Universidade Federal de Goiás
Unidade Acadêmica Especial de Física e Química

A inserção de tópicos de Física Não-Linear no Ensino Médio: Desafios e Potencialidades.

Douglas Xavier de Andrade

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Goiás no Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: *Paulo Eduardo Gonçalves de Assis*
coorientador: *Petrus Henrique Ribeiro dos Anjos*

Catalão

Setembro de 2016

sibi
sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Nome completo do autor: Douglas Xavier de Andrade

Título do trabalho: A inserção de tópicos de Física Não-Linear no Ensino Médio: Desafios e potencialidades.

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Douglas Xavier de Andrade
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 17 / 10 / 16

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física

Folha de Aprovação

Assinatura dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a defesa de Dissertação de Mestrado do candidato **Douglas Xavier de Andrade** *realizada em 13 de Outubro de 2016.*

Paulo Eduardo Gonçalves de Assis
Prof. Dr. Paulo Eduardo Gonçalves de Assis

Tânia Maria Nunes Gonçalves
Profa. Dra. Tânia Maria Nunes Gonçalves

Prof. Dr. Nilton Luís Moreira

Prof. Dr. Luiz Gonzaga Roversi Genovese

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Andrade, Douglas xavier de
A Inserção de Tópicos de Física Não-Linear no Ensino Médio: Desafios e Potencialidades. [manuscrito] / Douglas xavier de Andrade. - 2016.
xii, 105 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Eduardo Gonçalves de Assis; co orientador Dr. Petrus Henrique Ribeiro dos Anjos.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Física e Química, Catalão, Programa de Pós Graduação em Ensino de Física, Catalão, 2016.
Bibliografia.

1. Fenômenos ondulatórios não-lineares. 2. Ensino de Física Contemporânea no Ensino Médio. 3. Sólitons. I. Assis, Paulo Eduardo Gonçalves de, orient. II. Título.

CDU 53

Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física

UFG

Relatório de Defesa de Dissertação
Candidato: **Douglas Xavier de Andrade**

Aos 13/10/2016 às 09:00 horas, realizou-se na Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão a Defesa de Dissertação de Mestrado sob o título: Tópicos de Física Não-Linear no Ensino Médio: Desafios e Potencialidades apresentada pelo candidato: **Douglas Xavier de Andrade** .Ao final dos trabalhos a banca examinadora reuniu-se em sessão reservada para o julgamento tendo os membros chegado ao seguinte resultado:

Participantes da Banca:	Função	Instituição
Prof. Dr. Paulo Eduardo Gonçalves de Assis	Presidente	IF/UFG
Profa. Dra. Tânia Maria Nunes Gonçalves	Titular	IMTec/UFG
Prof. Dr. Nilton Luis Moreira	Titular	IFQ/UFG
Prof. Dr. Luiz Gonzaga Roversi Genovese	Titular	IF/UFG

Resultado Final: APROVADO.

Parecer da Comissão Julgadora:

APROVADO MEDIANTE CORREÇÕES SUGERIDAS PELA BANCA EXAMINADORA

Encerrada a sessão reservada, o presidente informou ao público presente o resultado. Nada mais havendo a tratar, a sessão foi encerrada e, para constar eu Milana Jacob da Silva representante do Programa de Pós Graduação em Ensino de Física lavrei o presente relatório que será assinado por mim e pelos membros da banca examinadora.

Paulo Eduardo Gonçalves de Assis
Prof. Dr. Paulo Eduardo Gonçalves de Assis

Tânia Maria Nunes Gonçalves
Profa. Dra. Tânia Maria Nunes Gonçalves

Prof. Dr. Nilton Luis Moreira

Prof. Dr. Luiz Gonzaga Roversi Genovese

Milana Jacob da Silva
Representante do PPG Milana Jacob da Silva

( ) Não houve alteração no título. ( ) Houve. O novo título passa a ser:

A Deus e a Nossa Senhora Aparecida que guiaram meus passos e iluminaram meus caminhos e decisões.

Aos meus pais, Divino Andrade e Gleicimar Xavier, pelo esforço, apoio e compreensão disponibilizados durante minha trajetória escolar.

A meu irmão, Cássio Andrade, pelo companherismo.

Agradeço imensamente a Deus e a Nossa Senhora Aparecida.

Ao meu pai, Divino, que me ensinou a lutar e persistir e me mostrou que meus limites eram além do que eu imaginava.

A minha mãe, Gleicimar, que me ensinou que para caminhar é preciso humildade e amor.

Ao meu irmão, Cássio Andrade, e à minha cunhada, Camila Vieira, pela compreensão nos momentos difíceis e pelo apoio emocional.

Ao meu amigo, Gustavo, que me ensinou que a ter um pouco, ou muito, de humor, empatia, humildade e desapego.

Ao meu amigo, Marco Pessoa, pelo apoio nos momentos difíceis e por ter se disposto a ouvir com atenção todas as minhas angústias e medos.

Ao meu orientador, Paulo Eduardo, que me ensinou a observar os detalhes e disponibilizou boa parte do seu tempo para me socorrer nos momentos de dúvidas.

Ao meu coorientador, Petrus, pelas correções e sugestões.

Agradeço a todos que me ensinaram a caminhar, aos que caminharam comigo, e as vezes me carregaram nos braços.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

RESUMO

A INSERÇÃO DE TÓPICOS DE FÍSICA NÃO-LINEAR NO ENSINO MÉDIO: DESAFIOS E PERSPECTIVAS.

Douglas Xavier de Andrade

ORIENTADOR: *Paulo Eduardo Gonçalves de Assis*
COORIENTADOR: *Petrus Henrique Ribeiro dos Anjos*

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Goiás no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Entre os principais problemas enfrentados pelos professores de Física da Educação Básica brasileira se encontram: o distanciamento dos conteúdos estudados com o cotidiano dos estudantes e a falta de material e metodologias adequados para se trabalhar tópicos de Física Moderna e Contemporânea em sala de aula. Diante da necessidade de dar encaminhamentos, ao menos em parte, aos problemas, acima citados, os autores desta dissertação buscaram atuar basicamente em três pontos fundamentais: **1)Currículo** - expandir os conteúdos de Física Ondulatória para abranger aspectos não-lineares de sistemas físicos conhecidos como o sistema massa-mola, o pêndulo simples, as ondas numa corda e em águas rasas com o intuito de introduzir o conceito de sóliton e algumas de suas aplicações para que professores da Educação Básica possam discutí-los em sala de aula; **2) Material adaptável e acessível de divulgação de tópicos de Física Não-Linear** - discorrer sobre as potencialidades educacionais da criação de uma página na internet usando as ferramentas disponibilizadas pelo "google sites" e apresentar a página de divulgação "Sólitons e fenômenos não-lineares" e **3) Metodologia** - relatar as experiências da discussão de tópicos de Física Não-Linear no Ensino Médio verificando os desafios e potencialidades da utilização de uma página na internet no contexto de sala de aula de uma escola pública de Ensino Médio do Estado de Goiás.

Dessa forma, inicialmente é introduzido o tema de estudo através da apresentação dos objetivos da pesquisa e da estrutura da dissertação e em seguida são apresentados tópicos de Física não-linear de sistemas físicos conhecidos geralmente tratados apenas em uma forma linear no Ensino Médio a saber: o pêndulo simples, o sistema massa-mola e equação de onda linear. O estudo desses sistemas em uma forma não-linear nos levam respectivamente à equação de Sine-Gordon (quando construímos um arranjo de pêndulos acoplados), ao Modelo de Toda (quando estudamos uma rede com N massa-molas ligados), e a equação de KdV. Após discutidas essas equações são apresentadas as suas soluções para 1 e 2-sólitons utilizando o método de Hirota. Após a análise dos sistemas supracitados discorremos sobre alguns fenômenos físicos naturais onde os sólitons estão presentes e algumas aplicações tecnológicas dos mesmos.

Posteriormente é feita uma revisão de literatura, onde utilizamos concepções teóricas para fundamentar a utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no ensino de Ciências, e apresentada uma página na internet construída para introduzir os assuntos de Física Não-Linear no Ensino Médio. Por fim, discorre-se sobre uma sequência didática pensada de forma a propiciar o uso da página da internet em sala de aula e são relatados os resultados da implementação da sequência didática em sala de aula indicando que a criação e utilização de uma página na internet é uma importante ferramenta para se trabalhar assuntos de Física Não-Linear no Ensino Médio ao permitir o uso de diversos objetos virtuais de aprendizagem e motivar a continuidade do processo de aprendizagem fora do contexto de sala de aula.

Palavras-chaves: 1. Fenômenos ondulatórios não-lineares. 2. Ensino de Física Contemporânea no Ensino Médio. 3. Sólitons

Catalão

Setembro de 2016

ABSTRACT

The inclusion of non- linear physics topics in high school : Challenges and prospects.

Douglas Xavier de Andrade

Supervisor(s): *Paulo Eduardo Gonçalves de Assis*
Coorientador: *Petrus Henrique Ribeiro dos Anjos*

Abstract of masters thesis submitted to Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Goiás no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

Among the main problems faced by Physics teachers in the Brazilian Basic Education system are: the distance of the contents studied from the daily lives of students and the lack of materials and methodologies suitable to work topics of Modern and Contemporary Physics in the classroom. Given the need to give referrals, at least in part, the problems mentioned above, the authors of this paper sought basically to work in three fundamental points: **1) Curriculum** - expand undulating physics content to cover non-linear aspects of physical systems known such as the mass-spring system, the simple pendulum, waves on a string and shallow water in order to introduce the concept of soliton and some of its applications. **2) adaptable and accessible material for topics of Physics Nonlinear** - talk about the educational potential of creating a website using the tools provided by "google sites"and present disclosure page (Solitons and phenomena nonlinear) and **3) methodology** - report the experiences of the discussion of topics in nonlinear physics for high school students verifying the challenges and prospects of use of a website in the classroom context of a school public high school in the state of Goiás.

Thus, it is first introduced the subject of study by presenting the research objectives and the dissertation of the structure and then we present topics of nonlinear physics based on systems which are usually treated only in a linear fashion in high school such as: the simple pendulum (when built a pendulum corresponding to an arrangement of coupled pendula), the mass-spring system (when we study a chain of particles coupled to each other by means of springs) and linear wave equation. The study of these systems leads respectively to the equation Sine-Gordon, the Toda model, and KdV equation when they are treated in a non-linear fashion. After these equations are discussed presented their solutions 1- and 2-solitons solutions using Hirota method. After analyzing the above systems, we discuss some natural physical phenomena where solitons are present and some of their technological applications.

Later we perform a review of the literature, where we use theoretical concepts to support the use of Information and Communication Technologies (ICT) in science education, and presented a website built to introduce the subjects of nonlinear Physics in high school. Then we discuss a teaching sequence designed in order to provide the use of the internet page in the classroom and the results of the didactic sequence implementation are reported in the classroom indicating that the creation and use of a website is a important tool to work subjects of Nonlinear Physics in high school to allow the use of multiple virtual learning objects and motivate the continuity of the learning process outside the classroom context.

Keywords: 1. Nonlinear wave phenomena. 2. Contemporary physics teaching in high school.3. Solitons

CATALÃO

SEPTEMBER 2016

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Existe, há bastante tempo, um consenso, em nível nacional e internacional, quanto à necessidade de introduzir conteúdos de Física Contemporânea no currículo de Física das escolas de Nível Médio (e.g., Jones, 1991 e 1992; Aubrecht, 1989; Stannard, 1990; Gil e Solbes, 1993; Fischler e Lichtfeldt, 1992; Arons, 1990; Cuppari et al, 1997; Lawrence, 1996). Tal tendência se verifica tanto nos documentos oficiais que versam sobre a educação brasileira, onde vale a pena destacar os Parâmetros Curriculares Nacionais, que ressaltam como importante a incorporação de temáticas, além da fronteira dos conteúdos clássicos que estão presentes há vários anos no Ensino Médio, que discutam a Física e a tecnologia desenvolvidas nos dias atuais, quanto na literatura na área de Ensino de Física onde se defende que o ensino de tópicos da Física Moderna e Contemporânea[1] aos estudantes da Educação Básica pode contribuir para que os mesmos obtenham uma visão mais coerente da Física, como também da natureza do trabalho científico.

Mas, na prática, pouco tem sido feito nessa linha. Existem propostas para a apresentação de tópicos de Física Moderna e Contemporânea no Ensino Médio, no entanto há poucos relatos sobre suas implementações em sala de aula, os desafios, as dificuldades e as metodologias utilizadas (OSTERMANN e MOREIRA, 2000).

Sendo assim, como objeto de estudo deste Mestrado, optou-se pela discussão em sala de aula de Ensino Médio de um tópico de Física Contemporânea que possui um grande número de publicações científicas e está em grande evidência nos meios

[1]Cronologicamente, apesar de não haver um consenso que delimite os períodos clássicos, modernos e contemporâneos, pode-se dizer que a Física Moderna se estabeleceu entre o final do século XIX até a década de 40 e a Física Contemporânea, após o inicio da Segunda Guerra Mundial até os dias atuais (Ostermann, 1999)

científicos: os sólitons.

A compreensão do conceito de sóliton passa pelo entendimento de sistemas físicos não-lineares. A distinção entre linearidade e não-linearidade aparece em diversas áreas tanto da Física, quanto da Matemática e da Engenharia (basta uma pesquisa rápida na internet para encontrar centenas ou até milhares de artigos e documentos sobre o assunto), no entanto o que exatamente isso significa?

Os fenômenos físicos caracterizados por equações não-lineares, apresentam características que os diferem dos lineares, a saber: 1) enquanto sistemas lineares apresentam, tipicamente, movimentos suaves e regulares e podem ser descritos em termos de funções bem comportadas os sistemas não-lineares, por outro lado, podem ir do movimento suave para o caótico e apresentar comportamento aleatório; 2) enquanto a resposta de sistemas lineares a pequenas variações em seus parâmetros, ou a estímulos externos, é usualmente suave e diretamente proporcional ao estímulo (Lei de Hooke), para sistemas não-lineares, uma pequena variação em seus parâmetros pode provocar uma grande diferença no movimento futuro; 3) em um sistema linear as ondas podem sofrer dispersão e perder sua forma e desaparecer rapidamente, por outro lado, um sistema não-linear pode possuir estruturas altamente estáveis, coerentes e localizadas, sólitons.

Os métodos de solução de sistemas lineares são, em geral, mais simples; já obter soluções exatas para uma equação não-linear não é uma tarefa fácil e elas podem inclusive não possuir soluções analíticas sendo necessário, nesses casos, recorrer a soluções numéricas. No entanto, alguns sistemas não-lineares específicos (sistemas integráveis) podem ser resolvidos de forma analítica e essas soluções apresentam o interessante fato de descrever fenômenos do tipo sóliton. Um sóliton é definido como uma onda solitária onde a não-linearidade da onda é compensada pelo efeito dispersivo do meio criando, assim, uma onda altamente estável que se propaga ao longo de uma direção particular sem mudança de sua forma, e, quando duas ou mais ondas solitárias interagem mutuamente elas não criam ou destreom a perturbação e, assim, elas continuam com suas formas originais após a interação.

A princípio se pode imaginar que os sistemas não-lineares onde aparecem os sólitons são muito complexos e, portanto, seu entendimento seja bastante difícil, no entanto, os fenômenos do tipo sóliton podem ser observados, por exemplo, na solução de equações de sistemas conhecidos pelos estudantes de Ensino Médio, como o pêndulo simples (construindo um arranjo de pêndulos acoplados), o sistema massa-mola (ligadas formando uma rede de massa-molas), a equação de onda linear, quando estes são tratados em uma forma não-linear (ou são introduzidas não-linearidades às equações de movimento destes sitemas). Sendo assim, percebe-se que é possível introduzir não-linearidades em tópicos tradicionalmente trabalhados no Ensino Médio para discutir aspectos introdutórios do comportamento dos sólitons e suas aplicações recentes, que incluem a descrição desde os pulsos luminosos conduzidos por fibras óticas, garantindo pouca dissipação, até o Modelo Padrão das Partículas Fundamentais passando pelas ondas em canais rasos, o fenômeno da pororoca, que ocorre no Rio Amazonas, a propagação dos pulsos, a batida do coração se propaga podendo ser sentida nos punhos ou no pescoço (CHALUB, ZUBELLI, 2001), por exemplo.

Um dos problemas mais difíceis a ser enfrentado, de modo a garantir a aceitação e, consequentemente, as chances de sucesso, na inserção de tópicos de Física Contemporânea no Ensino Médio é a compatiblidade destes novos conteúdos com os conteúdos de Física clássica na mesma programação de três anos. Nessa perspectiva, uma sugestão possível é a inserção de temas relativos à Física Moderna e Contemporânea como decorrência da discussão dos limites dos modelos clássicos, esta foi a estratégia utilizada nesta dissertação para introduzir tópicos de Física Não-Linear. Alguns autores, no entanto, argumentam que, dada a situação atual do ensino de Física no 2ºgrau, onde nem os aspectos mais básicos da Física Clássica são trabalhados, não seria prioritário nos ocuparmos com conteúdos de Física Moderna e Contemporânea. No entanto, é preciso perceber a impossibilidade de se participar plenamente enquanto cidadão, no mundo atual, sem um mínimo de conhecimentos básicos dos desenvolvimentos mais recentes da Física.

Outra dificuldade a ser enfrentada ao se buscar inserir tópicos de Física contemporânea é encontrar materiais didáticos e acessíveis para utilização em sala de aula. Sendo assim, diante do grande aumento do acesso à internet e da percepção, por parte do professor que escreve esta dissertação, que a maioria dos alunos da escola onde atua possuem acesso à internet em suas residências, ou em seus smartphones, optou-se por construir uma página na internet, figura (1.1), onde fosse possível explicar os fenômenos não-lineares de maneira didática e acessível com o auxílio de diversos Objetos Virtuais de Aprendizagem (OA). Esta página pode ser acessada pelo endereço eletrônico, `https://sites.google.com/site/solitonsufg/`, e constitui o produto educacional criado como requisito para a obtenção do título de mestre em Ensino de Física. Optou-se pela construção de uma página na internet, porque a internet possui alcance global e temporal (pode ser acessada a qualquer momento), e permite estabelecer uma convivência virtual entre pessoas situadas em cidades, países ou continentes diferentes. Os computadores e celulares com acesso à internet estão bastante presentes no nosso dia-a-dia e se constituem em grandes fontes de informação e um "elemento transportador de ideias poderosas e de mudanças culturais profundas que podem levar as pessoas a estabelecer uma nova relação com o conhecimento"(Ponte, 1997, p.84), e são, portanto, bons meios de divulgação científica.

A preocupação era construir um material que pudesse ser utilizado tanto em espaços de Ensino Formal (sala de aula, por exemplo) quanto espaços de Ensino Não-Formal se constituindo de material de divulgação científica porque a divulgação científica tem, ou deve ter, papel fundamental para possibilitar o acesso a tópicos de Física contemporânea e, assim, contribuir para a alfabetização em ciência. O ato de divulgar conhecimentos, estudos e descobertas científicas deve ser encarado como um tema da política pública e uma obrigação das Universidades, principalmente as públicas, e não pode ser vista como uma atividade secundária feita por cientistas menos qualificados. Ela deve ser vista como uma das responsabilidades do pesquisador assim como o é a publicação dos resultados de suas pesquisas em revistas da área pois, ninguém melhor do que o próprio cientista, autor do artigo que divulga sua pesquisa, para contar suas implicações para a ciência e para a sociedade (MASSARANI, CASTRO e BRITO, 2002). Sendo assim optamos por desenvolver um produto educacional voltado para esta finalidade.

Em síntese, este trabalho visa contribuir para uma possível atualização dos conteúdos de Física trabalhados nas aulas dos professores de Ensino Médio bem como indicar formas de realizar esta tarefa árdua em sala de aula, de forma efetiva, ao explorar um tema de ponta da pesquisa científica atual: Sólitons e fenômenos ondulatórios não-lineares. Este tópico foi levado para a sala de aula a partir de uma sequência didática construída com base nos conteúdos disponibilizados numa página na internet criada pelos autores desta dissertação (onde os assuntos referentes aos sólitons e fenômenos

Figura 1.1: *Layout* do site. Subpágina 1.1 indicando Russel seguindo uma onda de translação `http://www.nature.com/nature/journal/v502/n7473/fig_tab/nature12699_F1.html`

ondulatórios não-linerares foram apresentados de forma didática e acessível). Pretende-se que este estudo e o consequente site desenvolvido possam representar um acréscimo quantitativo e qualitativo de recursos científicos para os professores brasileiros e que, principalmente, contribuam ativamente para ultrapassar os atuais limites geográficos das salas de aula (MONTEIRO, 2002).

1 Objetivos

Este trabalho visa a atingir três objetivos básicos, a saber: a) Divulgar tópicos de Física não-linear partindo de conteúdos clássicos estudados no Ensino Médio como o pêndulo simples, sitema massa-mola e ondas numa corda e levar os professores da educação básica a compreenderem os conteúdos físicos necessários para o entendimento do conceito de sóliton e, assim, possam discuti-los em sala de aula. b) Discorrer sobre os desafios e perspectivas enfrentados durante a criação de uma página na internet usando as ferramentas disponibilizadas pelo "google sites" e apresentar a página de divulgação "Sólitons e fenômenos não-lineares" criada pelos autores desta dissertação e c) relatar as experiências da discussão de tópicos de Física Não-Linear no Ensino Médio verificando as potencialidades do conteúdo escolhido e da utilização da página da internet no contexto de sala de aula de uma escola pública de Ensino Médio do Estado de Goiás.

2 Estrutura da dissertação

A dissertação está dividida em 7 capítulos. No primeiro capítulo desta introduzimos o tema de estudo através da apresentação dos objetivos da pesquisa e da estrutura da dissertação. No segundo e terceiro capítulos apresentaremos os conteúdos físicos evidenciando os limites entre linearidade e não-linearidade nos sistemas: Pêndulo simples (pêndulos acoplados por uma mola de torção) e equação de Sine-Gordon, sistema massa mola (redes lineares) e o modelo de Toda, Equação de onda linear e a equação de Kortewegde Vries (KdV). No quarto capítulo discorreremos sobre as soluções das equações de KdV, Sine-Gordon e Toda apresentando as suas soluções solitônicas e algumas de suas aplicações. No quinto capítulo utilizamos concepções teóricas sobre TIC para justificar e descrever o site (produto educacional) criado pelos autores desta dissertação. No sexto capítulo descreveremos uma sequência didática para introduzir os assuntos de Física Não-Linear no Ensino Médio utilizando do site criado pelos autores desta dissertação e relatamos os resultados da sua implementação em sala de aula. Para concluir, no sétimo capítulo, traçaremos algumas conclusões da pesquisa (desafios e perspectivas), seguida por recomendações para futuras pesquisas e a bibliografia.

Capítulo 2

Sistemas Físicos Lineares: pêndulo simples, sistema massa-mola, ondas numa corda e ondas em águas rasas

1 Introdução

Um dos objetivos desta dissertação é introduzir o conceito de sóliton de forma didática e acessível a professores com domínio de Física e Cálculo básicos para que eles sejam capazes de discutir este assunto em suas aulas no Ensino Médio. Para isso é necessário apresentar alguns sistemas não-lineares que apresentam este tipo de solução (solitônica).

Com o intuito de que os sistemas não-lineares que serão trabalhados no capítulo 3 sejam bem compreeendidos optamos por, neste capítulo, discorrer sobre a diferença entre linearidade e não-linearidade, e, em seguida apresentar o Movimento Harmônico simples (um movimento linear), e alguns exemplos conhecidos desse movimento: o pêndulo simples e o sistema massa-mola. Indicamos que o pêndulo simples é linear apenas de forma aproximada, ou seja, no Ensino Médio o problema do pêndulo é válido apenas para casos em que ele oscila em pequenos ângulos. Em seguida apresentamos uma introdução à ondulatória, com objetivo de estudar a equação de onda linear e, por fim, discorremos sobre dois exemplos de sistemas descritos pela equação de onda: as ondas numa corda e em águas rasas.

2 Linearidade

Uma função matemática é definida como a relação entre dois ou mais conjuntos, estabelecida por uma lei de formação, isto é, uma regra geral. Os elementos de um grupo devem ser relacionados com os elementos do outro grupo, através dessa lei. As funções $y(x) = x$ ou $y(x) = x^2$, por exemplo, recebem um valor para x (input) e produzem valores para y (output). Define-se a linearidade para uma função da seguinte forma,

Definição 1. Seja $f : R \longrightarrow R$. Diz-se que uma função é linear se obedece à seguinte propriedade:

$$1. f(ax + by) = af(x) + bf(y) \qquad \forall x, y \in R.$$

De forma didática, imagine uma caixa, por exemplo, onde ao se colocar um cacau ela devolve um chocolate, e ao se colocar uma cenoura ela devolve um bolo. Se a caixa é um sistema linear, ela vai devolver um bolo e um chocolate quando nela for colocado um cacau e uma cenoura. Se forem colocados duas cenouras ela retorna dois bolos, etc, conforme fig.2.1.

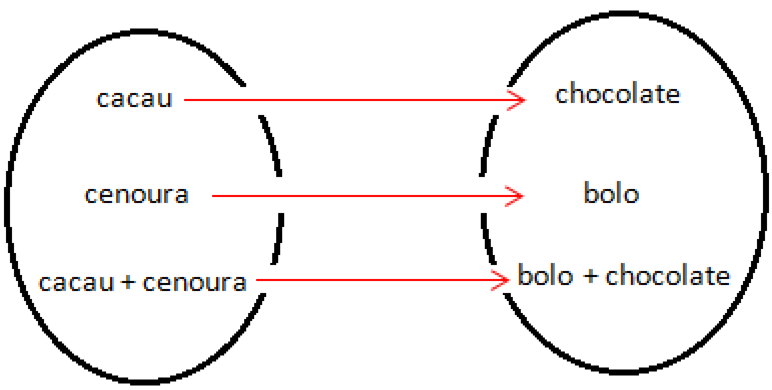


Figura 2.1: Exemplo ilustrativo de uma função linear.

Observa-se que a função $y(x) = x$ é linear porque $y(1) = 1$, $y(2) = 2$, e $y(1 + 2) = y(1) + y(2) = y(3) = 3$. Esse exemplo ilustra a origem do termo "linear": o gráfico $y = x$ é uma linha reta.

As funções que não obedecem à propriedade acima são chamadas de não-lineares. Uma forma de verificar, portanto, a não-linearidade de uma função é a prova por contradição. Exemplo, a função $f(x) = x^2$ é não-linear, porque $f(1) = 1$; $f(2) = 4$, mas $f(1 + 2) = 9$ e não 5 como seria se tratasse de uma função linear. Um outro exemplo de função não-linear é a função $f(x) = sen\ x$, pois sabe-se que $sen(x + y) \neq sen(x) + sen(y)$.

2.1 Transformação linear

Definição 2. Sejam V e W espaços vetoriais. Diz-se que $F : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear se para quaisquer $u, v \in U$ e quaisquer $a, b \in R$ se tem que

$$F(au + bv) = aF(u) + bF(v)$$

Conforme representado na fig. 2.2. Na Álgebra Linear, quando V = W, a aplicação F recebe o nome de operador linear.

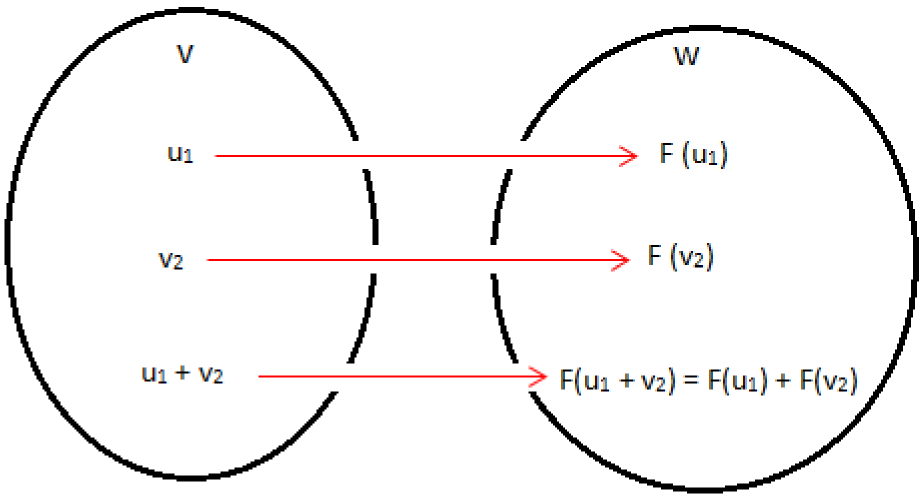


Figura 2.2: Transformação Linear

Um exemplo é o operador derivada $F = \dfrac{\partial}{\partial x}$, pois para $u_1(x) = x^2$, temos $F[u_1(x)] = 2x$, e para $v_2(x) = 3x^2$, temos $F[v_2(x)] = 6x$, $u_1(x) + v_2(x) = 4x^2$, logo $F[u_1(x) + v_2(x)] = 2x + 6x = 8x$, o que obedece à definição. O mesmo ocorre para o operador derivada segunda $F = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, por exemplo.

Notamos que a soma algébrica de duas ou mais soluções de uma equação diferencial linear é, também, uma solução desta equação. Esta propriedade é conhecida como princípio da superposição para equacoes diferenciais. Um exemplo do princípio da superposição é fornecido na seção 3.8 onde verificamos que quando duas ondas se encontram numa determinada região a onda resultante é a soma algébrica das duas ondas separadamente.

Obter soluções para equações lineares é um trabalho mais simples que obter soluções para equações não-lineares, dessa forma, é quase sempre preferido que se encontrem aproximações lineares para um fenômeno não-linear. Assim, os fenômenos não-lineares não se encontram presentes nos livros didáticos, e os alunos terminam o Ensino Médio (até mesmo o ensino superior) sem ao menos ouvir falar sobre esta área da Física. Além disso os materiais que se encontram sobre este assunto são, em sua maioria, de difícil compreensão ao abordarem os temas com uma linguagem matemática muito sofisticada impossibilitando o entendimento até mesmo de professores que não pesquisam na área. Buscou-se, neste trabalho, dar ênfase a um conteúdo não contemplado no currículo de Física do Ensino Médio, e, consequentemente, nos livros didáticos, e que fosse uma "continuação"de conteúdos presentes no Ensino Médio para mostrar a Física como uma ciência dinâmica e em evolução, porque a Física enfrenta um grande problema de falta de significado para os alunos ao ser percebida como uma ciência rígida e estática - é comum, após o estudo dos conteúdos relacionados ao Movimento Harmônico Simples (MHS) e em alguns tópicos de Ondulatória, ouvir reclamações por parte dos alunos, por exemplo: "porque calcular o período de um pêndulo? por que os ângulos devem ser pequenos? por que desconsiderar o atrito", e finalmente a clássica pergunta de "por que e quando vou utilizar isso?- e essa falta de sentido se constitui de um obstáculo para o estudo da Física, e, assim, o ensino de Física não têm conseguido atingir seus objetivos.

3 Sistemas Físicos Lineares

Nesta seção serão descritos alguns sistemas físicos em sua forma linear e suas soluções, a saber: sistemas que realizam Movimento Harmônico Simples (pêndulo simples, o sistema massa-mola e a rede linear), a equação de onda para uma corda e para águas rasas.

3.1 Movimento Harmônico Simples

O Movimento Harmônico Simples (MHS) tem duas características essenciais: ele é **periódico** - a posição, a velocidade e a aceleração (estado cinemático) do móvel se repetem em intervalos de tempo iguais, o movimento elíptico de translação da terra em relação ao sol, e o movimento do ponteiro de um relógio analógico, por exemplo - e **oscilatório ou vibratório** - realiza sucessivos vaivéns e cada vaivém é chamado de uma oscilação ou ciclo.

Período e Frequência

Considere, por exemplo, o ponteiro dos segundos de um relógio analógico. A cada 60 segundos ele completa um ciclo. Esse movimento é periódico, porque a cada intervalo de tempo de 60 segundos o ponteiro tem o mesmo estado cinemático, e oscilatório (realiza ciclos). O intervalo de tempo decorrido entre duas repetições sucessivas (oscilação) do movimento é conhecido como o período (T) do movimento. São períodos conhecidos o associado ao movimento de rotação da Terra, 24 horas, e o período do movimento de translação da Terra em torno do Sol, aproximadamente 365 dias. No Sistema Internacional (SI) o período é dado em segundos.

É possível determinar a quantidade de vezes que o movimento se repete em uma unidade de tempo calculando a frequência (f) do movimento. A frequência se relaciona com o perído pela expressão

$$f = \frac{1}{T}.$$

Por essa definição verifica-se que a frequência é o inverso do período, isto é, movimentos com grandes períodos possuem frequências pequenas e vice-versa. A frequência f se relaciona com a frequência angular $(\omega) pelarelao \omega = 2\pi f.$ No (SI) a frequência é dada em Hertz, ou seja, s^{-1} e a frequência angular em $\frac{rad}{s}$.

Força no MHS - A Lei de Hooke

Os corpos "elásticos" quando distorcidos por uma tensão ou compressão tendem a retornar para sua posição original, posição de equilíbrio, quando a força é removida. Pensando, por exemplo, uma mola com um bloquinho preso a ela, caso seja comprimida ela tende, após ser solta, a retornar à sua posição original a menos que ela estrague. No entanto, após atingir a posição de equilíbrio ela tem momento linear associado e passa da posição de equilíbrio se esticando. Esse movimento de vai e vem se repete e a mola pode executar, assim, um Movimento Harmônico Simples. As forças que dão origem a esses movimentos são aquelas que dependem linearmente da coordenada (que designamos por x), isto é,

$$\vec{F} = -k\,\vec{x}\,, \quad k > 0 \tag{2.1}$$

conhecida como Lei de Hooke. Na Lei de Hooke, $\vec{F}$ é a força restauradora, o coeficiente de proporcionalidade k é conhecido como constante elástica e representa, fisicamente, a dureza ou elasticidade do material (matematicamente, k representa a inclinação do gráfico de F em função de x). O valor dessa constante depende do material do qual ela é constituída e do processo de fabricação. No caso do movimento unidimensional, a coordenada x é a coordenada cartesiana associada à posição da partícula. O ponto $x = 0$ (ou ponto origem) é um ponto dito de equilíbrio, pois nele o corpo não está sujeito à ação da força elástica e fica, portanto, em repouso. O fato de ser negativa a constante de proporcionalidade entre a força e a coordenada é importante porque indica que a força se opõe tanto a aumentos quanto a reduções dos deslocamentos. Considere o caso de uma borracha. Nesse caso, se a comprimirmos, ela empurra a nossa mão. Se a esticarmos, ela puxa a nossa mão. O mesmo acontece com a mola. Quando ela está em repouso, ela permanece em repouso. Quando a elongamos por um valor x, mediante o deslocamento da extremidade da mola, a força age procurando sempre trazer a mola para a sua posição de equilíbrio.

Posição, velocidade e aceleração no MHS

Se o corpo, que obedece à Lei de Hooke, é deslocado da sua posição de equilíbrio e oscila livre da presença de atrito, realiza um Movimento Harmônico Simples (MHS), descrito pela equação

$$\ddot{x} + \omega^2\,x = 0, \qquad\qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{2.2}$$

onde utilizamos a Segunda Lei de Newton $m\ddot{x} = F_r$. O valor de $\omega = 2\pi f$ fornece a frequência angular do movimento.

Temos um problema típico e interessante da mecânica. Ele nos propicia a oportunidade de entender o poder do método proposto por Newton e que é a essência da sua segunda lei. Usualmente, procuramos relacionar força com aceleração, mas isso é apenas o primeiro passo. O que é importante na Lei de Newton é determinar, a partir dessa relação, a posição e a velocidade da partícula, uma vez conhecidas as forças. É nisso que reside a importância da segunda lei. O problema é encontrar uma função do tempo, $x(t)$, de tal forma que, a derivada segunda dessa função, é igual a uma constante, ω^2, vezes a própria função.

Infelizmente, não temos métodos gerais de encontrar soluções para equações diferenciais (apenas para algumas famílias de equações diferenciais ordinárias (EDOs) existem métodos gerais). Uma dessas técnicas consiste em recorrer ao método da tentativa e erro. Podemos encontrar uma solução da equação acima por esse método. Nesse caso, a ideia é bastante simples, pois sabemos que as funções seno e cosseno têm a propriedade que procuramos. Vejamos, por exemplo, a derivada segunda em relação ao tempo da função cosseno,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\cos(\omega t)\right] = -\omega^2 cos(\omega t). \tag{2.3}$$

Logo, uma solução da equação de movimento para o MHS é da forma,

$$x(t) = Acos(\omega t). \tag{2.4}$$

A solução geral é uma combinação linear de funções seno e cosseno

$$X(t) = Acos(\omega t) + Bsen(\omega t) \tag{2.5}$$

ou, ainda, na forma de exponenciais complexas,

$$X(t) = a\, e^{i\omega t} + b\, e^{-i\omega t}. \tag{2.6}$$

A velocidade é obtida diretamente a partir da derivação de $x(t)$ em relação ao tempo, ou seja, $v(t) = -A\omega sen(\omega t)$. E a aceleração é obtida a partir da derivação de $v(t)$ em relação ao tempo, ou seja, $a(t) = -A\omega^2 cos(\omega t)$.

Amplitude

Nota-se que o valor máximo que $x(t)$ pode assumir é quando a função cosseno assume seu valor máximo, ou seja, 1, nesse ponto, o valor de $x(t) = A$, indicando portanto que A é o valor máximo e $-A$ é o valor mínimo da posição de oscilação. Esse valor é conhecido como amplitude do movimento.

O pêndulo simples e o sistema massa-mola são os exemplos mais conhecidos de Movimentos Harmônicos Simples e estão presentes, inclusive, no currículo de Física do Ensino Médio das escolas brasileiras. Eles serão estudados nas seções seguintes.

3.2 O Pêndulo Simples

Um exemplo clássico de Movimento Harmônico Simples presente no currículo de Física do Ensino Médio das escolas brasileiras é o movimento de um Pêndulo Simples (fig. 2.3). Um pêndulo simples consiste de uma partícula de massa m suspensa por um fio de massa desprezível e inextensível de comprimento l (fig. 2.3) que oscila livre da presença de atrito. O movimento do pêndulo será analisado em seguida, perceberemos que ele é na verdade um sistema físico não-linear e devemos fazer algumas aproximações para que esse movimento possa ser considerado Harmônico Simples.

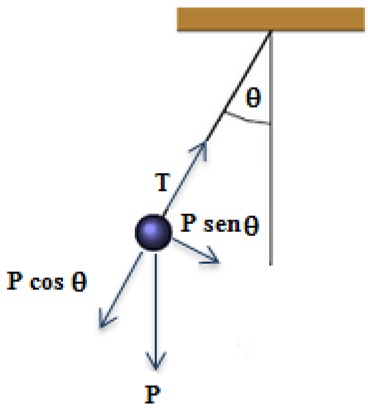


Figura 2.3: Diagrama de forças do pêndulo

Quando o sistema é deslocado da sua posição de equilíbrio (posição vertical) e solto ele, então, inicia um movimento oscilatório. Ao analisar as forças que atuam no pêndulo percebemos que a componente tangencial da força peso é a responsável por manter o seu movimento periódico (a componente radial da força peso se anula com a força de tensão no fio). Essa componente é dada por $P_t = -m\,g\,sen\theta$.

Logo, utilizando o fato de que a força resultante é dada pela 2º Lei de Newton, $F_r = ma = m\,l\,\alpha$ (onde α é a aceleração angular e l o comprimento do fio do pêndulo), notamos que a equação de movimento do pêndulo pode ser escrita como,

$$m\,\ddot{\theta} + \frac{mg}{l} sen\theta = 0. \tag{2.7}$$

Visto que a função $sen\theta$ é uma função não-linear, nota-se que a equação de movimento do pêndulo é uma equação diferencial não-linear. Para facilitar a sua solução, em geral, faz-se uma aproximação linear, restringindo a solução para casos onde o ângulo θ seja pequeno. Nesse caso pode-se aproximar a função seno pelo primeiro termo da sua expansão em série de Taylor em torno de$\theta = 0$ ($sen\theta \approx \theta - \dfrac{\theta^3}{6} + ...$), isto é, $sen\theta \simeq \theta$. Assim, obtemos,

$$\ddot{\theta} + \omega^2\,\theta = 0, \tag{2.8}$$

sendo $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ a frequência angular do movimento do pêndulo. Temos, assim, um Movimento Harmônico Simples, onde a posição angular do objeto cresce linearmente com o tempo, conforme mostrado na Figura 2.4

Posição, velocidade e aceleração do Pêndulo Simples

A equação (2.8) é a equação de movimento do pêndulo simples e permite encontrar a posição do pêndulo em função do tempo. Ela possui a solução conhecida (apresentada na seção 3.1)

$$\theta(t) = a\,e^{i\omega t} + b\,e^{-i\omega t} = A\,\cos(\omega\,t) + B\,sen(\omega\,t). \tag{2.9}$$

Conforme o tempo passa e a posição angular varia, também mudam as projeções vertical e horizontal do movimento, dadas por $y(t) = sen(\omega t)$ e $x(t) = \cos(\omega t)$, conforme figura 2.4. A velocidade e a aceleração podem ser obtidas diretamente da equação da posição do pêndulo, equação (2.9), por meio de uma derivação e duas derivações em relação ao tempo, respectivamente.

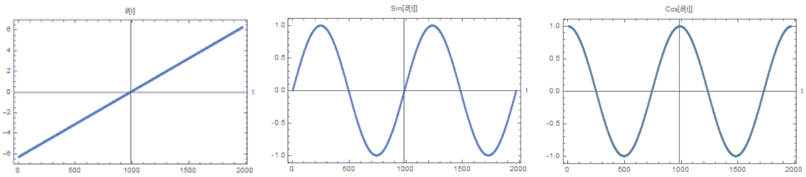


Figura 2.4: gráfico da posição angular θ em função do tempo para o pêndulo simples. Notamos que a posição angular varia linearmente com o tempo indicando um Movimento Harmônico Simples e, portanto, as posições x e y obedecem a funções harm̂onicas.

Energia do Pêndulo Simples

A energia mecânica (E) associada ao pêndulo é dada pela soma da sua energia cinética $K = \dfrac{ml^2}{2}\,\dot{\theta}^2$ e a energia potencial $U = mgl\ (1 - \cos\theta)$, onde adotamos a energia potencial máxima em $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ e nula em $\theta = 0$, conforme figura 2.5.

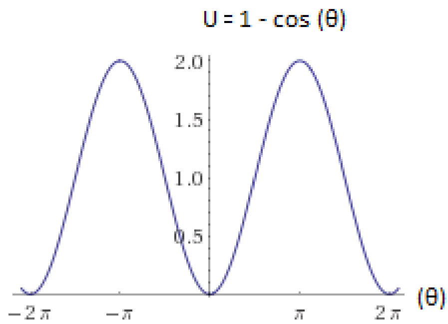


Figura 2.5: Gráfico da Energia potencial do pêndulo simples $U = mgl(1 - cos\theta)$. Nota-se que a energia potencial é nula para $\theta = 0$ e máxima para $\theta = \pi$.

Período e Frequência do Pêndulo Simples

Vimos que a constante $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$, frequência angular do movimento, se associa ao período T pela relação $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, e concluimos, portanto, que o período do pêndulo simples é

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{2.10}$$

Assim notamos que o período é maior quanto maior for o comprimento do pêndulo, decresce com o aumento da aceleração da gravidade e independe da massa do pêndulo. Dessa forma, o mesmo pêndulo localizado em posições diferentes do globo terrestre exibirá, eventualmente, períodos de oscilação diferentes.

3.3 Sistema Massa-Mola

O sistema massa-mola consiste de um bloco, de massa m, em um plano horizontal suposto perfeitamente liso, preso a uma mola, de massa muito pequena com uma constante elástica k , figura(2.6). Quando a mola não está deformada o bloco está parado (posição de equilíbrio). Quando afastamos o bloco da posição de equilíbrio, deslocando-o, por exemplo, para a direita até a posição $x = A$ e logo em seguida soltando-o, ele irá realizar um movimento oscilatório e periódico (MHS), entre $x = A$ e $x = -A$, sem perda de amplitude caso o sistema seja não dissipativo.

Figura 2.6: Sistema massa-mola inicialmente na posição de equilíbrio e após uma distensão da mola. A mola exerce sobre o bloco uma força restauradora que tende a levá de volta ao equilíbrio; no entanto, quando o corpo passa pela posição de equilíbrio, mesmo não havendo momentaneamente nenhuma força resultante sobre ele, o bloco tem uma velocidade não nula e por inércia ocasiona uma distensão no sentido oposto. Na ausência de atrito esse movimento repete-se indefinidamente.

Força no sistema massa-mola

A força resultante no bloco é a própria força elástica (Lei de Hooke) que a mola exerce nele. Quando o bloco está na posição $x = -A$, a mola o empurra. Quando ele chega à posição central (de equilíbrio) ele tem energia cinética para continuar o movimento e consegue atingir a posição $x = A$. Nesse ponto ($x = A$) a mola puxa o bloco de volta e assim o movimento torna a se repetir.

Posição, velocidade e aceleração no sistema massa-mola

Visto que o sistema massa-mola obedece à Lei de Hooke,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{2.11}$$

e executa um MHS, para ele, é válida toda discussão feita na seção (3.1). Logo, a solução da equação de movimento para o MHS é da forma

$$x(t) = Acos(\omega t), \tag{2.12}$$

a velocidade é obtida diretamente a partir da derivação de $x(t)$ em relação ao tempo, ou seja, $v(t) = -A\omega sen(\omega t)$ e a aceleração a partir da derivação de $v(t)$ em relação ao tempo, ou seja, $a(t) = -A\omega^2 cos(\omega t)$.

Período e Frequência no sistema massa-mola

O tempo (T) necessário para que o bloco realize uma oscilação completa, período,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2.13}$$

sendo k a constante elástica da mola e m a massa do bloco, indica uma relação de proporcionalidade direta entre a massa do bloco e o tempo necessário para realizar uma oscilação e uma relação inversamente proporcional entre a constante elástica da mola com seu período.

Energia no sistema massa-mola

Num movimento Movimento Harmômico Simples a energia mecânica, dada pela soma da energia cinética com a potencial, é obtida pela relação

$$E_{mec} = K + V = \frac{m}{2}v^2 + \frac{k}{2}x^2. \tag{2.14}$$

Lembrando das relações para $x(t) = Acos(\omega t)$ e $v(t) = -A\omega sen(\omega t)$, escrevemos, portanto,

$$E_{mec} = \frac{m}{2}(A\omega sen(\omega t))^2 + \frac{k}{2}(Acos(\omega t))^2 \tag{2.15}$$

e a partir da relação trigonométrica $sen^2(\omega t) + cos^2(\omega t) = 1$, concluímos que,

$$E_{mec} = \frac{k}{2} A^2. \tag{2.16}$$

Esta expressão mostra que a energia mecânica total do sistema depende da constante de elasticidade da mola e do quadrado da amplitude do movimento do corpo. A energia cinética do corpo preso à mola e a energia potencial elástica da mola variam com o tempo. Contudo, a energia mecânica total do sistema corpo-mola não depende do tempo, ou seja, é constante.

3.4 Redes Lineares

Podemos fazer uma combinação de massas e molas (Figura 2.7) formando o que é conhecido por rede linear. Uma rede linear unidimensional é descrita por uma quantidade N de partículas de massa m, que possuem uma interação entre si. Numa rede linear unidimensional admite-se que o sistema: a) possua molas entre as partículas cuja força seja do tipo Hooke; b) tenha um número de molas igual a $N+1$; c) conte com os dois extremos fixos. A energia potencial desse sistema é expressa por,

$$V_N = \frac{k}{2} \sum_{i=0}^{N+1} (x_{i+1} - x_i)^2. \tag{2.17}$$

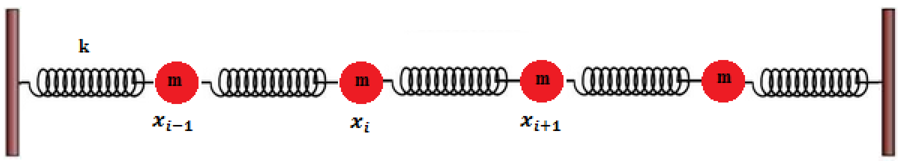


Figura 2.7: Representação de uma cadeia linear de massas ligadas por molas lineares na qual consideramos as interações dadas por forças do tipo Hooke.

Assim, a energia da n-ésima partícula devida a sua interação com a vizinhança, em relação ao ponto de equilíbrio, é dada por

$$V_n = \frac{k}{2} \left[(x_{n+1} - x_n)^2 - (x_n - x_{n-1})^2 \right], \tag{2.18}$$

de modo que a lei de Newton que descreve o movimento de cada partícula é,

$$m\, \ddot{x}_i + k\, (2x_i - x_{i+1} - x_{i-1}) = 0. \tag{2.19}$$

O número de massas pode crescer indefinidamente. No limite em que a quantidade de partículas tende a infinito temos uma sequência de corpos muito próximos entre si e que sentem a influência dos seus vizinhos, numa aproximação para uma corda unidimensional formada por átomos.

3.5 Ondulatória

O que é uma onda?

As ondas estão presentes em diversas situações cotidianas, mas o que é exatamente uma onda? Quais as características, propriedades e comportamentos caracterizam uma onda? Como é a descrição matemática de uma onda?

Uma onda é uma perturbação oscilante, no espaço, de alguma grandeza física e periódica no tempo, ou seja, é um pulso energético que se propaga através do espaço ou através de um meio (líquido, sólido ou gasoso), com velocidade definida e oscila no tempo transportando energia, mas sem transportar matéria.

Imagine que derrubemos o primeiro dominó numa fileira de dominós (causamos uma perturbação no primeiro dominó); todos os outros cairão em seguida. Este é o famoso "efeito dominó". Podemos ver neste caso o que é uma perturbação se propagando de um lugar para o outro. A perturbação causada no primeiro dominó chegou até o último, derrubando-o, apesar de cada dominó não ter saído da sua posição inicial. Note também que somente a energia aplicada ao primeiro dominó chegou até a última peça. A perturbação transportou somente energia.

O que acontece na onda é algo semelhante. Uma perturbação é causada, por alguma fonte, e esta perturbação propaga-se de um ponto para o outro na forma de pulsos (a diferença em relação ao caso dos dominós enfileirados é que no caso da onda os pontos do meio oscilam de forma periódica). Imagine por exemplo, que deixemos cair uma pedra na superfície de um lago. A pedra causa uma perturbação na água e essa perturbação se propaga de forma periódica e oscilante.

Qual a forma de uma onda?

A forma como a excitação (perturbação) evolui no tempo é conhecida como forma da onda. A forma da onda pode ser variada (até mesmo arbitraria), no entanto há alguns casos em que elas podem ter formas bem definidas. Alguns exemplos conhecidos são, a **onda senoidal** - que obedece a funções do tipo seno ou cosseno - **Onda quadrada** - também chamada de trem de pulsos é caracterizada pela alternância entre um estado de amplitude nula e outro estado de amplitude máxima, sendo que cada um destes estados tem igual duração - **Onda triangular** - caracterizada por uma ascendência linear até a amplitude máxima da onda, seguida imediatamente por uma descendência linear até a amplitude mínima. Os tempos de subida e descida podem ser iguais ou diferentes.

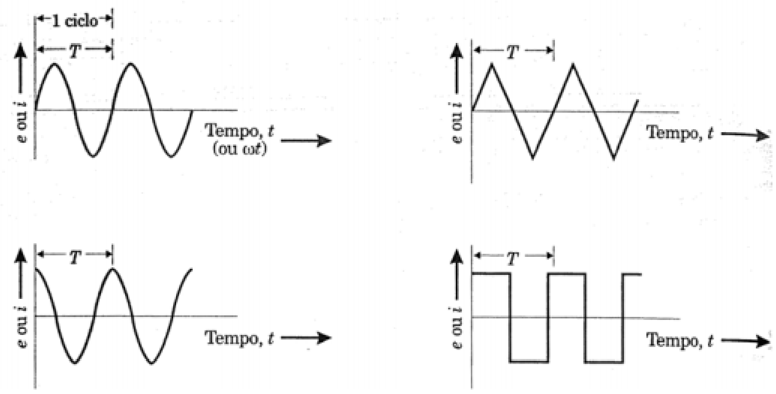


Figura 2.8: Exemplos de formas de ondas

Equação de Onda

Uma equação capaz de descrever uma exitação que oscila no tempo e se propaga no espaço é a equação de onda. Na sua forma mais simples, a equação de onda diz respeito a uma variável temporal t e uma ou mais variáveis espaciais $x, y, z...$, e uma função escalar $\phi = \phi(x, y, z; t)$, cujos valores modelam o deslocamento de uma onda, da seguinte forma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2\ \nabla^2 \phi, \tag{2.20}$$

onde ∇^2 é o Laplaciano [1] (que representa a variação espacial) e c é um valor constante que descreve a velocidade de propagação da onda.

Soluções desta equação devem propagar-se na região a uma velocidade fixa em todas as direções espaciais, assim como ondas físicas a partir de uma perturbação localizada.

Esta equação é linear, dessa forma que a soma de quaisquer duas soluções é também uma solução: esta propriedade é chamada princípio da superposição.

Solução da equação de onda

Em geral, para uma equação de onda, mesmo em sua forma unidimensional, é incomum que envolva uma solução geral simples de ser encontrada. Para encontrar uma solução que satisfaça a equação de onda inicialmente definimos novas variáveis:

$$\epsilon = x - ct \quad ; \quad \eta = x + ct \tag{2.21}$$

a partir das quais é possível reescrever a equação de onda na forma,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\epsilon\partial\eta} = 0 \tag{2.22}$$

e, assim, encontrar uma solução geral,

$$u(\epsilon, \eta) = F(\epsilon) + G(\eta), \tag{2.23}$$

ou equivalentemente

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct). \tag{2.24}$$

Em outras palavras, as soluções da equação de onda unidimensional indicam que a forma das funções arbitrárias individuais no que diz respeito a x permanece, no entanto, as funções são deslocadas para a direita(função F) ou esquerda (função G) a uma razão ct. Quando as funções F e G são do tipo seno ou cosseno as ondas são

[1] O Laplaciano ou Operador de Laplace é um operador diferencial de segunda ordem $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

chamadas de ondas harmônicas. Para resolver completamente a equação de onda (determinar as funções F e G) precisamos determinar as condições iniciais e as condições de contorno do problema.

É importante observar que a solução da equação de onda pode, também, ser escrita em notação complexa como uma superposição de ondas planas

$$u(x,t) = ae^{i(kx-\omega t)} + be^{i(kx+\omega t)}. \tag{2.25}$$

Dois exemplos de sistemas que podem ser descritos por uma equação de onda são as ondas numa corda contínua e em águas rasas. Estes exemplos serão trabalhados a seguir.

3.6 Cordas contínuas

Consideremos uma corda esticada presa a dois pontos fixos, $x = 0$ e $x = L$, como representado, figura 2.9, e que a área da secção transversal seja S.

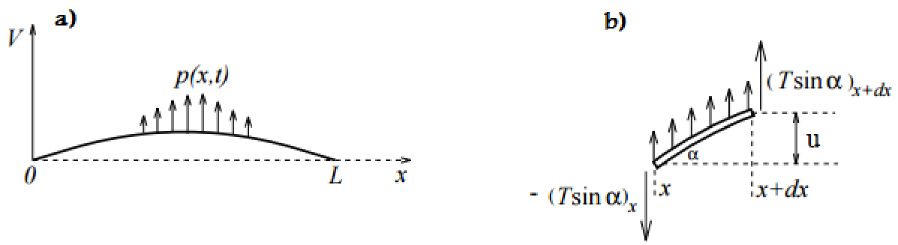


Figura 2.9: Deformação numa corda esticada
Fonte: http://web.mit.edu/1.138j/www/material/chap-1.pdf

Considerando um elemento de comprimento da corda (onde realizamos um deslocamento vertical u) entre x e $x + dx$, como representado na figura 2.9 (b), notamos que a força transversal resultante, devido à diferença de tensão em ambas as extremidades do elemento, é dada por

$$T\left(sen\alpha\Big|_{x+dx} - sen\alpha\Big|_{x}\right) \tag{2.26}$$

onde a aproximação $sen\alpha \simeq \tan\alpha$, válida para ângulos pequenos (menores que 15º), nos permite reescrever (2.26) como

$$T\left(\tan\alpha\Big|_{x+dx} - \tan\alpha\Big|_{x}\right) \simeq T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+dx} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x}\right). \tag{2.27}$$

A diferença de tensão na corda (força transversal resultante) pode ser escrita a partir da Segunda Lei de Newton,

$$\frac{m}{\Delta x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \simeq \frac{T}{\Delta x}\,\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+dx} - \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x}\right) \tag{2.28}$$

e assim, ao considerarmos o limite em que o deslocamento Δx tende a 0 ($\lim_{\Delta x \to 0}$, encontramos

$$\frac{\lambda}{T}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{2.29}$$

sendo λ a massa por unidade de comprimento ($\frac{m}{\Delta x}$). Esta equação , uma equação diferencial parcial de segunda ordem é, como vimos, a Equação de Onda apresentada anteriormente. Nela, podemos obter uma expressão para a velocidade de propagação da onda na corda ao notar, através de uma análise dimensional, que

$$\left[\frac{T}{\lambda}\right] = \frac{m\ L/t^2}{m/L} = \left(\frac{L^2}{t^2}\right) = [\text{velocidade}]^2. \tag{2.30}$$

Assim, a equação de onda pode ser reescrita na sua forma mais usual, na ausência de momentum líquido transmitido na direção de propagação da onda,

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{2.31}$$

sendo c a velocidade de propagação da onda (MEI, 2004).

Os pulsos numa corda, de acordo com esssa aproximação, que satisfazem a equação acima têm a solução em sua forma genérica expressa por,

$$u(x,t) = f\,(x - ct) + g\,(x + ct). \tag{2.32}$$

cujas funções f e g podem ser arbitrárias, do tipo seno ou cosseno, por exemplo. Ondas como as que viajam na corda podem ser encontradas em várias outras situações físicas, como veremos na próxima subseção o exemplo das ondas em águas rasas.

3.7 Ondas em águas rasas

Quando causamos uma perturbação, deixando uma pedra cair, por exemplo, nas águas de um lago ou na costa do mar, ondas são formadas em sua superfície. Vamos considerar que, nesse lago: 1) a água possua densidade constante; 2) sua viscosidade possa ser desconsiderada; 3) sua profunidade seja menor que o comprimento de onda da onda que nele se propaga, ou seja, considerar o regime de águas rasas.

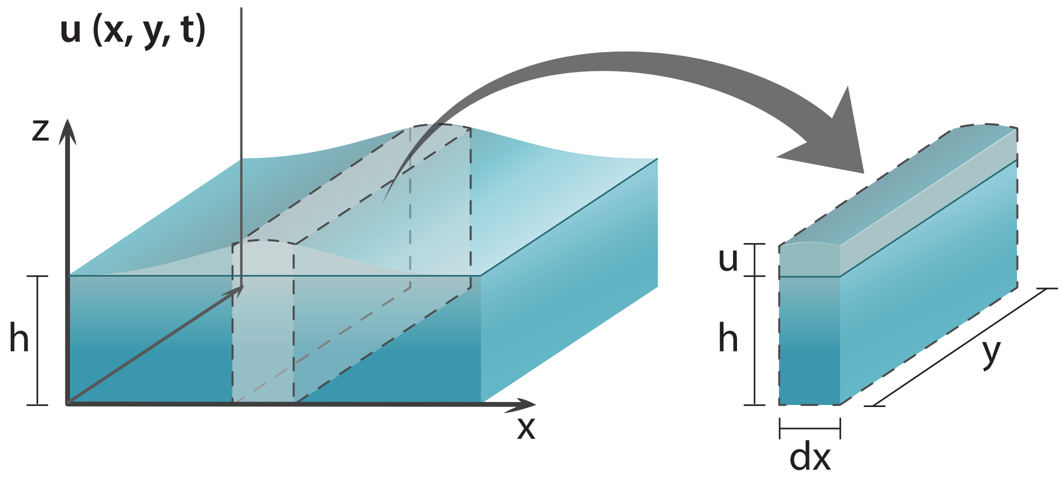


Figura 2.10: Um elemento da coluna de água em um mar raso. Denotamos z como sendo o eixo vertical do nosso sistema de referência, $h(x, y)$ a profundidade do mar, x, y o plano onde se encontrar a superfície do mar, $u(x, y, t)$ o deslocamento vertical da superfície da água e $v(x, y, t)$, a velocidade da água no plano horizontal, essa velocidade é aproximadamente constante em regiões profundas do mar.

Feitas as considerações acima, consideramos um elemento de volume de água em repouso (fig. 2.10) e analisamos as forças às quais esse elemento de volume de água (fig. 2.10) está sujeito. Inicialmente escrevemos a força em função da pressão apenas para a direção x

$$F_x = p(x)\ dy\,dz - p(x + dx)\ dy\,dz \simeq -\frac{\partial p}{\partial x}\ dx\,dy\,dz. \tag{2.33}$$

A partir da análise na direção x podemos generalizar a expressão para a força para incluir as componentes y e z, ou seja,

$$\vec{F}_{ap} = -\vec{\nabla} p\ dV. \tag{2.34}$$

Para o volume de água em repouso temos, de acordo com a Segunda Lei de Newton,

$$\vec{F}_{ap} = \rho \; dV \; \vec{a}_{ap}, \tag{2.35}$$

onde, $\vec{F}_{ap}$ é a força aplicada devido à pressão ao qual o volume de água está sujeito, ρ é a densidade volumétrica de massa e $\vec{a}_{ap}$ a aceleração devida à pressão aplicada. Podemos, então, escrever a relação entre a pressão e a força aplicada,

$$\vec{\nabla} p \; dV = \rho \vec{a}_{ap} \; dV, \tag{2.36}$$

para chegar à equação fundamental de hidrostática

$$\vec{a}_{ap} = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p. \tag{2.37}$$

Já para o caso de o fluido estar em movimento (nosso caso de interesse), devemos considerar que a força resultante à qual o elemento de volume de água está sujeita não é igual a 0, ou seja, devemos notar que,

$$\rho \; \vec{a}_{ap} \; dV - \vec{\nabla} p \; dV = dm \; \frac{dv}{dt}, \tag{2.38}$$

onde dm é um elemento diferencial de massa. Visto que o volume de água agora está sendo analisado em movimento utilizamos a derivada convectiva[2] ($\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla}$), ao realizar a derivação da velocidade em função do tempo em (2.38) para reescrevê-la na forma da conhecida equação de Euler para a Hidrodinâmica não-viscosa,

$$\rho \; \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \; (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \, \vec{v} = \rho \, \vec{a}_{ap} - \vec{\nabla} p. \tag{2.39}$$

Considerando que o fluido é incompressível e irrotacional ($\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0$), portanto,

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla}(\frac{\vec{v}^2}{2}) - \rho \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla}(\frac{\vec{v}^2}{2}), \tag{2.40}$$

[2] A derivada convectiva é uma derivada tomada ao longo de um caminho movendo-se com velocidade v, e é descrita como a taxa de variação em relação ao tempo de alguma quantidade (tal como calor ou momento) que está sendo transportado por correntes de fluido, por exemplo.

e assim temos a equação de Euler para hidrodinâmica para um fluido incompressível e irrotacional,

$$\rho\,\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{\nabla}(\frac{\vec{v}^2}{2})=\rho\,\vec{a}_{ap}-\vec{\nabla}p. \tag{2.41}$$

No nosso caso de interesse, desconsideramos o termos do quadrado da velocidade (para pequenas amplitudes o quadrado da velocidade é desprezível) e notamos que a simetria é tal que nos permite considerar apenas o movimento vertical, em z, onde a força aplicada é devida à aceleração da gravidade, ou seja, $f_{ap\ z}=-\rho g$ e assim,

$$\rho\,\frac{d\,v_z}{dt}=-\rho\,g-\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{2.42}$$

Supondo baixas velocidades verticais podemos considerar $\frac{d\,v_z}{dt}\simeq 0$, e então

$$\frac{\partial p}{\partial z}+\rho\,g\simeq 0, \tag{2.43}$$

cuja integração em dz nos limites de h até $u(x,y,t)$ nos permite escrever a equação

$$p\simeq p_0+\rho g\,(u(x,y,t)-h) \tag{2.44}$$

conhecida como a equação de Steves para a pressão no elemento do fluido. Já para as componentes x e y, considerando a velocidade do fluido constante, ou seja, a força aplicada equilibra a pressão a que o fluido está sujeita, ($a_{ap}=0$) na equação 2.41, e assim obtemos

$$\rho\,\frac{dv_x}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}\,,\qquad \rho\,\frac{dv_y}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{2.45}$$

A partir da equação 2.44 escrevemos $\frac{\partial p}{\partial x}=\rho\,g\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial p}{\partial y}=\rho\,g\frac{\partial u}{\partial y}$, logo,

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}=-g\,\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.46}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}=-g\,\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.47}$$

Vamos agora utilizar a equação da continuidade, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0$, que nos indica que se a massa varia, há um fluxo cruzando a superfície. Tal relação fica mais evidente ao integrarmos a equação da continuidade em todo o volume (Fig 2.10),

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega} \rho dV + \vec{\nabla} \int_{\sigma} \rho \, \vec{v} \, dV = 0. \tag{2.48}$$

Ao substituirmos o elemento de volume $dV = (h + u(x, y, t))\, y\, dx$ e realizarmos a integração em dx obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho\, (h + u(x, y, t))\, y\, x] + x\, \frac{\partial}{\partial x}\, [\rho\, v_x\, y\, (h + u(x, y, t))\,] = 0 \tag{2.49}$$

e, ao cancelarmos os termos semelhantes, realizarmos as derivações em relação à x e t, e tomarmos a derivação em relação à t em ambos os lados da igualdade e considerar que $h << u$, concluímos que

$$y\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}(y\, h\, \frac{\partial v_x}{\partial t}) \simeq 0. \tag{2.50}$$

Substituindo a equação (2.46) em (2.50) e cancelando os termos y semelhantes em ambos os lados, obtemos, finalmente, a equação de onda para as águas rasas,

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = 0 \tag{2.51}$$

sendo a velocidade $c = \sqrt{gh}$ da onda definida pela altura h da onda e da aceleração da gravidade g no local.

3.8 Características das ondas

Frequência

Como vimos, uma onda é um movimento oscilatório no espaço e periódico no tempo. Logo, o movimento se repete em intervalos de tempos regulares e a quantidade de vezes que ele se repete em uma unidade de tempo é representada pela frequência do movimento que se relaciona com o período pela expressão

$$f = \frac{1}{T}.$$

Por essa definição verifica-se que a frequência é o inverso do período, isto é, movimentos com grandes períodos são pouco frequentes e vice-versa. No (SI) a frequência é dada em Hertz, ou seja, s^{-1}.

Comprimento de onda

À medida que o tempo passa a onda percorre uma determinada distância (observe a representação de uma onda senoidal, fig 2.11). A distância percorrida pela onda durante uma oscilação completa, ou seja, durante o tempo de um período é o que chamamos de comprimento de onda (λ). O comprimento de onda pode ser medido em três pontos diferentes: de crista a crista, do início ao final de um período ou de vale a vale. Lembrando que crista é a parte mais alta da onda e o vale a parte mais baixa. O comprimento de onda representado pela letra grega λ é medido em metros no (SI).

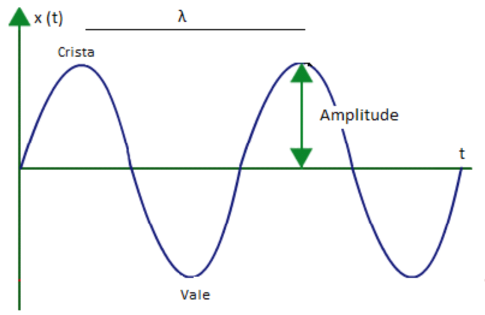


Figura 2.11: Representação gráfica de uma onda senoidal

Número de onda

O número de onda indica o número de vezes que uma onda atinge a mesma fase (ângulo) por unidade de distância de propagação (comprimento de onda). Representa-se normalmente por k. É uma propriedade que está inversamente relacionada com o comprimento de onda, isto é,

$$k = \frac{2\,\pi}{\lambda} \tag{2.52}$$

Velocidade de propagação

A velocidade de propagação da onda está relacionada com sua "rapidez". Lembrando da definição de velocidade média $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, sendo Δx a variação da posição (espaço) e Δt o intervalo de tempo, podemos escrever uma relação semelhante para a onda, pois a distância percorrida durante um período é exatamente a definição de comprimento de onda então podemos substituir Δd por λ (distância percorrida durante um perído) e a variação de tempo Δt por T (período), isto é

$$v = \frac{\lambda}{T}, \tag{2.53}$$

e, a partir da relação $f = 1/T$, reescrevemos:

$$v = \lambda\ f, \tag{2.54}$$

conhecida como equação fundamental da ondulatória.

Princípio da superposição

Quando há mais de uma onda se propagando em uma região governada por uma dinâmica linear, a onda resultante é dada pela combinação linear das ondas individuais. Ou seja, se temos duas ou mais ondas se propagando e elas se encontram em determinada região do espaço a onda resultante é a somatória de cada uma das ondas. Esta característica é chamada de Princípio da Superposição. Como exemplo, vamos considerar dois casos envolvendo duas ondas harmônicas (descritas por funções do tipo seno ou cosseno): (1) as ondas se propagam na mesma direção, mas têm amplitudes e fases diferentes; e (2) as ondas se propagam na mesma direção e têm a mesma amplitude e fase, mas têm frequências ligeiramente diferentes.

Inicialmente, denominamos as duas ondas de 1 e 2 e supomos que elas têm o mesmo comprimento de onda λ e a mesma frequência angular ω. As amplitudes das duas ondas são A_1 e A_2 e a diferença de fase (diferença de ângulo em que iniciam a oscilação) é ϕ. Sem perda de generalidade podemos supor que a onda 1 tem fase zero e a onda 2 tem fase ϕ. Portanto, as duas ondas têm solução da forma,

$$y_1(x,t) = A_1 cos(kx - \omega t), \qquad y_2(x,t) = A_2 cos(kx - \omega t + \phi). \tag{2.55}$$

Quando as duas ondas coexistem na mesma região, a onda resultante é dada pelo princípio da superposição, ou seja,

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A_1 cos(kx - \omega t) + A_2 cos(kx - \omega t + \phi). \tag{2.56}$$

Como forma de simplificar podemos usar a representação de y_1 e y_2 em termos de números complexos (ROQUE, aula 18),

$$z_1(x,t) = A_1 e^{i(kx-\omega t)}, \quad z_2(x,t) = A_2 e^{i(kx-\omega t+\phi)}. \tag{2.57}$$

Assim, podemos somar $z_1 + z_2$ e obter,

$$z_1 + z_2 = A e^{i(kx-\omega t+\beta)}, \tag{2.58}$$

onde A e β são dados por,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 cos(\phi), \quad sen\beta = \frac{A_2}{A} cos\phi. \tag{2.59}$$

A solução física é a parte real da solução da superposição das duas ondas, ou seja,

$$y_1 + y_2 = Re(z_1 + z_2) = Acos(kx - \omega t + \beta). \tag{2.60}$$

Logo, a superposição de duas ondas harmônicas de mesma frequência e mesmo comprimento de onda, mas com amplitudes e fases diferentes, que se propagam no mesmo sentido, é também uma onda harmônica com a mesma frequência e o mesmo comprimento de onda propagando-se no mesmo sentido. Embora a onda resultante da superposição de duas ondas harmônicas seja, ela mesma, uma onda harmônica dada pela soma das duas ondas, a amplitude da onda resultante é diferente da soma das amplitudes das duas ondas.

Este fenômeno é típico de ondas e é chamado de interferência. Note que, a amplitude da onda resultante depende do cosseno da diferença de fase entre as duas ondas. Portanto, a amplitude será máxima (interferência construtiva) quando $\cos\phi = 1$, isto é, quando, $\phi = 2\,n\pi$, e será mínima (interferência destrutiva) quando $\cos\phi = -1$, isto é $\phi = (2\,n + 1)\pi$.

O segundo caso, consideramos duas ondas harmônicas com mesma amplitude, mesma fase, mas comprimentos de onda e frequências ligeiramente diferentes propagando-se na mesma direção. Podemos escrever as duas ondas como,

$$y_1(x,t) = Acos(k_1 x - \omega_1 t), \quad y_2(x,t) = Acos(k_2 x - \omega_2 t). \tag{2.61}$$

Ao utilizar as definições para o valor médio das frequências $\overline{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ e do número de onda $\overline{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}$ e da variação das frequências $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ e do número de onda $\Delta k = k_1 - k_2$, podemos escrever a onda resultante como

$$y(x,t) = 2Acos(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t)cos(\overline{k}x - \overline{\omega}t). \tag{2.62}$$

Temos, portanto, dois termos que correspondem a ondas harmônicas propagando-se para a direita. O termo com frequência $\overline{\omega}$ e número de onda $\overline{k}$ oscila com uma frequência (temporal) maior que a do outro termo, mas com um comprimento de onda (espacial) menor, figura (2.12).

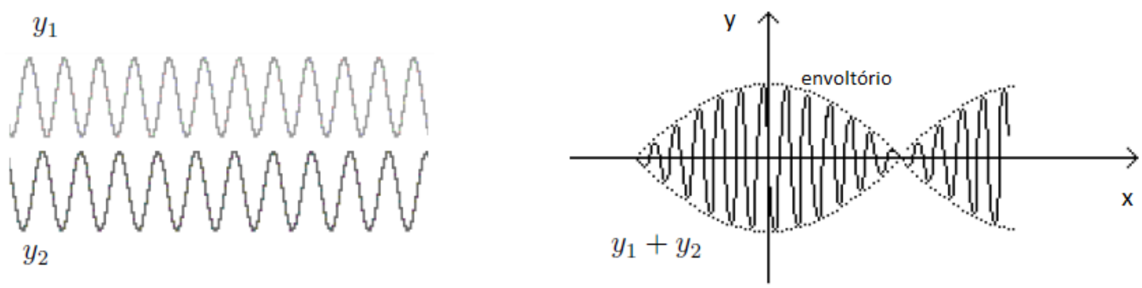


Figura 2.12: Um instantâneo (uma "foto"para t fixo)de duas harmônicas se propagando para a direita. As ondas da esquerda são as duas ondas harmônicas que se superpõem e a onda da direita é a onda resultante.
Fonte: `http://coral.ufsm.br/gef/Ondas/ondas08.pdf`

Relação de dispersão, velocidade de fase e velocidade de grupo

A equação 2.62 contém duas ondas harmônicas: uma de maior frequência $\overline{\omega}$ e outra de menor frequência $\Delta\omega$. Lembrando que a velocidade de propagação de uma onda é dada pela razão entre a sua frequência e o seu número de onda ($v = \frac{\omega}{k}$), percebemos que existem duas velocidades de onda.

A onda de maior frequência se propaga com velocidade $v_p = \frac{\overline{\omega}}{\overline{k}}$ que é chamada de velocidade de fase. No entanto, a onda de menor frequência (a que define o envoltório da onda de maior frequência) também tem uma velocidade de propagação associada dada por $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ a qual é chamada de velocidade de grupo da onda. Podemos imaginar a velocidade de grupo como a velocidade com que o pacote de ondas dado pela envoltória da onda se propaga (é por isso que ela recebe o nome de velocidade de grupo) (ROQUE, aula 18).

Quando as frequências ω_1 e ω_2 forem muito próximas uma da outra podemos escrever a velocidade de grupo como,

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\partial\omega}{\partial k}. \tag{2.63}$$

Em alguns casos, a velocidade de fase e a velocidade de grupo são iguais. Porém, existem situações em que a velocidade de propagação da onda depende da sua frequência (ou do comprimento de onda, ou ainda do número de onda), ou seja, as velocidades de fase e de grupo são diferentes. Em um caso como este, diz-se que ocorre dispersão e a equação $\omega(k) = kv(k)$ é chamada de relação de dispersão da onda. A dispersão da onda ocorre quando as ondas individuais que formam o pacote de onda se propagam com velocidade diferente do pacote de onda e assim ele desmancha.

Capítulo 3

Sistemas Físicos Não-Lineares: Pêndulo, Rede de Toda e ondas em águas rasas

Neste capítulo utilizamos os sistemas trabalhados no capítulo anterior: o pêndulo simples, o sistema massa mola e a rede linear, e as ondas em águas rasas, para discutí-los em uma forma não-linear. Inicialmente o pêndulo é resolvido em sua forma não-linear, ou seja, resolvemos a equação de movimento do pêndulo (2.8) sem considerar apenas os casos em que os ângulos são pequenos. Em seguida introduzimos não-linearidades a uma rede linear de massa-molas (assim chegamos ao problema de Fermi Pasta Ulam e a conclusão proposta por Toda) e à equação de ondas em águas rasas (que nos permite introduzir a equação de KdV) para obter suas equações de movimento.

Após descritas as equações de movimento procuramos um método (Método de Hirota) de resolvê-las no capítulo seguinte. Percebemos que sistemas relativamente simples podem levar a soluções do tipo sóliton e, assim, esperamos que o termo seja compreendido por estudantes e professores que tenham apenas uma compreensão básica de Física e Cálculo.

1 Pêndulo não-linear (Pêndulo real)

O estudo do pêndulo não-linear é oportuno para mostrar que fenômenos complexos podem ser originados por modelos bastantes simples, desde que tratados em sua forma não-linearizada. Podemos resolver o problema do pêndulo não-linear a partir da conservação da energia mecânica. Dado que a energia potencial associada ao problema é

$$U(\theta) = mgl(1 - \cos\theta),$$

(onde escolhemos energia nula para $\theta = 0$), podemos escrever a equação característica do movimento pendular na forma

$$m\,l\,\ddot{\theta} + mg\theta = m\,l\,\ddot{\theta} + \frac{U'(\theta)}{l} = 0. \tag{3.1}$$

Para resolvê-la multiplicamos ambos os lados de (3.1) por $l\dot{\theta}$,

$$m\,l^2\,\ddot{\theta}\,\dot{\theta} + mglsen\theta\,\dot{\theta} = m\,l^2\,\ddot{\theta}\dot{\theta} + U'(\theta)\dot{\theta} = 0,$$

para obter,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\,l^2}{2}\,\dot{\theta}^2 + U(\theta)\right) = 0, \tag{3.2}$$

que é a familiar lei de conservação da energia,

$$\frac{m\,l^2}{2}\,\dot{\theta}^2 + U(\theta) = \frac{m\,l^2}{2}\,\dot{\theta}^2_{max} + U(\theta_{max}) = E_{max}.$$

Percebe-se que, no nosso caso, no ângulo de máxima abertura $\theta = \theta_{max} = \pm\pi$ a velocidade se anula e temos $\dot{\theta} = 0$, fixando-se dessa forma a energia para completarmos uma volta. Assim, ao reescrevermos a equação (3.2),

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\,\omega^2\,(1 - \cos\theta)\,,$$

notamos que ela nos permite escrever a relação

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}} = \omega\int dt = \omega\,(t - t_0) = \omega\,\tau,$$

para a variação da posição angular com variações infinitesimais de tempo.

1.1 Posição e velocidade do Pêndulo Não-Linear

Vimos para a aproximação de ângulos pequenos que a posição do pêndulo varia linearmente com o tempo. No caso de uma amplitude genérica, uma forma de simplificar a obtenção da solução é notar que

$$\frac{d}{d\phi}\log\left[\tan\left(\frac{\phi}{4}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\cos\phi}}.$$

Sendo assim, chegamos à solução,

$$\omega\,\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}} = \log\left(\tan\frac{\theta}{4}\right)$$

a partir da qual podemos isolar a expressão para a posição angular em função do tempo,

$$\theta(t) = 4\arctan e^{\omega\,(t-t_0)}, \tag{3.3}$$

representada na Figura 3.1, tracejado verde. Com isso, a solução que procuramos, pode ser escrita como,

$$\theta(t) = 4\arctan\left(\frac{e^{\omega\,(t-t_0)}-1}{e^{\omega\,(t-t_0)}+1}\right), \tag{3.4}$$

cuja representação gráfica é dada pela Figura 3.1, tracejado azul.

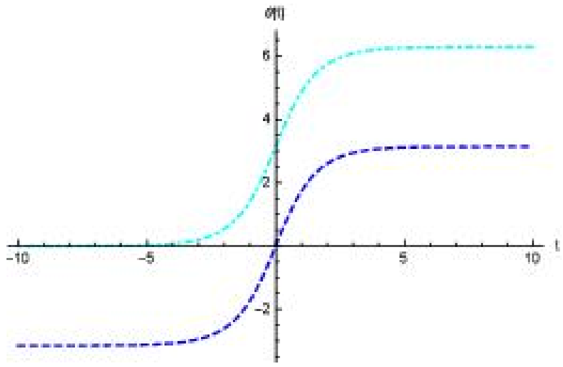


Figura 3.1: Representações gráficas das expressões (3.3) e (3.4), indicando a posição do pêndulo não linear em função do tempo.

Nota-se que a posição angular não varia linearmente; na verdade, como esperado, temos uma variação aproximadamente linear nas regiões próximas da origem, isto é, quando as aberturas angulares são pequenas.

A velocidade angular pode ser obtida a partir da derivação em função do tempo da equação da posição. Assim, obtemos,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{4\omega e^{\omega t}}{e^{2\omega t}+1}, \tag{3.5}$$

e,a partir dela podemos escrever a energia cinética do pêndulo.

1.2 Energia e gráficos da energia do Pêndulo Não-Linear

A energia cinética do pêndulo

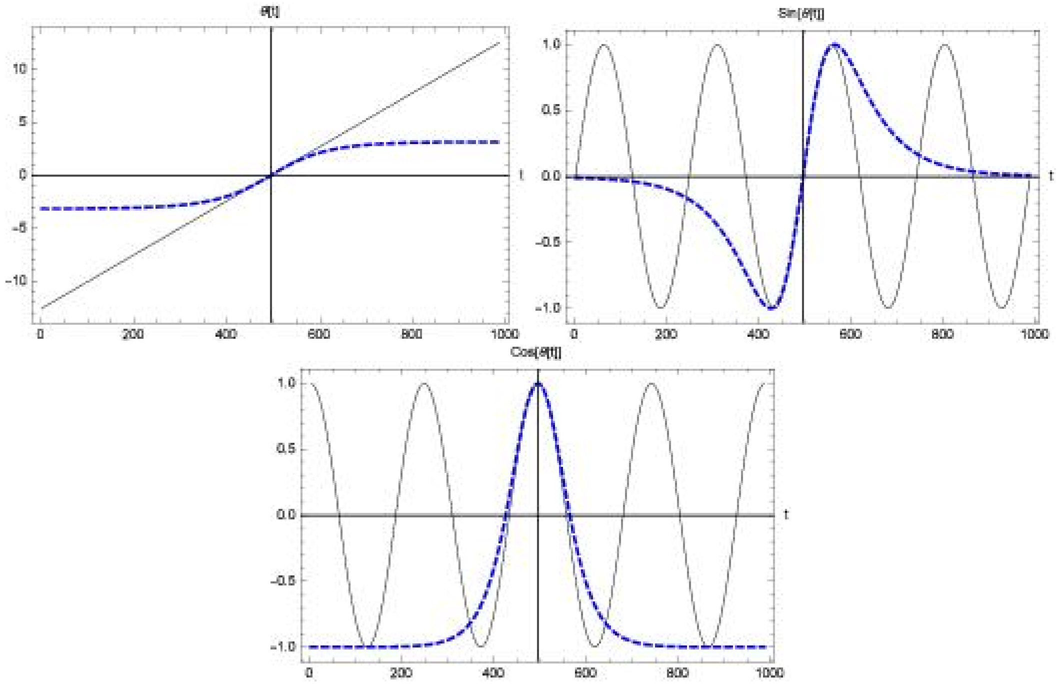


Figura 3.2: Nas figuras acima mostramos uma comparação entre o comportamento linear, indicado pelas linhas contínuas acinzentadas, e o comportamento solitônico, representado pelas linhas tracejadas azuis. Na parte superior tem-se o deslocamento angular do pêndulo em função do tempo. No gráfico intermediário mostramos como se comporta a força sentida pelo pêndulo devido a sua abertura angular que varia no tempo. Finalmente, na figura inferior indicamos o potencial sentido pelo corpo.

$$K = \frac{ml^2}{2}\left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2 = \frac{ml^2}{2}\left[\frac{4\omega e^{\omega t}}{e^{2\omega t}+1}\right]^2, \tag{3.6}$$

e a energia potencial, associada à posição do pêndulo,

$$U = mgl\ \left(1-\cos\left[4arctan\ \left(e^{\omega t}\right)\right]\right), \tag{3.7}$$

cuja representação gráfica é apresentada na figura (3.3 b), permitem facilmente escrever a energia mecânica $E = K + U$ do sistema, ou seja,

$$E = \frac{ml^2}{2}\left[\frac{4\omega e^{\omega t}}{e^{2\omega t}+1}\right]^2 + mgl\ \left(1-\cos\left[4arctan\ \left(e^{\omega t}\right)\right]\right), \tag{3.8}$$

cuja simplificação para valores constantes de l, m, g e para $\omega = 1$ permite escrever a solução abaixo, figura (3.3 c),

$$\cos[4\arctan e^t] + \frac{1}{2}\left[\frac{4e^t}{e^{2t}+1}\right]^2 = 1, \tag{3.9}$$

por exemplo, onde se nota que a energia mecânica é constante.

Esta relação indica que quando deslocamos o pêndulo a partir de sua posição de equilíbrio, na configuração vertical do pêndulo, tomada como referência, até uma nova posição, a uma altura h, ele então adquire uma energia potencial gravitacional associada à variação de altura. Quando ele é solto, adquire velocidade e a energia potencial vai sendo transformada em energia cinética. No ponto de equilíbro a energia cinética é máxima (ele atinge a máxima velocidade) e, por possuir inércia, passa do ponto de equilíbrio até atingir novamente a posição h. No caso de não haver força dissipativa atuando no sistema a energia fornecida no início ficará intercambiando entre cinética e potencial de maneira que a soma das duas é sempre constante.

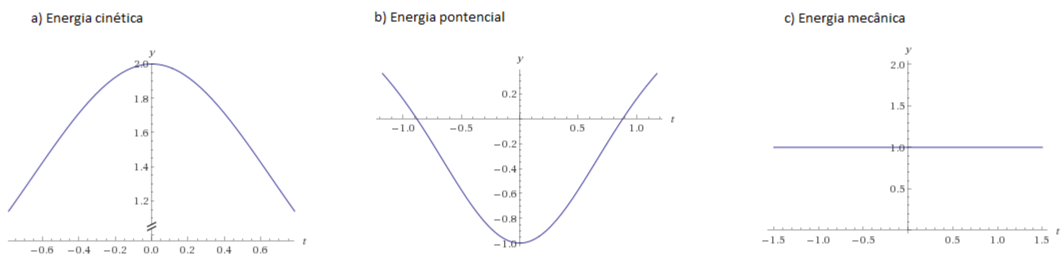
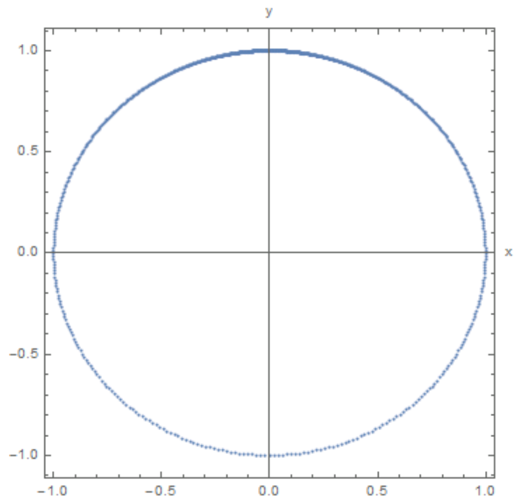


Figura 3.3: Energia a) cinética, b) pontencial, c) mecânica do pêndulo não-linear

1.3 Pêndulo Linear vs Não-Linear

Na fig. 3.2, onde sobrepomos o comportamento do pêndulo simples, em cinza, com o do pêndulo real, não-linear, em azul, observamos como as soluções são aproximadamente equivalentes apenas para pequenas amplitudes. Conforme aumentamos a amplitude, chega um ponto em que ao aumentarmos o deslocamento relativo do pêndulo o torque restaurador já não cresce na mesma proporção. De fato, o torque é descrito matematicamente por uma função senoidal. As projeções nos eixos horizontal e vertical são ainda dadas por $x(t) = \cos(\theta)$ e $y(t) = sen(\theta)$, mas o resultado difere do pêndulo simples.

Ao construirmos a trajetória $y = y(x)$, fig. (3.4), percebemos que se assemelha bastante àquela associada ao pêndulo simples. No entanto, se utilizarmos uma luz do tipo estroboscópica veríamos que o pêndulo na realidade não percorre todos os trechos do seu percurso com a mesma velocidade. Se tirarmos fotos do movimento e as sobrepusermos, teríamos a fig. (3.4), que indica que o pêndulo passa rapidamente pelo ponto de máximo enquanto passa uma quantidade de tempo relativamente grande no ponto de equilíbrio instável no topo. Percebe-se que conforme o pêndulo gira por múltiplos de π a partir da origem, ele atinge um ponto de equilíbrio (instável) e o ângulo poderia, inclusive, parar de variar.



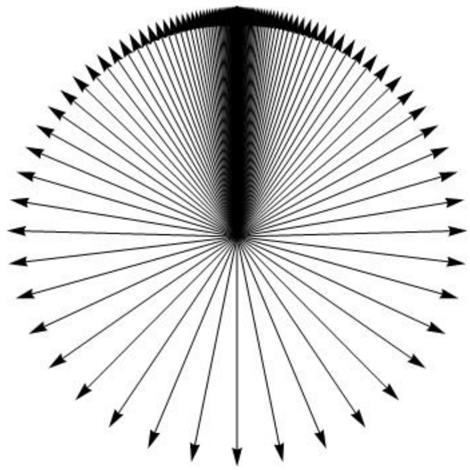


Figura 3.4: Representação da trajetória do pêndulo não linear em diagrama e em representação estroboscópica

1.4 Sine-Gordon estático

Um caso interessante a ser estudado é o sistema de pêndulos enfileirados e acoplados por molas de torção (fig. 3.5). Neste sistema consideramos que a energia fornecida a um dos pêndulos se distribui para os vizinhos. Esse arranjo é formado por diversos pêndulos rígidos que estão ligados entre si apenas por um arame de aço. Os pêndulos em equilíbrio repousam verticalmente. Se fornecemos energia suficiente para que o pêndulo efetue um semi-círculo, ele atinge então, uma posição de equilíbrio porém, bastante instável, pois, o corpo do pêndulo está acima do arame. Quando o impulso ultrapassa esse valor crítico , o pêndulo fica girando regularmente ao redor do eixo (CARDOSO, 1980). No girar , o pêndulo torce o arame e desse modo a perturbação se propaga para todos os outros pêndulos. A equação característica do sistema é uma equação diferencial parcial não linear que envolve o operador de d'Alembert e o seno de uma função, conhecida como Equação de Sine-Gordon, da seguinte forma,

$$\phi_{tt} + \phi_{xx} + \frac{\mu^2}{\beta} sen\beta\phi = 0, \tag{3.10}$$

onde $\phi = \phi(x, t)$ é uma função do espaço e do tempo.

A equação de Sine - Gordon é conhecida desde o séc XIX, no entanto, ganhou importância apenas nos anos de 1970 quando se percebeu que sua solução levava a estrutura do tipo sólitons, "kink"e "antikink", como mostrado na Figura 4.7.

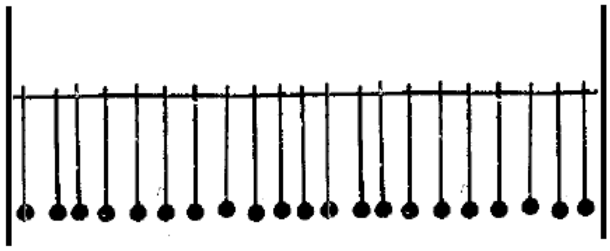


Figura 3.5: pêndulos enfileirados e acoplados por molas de torção
Fonte: Sólitons, Revista Brasileira de Física, Vol. 10, N . O 3, 1980

A equação de Sine-Gordon pode ser usada para descrever diversos fenômenos físicos, com por exemplo: propagação de movimentos de deslocamentos nos cristais, movimento da "parede de Blochl" em cristais magnéticos, teoria unitária das partículas elementares; propagação de um fluxo magnético na junção de Josephson, propagação de um onda de "deslocamento"ao longo de uma membrana lipídea, transições de fase em cristais unidimensionais (CARDOSO, 1980). Algumas dessas equações aplicações serão discutidas no próximo capítulo desta dissertação.

2 Redes não-lineares e o Problema de Fermi-Pasta-Ulam

Na seção acima trabalhamos o pêndulo na forma não-linear. Nesta seção inserimos não-linearidade a uma rede linear (constituída por massa-molas).

O problema de Fermi-Pasta-Ulam consiste em modificar a rede linear apresentada na (seção 3.4). Vimos que numa rede linear, onde a força era dada pela Lei de Hooke ($F = -k\Delta x$), a equação de movimento é

$$m\,\ddot{x}_i + k\,(2x_i - x_{i+1} - x_{i-1}) = 0. \tag{3.11}$$

Nesta seção adicionamos uma não linearidade quadrática $(\alpha\,k\,\Delta x^2)$ à força de Hooke. Dessa forma a força se torna

$$F = -k\,\Delta x - \alpha\,k\,\Delta x^2,$$

onde α é o parâmetro de deformação (arbitrariamente grande ou pequeno) e Δx é o deslocamento em relação ao ponto de equilíbrio. Logo, a força experimentada por uma partícula j na rede de FPU permite-nos escrever a equação de movimento satisfeita por

$$m\,\ddot{x}_j = k\,\left(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}\right)\left[1 + \alpha(x_{j+1} - x_{j-1})\right].$$

O problema de Fermi-Pasta Ulam foi um dos precursores das simulações computacionais na área da Física e constitui-se de simulações em uma rede de partículas ligadas entre si através de molas que obedecem a Lei de Hooke com uma correção não-linear quadrática. Esperava-se que a deformação linear quebrasse o comportamento ergódico do sistema, mas, surpreendentemente, os estados visitados durante a evolução não eram quaisquer. A distribuição de energia entre os modos apresentava um comportamento aproximadamente periódico, fato atribuído à presença de simetrias escondidas. Em 1981, Morikazu Toda modificou o problema de FPU introduzindo uma interação exponencial, eq. (3.12), entre os elementos da cadeia, tornando-o um problema integrável (TODA, 1989).

O FPU não é um sistema integrável: o número de quantidades conservadas é insuficiente para restringir univocamente sua evolução. A suficiência das simetrias em uma cadeia não-linear aparece nos modelos propostos por Toda, como veremos a seguir.

2.1 A cadeia de Toda

Os estudos das redes não-lineares de Fermi, Pasta e Ulam mostraram que as mesmas possuem comportamento aproximadamente periódico (FERMI, PASTA, ULAM,1955). Toda, em seu trabalho, concluiu que estas estruturas estariam ligadas a uma interação exponencial entre as partículas da rede (TODA, 1989). E mostrou que esta interação admite ondas periódicas, o que estava de acordo com os estudos de Fermi,Pasta e Ulam.

A rede de Toda é constituída de N corpos discretos sujeitos a uma interação que cresce exponencialmente com a distância entre os corpos vizinhos, de modo que o par q_n, q_{n-1} está associado a um potencial

$$V(q_n, q_{n-1}) = \frac{\mu^2}{4\beta^2}\, e^{\beta(q_n - q_{n-1})},$$

e, portanto, a n-ésima partícula sofre uma interação devida ao seu vizinho à esquerda e também uma devida ao seu vizinho da direita,

$$V_n = \frac{\mu^2}{4\beta^2}\left(e^{\beta(q_n - q_{n-1})} + e^{\beta(q_{n+1} - q_n)}\right).$$

Para cada corpo discreto presente na rede, tem-se uma amplitude y_n, tal que $\dot{y}_n$ e $\ddot{y}_n$ correspondem à velocidade e à aceleração do corpo que ocupa o n-ésimo sítio da rede. No caso de massa unitária, as equações de movimento satisfeitas pelas partículas de sua rede podem ser obtidas pela função Hamiltoniana[1] associada ao problema,

$$H = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2}p_k^2 + V_k\right),$$

descritas por

$$\begin{aligned} \dot{q_n} &= \{q_n, H\}_{PB} = +\frac{\partial H}{\partial p_n} = p_n, \\ \dot{p_n} &= \{p_n, H\}_{PB} = -\frac{\partial H}{\partial q_n} = -\frac{\partial V}{\partial q_n} = F_n. \end{aligned}$$

Logo, temos um sistema acoplado regido por uma força do tipo exponencial

$$\ddot{q_n} = \dot{p_n} = F_n = \frac{\mu^2}{4\beta}\left(e^{\beta(q_n - q_{n-1})} - e^{\beta(q_{n+1} - q_n)}\right). \tag{3.12}$$

Os problemas de interesse, descritos matematicamente pelas equações de Sine-Gordon e Toda, generalizam modelos físicos bastante conhecidos como o pêndulo simples e o sistema massa-mola. Na próxima seção descreveremos como a equação de onda linear para águas rasas se comporta com a introdução de uma não-linearidade e com uma modificação em sua relação de dispersão. Os modelos descritos pela equação de

[1]Para um sistema fechado a soma da energia cinética e potencial no sistema é representado por um conjunto de equações diferenciais conhecido como as equações de Hamilton para este sistema

Sine-Gordon, Toda e KdV se relacionam entre si, indicando a existência de uma família de equações que compartilham propriedades de integrabilidade. Nesta dissertação não realizamos estas demonstrações, mas elas foram feitas no artigo (ANDRADE, ANJOS, ASSIS, 2016).

3 A equação de Kortewegde Vries (KdV) para fluidos rasos

Nesta seção iremos utilizar a equação de onda para águas rasas (Seção 3.7) para modificar a relação de dispersão da onda e vamos, ainda, introduzir uma não-linearidade quadrática a ela.

A equação de onda linear para águas rasas derivada na seção (3.7),

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0, \tag{3.13}$$

nos indica que: (a) Não há dissipação, ou seja, a equação é invariante com a inversão do tempo; (b) Não há dispersão, ou seja, a velocidade de grupo, $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = v =$ constante; (c) A amplitude de oscilação é pequena, e então, os termos não lineares (como ϕ^2, por exemplo) são omitidos.

A solução mais conhecida para a equação de onda linear é uma onda viajante

$$\phi(x,t) = A\cos\left(k\,x - \omega\,t\right), \tag{3.14}$$

sendo k o número de onda dado por $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ e $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ a frequência angular [2].

Vimos que a solução geral da equação de onda linear (3.13) é a superposição de duas ondas viajando em direções opostas,

$$\phi = f(x - vt) + g(x + vt), \tag{3.15}$$

ou seja, uma onda viajando para a direita e outra viajando para a esquerda, com f e g funções arbitrárias. Cada uma dessas duas ondas é solução de (3.13).

Com o intuito de modificarmos a relação de dispersão, $\omega(k) = k\,v$, onde a velocidade de grupo, $\frac{\partial\omega}{\partial k} = v$, é igual a velocidade de fase, $v_p = \dfrac{\omega}{k} = v$, indicando,

[2]Lembre-se de que $v = \lambda f$, então $v = \frac{\omega}{k}$

portanto, que não há dispersão, uma das alterações mais imediatas a se fazer consiste na introdução um termo dispersivo[3], substituindo $\omega(k) = \dfrac{k}{v}$ por

$$\omega(k) = (\, k - \,\beta\, k^3 + \cdots\,)\, v.$$

Considerando que a dispersão introduzida é pequena, podemos manter apenas os dois primeiros termos, e a solução da equação de onda em sua forma complexa pode ser expressa como

$$\phi = A\, e^{i\left(k\,x-(k-\,\beta k^3)\,v\,t\right)}. \tag{3.16}$$

Verifica-se que a equação satisfeita por essa onda tem a forma

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} + \frac{1}{v}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0, \tag{3.17}$$

sendo conveniente notar que essa relação pode ser reescrita na forma da lei de conservação, em termos da equação de continuidade,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0, \tag{3.18}$$

onde temos, por comparação,

$$\rho = \frac{\phi}{v} \qquad \text{e} \qquad J = \phi + \beta\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}. \tag{3.19}$$

Por outro lado, a fim de inserir efeitos de não linearidade, introduzimos em J um termo quadrático em ϕ,

$$J = \phi + \,\beta\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{2}\phi^2, \tag{3.20}$$

de modo que a equação resultante regendo esse comportamento tem a forma,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} + \alpha\phi\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0. \tag{3.21}$$

Realizando uma mudança de variáveis e reescalando ϕ, da seguinte forma,

$$\begin{array}{ccccl} \phi(x,t) & \rightarrow & U(x,t) & = & k_0 + k_1\,\phi(x,t), \\ x & \rightarrow & X & = & k_2 + k_3\,x, \\ t & \rightarrow & T & = & k_4 + k_5\,t, \end{array} \tag{3.22}$$

[3] $\omega(k) = (k - \beta k^3)v$, logo $v_p = v(1+k^2)$ e $v_g = v(1+3k^2)$, e, portanto, as velocidades de fase e de grupo são diferentes indicando, então, que a onda se dispersa ao se propagar.

de onde se obtêm relações que permitem reescrever (3.21) como

$$\frac{\partial U}{\partial T} + \frac{v}{k_5}\left[\left(\frac{\alpha U}{k_1} - \frac{\alpha k_0}{k_1} + 1\right) k_3 \frac{\partial U}{\partial X} + \beta\, k_3^3 \frac{\partial^3 U}{\partial X^3}\right] = 0, \qquad (3.23)$$

ou ainda, de forma mais concisa, com $k_0 = \frac{1}{\alpha}$, $k_1 = k_3 = 1$ e $k_5 = v$,

$$\begin{aligned} U_T + \left(\alpha\, \frac{U^2}{2} + \beta\, U_{XX}\right)_X &= 0, &(3.24)\\ U_T + \alpha\, U\, U_X + \beta\, U_{XXX} &= 0, &(3.25)\end{aligned}$$

conhecida como equação da KdV. Logo, vê-se que tal equação pode ser vista como uma generalização relativamente natural da equação de onda de D'Alembert para a qual foram introduzidas deformações simples capazes de gerar efeitos dispersivos e não lineares.

4 Considerações finais

Neste capítulo abordamos as relações que os sistemas de pêndulo simples, de massa-mola e de ondas lineares preservam mesmo quando sua linearidade é quebrada, com a introdução das equações de sine-Gordon, Toda e KdV, respectivamente. Estes últimos são paradigmas dos modelos exatamente integráveis e mostramos como eles fornecem os problemas familiares no limite linear.

Capítulo 4

Os sólitons e suas aplicações

Neste capítulo utiliza-se das não-linearidades introduzidas em sistemas físicos conhecidos por estarem tradicionalmente presentes no Currículo de Física da Educação Básica, o pêndulo simples, o sistema massa-mola e redes lineares, e a equação de onda linear (ondas numa corda contínua e em águas rasas) que nos levaram respectivamente às equações de Sine-Gordon, ao modelo de Toda e à equação de KdV, discutidas e apresentadas na seção anterior, para verificar como soluções do tipo solitônicas aparecem de forma natural a esses sistemas. Ao fim apresentamos alguns exemplos de uso dos sólitons para explicar fenômenos naturais e, também, as tecnologias desenvolvidas, ou em desenvolvimento, a partir deles.

1 Dispersão e não-linearidade na equação de KdV

Vimos na seção anterior que na derivação da equação de KdV introduzimos uma não-linearidade à equação de onda linear para águas rasas e modificamos a sua relação de dispersão alterando $\omega = kv$ por $\omega = (k + k^3)v$. Vamos, nesta seção, verificar como estas modificações afetam a forma da onda.

1.1 Dispersão

A relação de dispersão $v = \omega\, k$ pode ser definida em função da velocidade de fase, $v_p = \dfrac{\omega}{k}$, e da velocidade de grupo $v_g = \dfrac{\partial \omega}{\partial k}$. Na equação de KdV, por exemplo, eliminando o termo de não-linearidade $u\, u_x$, a equação se torna

$$u_t + u_{xxx} = 0, \tag{4.1}$$

cuja solução é da forma $u(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$, desde que a relação $\omega = k^3$ seja satisfeita. Verificamos então que a velocidade de fase, $v_p = k^2$, e a velocidade de grupo, $v_g = 3k^2$, são diferentes indicando, então, que a onda dispersa ao se propagar, conforme representado na figura (4.1) (LOMDAHL, 1984).

Figura 4.1: Papel da dispersão na equação de KdV

1.2 Não-linearidade

Eliminando o termo dispersivo $u\,u_{xxx}$ e considerando apenas o termo não-linear $u\,u_x$ na equação de KdV, obtêm-se soluções do tipo,

$$u(x,t) = f(x - ut) \tag{4.2}$$

onde f pode ser uma função arbitrária. Ondas com essa estrutura possuem a importante propriedade de que a velocidade de uma parte da onda com altura u é igual ao próprio deslocamento u. Como consequência a onda quebra porque pontos da onda com alturas u diferentes possuem velocidades diferentes e, portanto, a parte de baixo da onda se move com velocidade diferente da parte de cima conforme indicado na figura (4.2) (LOMDAHL, 1984).

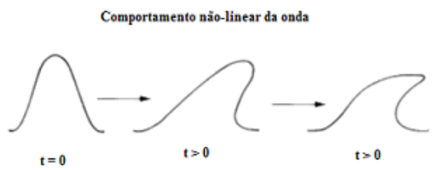


Figura 4.2: Papel da não-linearidade na equação de KdV

2 O que é um sóliton?

Vimos que, na equação de KdV, a não-linearidade, tende a instabilizar a forma da onda, mas esse efeito é contrabalançado pela dispersão causada pelo meio, figura 4.3 (LOMDAHL, 1984). De fato, a correção não-linear tende a fazer com que a forma da onda tenha um caráter mais abrupto na frente e ligeiramente mais suave atrás. Um exemplo dessa formação de onda é a forma que as ondas do mar adquirem pouco antes de chegarem à praia. Entretanto, a introdução de um efeito não-linear e um dispersivo faz com que as ondas (ondas solitárias) que se propaguem ao longo de uma direção particular sem mudança de sua forma. Além disso quando duas ou mais ondas solitárias interagem mutuamente elas não criam ou destruem a perturbação e, assim, elas continuam com suas formas originais após a interação.

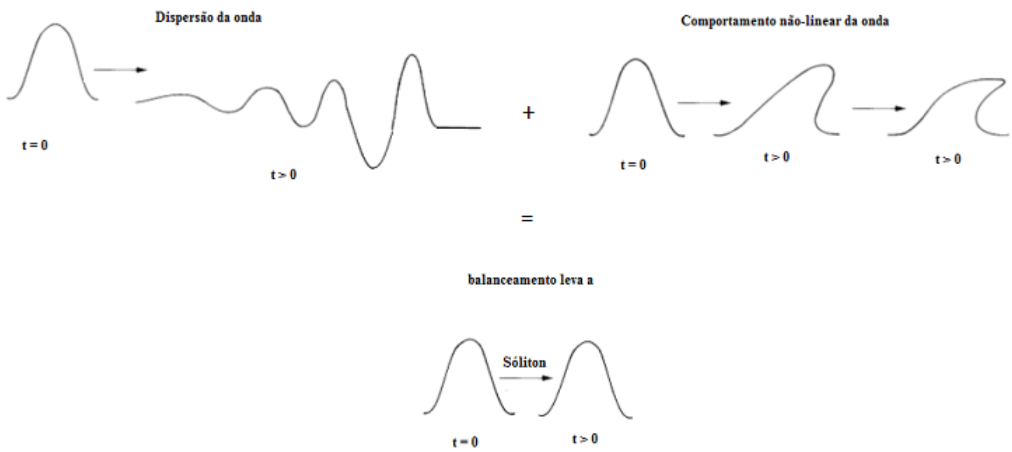


Figura 4.3: Formação de um sóliton

De forma esquemática define-se um sóliton como a solução de uma equação diferencial parcial não-linear que tenha as propriedades (CHALUB, ZUBELLI, 2001):

- representa uma onda de forma permanente, ou seja, é da forma $f(x - vt)$;
- mantém sua forma mesmo após interação com outros sólitons;
- é localizada, isto é, $f(\eta) \to 0$, assim como todas suas derivadas, quando $\eta \to \pm\infty$.

Assim como a equação de KdV, as equações de Sine-Gordon e Toda possuem soluções solitônicas.

2.1 A descoberta dos sólitons

O estudo dos sólitons inicia-se no século XIX com uma observação do engenheiro naval escocês John Scott Russell: a existência de ondas solitárias em canais que podiam se propagar por grandes distâncias com velocidade constante sem dissipar, mantendo sua forma original. Os sólitons foram descritos formalmente em 1934 quando o engenheiro escocês John Scott-Russell observando um barco que estava sendo puxado por dois cavalos no canal de Hermiston, em Edimburgo, bem próximo da universidade Heriot-Watt, notou que o barco ao ser freado bruscamente, produziu uma grande onda, bem definida e arredondada. Segundo ele: "A onda foi se deslocando para frente com alta velocidade, parecia uma montanha de água, arredondada e bem definida, que continuou a seguir pelo canal, aparentemente, sem alterar a sua forma e velocidade"(RUSSELL, 1844).

Russel, então, pulou rapidamente do seu cavalo e foi seguindo o fenômeno enigmático. Ele perseguiu a onda por mais de dois quilômetros e depois ela desapareceu entre as inúmeras curvas do canal. Chamou-as de grandes ondas de translação e dedicou-se ao aperfeiçoamento de várias técnicas para reproduzi-las em laboratório (no quintal de sua casa). Russell, após várias experiências em laboratório, conseguiu obter uma forma empírica (experimental) para a velocidade da onda de translação. Em 1871, Boussinesq e independentemente Lord Rayleigh, em 1876, passaram a estudar o problema matematicamente, mas foi apenas no ano de 1895 que Korteweg e De Vries obtiveram uma fórmula matemática para a velocidade da onda observada por Russell.

Contudo, as pesquisas entorno dos sólitons ficaram inertes até o início de 1950. Foi apenas na segunda metade do século passado, após os trabalhos de Fermi, Pasta e Ulam no problema da partição de energia (FERMI et al, 1955), que sua importância matemática foi desvendada. As investigações conduzidas por Enrico Fermi, John Pasta, Stanislaw Ulam e Mary Tsingou, durante o Projeto Manhattan, nos laboratórios de Los Alamos, com os primeiros computadores industriais, mostraram a existência de leis de conservação em uma classe de sistemas dinâmicos não-lineares. As simetrias responsáveis por esse fenômeno foram aos poucos sendo relacionadas com aquelas responsáveis por manter a forma das ondas solitônicas descritas, décadas antes, através do trabalho de Miura, Gardner, Kruskal, Zabusky (1965, 1968), entre outros.

Esse importante marco no desenvolvimento da matemática experimental e das simulações numéricas serviu também para chamar atenção para simetrias escondidas em sistemas físicos. Atualmente o estudo das leis de conservação encontra-se bastante avançado e suas implicações interessa uma ampla audiência, passando por matemáticos, físicos e engenheiros.

3 Soluções das equações de KdV, Sine-Gordon e Toda

3.1 Sistemas Integráveis

Dentre os modelos físicos de interesse prático, alguns sistemas podem ser completamente caracterizados em qualquer instante, ou seja, apresentam soluções em forma fechada. Estes modelos são denotados integráveis. Os sistemas descritos pelas equações de Sine-Gordon, KdV e Toda são integráveis.

Em termos gerais a integrabilidade está relacionada com regularidade durante uma evolução temporal. Essa regularidade é devida a existência de Leis de Conservação (NOETHER, 1918). No caso de problemas unidimensionais, o conhecimento de uma grandeza conservada permite, em geral, resolver o problema. Foi assim que pudemos determinar a equação horária da posição do sistema massa-mola, por exemplo. Naquele caso em particular a equação de movimento, proveniente da segunda Lei de Newton possuía uma forma relativamente simples, e o problema foi de fácil resolução. Contudo, muitas vezes a equação de Newton tem uma forma que não facilita sua solução. Nessas situações, conhecer leis de conservação pode auxiliar nessa tarefa. Muitos sistemas físicos têm quantidades conservadas, tais como o momento e a energia. O número de Leis de Conservação necessário para que o sistema seja considerado integrável depende do sistema. Por exemplo um sistema com N graus de liberdadec para ser considerado integrável ele deve conter um número N de quantidades conservadas.

Os chamados sistemas exatamente integráveis formam uma área da matemática aplicada que se notabiliza pelos estreitos laços com outros ramos de pesquisa, como teoria de grupos, álgebra, teoria de representação, topologia, geometria diferencial, sistemas dinâmicos, dentre outras, e que encontra solo fértil na física teórica contemporânea. Quando um sistema apresenta um número suficientemente grande de leis de conservação, ele pode ser resolvido analiticamente. Dizemos que este é um Sistema Integrável (DAS, 1989), no qual pode observar um objeto físico único: o sóliton.

Vamos, em seguida, verificar algumas leis de conservação presentes na equação de KdV.

Leis de Conservação

Uma lei de conservação indica algo que não varia, que é imutável ao longo do tempo. Generalizando, as leis de conservação afirmam que quando um sistema físico isolado passa por um processo ele apresenta propriedades que não mudam antes, durante ou depois do processo. Há muitas leis de conservação já conhecidas pelos cientistas. Há a conservação da massa-energia, a conservação da carga elétrica, a conservação do momento linear, a conservação do momento angular, por exemplo.

Leis de conservação na equação de KdV

Como exemplo vamos considerar a equação de KdV e verificar a conservação da massa e da energia. Se considerarmos que ela obedece a condição de periodicidade, isto é, $u(x+1,t) = u(x,t)$, então podemos provar que a "massa"$M = \int_0^1 u(x,t)dx$ e a energia cinética $E = \int_0^1 \frac{1}{2}u^2(x,t)dx$ são independentes do tempo, ou seja, são conservadas. Para o caso da massa, após diferenciar em relação a t, temos,

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \int_0^1 u_t dx \tag{4.3}$$

Então, ao substituirmos na equação de KdV, concluimos que,

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \int_0^1 (-6\,u\,u_x - u_{xxx})dx = 0. \tag{4.4}$$

e portanto, M é uma quantidade conservada (CHALUB, ZUBELLI, 2001). O mesmo procedimento pode ser utilizado para a energia,

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int_0^1 (u\,u_t)dx \tag{4.5}$$

para mostrar que

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\int_0^1 (6u^2\,u_x)dx - \int_0^1 (u\,u_{xxx})dx = 0, \tag{4.6}$$

indicando, portanto, que a Energia cinética também é conservada (CHALUB, ZUBELLI, 2001). As equações de KdV, Sine Gordon e Toda são integráveis, por isso é possível resolvê-las de forma analítica.

3.2 Introdução ao método de Hirota

Nesta seção será apresentado o método de Hirota para a construção de soluções multisolitônicas para sistemas integráveis não-lineares. Soluções multisolitônicas podem ser derivadas por outros métodos, *inverse scattering transform*, por exemplo. A vantagem do método de Hirota é que ele é mais algébrico que analítico e é mais rápido para produzir resultados (Pekcan, 2005, Hietarinta, 1997).

O primeiro passo deste método é fazer transformações apropriadas de equações diferenciais parciais não-lineares para obtê-las em sua "forma bilinear". Encontrar esta transformação não é fácil para algumas equações e às vezes requer a introdução de novas variáveis dependentes e às vezes até mesmo variáveis independentes. O segundo passo é escrever a equação bilinear na forma bilinear de Hirota, para isto, utiliza-se um operador diferencial especial chamado de Operador D de Hirota. Infelizmente não há um procedimento algorítimico para escrever a equação na forma Bilinear de Hirota. O último passo do método de Hirota consiste em utilizar uma expansão de perturbação, que torna-se finita na forma bilinear Hirota, e analisar os coeficientes do parâmetro de perturbação separadamente (Pekcan, 2005, Hietarinta, 1997). Nesse ponto, as informações obtidas nos permitem chegar a soluções multi-sóliton, se a equação é integrável.

Assim, a ideia do método é que permite transformar uma equação não-linear em uma forma bilinear utilizando o operador D de Hirota. Considerando uma equação diferencial parcial não-linear $F[u] = F(u, u_x, u_t, ...) = 0$, o primeiro passo é transformar $F[u]$ para uma forma quadrática $u = T[f(x,t,...), g(x,t,...)]$ chamada forma bilinear de $F[u]$.

O operador D de Hirota é definido como,

$$[D_x^{m1} D_t^{m2} ...]f.g = [(\partial_x - \partial x')^{m1}(\partial_t - \partial t')^{m2} ...]\, f(x,t,...) \times g(x',t',...)|_{x'=x,t=t,...} \quad (4.7)$$

onde $m_i = 1, 2...$ são números positivos e $x, t, ...$ são variáveis independentes (Pekcan, 2005, Hietarinta, 1997). Usando uma combinação do operador D de Hirota é possível escrever a forma bilinear de$F[u]$ como um polinômio $P(D)$ do operador de Hirota (Pekcan, 2005, Hietarinta, 1997). Assim diz-se que equação diferencial parcial não-linear está escrita em termos do operador D se ele puder ser escrito da seguinte forma,

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} P^{\eta}_{\alpha\beta}\beta = 0, \qquad \eta = 1, ..., r \quad (4.8)$$

Propriedades úteis do polimômio de Hirota (PEKCAN, 2005)

$$P(D)f.g = P(-D)g.f$$
$$P(D)1.f = P(-\partial)f$$
$$P(D)f.1 = P(\partial)f$$
$$P(D)e^{px}.e^{qx} = P(p-q)e^{(p+q)x}$$
$$\partial_x^2 \log f = \frac{D_x^2 f.f}{2f^2}$$
$$\partial_x^4 \log(f) = \frac{D_x^4 f.f}{2f^2} - 3\frac{D_x^2 f.f^2}{2f^4}$$

Após bilinearizar a equação que se deseja resolver para deixá-la na forma $P(D)f.f = 0$ utiliza-se a expansão da função f, isto é,

$$f = f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + ... \tag{4.9}$$

Onde f_0 é um valor constante e f_m, $m = 1, 2, ...$ são funções de $x, t, ...$ e ϵ é uma constante, parâmetro de perturbação. Como f_0 é um valor constante podemos considerar $f_0 = 1$ sem perder a generalidade. Assim o produto $f.f$ se torna,

$$f.f = 1.1 + \epsilon(f_1.1 + 1.f_1) + \epsilon^2(f_2.1 + f_1.f_1 + 1.f_2) + \epsilon^3(f_3.1 + f_2 f_1 + f1.f2 + 1.f3) + \tag{4.10}$$

Para o método de Hirota f_1 é uma função exponencial e os outros $f_i^{'s}$ também se tornam funções exponenciais. É importante ressaltar que desde que se escreva f como um polinômio de funções exponenciais quando consideramos a solução para n-sóliton de uma equação F [u] = 0, f_j para todo $j \geq n+1$ será zero. Então, daqui por diante, enquanto estamos construindo a solução para 1-sóliton os coeficientes $f^2 = 0$, quando estamos construindo a solução para 2-sóliton os coeficientes $f^3 = 0$, por exemplo. Assim tem-se que a solução para um sóliton é da forma,

$$u = T[f(x,t,...,y)] = T[1 + e^{\theta_1}] \tag{4.11}$$

sendo $\theta_1 = k_1 x + w_1 t + ... + l_1 y + \alpha_1$. Já para $2-$sólitons

$$u = T[f(x,t,...,y)] = T[1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A(1,2)e^{\theta_1+\theta_2}], \tag{4.12}$$

$$A(1,2) = -\frac{P(p_1 - p_2)}{P(p_1 + p_2)}$$

O método de Hirota descrito nesta seção será utilizado para obter as soluções para 1 e 2 sólitons das equações de KdV, Sine-Gordon e Toda.

3.3 O sóliton de KdV

A equação de KdV na forma bilinear de Hirota

Notamos que na equação de KdV uma transformação para novas variáveis dependentes $w = \nu\,\log(F)$, com grau 0,

$$u = w_{xx} = \nu\,\partial_{xx}\log(F), \tag{4.13}$$

permite escrever a equação de movimento como

$$\left(w_{xt} + \frac{A}{2}\,w_{xx}^2 + B\,w_{xxxx}\right)_x = 0,$$

que pode ser integrada de modo que a constante de integração se anule, pois os campos comportam-se como $w \to 0$ conforme $|x| \to \infty$. Isso resulta numa equação que tem grau quatro em F, com a seguinte estrutura, se fixarmos $\nu = 12\frac{B}{A}$,

$$F\,F_{xt} - F_x\,F_t + B\left(3F_{xx}^2 - 4F_x\,F_{xxx} + F\,F_{xxxx}\right) = 0.$$

Tal equação pode ser apresentada de uma maneira mais compacta e conveniente,

$$\left(D_x D_t + B\,D_x^4\right) F \cdot F = 0, \tag{4.14}$$

em termos do chamado operador D de Hirota.

A equação (4.14), bilinear em F e escrita em termos do operador de Hirota, denota a forma bilinear de Hirota para a equação de KdV. Sua vantagem é que permite construir soluções por meio de uma expansão do tipo

$$F(x,t) = f_0(x,t) + \epsilon f_1(x,t) + \epsilon^2 f_2(x,t) + ..., \tag{4.15}$$

determinando as soluções $f_i(x,t)$ ordem a ordem no parâmetro ϵ.

Solução para um sóliton

A partir da equação de KdV na forma bilinear (4.14), com a seguinte forma geral

$$P(D)\,F \cdot F = 0, \tag{4.16}$$

para um polinômio P par qualquer dos operadores de Hirota (os termos ímpares se cancelam devido a antissimetria de D), podemos construir suas soluções por uma expansão em um parâmetro ϵ.

Substituindo a expansão (4.15) na equação (4.16) obtemos

$$P(D)\Big(f_0 \cdot f_0 + \epsilon(f_0 \cdot f_1 + f_1 \cdot f_0) + \cdots\Big) = 0,$$

e os termos de ordem ϵ^0 desaparecem quando $f_0(x,t) = 1$. De fato, sabemos que $u = 0$ é uma solução para a KdV, no vácuo. Para os termos de ordem ϵ notamos que

$$f_1(x,t) = \exp\left[\sqrt{\frac{v}{B}}(x - vt)\right] \tag{4.17}$$

é solução e que para ordens mais elevadas podemos tomar $f_j(x,t) = 0$, no caso da solução de apenas um sóliton.

Nesse ponto, então, a expressão (4.13) proporciona

$$w(x,t) = 12\frac{B}{A}\log\left(1 + e^{\sqrt{\frac{v}{B}}(x-vt)}\right)$$

e obtemos, finalmente a conhecida solução de 1 sóliton para a equação de KdV,

$$u(x,t) = \frac{3v}{A}\text{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{B}}(x - vt)\right]. \tag{4.18}$$

É fácil verificar que a solução da equação de KdV obedece às duas das exigências para ser chamada de sóliton (representa uma onda de forma permanente, ou seja, é da forma $f(x - vt)$; é localizada, isto é, $f(\eta) \to 0$, assim como todas suas derivadas, quando $\eta \to \pm\infty$). Na próxima seção mostramos que a solução de KdV para dois sólitons tem, ainda, a característica de manter sua identidade mesmo após interação com outro sólitons (CHALUB, ZUBELLI, 2001). Na figura 4.4, apresentamos a evolução temporal da equação de KdV. Percebemos, na Figura da esquerda, que sua forma permanece inalterada a medida que o tempo passa, isso se deve, à combinação singular entre os termos dispersivo e não linear da equação de KdV.

Introduzindo uma pequena modificação na discretização da equação que quebra a integrabilidade do problema numérico e mostramos o resultado na Figura ao centro. Por fim, apresentamos a evolucão da equação de KdV utilizando como condição incial uma função senoidal, à direita. Percebemos que essa solução não é estável sob a evolução temporal de Korteweg e de Vries, não correspondendo a uma solução solitônica.

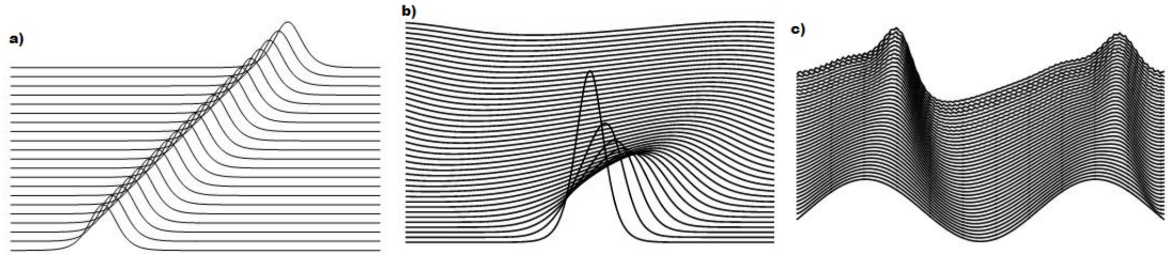


Figura 4.4: a) Evolução temporal da solução da eq. de KdV. b) Evolução temporal da equação de KdV modificada. c) evolução de um cosseno como condição inical da KdV.

De fato, dentre as infinitas possibilidades para as condições iniciais apenas uma classe muito restrita comportar-se-á como sólitons.

A equação KdV permite descrever, perfeitamente bem um grande número de fenômenos não lineares nos diversos ramos da Física. Tais fenômenos constituem uma classe que tem uma propriedade comum: a pouca dispersão para grandes comprimentos de ondas isto é, para perturbações que variam muito lentamente no espaço e a velocidade das ondas de pouca amplitude tende a ser constante (CARDOSO, 1980).

Solução para dois sólitons e Colisões entre sólitons de KdV

Para a solução de 2−sólitons devemos lembrar que $F = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A(1,2)e^{\theta_1+\theta_2}$. Dessa forma, utilizando a relação de que $u = \nu\,\delta_{xx}\log F$, obtemos a solução para 2 sólitons de KdV (PEKCAN, 2005).

$$u(x,t) = -2\,\frac{[k_1^2 e^{\theta_1} + k_2^2 e^{\theta_2} + A(1,2)(k_2^2 e^{\theta_1})e^{\theta_1+\theta_2} + 2(k_1-k_2)^2 e^{\theta_1+\theta_2}]}{(1+e^{\theta_1}+e^{\theta_2}+A(1,2)e^{\theta_1+\theta_2})^2} \tag{4.19}$$

sendo $\theta_1 = k_1 x + k_1^3 + \alpha$ e $A(1,2) = \dfrac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}$

Como já visto anteriormente um sóliton é um fenômeno localizado. Sendo assim é possível produzir dois (ou mais) sólitons, em sequência, separados por um intervalo de tempo, com amplitudes diferentes, e observar o que ocorre no momento em que eles se encontram. Note que eles se encontram porque o sóliton com maior amplitude tem também maior velocidade. Para um caso linear a interação entre duas ondas é simples pois a equação obedece ao princípio da superposição e o resultado da interação é apenas a soma algébrica das duas soluções separadas. No entanto, como a equação de KdV é uma equação não-linear é muito longe do trivial prever como será a interação. É importante destacar que mesmo sendo uma equação não-linear, e, portanto não obedecer ao princípio da superposição, a equação de KdV para o caso dos sólitons, obedece a uma superposição aproximada.

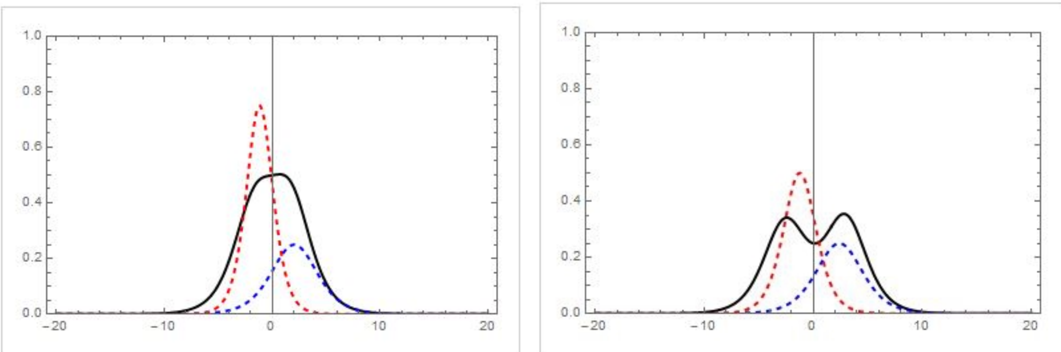


Figura 4.5: Colisão entre dois sólitons de KdV a)atrativo; b) repulsivo.

O que ocorre é que após a interação eles se separam sem alterar sua forma, tendo, apenas, uma pequena mudança da posição (fase) que cada um deles teria caso não tivesse ocorrido a interação conforme pode ser observado no instante da colisão, como mostrado nas figuras abaixo na fig. (4.5)

3.4 O sóliton de Sine Gordon

Na Física clássica, o arranjo de pêndulos da Fig. (4.6) é um bom exemplo de sólitons. Esse arranjo é formado por diversos pêndulos rígidos que estão ligados entre si apenas por um arame de aço. Os pêndulos em equilíbrio repousam verticalmente. Se fornecemos energia suficiente para que o pêndulo efetue um semi-círculo, ele atinge então, uma posição de equilíbrio porém, bastante instável, pois, o corpo do pêndulo está acima do arame. Quando o impulso ultrapassa esse valor crítico, o pêndulo fica girando regularmente ao redor do eixo. No girar, o pêndulo torce o arame e desse modo a perturbação se propaga para todos os outros pêndulos.

No caso do pêndulo, $\phi(x,t)$ descreve o seu ângulo de rotacão. Note que, para pequenas amplitudes ($sen\phi \simeq \phi$) a equação (3.10) se reduz a

$$\phi_{tt} + \phi_{xx} + \mu^2\phi = 0\,, \tag{4.20}$$

conhecida como equação de Klein-Gordon e admite soluções da forma

$$\phi(x,t) = \phi_0 \cos{(kx - wt)} \qquad \omega = \sqrt{\mu^2 + k^2}.$$

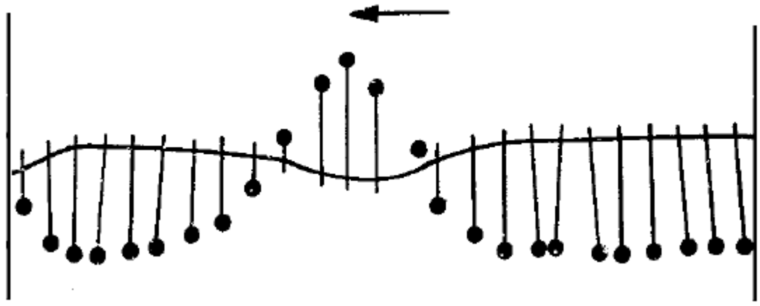


Figura 4.6: Formação de um sóliton
Fonte: Sólitons, Revista Brasileira de Física, Vol. 10, N . O 3, 1980

No entanto, aqui, estamos interessados nos casos em que o pêndulo pode oscilar em amplitudes arbitrárias, pequenas ou grandes. Note que os papéis de x e t, nessa equação, são intercambiáveis e podemos inicialmente supor que $\phi_{tt} = 0$, de modo que não há variação de ϕ no tempo, no chamado regime estático. Assim, temos a equação para o pêndulo não linear,

$$\phi_{xx} + \frac{\mu^2}{\beta} sen\beta\phi = 0$$

cuja solução,

$$\phi(x) = \frac{4}{\beta} \arctan\left(\frac{e^{\pm\mu x} - 1}{e^{\pm\mu x} + 1}\right), \tag{4.21}$$

já foi demonstrada na seção (1). Como a equação (3.10) é invariante por transformações de Lorentz [1] podemos aplicar um *boost*,

$$x \to \cosh(\chi)\,[x\,-\,c\tanh(\chi)\,t],$$

onde na equação (4.21) para obter a solução viajante da equação de Sine-Gordon (3.10),

$$\phi(x,t) = \frac{4}{\beta} \arctan\left(\frac{e^{\epsilon\,\mu(\cosh(\chi)\,x\,-\,sinh(\chi)\,ct)} - 1}{e^{\epsilon\,\mu(\cosh(\chi)\,x\,-\,senh(\chi)\,ct)} + 1}\right).$$

Nota-se que foi possível resolver de forma exata um problema envolvendo uma equação diferencial não-linear, isto é, um problema integrável. A solução acima representa uma

[1] $\cosh(\chi) = \gamma$, $senh(\chi) = \dfrac{\gamma v}{c}$ onde $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\frac{v}{c})}}$ e c é a velocidade da luz

onda solitária localizada viajando com uma velocidade c. De acordo com os sinais $\epsilon = \pm$ classificamos a solução em kink, o pêndulo rotaciona de 0 para 2π, e antikink,o pêndulo rotaciona de 0 para -2π, como representado na Figura (4.7), abaixo.

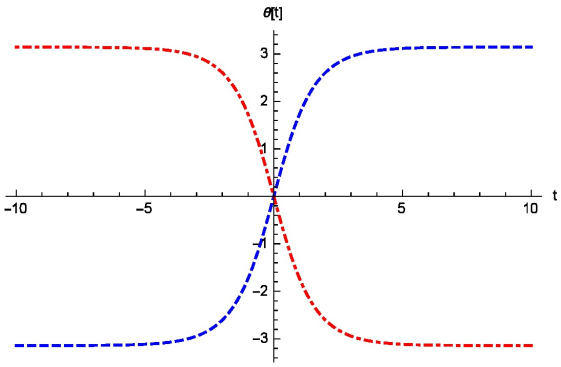


Figura 4.7: Soluções do tipo kink ($\epsilon = +1$), indicada pela curva ascendente tracejada em azul, e do tipo antikink ($\epsilon = -1$), mostrada na curva descendente pontilhada em vermelho.

Uma importante característica da equação de Sine-Gordon e dos fenômenos que ela descreve é a de existir , associado a cada sóliton, um número inteiro positivo ou negativo, igual ao número de rotações completas. Este número inteiro associado a uma onda do tipo sóliton é uma quantidade conservada; quando dois sólitons se superpõem para formarem um só, o novo número é a soma dos dois primeiros. Um sóliton pode ter qualquer número inteiro positivo ou negativo. Assim sendo, podemos somar e subtrair com os sólitons, o que leva a pensar que eles podem ser utilizados em calculadoras eletrônicas (CARDOSO, 1980).

Solução para um sóliton de sine-Gordon utilizando o método de Hirota

A equação de Sine-Gordon pode ser bilinearizada ao usar a transformação $\phi = 4\arctan(\frac{g}{f})$ (Pekcan, 2005), assim a equação de Sine-Gordon pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\begin{aligned}&(f^2 - g^2)(f_{xx}g - 2f_x g_x + f g_{xx} - f_{tt}g + 2f_t g_t - f g_{tt} - fg)\\&-2fg(f f_{xx} - f_x^2 - g g_{xx} + g_x^2 - f f_{tt} + f_t^2 + g g_{tt} - g_t^2) = 0\end{aligned} \quad (4.22)$$

e, portanto pode ser reescrita numa forma mais conveniente utilizando o operador D de Hirota. A equação de Sine-Gordon não pode ser exatamente biliearizada assim nós podemos expressá-la na forma de um par de equações bilinear de Hirota, isto é,

$$P_1(D)\{fg\} = (D_x^2 - D_t^2 - 1)\{f.g\} = 0$$

$$P_2(D)\{f.f - g.g\} = (D_x^2 - D_t^2)\{f.f - g.g\} = 0$$

Para o caso de um sóliton a forma de g e f que satisfazem a forma bilinear de Hirota são $g = \epsilon g_1$, sendo $g_1 = e^{\theta_1}, \theta_1 = k_1 x + \omega_1 t + \alpha$ e f = 1. Logo,

$$\phi(x,t) = 4\arctan(e^{\theta_1}).$$

Solução para dois sólitons de Sine-Gordon e Colisões entre sólitons de Sine-Gordon

Para o caso de 2-sólitons $g = \epsilon g_1$, sendo $g_1 = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}$, $\theta_i = k_i x + \omega_i t + \alpha_i, i = 1,2$ e $f = 1 + \epsilon^2 A(1,2) e^{\theta_1+\theta_2}$ (Pekcan, 2005). Assim, ao considerar $\epsilon = 1$, obtemos,

$$\phi(x,t) = 4\arctan\left(\frac{e^{\theta_1} + e^{\theta_2}}{1 + A(1,2)e^{\theta_1+\theta_2}}\right) \tag{4.23}$$

Como já mencionado, dois sólitons podem se cruzar sem se deformarem assintoticamente. Como forma de ilustração na fig. (4.8) é mostrada a interação de dois movimentos do tipo sóliton de Sine-Gordon.

Um efeito semelhante é encontrado no estudo do ferromagnetismo, mais precisamente, nas "paredes de Bloch" que separam os domínios de magnetização. Quando uma das configurações estáveis de spin é perturbada, ocorre também uma alteração das relações entre os spins de direção oposta e, desse modo, a perturbação é transmitida através do material ferromagnético. Estas perturbações percorrendo direções opostas podem produzir pares de "torções" e "anti-torções" do tipo sóliton.

3.5 O sóliton de Toda

Nesta seção utilizamos o método de Hirota para escrever a solução de $1-$sóliton para a Equação de Toda Lattice $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\log(1+V_n(t)) = V_{n+1}(t)+V_{n-1}(t)-2V_n(t)$. O primeiro passo é, semelhante ao caso de KdV e Sine-Gordon, bilinearizar a equação. Para isso, introduzimos a seguinte transformação (PEKCAN, 2005),

$$V_n(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} log f_n \tag{4.24}$$

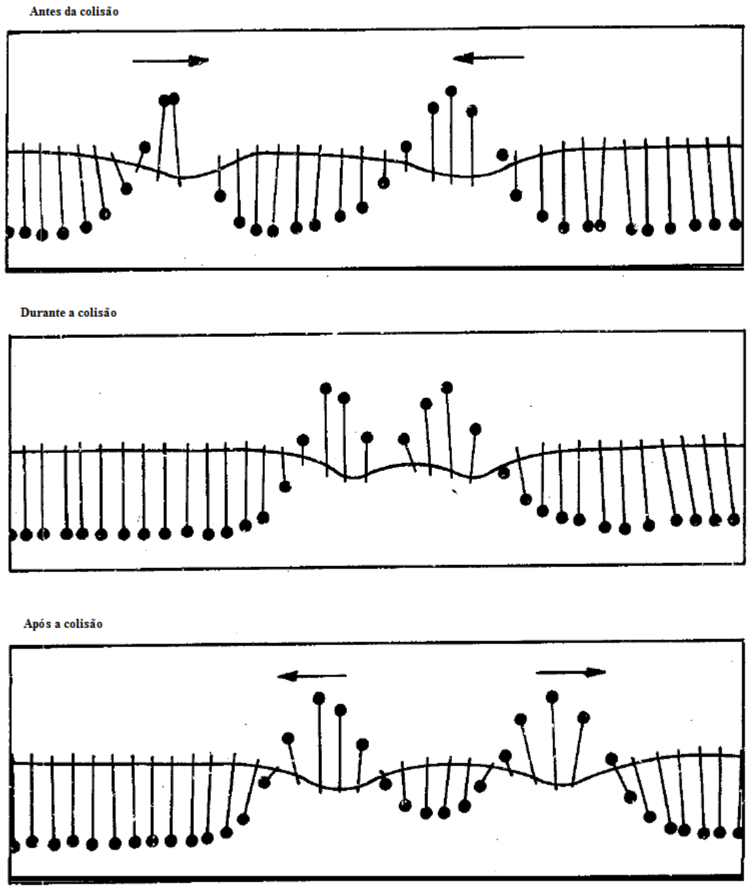


Figura 4.8: Arranjo de pêndulos acoplados mostrando dois movimentos do tipo sóliton que interagem sem se deformarem.
Fonte: Sólitons, Revista Brasileira de Física, Vol. 10, N . O 3, 1980

e, assim, obtemos a forma bilinear da equação de Toda Lattice,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f_n \ f_n - 2(\frac{\partial}{\partial t} f_n)^2 - f_{n-1} f_{n+1} + f_n^2 = 0. \tag{4.25}$$

O passo seguinte é escrever a equação bilinearizada na forma bilinear de Hirota,

$$(D_1^2 - 4senh^2(\frac{1}{2} D_n))\{f_n . f_n\} = 0. \tag{4.26}$$

Para a solução de 1−sóliton observamos que $f_n = 1 + e^{\theta_n^{(1)}}$, $\theta_n^{(1)} = \epsilon_l 2senh(\frac{k_1}{2})t + k_1 n + \alpha_1$. Para o caso de $\epsilon = 1$, temos, portanto,

$$V_n(t) = \frac{4senh^2 \frac{k_1}{2} \, e^{\theta_n^{(1)}}}{(1 + e^{\theta_n^{(1)}})^2} \tag{4.27}$$

a que é a solução para para um sóliton do modelo de Toda.

4 Os sólitons na Natureza e suas aplicações

4.1 As nuvens de *Morning Glory*

No Golfo da Carpentária, ao norte da Austrália, a geografia única do lugar define condições atmosféricas que permitem a formação de um fenômeno climático impressionante, as nuvens de *Morning Glory*. Nas figuras abaixo (4.9) mostramos fotografias retratando o fenômeno de "Morning Glory", que não tem tradução para o português estabelecida. São nuvens em formato bem definido, geralmente cilíndricas (ou "acilindradas", digamos) que deslocam-se a velocidade constante por grandes distâncias, mantendo sua forma, ou seja têm propriedades solitônicas. Apesar de pouco conhecidas, os registros fotográficos dessas nuvens impressionam pela beleza.

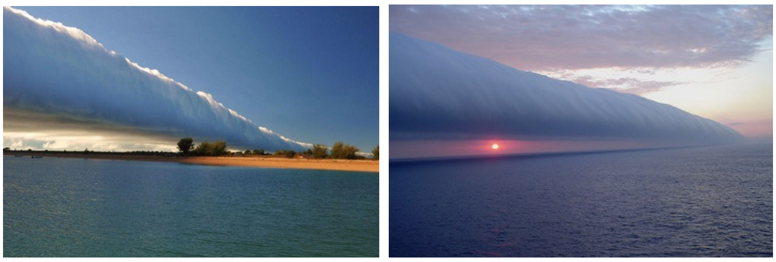


Figura 4.9: Morning Glory

4.2 A Pororoca no Rio Amazonas

Os sólitons podem ser observados no fenômeno da *pororoca* no Rio Amazonas (4.10). O alinhamento da frente da onda, a forma mantida mesmo após uma colisão e a inclinação perto da borda, permitem caracterizar a pororoca como sendo um fenômeno do tipo solitônico. O fenômeno ocorre quando, devido as marés a água do mar invade o Rio Amazonas se propagando por alguns quilometros foz a dentro. A energia da onda do mar passa a se propagar na agua do rio e forma ondas com grande estabilidade, podendo até mesmo ser surfada. O fenômeno ocorre também em diversos outros e é conhecido por "bore"no inglês e "mascaret"no fracês.

4.3 O pulso arterial

Um outro exemplo de aplicações dos sólitons é a propagação dos pulsos e tem sido estudado pela biofísica. A energia da batida do coração propaga-se podendo

Figura 4.10: Pororoca no Rio Amazonas, Brasil.

ser sentida a distância, no punho ou no pescoço, por exemplo. O modelo de explicação recente para explicar como a energia viaja essa distância sem se dissipar é baseado nos sólitons.

4.4 As Junções Josephson

O modelo de Sine-Gordon para o pêndulo não-linear é de grande interesse tecnólogico, sendo usados para descrever as chamadas junções Josephson. A fim de explicar o assunto a ser abordado faremos uma analogia do fenômeno de tunelamento de uma partícula que atravessa uma barreira de potencial de um metal para o outro e de um metal para um supercondutor. O tunelamento de elétrons de um metal para outro ocorre quando se separa os dois metais com um barreira isolante como, por exemplo, o óxido de alumínio, com apenas alguns nanômetros de espessura. Quando estes dois metais são condutores normais (e não supercondutores), a corrente de tunelamento obedece à Lei de Ohm para uma baixa tensão aplicada. Porém, quando um dos metais é um condutor normal e o outro é um supercondutor, a corrente deve se anular (no zero absoluto) a menos que a tensão aplicada, V, seja maior que uma tensão crítica $V_c = E_g/2e$, onde E_g é a largura da banda proibida do supercondutor. Neste caso, verifica-se que a corrente de tunelamento não obedece mais à Lei de Ohm. Em 1962, Brian Josephson elaborou uma teoria propondo que dois supercondutores separados por uma película de isolante, formavam uma junção, hoje conhecida em todo o mundo como junção Josephson. De acordo com Josephson, nesta junção, pares de Cooper podem passar por tunelamento de um supercondutor para outro formando uma corrente de tunelamento. O modelo de Sine-Gordon é utilizado para explicar tal propriedade das Junções Josephson (BARONE,ESPOSITO e MAGEE, 1971).

5 Considerações Finais

Em síntese, o capítulo engloba desde uma descrição histórica de aproximadamente 150 anos atrás discorrendo desde uma observação feita por um engenheiro naval e até indicar como esta observação desenvolveu uma matemática, de primeira linha, atual e produtiva (CHALUBI, ZUBELLI, 2001). Assim, discutimos uma possibilidade de discretização integrável das equações de Korteweg-de Vries (KdV), Sine-Gordon e Toda, por meio do método de Hirota. Para isso introduzimos os operadores diferenciais de Hirota, apresentamos algumas de suas propriedades e investigamos como o emprego do método de Hirota permite o desenvolvimento de uma metologia capaz de determinar exatamente soluções de multi-sólitons (apresentamos, no entanto, apenas as soluções para 1 e 2 sólitons) para as equações de KdV, Sine-Gordon e Toda.

Capítulo 5

Concepções Teóricas e Descrição do produto educacional

Um dos requisitos do Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física é a criação de um produto educacional, que pode ser desde um texto de apoio ao professor, um aplicativo ou uma hipermídia até uma sequência didática, ou um vídeo, que se constitui de uma Pesquisa aplicada que procura resolver problemas encontrados no processo de ensino-aprendizagem de Física no Ensino Médio.

Como produto educacional optamos pela criação de uma página na internet, com simulações, animações, vídeos, imagens e hiperlinks, que consiga fazer uma boa apresentação do significado físico do termo sóliton desde um ponto de vista histórico até algumas de suas aplicações tanto para os curiosos estudantes do Ensino Médio, quanto para aqueles em geral, físicos ou não, que buscam um entendimento mais preciso e didático acerca dos fenômenos ondulatórios estudados na Física Contemporânea, e que possa ser utilizada tanto como meio de divulgação científica, ao poder ser acessada em ambientes de ensino não-formal e, também, ser utilizada em sala de aula.

A opção pela criação de uma página na internet se deu ao notar que o uso da Internet em espaços formais de ensino-aprendizagem têm sido encarado como um enorme desafio porque muitos professores não se sentem preparados para lidar com novas tecnologias (é comum ouvir reclamações de que os alunos têm mais habilidade para lidar com o computador que eles próprios) e, também, muitas vezes falta clareza nos objetivos e nas opções do uso da internet no processo de ensino-aprendizagem. Sendo assim, é importante que os professores utilizem este recurso em sala de aula e relatem os desafios e potencialidades do seu uso para motivar e orientar outros professores a seguirem este caminho. Dessa forma, na sequência, descrevemos algumas das potencialidades no uso da internet em sala de aula, onde discorremos sobre a internet como um veículo de divulgação científica em espaços de ensino formal e não-formal e os objetos de aprendizagem disponíveis para este meio. Em seguida indicamos como foi estruturada a página de divulgação acerca dos fenômenos não-lineares apresentados nos capítulos anteriores desta dissertação.

1 Potencialidades de divulgação científica de uma página na Internet

Os conceitos, teorias e leis físicas exigem um grande grau de abstração e são necessários exemplos visuais e concretos para facilitar a sua compreensão. Nesse sentido, a educação online pode ajudar, uma vez que na Web é possível disponibilizar uma série de possibilidades e recursos pedagógicos em diferentes formatos: textos, vídeos, músicas, imagens, softwares, simulações, animações, hiperlinks entre outros e uma página com tais recursos associados a uma linguagem acessível e didática pode contribuir para a formação de pessoas em diversos lugares do planeta, uma vez que suprimem os alunos e os professores das limitações de espaço e de tempo. Abaixo, nas subseções, discorremos sobre o uso da internet como meio de divulgação científica em espaços de educação formal e não-formal e sobre os principais Objetos de Aprendizagem (OA), indicamos a importância daqueles utilizados no site desenvolvido.

1.1 Divulgação científica

Um dos pontos importantes para uma sociedade tecnologicamente avançada está ligado à integração do cidadão na proposta de uma espiral de progresso. Para isso, um aspecto essencial é a alfabetização científica que procura formar cidadãos aptos a tomarem decisões democraticamente fundamentadas e com poder de transformação sobre e em situações em que conhecimentos científicos e tecnológicos devem ser mobilizados uma vez que ciência e tecnologia são cada vez mais setores estratégicos e é fundamental aumentar o interesse dos estudantes pela ciência para auxiliar um país a alcançar desenvolvimento e autonomia buscando meios próprios para não depender de tecnologias importadas (Conferência Mundial de la ciência, Budapeste, 1999). Em concordância com tal afirmação podemos encontrar no *National Research Council (1996),* a seguinte argumentação:

> [...] todos necessitamos utilizar a informação científica para realizar opções que se nos deparam a cada dia; todos necessitamos ser capazes de participar em discussões públicas sobre assuntos importantes que se relacionam com a ciência e com a tecnologia; e todos merecemos compartilhar a emoção e a realização pessoal que pode produzir a compreensão do mundo natural (MASSARANI,CASTRO e BRITO, 2002).

Para esta tarefa a divulgação científica tem, ou deve ter, papel fundamental e o ato de divulgar conhecimentos, estudos e descobertas científicas deve ser encarada como um tema da política pública e uma obrigação das universidades, principalmente as públicas e não pode ser vista como uma atividade secundária feita por cientistas menos qualificados, mas sim como uma das responsabilidades do pesquisador assim como o é a publicação dos resultados de suas pesquisas em revistas da área pois, ninguém melhor do que o próprio cientista, autor do artigo que divulga sua pesquisa, para contar suas implicações para a ciência e para a sociedade (MASSARANI,CASTRO e BRITO, 2002).

A internet possibilita um ensino mais flexível e expande o espaço e o tempo, que antes era restrito à sala de aula, para o acesso a determinado conteúdo em diversas situações, dentro do ônibus, na cama e no sofá, por exemplo, principalmente nos dias atuais com o aumento significativo dos aparelhos smartphones. Esta ferramenta pode ser usada, portanto, para realizar a divulgação científica de temas de Físca Contemporânea tanto em espaços de ensino formal quanto não-formal.

1.2 Educação Formal e Educação Não-Formal

Até os anos 80 não era comum aceitar que houvesse aprendizagem efetiva fora da sala de aula, predominando uma concepção de aprendizagem como a aquisição de fatos e de informação, ideia abalada pela pesquisa em ensino de ciências com base construtivista (DELICADO, 2013). Na perspectiva construtivista, a aprendizagem é uma atividade dinâmica, que, sendo construída sobre conhecimento previamente adquirido, é influenciada pelas várias experiências da vida cotidiana.

No contexto das atividades educativas fora de sala de aula surgem os conceitos de educação formal e não-formal. A educação, entendida como um processo de desenvolvimento da capacidade intelectual da criança e do ser humano, tem um significado tão amplo e abrangente que, em geral, prescinde de adjetivos. É um processo único, associado quase sempre à escola. No entanto, para que esse processo e a discussão que dele apresentamos sejam melhor compreendidos, algumas distinções ou adjetivações devem ser feitas. A educação com reconhecimento oficial, oferecida nas escolas em cursos com níveis, graus, programas, currículos e diplomas, costuma ser chamada de educação formal. É uma instituição muito antiga, cuja origem está ligada ao desenvolvimento de nossa civilização e ao acervo de conhecimentos por ela gerados. O surgimento da escola nas civilizações mais avançadas decorre da necessidade de preservar e garantir o legado do acervo cultural continuamente gerado por essas civilizações (MASSARANI,CASTRO e BRITO, 2002).

No entanto, mesmo nas civilizações tidas como culturalmente avançadas, a vida cotidiana sempre exigiu muito mais do que o conhecimento dos saberes apresentados formalmente nas disciplinas escolares. Na educação não-formal, não há lugar, horários ou currículos. Os conhecimentos são partilhados em meio a uma interação sociocultural que tem, como única condição necessária e suficiente, existir quem saiba e quem queira ou precise saber.

A exceção é a educação em ciências, sobretudo das ciências exatas, que traz a muitos educadores algumas dúvidas e inquietações. As mais comuns se referem à impossibilidade de ensinar e aprender ciências nesses ambientes. Não é difícil compreender a razão de tais descrenças ou restrições, basta observar atentamente a visita de crianças a um centro de divulgação científica. Elas correm de um lado para o outro, fixam-se alguns instantes aqui e ali, riem, gritam, assustam-se, aborrecem-se, encantam-se, numa atividade incessante e quase sempre desordenada. Mesmo quando acompanhadas dos pais, professores ou em visitas monitoradas, a dispersão tende a ser muito grande, pois os estímulos são muitos, até mesmo onde se procura dar algum ordenamento lógico ou pedagógico às apresentações, o que não é frequente. Será possível ensinar e aprender ciências dessa forma? Será que conteúdos científicos, abstratos, vinculados a estruturas lógicas formais, podem ser compreendidos em meio a esse caleidoscópio de informações e sensações, sem que se obedeça ao rígido ordenamento lógico característico do conhecimento científico que a educação formal oferece?

Afirmamos que sim, a difusão da ciência, pode ocorrer em espaços não-formais de ensino, mas para isso deve-se, sempre, ser considerada a abrangência da linguagem e dos recursos pedagógicos utilizados nos meios de divulgação não-formal, uma vez devem ser dirigidos a um público geral.

1.3 Objetos de Aprendizagem (OA)

Materiais didáticos digitais de apoio à aprendizagem vêm sendo cada vez mais produzidos e utilizados em todos os níveis de ensino. Esses materiais são chamados Objetos de Aprendizagem (OA). São muitas as definições dadas aos Objetos de Aprendizagem, segundo Wiley (2000) um OA pode ser qualquer fonte digital que pode ser reutilizada para aprendizagem o que inclui imagens, fotos, clipes de vídeos, animações, páginas web.

Simulações e animações

Um dos mais disseminados tipos de OA são as simulações computacionais de experimentos de Física, que estão disponíveis para utilização em diversos contextos se configurando num espaço privilegiado para o desenvolvimento de modelos que representam fatos, objetos, ambientes e eventos pertencentes ao mundo real ou imaginário com a possibilidade de interação com as suas estruturas.

A simulação pode ser usada com fins educacionais, porque o aluno é levado a tomar uma série de decisões perante um problema, executando ações que são testadas no ambiente virtual, uma vez que este está programado para "reagir"de acordo com os estímulos recebidos.

De acordo com Wieman e Adans (2010) as simulações computacionais podem ser utilizadas em situações de ensino diversas, por exemplo: **1) Em aulas expositivas** - "onde a principal contribuição consiste em visualizar conceitos abstratos como fótons, elétrons, linhas de campo, etc. Além disso, algumas simulações permitem a construção de gráficos em tempo real, à medida que o professor e os alunos interagem com elas"; **2) em atividades em grupos na sala de aula** - onde "é possivel encorajar os alunos a explorar o comportamento da simulação, questionar suas ideias e desenvolver os correspondentes modelos mentais"; **3) Em tarefas de casa** - ao permitirem "revisitar a simulação de forma livre ou a partir de um roteiro proposto pelo professor. Além disso, pode ser utilizada para introduzir um novo tópico, ou como um aprofundamento do conteúdo discutido em sala de aula oferecendo assim a oportunidade de que o aluno explore a simulação depois da aula presencial"; **4) ou no laboratório**

- Dorneles (2010) destaca a importância das ferramentas computacionais usadas em conjunto com atividades experimentais na aprendizagem dos alunos tanto em relação à compreensão dos conceitos físicos envolvidos quanto ao estabelecimento de relações entre teoria e experimento.

PHET: Tecnologia Educacional em Física

Diversas simulações computacionais podem ser encontradas no site do projeto PHET (Tecnologia Educacional em Física), fundado em 2002 pelo ganhador do prêmio Nobel Laureate Carl Wieman que objetiva criar simulações interativas gratuitas nas áreas de matemática e ciências. As simulações do Phet são baseadas em pesquisas extensas e bem elaboradas sobre educação em ciências e envolve pesquisadores e estudantes. As simulações são pensadas para que os alunos a partir de pensamento e manipulação consigam realizar descobertas e possam aprofundar nos assuntos científicos estudados.

O grupo do PhET possui uma abordagem baseada em pesquisa, na qual as simulações são planejadas, desenvolvidas e avaliadas antes de serem publicadas no sítio. As entrevistas realizadas com diversos estudantes são fundamentais para o entendimento de como eles interagem com simulações e o que as torna efetivas educacionalmente.

Nas simulações, o grupo procura conectar fenômenos diários com a ciência que está por trás deles, oferecendo aos alunos modelos fisicamente corretos de maneira acessível.

Hipertextos

Um *hipertexto*, se reveste de inúmeras formas e oferece uma dinâmica de idas e vindas que abre as possibilidades de uma leitura intertextual, permitindo ao leitor resgatar, ao simples clique do mouse, alusões, citações, paródias e paráfrases e se trata de um documento múltiplo e não um texto "simples".

2 Estrutura do site

A partir das seções anteriores percebemos que é a divulgação científica é importante e que a internet é uma boa ferramenta para realizar esta tarefa. Sendo assim, nesta seção apresentamos uma visão geral do layout do produto educacional criado pelos autores desta dissertação que se constitui de uma página na internet com conteúdos introdutórios de sólitons e fenômenos não-lineares. De forma esquemática o site foi dividido em quatros seções de acordo com o indicado por Gil Perez e Jordi Solbes (1993), para os quais os limites da Física Clássica devem ser debatidos, aclarando, assim, os limites de validade desta e defendem que a ausência de referências às dificuldades da Física Clássica poderá favorecer o surgimento de erros conceituais por ocasião da interpretação dada pelos estudantes acerca da construção da ciência moderna.

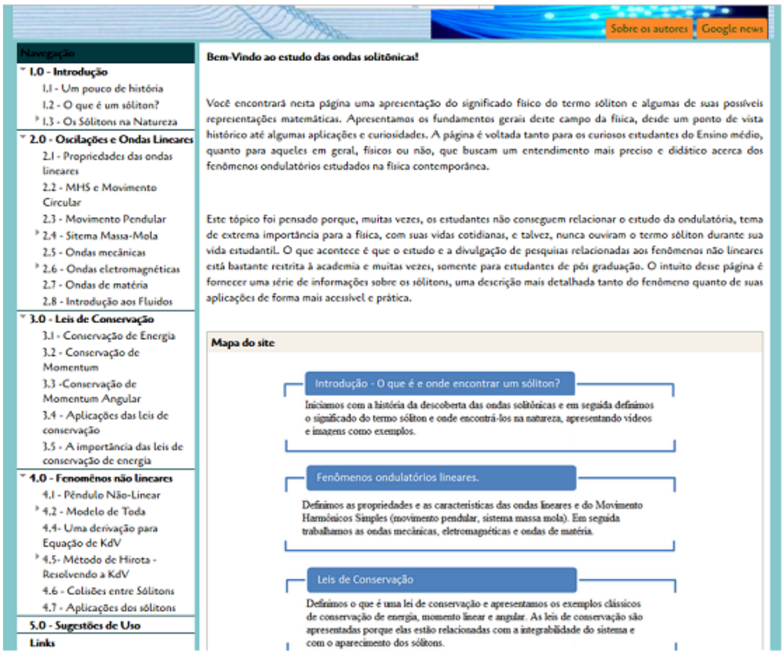


Figura 5.1: *Layout* do site

2.1 Introdução do site

Na introdução, endereço eletrônico `sites.google.com/site/solitonsufg/home/introducao`, fazemos breve levantamento histórico do estudo dos sólitons. Dessa forma começamos com uma definição do termo sóliton e discorremos sobre como eles foram descobertos pelo engenheiro naval escocês John Scott Russell, que observou a existência de ondas que podiam se propagar por grandes distâncias com velocidade constante e mantendo sua forma original sem dissipar, e onde podem ser encontrados na natureza. Damos ênfase para os fenômenos da tsunami, a pororoca do Rio Amazonas e as nuvens de Morning Glory porque nestes fenômenos é fácil perceber o comportamento solitônico além de serem belos.

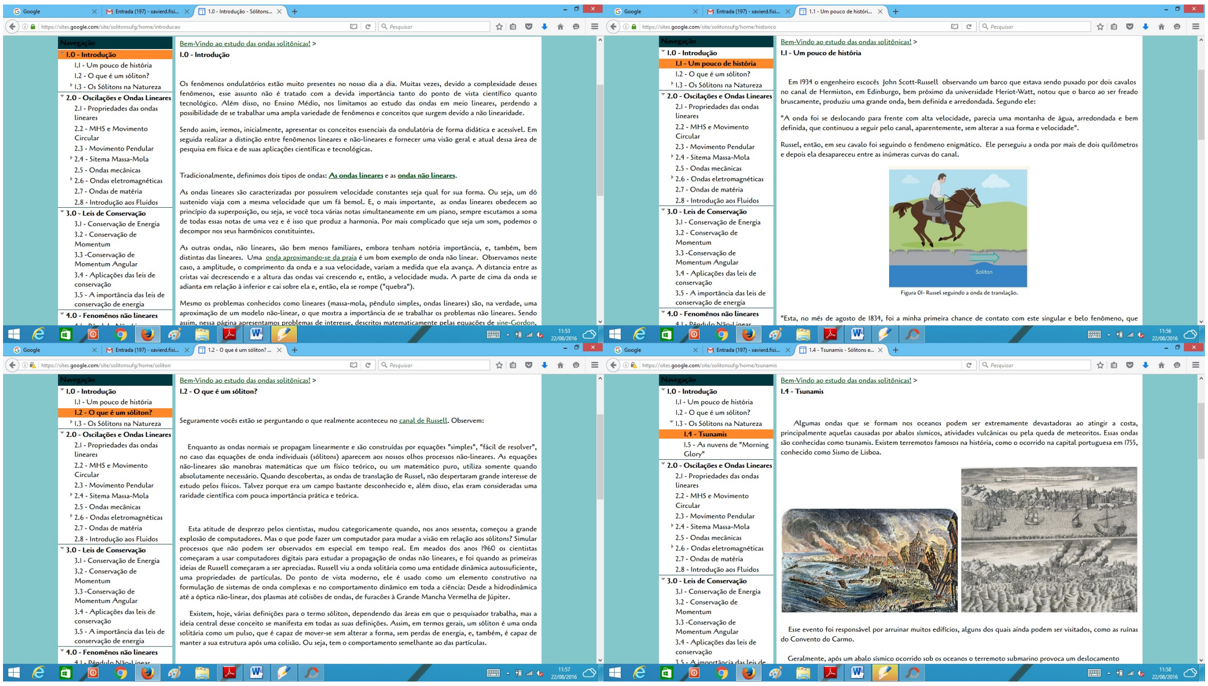


Figura 5.2: Introdução do site

2.2 Oscilações e Ondas Lineares

Nesta seção, endereço eletrônico `sites.google.com/site/solitonsufg/home/oscilacoes`, são definidos os movimentos oscilatórios e periódicos, introduzidos os conceitos de Movimento Harmônico Simples e ondas lineares. É feito o estudo do pêndulo simples, onde se define sua equação de movimento e a solução para a usual aproximação para ângulos pequenos, e do sistema massa-mola e das redes lineares. Em seguida é definido o termo "onda", e são fornecidos exemplos de ondas presentes em situações cotidianas dos estudantes. Nesta seção as ondas são classificadas e suas principais caracteristicas (comprimento e número de onda, período, frequência, amplitude) são apresentadas de maneira didática utilizando exemplos concretos e o apoio de diversos objetos de aprendizagem como simulações, animações, vídeos e imagens animadas. Os objetos de aprendizagem escolhidos para compor a página foram fruto da observação do autor principal desta dissertação em sala de maneira a considerar as dificuldades apresesentadas pelos alunos em situações de ensino em anos anteriores.

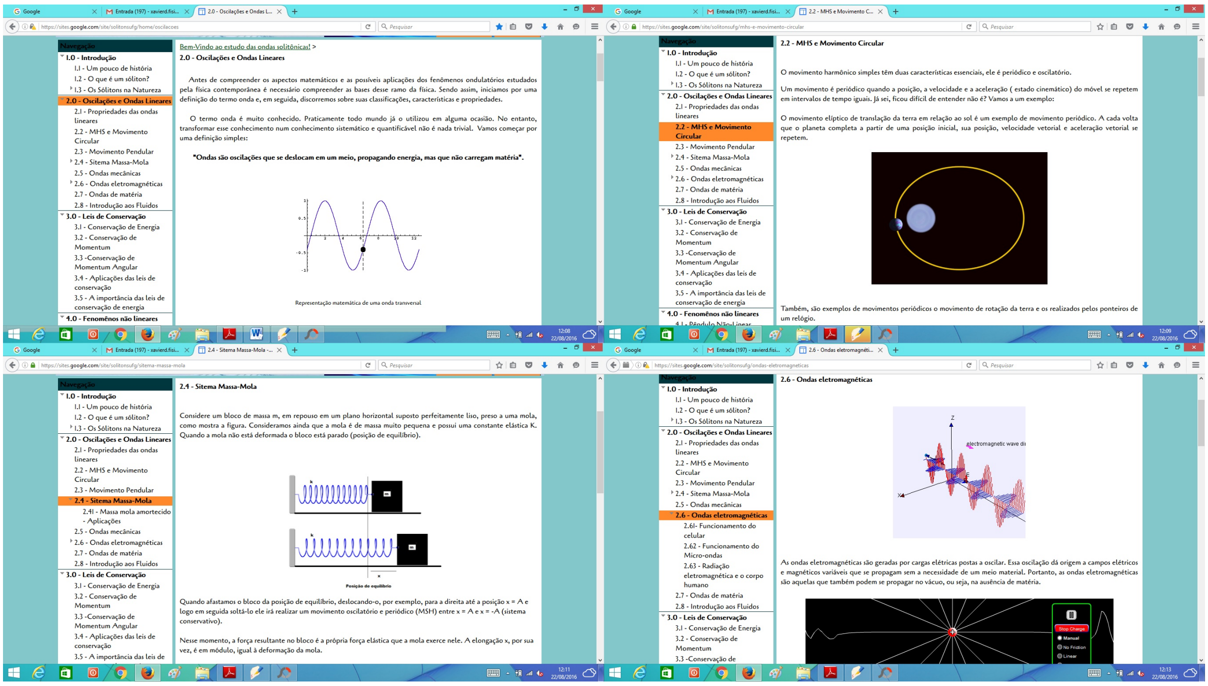


Figura 5.3: Seção Oscilações e ondas lineares

2.3 Leis de conservação

Nesta seção, endereço eletrônico `sites.google.com/site/solitonsufg/home/conservacao` discorre-se sobre as leis de conservação, que indicam que algo não varia, que é imutável ao longo do tempo, e damos exemplos de leis de conservação de energia, momento linear e momento angular, algumas aplicações das leis de conservação e sua importância. Indicamos que no caso de problemas unidimensionais, o conhecimento de uma grandeza conservada permite, em geral, resolver o problema. Foi assim que pudemos determinar a equação horária da posição de um oscilador harmônico (sistema massa-mola), por exemplo. Naquele caso em particular a equação de movimento, proveniente da segunda lei de Newton, tem uma forma relativamente simples, e o problema pode ser resolvido facilmente. Contudo, muitas vezes a equação de Newton tem uma forma que não facilita sua solução. Nessas situações, conhecer leis de conservação pode auxiliar nessa tarefa. Nesta seção foram utilizadas exemplos concretos e o apoio de diversos objetos de aprendizagem como simulações, animações, vídeos e imagens animadas (gifs) escolhidos pela observação do autor principal desta dissertação em sala de maneira a considerar as dificuldades apresentadas pelos alunos em situações de ensino em anos anteriores.

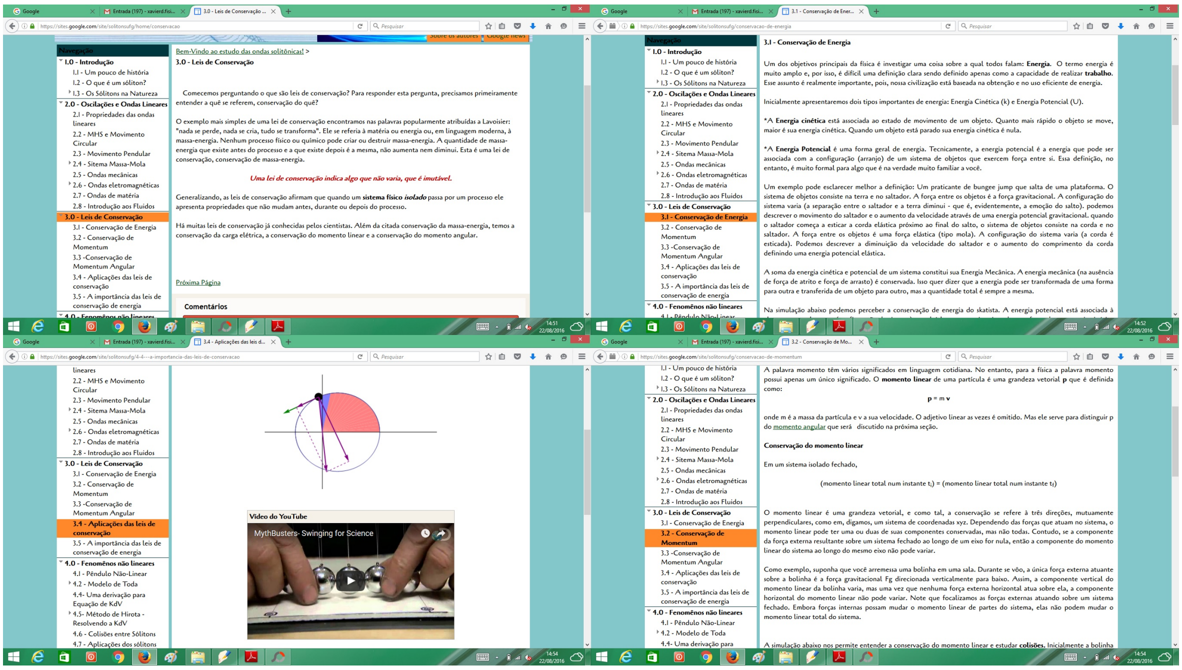


Figura 5.4: Seção Leis de Conservação

2.4 Fenômenos Não-Lineares

Nesta seção, endereço eletrônico `sites.google.com/site/solitonsufg/home/fenomenos-lineares-vs-nao-lineares` são introduzidas não-linearidades aos sistemas trabalhados na seção 2.2 do site e, do tratamento desses sistemas em sua forma não-linear surgem os fenômenos do tipo sóliton. Ao pêndulo simples não é necessario introduzir não-linearidade porque ela já é presente ao sistema, sendo necessário apenas resolvê-lo para um ângulo geral (sem aproximação para pequenos ângulos). Ao sistema massa-mola e as redes lineares é necessário inserir uma não-linearidade quadrática para que apareça soluções solitônicas, porque eles são sistema lineares. Após explicado os sólitons das equações de Sine-Gordon, KdV e Toda apresentamos algumas aplicações destes sólitons, no endereço `https://sites.google.com/site/solitonsufg/home/aplicacoes-dos-solitons`, indicando como o estudo de sistemas relativamente simples em sua forma não-linear pode levar a aplicações complexas e importantes para o meio científico e tecnológico. É importante que, a partir desta seção, pode-se perceber que a ciência é uma área mutável em que sistemas já bem estabelecidos são questionados de maneira a entender suas limitações e gerar desenvolvimento.

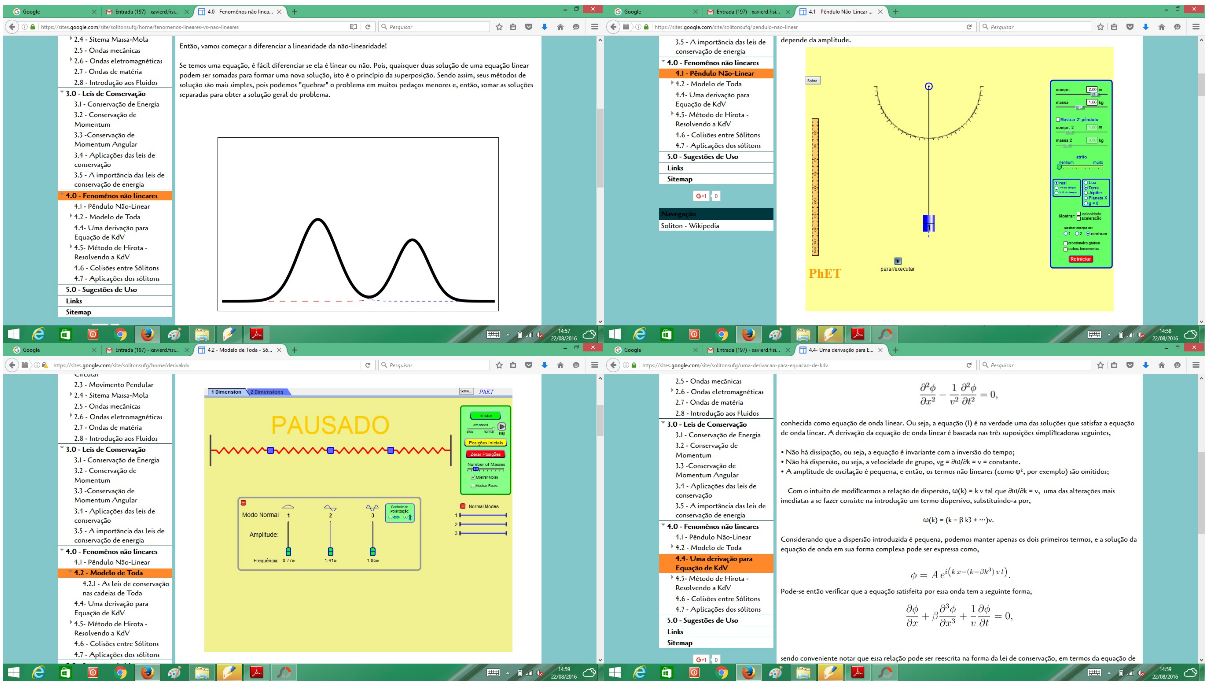


Figura 5.5: Seção Fenômenos Não-Lineares

2.5 Sugestões de uso

Em seguida, a utilização da página na Internet em sala de aula foi feita a partir da criação de uma sequência didática, apresentada no endereço eletrônico `sites.google.com/site/solitonsufg/home/uso`, onde desenvolvemos um procedimento organizado de etapas, a serem executadas por professores e seus alunos, com a finalidade de que eles aprendam o conteúdo de ondulatória e compreendam os conceitos relacionados às ondas, tanto lineares quanto não-lineares, possibilitando, inclusive, o entendimento das ondas solitônicas. A sequência didática foi pensada de modo que o professor, que entra em contato com ela, possa utilizá-la e "repetir" os seus passos sequencialmente, sem que haja a necessidade de inserções, pois ela foi planejada com começo, meio e fim, incluindo a avaliação de aprendizagem necessária. No entanto, a sequência didática é moldável, pois está vinculada à prática do professor, que se identifica nela, se apropria dela e a reproduz, em consonância com os seus objetivos e conhecimentos pedagógicos. A sequência didática foi criada porque entendemos que a tecnologia não representa uma prática pedagógica, ou uma forma de ensinar independente do conteúdo ou da teoria pedagógica adotada (Adda, 2015), ou seja, não deve haver uma dicotomização entre o técnico e o pedagógico.

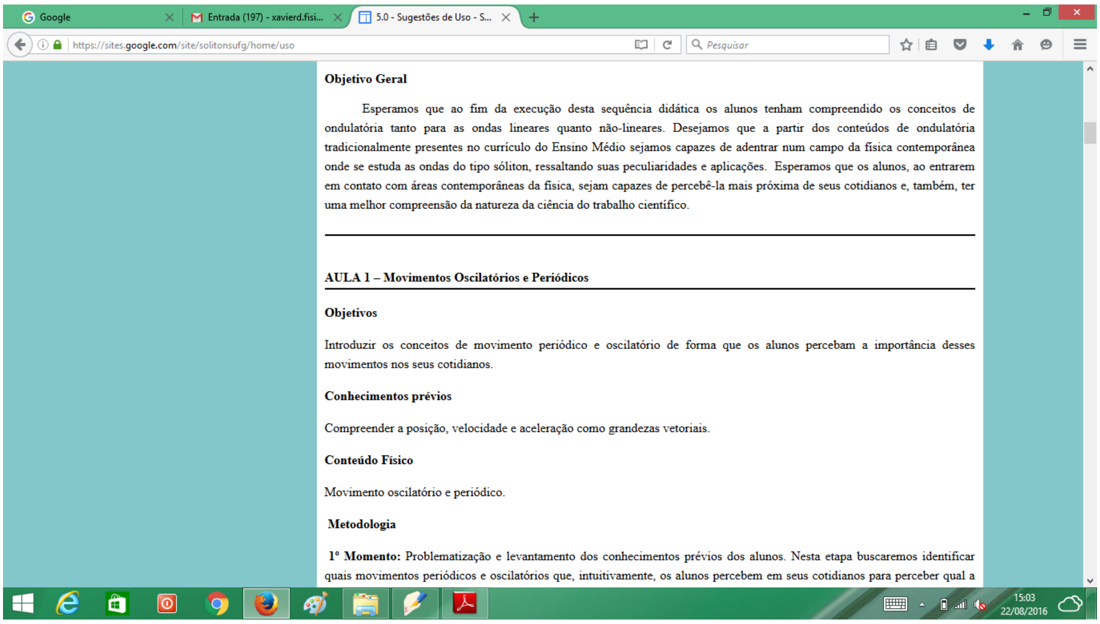


Figura 5.6: Sugestões de uso (sequência didática)

3 Considerações finais

No site pudemos introduzir diversos recursos digitais tais como vídeos, imagens animadas (gifs), animações e simulações de diversas plataformas (Phet colorado, inclusive). Os objetos de aprendizagem escolhidos para compor a página foram fruto da observação do autor desta dissertação em sala em relação aquilo que os alunos tinham dificuldade de compreender. Tivemos ainda um cuidado com a linguagem utilizada no texto do site e colocamos hiperlinks em palavras, conceitos expressões que pudessem ser dúbias ou de difícil compreensão pelos alunos.

Notamos que a ferramenta disponibilizada pelo google.sites pode ser bem aproveitada no Ensino de Física ao propiciar o uso de várias formas e com vários objetivos: Divulgar conceitos de Física Contemporânea de forma acessível e didática colocando a experiência adquirida pelos professores em sala de aula num espaço de alcance global; construir junto com os alunos formas de se trabalhar determinados conteúdos; organizar diversos recursos didáticos num mesmo espaço e distribuí-los de acordo com o enredo (sequência didática) pensado pelo professor que o criou.

Capítulo 6

Relatando a experiência

1 Metodologia

Caminhos da investigação

A partir de agora a linguagem deste trabalho adquire um caráter mais pessoal porque o capítulo se propõe a relatar a experiência do autor desta dissertação enquanto professor do Ensino Médio e as conversas e decisões tomadas com seu orientador durante o desenvolvimento deste trabalho e do professor com seus alunos durante a implementação da sequência didática em sala de aula. Dessa forma o texto é escrito em primeira pessoa (no singular para momentos vivenciados pelo autor e plural para as decisões tomadas em conjunto com seu orientador e com seus alunos).

A ideia de um estudo que discuta e evidencia a divulgação de tópicos de Física Contemporânea com a forma de produção da ciência (visão mais realista do trabalho científico) e sua relação com as tecnologias surgiu desde os meus contatos iniciais com uma sala de aula de Ensino Médio quando ouvia reclamações e questionamentos dos alunos (de uma turma de 2º série do Ensino Médio) sobre o por que estudar Física, a saber: por que estudar coisas tão antigas (quase sempre anteriores a 1800), e ainda, por que a Física era tão difícil. No momento, as respostas imediatas e comuns de que porque "tudo" que está em nosso cotidiano tem alguma base na Física e que é necessário o entendimento de questões científicas para o melhor exercício da cidadania, numa sociedade altamente marcada por aspectos científicos e tecnológicos, não seriam eficientes e talvez só servissem para acalmar a agitação do momento, ou seja, o discurso de convencimento vazio não faria os alunos perceberem a Física como algo importante e interessante de ser estudado.

Tal ocasião serviu para reforçar meu sentimento de insatisfação com a forma como a Física é apresentada tanto na Ensino Médio quanto no Ensino Superior: quase sempre descontextualizada, mecânica, rígida, linear, parecendo mais um amontoado de fórmulas sem sentido para os alunos. Esse sentimento se fez presente já no início do meu Ensino Médio quando eu não conseguia compreender a necessidade de estudar os bloquinhos descendo os planos inclinados. Além disso a professora da ocasião não demonstrava interesse em apresentar uma Física mais contextualizada e presente em meu dia-a-dia. No entanto, algumas séries da TV Escola, Ciência nua e crua (*Rough Science*) por exemplo, me despertavam grande interesse pela ciência (principalmente pelas figuras dos físicos e engenheiros). A resolução de problemas cotidianos e a explicação dos fenômenos naturais me manifestavam grande curiosidade e me motivavam a estudar Física. Dessa forma o gosto pela ciência foi crescendo, mesmo sendo desencorajado pela escola.

Tal gosto foi se tornando uma forma de satisfação pessoal, no sentido de que o capital cultural acumulado em questões simples de ciência me possibilitavam uma melhor posição no campo familiar [1] e, então, ao fim do Ensino Médio, decidi ingressar no curso de Licenciatura em Física pela Universidade Federal de Goiás. Dentre os cursos de ciência optei pela Física porque ela explicava os fenômenos naturais e o funcionamento dos aparelhos tecnológicos que mais me chamavam atenção.

O desejo inicial era de me tornar alguém parecido com os cientistas das séries, que conseguiam resolver problemas e pensavam de forma criativa, e ao fim do curso pudesse trabalhar como professor despertando o interesse pela ciência em crianças, adolescentes, jovens e adultos. No entanto, os primeiros contatos com a Física no ensino superior me mostraram, novamente, somente o lado da Física que não me chamava a atenção: Números, equações e teorias, mais uma vez, apresentadas de forma descontextualizadas. Com o passar do tempo fui percebendo que a iniciação à ciência era necessária naqueles moldes, mas apenas para aqueles que quisessem seguir carreiras científicas. A outra parte, a maioria, deveria ser apresentada a uma Física mais próxima, realista, presente, contextualizada e acessível. Caso contrário, as grandes des-

[1] Para Bourdie um campo serve de instrumento ao método relacional de análise das dominações e práticas específicas de um determinado espaço social. Cada espaço corresponde, assim, a um campo específico cultural, econômico, educacional, científico, jornalístico etc -, no qual são determinados a posição social dos agentes e onde se revelam, por exemplo, as figuras de "autoridade", detentoras de maior volume de capital.

cobertas científicas e a importância da Física seriam minoritáriamente percebidas pela sociedade o que contribuiria para a manutenção de uma visão distorcida em relação à ciência, ao trabalho científico e aos artefatos tecnocientíficos [2].

Na Universidade a situação só começara a mudar, em certa medida, graças aos diálogos realizados durante o estágio supervisionado. Diálogos que me levaram à leitura de textos sobre contextualização (Brasil, 2002; Ricardo, 2010) e alfabetização científica e tecnológica (Waks, 1990; Ricardo, Custódio e Rezende, 1997). A partir disso pude perceber que era possível dar encaminhamento aos problemas no ensino-aprendizagem observados em sala de aula sendo necessário, para isso, bastante reflexão e leitura. Dessa forma ao me tornar professor tinha o desejo de me tornar um professor pesquisador, ativo e participativo. Sendo assim, durante o segundo ano de atuação enquanto professor de Física da 2ª série do Ensino Médio, ao notar que os conteúdos que englobam os Movimentos Harmônicos Simples (MHS) e as ondas eram de difícil compreensão por parte dos alunos me interessei pela possibilidade de poder entender melhor sobre fenômenos ondulatórios e expandir meus conhecimentos para englobar a não-linearidade dos fenômenos ondulatórios comumente estudados no Ensino Médio, como o pêndulo simples e o sistema massa-mola, por exemplo. Assim, após alguns meses cursando as disciplinas do programa de pós-graduação surgiu a opção, em conversas com o futuro orientador, por estudar os fenômenos ondulatórios não-lineares e criar estratégias de inserção destes conteúdos no Ensino Médio. No entanto, esta ideia esbarrou inicialmente no problema de como isso seria feito. Afinal, o currículo de física já é bastante extenso e, por isso, as vezes não é possível chegar ao fim dos conteúdos solicitados pela Secretaria de Educação. Logo, notamos que seria necessária uma abordagem que possibilitasse discutir questões atuais da ondulatória sem, no entanto, deixar de trabalhar os conteúdos de ondulatória presentes no currículo mínimo. Outra dificuldade a enfrentar era a falta de material didático acessível em língua portuguesa para trabalhar o conteúdo em sala de aula. Dessa forma, com a finalidade de tornar o processo mais rápido e efetivo, optamos pela criação de uma página na internet na qual pudéssemos explicar os conteúdos desejados de forma a utilizar objetos educacionais

[2] Um fato/artefato não é somente fruto de uma evidência natural ou da pura e simples observação ou ainda de um gênio inventivo privilegiado. O conhecimento científico e tecnológico é feito de múltiplas operações efetuadas sobre uma multidão de representantes, de intermediários de todos os gêneros, aliados ou adversários, seres humanos ou não, que são numerosos, dispersos, longínquos,inacessíveis, intocáveis mas que se encontram traduzidos e articulados em uma rede sociotécnica (LATOUR, 2000).

que vão além do quadro negro e do giz.

Após a construção do site, começamos o esboço da sequência didática a ser utilizada em sala de aula. A construção da sequência didática apresentada no endereço, `https://sites.google.com/site/solitonsufg/home/uso`, foi realizada ao longo do ano de 2015. Tal sequência foi pensada a partir da vivência, em sala de aula, do autor desta dissertação.

Contexto escolar

A sequência didática foi implementada na turma D (35 alunos) da 2º série do Ensino Médio no período de 01 de março à 12 de abril do ano letivo de 2016 no Instituto de Educação de Goiás (IEG), uma escola tradicional da capital do estado de Goiás criada em 1926, onde o autor desta dissertação atua como professor. Nesta escola há liberdade metodológica e de conteúdo por parte do professor e pela coordenação pedagógica e ela faz parte de um Grande Grupo de Pesquisa (GGP) - (GENOVESE, 2013), um campo interseccional em construção, onde são pensadas, construídas e implementadas ações e reflexões no interior do GGP numa perspectiva crítica e transformadora de formação dos agentes envolvidos, a saber, formadores do campo escolar, formadores do campo universitário e licenciandos experientes e iniciantes com o intuito de propiciar autonomia do campo da escola e escolar no qual estão alocados cinco Pequenos Grupos de Pesquisa (PGP), subcampos do GGP (GENOVESE; GENOVESE, 2012) e revoluções simbólicas no campo universitário (em particular, o da pesquisa em ensino de ciências e matemática) no qual está um outro PGP - constituído por cinco Escolas da Educação Básica (uma municipal das séries iniciais do Ensino Fundamental e quatro estaduais de Ensino Médio) da grande Goiânia e o Instituto de Física (IF) da Universidade Federal de Goiás (curso de licenciatura), denominada de Grande Grupo de Pesquisa (GGP).

No grupo de pesquisa do IEG busca-se o planejamento e desenvolvimento de sequências didáticas que permitam a inserção de tópicos de Física Moderna e Contemporânea em sala de aula (o foco do PGP é trabalhar Física Moderna e Contemporânea no Ensino Médio).

Descrição das atividades

A sequência didática abordou aspectos não-lineares de sistemas físicos conhecidos a saber: o pêndulo simples, o sistema massa-mola e a equação de onda linear.

LINEAR	**Conteúdos Introdutórios**			
	Aula 1- Movimento oscilatório e periódico			
	Aula 2- Movimento Circular e Movimento Harmônico Simples			
	Aula 3- Características das ondas (Comprimento de onda, frequência... etc.).			
	Conteúdos específicos			
NÃO LINEAR	Aula 4- Sistema Massa–Mola	Aula 6- Movimento Pendular.	Aula 8- Ondas lineares.	Aula 11- Ondas eletromagnéticas.
				Aula 12 - Funcionamento do Microondas
			Aula 9- Propriedades das ondas	Aula 13- Debate: Radiação e o corpo humano.
	Aula 5 – Massa-Mola não-linear.	Aula 7- Pêndulo não-linear	Aula 10- Sólitons em águas rasas e tsunamis.	Aula 14 – Fibras ópticas e sólitons ópticos.

Figura 6.1: Mapa do site

Os conteúdos trabalhados em cada aula estão descritos na sequência didática (presente no site `https://sites.google.com/site/solitonsufg/home/uso`). Iniciamos com o estudos dos movimentos periódicos e oscilatórios e terminamos com algumas aplicações dos sólitons. O conteúdo da sequência didática foi dividido em 5 etapas e foram pensados respeitando os preceitos de Gil Perez e Jordi Solbes (1993), para os quais a FMC deverá ser apresentada na Educação Básica a partir dos limites da Física Clássica onde sejam debatidos, aclarando, assim, os limites de validade desta. Dessa forma trabalhamos os conteúdos iniciando com os casos clássicos geralmente estudados e presentes nos livros didáticos do Ensino Médio, e, em seguida, de forma qualitativa, introduzimos não linearidades aos problemas físicos estudados. As seguintes etapas foram construídas:

1º Apresentação dos aspectos introdutórios dos conteúdos do Movimento Hamônico Simples.

Nesta etapa abordamos os assuntos relacionados ao movimento harmônico simples. Definimos e exemplificamos os movimentos oscilatórios e periódicos. Mostramos a relação entre o MHS e o Movimento Circular Uniforme. Nesta etapa o site foi utilizado como leitura prévia. Antes de abordar os assuntos em sala de aula pedíamos aos alunos que lessem a página relacionada ao conteúdo em suas casas. Depois, reservamos cerca de 10 minutos iniciais de cada aula para que os alunos revisitassem a página, utilizando seus aparelhos celulares.

2º Sistema massa-mola linear e não-linear e suas aplicações.

Inicialmente, trabalhamos o sistema massa-mola em sua forma linear. Em seguida diferenciamos a partir de exemplos simples sistemas lineares e não-lineares e propusemos um sistema composto por uma quantidade N de partículas ligadas por molas que, a princípio, obedeciam à lei de Hooke. Em seguida discutimos as observações feitas por Fermi-Pasta-Ulam e as modificações propostas por Toda e, por último, apresentamos algumas áreas da Física que têm usado os estudos realizados por Toda. Em especial discutimos a força de ligação entre os quarks no núcleo atômico e alguns aspectos relacionados ao Modelo Padrão da Física de Partículas Elementares. É importante ressaltar que a preocupação não foi levar os alunos a entenderem os aspectos matemáticos (quantitativos), mas serem capazes de compreender de forma qualitativa parte dos fenômenos e conteúdos estudados atualmente na Física Contemporânea.

3º O pêndulo Simples e o pêndulo não linear e suas aplicações.

Nesta etapa, novamente, explicamos o caso linear e a partir dele introduzimos não-linearidades para compreender as modificações no sistema. Dessa forma, primeiramente estudamos o movimento do pêndulo simples, identificamos as forças que atuam no sistema escrevemos a expressão para o movimento angular do sistema. Em seguida utilizamos a aproximação $sen\theta \simeq \theta$ e mostramos a equação para o cálculo do período e da frequência do movimento pendular. Para introduzir a não-linearidade voltamos na equação para a posição angular do pêndulo simples e mostramos a solução para ângulos quaisquer. Discutimos a ideia de caos e leis de conservação. Como aplicação da equação de Sine-Gordon explicamos as Junções Joshepson e suas aplicações tecnológicas. Nesta etapa o site foi utilizado durante as aulas. O professor solicitou que os alunos abrissem as páginas relacionadas a estes conteúdos durante suas aulas e ia explicando os conteúdos utilizando, também, o quadro-negro.

4º Equação de onda linear, sólitons em águas rasas e a formação de Tsunamis.

Utilizamos os resultados da etapa 1 para introduzir a equação de onda linear. Em seguida estudamos as caracterísitcas das ondas. Posteriormente estudamos os diversos casos que obedecem a equação de onda linear. Em seguida, na equação de onda linear, introduzimos não-linearidades e apresentamos a equação de KdV. Nessa etapa utilizamos as questões históricas relacionadas à descoberta dos sólitons. Como possível aplicação da equação de KdV trabalhamos a formação de tsunamis. Aqui, o site foi utilizado como leitura prévia e, também, durante as aulas.

5º As ondas eletromagnéticas, a fibra óptica e a produção de sólitons ópticos.

Por último, estudamos as ondas eletromagnéticas. Em especial trabalhamos o espectro eletromagnético, o funciomento do microondas e do celular, o césio 137 e a interação entre a radiação eletromagnética e corpo humano. Aqui, realizamos um debate entre os prós e contras da radiação eletromagnética para a sociedade atual. Como aplicação das ondas eletromagnéticas discutimos ainda as fibras ópticas e de forma a introduzir não-linearidade na aula trabalhamos a questão da formação dos sólitons ópticos.

Durante o debate, entendendo que é necessário proporcionar aos alunos uma imagem mais adequada e crítica da natureza da tecnologia, distinta daquela que indica que mais ciência e mais tecnologia produzem mais bem estar social, diferente ainda de outra que sinaliza que qualquer pesquisa científica básica em ciências naturais propicia benefícios sociais e, por fim, aquela na qual a informação científica oferece uma base objetiva e segura para a solução de disputas políticas (Sarewitz, 1996), a SCOT foi aqui empregada como base conceitual para a construção desta etapa da sequência didática. Em boa medida, tal escolha se deve ao entendimento de que a SCOT procura fugir das explicações convencionais acerca das relações tecnologia-sociedade, essencialmente lineares (ou seja, que o desenvolvimento e funcionamento técnico dos artefatos foram estabelecidos de forma sequencial, técnica e racional) e que frequentemente culminam em interpretações deterministas tecnológicas ou deterministas sociais dos artefatos exitosos. Nesse sentido, a SCOT propõe um modelo multidirecional de análise dos processos controversos envolvendo a construção dos artefatos exitosos e não exitosos pelos grupos sociais relevantes, ou seja, envolvidos na controvérsia.

> Em SCOT o processo de desenvolvimento de um artefato tecnocientífico é descrito como uma alternância de variação e de seleção. Isto resulta em um modelo "multidirecional", em contraste com os modelos lineares usados explicitamente em muitos estudos sobre inovação e implicitamente em muitas histórias da tecnologia. (Pinch e Bijker, 1987, p. 28, tradução nossa).

A SCOT, enquanto modelo multidirecional, destaca e procura descrever as controvérsias entre grupos sociais relevantes que promovem variação e seleção dos artefatos tecnológicoss. De forma mais precisa, o grupo social relevante que participa ativamente da controversia tecnológica é um termo: usado para designar instituições e organizações, bem como grupos organizados ou desorganizados de indivíduos. A principal exigência é que todos os membros de um determinado grupo social compartilhem o mesmo conjunto de significados, ligados a um artefato específico (Pinch e Bijker, 1987, p. 30, tradução nossa). Nesse sentido, é importante destacar que a leitura de cada grupo (ou mesmo de diferentes indivíduos dentro de cada grupo) a respeito de um mesmo artefato pode ser distinta, gerando semanticamente artefatos também distintos, o que garante a multidirecionalidade do modelo.

Os aspectos matemáticos não foram tratados de forma sofisticada. O importante da sequência didática foi indicar aos alunos que a Física Ondulatória vai além dos conteúdos tradicionalmente presentes nos livros didáticos. O objetivo foi fornecer uma visão atual de um assunto trabalhados na Física: os sólitons. Além disso optamos por trabalhar, na parte histórica, a relação entre a matemática e a observação, a experimentação e a observação, o papel do acaso na produção científica.

Ao término de cada aula registrei a realidade vivida e observada em Notas de Campo ricas em detalhes (Bogdan e Biklen, 1994) de forma a possibilitar a compreensão das características do contexto e do significado que os sujeitos, no caso os alunos, atribuem às ações que realizaram em cada aula(Erickson, 1998) . Em seguida, os dados registrados nas Notas de Campo foram lidos, discutidos e analisados, tendo em vista identificar elementos que sinalizassem avanços dos alunos quanto ao engajamento nas aulas de Física e a construção de uma visão mais crítica do trabalho atual da Física Ondulatória. Diante do exposto é razoável apontar que a construção do presente relato tem marcas de uma investigação que além de qualitativa, se mostra também ativa, colaborativa, compreensiva, crítica e transformadora da realidade educacional escolar e universitária ao moldes da investigação-ação de cunho educacional (Mion e Saito, 2002).

2 Análise da sequência didática

Durante a 1º etapa da sequência didática, apresentação dos conteúdos introdutórios sobre ondulatória, o site foi utilizado como leitura prévia. Foi solicitado ao término de cada aula que os alunos lessem a página que continham os conteúdos que seriam estudados na aula seguinte. Nesta etapa foi possível identificar até que ponto os alunos conseguiam absover os conteúdos da página sem o auxílio do professor.

Foi possível notar que, durante a explicação dos conteúdos, os alunos conseguiam se lembrar daquilo que haviam lido na página, e, as vezes, até antecipavam algumas explicações que seriam dadas pelo professor. Por exemplo, quando foi abordado o conceito de movimento periódico e oscilatório ouviram-se falas do tipo:

Aah professor! o movimento periódico é aquele que fica repetindo em tempos iguais não é?

O movimento de translação da Terra é o exemplo que tá no site né?

Para explicar as características das ondas, em experiências anteriores, o professor gastava cerca de 3 ou 4 aulas e ainda percebia que alguns alunos não haviam compreendido de forma clara. Com a utilização da página na internet ouvimos as seguintes falas,

A amplitude eu já sei professor. Naquele gráfico ali a altura dele é a amplitude não é?

Período está relacionado com o tempo que gasta pra ir e voltar.

Frequência depende da quantidade de vezes que acontece no tempo.

Durante o estudo do Movimento Circular e sua relação com o Movimento Harmônico Simples alguns alunos disseram:

Eu vi na página que falava de cosseno. Eu não lembrava o que era daí aproveitei que estava online e pesquisei.

Ajudou bastante ver o gráfico das funções seno e cosseno professor.

Após o término da primeira etapa aplicamos uma espécie de avaliação escrita para verificar o desempenho dos alunos e como estava a sua capacidade de resolução de problemas envolvendo os conteúdos estudados. É importante ressaltar que grande parte dos alunos atingiu bons resultados. Destacamos o papel da página da internet em permitir que os alunos tenham acesso rápido àquilo que surge de dúvidas durante a leitura do site. A função cosseno, por exemplo, estava marcada como hiperlink e bastou um clique para que os alunos tivessem acesso à explicação deste tópico. Isso possibilitou que os alunos já chegassem à sala de aula com um conhecimento prévio daquilo que seria estudado.

Na segunda etapa o conteúdo do site foi utilizado como leitura prévia e também durante as aulas. Pedimos aos alunos que abrissem as páginas (`https://sites.google.com/site/solitonsufg/sitema-massa-mola` e `https://sites.google.com/site/solitonsufg/massa-mola-amortecido---aplicacoes`) em seus celulares para acompanhar a aula. O sistema massa-mola, aula 4, foi de fácil assimilação por parte dos alunos. As aplicações do sistema massa-mola amortecido nos amortecedores dos carros, no espaço de fase e nas figuras de Lissajous chamaram bastante atenção dos alunos. Algumas falas nos chamaram atenção entre elas,

Caramba professor. Então é assim que funciona o amortecedor dos carros? que legal.

A parte matemática da lei de Hooke é fácil einh?

Em seguida quando tratamos o Modelo de Toda iniciamos dizendo que as forças restauradoras que atuam num sistema massa-mola não são sempre lineares. Quando distendemos excessivamente uma mola, ela eventualmente se deforma a tal ponto que deixa de haver forças restauradoras atuando sobre a massa. No regime intermediário, antes de estragarmos a mola, a força restauradora deixa de acompanhar linearmente a distensão. Podemos tentar modelar matematicamente o comportamento de uma mola real, antes de sua inutilização, de maneira a obter uma melhor representação da realidade. Alguns alunos se mostraram animados em estudar o sistema massa-mola para os casos em que não obedecesse à lei de Hooke.

Até agora foi fácil professor, vai complicar muito?

Pode ser mais complicado se tiver coisas interessantes, têm?

Então seguimos e propusemos um novo tipo de sistemas: os não-lineares. Colocamos na forma de tabela as diferenças entre os sistemas lineares e não-lineares. Em seguida pedimos aos alunos que imaginassem uma força que, conforme aumentamos a distensão do corpo, aumenta sua intensidade numa taxa cada vez maior. Essa pode parecer uma força muito fictícia e que tem apenas valor pedagógico. No entanto, forças assim existem na natureza. Você talvez já tenha ouvido falar no quarks. Eles são considerados os tijolos que formam, por exemplo, um próton. Nesses exemplos alguns alunos disseram:

Já ouví falar de prótons nas aulas de química. Agora esses quarks aí nunca escutei não.

Então prosseguimos a aula, explicando que os quarks devem estar ligados por uma interação similar à de uma corda curta que: quando você não tenta separá-los, eles nem sentem a força da corda que os prende; mas logo que você começa a distanciá-los a força cresce a tal ponto que você não consegue separá-los. Logo, os quarks estão confinados numa região muito pequena. E, talvez, por isso não puderam ser observados separadamente. Explicamos, então, que a força responsável pela ligação dos quarks poderia ser modelada pelo Modelo pensando por um físico chamado Toda. Em seguida solicitamos uma pesquisa sobre o modelo padrão da Física de Partículas e, então, pedimos aos alunos que, em grupos de 5 pessoas, fizessem um seminário explicando o modelo padrão da Física de Partículas. Durante o seminário notamos que as pesquisas foram bastante restritas e poucas informações foram compreendidas pelos alunos quando fizeram suas pesquisas sem o apoio do professor. Dessa forma foram necessárias diversas intervenções do professor durante a apresentação dos alunos, no intuito de melhorar o entendimento dos mesmos sobre o conteúdo estudado. Um aspecto que chamou a atenção foi o surgimento da discussão acerca da Partícula de Deus (o dedo de Deus) que levou inicialmente à uma discussão entre Ciência e Religião. Tal aspecto nos indicou a baixa compreensão dos alunos para assuntos atuais da Física Moderna, principalmente àqueles que envolvem aspectos religiosos.

Foi possível notar que eles se mostraram interessados em perceber que o estudo de um modelo que eles haviam considerado simples, se torna interessante e atual quando tratado em sua forma não linear. Ou seja, notamos que os alunos ficaram motivados para compreender como o caminho do estudo de um sistema massa-mola levava às partículas elementares estudadas atualmente na Física. Tal afirmação pôde ser feita pelas falas seguintes:

Isso devia sempre ser estudado nas aulas de Física. Por que não tem essas coisas no nosso livro didático? Vou pedir a professora de química pra falar sobre isso também.

Na etapa 3 trabalhamos o pêndulo simples. Na primeira parte desta etapa os alunos compreenderam bem o seu movimento e como se dava o cálculo do seu período e frequência de oscilação. No entanto, ainda ouvimos questões do tipo:

Mas professor e se os ângulos não fossem pequenos?

Mas pra que serve um pêndulo hoje? Já foram utilizados nos relógios, mas pra que mais serve?

Respondemos que essas questões ficariam mais claras nas aulas seguintes. Então, ao trabalharmos o pêndulo em sua forma não-linear mostramos que mesmo sendo um sistema não-linear, que a princípio parece simples, há, nele, regularidades que não estão presentes em outros regimes não-lineares, como o caótico, no qual as curvas tenderiam a preencher todo o espaço de fase de forma irregular. Aqui, apresentamos o espaço de fase do pêndulo não-linear e mostramos as diferenças entre um sistema caótico e não-caótico, Nesse ponto os alunos ficaram bastante agitados e perguntaram bastante o que seria o caos. Alguns diziam:

Já ouvi essa estória de caos. É semelhante a ideia da batida da asa da borboleta causar um furacão?

No caos não dá pra entender como será o comportamente o futuro, é isso?

Na etapa 4 utilizamos dos resultados da etapa 2 e demonstramos a equação de onda linear. Explicar a ideia de que uma onda transporta energia mas não transporta matéria foi bastante simples, os alunos lembraram da animação do site em que as bolinhas ficavam mexendo para um lado e para o outro mas não andavam com a onda. A classificação das ondas também foi traquila. Os alunos tiveram alguma dificuldade para lembrar a diferença entre as palavras transversais e longitudinais. No entanto, entenderam bem a ideia de que o movimento das partículas se davam em uma perpendicular e na outra paralelo à direção de propagação da onda. Ao defirmos o conceito de onda alguns alunos já fizeram algumas perguntas de forma imediata. Alguns diziam:

Professor não entendi muito bem a questão de como os surfistas andam com a onda. Lí no site mas ainda fiquei com dúvida. Significa que não é mais onda é isso?

Durante essa etapa os alunos não se mostraram muito interessados. Eles conseguiram compreender os assuntos abordados, no entanto, ainda se mantinham meio distante dos assuntos estudados. Então, a partir da equação de onda linear demonstramos a equação de KdV e como ela pode ser utilizada para explicar a formação de tsunamis. Quando a palavra tsunami foi abordada surgiram muitas perguntas do tipo:

Esse negócio é bem perigoso né? já assisti um filme que tinha uma tsunami gigante e morreu um monte de gente.

Como acontece isso? como a onda viaja tão longe? De onde vem tanta força?

Tem como controlar pra não acontecer tsunami? tem alguem pesquisando isso?

Foi possível notar uma grande participação dos alunos. Também, melhoraram a forma de fazer as perguntas e a argumentação em sala de aula. Foi notado que os alunos já elaboraram algumas questões em casa e pesquisaram alguns conceitos e expressões que, talvez, não ficaram claras na leitura do site.

Foi solicitado que eles escrevessem sobre os principais tsunamis já ocorridos. A destruição que causaram e a explicação física dos mesmos.

A parte 5, das ondas eletromagnéticas, merece especial destaque. Os alunos se mostraram muito interessados neste tópico. Especialmente porque o acidente com o Césio 137 ocorrido em Goiânia apareceu na história exigindo que o professor utilizasse uma aula extra para a discussão deste tópico. Os alunos se perguntaram coisas do tipo:

- Professor, ainda é perigoso morar no local onde aconteceu o acidente?

- Como é o césio? Qual a cor?

- Como? a luz também é radiação?

- Durante a explicação do funcionamento do microondas e da medição da velocidade da luz a partir dele ouvimos questionamentos do tipo:

- Sempre ouvi o valor da velocidade da luz mas não sabia que era possível medir usando microondas e chocolate.

- Aaah, então é por isso que coisas mais secas demoram mais a esquentar.

- Por que não podemos colocar materiais de metal dentro do microondas?

- Vou chegar em casa e contar para meu pai como funciona o microondas.

Aluno B - Como isso é fantástico, professor, então é por isso que o pratinho tem que girar?

Em seguida explicamos a interação da radiação com o corpo humano. Este assunto trouxe uma série de questionamentos. Inclusive a professora de biologia da escola veio dizer que os alunos fizeram uma série de perguntas a elas durante as aulas de biologia. Eles queriam entender porque a radiação causava câncer. Para encerrar a sequência didática fizemos um debate para verificar se o sinal do celular era ou não prejudicial à saúde humana. Assim sendo, dividimos os alunos em 5 grupos Sociais Relevantes. Os grupos foram os seguintes:

1)Físicos;

2) Empresas de telefonia móvel;

3) Ambientalistas;

4) Consumidores;

5) Biólogos.

A cada um dos grupos foi dada a função de verificar qual a visão que esta classe social apresenta em relação ao uso de aparelhos que funcionam a partir de ondas eletromagnéticas. Em seguida foi disponibilizado um tempo de uma semana para que os alunos pesquisassem sobre o assunto pois como alerta Reis, 1999, a disponiblidade de informação evita o debate de ignorâncias. Após este período, ocorreu um momento de discussão para verificar a que conclusão chegariam os grupos sociais relevantes chegariam. Foi importante perceber nesta etapa que os alunos se sentiram empolgados em poder discutir sobre um tema que a princípio não parecia caber discussão. Os argumentos dos alunos foram bastante coerentes com a função dada a cada um deles. Ainda, não ficaram restritos apenas aos conteúdos presentes na página criada pelo autor desta dissertação.

Ouvimos argumtentos do tipo:

Há estudos que indicam que a exposição à radiação eletromagnética a longo prazo resulta em distúrbios nervosos, dentre os quais podemos exemplificar as dores de cabeça, fadiga, tontura, perda de memória e insônia.

Não há problemas em utilizar o celular visto que a energia que a onda carrega não é suficiente para provocar danos à celulas.

Os cientistas (físicos e biólogos) divergiram em suas opiniões. Ouvimos argumentos de que as ondas eletromagnéticas não possuiam energia suficiente para girar uma molécula de água portanto não fariam mal ao corpo humano. No entanto, ouvimos também que não há comprovações de que elas não fazem mal, e, portanto, num futuro o uso excessivo e desenfreado que ocorre atualmente poderá trazer prejuízos à humanidade. Assim pudemos trabalhar a questão da natureza da ciência e do trabalho científico que muitas vezes é visto como linear e exato. Ressaltamos que na produção da ciência há discordância de opiniões e que de acordo com os interesses defendidos pelas instituições onde trabalham os cientistas podem haver visões diferentes em relação a um determinado assunto. Indicamos que para acabar com a controvérsia deveria haver um consenso entre os pesquisadores e ser desenvolvida uma Lei que estabelecesse o fim, pelo menos temporário, da discussão.

Já o grupo que defendeu as empresas de telefonia móvel foram bastante enfáticas em afirmar que o uso de telefones celulares não faz mal nenhum à saúde. Quando questionados sobre as torres de celular defenderam suas posições com o mesmo empenho baseados, inclusive, em argumentos de parte dos cientístas. Nessa etapa pudemos trabalhar as questões mercadológicas e os interesses das grandes empresas pela obtenção de lucro mesmo não estando claras as posições defendidas pela ciência.

Os consumidores ficaram divididos entre o uso ou não uso do telefone celular. É importante ressaltar que além de opiniões sobre as ondas eletromagnéticas eles defenderam a questão da pouca socialização dos jovens atuais devido à grande importância que os telefones celulares e internet têm adquirido atualmente. A discussão foi longa, os alunos questionaram a necessidade da utilização dos aparelhos celulares tantas vezes durante o dia. Eles trouxeram dados de pesquisa indicando o número de vezes que os brasileiros utilizam o celular por dia e trouxeram para o debate questões relacionadas à relações humanas. Dessa forma, os alunos, que representavam os consumidores, trouxeram para a discussão outros aspectos que vão além daqueles que estavam postos à discussão. Tal situação vai de encontro ao defendido por Gil Pérez quando diz que é necessária a alfabetização científica para que se discutam os aspectos científicos em suas implicações gerais para a sociedade e não apenas as questões científicas e tecnológicas que muitas vezes não são obsevadas pelos cientistas.

Os ambientalistas ressaltaram a questão da obsolescência programada. Levaram o vídeo: Obsolescência programada - Comprar, jogar fora, comprar, que se encontra no endereço: `https://www.youtube.com/watch?v=0w5T5RoCjBg`. Após mostrar as partes do vídeo que levantava a questão da vida útil programada dos aparelhos eles debateram sobre a possibilidade de, em anos futuros, a natureza não conseguir suprir a sociedade capitalista de consumo atual o que causaria um colapso não possível de prever.

Após o debate fizemos um experimento utilizando uma garrafa PET e um laser para mostrar a reflexão interna total e como a luz pode ser transportada por um feixe de água. Em seguida fizemos a analogia entre o transporte de luz pela água com os cabos de fibras ópticas. Os alunos ficaram muito empolgados em entender que aquela era a forma como as informações eram transportadas:

Tá brincando né professor? É assim que o sinal de internet caminha então?

Caramba professor! Que idéia fantástica!

Em seguida introduzimos a ideia de não-linearidade também nas ondas eletromagnéticas. Explicamos a equação de onda não-linear e a formação de sólitons ópticos e como eles podem ser utilizados nos cabos de fibras ópticas para fazer as informações se propagar com menos dissipação, dispensando, portanto, a necessidade de amplificadores. Os alunos se sentiram motivados por conseguirem entender as fibras ópticas funcionam e como os estudos dos sólitons podem contribuir para a melhoria desse aparato tecnológico que é tão útil em seus cotidianos.

Professor, então os custos seriam mais baratos?

Deixa eu ver se entendi bem... algo que foi descoberto puxando uma embarcação (os sólitons) pode melhorar a propagação das informações pelos cabos de fibras opticas? caramba.

3 Considerações Finais

Diante das percepções em sala de aula podemos dizer que a utilização de uma página de divulgação de tópicos de Física não-linear no Ensino Médio se constitui de uma boa ferramenta de ensino/aprendizagem pois, possibilitou ao professor adequar a página da internet e a sequência didática de acordo com suas intenções, e levou aos alunos uma compreensão introdutória de tópicos que eles não teriam contato caso fossem utilizados apenas os livros didáticos. Consideramos a experiência como uma boa indicação de que o uso de tecnologias de informação em sala de aula como ferramenta para a divulgação de tópicos de Física Contemporânea e podemos dizer que a ferramenta disponibilizada pelo google sites pode ser bem aproveitada no Ensino. Indicamos para aqueles que desejam utilizar esta estratégia em sala de aula para que construam a página junto com seus alunos para que eles indiquem quais objetos de aprendizagem mais facilitam o entendimento dos conceitos. Pode-se, por exemplo, pedir para que, em grupos, os alunos construam as subpáginas enquanto o professor atua, por exemplo, como um "corretor"para verificar se os assuntos estavam sendo bem escritos por eles.

Capítulo 7

Considerações Finais: Desafios e Perspectivas

Neste trabalho introduzimos não-linearidades em sistemas físicos comumente estudados no Ensino Médio - Pêndulo simples, massa-mola, equação de onda linear (ondas numa corda ou águas rasas, por exemplo) - para discutirmos equações não-lineares conhecidas no meio científico - Sine-Gordon, KdV e Toda Lattice - e, assim, introduzirmos o conceito de sólitons, sua história de desenvolvimento e aplicações recentes. A ideia era desenvolver um material que pudesse ser utilizado em sala de aula durante o ano letivo comum e, também, pudesse ser acesado em espaços não-formais de educação. Dessa forma foi desenvolvido um site e, em seguida, ele foi utilizado em sala de aula. Foram observadas dificuldades tanto no processo de desenvolvimento do site quando na implementação do conteúdo relacionado aos sólitons no Ensino Médio, estas dificuldades serão apresentadas neste capítulo. Após discorrer sobre as dificulades indicamos as conclusões obtidas com a introdução da sequência didática em sala de aula e indicamos suas potencialidades e, por fim, apresentamos as perspectivas futuras deste trabalho.

1 Dificuldades e desafios

1.1 A escolha do tema (sólitons e fenômenos não-lineares)

Os sólitons ocupam posição previlegiada na comunidade científica atualmente, no entanto, nos questionamos que se o currículo de Física já é bastante extenso e não seria necessário, portanto, incorporar novos conteúdos a ele, no entanto percebemos que era possível levá-los à sala de aula logo após a discussão de tópicos comuns, como o pêndulo simples, por exemplo, de forma bastante natural, pois é muito comum os alunos questionarem o professor os motivos de se trabalhar com tantas aproximações na Física, principalmente quando se trabalha o pêndulo simples e se faz a consideração de que a equação para o período só é válida para ângulos pequenos. Dessa forma notamos que era possível mostrar uma visão mais atual da Física como sendo uma ciência dinâmica e em construção que busca procurar "problemas"em sistemas e conteúdos já estabelecidos para proporcionar desenvolvimento à área.

1.2 A criação do site

O primeiro desafio foi o conciliar os conteúdos presentes no currículo de Física do estado de Goiás com a introdução de tópicos de Física não-linear visto que a introdução de novos assuntos tornaria mais difícil, se não inviável, o cumprimento do Currículo por parte do professor. Desta forma notamos que era necessária uma estratégia que tornasse o entendimento dos assuntos, que já deveriam ser abordados em sala de aula, mais fácil e rápido. Assim, a criação da página na internet foi uma saída viável, pois os alunos podiam continuar o estudo fora da sala de aula e, além disso, na página, pudemos utilizar objetos de ensino-aprendizagem que facilitavam a visualização dos conteúdos.

Inicialmente tivemos que aprender a manipular as ferramentas disponibilizadas pelo google.sites e compreender quais as possibilidades elas ofereciam. Após superada esta etapa enfrentamos a dificuldade de encontrar uma linguagem adequada para a escrita do site e quais os objetos de aprendizagem (vídeos, simulações, gifs, simulações, hipertextos) eram mais didáticos para a apresentação dos conteúdos, pois ao ser disponibilizado na rede mundial de computadores deveria atender a um público diverso e heterogêneo. Em seguida tivemos o desafio de pensar em qual profundidade o assunto deveria ser apresentado no site, e, posteriomente, em sala de aula.

1.3 A implementação da sequência didática

Em seguida, após a criação do site, nos deparamos com o desafio de pensar como o site poderia ser utilizado em sala de aula. Notamos que deveriamos buscar usá-lo tanto na escola quando instigar os alunos a o utilizarem em suas casas. Na escola o problema era a falta de disponibilidade de laboratório de informática com acesso à internet. Assim muitas vezes foi necessário usar os smartphones dos alunos durante as aulas. Um ponto positivo a destacar é o de que o uso dos smartphones foi eficiente e mesmo com a dificuldade de controlar o uso das redes sociais pelos estudantes (dispersão da atenção) o uso possibilitou a leitura da página e das ferramentas que eram necessárias para o bom andamento da aula. É preciso destacar que é preciso observar o acesso à internet por parte dos estudantes, pois, há escolas onde grande parte dos alunos não têm tal acesso e isso impossibilitaria a utilização da proposta deste trabalho.

Além das dificuldades supracitadas ainda nos deparamos com a angústia de "testar"uma nova estratégia de ensino em sala de aula. Era difícil precisar e antecipar o que poderia sair diferente do planejado porque era uma situação ainda não vivida por nós, enquanto professores. No entanto, apesar dos desafios acima citados consideramos a experiência como uma boa indicação de que o uso de tecnologias de informação em sala de aula como ferramenta para a divulgação de tópicos de Física Contemporânea conforme apresentado nas conclusões deste capítulo.

2 Potencialidades

2.1 Aspectos relevantes observados em sala de aula

Na escola houve o problema de disponibilidade de laboratório de informática com acesso à internet. Assim muitas vezes foi necessário usar os smartphones dos alunos durante as aulas. É relevante destacar que o uso dos smartphones foi eficiente e mesmo com a dificuldade de controlar o uso das redes sociais pelos estudantes (dispersão da atenção) o uso possibilitou a leitura da página e das ferramentas que eram necessárias para o bom desenvolvimento da aula. Além disso, nos deparamos com a angústia de "testar"uma nova estratégia de ensino em sala de aula, pois, era difícil precisar e antecipar o que poderia sair diferente do planejado em uma situação ainda não vivida enquanto professor. Apesar das dificuldades supracitadas, encontradas pelo professor, pudemos obter conclusões sobre:

As potencialidades da criação e utilização de uma página na internet

Nas etapas onde o site foi utilizado como leitura prévia foi possível notar que, durante a explicação dos conteúdos, os alunos conseguiam se lembrar dos conteúdos que haviam lido na página, e, às vezes, até antecipavam algumas explicações que seriam dadas pelo professor. Outro ponto importante a destacar é o papel da página na internet de permitir que os alunos tenham acesso rápido às dúvidas que surgem durante a leitura do site e ainda, de possibilitar a criação de hiperlinks. As funções seno e cosseno, por exemplo, estavam marcadas como hiperlink e bastava um clique para que os alunos tivessem acesso à explicação destes tópicos. Isso possibilitou que os alunos já chegassem à sala de aula com um conhecimento prévio daquilo que seria estudado. Em síntese foi possível notar uma grande participação dos alunos e, inclusive, melhoraram a forma de fazer perguntas e argumentar em sala de aula. Foi notado que os alunos já elaboravam algumas questões em casa e pesquisavam conceitos e expressões que, talvez, não ficaram claras na leitura do site.

O entendimento dos alunos em relação aos fenômenos ondulatórios

Após o término da primeira etapa aplicamos uma avaliação escrita para verificar o desempenho dos alunos e como estavam em resolução de exercícios envolvendo os conteúdos de ondulatória, e grande parte dos alunos atingiu bons resultados. Quanto ao entendimento dos fenômenos ondulatórios não-lineares percebemos que os aspectos matemáticos foram, para eles, de difícil compreensão e associação por utilizar uma matemática não conhecida por eles. Não obstante, percebemos que as equações matemáticas causaram mais surpresa e admiração que "medo"pois os alunos sabiam que aquelas equações não estariam nas provas bimestrais e isso fez com que eles perguntassem bastante sobre as equações e como elas ajudavam na explicação dos fenômenos estudados. Dessa forma podemos afirmar que o objetivo foi alcançado, porque, a preocupação foi fornecer uma visão holística da Física Não-Linear sem dar prioridade aos seus aspectos matemáticos, ou seja, o objetivo, em sala de aula, foi levar os alunos a perceberem a existência dos fenômenos físicos não-lineares e algumas de suas aplicações sem exigir que eles compreendessem a matemática utilizada de forma exaustiva.

A motivação para o estudo de fenômenos não-lineares

Foi possível notar que eles se mostraram interessados em perceber que o estudo de um modelo que eles haviam considerado simples, se torna interessante e atual, quando tratado em uma forma não-linear. Ou seja, notamos que os alunos ficaram motivados para compreender como o caminho do estudo de um sistema massa-mola, por exemplo, levava ao estudo das partículas elementares bastante presente, atualmente, na Física. Sendo assim, mesmo diante da dificuldade das equações matemáticas trabalhadas observamos que a motivação para o estudo dos sólitons foi satisfatória, pois os alunos fizeram perguntas durante toda a aula e buscavam exemplos de sólitons na natureza ou em seus cotidianos. Perguntavam ainda sobre as possibilidades de uso dos sólitons para melhorar ou desenvolver tecnologias o que abriu espaço para discussão a natureza do trabalho científico e sua relação com a tecnologia.

Os argumentos utilizados durante o debate em relação aos riscos das ondas eletromagnéticas para o corpo humano

Durante o debate, a participação efetiva e os entendimentos dos alunos sinalizam para uma melhor compreensão dos processos vinculados à natureza da tecnologia, bem como da sua relação com a ciência e a sociedade. Além disso, mostraram boa capacidade de argumentar, isto é, construir hipóteses e modelos de acordo com as informações que obtiveram e/ou receberam. Os alunos sinalizaram para o entendimento de como ocorrem os jogos de poder entre instituições tecnológicas, como os conhecimentos científicos são utilizados de maneira a atender à grupos sociais e não apenas para gerar o bem comum como se imaginavam. Notaram também como ciências e tecnologias estão imbricadas de política, às vezes até de jogos sujos de interesses pessoais e/ou de grupos específicos. Os alunos caminharam tanto para o saber ciência e tecnologia (pois compreenderam os aspectos introdutórios relacionados aos sólitons) quanto para o saber sobre ciência (Collins e Pinch, 2003) e tecnologia (pois, aproximaram do entendimento de questões relativas à natureza destas, aprendendo a não confiar cegamente nelas e que é necessário colocá-las em dúvidas, não as percebendo apenas nos extremos boas ou más e sim que são socialmente construídas e, portanto, sujeitas a imperfeições e erros e interesses de empresas específicas).

A compreensão da natureza da ciência e a sua relação com a tecnologia que indicam que a criação de uma página na Internet e sua utilização em sala de aula são boas estratégias para se trabalhar tópicos de Física Contemporânea no Ensino Médio.

Os alunos compreenderam melhor como se dá o trabalho científico ao perceberem que, muitas vezes, os cientistas partem de problemas já resolvidos e conhecidos para compreender problemas mais complexos, quase sempre, adicionando termos matemáticos ou experimentais com a finalidade de compreender os fenômenos. Perceberam também que alguns problemas podem passar anos sem serem pesquisados às vezes por falta de recursos financeiros, às vezes pela pouca visibilidade do assunto na comunidade científica ou até mesmo par falta de interesses pessoais dos cientistas.

2.2 Considerações Finais

Diante de tais percepções podemos dizer que a utilização de uma página de divulgação de tópicos de Física não-linear no Ensino Médio se constitui de uma boa ferramenta de ensino/aprendizagem pois, apesar das limitações e desafios, ela atendeu à demanda do professor em sala de aula, possibilitou ao professor adequar a página da internet e a sequência didática de acordo com suas intenções, e levou aos alunos uma compreensão introdutória de tópicos que eles não teriam contato caso fossem utilizados apenas os livros didáticos.

Apesar dos desafios acima citados consideramos a experiência como uma boa indicação de que o uso de tecnologias de informação em sala de aula como ferramenta para a divulgação de tópicos de Física Contemporânea e podemos dizer que a ferramenta disponibilizada pelo google sites pode ser bem aproveitada no Ensino de Física ao propiciar atingir vários objetivos, a saber: Divulgar conceitos de Física Contemporânea de forma acessível e didática colocando a experiência adquirida pelos professores em sala de aula num espaço de alcance global; construir junto com os alunos formas de se trabalhar determinados conteúdos; organizar diversos recursos didáticos num mesmo espaço e distribuí-los de acordo com o enredo (sequência didática) pensado pelo professor criador da página na internet.

Para aqueles que desejam construir uma página na internet para divulgação de tópicos de Física Contemporânea desenvolvemos uma espécie de tutorial, simples e direto, que pode ser acessado no endereço `sites.google.com/site/solitonsufg/crie-sua-propria-pagina`. Orientamos que o professor construa a página junto com seus alunos para que eles indiquem quais objetos de aprendizagem mais facilitam, para eles, o entendimento dos conceitos. Percebemos que seria importante que os alunos pudessem auxiliar até mesmo na construção o texto que seria inserido nas páginas. Nós percebemos esta opção um pouco tarde e não pudemos ter a participação dos alunos desde o início. No entanto, de acordo com as sugestões dos alunos a página foi sofrendo alterações.

Pudemos fornecer uma visão holística da Física não se atentando apenas aos seus aspectos matemáticos, ou seja, nossa preocupação, em sala de aula, foi levar os alunos a perceberem a existência dos fenômenos sem exigir que eles compreendessem a matemática utilizada de forma exaustiva.

3 Trabalhos desenvolvidos

Durante o o Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física foram escritos resumos e artigos para serem apresentados em congressos com a finalidade de obter sugestões, críticas e dicas para melhoraria do produto educacional bem como desta dissertação. Dessa forma os frutos deste trabalho foram apresentados na Semana da Física e Química (UEA Física e Química- UFG/Catalão), Encontro de Matemática do Centro-Oeste, Encontro de Didática e Prática de Ensino (EDIPE), Congresso de Pesquisa e Extensão da Universidade Federal de Goiás (CONPEEX). E,além disso, resultou no artigo Sobre a conexão entre alguns modelos físicos não-lineares aceito pela Revista Brasileira de Ensino de Física (RBEF).

4 Referências Bibliográficas

ANDRADE, D. X.; Assis, P. G.; Anjos, P. R. Sobre a conexão entre alguns modelos físicos não-lineares. Revista Brasileira de Ensino de Física. 2016.

AUBRECHT, G. J. Redesigning courses and textbooks for the twenty-first cen- tury. American Journal of Physics, Woodbury, v. 57, n. 4, p. 352-359, Apr. 1989.

ARONS, A. B. A guide to introductory physics teaching, New York: John Wiley, 1990.

BIJKER, W. E. (1987). The Social Construction of Bakelite: toward a theory of invention. In: Bijker, W. E.; Hughes, T. P. e Pinch, T. J. (Eds.). The Social Construction of Technological System. Cambridge: The MIT Press.

BIJKER, W. E. (1995). Of Bicycles, Bakelites, and Bulbs. Cambridge: The MIT Press.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. (1994). Investigação qualitativa em educação. Porto: Porto Editora.

BOUSSINESQ, J. *Essai sur la theorie des eaux courantes, Memoires presentes par divers savants*, l'Acad. des Sci. Inst. Nat. France, XXIII, pp. 1-680, Paris: Imprimerie

Nationale, 1877.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. (1996). Lei nº 9394, Brasília, MEC.

. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e tecnológica. (2002). Parâmetros Curriculares Nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, MEC.

.Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. (2002). PCN+ do Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, MEC.

CARDOSO, J. L. J. Sólitons, Revista Brasileira de Física, Vol. 10,N.O3, 1980.

CHALUB, Fabio A.C.C. e ZUBELLI, Jorge P. Sólitons: na crista da onda por mais de 100 anos, in: Matemática Universitária, no. 30, junho de 2001, pp 41-65.

Ciência e público: caminhos da divulgação científica no Brasil. Organização e apresentação de Luisa Massarani, Ildeu de Castro Moreira e Fatima Brito. Rio de Janeiro: Casa da Ciência Centro Cultural de Ciência e Tecnologia da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Forum de Ciência e Cultura, 2002.

COLLINS. H. e PINCH, T. (2003). O Golem: o que você deveria saber sobre ciência. São Paulo: Editora UNESP.

COLLINS, H. e PINCH, T. (2010). O Golem à solta: o que você deveria saber sobre tecnologia. Belo Horizonte: Fabrefactum.

CUPPARI, A. RINAUDO, G. ROBUTTI, O e VIOLINO, P. Gradual introduction of some aspects of quantum mechanics in a high school curriculum. Phys. Educ. 32-302, 1997.

DAS, A. *Integrable Models*, World Scientific, Lecture Notes in Physics. Cingapura, 1989.

DELICADO, A. o papel educativo dos museus científicos: públicos, atividades e parcerias. Ensino Em Re-Vista, v.20, n.1, p.43-56, 2013.

DORNELES, P.F.T. Integração entre as Atividades Computacionais e Experimentais como Recurso Instrucional no Ensino de Eletromagnetismo em Física Geral. Tese de Doutorado em Ciências, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.

ERICKSON, F. (1998). Qualitative research methods for science education. In: Fraser, B. e Tobin, K. (Ed.). International Handbook of Science Education. Dordrecht, The Netherlands: Klower Academic Publishers. p. 1155-1173.

FERMI, E.; PASTA, J.; ULAM, S. *Studies of Nonlinear Problems*, Document Los Alamos - 1940, 1955.

FISCHLER, H., LICHTFELDT, M. Modern physics and students conceptions International Journal of Science Education, London, v. 14, n. 2, p. 181-190, Apr./June 1992.

GENOVESE, L. G. R. (2013). Obstáculos à Consolidação da Relação entre o Campo Escolar e o Campo Universitário: os Pequenos Grupos de Pesquisa de Goiás em foco. Atas do IX ENPEC. 10 e 14 de novembro de 2013. Águas de Lindóia, São Paulo.

GENOVESE, L. G. R. e GENOVESE, C. L. C. (2012). Estágio Supervisionado em Física: considerações preliminares. Goiânia: UAB, 2012.

GIL, D.; SOLBES, J. The introduction of modern physics overcoming a deformed vision of science. International Journal of Science Education, London, v. 15, n. 3, p. 255-60, 1993.

GOLDSTEIN, H.;POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical Mechanic*, 3.ed. Addison-Wesley, 1980.

HIETARINTA, J. *Hirota's bilinear method and soliton solutions*, Physics AUC, vol. 15 (part I), 31-37 (2005).

JONES, D. G. C. Cosmology and particle physics. Physics Education, Bristol, v. 27, n. 2, p. 76-80, Mar. 1992.

JONES, D. G. C. Teaching modern physics -microconceptions of the photon that can damage understanding. Physics Education, Bristol, v. 26, n.2, p. 93-98, Mar. 1991.

KLEIN, H. e KLEINMAN, D. (2002). The Social Construction of Technology: structural considerations. Science, Technology Human Values. v. 27, n. 1, p. 28-52.

KORTEWEG, D. J.; de VRIES, G. *On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Waves*, Philosophical Magazine 39 (240): 422-443, 1895.

LAWRENCE, I. Quantum physics in school. Physics Education, Bristol, v. 31, n.5, p. 278-286, Sept. 1996.

LÉVY, Pierre (1996). O Que é Virtual?. Rio: Editora 34.

LONDAHL, P. S. What Is a Soliton?. Los Alomos Science, 1984.

MEI, C. *Wave propagation*, 1.138J/2.062J/18.376J, Fall, 2004 MIT. Disponível em: http://web.mit.edu/1.138j/www/material/chap-1.pdf

MION, R. e SAITO, C. (2001). Investigação-Ação. Ponta Grossa: Gráfica Planeta.

MIURA, R. M.; GARDNER, C. S.; KRUSKAL, M. D. *Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion*, J. Mathematical Phys. 9 (8): 1204-1209, 1968.

Monteiro, A. M. R. Prof. E Ciências: A Utilização de páginas da Internet no ensino das Ciências no 1º ciclo do Ensino Básico. Universidade do Porto. 2002

OSTERMANN, F, MOREIRA, M. . Tópicos de física contemporânea na escola média brasileira: um estudo com a técnica Delphi. In: ENCONTRO DE PESQUISA EM ENSINO DE FÍSICA, 6., 1998, Florianópolis. Atas. Florianópolis: Imprensa UFSC, 1998. 19p. [Seção de Comunicações Orais] 1 CD- Rom.

BARONE,A. ESPOSITO, F. MAGEE, C. J. Theory and applications of the Sine-Gordon equation. Laboratório di cibernetica del CNR. ARco Felice (Napoli), RIVISTA DEL NUOVO CIMENTO VOL. 1, N. 2 Aprile-Giugno 1971.

NOETHER, E. Invariante Variationsprobleme. Nachr. D. König. Gesellsch. D. Wiss. Zu Göttingen, Math-phys. Klasse, 235?257. 1918.

PARTICLE PHYSICS GROUP 97 Particle physics. London: Particle Physics and Astronomy Research Council, 1997.

PEKCAN, A. THE HIROTA DIRECT METHOD. Temmuz, 2005.

PINCH, T. e W. E. BIJKER. (1987). The social construction of facts and artifacts: or how the Sociology of Science and the Sociology of Technology might benefit each other. In: Bijker, W. E.; Pinch, T. e Hughes, T. (Eds.). The social construction of technological systems: new directions in the Sociology and History of Technology, Cambridge, The Mit Press.

PONTE, J. (1997). As Novas Tecnologias e a Educação. Lisboa: Texto Editora, 1997.

REIS, P. (1999). A discussão de assuntos controversos no ensino das ciências. Inovação, v. 12, p. 107-112. Acesso em 03, jun., 2015,

RICARDO, E. C.; Custódio, J. F. e Rezende, M. F. (2007). A tecnologia como referência dos saberes escolares: perspectivas teóricas e concepções dos professores. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 29, n. 1, p. 135-147, 2007.

RICARDO, E. C. (2010). Problematização e contextualização no ensino de física. In: Carvalho, A. M. (Org.). Ensino de Física. São Paulo: Cengage Learning. p. 29-51.

Roque, A. 5910170 Física II Ondas, Fluidos e Termodinâmica USP Aula 18

RUSSELL, J. S. *Report on Waves*, Report of the fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science, York. London: John Murray. 1844.

SCHWARZ, C. A tour of the subatomic zoo: a guide to particle physics. New York: American Institute of Physics, 1992.

STANNARD, R. Modern physics for the young. Physics Education, Bristol, v. 25, n. 3, p. 133-143, 1990.

Liane M.R. TAROUCO, L. M. R, et al. Disponível em www.cinted.ufrgs.br/renote/set2003/artigos

TODA, M. *Theory of Nonlinear Lattice*, Springer-Verlag. Berlin: 1989.

TODA, M. *Nonlinear Waves and Solitons*, KTK Scientific Publishers, 1989.

WAKS, L. (1990). Educación en ciencia, tecnología y sociedad: desarrollo internacionales y desafios actuals. In: Medina, M. e Sanmartín (Eds.). Ciencia, tecnología y sociedad. Barcelona: Anthropos. p. 42-75.

Wieman, C. E. Adams, W. P. Loeblein ad K.K. Perkins, The Physics Teacher 48, 225 (2010).

WILEY, D. A, The Instructional use of Learning Objects (2000). Disponível em www.reusability.org/read/chapters/wiley.doc. Tradução em português está disponível em http://penta3.ufrgs.br/objetosaprendizagem/.

ZABUSKY, N. J.; KRUSKAL, M. D. (1965), Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States, Phys. Rev. Lett. 15 (6): 240-243.

ZANETIC, J.: Física e Cultura. Física/Artigos. 2006.

ZIMAN, J. (1985). Enseñanza y aprendizage sobre la ciência y la sociedade. México: Fondo de Cultura Económica.