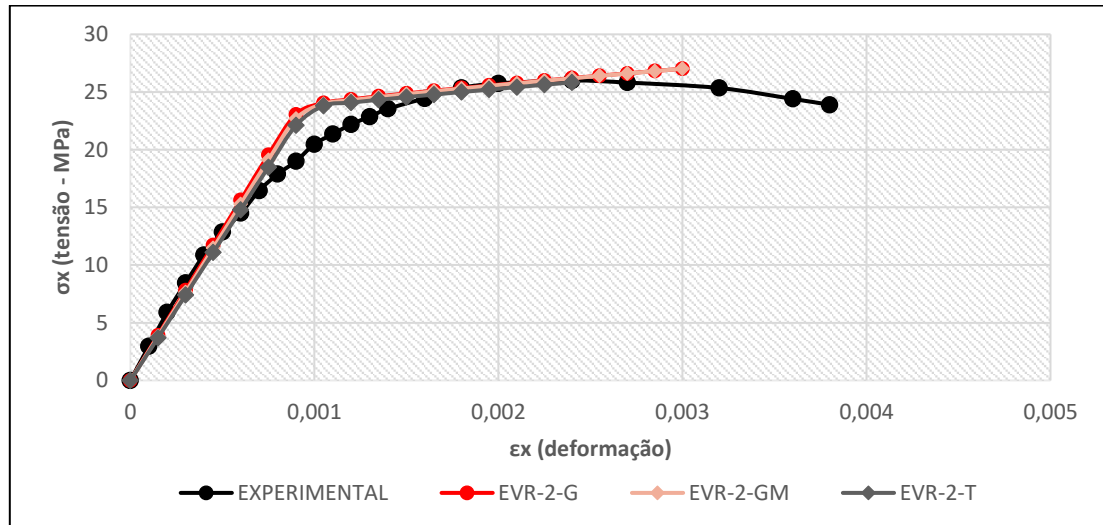
Fonte: Autoria Própria (2021).

FIGURA 6.14 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ϵ_x) com a análise da variação da quantidade dos Elementos de Fratura e Contato no EVR 1a com 16 inclusões.



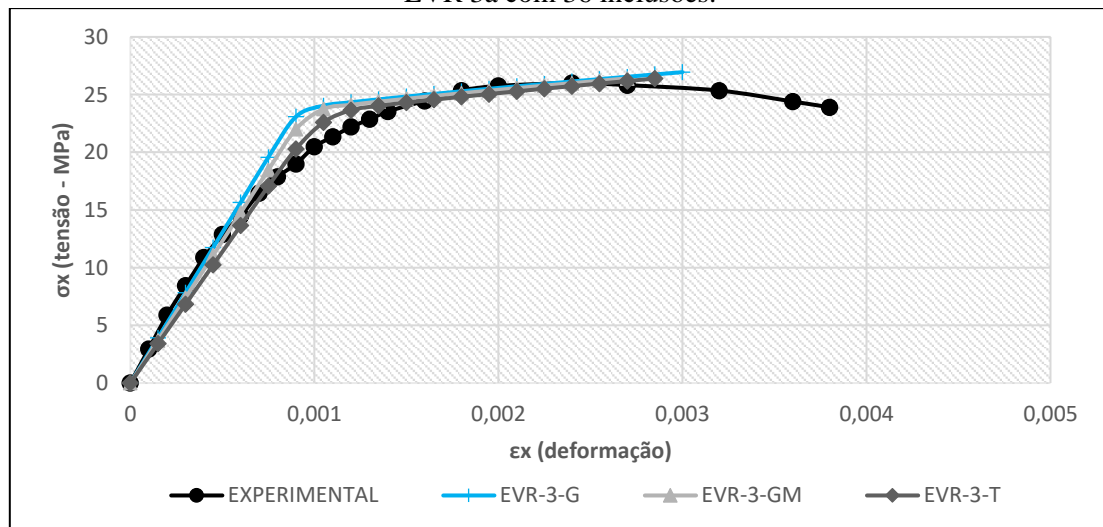
Fonte: Autoria Própria (2021).

FIGURA 6.15 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) *versus* Deformação na direção x (ϵ_x) com a análise da variação da quantidade dos Elementos de Fratura e Contato no EVR 2a com 25 inclusões.



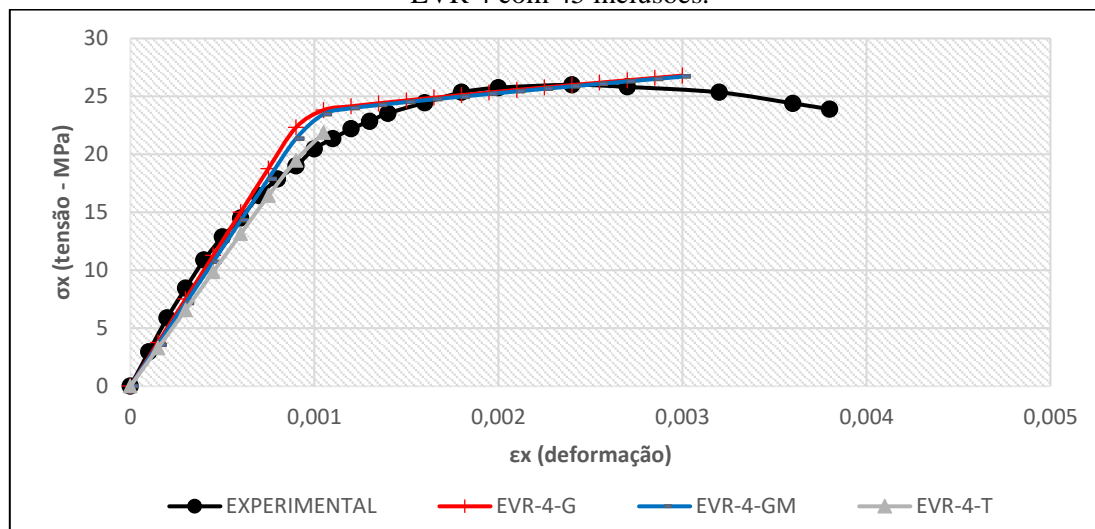
Fonte: Autoria Própria (2021).

FIGURA 6.16 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) *versus* Deformação na direção x (ϵ_x) com a análise da variação da quantidade dos Elementos de Fratura e Contato no EVR 3a com 36 inclusões.



Fonte: Autoria Própria (2021).

FIGURA 6.17 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ϵ_x) com a análise da variação da quantidade dos Elementos de Fratura e Contato no EVR 4 com 45 inclusões.



Fonte: Autoria Própria (2021).

Nas análises apresentadas dos EVRs com 16 e 25 inclusões, Figs. (6.14), (6.15), observa-se pouca diferença entre as curvas, constatando apenas uma pequena diminuição da resistência do EVR quando se considera elementos de contato e fratura ao redor de todas as inclusões. Assim, para esses dois EVRs conclui-se que não há necessidade de se adotar esses elementos ao redor das inclusões médias e pequenas, apenas ao redor das grandes inclusões já é suficiente. Já para os EVRs com 36 e 45 inclusões, figuras (6.16) e (6.17), observa-se perda pronunciada de rigidez do EVR já nas fases iniciais de carregamento, à medida que aumenta a quantidade de elementos de contato e fratura. Além disso, para o EVR com 45 inclusões observa-se perda de resistência quando se adota esses elementos ao redor de todas as inclusões, se afastando da curva experimental. Isso se dá porque devido ao grande processo de fraturamento no EVR, não se consegue atingir o equilíbrio no processo iterativo do EVR representando o colapso da microestrutura do material o que não conduz com a resposta experimental nesse nível de carregamento. Assim, conclui-se que para os EVRs com 36 e 45 inclusões, a melhor resposta foi considerando esses elementos ao redor das inclusões médias e grandes, o que está em acordo com Mehta e Monteiro (2014, p. 295) que trazem que partículas maiores de agregados tendem a produzir uma maior quantidade de microfissuras na ZTI.

De uma maneira geral, observa-se que o presente trabalho apresenta respostas numéricas homogeneizadas coerentes com a afirmação do Mehta e Monteiro (2014, p. 295), ou seja, nos EVRs com 16 e 25 inclusões que apresentam uma granulometria com

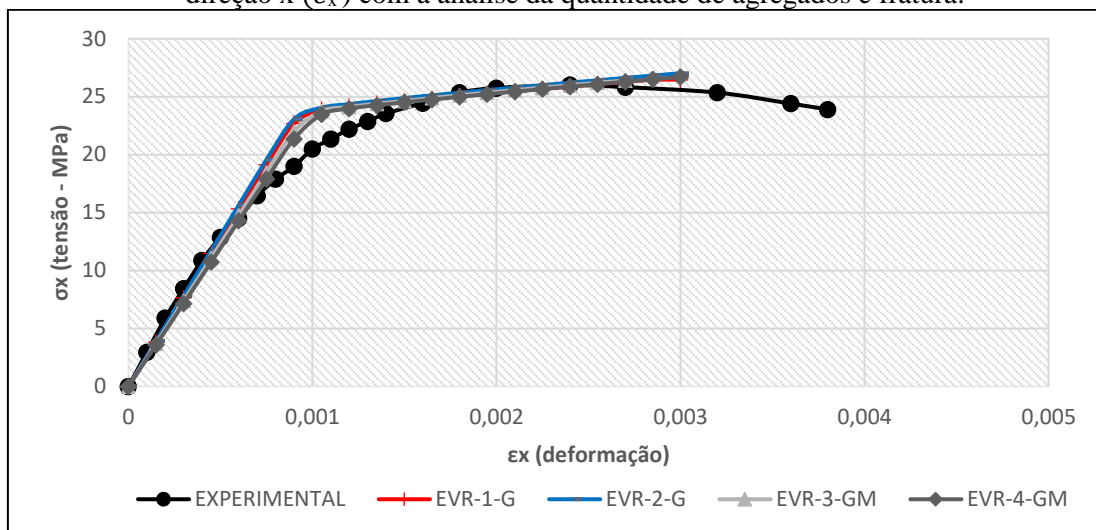
predominância de agregados graúdos grandes constata-se que a inserção de elementos de fratura e contato ao redor dos grandes agregados apresenta resposta capaz de colher a resposta experimental. Já nos EVRs com 36 e 45 inclusões, há uma distribuição granulométrica contínua e nesses casos quando se tem os elementos de contato e fratura inseridos nas ZTIs de agregados grandes e médios, as respostas numéricas homogeneizadas são mais coerentes com a realidade experimental.

É importante lembrar que no presente estudo os estados de tensão são predominantemente em compressão, ou seja, não produzem processo de fratura acentuado. Já para estados predominantes de tração, a ser considerado em trabalho futuro, é interessante verificar se adotar os elementos de contato e fratura ao redor das inclusões médias e grandes não fragilizaria muito o comportamento do EVR.

Pretendendo-se fazer uma definição do EVR a ser usado para uma futura análise multiescala tem-se, na Fig. (6.18), as curvas que têm boa aproximação com a curva experimental, que são: EVR 1 com 16 inclusões e fratura apenas nas grandes, EVR 2 com 25 inclusões e fratura apenas nas grandes, EVR 3 com 36 inclusões e fratura nas médias e grandes e, por fim, o EVR 4 com 45 inclusões e fratura nas médias e grandes.

Analisando a Fig. (6.18) é possível observar que os EVRs 3 e 4 que possuem fratura nas inclusões médias e grandes, apresentam uma rigidez um pouco menor na fase elástica e aproximam um pouco mais da curva experimental no início de plastificação (deformação entre 0,0007 e 0,001), porém, posteriormente as curvas dos 4 EVRs se encontram praticamente sobrepostas. Porém, é importante notar que os EVRs 3 e 4 possuem quantidade de células muito maior que os EVRs 1 e 2, o que aumenta muito o custo computacional numa análise multi-escala totalmente acoplada. Além disso, os EVRs com 16 inclusões e 25 inclusões com elementos de contato e fratura apenas nas grandes, apresentam resultados quase idênticos e se aproximam de forma satisfatória da curva experimental. Observando a tabela 6.7, constata-se que os EVRs 1a e 2a, aqui definidos como EVR 1-G e EVR 2-G, possuem quantidade de células e de nós muito similares, mas o EVR 1a tem 108 elementos de contato e fratura, enquanto o EVR 2a tem apenas 60 desses elementos. Como uma maior quantidade de elementos de contato e fratura, pode levar a instabilidades numéricas numa análise multi-escala totalmente acoplada, sugere-se o EVR 2-G para ser utilizado nesse tipo de análise, em trabalhos futuros, pois conclui-se que ele consegue gerar bons resultados, com menor custo computacional.

FIGURA 6.18 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ϵ_x) com a análise da quantidade de agregados e fratura.



Fonte: Autoria Própria (2021).

6.4. ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DA POROSIDADE NO CONCRETO

Nesta seção, faz-se a análise da influência da porosidade, inserida na pasta de cimento (representada pela matriz), na resposta homogeneizada do concreto. Espera-se obter uma maior aproximação do resultado numérico com o experimental, pois sabe-se que o concreto apresenta poros no interior de sua pasta de cimento. Essa análise é feita com a inserção de vazios no EVR 2-G totalizando 5%, 4% e 3% de vazios, onde os mesmos possuem 6mm de diâmetro, apesar do item 1.2.2 trazer que o diâmetro máximo dos poros seria de 3mm. Esse valor não foi adotado pois geraria um EVR muito refinado, trazendo dificuldades na análise numérica, pois como comentado anteriormente, quanto mais refinada a malha, maior o número de elementos de contato e fratura nas interfaces, o que diminui a resistência do EVR.

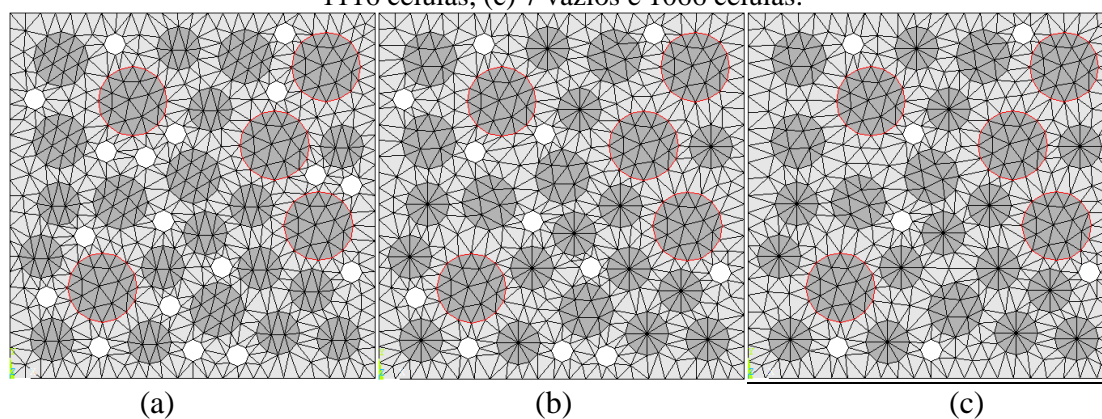
A Fig. (6.19) mostra o EVR 2-G V1, EVR 2-G V2, EVR 2-G V3 que estão discretizados na Tab. (6.9). Na Fig. (6.20) tem-se a comparação entre as curvas: experimental de Delalibera (2002); EVR 2-G; e os respectivos EVRs 2-G com vazios.

TABELA 6.9 – Discretização dos EVRs com elementos de contato e fratura ao redor de todas as inclusões (EVR-T) ou ao redor das inclusões médias e grandes (EVR-GM)

EVR	Discretização						
	Nº de Vazios	Diâmetro dos Vazios (mm)	Nº de células triangulares	Nº de Nós	Nº de Nós de Interface	Nº de Elementos de Interface do MEC	Nº de Elementos de Fratura
EVR 2-G V1	18		1230	798	544	144	80
EVR 2-G V2	12	6	1116	721	496	96	80
EVR 2-G V3	7		1066	679	679	456	56

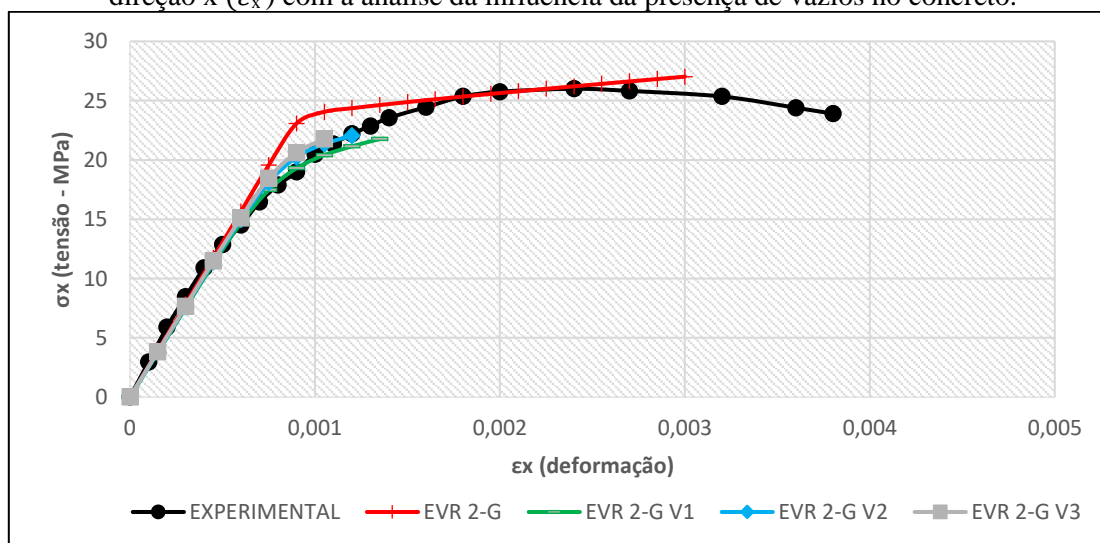
Fonte: Autoria própria (2021).

FIGURA 6.19 – EVR com 25 inclusões e vazios: (a) 18 vazios e 1230 células, (b) 12 vazios e 1116 células, (c) 7 vazios e 1066 células.



Fonte: Autoria Própria (2021).

FIGURA 6.20 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ϵ_x) com a análise da influência da presença de vazios no concreto.

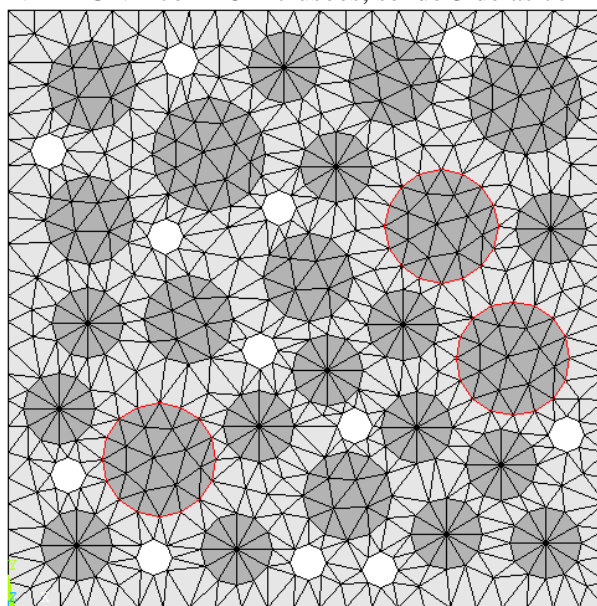


Fonte: Autoria Própria (2021).

O EVR com vazios diminuiu muito a resistência do material, podendo observar que não foi mais possível obter equilíbrio no EVR por volta da deformação de 0.0014, o que resultou numa tensão limite numérica muito inferior ao resultado experimental. Por outro lado, os resultados numéricos do EVR com vazios se aproximaram muito mais da curva experimental, no intervalo de deformação compreendido entre 0.0007 e 0.0014. Portanto, pode-se afirmar que a inserção de vazios no EVR traz uma representação mais fiel do material concreto.

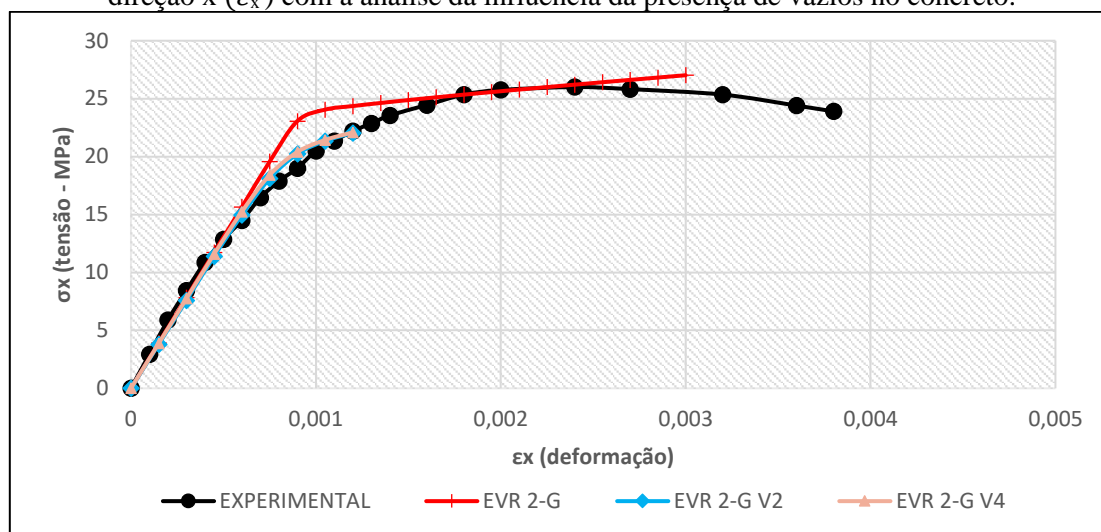
Considerando que a maior aproximação da curva experimental foi utilizando o EVR 2-G V2, ou seja, aquele que tem 12 vazios, optou-se por fazer ainda uma última análise. Essa análise consiste na inserção de elementos de fratura e contato em apenas 3 inclusões como pode ser observado na Fig. (6.21). Na Fig. (6.22) tem-se a comparação entre as curvas: experimental de Delalibera (2002); EVR 2-G; EVR 2-G V2 e EVR 2-G V4.

FIGURA 6.21 – EVR 2-G V4 com 25 inclusões, sendo 3 delas com fratura e 12 vazios.



Fonte: Aatoria Própria (2021).

FIGURA 6.22 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ϵ_x) com a análise da influência da presença de vazios no concreto.



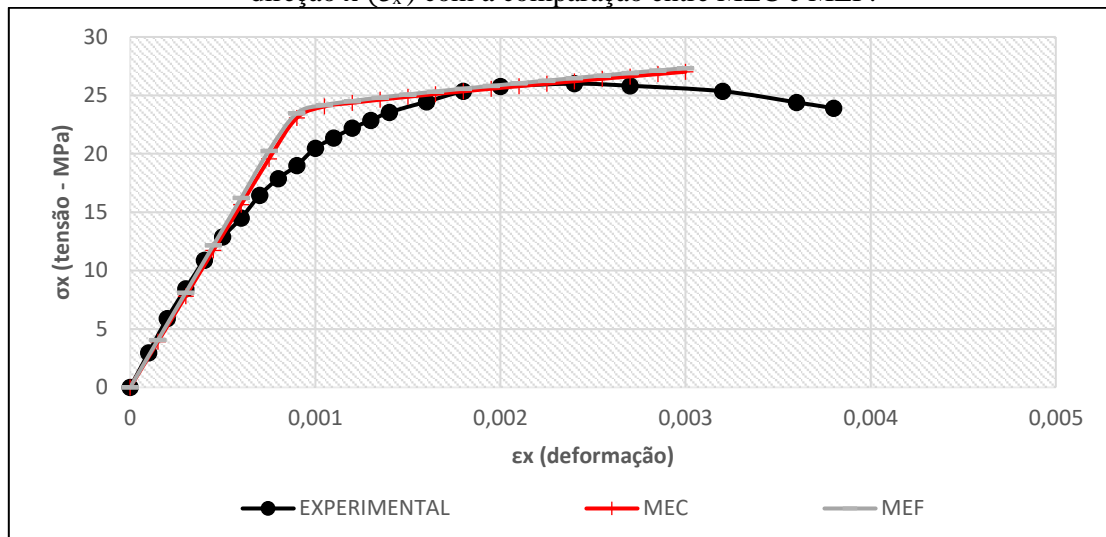
Fonte: A autoria Própria (2021).

Notou-se com essa última análise uma alteração muito pequena no resultado das curvas. Sendo assim, ainda é necessário o estudo de outros EVRs, a fim de se obter uma micro-estrutura que reproduza a resistência observada no teste experimental. Para isso, deveriam ser testadas malhas menos refinadas para o EVR definido acima e também definir EVRs com menores percentagens de vazios e diferentes distribuições desses vazios na pasta de cimento.

6.5. ANÁLISE UTILIZANDO O MEF

Por fim, com o intuito de se validar os resultados obtidos com o MEC, fez-se a simulação numérica do EVR 2-G utilizando o MEF, cuja formulação foi proposta por Eduardo de Souza Neto e seus colaboradores (veja Pituba *et al.* (2002) e Fernandes *et al.* (2017)). É interessante dizer que as formulações do MEC e do MEF são baseadas no mesmo tipo de formulação multi-escala, mas os modelos numéricos têm algumas características diferentes, pois usam ferramentas numéricas diferentes. A comparação é mostrada na Fig. (6.21) onde é possível observar a proximidade das curvas utilizando o MEC e o MEF.

FIGURA 6.23 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ϵ_x) com a comparação entre MEC e MEF.

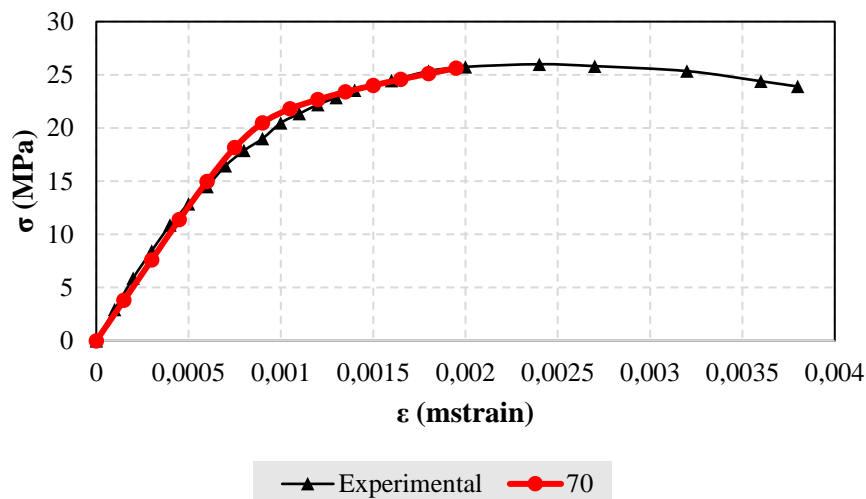


Fonte: Autoria Própria (2021).

6.6. RESULTADOS DE PITALUGA (2022)

Através das análises realizadas neste trabalho foi dada a continuidade na análise paramétrica utilizando o EVR 2-G V2, visto que os EVRs com poros tiveram uma aproximação maior com a curva experimental. Esta análise foi realizada no trabalho de Pitaluga (2022) e chegou-se a curva mostrada na Fig. (6.24).

FIGURA 6.24 – Gráfico Tensão Homogeneizada da direção x (σ_x) versus Deformação na direção x (ϵ_x) com a comparação entre MEC e MEF.



Fonte: Pitaluga (2022).

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

7.1. CONCLUSÕES

O concreto pode ser considerado um material compósito de três fases que consiste em matriz de pasta de cimento hidratada, agregados e Zona de Transição Interfacial (ZTI) entre o agregado e matriz. A dissertação apresentada possui uma proposta para modelagem numérica do comportamento mecânico do concreto, via Método dos Elementos de Contorno, e utilizando diferentes microestruturas do material.

No Elemento de Volume Representativo (EVR), as inclusões são idealizadas de vários tamanhos e são aleatoriamente dispostas na matriz. A zona de interface é modelada com elementos finitos de fratura coesiva e contato, onde o modelo de fratura e contato recentemente proposto em Fernandes (2019) é incorporado ao elemento. A inclusão é modelada como sendo um material elástico linear. Já a matriz é considerada como material elastoplástico obedecendo ao modelo de Mohr-Coulomb. Além disso, foram definidos poros no interior da pasta de cimento. Para definir as propriedades elásticas, bem como os parâmetros dos modelos constitutivos nas diferentes fases do EVR, foi realizada uma identificação paramétrica para obter um comportamento mecânico próximo àquele obtido com os resultados experimentais apresentados em Delalibera (2002).

O objetivo geral do trabalho em avaliar as potencialidades e limitações de uma proposta de modelagem do comportamento mecânico do concreto na microescala foi atingido, mostrando que uma formulação baseada na homogeneização computacional e usando um procedimento baseado no Método dos Elementos de Contorno no âmbito da teoria multiescala, é uma alternativa promissora aos modelos constitutivos macroscópicos complexos para análise do comportamento mecânico de materiais frágeis

A partir das análises realizadas, foi possível concluir que o Módulo de Elasticidade Longitudinal da matriz, ou pasta de cimento, tem mais influência no comportamento do EVR que o Módulo de Elasticidade dos agregados, que é o esperado visto que o EVR possui aproximadamente 40% de inclusões e 60% de pasta cimentícia ou matriz. Ainda falando sobre parâmetros, constatou-se que quanto maior o valor do ângulo de atrito utilizando o critério de Mohr-Coulomb, maior é a resistência do EVR, conforme esperado.

Com relação à quantidade de agregados presentes na pasta de cimento, é possível afirmar que não é necessário definir uma grande quantidade de agregados na microestrutura, visto que o EVR com 25 agregados produziu resultados semelhantes aos resultados do EVR com 45 agregados. O tamanho e a distribuição desses agregados na pasta não têm grande influência no comportamento do EVR.

Com relação a ZTI, notou-se que modelar o processo de fratura somente ao redor das inclusões maiores é suficiente para produzir bons resultados e gera um custo computacional menor. Analisando a quantidade, é possível afirmar que a quantidade de elementos finitos de fratura coesiva e contato nas interfaces afeta diretamente a resistência do EVR, ou seja, quanto maior a sua quantidade menor é a resistência do mesmo, isso é explicado pois quanto mais refina a malha, tanto o número de células quanto o número de elementos de contato e fratura crescem. O aumento do número de células leva a um maior acurácia dos resultados. Mas o aumento do número de elementos finitos de contato e fratura leva a um aumento no processo de fratura na ZTI, o que tende a fragilizar muito o EVR e com isso diminuir muito sua resistência. Por isso malhas muito refinadas resultaram em EVRs com resistência muito reduzida. Se acaso o processo de descolamento de fases não tivesse sido modelado, ou seja, se as interfaces tivessem sido consideradas perfeitamente aderidas, seria esperado para malhas mais grosseiras uma rigidez e resistência maiores, mas a partir de certo nível de discretização as malhas tenderiam a produzir resultados muito semelhantes. Já quando se modela a descolagem de fases, quanto maior o número de elementos de contato e fratura, maior é a abertura de fratura, e menor a resistência do EVR.

Outro fator que reduz a resistência do EVR é a inserção de poros no domínio da pasta de cimento, porém a inserção de tais poros melhora significativamente os resultados trazendo uma grande proximidade com os resultados experimentais de Delalibera (2002).

É importante ressaltar que as curvas se distanciam em alguns pontos da curva experimental em função dos parâmetros adotados e não em decorrência do modelo adotado que se mostrou eficiente para esta análise. Uma avaliação paramétrica ainda mais profunda pode gerar resultados ainda mais fiéis ao experimental.

Como principal conclusão, é possível afirmar que um EVR com fração volumétrica de inclusões igual a 40% e de vazios igual a 3,34%, onde o processo de fratura na ZTI é modelado apenas ao redor das inclusões maiores, pode produzir bem os resultados experimentais mostrados em Delalibera (2002). Além disso, foi mostrado que o modelo numérico é consistente, estável e preciso, pois a convergência foi obtida quando

diferentes malhas são adotadas e o equilíbrio do EVR é alcançado para grandes valores de deformação.

Portanto, a formulação do MEC utilizada neste trabalho é uma ferramenta eficiente para modelar o comportamento mecânico de materiais heterogêneos. Também é importante ressaltar que a formulação do MEC é capaz de reproduzir bons resultados com esforço computacional consideravelmente menor que o respectivo modelo do MEF, como já mostrado em Crozariol (2017) e Silva (2018).

7.2. SUGESTÕES

A partir da abordagem exposta neste trabalho, são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Investigação de um modelo de dano para captar o processo de localização de fissuras (ou de danificação) na matriz, diminuição da resistência e a versão não local (modelagem de localização do dano);
- Continuar a análise paramétrica, afim de se chegar a maiores valores de deformação conforme a curva experimental;
- Além do regime de compressão, estudado neste trabalho, analisar o concreto também em regime de tração;

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDERSON, T. L. **Fracture Mechanics - Fundamentals and Applications**. Boca Raton: CRC Press, 1995.
- ANDERSON, T. L. **Fracture mechanics: fundamentals and applications**. 3. ed. USA: Taylor & Francis, 2005 [s.v.] 630 p.
- ASSAAD, J. J.; HARB, J.; MAALUF, Y. Measurement of yield stress of cement pastes using the direct shear test. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 214, p. 18-27, 2014.
- AZIZI, R. Micromechanical modeling of damage in periodic composites using strain gradient plasticity, **Engineering Fracture Mechanics**, v. 92, [s.n.], p. 101-113, 2012.
- BAILEY, J. et al. Evidence relating to Object-Oriented software design: A survey. **First International Symposium on Empirical Software Engineering And Measurement (esem 2007)**, [s.l.], p.482-484, set. 2007. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE).
- BITTENCOURT, T. N. **Faturamento do concreto estrutural: aspectos teóricos, computacionais e experimentais e suas aplicações**, 1999. 226 f. Tese (Livre docência) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.
- BORGES, D. C. **Estudo e avaliação de uma proposta de modelagem do comportamento micromecânico do concreto**. 2015. 111 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2015.
- CAMACHO, G.; ORTIZ, M. Computational Modelling of Impact Damage in Brittle Materials. **International Journal of Solids and Structural**, v. 33 p. 2899-2938, 1996.
- CAVALCANTE, M. A. A.; KHATAM, H.; PINDER, M. J. Homogenization of elastic–plastic periodic materials by FVDAM and FEM approaches – An assessment, **Composites: Part B**. v. 42, [s.n.], p. 1713-1730. 2011.
- CIRAK, F., ORTIZ, M.; PANDOLFI, A. A cohesive approach to thin-shell fracture and fragmentation, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. v. 194, [s.n.], p. 2604-2618. 2005.
- COSTA, C. H. A.; STAUT, S. L. S.; ILHA, M. S. O. Projeto de sistemas prediais hidráulicos sanitários com BIM: mapeamento de literatura. **XV Encontro Nacional de Tecnologia do Ambiente Construído**, Brasil, p. 2760 - 2769, nov. 2014.

- CROZARIOL, L. H. R. **Análise do comportamento de microestruturas heterogêneas através do método dos elementos de contorno considerando-se não-linearidade física**. 121f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Ilha Solteira, 2017.
- CROZARIOL, L. H. R.; FERNANDES, G. R. . Análise da resposta constitutiva de materiais heterogêneos pelo Método dos Elementos de Contorno, considerando-se diferentes microestruturas para o EVR. **Materia**: Rio de Janeiro, v. 25, p. e-12550, 2020.
- DONG, Y.; QIAO, P. CT image-based synthetic mesostructure generation for multiscale fracture analysis of concrete. **Construction and Building Materials**. Elsevier BV, v. 296, p. 1-17, 2021.
- FERNANDES, G. R.; KONDA, D. H. . A BEM formulation based on Reissner's hypothesis for analysing the coupled stretching bending problem of building floor structures. **Engineering Analysis with Boundary Elements**. Elsevier BV. v. 36, p. 1377-1388, 2012.
- FERNANDES, G. R., PITUBA, J.J.C.; de SOUZA NETO, E. A. FEM/BEM formulation for multi-scale analysis of stretch ed plates. **Engineering Analysis with Boundary Elements**. Elsevier BV. v. 54, p. 47-59, 2015a.
- FERNANDES G. R., PITUBA J. J. C. & DE SOUZA NETO, E. A. Multi-Scale Modelling for Bending Analysis of Heterogeneous Plates by Coupling BEM AND FEM. **Engineering Analysis with Boundary Elements**. Elsevier BV. v. 51 p.1-13, 2015b.
- FERNANDES, G. R.; FURTADO, A. S.; PITUBA J. J. C.; DE SOUZA NETO, E. A. Multiscale analysis of structures composed of metal matrix composites considering phase debonding. **J Multiscale Modell**, v. 8:1740004, p. 1–29, 2017.
- FERNANDES, G. R. et al. A 2D boundary element formulation to model the constitutive behavior of heterogeneous microstructures considering dissipative phenomena. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 99, p. 1-22, 2019a.
- FERNANDES, G. R. et al. A 2D RVE formulation by the Boundary Element Method considering phase debonding. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 104, p. 259-276, 2019b.
- DELALIBERA, R. G. **Análise teórica e experimental de vigas de concreto armado com armadura de confinamento**. 2002. 232 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia

- de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2002.
- FU, S. Y.; FENG, X. Q.; LAUKE, B.; MAI, Y. W. Effects of particle size, particle/matrix interface adhesion and particle loading on mechanical properties of particulate–polymer composites, **Composites Part B: engineering**. v. 39, [s.n.], p. 933-961. 2008.
- GIUSTI, S. M. **Análise de sensibilidade topológica em modelos constitutivos multiescalas**. 2009. 211 f. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional) – Laboratório Nacional de Computação Científica do Ministério da Ciência e Tecnologia da República Federativa do Brasil, Petrópolis, 2009.
- HILLERBORG, A., MODEER, M., PETERSSON, P.E., Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements. **Cement and Concrete Research**, v. 6, p. 773–782, 1976.
- KIM, S. M.; AL-RUB, R. K. A. Meso-scale computational modeling of the plastic-damage response of cementitious composites. **Cement and Concrete Research**, v. 41, [s.n.], p.339–358, 2011.
- LENS, L. N. **Modelos para análise de fratura do concreto simples empregando interfaces coesivas**. 2009. 114 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.
- MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: Estrutura, Propriedades e Materiais**. 1ª. ed. São Paulo: PINI, 2008.
- MEHTA, P. K., MONTEIRO, P. J. M., **Concreto: Microestrutura, Propriedades e Materiais** – 2ª Edição. Ed.: IBRACON. ISBN.: 978-85-98576213. 751 p. 2014.
- MIRANDA, A. C. O. **Propagação de trincas por fadiga em geometrias 2D complexas sob cargas cíclicas variáveis**. 2003. 125f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PUC-RIO, Rio de Janeiro, 2003.
- NIELSEN, M. P.; HOANG, L. C. **Limit Analysis and Concrete Plasticity**. Boca Raton: CRC Press, 2011.
- OHLAND, G. A. **Análise de microestruturas heterogêneas através de uma formulação do método dos elementos de contorno considerando materiais com comportamento elástico**. 2017. 88f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2017.

- OLIVEIRA, H. L. **Uma formulação alternativa do Método dos Elementos de Contorno aplicada à análise da propagação de fissuras em materiais quase frágeis**. 2013. 132 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.
- OLIVER, J.; CAICEDO, M.; ROUBIN, E.; HERNADÉZ, J. A.; HUESPE, A. Multi-scale (FE²) analysis of materials failure in cement/aggregate-type composite structure. In: EURO-C, 2004, St. Anton am Alberg, XX. Anais. **Computational Modelling of Concrete Structure**, Londres: CRC PRESS, 2014. v.1, p. 39-49.
- ORTIZ, M.; PANDOLFI, A. Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v 44, p. 1267-1282, 1999.
- PAULINO, G. H.; CELES, W. ESPINHA, R. ZHANG, Z. J. A general topology-based framework for adaptive insertion of cohesive elements in finite element meshes. **Engineering with Computers**. v. 24, p. 59-78, 2008.
- PAULA, H. M. D.; ILHA, M. S. D. O. Uso da Moringa oleifera no tratamento de águas residuárias de usinas de concreto: mapeamento sistemático. **REEC - Revista Eletrônica de Engenharia Civil**, Brasil, p. 50 - 60, 2016.
- PITUBA, J. J. C. **Sobre a formulação de um modelo de dano para o concreto**. 2003. 189 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.
- PITUBA, J. J. C.; FERNANDES, G. R.; DE SOUZA NETO, E. A. Modeling of cohesive fracture and plasticity in composite microstructures. **J Eng Mech**, v. 142, p. 1–15, 2016.
- PITUBA, J. J. C.; SOUZA NETO, E. A. Modeling of unilateral effect in brittle materials by a mesoscopic scale approach. **Journal Computers and Concrete**, v. 15, n. 5, p. 735-758, 2015.
- PITUBA, J.J.C.; FERNANDES, G.R.; SOUZA NETO, E.A. (2016). Modelling of cohesive fracture and plasticity processes in composite microstructures. **Journal of Engineering Mechanics**. v. 142, p. 04016069, 2016.
- PROENÇA, S. P. B. **Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: análise crítica e contribuições**. 1988. 330 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988.

- QUARESMA, W. M. G. **Contribuição ao estudo do comportamento mecânico do concreto utilizando diferentes modelagens em elementos finitos na escala mesoscópica**. 2016. 139 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2016.
- RAMESH, G.; SOTELINO, E. D.; CHEN, W. F. Effect of transition zone on elastic moduli of concrete materials. **Cement and Concrete Research**, v. 26, p. 611-622, 1996.
- REN, X.; LI, J. Multi-scale based fracture and damage analysis of steel fiber reinforced concrete. **Engineering Failure Analysis**. V. 35, [s.n.] p. 253–261, 2013.
- SANTOS, W. F.; PITUBA, J. J. C. Yield surfaces of material composed of porous and heterogeneous microstructures considering phase debonding. **Latino American Journal of Solids and Structures**. v. 14, n. 8, p. 1387-1415, 2017.
- SAOUMA, V. **Fracture mechanics lecture notes**. [s.e.] Dept. of Civil Environmental and Architectural Engineering, University of Colorado, Boulder, USA, 2000.
- SOUZA NETO, E. A. de; FEIJÓO, R. A. **Variational foundations of multi-scale constitutive models of solid: Small and large strain kinematical formulation**. National Laboratory for Scientific Computing (LNCC/MCT), Brazil, Internal Research & Development Report, No. 16, 2006.
- VAN MIER, J. G. M. **Fracture Processes of Concrete**. CRC Press, 1996. 464 p.
- YANG, C. C. Effect of transition zone on elastic moduli of mortar. **Cement and Concrete Research**, v. 28 p. 727-736, 1988.

APÊNDICE A – SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

A equação integral do MEC é definida a partir de um problema fundamental. Seja $u_{ki}^*(q, p)$ a solução fundamental da equação de Poisson, desenvolvida por Lord Kelvin, considera-se que a mesma é independente da solução do problema real, porém é regida pela mesma equação diferencial. Segundo Fernandes (2005), a solução fundamental representa o deslocamento em um ponto p , na direção i , devido a uma carga concentrada unitária aplicada em um ponto de colocação s , na direção de k . Neste problema, a carga unitária referente ao problema fundamental é definida pela função delta de Dirac ($\delta(q, p)$). Consideram-se as variáveis identificadas com índice * pertencentes ao problema fundamental.

Para o problema tridimensional, a solução fundamental ($u_{ki,jj}^*$) é obtida satisfazendo a equação de Navier definida na Equação (A.3), substituindo na equação diferencial de equilíbrio, a força b_i pela função delta de Dirac ($\delta(q, p)$).

$$u_{ki,jj}^* + \frac{u_{kj,jj}^*}{1 - 2\nu} + \frac{\delta(q, p)\delta_{ki}}{G} = 0 \quad (\text{B.1})$$

A Equação (B.1) quando resolvida, resulta na expressão do deslocamento fundamental para o caso tridimensional, representada pela Equação B.2.

$$u_{ki}^*(q, p) = \frac{[(3 - 4\nu)\delta_{ki} + r_i r_k]}{16\pi r G(1 - \nu)} \quad \begin{array}{l} i, j, k \\ = 1, 2, 3 \end{array} \quad (\text{B.2})$$

Onde r é a distancia entre o ponto q e o ponto p .

Ao integrar a Equação B.2 ao longo de x_3 para o intervalo de $-\infty$ a $+\infty$, encontra-se a equação do deslocamento fundamental para o caso bidimensional. Desta forma, desprezando-se um movimento de corpo rígido igual a infinito, obtém-se a Equação B.3.

$$u_{ki}^*(q, p) = \frac{[-(3 - 4\nu)\ln(r)\delta_{ki} + r_i r_k]}{8\pi G(1 - \nu)} \quad i, j, k = 1, 2 \quad (\text{B.3})$$

O coeficiente de Poisson ν deve ser substituído na Equação (B.3) e em todas as equações aqui apresentadas, por $\nu' = \nu/(1 + \nu)$ para quando tem-se um Estado Plano de Tensão (EPT).

Considerando uma carga fundamental aplicada na direção de k , na Equação B.4 descreve-se o vetor dos deslocamentos fundamentais no caso bidimensional.

$$\{u_{ki}^*\}^T = \{u_{k1}^* \quad u_{k2}^*\} \quad (B.4)$$

Isto é, quando uma carga unitária é aplicada no ponto s na direção X_1 , ocorrem os deslocamentos u_{11}^* e u_{12}^* no ponto p nas direções X_1 e X_2 respectivamente.

A fim de encontrar a deformação fundamental, deriva-se primeiramente a Equação B.4, chegando a Equação B.5.

$$\frac{\partial u_{ki}^*(q, p)}{\partial x_j(p)} = \frac{1}{8\pi G(1 - \nu)} \left[-(3 - 4\nu) \frac{1}{r} r_j \delta_{ki} + r_k \frac{\partial r_i}{\partial x_j(p)} + r_i \frac{\partial r_k}{\partial x_j(p)} \right] \quad (B.5)$$

A partir da Equação B.6, a Equação B.5 pode ser reescrita conforme mostra a Equação B.7.

$$\frac{\partial r_k}{\partial x_i(p)} = \frac{1}{r} (\delta_{ik} - r_k r_i) \quad (B.6)$$

$$\frac{\partial u_{ki}^*(q, p)}{\partial x_j(p)} = \frac{1}{8\pi G(1 - \nu)r} \left[-(3 - 4\nu)r_j \delta_{ki} + \delta_{ij}r_k + \delta_{kj}r_i - 2r_i r_j r_k \right] \quad (B.7)$$

Analogamente, pode-se escrever a derivada da Equação B.4 em relação à direção $x_i(p)$. Logo tem-se a Equação B.8.

$$\frac{\partial u_{kj}^*(q, p)}{\partial x_i(p)} = \frac{1}{8\pi G(1 - \nu)r} \left[-(3 - 4\nu)r_i \delta_{kj} + \delta_{ij}r_k + \delta_{ki}r_j - 2r_i r_j r_k \right] \quad (B.8)$$

Portanto, a partir da substituição das Equações B.7 e B.8 na Equação A.3 do Apêndice A a deformação fundamental é encontrada, como mostrado na Equação B.9.

$$\varepsilon_{kij}^*(q, p) = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} [(1-2\nu)(r_j \delta_{ki} + r_i \delta_{kj}) - r_{,k} \delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j} r_{,k}] \quad k, i, j = 1, 2 \quad (\text{B.9})$$

Atribuindo $i = j = 1$ na Equação B.9 e considerando $\delta_{kk}r_{,1} = r_{,k}$; $\delta_{11} = \delta_{11} + \delta_{22} = 2$ e $r_{,1} r_{,1} = r_{,1}^2 + r_{,2}^2 = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$, obtém-se a Equação B.10.

$$\varepsilon_{k11}^* = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} [(1-2\nu')(r_{,k} + r_{,k}) - 2r_{,k} + 2r_{,k}] = -\frac{(1-2\nu')r_{,k}}{4\pi(1-\nu')Gr} \quad (\text{B.10})$$

Substituindo as Equações B.9 e B.10 na Equação B.11, encontra-se a expressão fundamental para a tensão em um ponto p. Assim, tem-se a Equação B.11

$$\sigma_{kij}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{ (1-2\nu') [\delta_{jk}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,j} - \delta_{ij}r_{,k}] + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \} \quad (\text{B.11})$$

Portanto, a partir da Equação B.11, a expressão da força de superfície fundamental ($p_{ki}^*(s, p)$) pode ser obtida (Equação B.12):

$$p_{ki}^*(q, p) = \sigma_{kij}^* n_i = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{ [(1-2\nu')\delta_{ik} + 2r_{,i} r_{,k}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu') [n_i r_{,k} - n_k r_{,i}] \} \quad (\text{B.12})$$

Assim, obtêm-se as forças de superfície para uma carga fundamental aplicada na direção k no caso bidimensional, sendo dada na forma vetorial pela Equação B.13.

$$\{p_{ki}^*\}^T = \{p_{k1}^* \quad p_{k2}^*\} \quad (\text{B.13})$$

Com a integração da Equação B.11, pode-se obter o esforço fundamental N_{kij}^* , definido então pela Equação B.14.

$$N_{kij}^* = \frac{\bar{E}}{1 - \nu^2} [\nu \varepsilon_{kll}^* \delta_{ij} + (1 - \nu) \varepsilon_{kij}^*] \quad (\text{B.14})$$

A partir da integração da Equação 3.30, surgiram-se novos termos fundamentais, e estes são dados pelas Equações B.15 e B.16, abaixo.

$$\varepsilon_{ki}^{*2D} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu')\bar{G}r} \left\{ (1 - 2\nu') \left[n_k r_{,i} + \delta_{ki} \frac{\partial r}{\partial n} \right] - r_{,k} n_i + 2r_{,k} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} \quad (\text{B.15})$$

$$\varepsilon_{kij}^{*2D} = -\frac{\nu'}{4\pi(1-\nu')\bar{G}r^2} [\delta_{ki} - 2r_{,k} r_{,i}] \quad (\text{B.16})$$

REFERÊNCIAS

FERNANDES, G.R. **Introdução ao Método dos Elementos de Contorno – MEC.** Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Ilha Solteira, 2005.

APÊNDICE B – UTILIZAÇÃO DO AUTOCAD PARA A GERAÇÃO DAS COORDENADAS DO EVR

Para a utilização do gerador de malha, é necessário que os EVRs sejam idealizados considerando quantidade de inclusões, dimensão, forma, etc. Para isso, é utilizado o software AutoCAD, visto que existem EVRs com até 45 inclusões circulares e a identificação das coordenadas dos mesmos manualmente é complexa e lenta.

Passo 1 – Inicialmente deve ser calculada a quantidade cada dimensão de agregado (ou inclusão) considerando a porcentagem de agregado inserido na matriz do EVR, que para o caso deste trabalho é de 40%, e considerando as 3 dimensões definidas para cada um deles;

Passo 2 – Depois de definir as quantidades deve ser feito o desenho do EVR utilizando as ferramentas internas do AutoCAD;


Passo 3 – Após desenhar o EVR com a escala em que se deseja trabalhar move-se o vértice inferior esquerdo para a origem (comando *Move* → (0,0,0));

Passo 4 – Para iniciar a extração dos dados, o comando *DX* + *enter* deve ser utilizado;

Passo 5 – É aberta uma janela onde a opção *Create a new data extraction* deve permanecer marcada e, em seguida, selecionar a opção *Next*;

Passo 6 – Cria-se o arquivo da pasta desejada;

Passo 7 – Deve ser selecionada a opção *Select objects in the current drawing* e com o

comando  devem ser selecionados os círculos que representam as inclusões do EVR, em seguida, selecionar a opção *Next*;

Passo 8 – Na janela aberta deve-se deixar marcada apenas a opção *Display all objects types* na parte inferior da esquerda e selecionar a opção *Next*;

Passo 9 – Na janela da direita deve-se deixar selecionada apenas a opção *Geometry*, em seguida, na parte da esquerda deixar selecionadas apenas as janelas de dados que são utilizados para a criação da malha no ANSYS, que são *Center X*, *Center Y* e *Radius*.

Passo 10 – Depois de avançar, deve-se desmarcar as 3 janelas inferiores da esquerda;

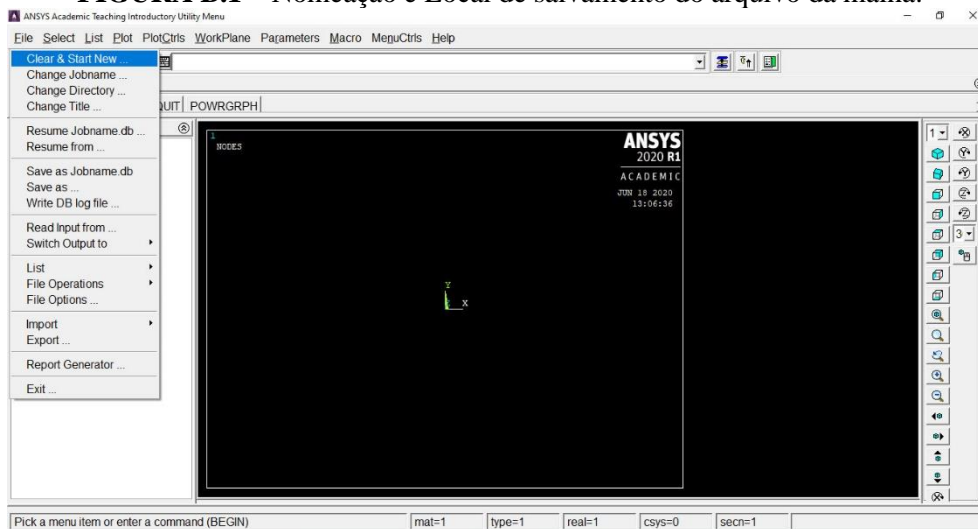
Passo 11 - Depois de avançar, selecionar a janela *Output data to external file*, escolher a pasta onde se deseja salvar o arquivo e selecionar *Next*;

Passo 12 – Salvar em .xls e selecionar *Finish*.

APÊNDICE C – UTILIZAÇÃO DO ANSYS PARA A GERAÇÃO DE MALHA

Para qualquer análise utilizando o Ansys deve ser feita uma configuração inicial na janela **File**, onde é nomeado o arquivo e definido seu local de salvamento, sendo necessário configurar as 4 primeiras linhas: **Clear & Start New**; **Change Jobname**; **Change Directory** e **Change Title**.

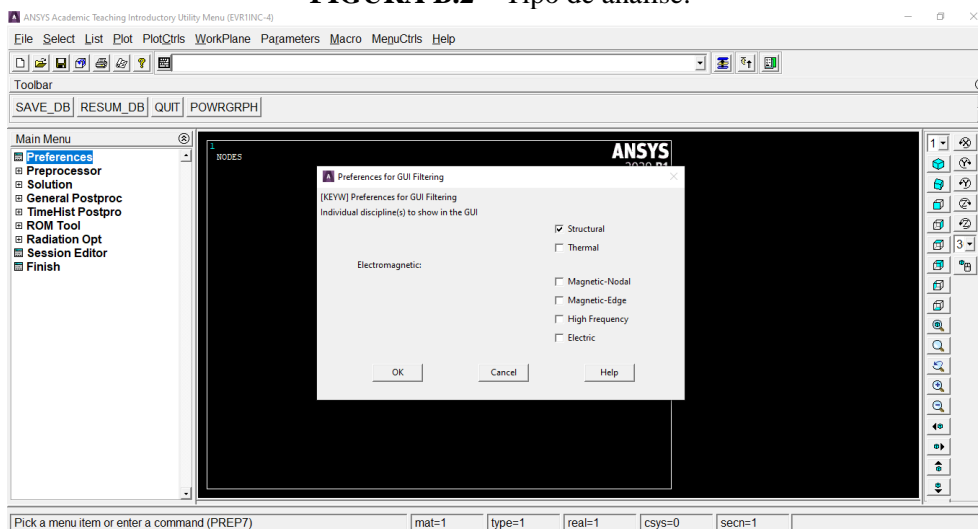
FIGURA B.1 – Nomeação e Local de salvamento do arquivo da malha.



Fonte: Autoria Própria (2021).

Em seguida, deve ser definida o tipo de análise com as opções **Preferences > Structural**.

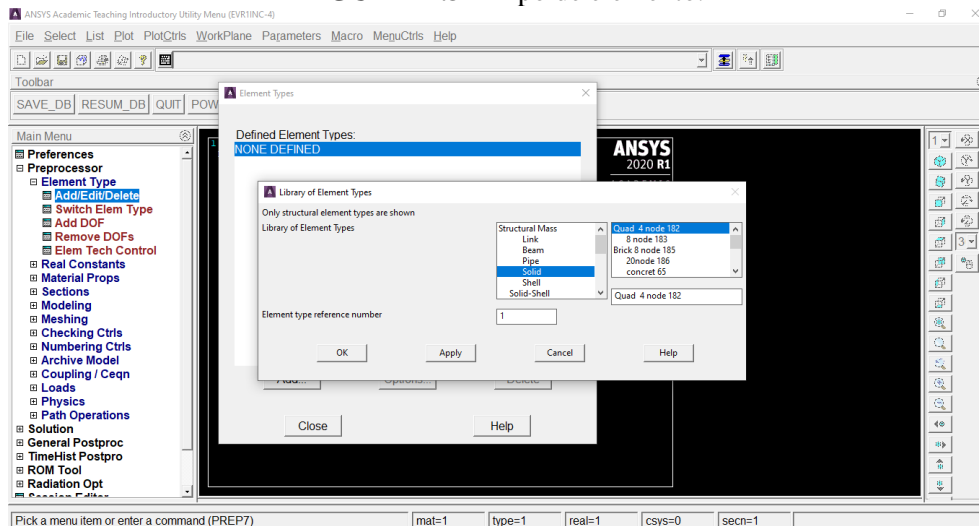
FIGURA B.2 – Tipo de análise.



Fonte: Autoria Própria (2021).

Deve ser determinado o tipo de elemento, que para a criação da malha será o elemento PLANE182, através do seguinte caminho: **Preprocessor > Element Type > Add/Edit/Delete > Add > Solid > Quad 4 node 182.**

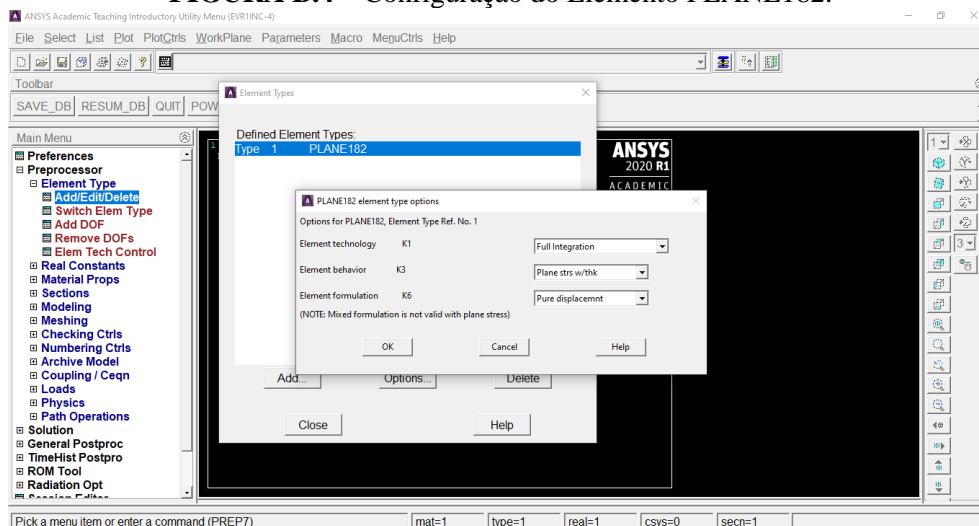
FIGURA B.3 – Tipo de elemento.



Fonte: Autoria Própria (2021).

Depois de definir o elemento, em **Options** as seguintes janelas devem estar assinaladas.

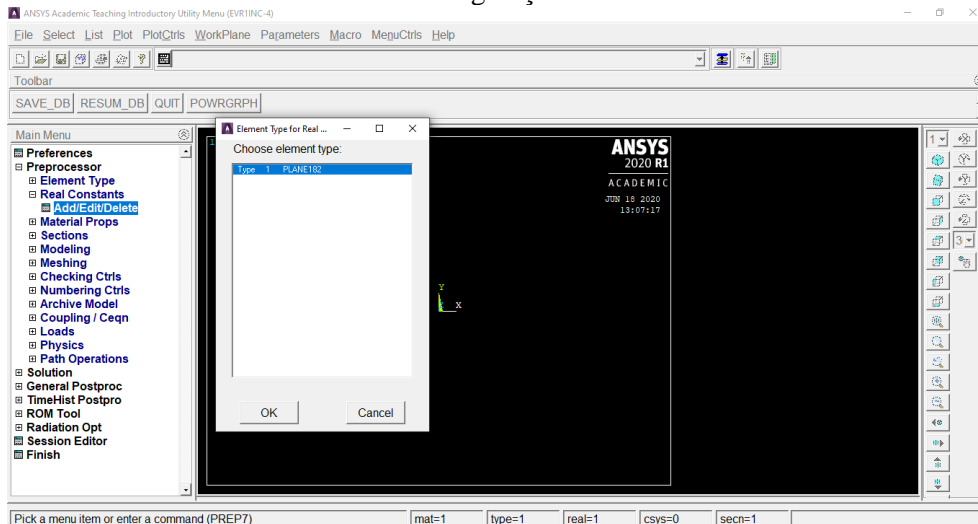
FIGURA B.4 – Configuração do Elemento PLANE182.



Fonte: Autoria Própria (2021).

Em seguida, ainda em **Preprocessor** deve-se adicionar o elemento **Type 1** através de **Real Constants > Add/Edit/Delete**.

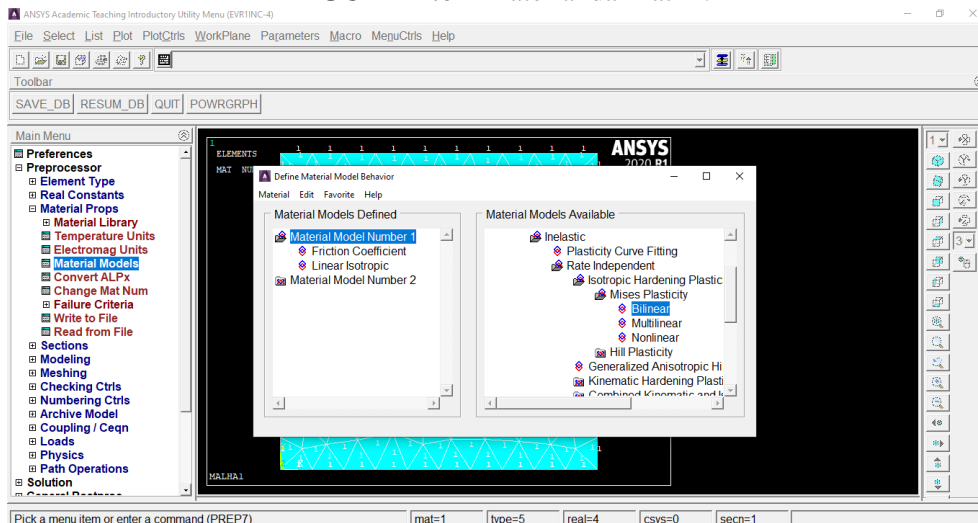
FIGURA B.5 – Configuração de Real Constants.



Fonte: Autoria Própria (2021).

O próximo passo é de grande importância, pois é nele que devem ser definidos os materiais que irão integrar a matriz e as inclusões do EVR. Inicialmente define-se a Matriz através do seguinte caminho **Preprocessor > Material Props > Material Models > Structural > Nonlinear > Inelastic > Rate Independent > Isotropic Hardening Plastic > Mises Plasticity > Bilinear**, como mostrado na Fig. (B.6).

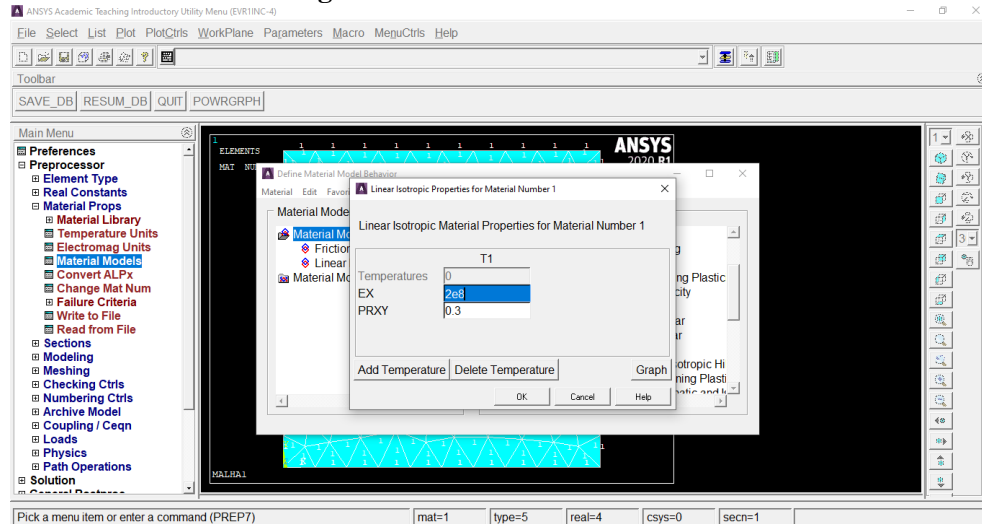
FIGURA B.6 – Material da Matriz.



Fonte: Autoria Própria (2021).

Depois disso, devem ser definidos os parâmetros desse material (Módulo de Young e Coeficiente de Poisson), como mostra a Fig. (B.7).

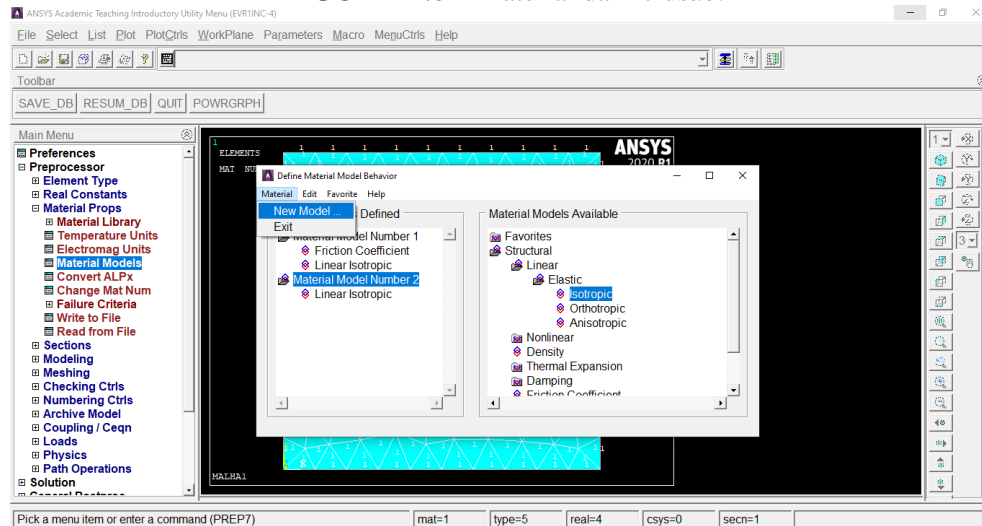
Figura B.7 – Parâmetros da Matriz.



Fonte: Autorial Própria (2021).

Para a inserção do material da inclusão, ainda em **Material Models**, deve ser selecionado **New Model**, e como a inclusão é definida como sendo elástica deve-se admitir **Structural > Linear > Elastic > Isotropic**, como é mostrado na Fig. (B.8). Em seguida, é aberta uma janela para que se defina seus parâmetros, similar ao que foi feito para a matriz.

FIGURA B.8 – Material da Inclusão.

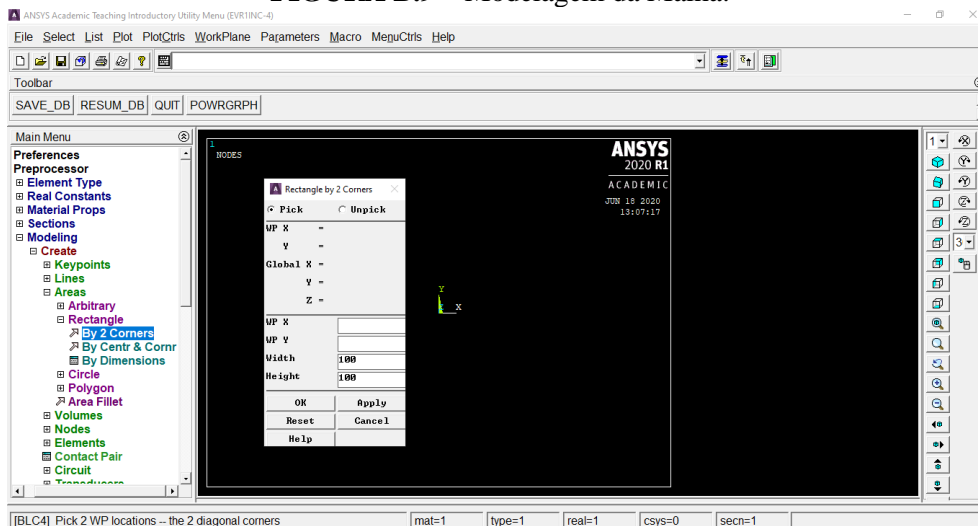


Fonte: Autorial Própria (2021).

Depois das definições mostradas anteriormente, deve-se começar a modelagem da malha com a criação das áreas, seguindo o caminho: **Preprocessor > Modeling > Create**

> Areas > Rectangle > By 2 Corners e preenchendo os campos **Width** e **Height**, como mostra a Fig. (B.9).

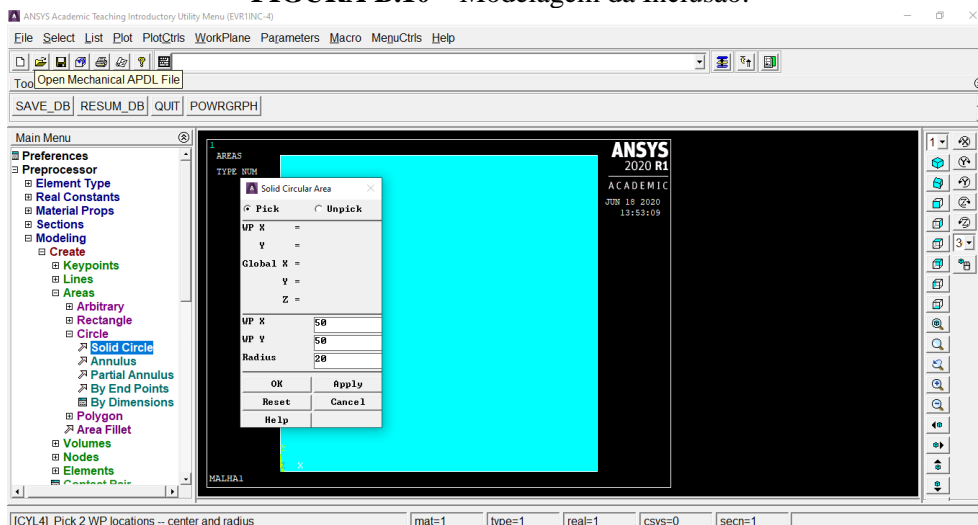
FIGURA B.9 – Modelagem da Malha.



Fonte: Autoria Própria (2021).

Depois de definido o retângulo que representa o EVR, devem ser definidas as inclusões, que para esse exemplo é apenas uma e tem formato circular. O caminho é: **Preprocessor > Modeling > Create > Areas > Circle > Solid Circle** e para criá-lo deve-se definir a posição de seu centro em X e em Y, além de seu raio, como mostra a Fig. (B.10).

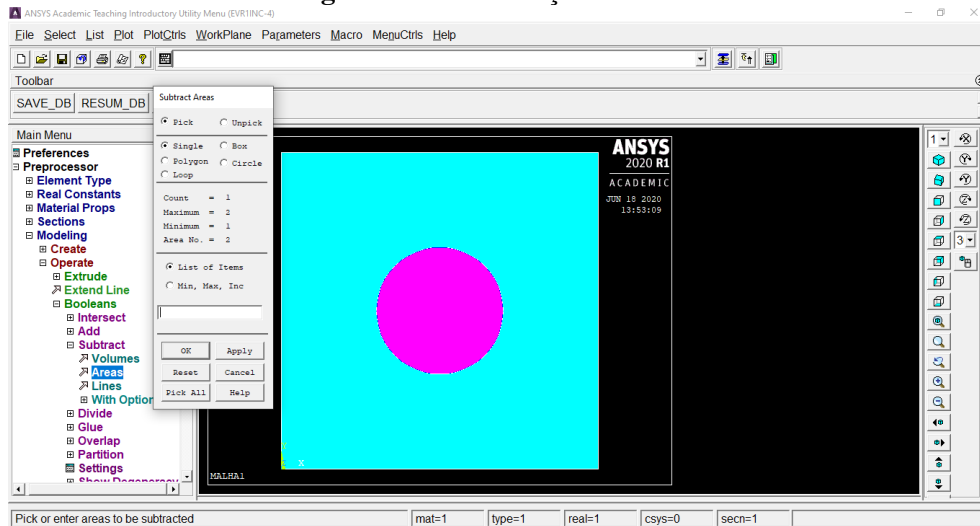
FIGURA B.10 – Modelagem da Inclusão.



Fonte: Autoria Própria (2021).

Para que seja possível diferenciar o Material dessas duas áreas é preciso criar um vazio no local da inclusão, seguindo: **Preprocessor > Modeling > Operate > Booleans > Subtract > Areas**. Feito isso, o círculo que representa a inclusão deve ser selecionado e **OK**. Como mostra a Fig. (B.11).

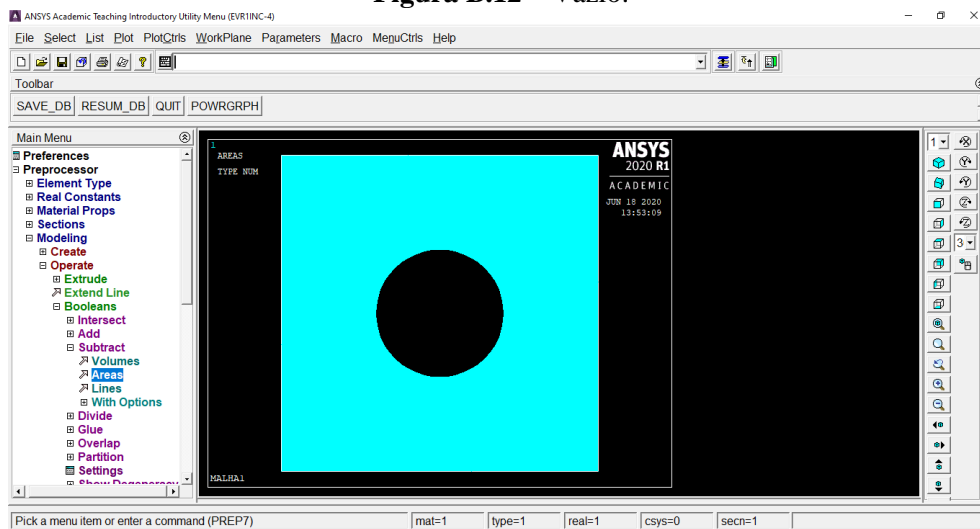
Figura B.11 – Definição de Vazio.



Fonte: Autoria Própria (2021).

O vazio pode ser observado na Fig. (B.12).

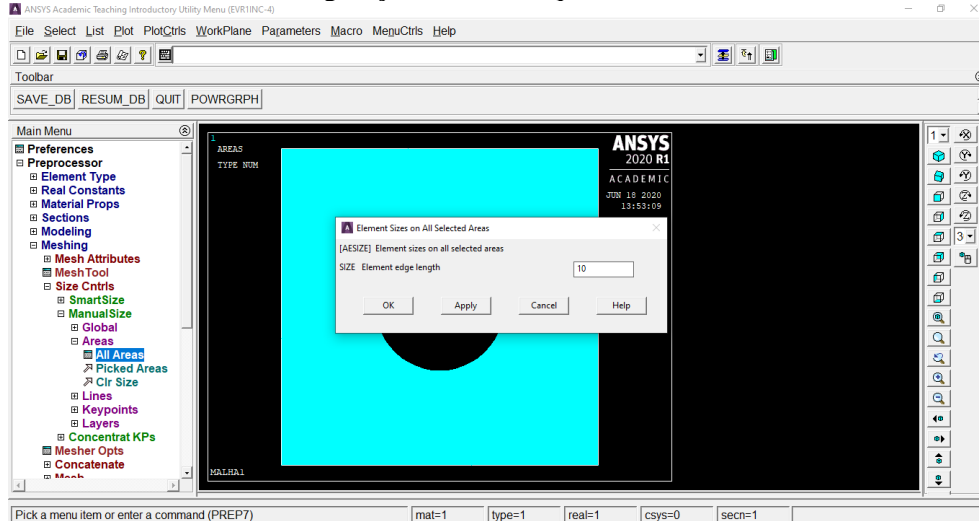
Figura B.12 – Vazio.



Fonte: Autoria Própria (2021).

Depois disso, devem ser feitas as configurações de malha quanto ao tamanho dos elementos em **Preprocessor > Meshing > Size Cntrls > Manual Size > Areas > All Areas**, como mostra a Fig. (B.13).

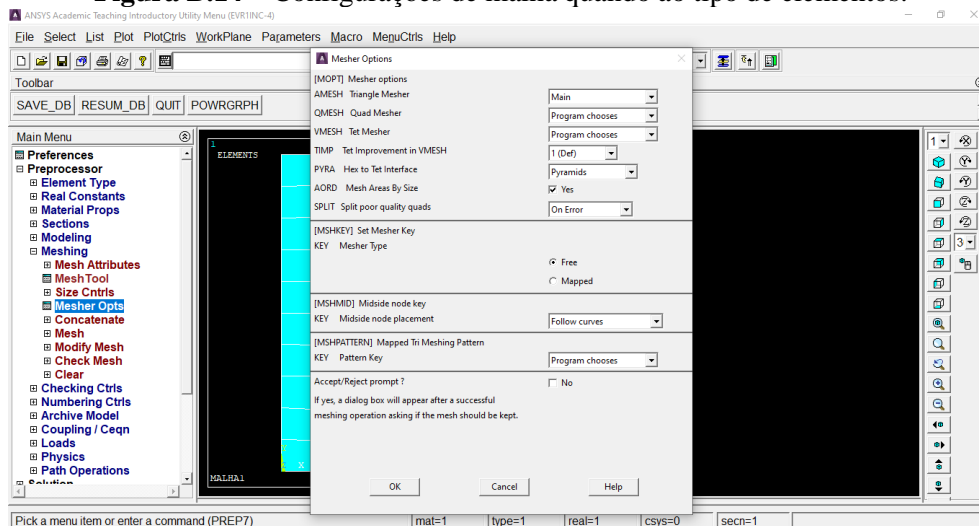
FIGURA B.13 – Configurações de malha quanto ao tamanho dos elementos.



Fonte: Autoria Própria (2021).

Quanto ao tipo de elemento em **Preprocessor > Meshing > Mesher Opts**, para o caso deste trabalho os elementos são triangulares, assim as configurações mostradas na Fig. (B.14) devem ser selecionadas.

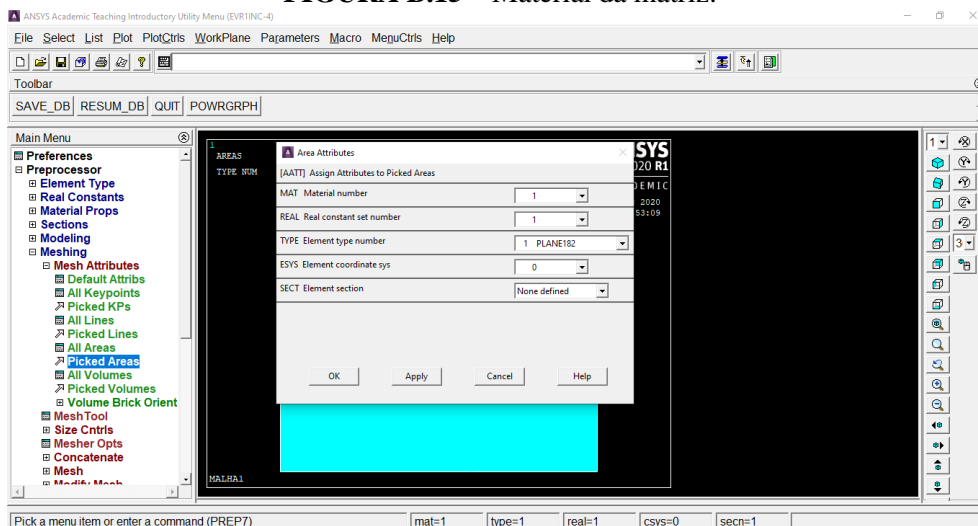
Figura B.14 – Configurações de malha quando ao tipo de elementos.



Fonte: Autoria Própria (2021).

Em seguida, deve ser criada a malha da matriz, para isso deve ser atribuído o Material 1 a ela, através de: **Preprocessor > Meshing > Mesh Attributes > Picked Areas**, com a configuração mostrada na Fig. (B.15).

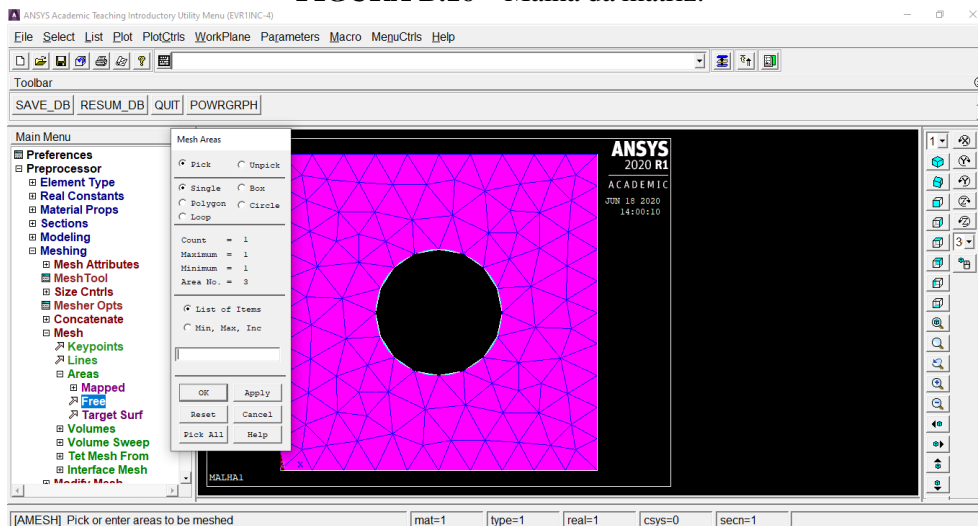
FIGURA B.15 – Material da matriz.



Fonte: Aatoria Própria (2021).

Depois de definir o material, aplica-se a malha na matriz pelo caminho: **Preprocessor > Meshing > Mesh > Areas > Free**, como mostra a Fig. (B.16). Após selecionar a matriz dê um **OK**.

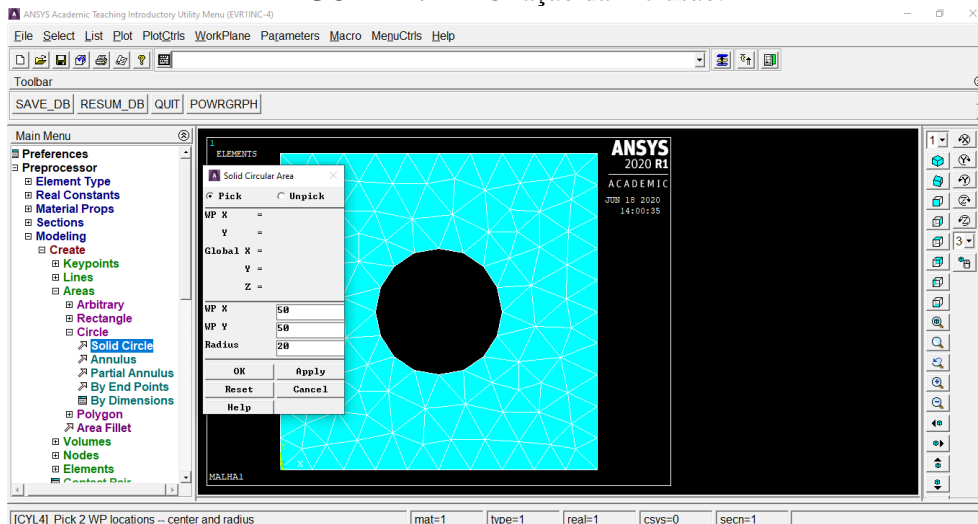
FIGURA B.16 – Malha da matriz.



Fonte: Aatoria Própria (2021).

Em seguida, a inclusão deve ser criada com o mesmo procedimento de criação de Area: **Preprocessor > Modeling > Create > Areas > Circle > Solid Circle**. Como está ilustrado na Fig. (B.17).

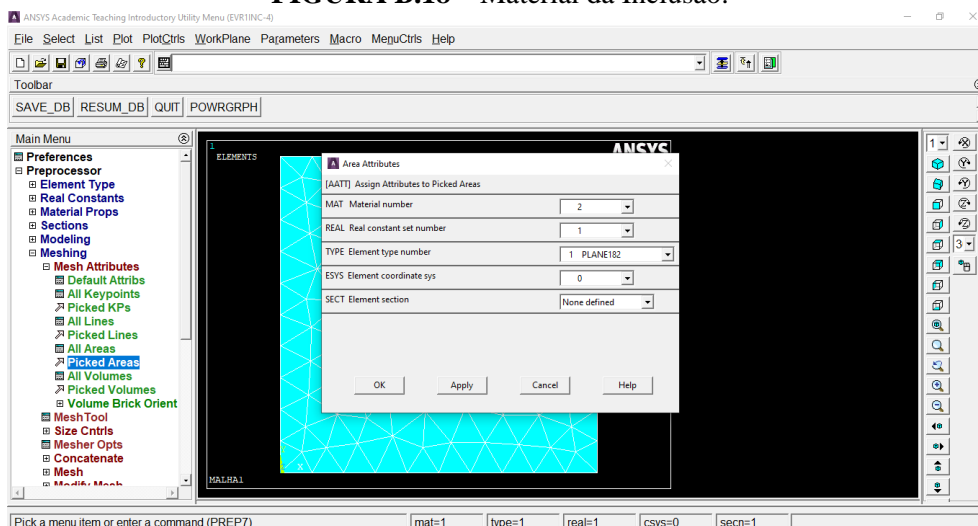
FIGURA B.17 – Criação da Inclusão.



Fonte: Aatoria Própria (2021).

Depois de criada a inclusão, seu material deve ser definido em **Preprocessor > Meshing > Mesh Attributes > Picked Area**, ao selecionar a área da inclusão, a janela **MAT Material Number** deve constar o material 2, como observa-se na Fig. (B.18).

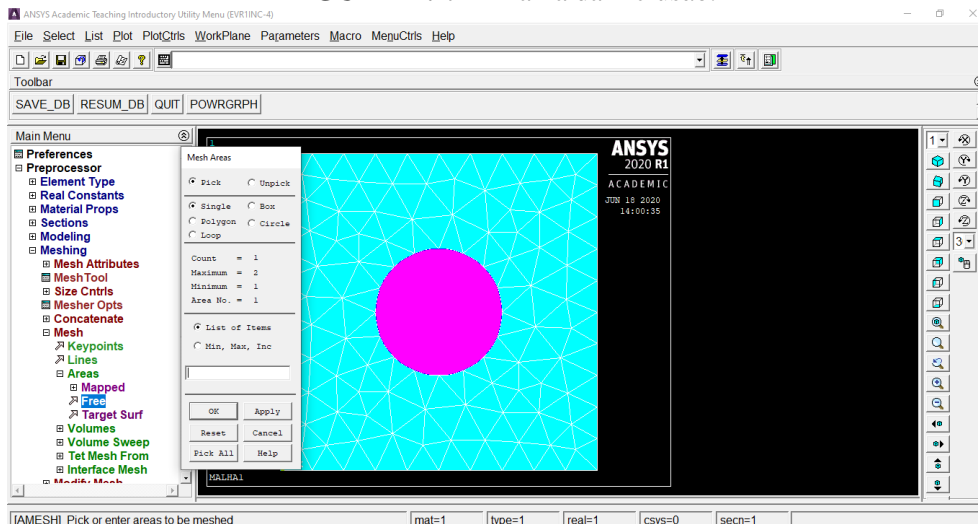
FIGURA B.18 – Material da Inclusão.



Fonte: Aatoria Própria (2021).

Com o procedimento análogo ao da matriz cria-se a malha da inclusão em **Preprocessor > Meshing > Mesh > Areas > Free**, ao selecionar a área da inclusão dê um **OK**, como mostra a Fig. (B.19).

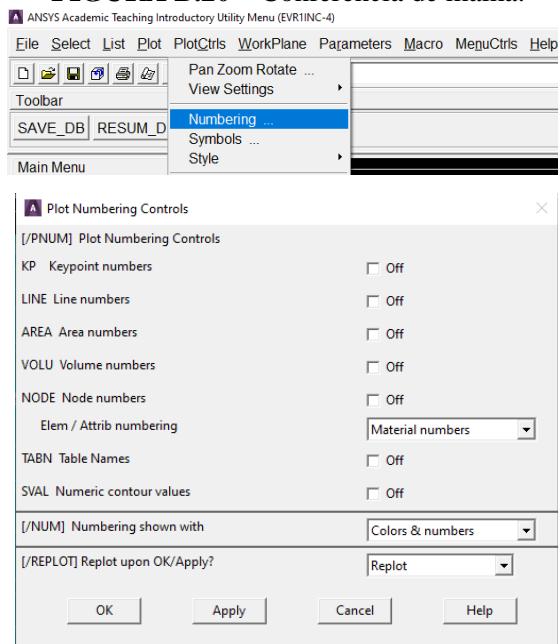
FIGURA B.19 – Malha da Inclusão.



Fonte: Autoria Própria (2021).

Para conferir se as malhas foram definidas de forma correta seleciona-se na janela **PlotCtrls** a opção **Numbering** e na janela que é aberta, a opção **Material numbers** em **Elem / Attrib numbering**, como é possível visualizar na Fig. (B.20).

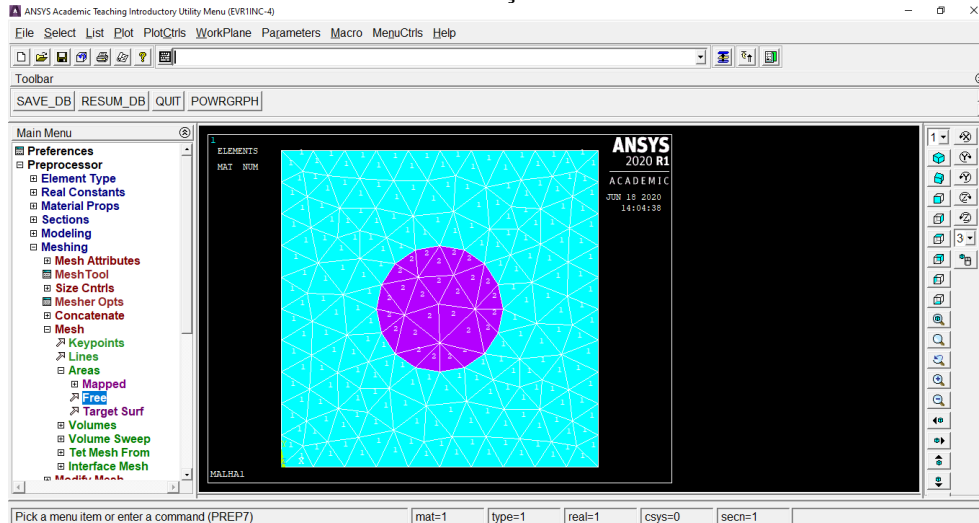
FIGURA B.20 – Conferência de malha.



Fonte: Autoria Própria (2021).

A visualização é mostrada na Fig. (B.21), onde é evidenciado o Material 1 da Matriz e o Material 2 da inclusão.

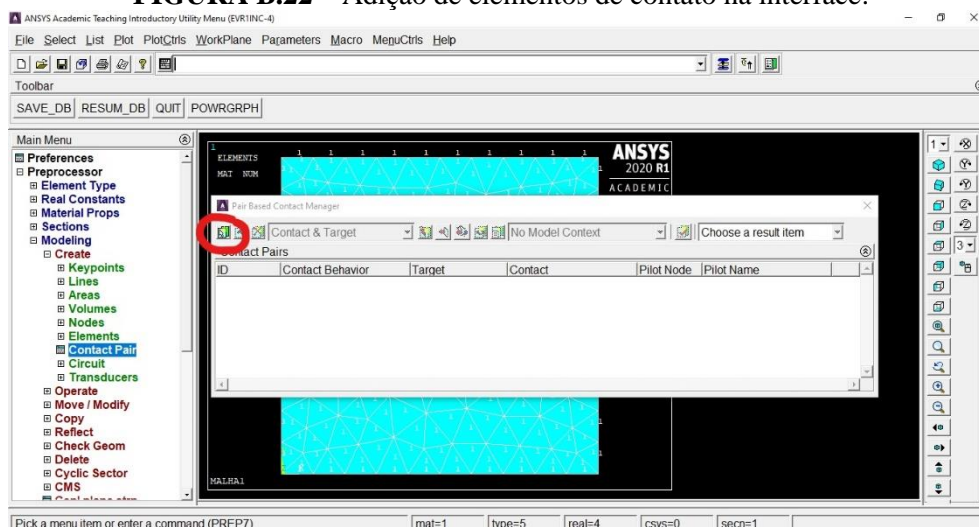
FIGURA B.21 – Visualização de materiais na malha.



Fonte: Autoria Própria (2021).

Para este trabalho serão utilizados elementos de contato na Zona de Transição Interfacial (entre matriz e inclusão), assim os passos são: **Preprocessor** > **Modeling** > **Create** > **Contact Pair**. Depois disso, a janela circulada de vermelho na Fig. (B.22) deve ser selecionada.

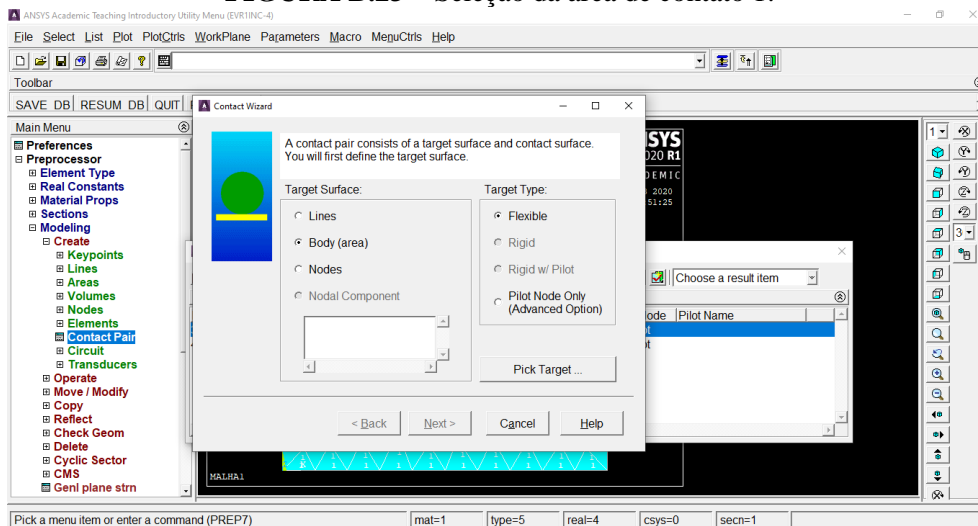
FIGURA B.22 – Adição de elementos de contato na interface.



Fonte: Autoria Própria (2021).

Em seguida, deve ser selecionada a opção **Pick Target** e marcada a matriz como primeira área de contato e **Next**. Como mostra a Fig. (B.23).

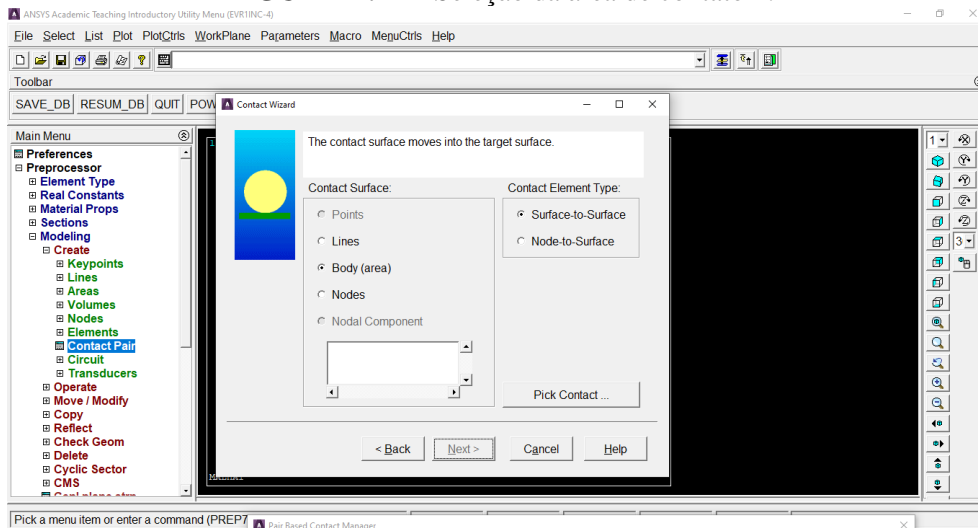
FIGURA B.23 – Seleção da área de contato 1.



Fonte: Autoria Própria (2021).

Depois, deve ser selecionada a opção **Pick Contact** e marcada a inclusão como segunda área de contato e **Next**. Como mostra a Fig. (B.24).

FIGURA B.24 – Seleção da área de contato 2.

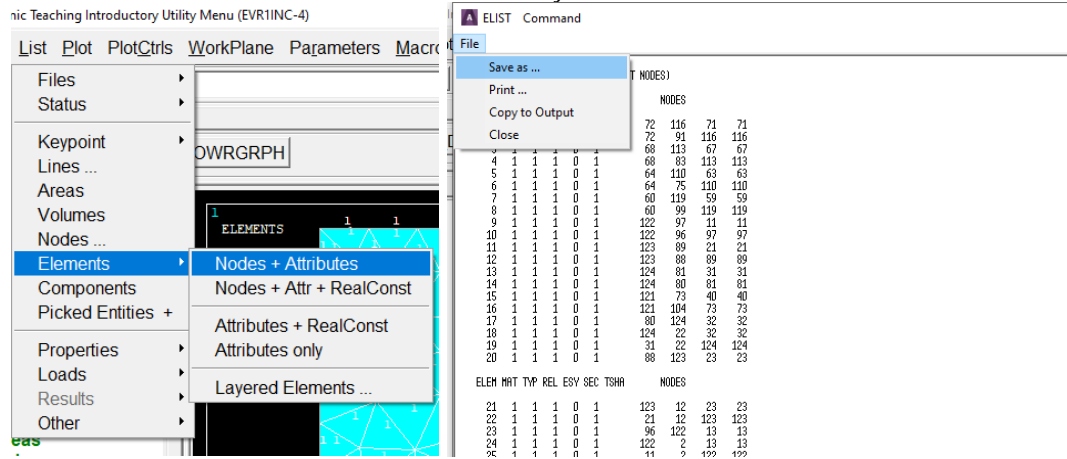


Fonte: Autoria Própria (2021).

A última configuração de elemento de contato é quanto aos parâmetros, depois de definidos, deve ser selecionado **Create**, como mostra a Fig. (B.25).

elementos e suas respectivas conectividades, podendo ser exportados em **File > Save as**. Como pode ser visto na Fig. (B.27).

FIGURA B.27 – Extração de Conectividade.



Fonte: Autoria Própria (2021).

APÊNDICE D – CRIAÇÃO DOS ELEMENTOS RETANGULARES DE CONTATO E FRATURA COESIVA

Nas interfaces, o ANSYS cria apenas elementos lineares com dois nós, sendo esses nós duplos, mas não cria a conectividade em sentido anti-horário para os elementos finitos com quatro nós. Dessa forma, através de um programa em MATLAB de autoria própria foi necessário fazer a conectividade dos elementos retangulares de contato e fratura coesiva, com quatro nós. Esse processo é explicado abaixo.

Inicialmente, faz-se uma busca na matriz de Coordenadas X e Y de cada nó para que se identifique os nós duplos, ou seja, aqueles que têm CoordX e CoordY idênticas, pois esses nós estão localizados na interface entre matriz e inclusão, sendo um deles pertencente a matriz e outro a inclusão. Tal processo é feito através dos comandos a seguir.

```
clc
clear all

load Coordenadas.txt;

nrows=size(Coordenadas,1);

for i=1:nrows
    for k=i:nrows
        if (Coordenadas(i,2) == (Coordenadas(k,2)) &&
(Coordenadas(i,3) == (Coordenadas(k,3))
            if (Coordenadas(i,1) == (Coordenadas(k,1))
                else
                    disp( [ num2str(Coordenadas(i,1))    ' '
num2str(Coordenadas(k,1))    ] );
                end
            end
        end
    end
end
```

Agora com os nós duplos identificados é possível criar o elemento retangular de contato e fratura coesiva e sua respectiva conectividade.

O ANSYS libera como dado de saída o par de contato que ele criou, fazendo a leitura desse par e dos nós duplos a cada um dos dois nós correspondentes ao par tem-se o retângulo com quatro nós, através dos comandos abaixo.

```
clc
clear all
```

```

load Conectividade.txt;
load NosDuplos.txt;

nrows1=size(Conectividade,1);
nrows2=size(NosDuplos,1);

for i=1:nrows1
    for k=1:nrows2
        if (Conectividade(i,1)) == (NosDuplos(k,2))
            aux1(i,1)=Conectividade(i,1);
            aux2(i,1)=NosDuplos(k,1);
        elseif (Conectividade(i,2)) == (NosDuplos(k,2))
            aux3(i,1)=Conectividade(i,2);
            aux4(i,1)=NosDuplos(k,1);
        end
    end
end

for i=1:size(aux1,1)
    k=1;
    disp( [' ' num2str(i) ' 1 ' num2str(aux2(i,1)) ' '
num2str(aux4(i,1)) ' ' num2str(aux3(i,1)) ' ' num2str(aux1(i,1)) ' '
]);
end

```

Com isso são criados os elementos retangulares de contato e fratura coesiva com conectividade no sentido anti-horário e no formato como é feita a leitura no programa em FORTRAN da Profa. DSc. Gabriela Rezende Fernandes.

APÊNDICE E – ELIMINAÇÃO DOS NÓS DUPLOS QUANDO NÃO EXISTE FRATURA

Com os avanços das pesquisas realizadas neste trabalho definiu-se, para uma melhor representação do concreto, que seriam criados EVRs com fratura em apenas algumas de suas inclusões (médias e grandes ou apenas nas grandes) e não em todas as inclusões como usualmente era feito. Para isso, fez-se necessário a eliminação dos nós duplos que existiam sobre as interfaces das inclusões que não teriam fratura. Essa etapa foi feita por meio de um programa na linguagem Python, descrito a seguir.

Inicialmente, identificou-se os nós que permaneceriam duplos, ou seja, aqueles que fazem parte da conectividade dos pares de fratura e contato:

```
In [1]: import numpy as np
import pandas as pd

In [2]: #Exclusão dos nós que permanecerão duplos
nospd = pd.read_excel('nos.xlsx',
                    header = None)
nos = nospd.to_numpy()

conecpd = pd.read_excel('conec.xlsx',
                    header = None)
conec = conecpd.to_numpy()

#Excluindo os Nós que permanecerão duplos
for k in conec.T[1]:
    idx = 0
    for m in nos[:,1]:
        if k==m:
            nospd.drop(index = idx, inplace=True)
            idx -= 1
        idx += 1
nos = nospd.to_numpy()

print(nos)
```

Em seguida, os nós que serão excluídos são identificados na matriz de conectividade das células triangulares e na matriz de conectividade dos elementos retangulares de fratura e contato, como é mostrado abaixo.

```
In [4]: #Matriz com os nós repetidos
duplopd = pd.read_excel('duplo.xlsx',
                        header = None)
duplo = duplopd.to_numpy()
duplodic = {}
cont = 0
for i in duplo[:,0]:
    duplodic[int(duplo[cont,1])] = int(i)
    cont += 1

#Matriz com as coordenadas
coordpd = pd.read_excel('coord.xlsx',
                        header = None)
coord = coordpd.to_numpy()

#Matriz com as células
celpd = pd.read_excel('cel.xlsx',
                      header = None)
cel = celpd.to_numpy()

#Matriz com os elementos de fratura
fratpd = pd.read_excel('frat.xlsx',
                       header = None)
frat = fratpd.to_numpy()
```

Depois de identifica-los, eles são excluídos da matriz de Coordenadas e a mesma é renumerada. Após sua renumeração, retorna-se as matrizes de conectividade e substitui-se aqueles nós excluídos pelos seus duplos e aqueles renumerados pelo nó com nova numeração. Como pode ser observado abaixo.

```

#Excluindo vértices repetidos da matriz de coordenadas
for i in duplo.T[1]:
    idx = 0
    for j in coord[:,0]:
        if i==j:
            coordpd.drop(index = idx, inplace=True)
            idx -= 1
        idx += 1
coord = coordpd.to_numpy()
#print(coord)

#Substituindo vértices repetidos na matriz das células
celpd[2].replace(duplodid, inplace=True)
celpd[3].replace(duplodid, inplace=True)
celpd[4].replace(duplodid, inplace=True)

#Substituindo vértices repetidos na matriz dos elementos de fratura
fratpd[2].replace(duplodid, inplace=True)
fratpd[3].replace(duplodid, inplace=True)
fratpd[4].replace(duplodid, inplace=True)
fratpd[5].replace(duplodid, inplace=True)

#Corrigindo numeração dos vértices
corr = {1:1}
for i in range(1, len(coord[:,0])):
    if (coord[i, 0]-corr[coord[i-1, 0]])==1:
        corr[int(coord[i, 0])] = int(coord[i, 0])
    else:
        corr[int(coord[i, 0])] = int(corr[coord[i-1, 0]]+1)

coordpd[0].replace(corr, inplace=True)
celpd[2].replace(corr, inplace=True)
celpd[3].replace(corr, inplace=True)
celpd[4].replace(corr, inplace=True)
fratpd[2].replace(corr, inplace=True)
fratpd[3].replace(corr, inplace=True)
fratpd[4].replace(corr, inplace=True)
fratpd[5].replace(corr, inplace=True)

#Imprimindo matrizes prontas
display(duplopd)
display(coordpd)
display(celpd)
display(fratpd)

```

Por fim, é feita a exportação para arquivos em .xls, ou seja, compatíveis com planilhas em Excel:

```

In [5]: #duplopd.to_excel('MatrizDuplicados.xlsx', index=False, header=False)
        coordpd.to_excel('MatrizCoordenadas.xlsx', index=False, header=False)
        celpd.to_excel('MatrizCélulas.xlsx', index=False, header=False)
        fratpd.to_excel('MatrizEF.xlsx', index=False, header=False)

```