MNPEF Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física
Polo Catalão - UFGo

UFG UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
Regional Catalão

SBF SOCIEDADE BRASILEIRA DE FÍSICA

ENSINAGEM DE CÁLCULO ÀS EQUAÇÕES DE MAXWELL NO ENSINO MÉDIO: PROPOSTA EXTRACURRICULAR À LUZ DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Paulo Roberto Ferreira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Goiás (UFG), no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador:
Paulo Alexandre de Castro

Catalão
Março - 2017

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Nome completo do autor: Paulo Roberto Ferreira

Título do trabalho: ENSINAGEM DE CÁLCULO ÀS EQUAÇÕES DE MAXWELL NO ENSINO MÉDIO: PROPOSTA EXTRACURRICULAR À LUZ DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Paulo Roberto Ferreira

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 03 / 06 / 2017

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

FICHA CATALOGRÁFICA

Ferreira, Paulo Roberto
Ensinagem de Cálculo às equações de Maxwell no Ensino Médio: proposta extracurricular à luz da aprendizagem significativa [manuscrito] / Paulo Roberto Ferreira
X, 124f.: il.; 30 cm
Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre de Castro.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Física e Química, Catalão, Catalão, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Catalão, 2017.
Referências Bibliográficas: f. 62-63
Inclui fotografias, lista de figuras
1. Ensino de Física, 2. Cálculo diferencial e integral, 3. Equações de Maxwell. I. Castro, Paulo Alexandre de, orient. II. Dr.

Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física

UFG

Relatório de Defesa de Dissertação
Candidato: **Paulo Roberto Ferreira**

Aos 17/03/2017 às 14:00 horas, realizou-se na Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão a Defesa de Dissertação de Mestrado sob o título: Transposição Didática do Cálculo e das Equações de Maxwell para o Ensino Médio: Perspectivas de uma Aprendizagem Significativa pelo candidato **Paulo Roberto Ferreira**. Ao final dos trabalhos a banca examinadora reuniu-se em sessão reservada para o julgamento tendo os membros chegado ao seguinte resultado:

Participantes da Banca:	**Função**	**Instituição**
Prof. Dr. Paulo Alexandre de Castro	Presidente	UAEF/UFG/RC
Prof. Dr. Nilton Luis Moreira	Titular	UAEF/UFG/RC
Prof. Dr. Mauro Antonio Andreata	Titular	UAEF/UFG/RC
Prof. Dr. Marcos Fernandes Sobrinho	Titular	IF Goiano / Urutai

Resultado Final: APROVADO.

Parecer da Comissão Julgadora:

Trabalho bem escrito e com grande potencial de aplicação no Ensino Médio

Encerrada a sessão reservada, o presidente informou ao público presente o resultado. Nada mais havendo a tratar, a sessão foi encerrada e, para constar eu Camila Regina Silva representante do Programa de Pós Graduação em Ensino de Física lavrei o presente relatório que será assinado por mim e pelos membros da banca examinadora.

Paulo A. de Castro
Prof. Dr. Paulo Alexandre de Castro

Prof. Dr. Nilton Luis Moreira

Prof. Dr. Mauro Antonio Andreata

Prof. Dr. Marcos Fernandes Sobrinho

Representante do PPG Camila Regina Silva

( ) Não houve alteração no título.
(X) Houve. O novo título passa a ser:

Ensinagem de Cálculo às Equações de Maxwell no Ensino Médio: Proposta Extracurricular à Luz da Aprendizagem Significativa

ENSINAGEM DE CÁLCULO ÀS EQUAÇÕES DE MAXWELL NO ENSINO MÉDIO: PROPOSTA EXTRACURRICULAR À LUZ DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Paulo Roberto Ferreira

Orientador:
Paulo Alexandre de Castro

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Goiás (UFG), no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

____

Prof. Dr. Paulo Alexandre de Castro
(Presidente)

____

Prof. Dr. Marcos Fernandes Sobrinho

____

Prof. Dr. Mauro Antônio Andreata

____

Prof. Dr. Nilton Luis Moreira

Catalão
Março - 2017

AGRADECIMENTOS

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa durante todo o período de realização desse mestrado e à SBF (Sociedade Brasileira de Física) pelo suporte e gestão do MNPEF (Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física).

RESUMO

ENSINAGEM DE CÁLCULO ÀS EQUAÇÕES DE MAXWELL NO ENSINO MÉDIO: PROPOSTA EXTRACURRICULAR À LUZ DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Paulo Roberto Ferreira

Orientador:
Paulo Alexandre de Castro

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Goiás (UFG), no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

A proposta desta dissertação é o desenvolvimento de um projeto extracurricular que atende à demanda de alunos concluintes do Ensino Médio, de saber notório em matemática, em física, especificamente em eletromagnetismo básico. Utilizando a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel, o objetivo deste projeto é trazer, por meio de aulas expositivas, noções de Cálculo diferencial e integral, produto escalar e produto vetorial, do domínio de cursos superiores de exatas para o ambiente do Ensino Médio de modo a auxiliar estudantes secundaristas que apresentam desenvoltura em exatas e anseiam por um novo saber. Tais ferramentas matemáticas apresentadas servirão como organizadores prévios, de acordo com a teoria da aprendizagem significativa, para o entendimento do conjunto das quatro equações mais influentes do eletromagnetismo na sua forma integral: as equações de Maxwell. As soluções imediatas das equações de Maxwell permitem que os alunos relacionem o novo conceito a subsunçores adquiridos em suas aulas regulares, proporcionando uma visão mais detalhada de fórmulas e de conceitos antes apenas citados e sem qualquer referência anterior. Nesse sentido, a função do presente trabalho não é de ensinar, na sua totalidade, conceitos pertinentes ao ensino superior, mas aguçar o interesse pela área de estudo, que já é demonstrado pela maioria dos estudantes interessados em ingressar em cursos de exatas, engenharias e afins. Dessa forma, o projeto aperfeiçoa as performances dos aprendizes em exames de ingresso ao ensino superior e fomenta o interesse por assuntos que, na maioria das vezes, são classificados como entediantes e difíceis tanto para ensinar quanto para aprender, embora sejam fascinantes.

Palavras-chave: Ensino de Física; Cálculo diferencial e integral; Equações de Maxwell.

Catalão
Março - 2017

ABSTRACT

LEARNING OF CALCULUS TO MAXWELL'S EQUATIONS IN HIGH SCHOOL: EXTRACURRICULAR PROPOSAL IN THE LIGHT OF MEANINGFUL LEARNING

Paulo Roberto Ferreira

Advisor:
Paulo Alexandre de Castro

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação Universidade Federal de Goiás (UFG), no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

The proposal of this dissertation is the development of an extracurricular project that meets the demand of students that are about to conclude high school, of notable knowing in mathematics and physics, specifically in basic electromagnetics. Using the theory of meaningful learning of David Ausubel, the proposal of this project is to incorporate through expositive classes concepts of differential and integral calculus, dot product and vector product of higher education exact sciences courses to the high school environment in order to help high school students that present resourcefulness in exact sciences and yearn for new knowledge. Such mathematical tools presented are going to serve as prior organizers, according to the meaningful learning theory, to the understanding of the pool of the four most influential equations of electromagnetism as a whole: Maxwell's equations. The immediate solutions of Maxwell's equations allow students to link new concept with subsumers already acquired in their regular classes, providing a more detailed view of formulas and concepts only quoted before without any previous reference. In this sense, the goal of this dissertation is not to teach the whole concepts pertinent to higher education, but sharpen the interest for the study area, which is already shown by most students interested in joining exact sciences, engineering courses and similars. Hence, the project improves the performances of apprentices in higher education entrance exams and foments interest in subjects which are classified as boring and difficult both to teach and to learn for most students, although fascinating.

Keywords: Physics education, Differential and integral calculus, Maxwell's equations.

Catalão
March - 2017

Sumário

Lista de Figuras

1 Introdução

Os temas transversais constituem a parte diversificada do currículo base que compõe os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Eles podem ser inseridos no contexto educacional concomitante à programação regular, atendendo os anseios da comunidade escolar.

> A parte diversificada do currículo destina-se a atender às características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela (Art. 26 da Lei de Diretrizes e Bases - LDB). Complementa a Base Nacional Comum e será definida em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar (Brasil, 2000, p. 22).

A proposta apresentada nesta dissertação é desvelar, por meio de uma ensinagem, noções de Cálculo e as equações de Maxwell na forma integral[1] para alunos do 3º ano do Ensino Médio que já concluíram a sua grade curricular nos dois primeiros anos e desejam aprimorar as suas habilidades na resolução de exercícios de Física e de Matemática.

> Na ensinagem, o processo de ensinar e apreender exige um clima de trabalho tal que se possa saborear o conhecimento em questão. O sabor é percebido pelos alunos quando o docente ensina determinada área que também saboreia, na lida cotidiana profissional e / ou na pesquisa, e a socializa com seus parceiros na sala de aula. Para isso, o saber inclui um saber o quê, um saber como, um saber por quê e um saber para quê (ANASTASIOU, 2003, p. 15).

O público-alvo do referido trabalho são estudantes de grande comprometimento e desenvoltura com as ciências exatas. Alunos que extrapolam a programação normal de suas disciplinas e aprofundam os estudos em temas que não são discutidos pelos materiais didáticos utilizados pelos professores no cotidiano das aulas. Aprendizes que estudam de forma autodidata e têm interesse em conhecer novas teorias por intermédio de um material complementar.

Para atender à proposta desta dissertação, foi desenvolvido e ministrado um minicurso avançado de noções de Cálculo Diferencial e Integral em horário extraturno. Com duração de 31 horas, durante o turno vespertino, no período de 02/06/2016 a 07/07/2016, objetivou apresentar aos alunos algumas ferramentas utilizadas em cursos superiores, como é o caso das noções de

---

[1]Conteúdos esses que, usualmente, são ministrados em cursos do Ensino Superior, tais como Matemática, Física, Química, Biologia e Engenharias, entre outros.

derivada e de integral, produto escalar e produto vetorial. Posteriormente, foram apresentadas e discutidas as leis do eletromagnetismo, por intermédio das equações de Maxwell na forma integral, buscando aprimorar o aprendizado que obtiveram no Ensino Médio e revisaram no minicurso avançado.

Ao término do minicurso, os alunos receberam um manual para consultas rápidas - composto das notas de aula de Cálculo e as equações de Maxwell que, posteriormente, serão estudados de forma aprofundada em seus cursos de graduação.

O nível de exploração dos assuntos nas notas de aula está de acordo com o grau de instrução do aprendiz (nível médio), mas o manual abrangerá o tema como um todo, podendo ajudá-los em situações futuras ou atender professores e estudantes autônomos que desejarem pesquisar o assunto.

A proposta de ensino adotada nesta dissertação está em concordância com a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, que permite incorporar novos conceitos à estrutura cognitiva do aprendiz a partir de relações com os conceitos que ele já conhece, ou seja, o aluno aprende a partir do que ele já sabe. Para Ausubel (1968, p. 78-80) citado por Moreira (1986, p.71), "o fator isolado mais importante influenciando a aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe; determine isso e ensine-o de acordo".

Ausubel baseia-se na teoria de ensino cognitivista para explicar o processo de aprendizagem:

> Ausubel (1968) é um representante do cognitivismo e, como tal, propõe uma explicação teórica do processo de aprendizagem, segundo um ponto de vista cognitivista. Quando se fala em aprendizagem segundo o construto cognitivista, está se encarando a aprendizagem como um processo de armazenamento de informação, condensação em classes genéricas de conhecimentos, que são incorporados a uma estrutura na mente do indivíduo, de modo que esta possa ser manipulada e utilizada no futuro (MOREIRA; MASINI, 2011, p. 13).

Segundo Aragão (1976):

> Toda a proposição de Ausubel resulta da posição assumida por ele tendo em vista uma teoria cognitiva da aprendizagem verbal significativa, baseada na existência de uma estrutura cognitiva idiossincrática e dinâmica (ARAGÃO, 1976, p. 13).

De acordo com Ausubel (ARAGÃO, 1976, p. 13), a retenção de um novo conhecimento está diretamente relacionada à organização e ao domínio de determinado assunto previamente conhecido.

2 Aprendizagem Significativa de Ausubel

Considera-se uma aprendizagem significativa quando o aprendiz incorpora o novo material, potencialmente significativo, de forma não arbitrária e não literal à sua estrutura cognitiva por intermédio de ligações às ideias previamente estabelecidas no seu conjunto de conhecimentos relevantes, anteriormente adquiridos e disponíveis na sua estrutura mental (ARAGÃO, 1976).

O conhecimento prévio necessário para a realização da aprendizagem significativa é chamado de subsunçor ou ideia-âncora, na qual o conhecimento adquirido interage e se internaliza corroborando para uma diferenciação da estrutura cognitiva do sujeito que aprende (ARAGÃO, 1976).

A existência desses subsunçores é fundamental para a realização do processo de aprender significativamente. Às vezes, eles se encontram pouco elaborados, mas, à medida que a aprendizagem significativa se efetiva, os subsunçores adquirem bagagem conceitual e se tornam diferenciados, permitindo uma mudança intelectiva. Ordenados de forma hierárquica, os subsunçores podem ser modificados, acoplados, ou substituídos por ideias-âncora mais gerais, diferenciando a estrutura cognitiva e possibilitando novas aprendizagens significativas (MOREIRA; MASINI, 2011, p. 17).

Segundo Ausubel, o princípio da "diferenciação progressiva" deve ser levado em conta ao programar o conteúdo, ou seja, as ideias mais gerais e mais inclusivas da disciplina devem ser apresentadas no início para, somente então, serem progressivamente diferenciadas (MOREIRA; MASINI, 2011, p. 50).

Concomitante à *diferenciação progressiva*, tem-se a *reconciliação integrativa*, procedimento adotado pelo modelo mental do indivíduo em ordenar, relacionar, perceber diferenças e similaridades do novo conhecimento aprendido com o anteriormente adquirido.

Esses dois processos - diferenciação progressiva e reconciliação integrativa - constituem a essência da aprendizagem significativa, pois transformam a estrutura cognitiva do aprendiz, aprimorando os seus conceitos mais gerais e mais inclusivos, facilitando aprendizagem e retenção de novos conhecimentos (MOREIRA; MASINI, 2011, p. 30).

O planejamento de um conteúdo ministrado sob o ponto de vista da aprendizagem significativa ausubeliana requer não só a diferenciação progressiva do objeto de estudo em questão, mas faz-se necessário também relacionar os termos diferenciados. Enunciados, expressões deduzidas e unidades de medida devem se complementar e serem observados de forma conciliada, e não em blocos fragmentados e individualizados. O procedimento que permite essa prática chama-se "reconciliação integrativa", segundo a teoria de David Ausubel.

> Entretanto, a programação do conteúdo deve não só proporcionar a diferenciação progressiva, mas também explorar explicitamente relações entre proposições e conceitos, chamar atenção para diferenças e similaridades importantes e reconciliar inconsistências reais ou aparentes. Como já foi dito, isso deve ser feito para se atingir o que Ausubel chama de princípio da "reconciliação integrativa" e que ele descreve como uma antítese a pratica usual dos livros de texto de separar ideias e tópicos em capítulos e seções (MOREIRA; MASINI, 2011, p. 50-51).

De acordo com Moreira e Masini (2011, p. 96), David Ausubel considera três tipos principais de aprendizagem significativa: *representacional*, *de conceitos* e *proposicional*. A *aprendizagem representacional* atribui significados a símbolos arbitrários, geralmente palavras, que são reconhecidos com os seus concernentes (equações, objetos, eventos, conceitos) e significam para os aprendizes o que seus concernentes significam. A aprendizagem representacional engloba as outras duas, pois *aprendizagem de conceitos* também atribui significado a símbolos arbitrários, porém universais, criteriais e regulares. Contrapondo-se à aprendizagem representacional, a aprendizagem proposicional extrapola o significado de símbolos ou conceitos isolados e confere significado a uma proposição. No presente trabalho, o procedimento adotado foi a aprendizagem significativa de conceitos, tendo em vista que as equações de Maxwell são conceitos universais, genéricos e categóricos.

Focalizando a *aprendizagem de conceitos*, Moreira e Masini (2011, p. 97)citam três subclassificações propostas por David Ausubel para esse tipo de aprendizagem: *subordinada* (subsunciva), *superordenada* e *combinatória.* A aprendizagem de conceitos é classificada como subordinada ou subsunciva quando um conceito novo e potencialmente significativo relaciona-se significativamente com um conceito já existente na estrutura cognitiva do indivíduo que aprende. Por exemplo, ao desenvolver a lei de Gauss para campos elétricos, as fórmulas que permitem calcular os campos elétricos de cargas puntiformes, esferas eletrizadas e planos carregados já faziam parte da bagagem cognitiva dos estudantes, pois foram apresentadas em seus cursos básicos de eletrostática durante suas aulas regulares nos segundo e terceiro ano do Ensino Médio. Ainda segundo Moreira e Masini (2011, p. 97), "conceitos relevantes já existentes na estrutura cognitiva facilitam a aprendizagem significativa de novos conceitos e proposições".

De acordo com a teoria de David Ausubel, discutida na obra de Moreira e Masini (2011, p.97), a *aprendizagem de conceitos do tipo subordinada*, desenvolvida no presente trabalho, por meio da apresentação das equações de Maxwell na forma integral aos estudantes concluintes do Ensino Médio, admite duas denotações.

Ela pode ser *derivativa*, se tal material de estudo potencialmente significativo comprova ou exemplifica ideias já estabelecidas. As expressões que permitem encontrar os campos magnéticos no interior de um solenoide e ao redor de um fio condutor infinito percorrido por uma corrente estacionária foram derivadas de resoluções triviais da lei de Ampère-Maxwell, conceitos que antes foram introduzidos aos estudantes sem qualquer tipo de demonstração.

Outra classificação pertinente da aprendizagem de conceitos da forma subordinada, em concordância com a teoria de David Ausubel, é que ela pode ser *correlativa*, quando se trata de uma qualificação, extensão, elaboração ou modificação de uma ideia previamente discutida ou aprendida (MOREIRA; MASINI, 2011, p.97). A corrente de deslocamento discutida pela lei de Ampère-Maxwell, durante a explanação do capacitor plano, exemplifica esse processo de aprendizagem.

Ausubel propõe a aprendizagem de conceitos de forma superordenada e combinatória, como citam Moreira e Masini (2011, p. 100):

> Superordenada, quando o novo conceito ou proposição relaciona-se a ideias subordinadas específicas que são por ele assimiladas; combinatória, quando a nova informação não se relaciona nem a ideias subordinadas nem a ideias superordenadas específicas, mas com antecedentes amplos, gerais, de um conceito relevante existente na estrutura cognitiva (MOREIRA; MASINI, 2011, p. 100).

Exemplificando, o processo de ancoragem proposto pela aprendizagem significativa - alunos que entendem as funções horárias dos movimentos, mas têm dificuldade para memorizá-las, podem utilizar as regras de derivação e obtê-las rapidamente. Quem já conhece as expressões da intensidade da força elétrica entre duas cargas puntiformes e a intensidade do campo elétrico criado por uma carga puntiforme a partir da lei de Coulomb, poderá relacioná-las com a lei de Gauss para campos elétricos. Nesses casos, os subsunçores são as funções horárias e as expressões da intensidade da força e do campo elétrico e a modificação desses subsunçores são as regras de derivação e a lei de Gauss para campos elétricos.

Nesse contexto, é importante diferenciar uma aprendizagem mecânica de uma aprendizagem significativa. Uma aprendizagem mecânica consiste em transmitir o conhecimento de forma arbitrária e de memorização, gerando pouca retenção e fraca assimilação por parte dos aprendizes. É comum, em salas de aula, alunos serem submetidos a uma aprendizagem mecânica, em que o material instrucional é repassado aos estudantes de forma arbitrária e literal por parte dos professores ou durante estudos autônomos dos indivíduos. Esse tipo de aprendizagem não incorpora significados à estrutura intelectual do aprendiz que, literalmente, não aprende, apenas memoriza o material sem relacioná-lo com nenhum conhecimento prévio.

Também se deve considerar que não existe dicotomia entre aprendizagem mecânica e aprendizagem significativa. Isto é, o indivíduo pode iniciar os seus estudos de forma mecânica, mas se ele possui um conhecimento básico sobre o assunto que proporcione uma ancoragem do novo material instrucional a ser aprendido, predisposição para aprender (interesse), um material potencialmente significativo e uma mediação adequada do professor, ao término de uma aprendizagem supostamente mecânica terá, na verdade, uma aprendizagem significativa.

Um dos principais tipos de aprendizagem significativa é a receptiva, que, de acordo com Ausubel, consiste em apresentar ao aluno o material instrucional a ser aprendido, na sua forma final, para que seja incorporado e internalizado à sua estrutura cognitiva e possa ser acionado e utilizado em momentos futuros. Trata-se da forma como a humanidade retém a maior parte do conteúdo aprendido na sua estrutura cognitiva por um considerável período de tempo, bem como a sua organização, e Ausubel explica o porquê do seu eventual esquecimento a partir do conceito da assimilação *obliteradora*:

> Ausubel introduz o conceito de assimilação *obliteradora*: as novas informações vão, espontânea e progressivamente, perdendo a dissociabilidade em relação às ideias-âncora até que não mais sejam reproduzíveis como entidades individuais, restando apenas o subsunçor modificado. O esquecimento é, portanto, uma continuação temporal natural do mesmo processo de assimilação que facilita a aprendizagem e a retenção de novas informações (MOREIRA; MASINI, 2011, p. 101).

2.1 Organizadores Prévios

Para facilitar a diferenciação progressiva e a reconciliação progressiva, a teoria de Ausubel propõe o uso de organizadores prévios. São materiais instrucionais que antecedem o estudo do conteúdo principal, cuja função é preparar a estrutura cognitiva do aprendiz, dando suporte subsunçor, facilitando a aquisição e a organização de novas ideias. Para que ocorra um manejo substancial da estrutura cognitiva - de acordo com aprendizagem significativa, é necessário apresentar conceitos mais inclusivos relacionáveis, altamente explicativos, relacionáveis com o novo conteúdo a ser desenvolvido. Esses conhecimentos prévios são os organizadores que podem ser subsunçores já desenvolvidos ou novos, necessários para a total compreensão do material potencialmente significativo que os precede.

O uso de organizadores prévios torna a aprendizagem significativa, hierarquicamente organizada, facilitando a retenção do objeto de estudo principal na estrutura cognitiva do aluno. Segundo Aragão (1976), a introdução dos organizadores prévios segue as seguintes premissas:

- O novo material a ser incorporado deve ser potencialmente significativo e se tornará um subsunçor, interagindo com o conhecimento anteriormente adquirido pelo aprendiz por meio da diferenciação progressiva, internalizando-o.
- Quanto mais subsunçores estiverem presentes na estrutura ideacional do aprendiz, maior será a incorporação do novo material na sua base cognitiva que auxiliará na solução de problemas futuros, tornando a aprendizagem não arbitrária e substantiva.

- Os organizadores podem ser de dois tipos: expositivos, que apresentam subsunçores importantes não familiares ao aluno, e comparativos, cuja função é integrar novas ideias a subsunçores já existentes, fazendo associações entre conteúdos originalmente diferentes, mas similares.

2.2 Apresentação e discussão do tema

A sequência didática apresentada nos próximos capítulos encontra seu aporte teórico na aprendizagem significativa de Ausubel. As noções de Cálculo apresentadas no capítulo 3 serão ensinadas aos alunos, ancoradas a subsunçores (ideias-âncora) que eles já possuem bem elaborados, como: funções de 1º e 2º graus, operações com polinômios e interpretação de gráficos.

As noções de limite, derivada e integral servirão de conhecimentos prévios para que possam entender os símbolos matemáticos da parte física mesmo que, em primeira instância, as resoluções sejam imediatas, deixando os casos mais complexos para uma análise futura. A introdução do Cálculo, ao término do Ensino Médio, proporciona ao aprendiz a aquisição de novas ferramentas para a resolução de problemas de matemática e de física que se configuravam difíceis ou requeriam a memorização de fórmulas complicadas. O conceito de limite amplia o entendimento qualitativo das grandezas cinemáticas instantâneas, a derivada auxilia na obtenção das funções horárias dos movimentos e ajuda na construção de gráficos de funções de grau superior ao primeiro. A definição de integral auxilia na obtenção de áreas delimitadas pelos gráficos de funções polinomiais com o eixo das abcissas e colabora no entendimento das equações de Maxwell na forma integral.

Além do Cálculo, as noções de produto escalar e produto vetorial são de suma importância para a proposta desse projeto. Essas operações envolvem vetores que são modelos matemáticos indispensáveis para a compreensão de diversas leis físicas. A ideia de integral, combinada com o conceito de produto escalar, permite ao estudante das equações de Maxwell compreender a lei de Gauss para campos elétricos. Além disso, o produto vetorial esclarece a regra da mão direita utilizada na obtenção da força magnética sobre partículas eletrizadas.

Dessa forma, as noções de Cálculo e de Álgebra vetorial, apresentadas nos capítulos seguintes, são consideradas como organizadores prévios, de acordo com a teoria de Ausubel, facilitando a aquisição do novo conhecimento: as equações de Maxwell.

> Segundo Ausubel, a principal função do organizador prévio é a de servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que deve saber, afim de que o material possa ser aprendido de forma significativa. Ou seja, os organizadores prévios são úteis para facilitar a aprendizagem na medida em que funcionam como "pontes cognitivas" (MOREIRA; MASINI, 2011, p. 21).

2.3 Mapas conceituais

A teoria da aprendizagem significativa proposta por Ausubel segue uma linha de raciocínio bastante peculiar. A aquisição de novos conceitos mais gerais e inclusivos por parte dos aprendizes se efetiva a partir de conhecimentos previamente existentes na sua estrutura cognitiva, ou seja, o indivíduo aprende o novo resgatando o que já sabe. No curso regular de eletromagnetismo do Ensino Médio, todas as demonstrações feitas a partir das equações de Maxwell já faziam parte do seu construto cognitivo e se tornaram subsunçores ou facilitadores para que um conjunto de saberes mais elaborados pudesse ser compreendido.

Além dos subsunçores já presentes na bagagem intelectual dos participantes do projeto, novas ideias foram incluídas, funcionando como organizadores prévios, como o minicurso de Cálculo, por exemplo, para que durante as resoluções das equações de Maxwell em um nível pertinente ao grau de instrução dos alunos, a parte matemática fosse totalmente compreendida.

Os mapas conceituais configuram um instrumento eficaz que pode ser implantado como recurso instrucional para desenvolver a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa de um conteúdo ministrado. Tratam-se diagramas unidimensionais ou bidimensionais que organizam o tema discutido de forma ordenada, partindo de um conceito mais geral e se ramificando em conceitos específicos que se relacionam. Os diagramas bidimensionais dão a oportunidade de investigar as relações propostas em duas direções, vertical e horizontal, de modo a permitir diferentes percursos em sua leitura e facilitar a reconciliação integrativa dos conceitos apresentados.

> Assim sendo, doravante deve-se entender por mapas conceituais, diagramas bidimensionais mostrando relações hierárquicas entre conceitos de uma disciplina e que derivam sua existência da própria estrutura da disciplina (MOREIRA; MASINI, 2011, p. 51).

Após a apresentação das equações de Maxwell aos alunos envolvidos no projeto e o detalhamento de cada símbolo presente nelas, elas foram resolvidas em situações características, condizentes com domínio conceitual de eletromagnetismo dos aprendizes. As soluções geraram novas equações mais específicas que, na sua maioria, já foram apresentadas e trabalhadas em aulas regulares. A partir desse ponto, com a intenção de diferenciar progressivamente e reconciliar integrativamente o conceito novo e o já aprendido, os mapas conceituais foram propostos como facilitadores dessa *práxis*.

2.4 Mapas conceituais das equações de Maxwell

As figuras 1, 2 e 3 representam modelos de mapas conceituais e a hierarquia adotada na apresentação de conceitos de acordo com o princípio ausubeliano da diferenciação progressiva. Segundo Moreira e Masini:

> Nesse modelo, a orientação é tal que os conceitos mais gerais e inclusivos aparecem no topo do mapa. Prosseguindo de cima para baixo no eixo vertical, outros conceitos aparecem em ordem descendente de inclusividade até que, ao pé do mapa, chega-se aos conceitos mais específicos. Exemplos podem também aparecer na base do mapa. As linhas conectando conceitos sugerem relações entre os mesmos (MOREIRA; MASINI, 2011, p. 52).

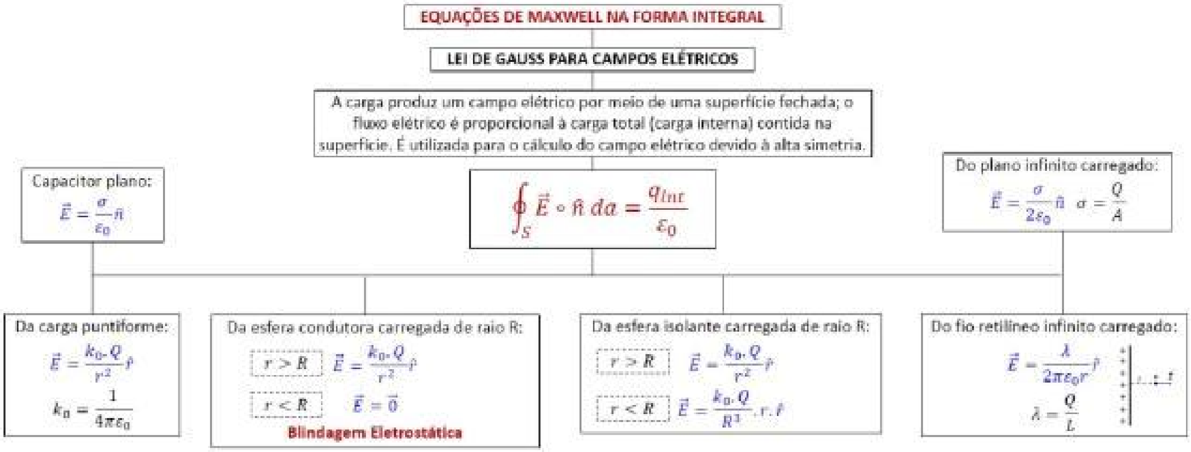
Os enunciados das equações de Maxwell e a sua equação na forma integral aparecem no topo do mapa por serem conceitos superordenados muito gerais e inclusivos. Os conceitos referentes às expressões de campos elétricos, campos magnéticos e consequências das leis são subordinados e intermediários aos anteriores, que estão no topo, aparecendo em seguida (MOREIRA; MASINI, 2011, p.52).

Desse modo, foi possível conectar conceitos já aprendidos pelos alunos em aulas regulares, que são os subordinados, a conceitos com um grau de generalidade maior, que são as leis do eletromagnetismo, por intermédio das equações de Maxwell na forma integral.

Essa relação dinâmica entre ideias novas e antigas dá significado aos temas apresentados na forma diferencial e integral, que estão detalhados no mapa, inspirado na obra *A student's guide to Maxwell's equations*, de Daniel Fleisch (2008).

Para que as equações pudessem ser resolvidas em situações especiais, foi ministrado um minicurso de Cálculo descrito no capítulo seguinte. Os mapas conceituais foram apresentados aos alunos após as demonstrações feitas na lousa e explicadas passo a passo pelo professor. Eles permitem um resumo esquemático do que foi aprendido e organizado de forma hierárquica (PEÑA, 2005).

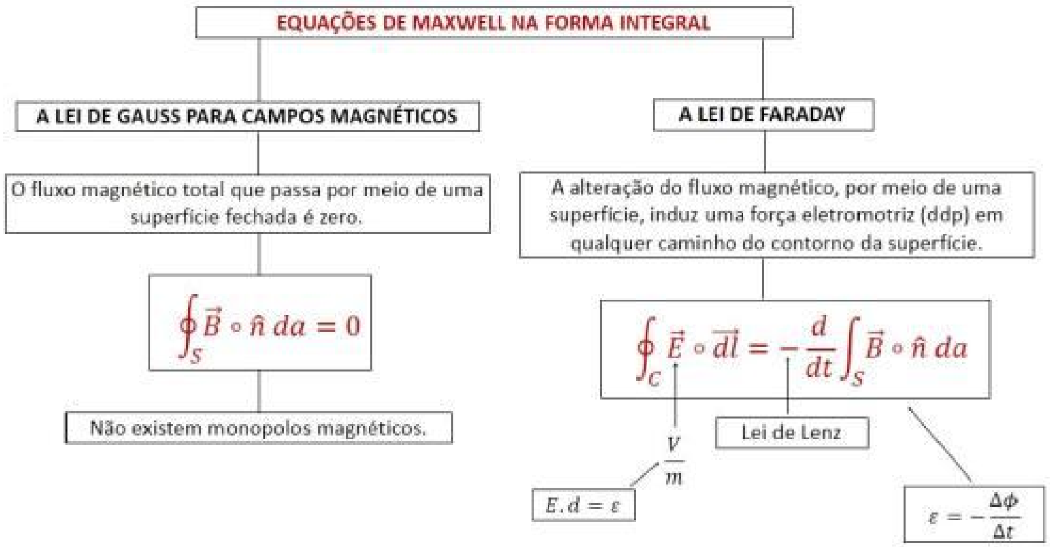
Figura 1 - Mapa conceitual da Lei de Gauss para campos elétricos - equações de Maxwell na forma integral



r: raio da Superfície Gaussiana
R: raio da esfera
$\hat{r}$: versor que indica a direção do vetor campo elétrico (radial)
λ: densidade linear de carga
σ: densidade superficial de carga
ρ: densidade volumétrica de carga
$\hat{n}$: versor que determina a direção normal à superfície

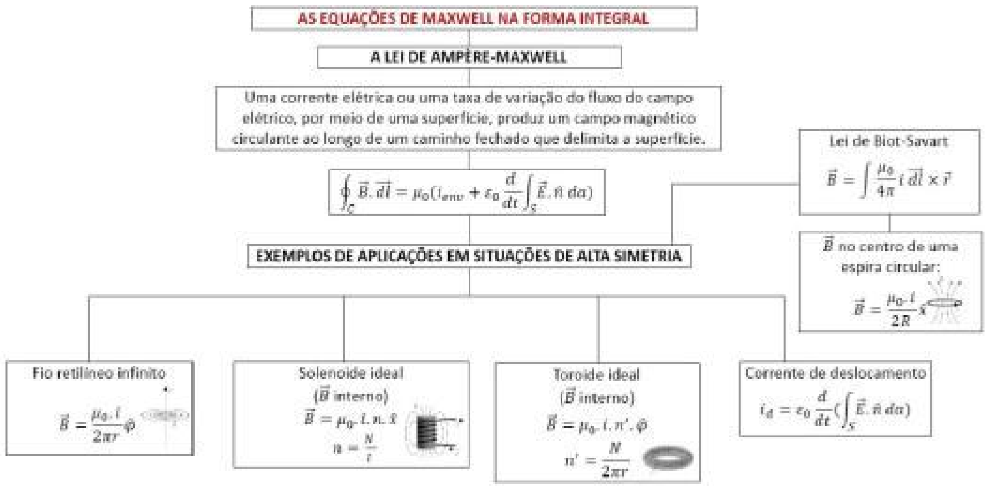
Fonte: Elaborado pelo autor, baseado na obra de Daniel Fleisch (2008).

Figura 2 - Mapa conceitual da Lei de Gauss para campos magnéticos e da Lei de Faraday



Fonte: Elaborado pelo autor, baseado na obra de Daniel Fleisch (2008).

Figura 3 - Mapa conceitual da Lei de Ampère-Maxwell



Fonte: Elaborado pelo autor, baseado na obra de Daniel Fleisch (2008).

3 Introdução ao estudo do cálculo diferencial e integral

3.1 Justificativas

Em concordância com a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, os assuntos tratados nos próximos capítulos servirão como organizadores prévios que serão incorporados ao construto cognitivo dos estudantes, se transformando em subsunçores necessários para que haja uma mínima compreensão dos símbolos de diferencial e de integral, bem como as soluções imediatas que aparecerão nas apresentações das equações de Maxwell na sua forma integral e as aplicações em situações conhecidas pelos estudantes.

O minicurso de Cálculo foi preparado de forma qualitativa e compacta utilizando obras literárias de matemática elementar, que apresentam os fundamentos do Cálculo de forma acessível ao nível de compreensão dos estudantes secundaristas que já concluíram a grade curricular de álgebra - funções e geometria nos dois primeiros anos do Ensino Médio - e fazem uma revisão e aprofundamento no terceiro ano. O minicurso de Cálculo foi oferecido no período extraturno, composto de 4 módulos – Anexos B, C, D e E.

A maioria dos estudantes que se dispôs a participar do projeto anseia por cursos de ciências exatas no nível superior. Esse minicurso de Cálculo pode ser considerado uma pequena "Introdução ao Cálculo" para os futuros ingressantes em cursos de engenharias e de ciências afins. De um público de 47 alunos de 3º ano do Ensino Médio, 17 aceitaram participar do minicurso, com o devido consentimento da coordenação da escola e dos pais (conforme termo de livre consentimento em Anexo A).

A sequência didática desenvolvida segue a lógica da aprendizagem significativa, considerando esse estudo inicial do Cálculo, apresentando: a noção intuitiva de limite, os conceitos de derivada e a regra da cadeia, a definição de integral como sendo a "antiderivada" e a integração por substituição como sendo os organizadores prévios, ferramentas iniciais para a construção do modelo ideacional principal que são as equações de Maxwell na forma integral e suas aplicações.

Cada módulo é composto de nota de aula apresentada pelo professor, uma lista de exercícios de fixação e tabelas que serão utilizadas para o cálculo de limites, derivadas e integrais imediatas. Ao término do 3º módulo, é dada uma avaliação de aprendizagem para que se tenha uma real dimensão do que foi aprendido pelos alunos.

3.2 Introdução ao estudo do limite e derivada

Considerando o nível de instrução do público alvo e os subsunçores adquiridos nesse período de Ensino Médio, foi trabalhada a noção intuitiva de limite, considerando o comportamento de uma função (sua imagem) quando atribuímos valores reais, muito próximos à direita e à esquerda, de um elemento do domínio destacado. A partir daí, constrói-se uma tabela e o gráfico, observando-se para qual valor a função se aproxima quando o elemento do domínio se aproxima do valor destacado. A ideia de limite é concebida e a notação apresentada. Em seguida, foram apresentadas as propriedades dos limites que serão fundamentais para a resolução de problemas. Limites envolvendo o infinito e limites laterais também foram trabalhados.

O objetivo dessa introdução ao estudo dos limites é chegar às condições de continuidade de uma função para que a definição de derivada seja apresentada.

A derivada de uma função é definida da seguinte forma:

Seja f uma função definida num intervalo aberto de x e x_0 um elemento de x. Chama-se derivada de f no ponto x_0 o seguinte limite:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right),$$

se este existir e for finito (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2005, p. 127).

Em seguida, são apresentadas as diferentes notações de derivada, a interpretação geométrica e a interpretação cinemática.

A derivada de uma função composta (regra da cadeia) e as principais regras de derivação foram discutidas. Ao término da explanação teórica, listas de exercícios - Anexos K e L - foram resolvidas pelos alunos sob a orientação do professor.

O limite e a derivada se transformam em subsunçores (ideias-âncora) que o aprendiz poderá utilizar na resolução de problemas de física e matemática, de acordo com a aprendizagem significativa de Ausubel.

Após a conclusão desse módulo, os alunos já estão preparados para a aprenderem o conceito de antiderivada ou integral.

3.3 Noções de integral

Da mesma forma que a subtração é ensinada como a operação inversa da adição e a divisão como sendo a operação inversa da multiplicação, a antiderivada ou integral indefinida pode ser apresentada para alunos do Ensino Médio como a operação inversa da derivada da seguinte forma:

Dada uma função $g(x)$, qualquer função $f(x)$tal que$f'(x) = g(x)$ é chamada de antiderivada ou integral indefinida de g(x) (GENTIL; SANTOS; GRECO; FILHO; GRECO, 1997, p. 251).

Exemplo 1) Se $f(x) = \frac{x^2}{2}$, então$f'(x) = \frac{2x}{2} = x = g(x)$ que é a derivada de f(x).

→ Uma das antiderivadas ou integral indefinida de $f'(x) = g(x) = x$é $f(x) = \frac{x^2}{2}$.

Exemplo 2) Se f(x) = $\frac{x^2}{2} + 3$, então f'(x) = $\frac{2x}{2} + 0 = x$= g(x) que é a derivada de f(x).

→ Uma das antiderivadas ou integral indefinida de $f'(x) = g(x) = x$é$f(x) = \frac{x^2}{2} + 3$.

Nos exemplos 1 e 2, observa-se que tanto $f(x) = \frac{x^2}{2}$ quanto $f(x) = \frac{x^2}{2} + 3$ são integrais indefinidas para $f'(x) = g(x) = x$. Conclui-se que a diferença entre as funções $f(x)$, chamadas de funções primitivas, nos dois exemplos, é uma constante C real, no exemplo 1, C = 0 e no exemplo 2, C = 3.

Após a análise dos exemplos e a aceitação da integral indefinida como a operação inversa da derivada, são apresentadas a notação de integral indefinida - Se $f'(x) = g(x)$, a integral indefinida ou antiderivada de $g(x)$é indicada da seguinte forma: $\int g(x)dx = f(x) + c$ - suas propriedades e algumas integrais imediatas.

A única técnica de integração explorada foi por substituição, tendo em vista de se tratar de um minicurso introdutório de Cálculo. Ao apresentar a notação da integral indefinida, imediatamente, alguns alunos perguntaram: Do que se trata o elemento dx? Para esclarecer essa pergunta, o recurso adotado foi apresentar a integral definida como uma área delimitada pelo gráfico da função f(x), contínua, que faz parte do integrando, e um intervalo real $[a, b]$ sobre o eixo x, pertencente ao seu domínio.

$$\acute{A}rea = \int_a^b f(x)dx$$

Ao término da explanação teórica, listas de exercícios foram resolvidas pelos alunos sob a orientação do professor.

3.4 O produto escalar

Na turma do primeiro ano do Ensino Médio, foi apresentado um curso básico de vetores aos alunos participantes do projeto e revisto no primeiro trimestre do 3º ano. O fato de existirem grandezas físicas escalares e vetoriais torna imprescindível um estudo detalhado de vetores e suas propriedades, que serão as mesmas em cursos mais avançados, mudando-se apenas o formalismo e o rigor matemático.

A base vetorial ($\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$) é apresentada como um padrão vetorial, de vetores unitários ou versores, que permite escrever os vetores como a soma de suas componentes nas direções dos eixos cartesianos Ox e Oy. A proposta inicial foi de representar os vetores em duas dimensões, deixando a representação espacial para o momento da apresentação do produto vetorial.

O produto escalar no espaço $\mathbb{R}^2$ foi introduzido no 3º módulo do curso de Cálculo introdutório com a intenção de se tornar um subsunçor, de acordo com a teoria de aprendizagem de Ausubel, para facilitar o entendimento da lei de Gauss na forma integral nos módulos subsequentes.

A partir da forma canônica: $\vec{u} = x_1\hat{\imath} + y_1\hat{\jmath}$ e $\vec{v} = x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath}$ de dois vetores no espaço$\mathbb{R}^2$, foi possível apresentar a definição de produto escalar:

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2,$$

como um número real, de grande importância no entendimento de grandezas físicas presentes no universo de estudo dos alunos selecionados como trabalho de uma força constante e fluxo do campo magnético. Partindo das propriedades do produto escalar e utilizando a lei dos cossenos:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta,$$

em queθé o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987, p. 39-45).

No Ensino Médio, o produto escalar entre dois vetores é apresentado de forma implícita, considerando o produto entre o módulo de um dos vetores e o comprimento da projeção do outro sobre o primeiro, que não deixa de ser uma forma alternativa e eficiente de apresentação desse operador. O produto escalar está presente nas fórmulas de grandezas físicas estudadas no Ensino Médio, em todos os anos. As expressões do trabalho de uma força, $\tau = F.d.cos\theta$, da energia cinética, $K = \frac{m(\vec{v}.\vec{v})}{2} = \frac{m.v^2}{2}$ (FEYNMAN, 2008, p.10-11), do fluxo do campo magnético, $\emptyset = B.A.cos\theta$, foram citadas como exemplos do produto escalar, definindo-se grandezas escalares.

A lei de Gauss para campos elétricos na forma integral é representada da seguinte forma:

$$\int \vec{E}\,.\hat{n}dA = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0},$$

em que$\vec{E}.\hat{n}$ representa o produto escalar do vetor campo elétrico e o versor normal à superfície gaussiana.

Como$|\hat{n}| = 1$ e, nas situações propostas a seguir, o vetor campo elétrico é uniforme, o produto escalar$\vec{E}.\hat{n}$ pode ser retirado da integral e escrito na forma: $|\vec{E}|.|\hat{n}|.cos\theta$. Se o vetor campo elétrico e o versor normal são paralelos e estão no mesmo sentido, $\theta = 0^{\circ}$ e, então, $cos\theta = 1$, possibilitando encontrar o módulo do vetor campo elétrico, constante, em uma situação de alta simetria.

Para campos magnéticos na forma integral, a lei de Gauss também apresenta um produto escalar e é dada por:

$$\int \vec{B}\,.\,\hat{n}dA = 0$$

Devido à inexistência de monopolos magnéticos, o vetor campo magnético $\vec{B}$ é paralelo $(\theta = 0^{\circ})$ e antiparalelo $(\theta = 180^{0})$, resultando em $|\vec{B}|.|\hat{n}|.cos\theta$ igual a zero, pois $cos\,\theta = \pm 1$, em cada ponto da superfíce gaussiana, devido à configuração de linhas de indução magnéticas fechadas do campo magnético.

3.5 O produto vetorial

O produto vetorial é apresentado ao Ensino Médio de forma implícita quando nos referimos às grandezas: torque ou momento de uma força e força magnética. Normalmente, essas grandezas são apresentadas sem qualquer referência ao produto vetorial. As expressões que fornecem as suas intensidades são impostas aos alunos sem nenhuma demonstração e a direção e o sentido delas são determinados pelo processo mnemônico "regra da mão direita".

Quando fórmulas e conceitos são ensinados de forma arbitrária e literal com pouca ou nenhuma interação com conceitos relevantes na estrutura cognitiva, ocorre aprendizagem mecânica, de acordo com a teoria ausubeliana. Para Ausubel, a aprendizagem significativa e a aprendizagem mecânica não são uma dicotomia, e sim um *continuum* (MOREIRA; MASINI, 2011, p. 19).

A aprendizagem mecânica é muito utilizada em física no Ensino Médio e não pode ser considerada uma atitude incorreta, tendo em vista que muitos assuntos abordados nesse nível de instrução têm origem em teorias mais avançadas no que se diz respeito aos fundamentos matemáticos e abstrações.

Conceitos, fórmulas e métodos mnemônicos aprendidos mecanicamente constituem subsunçores relevantes para que se possa praticar a aprendizagem significativa. A partir desse pressuposto, introduziremos o produto vetorial com o intuito de se tornar um conhecimento prévio para o entendimento da equação de Lorentz, citada no referido curso, responsável pelo surgimento da equação da força magnética sobre partículas, apresentada nos cursos introdutórios de Eletromagnetismo.

De acordo com a definição apresentada por Steinbruch e Winterle (1987, p. 60), o produto vetorial foi introduzido assim:

Dados os vetores $\vec{u} = x_1\hat{\imath} + y_1\hat{\jmath} + z_1\hat{k}$ e $\vec{v} = x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath} + z_2\hat{k}$, tomados nesta ordem, chama-se produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e se representa por $\vec{u}\times\vec{v}$, ao vetor:

$$\vec{u}\times\vec{v} = (y_1z_2 - z_1y_2)\hat{\imath} - (x_1z_2 - z_1x_2)\hat{\jmath} + (x_1y_2 - y_1x_2)\hat{k}$$

Ou, na forma facilitada, por meio de um determinante simbólico:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Considerando-se os vetores da base canônica$\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ e observando-se que:

$\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, verifica-se que $\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}$.

Conforme Steinbruch e Winterle (1987, p. 68), conclui-se que os versores$\hat{\imath}, \hat{\jmath},\ \hat{k}$ têm as direções de um triedro direto. Também costuma-se dizer que a base $\{\hat{\imath},\ \hat{\jmath},\ \hat{k}\}$ é de sentido positivo e, no momento em que o sentido fica caracterizado, ao ser adotada uma ordem circular para estes vetores, o sentido positivo se mantém; isto é, as bases $\{\hat{\jmath},\ \hat{k},\ \hat{\imath}\}$ e $\{\hat{k}, \hat{\imath},\ \hat{\jmath}\}$ também têm sentido positivo. Em outras palavras, pode-se, neste caso, também dizer: o produto vetorial dos dois primeiros vetores destas bases é igual ao terceiro.

Desenvolvendo a identidade de Lagrange (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987, p. 70):

$$|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2,$$

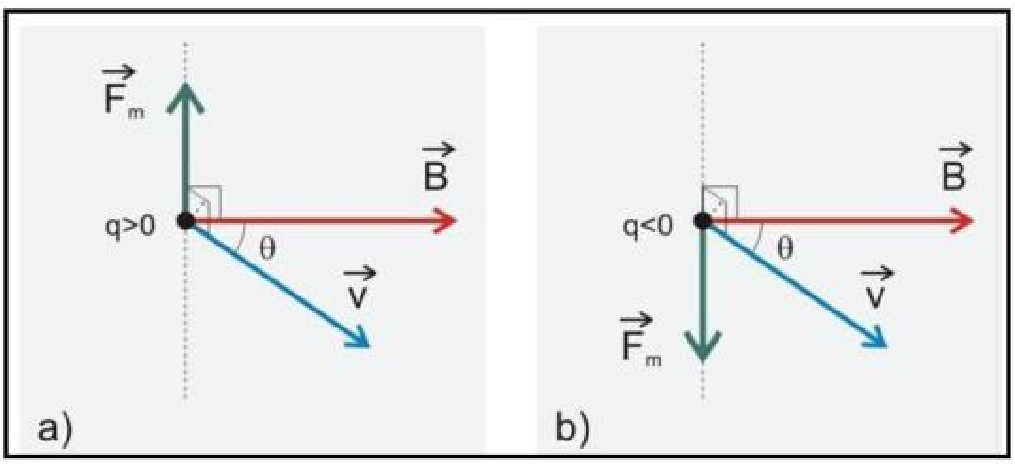
chega-se a uma expressão importante para o cálculo do módulo do produto vetorial entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sendo θ o ângulo entre eles:

$$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|sen\theta$$

Essa expressão é de suma importância para a compreensão da fórmula que determina a intensidade da força magnética sobre partículas apresentada na equação de Lorentz e ensinada sem qualquer referência a ela nos cursos introdutórios de magnetismo.

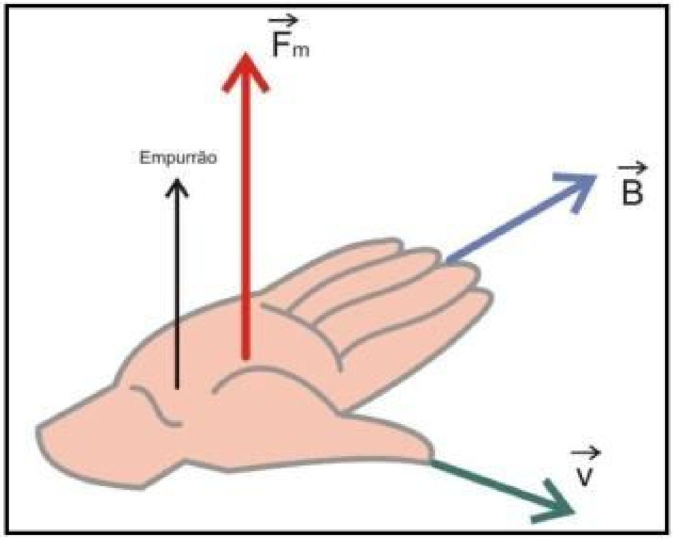
Para se determinar a direção e o sentido da força magnética sobre partículas e correntes, utiliza-se o método mnemônico conhecido como a regra da mão direita espalmada, que é uma adaptação da ordem circular usada pelo produto vetorial. Com a mão direita espalmada, coloca-se o polegar no sentido do vetor velocidade e os outros quatro dedos juntos, no sentido do vetor campo magnético, conforme Figuras 4 e 5. O vetor força magnética sai da direção da palma da mão para partículas carregadas com carga positiva ou correntes e, das costas ou dorso da mão, para partículas carregadas com carga negativa. Esse procedimento representa o produto vetorial: $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$, tornando-se um recurso eficiente e prático durante as aulas de magnetismo em nível médio, mas, nem sempre é exposto aos aprendizes de que se trata de um produto vetorial e que será explorado de forma completa em seus cursos de graduação posteriormente.

Figura 4 - a) Força magnética $\vec{F}_m$ que age numa partícula eletrizada com carga elétrica q > 0, lançada com velocidade $\vec{v}$ em um campo magnético $\vec{B}$; b) Força magnética $\vec{F}_m$ que age numa partícula eletrizada com carga elétrica q < 0, lançada com velocidade $\vec{v}$ em um campo magnético $\vec{B}$



Fonte: BORGES; NICOLAU, 2011.

Figura 5 - Regra da mão direita espalmada: orientação da força com carga de sinal positivo



Fonte: BORGES; NICOLAU, 2011.

4 As Equações de Maxwell

Após a realização da sondagem a respeito do conhecimento dos alunos participantes acerca da teoria básica do eletromagnetismo, foi possível dar início à apresentação das equações de Maxwell e suas aplicações em diferentes áreas do Eletromagnetismo.

As equações de Maxwell formam um conjunto de quatro equações que resumem as principais leis do eletromagnetismo e seus elaboradores. Quando são apresentadas na forma integral, dão uma visão macroscópica dos fenômenos eletromagnéticos e servem para originar diversas expressões comumente utilizadas em cursos básicos de eletrostática e de magnetismo, difundidas no Ensino Médio e que, na maioria das vezes, são citadas sem nenhum tipo de demonstração ou referência teórica, principalmente as expressões que permitem calcular campos magnéticos.

Após os minicursos de Cálculo, produto escalar e produto vetorial, as soluções das equações de Maxwell na forma integral, aplicadas em situações físicas que já são do conhecimento prévio dos alunos, tornam-se uma forma elegante e sofisticada de aplicações da matemática desenvolvida anteriormente na Física já aprendida.

A expressão da intensidade da força elétrica entre duas partículas eletrizadas e separadas por uma certa distância, a intensidade dos campos elétricos e magnéticos produzidos por diferentes fontes, a inexistência de monopolos magnéticos, a indução eletromagnética e a existência da corrente de deslocamento serão apresentados a partir das soluções das equações de Maxwell na sua forma integral, constituindo em novas ferramentas para a obtenção de tais conceitos que já fazem parte do cognitivo dos alunos envolvidos no referido projeto. As equações de Maxwell se tornam novos subsunçores que poderão ser utilizados e aprimorados nos seus futuros cursos de graduação.

As equações de Maxwell são quatro das equações mais influentes na física: a lei de Gauss para campos elétricos, a lei de Gauss para campos magnéticos, a lei de Faraday e a lei de Ampère-Maxwell.

> Quando Maxwell elaborou sua teoria do eletromagnetismo, ele não elaborou apenas quatro, mas vinte equações que descrevem o

> comportamento de campos elétricos e magnéticos. Foi Oliver Heaviside na Grã-Bretanha e Heinrich Hertz na Alemanha, que as combinaram e simplificaram em quatro equações, duas décadas depois da morte de Maxwell (FLEISCH, 2008).
>
> No seu famoso tratado sobre eletricidade e magnetismo, Maxwell apresenta uma formulação matemática unificada das leis de Coulomb, Oersted, Ampère, Biot/Savart, Faraday e Lenz, expressando essas leis na forma de quatro equações, conhecidas, hoje, como equações de Maxwell. Uma consequência importante de sua teoria eletromagnética foi a incorporação da óptica ao eletromagnetismo (ROCHA, 2009).

4.1 Discussão da lei de Gauss para campos elétricos

A lei de Gauss para campos elétricos na forma integral foi apresentada com uma explicação detalhada de cada símbolo presente na equação inspirada na obra *A student's guide to Maxwell's equations*, de Daniel Fleisch (2008). O conceito de campo elétrico foi retomado de forma semelhante à explicada nos cursos de eletrostática de nível médio. Deu-se ênfase às linhas de campo e às suas diversas formas originadas de diversos objetos carregados. Em seguida, o produto escalar foi identificado entre o vetor campo elétrico e o versor normal à superfície gaussiana em questão. A integral de superfície, carga interna à superfície gaussiana e a permissividade elétrica no vácuo, também foram detalhadas.

A partir dessa apresentação minuciosa da equação, as suas aplicações foram propostas. As expressões que permitem calcular a intensidade de diversos campos elétricos em situações de simetria elevada foram deduzidas por meio da resolução da equação que, devido à especificidade das condições de contorno e elevada simetria, foram facilmente obtidas.

Após a explicação teórica, os aprendizes foram encaminhados para o laboratório de informática para que pudessem explorar um simulador da lei de Gauss proposto pelo projeto do prof. Romero Tavares, da UFPB (TAVARES; ANDRADE; RODRIGUES; SANTOS; ANDRADE, 2016).

4.2 Discussão da lei de Gauss para campos magnéticos

A lei de Gauss para campos magnéticos na forma integral foi apresentada com uma explicação detalhada de cada símbolo presente na equação inspirada na obra *A student's guide to Maxwell's equations*, do autor Daniel Fleisch (2008).

As consequências da lei de Gauss para campos magnéticos tornaram-se as partes mais relevantes para o público espectador desse assunto. A inexistência de monopolos magnéticos e a orientação das linhas de indução magnética, visualizadas em diferentes objetos magnetizados, foram temas de suma importância nesse momento.

Ademais, as propriedades dos campos magnéticos foram destacadas. Duas equações complementares foram propostas: a equação de Lorentz e a lei de Biot-Savart. A equação de Lorentz permitiu deduzir a expressão da força magnética sobre partículas eletrizadas, bem como explorar o conceito de produto vetorial e associá-lo à regra da mão direita, amplamente utilizada durante as aulas de magnetismo no Ensino Médio.

A lei de Biot-Savart foi utilizada para deduzir a expressão do campo magnético no centro de uma espira circular percorrida por uma corrente contínua, expressão que, na maioria das vezes, é apresentada para os alunos sem qualquer tipo de dedução.

4.3 Discussão da lei de Faraday

A lei de Faraday na forma integral foi apresentada com uma explicação detalhada de cada símbolo presente na equação inspirada na obra *A student's guide to Maxwell's equations*, do autor Daniel Fleisch (2008).

A análise qualitativa da lei de Faraday permitiu o entendimento de um dos fenômenos mais importantes descobertos pela Física: a indução eletromagnética. Graças a essa descoberta, foi possível obter energia elétrica em grande escala em estações hidrelétricas ou termelétricas, por exemplo.

Um outro conceito que foi explorado a partir da lei de Faraday foi o do surgimento do campo elétrico induzido durante o fenômeno da indução eletromagnética. Foi possível perceber as diferenças e semelhanças entre os campos elétricos induzidos e aqueles produzidos por cargas estáticas. Essa comparação entre os campos elétricos induzidos e estáticos normalmente é pouco difundida nos cursos de magnetismo de nível médio.

A solução da integral de linha do produto escalar entre o vetor campo elétrico induzido e o vetor deslocamento infinitesimal ao longo do caminho possibilitou o surgimento da força eletromotriz induzida (ddp), do lado esquerdo da lei de Faraday. A taxa de variação do fluxo do campo magnético, por meio da superfície delimitada pelo caminho, contida numa integral de superfície, constitui o lado direito da equação. Resolvendo ambos os membros da equação, a relação

$$volt = \frac{tesla \times (metro\ quadrado)}{segundo}$$

foi verificada, comprovando a relação entre os fenômenos elétricos e os magnéticos.

Do lado esquerdo da lei de Faraday, existe um importante sinal de menos antes da integral de superfície, que não pode ser desprezado. Ele representa uma importante lei complementar do fenômeno da indução eletromagnética: a lei de Lenz. O sentido da circulação do campo elétrico induzido ou da corrente induzida ao longo do caminho delimitado pela superfície é contrário ao da variação do fluxo magnético que atravessa a referida superfície. Tal aspecto foi discutido e exemplificado.

4.4 Discussão da lei de Ampère-Maxwell

A lei de Ampère-Maxwell na forma integral foi apresentada com uma explicação detalhada de cada símbolo presente na equação inspirada na obra *A student's guide to Maxwell's equations*, do autor Daniel Fleisch (2008).

O ponto de partida do estudo do eletromagnetismo em nível médio é a clássica experiência de Hans Christian Oersted, em que a agulha magnética de uma bússola sofre uma deflexão quando colocada próxima a um fio condutor percorrido por uma corrente elétrica. A partir de então, foi possível comprovar que correntes elétricas são fontes de campos magnéticos.

Coube a André-Marie Ampère quantificar esse fenômeno e formular a Lei de Ampère, válida para obter as expressões do campo magnético em torno de um fio retilíneo percorrido por uma corrente estacionária. Essa expressão é amplamente discutida nos cursos de magnetismo do Ensino Médio e, na maioria das vezes, sem qualquer tipo de demonstração ou referência à Lei de Ampère.

Resolvendo a integral de linha do produto escalar do vetor campo magnético e o vetor deslocamento infinitesimal ao longo do caminho, do lado esquerdo da equação e igualando ao termo $\mu_0 i$, que representa o produto entre a permeabilidade magnética no vácuo e a corrente elétrica que percorre o fio condutor; do lado direito da equação, foi possível deduzir essa expressão facilmente.

Um segundo caso particular que foi possível demonstrar, com relativa facilidade, a partir da lei de Ampère, foi a expressão que permite encontrar a intensidade do vetor campo magnético no interior de um solenoide, percorrido por uma corrente estacionária. Com a intenção de complementar a aplicação da lei de Ampère em situações diversas, foi obtida também a expressão que permite calcular a intensidade do campo magnético no interior de um toroide.

A inconsistência da lei de Ampère, em situações de variação temporal do fluxo do campo elétrico, foi corrigida pelo termo de Maxwell, do lado direito da equação, conhecido historicamente como corrente de deslocamento. Foi possível apresentá-lo por intermédio do entendimento do processo de carga de um capacitor plano, assunto amplamente discutido no Ensino Médio e que, devido a limitações conceituais, apresenta algumas lacunas no entendimento, como a obtenção do campo elétrico entre as placas e a capacitância que, comumente chamada de pseudocorrente entre as placas no processo de carga, foi esclarecida como corrente de deslocamento a partir da análise da lei de Ampère-Maxwell.

A discussão completa e detalhada da lei de Ampère-Maxwell transposta para o Ensino Médio encontra-se no Anexo J desta dissertação.

5 Sondagens

5.1 Sequência didática desenvolvida

- **Questionários:** Com o propósito de verificar o nível de conhecimento básico de álgebra, funções e suas aplicações em física, foram propostos questionários, com perguntas introdutórias a respeito de funções, de aplicações na física e de conceitos.

- **Aula expositiva**: Foram apresentadas as definições, as propriedades e as aplicações de limite, de derivada e de integral em ressonância com o conhecimento prévio adquirido pelos alunos ao longo do Ensino Médio.

- **Resolução de exercícios**: Após a apresentação de cada tema, as listas de exercícios foram distribuídas e resolvidas inicialmente pelos alunos e, posteriormente, corrigidas e comentadas.

- **Teste**: Ao final dos dois primeiros módulos, foi aplicado o primeiro teste para verificação de aprendizagem.

5.2 Resultados obtidos a partir do questionário nº 1

As análises subsequentes referem-se ao questionário, respondido por 15 alunos/participantes, que consta no Anexo O deste trabalho.

Análise A

Questão 1: O potencial elétrico (V) criado por uma carga puntiforme (Q), a uma distância d da mesma é dado por: $V = \frac{kQ}{d}$, em que k é a constante eletrostática. Considerando Q > 0, faça o esboço do gráfico de V em função de d e diga o que acontece com o valor do potencial se a distância d for muito pequena ou muito grande.

Questão 2: Repita a questão anterior considerando Q < 0.

- 5 alunos/participantes (dentre os 15) acertaram os gráficos do potencial elétrico em função da distância para a carga Q>0 e Q<0e responderam corretamente o que acontece com o potencial se a distância for muito pequena ou muito grande.
- 3 alunos/participantes (dentre os 15) acertaram pelo menos o gráfico da carga Q>0 e responderam às perguntas de forma parcialmente correta.
- 5 alunos/participantes (dentre os 15) fizeram o gráfico de forma retilínea (não hiperbólico), mas responderam às perguntas de forma parcialmente correta.
- 2 alunos/participantes (dentre os 15) erraram os gráficos e as perguntas.

Conclusão: A maior parte dos alunos/participantes entende o que acontece com o potencial quando a distância tende a zero ou tende ao infinito. Cabe destacar que 10 (maioria) dos alunos/participantes apresentam o domínio do conteúdo em estudo, o que confirma a amostra de alunos/participantes interessados em participar e apresentam desenvoltura para com a área de exatas.

Questão 3: Qual é a diferença entre velocidade escalar média e velocidade escalar instantânea?

- 13 alunos/participantes (dentre os 15) responderam que a velocidade escalar média é a razão da distância percorrida pelo intervalo de tempo e a velocidade escalar instantânea é o valor da velocidade em um determinado instante, em um determinado momento.
- 1 aluno/participante (dentre os 15) respondeu que a velocidade escalar média é a razão da distância percorrida em um intervalo de tempo grande e a velocidade escalar instantânea é o valor da velocidade considerando um intervalo de tempo muito pequeno.
- 1 aluno/participante (dentre os 15) respondeu que a velocidade escalar instantânea é o limite da velocidade escalar média quando Δt tende a zero.

Conclusão: A maior parte (14 alunos/participantes) dos estudantes envolvidos entende perfeitamente os conceitos perguntados de acordo com o modelo ensinado durante as aulas regulares de física. Um aluno demonstrou o conhecimento da ideia de limite que, provavelmente, estudou de forma autônoma.

Questão 4: A partir da função horária da posição de um movimento uniformemente variado: $S = -2 + 2t + 3t^2$ (SI), determine a funções horárias da velocidade e da aceleração.

- 10 alunos/participantes (dentre os 15) acertaram a função horária da velocidade e da aceleração por comparação com as fórmulas já aprendidas.
- 3 alunos/participantes (dentre os 15) acertaram somente a aceleração por comparação.
- 2 alunos/participantes (dentre os 15) erraram as duas.

Conclusão: Nenhum participante deixou claro se usou derivação para chegar aos resultados. Alguns colocaram as funções horárias genéricas aprendidas em aulas regulares.

Questão 5: A partir da função horária da elongação de um MHS:

x = 0,2cos $(\pi + \frac{\pi}{2}t)$ (SI), determine as funções horárias da velocidade e aceleração.

- 11 alunos/participantes (dentre os 15) deixaram a questão em branco.
- 2 alunos/participantes (dentre os 15) usaram as regras de derivação para chegarem aos resultados e acertaram.
- 2 alunos/participantes (dentre os 15) tentaram lembrar-se das fórmulas genéricas, mas erraram.

Conclusão: As funções horárias do MHS são difíceis de memorizar, eventualmente, pelo pouco contato ou por sua complexidade.

Questão 6: O que você entende por inclinação de uma reta? Nos pontos de máximo e mínimo do gráfico de uma parábola da função dada por: $y = ax^2+bx+c$ em que a, b e c são constantes reais, qual é a inclinação da reta que tangencia esses pontos? Faça um esboço de cada caso.

- 8 alunos/participantes (dentre os 15) responderam corretamente.
- 7 alunos/participantes (dentre os 15) esboçaram os gráficos corretamente, mas erraram o conceito de inclinação da reta.

Conclusão: A maioria compreende os pontos de máximo e mínimo de uma função do 2º grau.

Questão 7: O que ocorre com o sentido do movimento e com a velocidade da partícula nos pontos de máximo e mínimo da função horária da posição $S = S_0 + v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$?

- 9 alunos/participantes (dentre os 15) responderam corretamente: a partícula inverte o sentido do movimento e a velocidade se anula.
- 6 alunos/participantes (dentre os 15) não responderam ou erraram a questão.

Conclusão: A maioria compreende que a velocidade é nula nos pontos de máximo e mínimo de um gráfico da posição em função do tempo.

Os estudantes investigados possuem ideias sedimentadas e bem elaboradas sobre os assuntos perguntados que, por sua vez, são importantes para o entendimento do Cálculo. De acordo com os resultados obtidos pelo questionário nº 1, foi pertinente introduzir as noções de limite, de derivada e de integral ao público investigado, pois demonstraram um conhecimento básico de funções aplicadas em física e em matemática.

5.3 Resultados obtidos a partir do teste sobre limites e derivadas

As análises subsequentes referem-se ao teste que consta no Anexo P deste trabalho respondido por 10 alunos/participantes.

Questão 1

(FGV-SP) (GENTIL, et al., 1997, p. 320) O limite $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$:

a) não existe. b) é 4. c) é 0. d) é 2. e) é $+\infty$.

Resultado: Todos os alunos/participantes acertaram.

Conclusão: Todos os 10 alunos/participantes aplicaram corretamente as propriedades de fatoração de um polinômio e limite de uma função polinomial.

Questão 2

(Fuvest-SP) (GENTIL, et al., 1997, p. 320) Sabe-se que $\lim_{x \to 0} \frac{1-cos^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{sen^2 x}{x^2} = 1$. Conclui-se que $\lim_{x \to 0} \frac{1-cos x}{x^2}$:

a) é $\frac{1}{2}$. b) é 0. c) é infinito. d) é indeterminado. e) não existe.

Resultado: 4 alunos/participantes (dentre os 10) acertaram; 2 tentaram resolver aplicando pelo menos uma propriedade de trigonometria ou limite; 4 deixaram em branco.

Conclusão: Houve dificuldade de interpretação da questão por se tratar de um limite envolvendo funções trigonométricas.

Questão 3

(PUC-SP) (GENTIL, et al., 1997, p. 320) O $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$ vale:

a) 0. b) 1. c) 2. d) 4. e) 6.

Resultados: 9 alunos/participantes (dentre os 10) acertaram; 1 aluno/participante errou a fatoração; 1 aluno/participante usou a regra de L'Hospital para remover rapidamente a indeterminação do limite.

Conclusão: Houve compreensão por parte dos alunos/participantes na resolução de limites de funções polinomiais.

Questão 4

(UFPA) (GENTIL, et al., 1997, p. 321) A função $F(x) = x^2 - x + 35$ é a derivada da função $f(x)$. Qual das expressões abaixo corresponde à função $f(x)$?

a) $2x - 1$

b) $x^3 - x^2 + 35$

c) $x^3 - x^2 + 35x + 4$

d) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 35x - 1$

e) $\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{3} + 35x + 1$

Resultados: 9 alunos/participantes (dentre os 10) acertaram; 1 errou.

Conclusão: A maioria conseguiu usar as técnicas de integração imediatas e perceberam que o cálculo pedido era de uma integral indefinida ou antiderivada. O aluno que errou o fez por confundir a antiderivação com a derivação.

Questão 5

(MACK-SP) (GENTIL, et al., 1997, p. 321) Se $f(x) = \frac{x^2}{a}$, então $f'(a)$ vale:

a) 2. b) 1. c) 0. d) a. e) 2a.

Resultado: 5 alunos/participantes (dentre os 10) acertaram; 5 erraram.

Conclusão: Os alunos/participantes que erraram aplicaram as regras de derivação de forma equivocada ou não derivaram a função inicial e calcularam o valor numérico da mesma, ou seja, houve falta de atenção ao comando da questão ou falha na interpretação do símbolo f'(a).

Questão 6

Encontre as funções horárias da velocidade e aceleração do MHS em que a elongação é dada por: $X(t) = A\cos(\phi_0 + \omega t)$

Resultado: 8 alunos/participantes (dentre os 10) acertaram; 2 erraram.

Conclusão: A maioria consegue obter as funções horárias do MHS por derivação, aplicando corretamente as derivadas imediatas e a regra da cadeia.

- **Correção do teste em sala e comentários**: Antes de iniciar o módulo 3, foi feita a devolução dos testes e sua correção comentada.

Para que fosse possível adentrar no assunto das equações de Maxwell, foi necessário verificar os conhecimentos prévios dos alunos/participantes acerca do eletromagnetismo básico. Para isso, foi feita uma sondagem, abordando questões relativas aos conceitos de eletrostática e de campos elétrico e magnético.

5.4 Resultados obtidos a partir do questionário nº 2

As análises subsequentes referem-se ao questionário que consta no Anexo Q deste trabalho respondido por um grupo de 14 alunos/participantes do projeto

Questão 1: O que você entende por campo elétrico?

- 10 alunos/participantes (dentre os 14) responderam corretamente. Consideraram o campo elétrico como sendo uma região do espaço em que uma carga de prova colocada na mesma fica sujeita a uma força elétrica.

Algumas respostas:

"Área de atuação de uma força. Exercem uma força que varia com a distância da carga geradora".

"É a região de atuação de uma força elétrica".

"Campo elétrico é um espaço determinado sob influência de uma carga elétrica".

" Campo elétrico é a região em que o objeto fica sujeito a uma força elétrica".

"Região na qual uma carga elétrica exerce influência sobre outras".

"Região do espaço em volta de uma carga em que ao se colocar uma carga de prova exerce uma força".

"Campo criado entre duas placas eletrizadas".

- 4 alunos/participantes (dentre os 14) confundiram campo com força.

Conclusão: A maioria dos alunos/participantes entende o conceito de campo elétrico.

Questão 2: Quais são as semelhanças e diferenças entre o campo elétrico e o campo gravitacional?

a) Semelhanças entre o campo elétrico e o campo gravitacional

- 10 alunos/participantes (dentre os 14) responderam:

"O campo elétrico é gerado por uma carga e o campo gravitacional pela massa".

"Dependem da distância da fonte geradora".

"O campo elétrico exerce forças de atração e repulsão".

"O campo gravitacional exerce somente força de atração".

"Ambos exercem força sem contato material".

"Variam com o inverso do quadrado da distância".

- Apresentaram as fórmulas:

$E = \frac{k_0.|Q|}{d^2}$: intensidade do campo elétrico criado por uma carga Q

$g = \frac{G.M}{d^2}$: intensidade do campo gravitacional criado por uma massa M

- 4 alunos/participantes (dentre os 14) erraram ou não responderam.

Conclusão: A maioria dos alunos/participantes do projeto possui os subsunçores adequados para entenderem as resoluções da lei de Gauss para campos elétricos e seus resultados.

Questão 3: O que você entende por linhas de força ou linhas de campo?

- 5 alunos/participantes (dentre os 14) responderam que as linhas de campo são representações geométricas de um campo de força. Reconhecem ou visualizam o campo.
- 7 alunos/participantes (dentre os 14) responderam que as linhas de campo mostram a região de atuação de um campo, intensidade direção e sentido.
- 2 alunos/participantes (dentre os 14) erraram a pergunta.

Conclusão: Todos os alunos/participantes entendem que as linhas de campo são formas de visualizar os campos de força. Dão informações a respeito da direção e da intensidade. Nas regiões em que as linhas estão mais concentradas, o campo é mais intenso.

Questão 4: O que você compreende por campo magnético? Quais são as fontes de campo magnético que você conhece?

- 2 alunos/participantes (dentre os 14) responderam que o campo magnético são linhas de campo que saem do polo norte e entram no polo sul.
- 8 alunos/participantes (dentre os 14) responderam que o campo magnético é uma região que pode gerar uma força magnética.
- 4 alunos/participantes (dentre os 14) responderam que o campo magnético é produzido em torno de uma substância ferromagnética devido ao ordenamento dos domínios magnéticos relacionados à rotação dos elétrons dos átomos da substância.
- Fontes de campo magnético: Ímãs naturais e artificiais, metais imantados, corrente elétrica.

Conclusão: A maioria dos alunos/participantes associa o campo magnético como o agente causador da força magnética e consideram como fontes de campo magnético: ímãs naturais e artificiais, metais imantados, corrente elétrica.

Questão 5: Quais são as expressões do fluxo magnético, do trabalho e da força magnética? Quais são semelhantes?

- 9 alunos/participantes (dentre os 14) erraram ou não lembraram.
- 4 alunos/participantes (dentre os 14) acertaram as expressões.
- 1 aluno/participante (dentre os 14) acertou as expressões e diferenças.

Conclusão: Uma grande porcentagem dos alunos/participantes não lembrou as expressões da força magnética e do fluxo magnético.

Questão 6: É possível estabelecer a ideia de fluxo do campo elétrico?

- 8 alunos/participantes (dentre os 14) responderam: Sim, é possível.
- 3 alunos/participantes (dentre os 14) responderam: Não é possível.
- 3 alunos/participantes (dentre os 14) não responderam.

Conclusão: A concepção de fluxo do campo elétrico é aceita pela maioria. Essa ideia será a base para o entendimento da Lei de Gauss para campos elétricos.

Questão 7: O que é densidade superficial de carga?

- 6 alunos/participantes (dentre os 14) não responderam ou erraram.
- 8 alunos/participantes (dentre os 14) responderam corretamente.

Conclusão: A densidade superficial de carga é dada por: $\sigma = \frac{Q}{A}$, cuja unidade é $\frac{Coulomb}{metro\ quadrado}$. A maioria conseguiu responder corretamente, fazendo analogias com densidade volumétrica de massa, $\frac{kg}{m^3}$, mais divulgada no Ensino Médio.

Questão 8: Qual é a expressão da capacitância de um capacitor a vácuo de área das placas A, e d, a distância entre elas?

- 6 alunos/participantes (dentre os 14) não lembraram ou erraram.
- 6 alunos/participantes (dentre os 14) acertaram.
- 2 alunos/participantes (dentre os 14) sabiam a definição de capacitância, mas não lembravam a capacitância do capacitor plano.

Conclusão: A capacitância do capacitor plano é dada por: $C = \frac{\varepsilon_0 . A}{d}$. Normalmente, essa expressão é apresentada ao Ensino Médio a partir das expressões do campo elétrico entre as placas infinitas, $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$,$E = \frac{U}{d}$ e da definição de capacitância, $C = \frac{Q}{U}$. A expressão, $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ é apresentada sem demonstração. Tal expressão é facilmente obtida utilizando a lei de Gauss para campos elétricos.

Questão 9: Qual é a expressão do campo elétrico uniforme entre as placas de um capacitor plano carregado?

- 13 alunos/participantes (dentre os 14) não lembraram ou erraram.
- 1 aluno/participante (dentre os 14) acertou.

Conclusão: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Expressão pouco divulgada no Ensino Médio, apesar de constar no estudo de capacitores. Isso explica a grande porcentagem de alunos/participantes que não sabiam ou não lembravam.

Questão 10: Qual é a expressão da intensidade do campo elétrico criado por uma carga puntiforme no vácuo?

- 8 alunos/participantes (dentre os 14) não lembraram ou erraram.
- 6 alunos/participantes (dentre os 14) acertaram.

Conclusão: A intensidade do campo elétrico criado por uma carga puntiforme, $E = \frac{k_0.|Q|}{d^2}$, é obtida no Ensino Médio a partir da lei de Coulomb. Esse assunto é visto logo nas primeiras aulas de eletrostática. Os estudantes que erraram, na maioria, ficaram em dúvida se a intensidade do campo elétrico é inversamente proporcional à distância ou ao quadrado da distância. Alguns confundiram as expressões da intensidade do campo elétrico com a da força elétrica:

$$F = \frac{k_0.|q|.|Q|}{d^2}.$$

5.5 Considerações gerais a respeito da segunda sondagem, de acordo com a teoria de aprendizagem de Ausubel

O objetivo desses quatro primeiros módulos, referentes à introdução ao Cálculo e às noções de produto escalar e produto vetorial, foi de apresentá-los como organizadores prévios, de acordo com a teoria de Ausubel, para o entendimento do assunto principal que será apresentado em seguida: as equações de Maxwell na forma integral e aplicações em nível médio.

Ao término dos três primeiros módulos e antes de iniciar o estudo das equações de Maxwell, foi proposto um segundo questionário com a intenção de verificar quais foram as ideias retidas no cognitivo de cada indivíduo em relação aos conceitos essenciais de eletromagnetismo aprendidos durante o 2º ano e o primeiro semestre do 3º ano do Ensino Médio. Para se efetivar a aprendizagem significativa de novos objetos de estudo, algumas ideias-âncora devem existir no seu conjunto de saberes. Esses conceitos são mais gerais e inclusivos, servindo como alicerces para os próximos conceitos, mais específicos e elaborados.

O objetivo do questionário nº 2 foi verificar a qualidade dos subsunçores referentes aos conceitos de eletromagnetismo básico, adquiridos pelos estudantes participantes do projeto ao longo do 2º ano e primeiro semestre do 3º ano do Ensino Médio, para que possam, então, reter novos conceitos ou aprimorarem os já adquiridos.

Após a análise das respostas do 2º questionário, verifica-se que existem conceitos de eletromagnetismo, mais ou menos elaborados, na estrutura cognitiva dos participantes da 2ª sondagem. Esses conceitos, claros ou até mesmo intuitivos, servirão como subsunçores para o entendimento do novo ponto de vista da teoria eletromagnética apresentada nas equações de Maxwell na forma integral. Após a introdução ao Cálculo, feita nos dois módulos anteriores, a resolução das integrais será compreendida pelos aprendizes, pois somente os casos mais gerais serão discutidos nesse momento.

As equações de Maxwell serão apresentadas como conceitos mais gerais e inclusivos para a obtenção de expressões já desenvolvidas no curso de eletromagnetismo, ministrado durante o período letivo dos alunos que foi o 2º ano do Ensino Médio e o primeiro semestre do 3º ano como revisão.

As expressões dos campos elétricos e magnéticos, a indução eletromagnética e a apresentação da corrente de deslocamento no processo de carga do capacitor plano serão os pontos primordiais do referido curso. Ao término de cada apresentação, será confeccionado um mapa conceitual para organizar os conceitos novos com os já aprendidos.

6 Entrevistas

Para verificar o grau de satisfação e o interesse dos professores e dos estudantes com relação ao projeto, foi proposta uma entrevista após a conclusão dos dois primeiros módulos referentes à introdução ao Cálculo diferencial e integral. As perguntas e respostas foram gravadas em uma mídia apropriada e transcritas a seguir.

6.1 Entrevistas com alunos do Ensino Médio

- Pergunta 01: Aluno A, quando você começou a estudar Cálculo? Por quê? Qual foi o seu interesse?

- "*Eu comecei a estudar Cálculo por volta de abril do ano passado (2015), no início do segundo ano. No começo, me interessei por conta da Olimpíada de Física. Quando chegamos às etapas mais avançadas, se não soubermos Cálculo, não avançamos. Então, minha intenção era primeiramente aprender o Cálculo para ter a base e poder partir para a física mais avançada. Depois eu acabei gostando e comecei a aprender, porque eu acho mais legal que a matéria do Ensino Médio*".

- Pergunta 02: E você continua estudando por fora, além da participação no projeto?

- "*Sim. Eu tenho livros de Cálculo, então fico resolvendo os exercícios por fora. Na internet também tem muita videoaula de Cálculo, então com o livro e com a internet podemos aprender numa boa*".

- Pergunta 03: Alunos B e C, quando vocês começaram a estudar Cálculo? Por quê? Quais foram as suas motivações?

- Aluno B: "*Eu comecei a estudar no início desse ano (2016), no terceiro ano do Ensino Médio, para facilitar quando eu fosse fazer as questões do vestibular do ITA, que é o meu foco. Eu tenho os professores que me acompanham, que me dão as dicas para fazer as provas de lá e eles me disseram que limite, derivada e integral ajudam demais para ganhar tempo. Por isso eu comecei a estudar e continuo até hoje. É uma matéria muito interessante*".

- Aluno C: "*Eu comecei em agosto do ano passado (2015), na Nova Zelândia, quando eu fiz intercâmbio. Na escola, no segundo ano do Ensino Médio, eles ensinavam o Cálculo nas aulas de matemática*".

- Pergunta 04: O que vocês consideram que seja base para poder entender essa parte introdutória do Cálculo?

- Aluno B: "*É importante ter uma noção de função, de polinômio e também das funções trigonométricas, funções polinomiais. Saber um pouco de geometria analítica também é relevante*".

- Aluno C: "*É preciso ter a mente muito aberta para entender algumas noções, porque, na matemática do Ensino Médio, nós ficamos muito presos aos números. Quando chegamos ao Cálculo, temos que abrir a mente para termos ideia de infinito, de mais infinito e menos infinito. Muita gente tem dificuldade nisso. No Cálculo, nós não trabalhamos com os números em si, mas sim com uma ideia do que seria o valor*".

- Pergunta 05: Na Física, qual a importância do Cálculo? Vocês conseguem perceber a sua influência?

- Aluno A: "*Sim, principalmente na parte de Movimento Harmônico do Ensino Médio, o Cálculo facilita muito, porque das três fórmulas que temos para decorar, temos que nos lembrar somente de uma, já que as outras podemos derivar. E também para o vestibular do ITA e outros, para conseguirmos resolver as questões, ou sabemos a matéria de Cálculo, ou não temos a bagagem para entender a Física que a prova pede. Então facilita a resolução dos problemas*".

- Pergunta 06: O que vocês estão achando do projeto desenvolvido, dessas primeiras aulas de Cálculo?

- Aluno A: "*Está muito bom, principalmente para quem não tinha noção nenhuma, porque normalmente as pessoas não estudam essa matéria, a não ser que queiram algo a mais. Aprendendo na aula, como estamos fazendo agora, é uma oportunidade para que as outras pessoas também aprendam e entendam que é possível facilitar muita coisa mais básica se aprofundarem na matéria. Para nós, que já estávamos aprendendo o Cálculo por fora, também é bom, porque reforçamos o aprendizado, já que no Ensino Superior teremos essa disciplina*".

- Aluno B: "*Achei bem correspondente ao que eu já tinha estudado, e bom para sanar algumas dúvidas que surgiram estudando sozinho. Aqui, podemos preencher as lacunas do estudo autônomo*".

- Aluno C: "*Eu também considero o projeto bom para incentivar um aprendizado melhor, para facilitar os cálculos. Para mim, que aprendi o básico no intercâmbio, está facilitando ainda mais, porque estou aprendendo bastante coisa nova*".

- Aluno B: "*É importante ensinar isso frequentemente no Ensino Médio, principalmente para evitar ficarmos decorando fórmulas, porque, quando estudamos visando passar no vestibular, quanto mais eficientes pudermos ser na prova, melhor. E, tendo a noção de Cálculo, seremos muito mais eficientes para fazer questões de matemática e de física, principalmente*".

6.2 Entrevista com professores de matemática

- Pergunta 01: Professor X, quais são os pré-requisitos necessários para que um estudante de Ensino Médio consiga aprender os conceitos de limite, derivada e integral?

- Resposta do professor X: "*Esses conceitos são fundamentados na matemática básica. Então, para aprender limite, que é pré-requisito da derivada que, por sua vez, é pré-requisito das integrais, o aluno deve saber toda a parte da matemática básica, tais como fatoração, radiciação, potenciação. Caso contrário, ele terá sérias dificuldades em levar adiante o desenvolvimento desses outros assuntos*".

- Pergunta 02: Você acha que os nossos alunos aqui do 3º ano possuem essa bagagem, na questão dos pré-requisitos para entender os conceitos iniciais de limite, derivada e integral?

- Resposta do professor X: "*Eu acredito que sim, uma vez que nós trabalhamos desde as séries iniciais, no Fundamental I, no Fundamental II e até mesmo no 1º ano do Ensino Médio, nós focamos bastante nesses assuntos. O aluno experimenta isso desde as séries iniciais e nós estamos sempre recordando, aplicando e revisando esses conceitos com nossos alunos. Então, creio que os alunos do 3º ano têm plenas condições de desenvolver todos esses assuntos, uma vez que eles têm na bagagem todo o desenvolvimento dessas séries iniciais*".

- Pergunta 03: O senhor é professor de Ensino Superior também. No primeiro período dos cursos de exatas, quais as dificuldades enfrentadas pelos alunos ao iniciarem o estudo do Cálculo Diferencial e Integral? Quais são as principais dificuldades que você observa?

- Resposta do professor X: "*Na universidade em que eu trabalho nos cursos de Engenharia, na verdade, nós não iniciamos com o Cálculo I de fato, e sim, com o pré-cálculo, ou seja, nós temos que fazer tudo novamente, uma vez que os alunos não têm essas habilidades do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Estou dizendo que nós costumamos recordar, desde as propriedades lá do Ensino Fundamental com esses alunos, para que, posteriormente, nós consigamos entrar nas definições de limites, derivadas e integrais. Portanto, hoje, na maioria das universidades, quase que numa totalidade, o primeiro passo é dar uma base para o aluno desses fundamentos da matemática para que ele tenha sucesso posteriormente nesses próximos conteúdos, no caso, limite, derivada e integral*".

- Pergunta 04: Você considera as noções de Cálculo ensinadas no Ensino Médio como uma ferramenta auxiliar para resolver problemas de exatas na prova do ENEM? Em que assuntos elas podem ajudar?

- Resposta do professor X: "*De uma forma ou de outra, essas noções de Cálculo trazem uma contribuição de grande importância, não só para o ENEM, mas para o engrandecimento do raciocínio de cada aluno, não apenas na área de exatas, como física, química e matemática, que estão interligadas, mas também na interpretação, no desenvolvimento do aluno para qualquer tipo de prova, qualquer tipo de exame que ele for fazer, acho que o aluno só tem a ganhar no desenvolvimento do raciocínio lógico, matemático, e na interpretação de problemas, de aplicações e tudo mais. Então, eu não consigo não ver a importância do desenvolvimento desses assuntos para o aluno de qualquer série, principalmente para aqueles que pretendem fazer uma prova de ENEM ou de vestibular*".

- Pergunta 05: Quando eu falo do envolvimento com outras áreas, você já deixou claro que limite, derivada e integral auxiliam na compreensão da física, da química, da estatística?

- Resposta do professor X: "*Com certeza. Como eu disse, esses fundamentos deveriam ser colocados no 3º ano do Ensino Médio. Porque, para o aluno que vai fazer uma prova do ENEM, de vestibular ou qualquer exame de admissão, com certeza facilita para a resolução de problemas na área da física, da química, da matemática, e além de tudo, desenvolve muito mais o raciocínio do aluno, ele vai ter muito mais facilidade no entendimento da resolução de problemas, no desenvolvimento, seja na área de matemática, de humanas, das biológicas. Eu acho que o aluno só tem a ganhar e, de uma forma geral, já é comprovado que se o aluno tem um raciocínio lógico, matemático, ele tem maior facilidade em outras áreas também.*

Eu gostaria de ressaltar que essa aplicação que o Paulo está fazendo aqui é de suma importância e eu, particularmente, penso que as escolas deveriam direcionar isso para aqueles alunos que tiverem maior interesse no desenvolvimento desse projeto. É de suma importância e gostaria de parabenizar o Paulo por essa iniciativa. É por aí mesmo, com esse desenvolvimento, os alunos só têm a ganhar, e essas aplicações vão facilitar posteriormente para esses alunos".

- Pergunta 06: Professor Y, qual a sua opinião sobre o ensino de limite, derivada e integral a partir do 3º ano do Ensino Médio?

- Resposta do professor Y: "*Na área de geometria em que eu venho trabalhando com o Ensino Médio, essa matéria pode ser útil na demonstração de uma área de região circular, resolvendo com o auxílio da integral, utilizando as equações de uma circunferência para determinar uma área. E, mesmo na geometria espacial, posso utilizar a integral para determinar o cálculo de volume de uma esfera a partir de algum sólido de rotação, por exemplo. Então, dentro da geometria, são essas as aplicações, a demonstração de algumas fórmulas de área e fórmulas de volume por derivada e por integral*".

- Pergunta 07: Os alunos manifestaram interesse em aprender esse assunto? Você percebeu que determinados grupos de alunos se interessaram em aprender esse assunto? Eles te procuraram para aprofundar sobre isso?

- Resposta do professor Y: "*Procuraram e estavam questionando mais interesse em até determinar áreas de figuras que não sejam conhecidas do dia a dia do Ensino Médio. Até algumas outras figuras irregulares, como equacionar, como chegar numa equação matemática de um contorno qualquer, para determinar a área de uma fórmula que eles não conhecem. Eles sabem que conseguem determinar a área e o volume de qualquer tipo de superfície*".

- Pergunta 08: Você acha que os nossos alunos do 3º ano estão preparados para adquirir o conhecimento, que seja introdutório, desses assuntos?

- Resposta do professor Y: "*No formato introdutório sim, porque eles têm um amplo conhecimento, uma base boa na parte de funções, de geometria analítica, que dá a condição de eles determinarem as equações necessárias. É claro que deve ser restrito ainda ao "mundo" do Ensino Médio, porque existem alguns tipos de cubo, algumas funções que eles ainda não conhecem, com mais variáveis. Então, no âmbito de Ensino Médio e, baseado no que eles já trabalharam, eles têm condição suficiente de estar resolvendo qualquer problema, e eles têm muito interesse*".

- Pergunta 09: Você tem mais alguma opinião a respeito do projeto?

- Resposta do professor Y: "*Quero parabenizá-lo pelo trabalho, que foi uma fortuna nas mãos dos alunos. Muitos deles ficaram muito interessados, me procuraram, me pediram algum livro de geometria analítica de curso superior. Já doei livros de Cálculo A, Cálculo B, tudo isso eu já estive repassando para eles. Então, eles estão muito incentivados a procurar um ensino mais avançado da matemática, com essas aulas de limite, derivada e integral, com esse pré-cálculo e Cálculo 1 que eles começaram a ter uma noção*".

6.3 Entrevista com alunos ao final do projeto

- Pergunta 01: Aluno D, agora que nós encerramos, eu gostaria de saber qual é a sua opinião: antes do projeto, como você percebia o eletromagnetismo? E agora, houve um acréscimo? O que você entendeu, qual foi a contribuição do projeto para o seu aprendizado do eletromagnetismo?

- Aluno D: "*Antes do projeto, eu tinha uma visão muito reduzida, muito confinada do que era o eletromagnetismo. Depois de ter essas noções com o Cálculo, com técnicas mais aprofundadas, eu realmente senti que houve uma ampliação do entendimento. Agora eu posso aplicar o conhecimento com maior propriedade, com maior facilidade*".

- Pergunta 02: Você já estudava o Cálculo antes do projeto ou foi a primeira vez?

- Aluno D: "*Antes eu tinha umas noções básicas, não muito organizadas do Cálculo. Eu já havia assistido algumas vídeo-aulas, lido alguns textos com umas compreensões iniciais, mas agora sim, depois das aulas, depois desse projeto, eu entendo melhor o Cálculo*".

- Pergunta 03: Sobre as Equações de Maxwell, você conseguiu fazer um paralelo com as leis dadas no Ensino Médio durante o curso de eletromagnetismo? Você conseguiu percebê-las nas apostilas, nos livros do Ensino Médio?

- Aluno D: "*Sim, consegui! Consegui entender a demonstração das fórmulas e a fórmula final, que usamos no Ensino Médio*".

- Pergunta 04: Alunos E, F e G: Boa tarde. Eu gostaria de saber qual a opinião de vocês agora que nós finalizamos o projeto, do antes e do depois com respeito ao Cálculo e com respeito às leis do eletromagnetismo. Como vocês as percebem agora e como vocês as percebiam antes? Houve um progresso, houve um reforço? Vocês podem dar a sua opinião a respeito do projeto e me dizer se ele enriqueceu ou não o seu conhecimento?

- Aluno E: "*Na parte de Cálculo, eu achei bem interessante, porque ajudou a desmistificar essa disciplina. Normalmente, antes de começar a estudar essa matéria na faculdade, a noção que temos é a de que o Cálculo parece ser uma "coisa de outro mundo", principalmente porque vemos pessoas falando que é muito difícil. Mas, tendo pelo menos uma noção básica, já percebemos que não é bem assim, que é possível de entender. Não é tão impossível assim! E, com relação às Leis de Maxwell, no eletromagnetismo, é interessante sabermos a origem das leis que usamos no Ensino Médio, campo magnético no solenoide, nas bobinas e tudo mais. Eu achei interessantíssimo saber de onde surgiu tudo aquilo que aplicamos no Ensino Médio, então acrescenta conhecimento, porque não fica automático, uma teoria que é apenas apresentada e temos simplesmente que aceitá-la*".

- Aluno F: "*Sobre a parte do Cálculo, eu concordo com o Aluno E. Eu entendo que não aprendi totalmente o Cálculo ainda, que ainda tem muita coisa para aprender, mas foi possível ter uma boa noção do que é essa disciplina. Já sobre a parte da física, foi muito bom, reforçou muita coisa. Aprendi coisas novas também, sobretudo com as últimas aulas, em que vimos mais aplicações práticas, que eu acho muito interessante. Então, foi muito bom, o projeto nos acrescentou bastante conhecimento*".

- Aluno G: "*Para mim, a parte de Cálculo foi muito boa, porque veio reforçando tudo aquilo que eu já estava estudando antes, sanando as minhas dúvidas. Foi muito bom mesmo. E, com relação ao eletromagnetismo, foi interessante porque, uma coisa é decorarmos a fórmula, e outra é entendermos todo o processo que está acontecendo para podermos aplicar isso em uma prova. E, quando entendemos aquele risco que corremos de "dar um branco" na hora da prova, é muito menos provável. Então, para mim, foi excelente nesse ponto também*".

-Pergunta 05: Conseguiram diferenciar o que é o produto escalar do que é o produto vetorial?

- Alunos: "*Sim. Deu para separar tranquilamente!*"

- Pergunta 06: E vocês acharam que o tempo do projeto foi suficiente? Qual a sua opinião com relação a isso?

- Aluno F: "*Às vezes só seria mais interessante ter mais listas de exercícios para reforçar. Fora isso, o tempo foi tranquilo*".

- Aluno G: "*Ou passar exercícios para o futuro, talvez para continuarmos fazendo*".

- Aluno E: "*Para reforçar, porque se não pegarmos e fizermos de novo, nos esquecemos*".

- Aluno G: "*Toda matéria é assim. Precisamos continuar com ela, senão perdemos um pouco do que já sabemos*".

- Aluno E: "*Eu acho que a parte que você explicou no quadro, fazendo passo a passo, provando com a gente, tornou a compreensão mais fácil do que a parte que você nos deu pronta nos slides. Então, quem sabe para as próximas não ficaria mais fácil fazendo daquela forma? Quando falamos, por exemplo, das gaussianas, que você fez todas no quadro conosco, provando toda a equação até chegar ao final, se eu precisar fazer o mesmo aqui, agora, eu sei*".

7 Considerações finais

Um fato que favoreceu a realização desse projeto no ambiente escolar escolhido foi a disposição de um grupo significativo de alunos interessados em desenvolvê-lo, concomitante com uma equipe de professores de Matemática apoiando. A maioria dos participantes já tinha o hábito de estudar temas mais avançados regularmente e de forma autônoma, paralelos com a revisão do conteúdo do Ensino Médio desenvolvida no último ano do referido curso: *práxis* evidenciada nas entrevistas. Essa disposição dos alunos participantes em aprender novos conceitos e a interdisciplinaridade da Física com a Matemática proporcionou o ambiente perfeito para a apresentação do Cálculo e sua aplicação no entendimento das equações de Maxwell na forma integral.

A dinâmica educacional desenvolvida na instituição, onde o projeto se desenvolveu, foi determinante nessa práxis. Terminando todo o conteúdo do Ensino Médio nos dois primeiros anos, o terceiro ano permite uma revisão aprofundada dos saberes e entusiasma o aluno em conhecer novos conteúdos.

Devido ao elevado grau de satisfação da comunidade escolar pelo projeto, recebi a proposta de apresentá-lo novamente em anos posteriores, transformando-o em uma oficina, em que terei a oportunidade de melhorá-lo a cada atuação.

Antecipando saberes que antes eram engessados aos cursos superiores, de forma comedida e responsável, pode-se melhorar as performances dos futuros ingressantes em suas disciplinas específicas nos cursos de exatas, adiantando noções de Cálculo Diferencial e Integral.

O legado do projeto deixado para os alunos participantes é uma nova forma de entender o eletromagnetismo a partir das equações de Maxwell, em consonância com a teoria previamente estudada, ou seja, uma extensão, modificação ou aprimoramento de um conhecimento já adquirido.

À medida que o intelecto se aprimora e novas informações são incorporadas ao seu construto cognitivo, os estudantes participantes do projeto efetivarão a aprendizagem significativa, que não se encerra ao término de uma explanação. A aquisição do conhecimento progride quando novos materiais potencialmente significativos são apresentados aos educandos.

8 Conclusão

A partir dos dados e análises apresentados, foi possível verificar que alguns conteúdos de Matemática e de Física presentes em cursos superiores podem ser transpostos para o Ensino Médio, desde que exista o interesse da instituição de ensino e de alunos bem compromissados e ávidos por conhecimento diferenciado, que exige um grau de maturidade intelectual especifico para seu entendimento, mas que, por outro lado, conduz o aprendiz a um processo de aprendizagem significativa. Embora certos conceitos aqui asseridos já estão contidos em suas grades curriculares, a amplificação dos mesmos e a aquisição de novos só enriquecem a práxis educacional no tocante em saber transmitir, por parte do educador, e saber aprender, por parte dos educandos, sem, contudo, esquecer-se de Paulo Freire, o qual afirma que o educador também aprende.

Considerando a aprendizagem significativa como o plano de fundo da didática desempenhada, é possível apresentar novos conceitos e relacioná-los com ideias já conhecidas, desde que haja predisposição das partes envolvidas. A introdução ao Cálculo diferencial e integral e sua aplicação nas resoluções das equações de Maxwell modificaram o pensamento cognitivo dos alunos participantes do projeto que, devido ao elevado grau de interesse por conhecer esses assuntos e suas bases teóricas bem fundamentadas, aproveitaram ao máximo cada aula demonstrada pelas listas de presença (com uma quantidade mínima de ausentes) e pelo envolvimento observado durante as aulas do minicurso.

A prática desenvolvida no presente trabalho, por meio de aulas expositivas, questionários e discussões, testes, exercícios e simulações computacionais tornou o processo atraente e similar ao desenvolvido em aulas regulares. A dinâmica proposta pela aprendizagem significativa, que considera como pontapé inicial aquilo que o aprendiz já sabe, possibilitou a elaboração de um material potencialmente significativo e de leitura menos rebuscada, não comprometendo, no entanto, a teoria.

Os indicadores de mudança no modo de pensar e de agir dos alunos envolvidos no referido trabalho foram observados imediatamente após o término do projeto. Os novos conceitos incorporados à mente cognitiva dos aprendizes tornaram–se facilitadores na resolução de problemas mais complexos e o entendimento de fórmulas antes não demonstradas, tanto de Física, como de Matemática.

Dessa forma, a introdução ao Cálculo diferencial e integral e sua aplicação nas resoluções das equações de Maxwell na forma integral no Ensino Médio possibilitou a abertura de uma janela de conhecimento que não se fecha ao término da *práxis*, mas que permite um avanço contínuo dos temas ao longo de suas carreiras acadêmicas. A maioria dos estudantes envolvidos obteve notas elevadas no ENEM e ingressaram facilmente em cursos de engenharias e de exatas. Muitos pleitearam aprimorar os seus estudos em universidades no exterior.

Apesar de ser comum, no contexto escolar, ações que atendem prioritariamente estudantes com dificuldades de aprendizagem, não se pode perder de vista aqueles considerados com altas habilidades. Em geral, estes são deixados de lado em detrimento daqueles. A perpetração desse modelo educacional inibe a potencialização ao desenvolvimento de novos talentos que decorrem de diferentes perfis de estudantes; futuros profissionais.

Ações, como as apresentadas nesta dissertação, apontam para esses alunos que a educação liberta e avulta seu pensar; desperta vontades de não estacionar seus saberes. As implicações futuras dessa atividade extra–curricular e direcionada são: desmistificar que essas matérias são impossíveis de aprender; enviar alunos para os cursos superiores de engenharias e afins com um diferencial de já terem tido contato com a matéria, mesmo que em caráter introdutório; minimizar possíveis dificuldades nos primeiros períodos do Ensino Superior; mostrar para os alunos que o caminho da educação não deve haver fragmentação: trata-se de uma continuidade com outras exigências de aprendizagem.

Referências

ANASTASIOU, Léa das Graças C. Ensinar, aprender, apreender e processos de ensinagem. In ANASTASIOU, Léa das Graças C. e ALVES, Leonir Pessate. **Processos de ensinagem na universidade**. Joinville, SC: Editora Univille, 2003.

ARAGÃO, R. M. R. **Teoria da Aprendizagem significativa de David P. Ausubel**: sistematização dos aspectos teóricos fundamentais. 1976. 101 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1976.

BORGES; N. **Voltando ao segundo fenômeno eletromagnético**. 2011. Disponível em: <http://osfundamentosdafisica.blogspot.com.br/2011/11/cursos-do-blog-eletricidade.html>. Acesso em: 07 nov. 2016.

BRASIL. (2000). **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio** (Parte I - Bases Legais; Parte II - Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; Parte IV - Ciências Humanas e suas Tecnologias). Brasília: Ministério da Educação. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 28 abr. 2016.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **Lições de Física**. Tradução de Adriana Válio Roque da Silva. Porto Alegre: Bookman, 2008. v. 1.

FLEISCH, D.**A student's guide to Maxwell's equations**.2008. Disponível em: <www.cambridge.org/9780521877619>. Acesso em: 20 maio 2016.

GENTIL, N.; SANTOS, C. A. M.; GRECO, A. C.; FILHO, A. B.; GRECO, S.E. **Matemática para o 2º grau**. 6. ed. São Paulo: Ática, 1997. v. 3.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 6. ed. Atual Editora, 2005. v. 8.

MOREIRA, M. A. **Ensino e Aprendizagem**: enfoques teóricos. 3 ed. São Paulo: Editora Moraes, 1986.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. **Aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Centauro, 2011.

PEÑA, A. O.;BALLESTEROS, A.; CUEVAS, C.; GIRALDO, L.; MARTÍN, I.; MOLINA, A.; RODRÍGUEZ, A.; VÉLEZ, U. **Mapas Conceituais**: Uma técnica para prender. Tradução de Maria José Rosado-Nunes e Thiago Gambi. São Paulo: Edições Loyola, 2005.

ROCHA, J. F. M. O conceito de "campo" em sala de aula - uma abordagem histórico-conceitual. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 31, n. 1, abr. 2009. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/rbef/v31n1/v31n1a13.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2017.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria Analítica**. 2 ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

TAVARES, R.; ANDRADE, L.; RODRIGUES, G. L.; SANTOS, J. N.; ANDRADE, M. **Fluxo e Lei de Gauss**. Núcleo de Construção de Objetos de Aprendizagem - UFPB. Disponível em: <http://www.fisica.ufpb.br/~Romero/objetosaprendizagem/Rived/25fGauss/index.html>. Acesso em: 13 maio 2016.

Anexo A - Termo de Consentimento para Participação no Projeto de Pesquisa

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (PROFESSOR E APOIO PEDAGÓGICO)

Dados de identificação

Título do Projeto: **Elaboração de um guia educacional sobre as equações de Maxwell e aplicações. Noções de limite, derivada e integral em nível médio.**

Pesquisador(a) Responsável: Prof. Paulo Roberto Ferreira, Prof. Paulo Alexandre de Castro

Instituição a que pertence o Pesquisador Responsável: **Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão**

Telefones para contato: **(34) 993350475; (64) 8116-1150**

Nome do voluntário:____

Idade: _____________ anos R.G. ___________________________

O Sr.(ª) está sendo convidado(a) a participar do projeto de pesquisa "**Elaboração de um guia educacional sobre as equações de Maxwell e aplicações. Noções de limite, derivada e integral em nível médio**", de responsabilidade dos pesquisadores **Paulo Alexandre de Castro, Paulo Roberto Ferreira**.

A pesquisa é justificada pela necessidade de verificar o nível de compreensão leitora dos alunos das escolas municipais, estaduais e particulares da cidade de Uberlândia-MG. O objetivo da pesquisa é mensurar e quantificar o nível de compreensão leitora com vistas a elaborar ações educativas na recuperação e melhoria do desempenho escolar dos alunos envolvidos na pesquisa.

Para a participação das atividades, dessa pesquisa, além da participação das aulas tradicionais, os voluntários deverão responder questionários impressos em papel com uso de caneta esferográfica, de preferência preta ou azul, ou lápis preto. Nem todas as pessoas se sentem à vontade quando são entrevistadas ou sabem que estão sendo realizados registros seus por escrito, em áudio ou em vídeo, além do fato de que responder um questionário toma tempo do participante. Logo, desconfortos podem advir de tais situações, as quais estão previstas no trabalho de pesquisa. A pesquisa poderá beneficiar a comunidade escolar em virtude dos conhecimentos que serão gerados sobre educação pela pesquisa, e que favorecerão tanto o processo de ensino como o de aprendizagem. Em caso de dúvidas sobre os procedimentos, riscos e benefícios, assim como de outros assuntos relacionados à pesquisa ou com o tratamento que irá receber, o voluntário deverá procurar o pesquisador para sanar as suas dúvidas, na própria escola, ou pelo telefone **(34) 8825-0742; (64) 8116-1150.**

Esta participação é **VOLUNTÁRIA** e este consentimento poderá ser tirado a qualquer tempo, sem quaisquer prejuízos ao voluntário.

Fica garantido, por este termo, a confidencialidade das informações geradas e a privacidade do voluntário, pois a referência ao mesmo será feita por meio de códigos numéricos ou nome fictício criado pelo pesquisador.

O voluntário **NÃO** será obrigado a responder qualquer questão ou dar qualquer entrevista que não seja de sua livre vontade. Este documento deverá ser assinado em duas vias, sendo uma para o pesquisador e outra para o voluntário.

Eu, ____, RG nº ____________________ declaro ter sido informado e concordo em participar, como voluntário, do projeto de pesquisa acima descrito.

Uberlândia- MG, 26 de abril de 2016.

_______________________________________ (Nome e assinatura do aluno ou seu responsável legal)

_______________________________________ (Nome e assinatura do responsável por obter o consentimento)

_______________________________________ Testemunha 1

_______________________________________ Testemunha 2

Apêndice B - Slides utilizados para ministrar a aula 1, referente à introdução ao estudo dos limites e das derivadas.

Introdução ao estudo de Limites e Derivadas

ENSINO MÉDIO

Noção Intuitiva de Limite

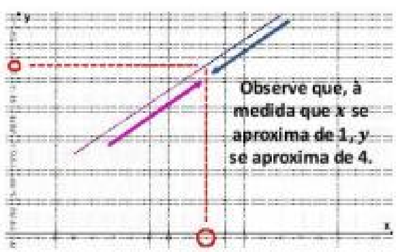
Considere a função $f(x) = 3x + 1$.

Calculemos o valor de y, $f(x) = y$, tomando valores de x que se aproximem de 1, pela sua direita ($x > 1$), e pela esquerda ($x < 1$).

x	$y = 3x + 1$
1,4	5,2
1,3	4,9
1,1	4,3
1,05	4,15
1,02	4,06
1,01	4,03

x	$y = 3x + 1$
0,3	1,9
0,6	2,8
0,7	3,1
0,9	3,7
0,98	3,94
0,99	3,97

Façamos o gráfico y em função de x utilizando os valores das tabelas:



À medida que x se aproxima de 1, y se aproxima de 4.

↓

Quando x tende para 1 ($x \to 1$), y tende para 4 ($y \to 4$).

Assim: $\boxed{\lim_{x \to 1}(3x + 1) = 4}$

Então, quando x tende para 1, y tende para 4 e o limite da função é 4.

⚠ Forma geral:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b}$$

Propriedades dos limites

1ª) $\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

2ª) $\lim\ [f(x).g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \, . \lim_{x \to a} g(x)$

Apêndice B - Slides utilizados para ministrar a aula 1, referente à introdução ao estudo dos limites e das derivadas.

Propriedades dos limites

3ª) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$

4ª) $\lim\limits_{x\to a}f(x)^n=(\lim\limits_{x\to a}f(x))^n,\ n\in\mathbb{N}^*$

Propriedades dos limites

5ª) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a}f(x)},\ n\in\mathbb{N}^*$ e $f(x)\geq 0.$

(Se $f(x)\leq 0$, n é ímpar)

6ª) $\lim\limits_{x\to a}[\ln f(x)]=\ln[\lim\limits_{x\to a}f(x)]$, se $\lim\limits_{x\to a}f(x)>0$

Propriedades dos limites

7ª) $\lim\limits_{x\to a}sen\big(f(x)\big)=sen(\lim\limits_{x\to a}f(x))$

8ª) $\lim\limits_{x\to a}e^{f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$

Limite de uma função polinomial

Uma das consequências das propriedades é a regra para obter o limite de uma função polinomial.

Teorema:

O limite de uma função polinomial

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

$a_i\in\mathbb{R}$, para x tendendo para a, é igual ao valor numérico de $f(x)$ para $x=a$.

Limite envolvendo o infinito

$x\to\infty$ (x tende para infinito)

x assume valores <u>superiores</u> a qualquer número real.

$x\to-\infty$ (x tende para menos infinito)

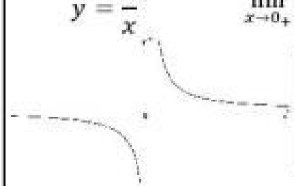
x assume valores <u>menores</u> que qualquer número real.

Exemplo:

$y=\dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to0_+}\frac{1}{x}=\infty,\ \lim\limits_{x\to0_-}\frac{1}{x}=-\infty$



Aplicável no estudo do potencial elétrico criado por uma carga puntiforme isolada.

$V=\dfrac{k.q}{d}$

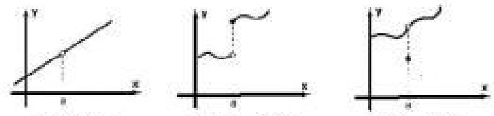
Apêndice B - Slides utilizados para ministrar a aula 1, referente à introdução ao estudo dos limites e das derivadas.

Continuidade

Dizemos que uma função $f(x)$ é contínua num ponto a do seu domínio se as seguintes condições são satisfeitas:

✓ $\exists f(x)$; ✓ $\exists \lim_{x \to a} f(x)$; ✓ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exemplos de descontinuidade



$\nexists f(x)$ $\quad$ $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$ $\quad$ $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

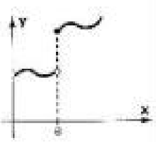
Limites laterais

$\lim_{x \to a_+} f(x) = b$

x aproxima-se de a através de valores maiores que a ou pela sua direita.

$\lim_{x \to a_-} f(x) = c$

x aproxima-se de a através de valores menores que a ou pela sua esquerda.



O limite de $f(x)$ para $x \to a$ existe se, e somente se, os limites laterais à direita e esquerda são iguais, ou seja:

Se $\lim_{x \to a_+} f(x) = \lim_{x \to a_-} f(x) = b$, então $\lim_{x \to a} f(x) = b$

Se $\lim_{x \to a_+} f(x) \neq \lim_{x \to a_-} f(x) = b$, então $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$

DERIVADAS

→ Derivada no ponto x_0

<u>Definição</u>: Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e x_0 um elemento de I. Chama-se *derivada de f no ponto x_0* o limite

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

se este existir e for finito.

A derivada de f no ponto x_0 é habitualmente indicada com uma das seguintes notações:

$$\boxed{f'(x_0) \quad \text{ou} \left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0} \quad \text{ou } Df(x_0)}$$

→ A diferença $\Delta x = x - x_0$ é chamada *acréscimo ou incremento da variável x* relativamente ao ponto x_0.

→ A diferença $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ é chamada *acréscimo Ou incremento da função f* relativamente ao ponto x_0.

→ O quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ recebe o nome de *razão incremental de f* relativamente ao ponto x_0.

Apêndice B - Slides utilizados para ministrar a aula 1, referente à introdução ao estudo dos limites e das derivadas.

Frisemos que a derivada de f no ponto x_0 pode ser indicada das seguintes formas:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \quad \text{ou} \quad \boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

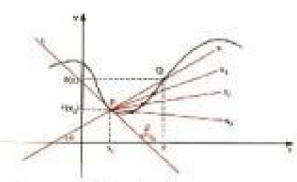
$$\text{ou} \quad \boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

Quando existe $f'(x_0)$ dizemos que f é derivável no ponto x_0. Dizemos também que f é derivável no intervalo aberto I quando existe $f'(x_0)$ para todo $x_0 \in$ I.

Interpretação geométrica

Seja f uma função contínua no intervalo aberto I. Admitamos que exista a derivada de f no ponto $x_0 \in$ I.

Dado um ponto $x \in$ I, tal que $x \neq x_0$, consideremos a reta s determinada pelos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x, f(x))$.



A reta s é secante com o gráfico de f e seu coeficiente angular é:

$$tg\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Portanto, $tg\alpha$ é a razão incremental de f relativamente ao ponto x_0.

Se f é contínua em I, então, quando x tende a x_0, Q desloca-se sobre o gráfico da função e aproxima-se de P. Consequentemente, a reta s desloca-se tomando sucessivamente as posições s_1, s_2, s_3, ... e tende a coincidir com a reta t, tangente à curva no ponto P.

Como existe

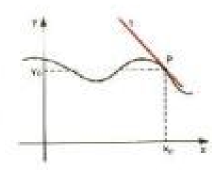
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} tg\alpha = tg\left(\lim_{x \to x_0} \alpha\right) = tg\beta,$$

concluímos:

A derivada de uma função f no ponto x_0 é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0.

Quando queremos obter a equação de uma reta passando por P(x_0, y_0) e com coeficiente angular m, utilizamos a fórmula de Geometria Analítica:

$$\boxed{y - y_0 = m.(x - x_0)}$$

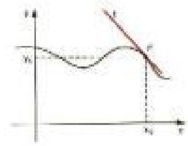


Apêndice B - Slides utilizados para ministrar a aula 1, referente à introdução ao estudo dos limites e das derivadas.

Em particular, se queremos a equação da tangente t ao gráfico de uma função f no ponto (x_0, y_0), em que f é derivável, basta fazer $y_0 = f(x_0)$ e $m = f'(x_0)$.

A equação da reta t fica:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)}$$



Interpretação cinemática

Do estudo da Cinemática, sabemos que a posição de um ponto material em movimento, sobre uma curva T (trajetória) conhecida, pode ser determinada, em cada instante t, através de sua abscissa s, medida sobre a curva T.

A expressão que nos dá s em função de t:

$$s = s(t)$$

é chamada *equação horária*.

Sendo um dado instante t_0 e sendo t um instante diferente de t_0, chama-se *velocidade escalar média* do ponto entre os instantes t_0 e t o quociente:

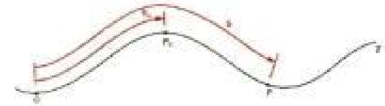
$$v_m = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

e chama-se *velocidade escalar* do ponto no instante t_0 o limite:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} v_m = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t_0)$$

Daí conclui-se que:

A derivada da função $s = s(t)$ no ponto $t = t_0$ é igual à velocidade escalar do móvel no instante t_0.



Sabemos ainda que a velocidade v de um ponto material em movimento pode variar de instante para instante.

A equação que nos dá v em função do tempo t:

$$v = v(t)$$

é chamada *equação da velocidade* do ponto.

Sendo dado um instante t_0 e um instante t, diferente de t_0, chama-se *aceleração escalar média* do ponto entre os instante t_0 e t o quociente:

$$a_m = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

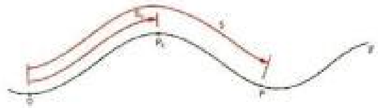
e chama-se *aceleração escalar* do ponto no instante t_0 o limite:

$$a_{(t_0)} = \lim_{t \to t_0} a_m = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t_0)$$

Apêndice B - Slides utilizados para ministrar a aula 1, referente à introdução ao estudo dos limites e das derivadas.

Daí conclui-se que:

A derivada da função $v = v(t)$ no ponto $t = t_0$ é igual à aceleração escalar do móvel no instante t_0.



Derivada de uma função composta (Regra da cadeia)

Seja $f: A \to B$ uma função dada pela lei $y = f(x)$. Seja $g: B \to C$ uma função dada pela lei $z = g(y)$. Existe a função composta $F: A \to C$ dada pela lei $z = F(x) = g(f(x))$.

Supondo que f seja derivável no ponto x e g seja derivável no ponto y tal que $y = f(x)$, provemos que F também é derivável em x e sua derivada é $F'(x) = g'(y).f'(x)$.

Temos inicialmente:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Notemos que, se Δx tende a zero, então Δy também tende a zero, pois a função $y = f(x)$ é derivável e, portanto, contínua no ponto x. Assim, para valores próximos de x $(\Delta x \to 0)$ a função f assume valores próximos de $y = f(x)$ $(\Delta y \to 0)$.

Então, temos:

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Como $z = g(y)$ e $y = f(x)$ são deriváveis, $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y}$ e $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ são ambos finitos; portanto, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$ também.

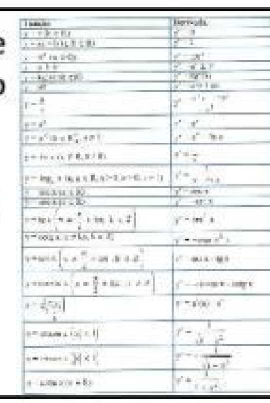
Assim, $z = F(x)$ é derivável e sua derivada é:

$$\boxed{F'(x) = g'(y).f'(x)}$$

Em resumo:

$$\boxed{F(x) = g(f(x)) \Longrightarrow F'(x) = g'(f(x)).f'(x)}$$

Regras de derivação



✓1ª PARTE

EM BREVE INTEGRAIS PRODUTO ESCOLAR

Apêndice B - Slides utilizados para ministrar a aula 1, referente à introdução ao estudo dos limites e das derivadas.

Regra de L'Hospital

A engenhosa descoberta consistiu em perceber que, na vizinhança de um ponto, podemos comparar o quociente de duas funções com o quociente de suas derivadas, desde que determinadas hipóteses estejam satisfeitas.

1ª regra de L'Hospital

Sejam f e g duas funções contínuas num intervalo I, tais que $g'(x) \neq 0$ para todo x no interior de I.

Seja $a \in I$ e suponhamos que $f(a) = g(a) = 0$ e que existe $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, finito ou infinito.

Então existe $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ e mais ainda $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

2ª regra de L'Hospital

Sejam f e g duas funções deriváveis em todo x distinto de a, x pertencente a uma vizinhança V de a, $V =]a - r, a + r[$, $r > 0$.

Suponhamos que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in V$ e que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$.

Se existe $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, finito ou infinito, então existe $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ e, mais ainda, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Derivadas de ordem superior

Seja $\boldsymbol{f}$ uma função derivável. Se $\boldsymbol{f'}$ também for derivável, sua derivada é chamada *derivada segunda* de $\boldsymbol{f}$ e indicada por $f''(x)$ ou y'' ou $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Funções crescente e decrescente

Seja $f(x)$ uma função definida num intervalo aberto $\boldsymbol{A}$. Então, para $\forall x_0, x_1 \in A$, temos:

$f(x)$ é crescente em $A \Leftrightarrow x_1 > x_0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_0)$
$f(x)$ é decrescente em $A \Leftrightarrow x_1 > x_0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0)$

Teorema:

Seja $f(x)$ derivável em um intervalo aberto $\boldsymbol{A}$. Se $f(x)$ é crescente em $\boldsymbol{A}$, então $f'(x) > 0$.

Demonstração:

Se $f(x)$ é crescente, então $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$. Mas:

$\begin{cases} x - x_0 > 0 \\ f(x) - f(x_0) > 0 \end{cases}$, para $x \neq x_0$ e $f(x) \neq f(x_0)$.

Logo, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ e $f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$.

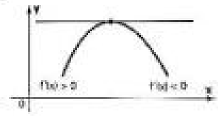
Apêndice B - Slides utilizados para ministrar a aula 1, referente à introdução ao estudo dos limites e das derivadas.

Pontos críticos

Como uma função é crescente quando sua derivada é positiva e decrescente quando sua derivada é negativa, então ela apresenta pontos de máximo ou mínimo relativos quando $f'(x) = 0$. Chamamos de *ponto crítico* ao ponto do domínio da função onde $f'(x) = 0$.

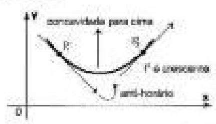
Observe os gráficos abaixo:

Mínimo relativo: ocorre quando $f'(x)$ passa de negativa para positiva.

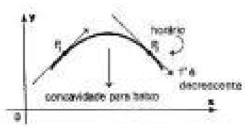


Máximo relativo: ocorre quando $f'(x)$ passa de positiva para negativa.

Concavidade



Quando o ponto se move para a direita (de $\boldsymbol{P_1}$ para $\boldsymbol{P_2}$), a reta tangente gira no sentido anti-horário e sua inclinação aumenta ($\boldsymbol{f'}$ é crescente). Dizemos nesse caso que a *concavidade é voltada para cima*. Observe que $\boldsymbol{f'}$ é crescente se, e somente se, $f'' > 0$.



Quando o ponto se move para a direita (de $\boldsymbol{P_1}$ para $\boldsymbol{P_2}$), a reta tangente gira no sentido horário e sua inclinação diminui ($\boldsymbol{f'}$ é decrescente). Dizemos que a *concavidade é voltada para baixo*. Observe que $\boldsymbol{f'}$ é decrescente se, e somente se, $f'' < \boldsymbol{0}$.

Temos então a seguinte regra para o estudo da concavidade do gráfico de uma função, num intervalo $\boldsymbol{I}$ onde $\boldsymbol{f}$ é derivável duas vezes em qualquer ponto:

Se $f''(x) > 0, \forall x \in I$, então o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em I.

Se $f''(x) < 0, \forall x \in I$, então o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em I.

Ponto de inflexão

Um ponto $(c, f(c))$ é denominado *ponto de inflexão* do gráfico de $\boldsymbol{f}$ quando a concavidade se inverter. Mas tal fato ocorre apenas quando $f''(x)$ muda de sinal. O ponto de inflexão é o ponto onde há mudança de concavidade, ou seja, onde $f''(x) = 0$. Temos, então, a seguinte regra para uma função $\boldsymbol{f}$ derivável duas vezes em $\boldsymbol{I}$, para $c \in I$:

$f''(c) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{P}(c, f(c))$ é o ponto de inflexão do gráfico de $\boldsymbol{f}$

Apêndice B - Slides utilizados para ministrar a aula 1, referente à introdução ao estudo dos limites e das derivadas.

Gráficos usando derivadas

Podemos esboçar o gráfico de uma função $f(x)$ usando os seguintes tópicos relacionados a derivadas:

- $\boldsymbol{f}$ é crescente ou decrescente;
- $\boldsymbol{f}$ tem pontos de máximos ou mínimos relativos;
- concavidade do gráfico de $\boldsymbol{f}$;
- pontos de inflexão.

Além dos tópicos citados, podemos efetuar antes um estudo que aborde também:

- o domínio de $\boldsymbol{f}$ e sua continuidade;
- onde $\boldsymbol{f}$ intercepta os eixos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$;
- se $\boldsymbol{f}$ é função par (simetria em relação ao eixo $\boldsymbol{y}$ quando $f(-x) = f(x)$);
- se $\boldsymbol{f}$ é função impar (simetria em relação à origem quando $f(-x) = -f(x)$);
- se $\boldsymbol{f}$ possui assíntotas (estudo feito com limites infinitos);
- o comportamento de $\boldsymbol{f}$ quando $x \to \pm\infty$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 6. ed. Atual Editora, 2005. v. 8.

GENTIL, et al. **Matemática para o 2º grau**. 6. ed. São Paulo: Ática, 1997. v. 3.

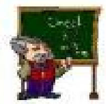
E-CÁLCULO. Cálculo Diferencial e Integral. Aprovado pela Pró-Reitoria de Graduação da Universidade de São Paulo. 2000. Apresenta conteúdo vinculado ao curso universitário de Cálculo. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/ferramentas/limites/regras_lhospital/regras_lhospital.htm>. Acesso em: 1 jun. 2016.

Apêndice C - Slides utilizados para ministrar a aula 2, referente às noções de integral

Noções de Integral

ENSINO MÉDIO

Integrais



→ Integral Indefinida

Da mesma forma que a adição e a subtração, a multiplicação e a divisão, a operação inversa da derivação é a *antiderivação* ou *integração indefinida*.

Dada uma função $g(x)$, qualquer função $f'(x)$ tal que $f'(x) = g(x)$ é chamada *integral indefinida* ou *antiderivada* de $f(x)$.

Exemplos:

1) Se $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^5}{5}}$, então $\boldsymbol{f'(x) = \frac{5x^4}{5} = x^4 = g(x)}$ é a derivada de $f(x)$.

Uma das antiderivadas de $f'(x) = g(x) = x^4$ é $f(x) = \frac{x^5}{5}$.

2) Se $\boldsymbol{f(x) = x^3}$, então $\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 = g(x)}$.
Uma das antiderivadas ou integrais indefinidas de $g(x) = 3x^2$ é $f(x) = x^3$.

3) Se $\boldsymbol{f(x) = x^3 + 4}$, então $\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 = g(x)}$.
Uma das antiderivadas ou integrais indefinidas de $g(x) = 3x^2$ é $f(x) = x^3 + 4$.

Nos exemplos 2 e 3 podemos observar que tanto $\boldsymbol{x^3}$ quanto $\boldsymbol{x^3 + 4}$ são integrais indefinidas para $\boldsymbol{3x^2}$.

Mais adiante, veremos que a diferença entre quaisquer destas funções (chamadas *funções primitivas*) é sempre uma constante, ou seja, a integral indefinida de $\boldsymbol{3x^2}$ é $\boldsymbol{x^3 + C}$, onde $\boldsymbol{C}$ é uma constante real.

Vamos ver mais alguns exemplos:

1) Se $\boldsymbol{f(x) = sen\,x + C}$, então $\boldsymbol{f'(x) = \cos x = g(x)}$.
A integral indefinida de $f'(x) = \cos x = g(x)$ é $sen\,x + C$, onde $\boldsymbol{C}$ é real.

2) Se $\boldsymbol{f(x) = \ln|x| + C}$, então $\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{x} = g(x)}$.
A integral indefinida de $\frac{1}{x}$ é $\ln|x| + C$, onde $\boldsymbol{C}$ é real.

Indicamos a integral indefinida ou antiderivada de $g(x) = f'(x)$ por:

$$\boxed{\int g(x)\,dx = f(x) + C}$$

Apêndice C - Slides utilizados para ministrar a aula 2, referente às noções de integral

Integrais imediatas

Propriedades das integrais indefinidas

São imediatas as seguintes propriedades:

1) $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

A integral da soma ou da diferença é a soma ou diferença das integrais.

Propriedades das integrais indefinidas

São imediatas as seguintes propriedades:

2) $\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$

A constante multiplicativa pode ser retirada do integrando.

Propriedades das integrais indefinidas

São imediatas as seguintes propriedades:

3) $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx\right] = f(x)$

A derivada da integral de uma função é a própria função.

Integração por substituição

Seja a expressão $\int g[f(x)].f'(x)\, dx$. Através da substituição $u = f(x)$ por $u' = f'(x)$ ou $\frac{du}{dx} = f'(x)$, ou ainda, $du = f'(x)\, dx$, vem:

$$\int g[\underbrace{f(x)}_{u}].\underbrace{f'(x)\, dx}_{du} = \int g(u)\, du = h(u) + C = h[f(x)] + C$$

admitindo que se conhece $\int g(u)\, du$.

Integração por substituição

O método da substituição de variável exige a **identificação de u e u'**

ou

u e du na integral dada.

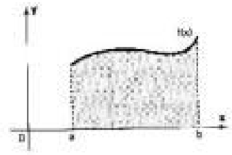
Integrais definidas

Seja uma função $f(x)$ definida e contínua num intervalo real $[a, b]$. A integral definida de $f(x)$, de $\boldsymbol{a}$ até $\boldsymbol{b}$, é um número real, e é indicada pelo símbolo:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx}$$

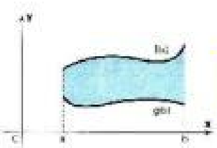
onde:
$\boldsymbol{a}$ é o limite inferior de integração;
$\boldsymbol{b}$ é o limite superior de integração;
$\boldsymbol{f(x)}$ é o integrando.

Se $f(x) \geq 0$, $\int_a^b f(x)\, dx$ representa a área entre o eixo $\boldsymbol{x}$ e a curva $f(x)$, para $a \leq x \leq b$:



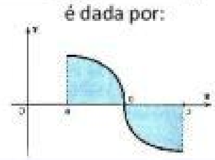
$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\, dx}$$

Se $f(x) \geq g(x)$, $\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$ representa a área entre as curvas, para $a \leq x \leq b$:



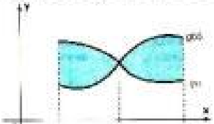
$$\boxed{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx}$$

Se $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq c$ e $f(x) \leq 0$ para $c \leq x \leq b$, então a área entre $f(x)$ e o eixo $\boldsymbol{x}$, para $a \leq x \leq b$, é dada por:



$$\boxed{A = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b [-f(x)]\, dx}$$

Se $f(x) \geq g(x)$, $a \leq x \leq c$, e $f(x) \leq g(x)$, $c \leq x \leq b$, então a área entre $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$, $a \leq x \leq b$, é dada por:

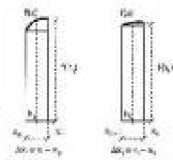


$$\boxed{A = \int_a^c [f(x) - g(x)]\, dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]\, dx}$$

A integral definida, nos exemplos vistos, representa uma área, o que ocorre em muitos casos, e é uma das formas de se apresentar a integral definida.

De forma geral, para $f(x) \geq 0$, a área limitada por $f(x)$ e o eixo $\boldsymbol{x}$, $a \leq x \leq b$, é dada por $\int_a^b f(x)\, dx$, que pode representar a soma das áreas de infinitos retângulos de largura $\Delta x \to 0$ e cuja altura é o valor da função num ponto do intervalo da base:

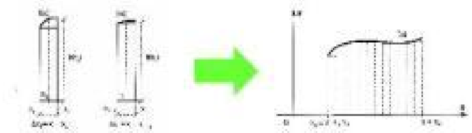
Subdividindo o intervalo $[a, b]$ em **n** subintervalos através das abscissas $x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n = b$, obtemos os intervalos $(a, x_1),\ (x_1, x_2),\ \ldots,\ (x_{n-1}, b)$. Em cada intervalo (x_{i-1}, x_i) tomemos um ponto arbitrário $\boldsymbol{h_i}$. Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ 1 \le i \le n$. De acordo com a figura, os retângulos formados têm área $f(h_1)\Delta x_1$, $f(h_2)\Delta x_2, \ldots, f(h_n)\Delta x_n$.



Então, a soma das áreas de todos os retângulos é:

$$f(h_1)\Delta x_1 + f(h_2)\Delta x_2 + \ldots + f(h_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(h_i)\Delta x_i$$

que nos fornece um valor aproximado da área considerada.



Aumentando o número n de subintervalos Δx_i, tal que Δx_i tenda a zero ($\Delta x_i \rightarrow 0$) e o número n de subintervalos tenda a infinito ($n \rightarrow \infty$), temos as bases superiores dos retângulos e a curva praticamente se confundindo e, portanto, temos a área considerada.

Simbolicamente, escrevemos:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(h_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx}$$

Cálculo da integral definida

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Propriedades da integral definida

1) $\int_a^a f(x)\, dx = 0$, pois $\int_a^a f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0$.

2) $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$, pois $\int_b^a f(x)\, dx = F(a) - F(b)$.

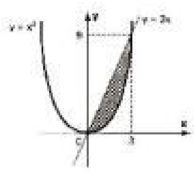
3) $\int_a^b kf(x)\, dx = k\int_a^b f(x)\, dx$, como nas integrais indefinidas.

4) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx,\ a \le c \le b$.

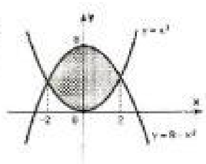
Exercícios:

Calcule a área das regiões indicadas nas figuras:

a)



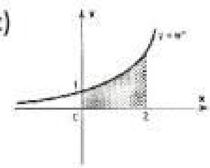
b)



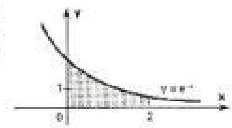
Exercícios:

Calcule a área das regiões indicadas nas figuras:

c)



d)

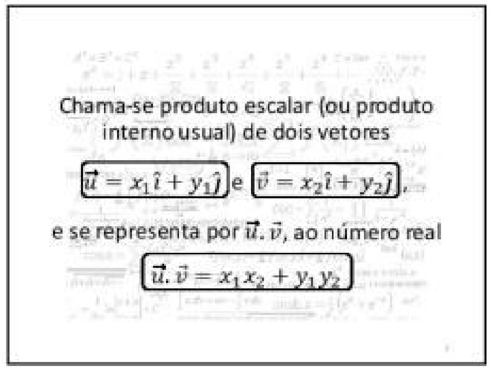


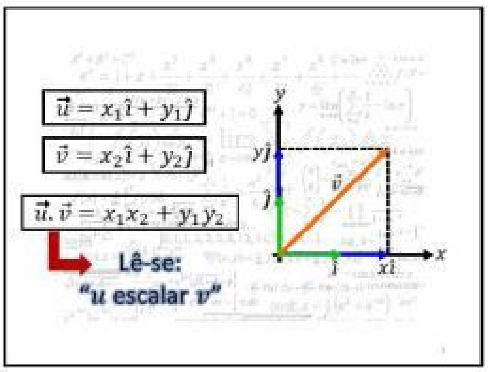
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

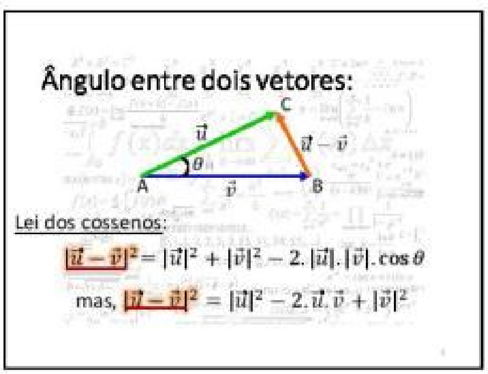
IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 6. ed. Atual Editora, 2005. v. 8.

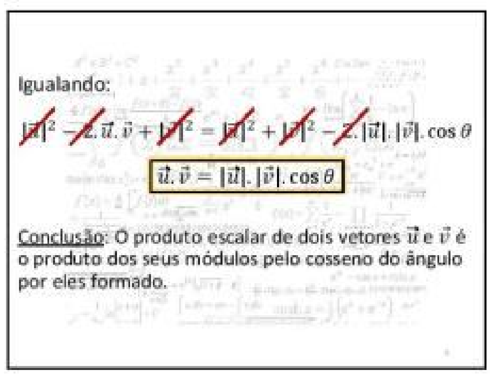
GENTIL, et al. **Matemática para o 2º grau**. 6. ed. São Paulo: Ática, 1997. v. 3.

Apêndice D - Slides utilizados para ministrar a aula 3, referente ao produto escalar.

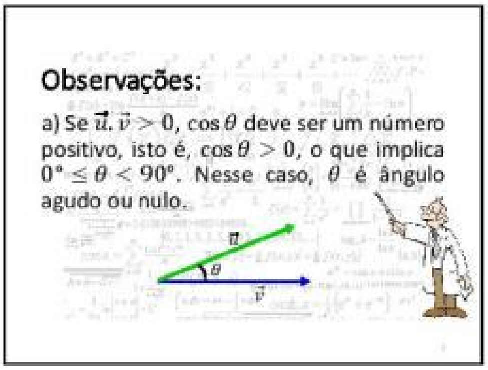


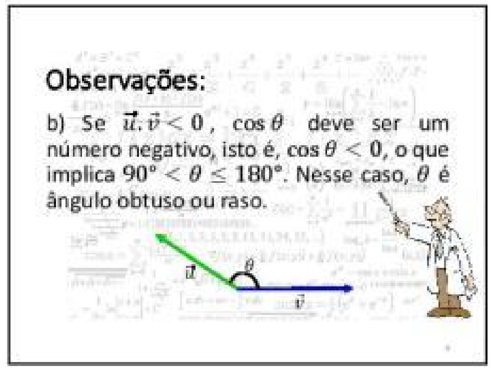


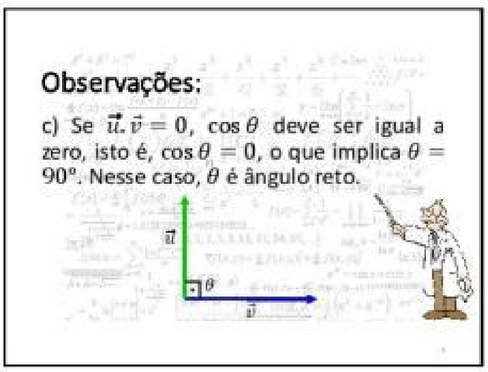


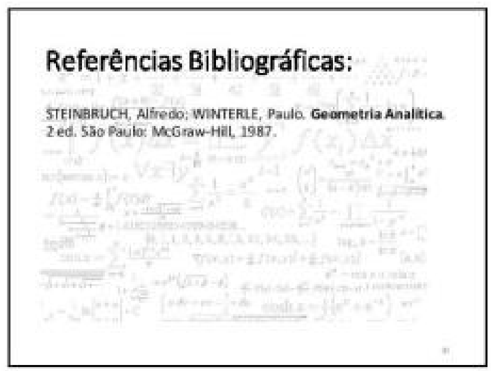


Apêndice D - Slides utilizados para ministrar
a aula 3, referente ao produto escalar.

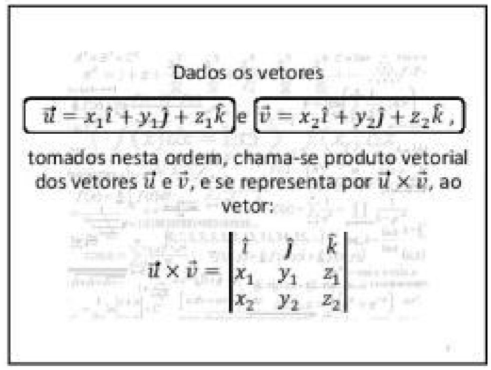


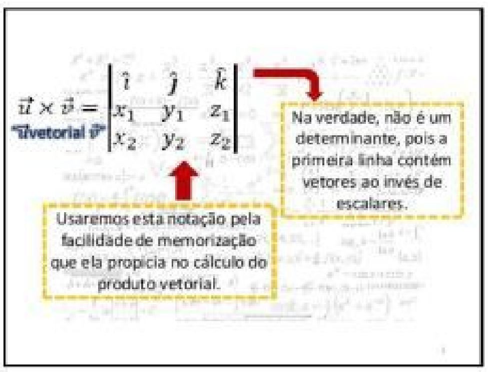


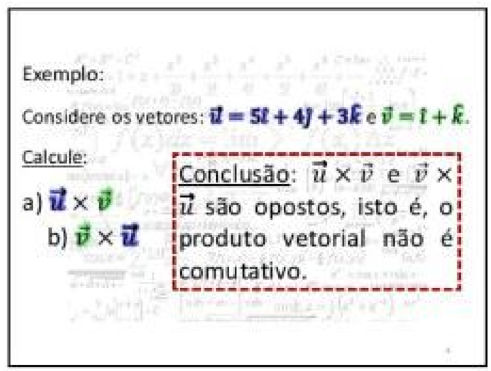


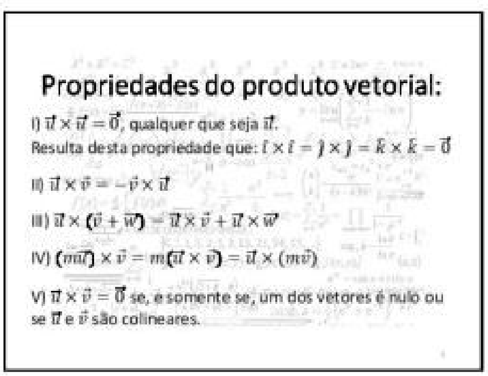


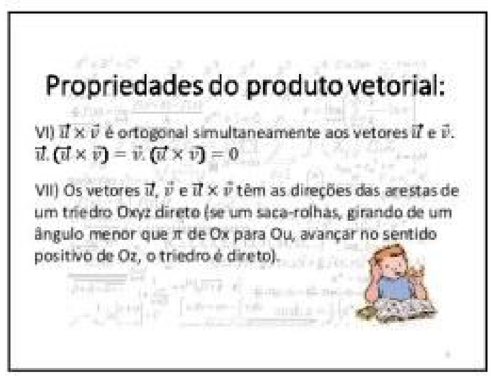
Apêndice E - Slides utilizados para ministrar
a aula 4, referente ao produto vetorial.



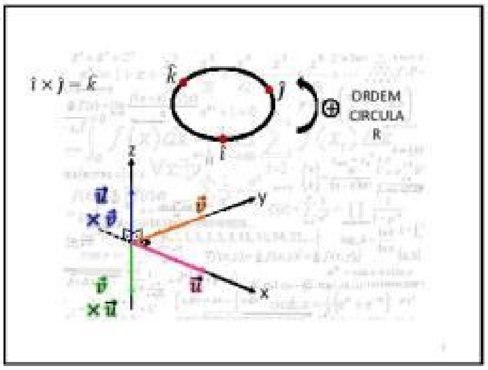


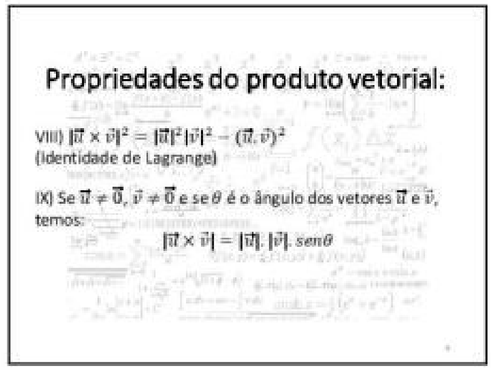


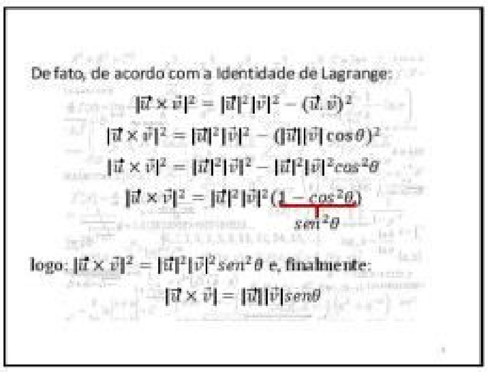


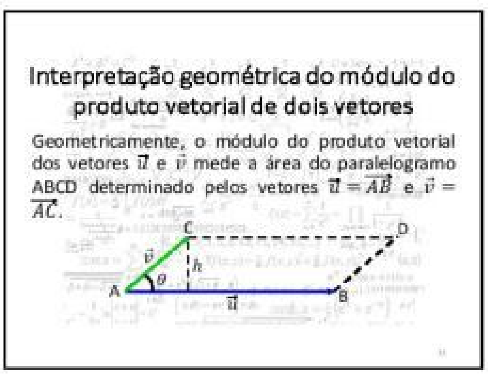


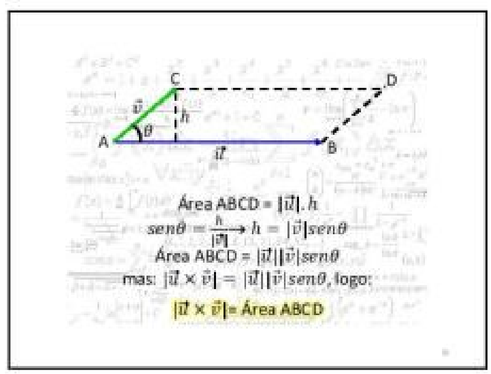
Apêndice E - Slides utilizados para ministrar
a aula 4, referente ao produto vetorial.











Apêndice F - Slides utilizados para ministrar a aula 5, referente à Lei de Gauss para campos elétricos.

A Lei de Gauss para campos elétricos

A carga elétrica produz um campo elétrico, e o fluxo desse campo através de uma superfície fechada é proporcional à carga total contida nessa superfície.

A lei de Gauss para campos elétricos FORMA INTEGRAL

$$\oint_S \vec{E} \circ \hat{n}\, da = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E}$ Campo Elétrico

Região perturbada do espaço em que, uma carga de prova colocada na mesma, fica sujeita a ação de uma força elétrica.

Michael Faraday foi o primeiro a citar o campo elétrico como um "campo de força", e James Clerk Maxwell identificou esse campo como o espaço perturbado ao redor de um objeto eletrizado.

Um espaço perturbado em que atuam forças elétricas sobre cargas de prova inseridas no mesmo.

Por definição: O campo elétrico é a força elétrica por unidade de carga exercida sobre uma partícula carregada (carga de prova). O campo elétrico é dado pela relação:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0}}$$

$\vec{F}_e$ é a força elétrica sobre uma carga puntiforme (carga de prova) q_0. Esta definição deixa claro duas características importantes do campo elétrico:

1) $\vec{E}$ é uma grandeza vetorial com intensidade diretamente proporcional à intensidade da força e a mesma direção da força. O sentido de $\vec{E}$ dependerá do sinal da carga de prova:

Apêndice F - Slides utilizados para ministrar a aula 5, referente à Lei de Gauss para campos elétricos.

a) Se $q_0 > 0 \rightarrow \vec{E}$ e $\vec{F}_e$ possuem o mesmo sentido.

b) Se $q_0 < 0 \rightarrow \vec{E}$ e $\vec{F}_e$ possuem sentidos contrários.

2) No SI (Sistema Internacional de Unidades), a intensidade do campo elétrico é dada em newton por coulomb ($^N/_C$), que é equivalente a volt por metro ($^V/_m$), e $volt(V) = \frac{newton\ (N).metro(m)}{coulomb\ (C)}$.

Ao aplicar a lei de Gauss, somos capazes de visualizar o campo elétrico nas proximidades de um objeto carregado.

As linhas de campo

A forma mais comum para a construção de uma representação visual de um campo elétrico é usar as "linhas de campo" que apontam na direção do campo em cada ponto do espaço.

→ Quando são linhas curvas, o vetor campo elétrico é tangente à linha em cada ponto considerado.

→ O sentido do vetor campo elétrico é o mesmo das linhas.

→ Na região de maior concentração de linhas o campo elétrico é mais intenso.

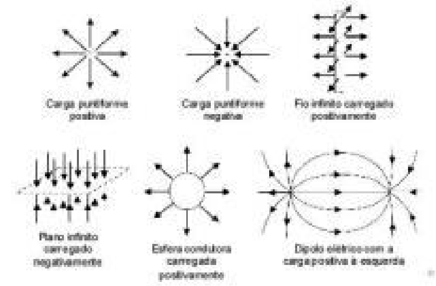
→ Quando você observar uma representação de linhas de campo elétrico, lembre-se de que existe campo elétrico entre as linhas também.

→ Linhas de campo nunca se cruzam pois, em cada ponto do espaço, é definido um único vetor $\vec{E}$.

→ As linhas de campo nascem em cargas positivas e terminam em cargas negativas.

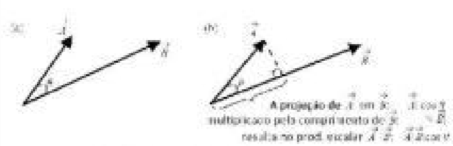
Exemplos de vários campos elétricos importantes para a aplicação da lei de Gauss são mostrados a seguir:

Visualização do campo elétrico produzido pelos principais objetos carregados - Linhas de campo



O campo elétrico $\vec{E}$ na Lei de Gauss representa o campo elétrico resultante em cada ponto da superfície em consideração. A superfície pode ser real ou imaginária, obtida algebricamente através da integral de superfície.

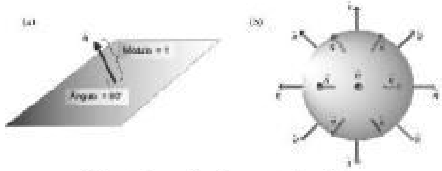
O produto escalar



O significado do produto escalar.

Apêndice F - Slides utilizados para ministrar a aula 5, referente à Lei de Gauss para campos elétricos.

O versor normal



Vetor unitário normal ao plano e à superfície esférica.

$\boxed{\vec{E} \circ \hat{n}}$ A componente do campo elétrico normal à superfície

$$\vec{E} \circ \hat{n} = |\vec{E}||\hat{n}| \cos \theta = |\vec{E}| \cos \theta$$

$\boxed{\int_S ( ) da}$ A integral de superfície

Para compreender o significado da integral de superfície, considere uma superfície de espessura desprezível (muito fina), cuja densidade superficial de massa (massa por unidade de área), varia em função de x e y, como mostrado na figura abaixo:

Para se determinar a massa total da superfície, divide-se a mesma em elementos bidimensionais de densidade superficial de massa aproximadamente constante.

Para elementos individuais com densidade superficial de massa σ_i e área dA_i, a massa de cada elemento é $\sigma_i dA_i$, e a massa de toda a superfície é o somatório correspondente aos N elementos:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i \, dA_i}$$

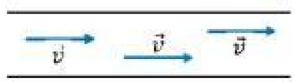
Quanto menores forem os elementos de área, mais próximos ficamos da massa verdadeira, pois a aproximação de uma densidade superficial de massa constante (σ) é mais exata para elementos menores. Considerando o elemento de área dA tendendo a zero e N ao infinito, a soma torna-se uma integral de superfície cujo resultado é a massa da superfície:

$$massa = \int_S \sigma(x, y) dA$$

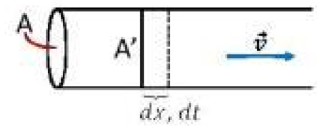
Apêndice F - Slides utilizados para ministrar a aula 5, referente à Lei de Gauss para campos elétricos.

Fluxo de um vetor

Considere um cano cilíndrico por onde flui água a uma velocidade constante $\vec{v}$.



O cano possui uma área de seção transversal A.



Em um instante dt, toda a água que estava em A' deslocou-se dx.

O volume de água deslocado em dt:

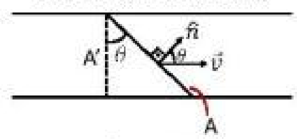
$$dV = A.dx$$

Então:

$$\frac{dV}{dt} = A.\frac{dx}{dt} = A.v \qquad \underbrace{\left|\frac{dV}{dt}\right|}_{\text{vazão}} = \frac{m^3}{s}$$

vazão = fluxo = $\phi \rightarrow \phi = A.v$

Considerando uma área oblíqua em relação a área da seção transversal:



$$A' = a.cos\theta$$

mas, $\phi = v.A'$, então:

$$\phi = v.A.cos\theta$$

O produto escalar $\vec{v}.\hat{n} = v.1.cos\theta$, logo:

$$\boxed{\phi = \vec{v}.\hat{n}.A}$$

$\int_S \vec{A} \circ \hat{n}\, da$ Fluxo de um campo vetorial

Na Lei de Gauss, a integral de superfície é aplicada não a uma função escalar (tais como a densidade superficial de massa de uma superfície), mas a um campo vetorial.

O que é um campo vetorial?

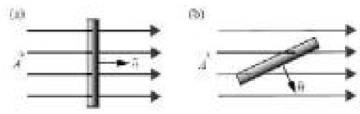
Como o nome sugere, um campo vetorial é uma distribuição de vetores no espaço.

Assim, considerando que a distribuição de temperatura numa sala é um exemplo de um campo escalar e a velocidade de um fluido em cada ponto em um córrego é um exemplo de um campo vetorial.

→ A analogia do fluxo de fluido é muito útil na compreensão do significado do 'fluxo' de um campo vetorial, mesmo quando o campo vetorial for estático e, na verdade, nada estará fluindo.

Apêndice F - Slides utilizados para ministrar a aula 5, referente à Lei de Gauss para campos elétricos.

→ Podemos considerar o fluxo de um campo vetorial sobre uma superfície, como a 'quantidade' de linhas de campo que atravessam essa superfície.



Fluxo de um campo vetorial através de uma superfície.

→ Na figura (a), observe que se $\vec{A}$ é uniforme, perpendicular à superfície e paralelo ao versor normal, o fluxo é dado por:

$$\Phi = |\vec{A}| \times \acute{a}rea\ da\ superf\acute{i}cie$$

→ Se o campo vetorial é uniforme, mas não é perpendicular à superfície, como na figura (b), o fluxo pode ser determinado simplesmente encontrando a componente do campo perpendicular à superfície e depois multiplicando esse valor pela área da superfície:

$$\Phi = \vec{A} \circ \hat{n} \times (\acute{a}rea\ da\ superf\acute{i}cie)$$

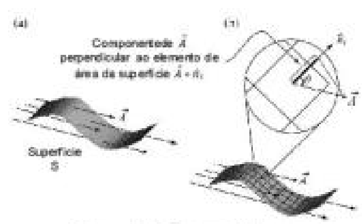
Enquanto campos uniformes e superfícies planas são úteis para a compreensão do conceito de fluxo, muitos problemas de eletromagnetismo envolvem campos não-uniformes e superfícies curvas.

Para trabalhar com esses tipos de problemas, devemos <u>considerar o conceito de integral de superfície aplicada a campos vetoriais</u>.

Considere a superfície curva e o vetor $\vec{A}$ mostrado na figura (a). Imagine que $\vec{A}$ representa um campo vetorial de velocidades de um fluido real, e S uma membrana porosa, em que um fluxo de $\vec{A}$ atravessa a membrana.

Essa analogia se aplica ao fluxo de um campo elétrico através de uma superfície, que pode ser real ou puramente imaginária.

O fluxo de um campo vetorial



Componente de $\vec{A}$ perpendicular à superfície.

Apêndice F - Slides utilizados para ministrar a aula 5, referente à Lei de Gauss para campos elétricos.

Antes de prosseguir, pensemos por um momento sobre como podemos encontrar a taxa de fluxo do material fluindo através da superfície S.

Podemos começar pela seguinte pergunta:

Quantas partículas de fluido atravessam a membrana a cada segundo?

Para responder a esta pergunta, defina o vetor $\vec{A}$ como sendo a densidade do fluido (partículas por metro cúbico) vezes a velocidade do fluxo (metros por segundo). Isso representa o produto da densidade (escalar) e a velocidade (um vetor).

$\vec{A}$ deve ser um vetor na mesma direção da velocidade, com dimensão de número de partículas por metro quadrado por segundo. Observe que estamos tentando encontrar o número de partículas por segundo passando através da superfície, a análise dimensional sugere que se multiplica $\vec{A}$ pela área da superfície.

Mas olhe novamente a figura (a). Os comprimentos diferentes das setas sugerem que o fluxo de material não é espacialmente uniforme, ou seja, significa que a velocidade pode ser maior ou menor em vários locais dentro do fluxo.

Este fato, por si só, significaria que o material flui através de algumas partes da superfície em uma taxa mais elevada do que outras partes. Mas devemos considerar o ângulo entre o versor normal à superfície e o vetor $\vec{A}$.

Qualquer porção da superfície em que o versor normal seja perpendicular à direção do vetor $\vec{A}$ terá necessariamente zero partículas por segundo passando por ela, por isso, as linhas de fluxo devem penetrar a superfície para transportar as partículas de um lado para o outro e não tangenciá-la.

Assim, devemos nos preocupar não apenas com a velocidade do fluxo e a área de cada porção da membrana mas com a componente do vetor $\vec{A}$ perpendicular à superfície.

Claro, você sabe como encontrar a componente de $\vec{A}$ perpendicular à superfície, simplesmente fazendo o produto escalar de $\vec{A}$ e $\hat{n}$ (versor normal à superfície).

Mas, se a superfície é curva, a direção do versor $\hat{n}$ depende de qual parte da superfície que você está considerando.

→ Para lidar com as diferentes direções de n (e do vetor $\vec{A}$) em cada local, divida a superfície em pequenos elementos de área, como mostrado na figura (b).

Apêndice F - Slides utilizados para ministrar a aula 5, referente à Lei de Gauss para campos elétricos.

Se você faz esses elementos de área suficientemente pequenos, você pode assumir que ambos n e A são constantes ao longo de cada elemento.

$\hat{n}_i$ representam o versor normal para cada elemento de área (da_i); o fluxo através do segmento é $(\vec{A}_i \circ \hat{n}_i)\, da_i$ e o total é dado por:

→ fluxo através de toda a superfície:

$$\boxed{\sum_i \vec{A}_i \circ \hat{n}_i \, da_i}$$

Considerando o tamanho de cada elemento de área tendendo a zero, o somatório torna-se uma integral.

→ fluxo através de toda a superfície:

$$\boxed{\int_S \vec{A} \circ \hat{n}\, da}$$

Para uma superfície fechada, o sinal da integral inclui um círculo:

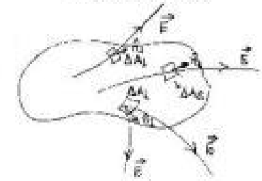
$$\boxed{\oint_S \vec{A} \circ \hat{n}\, da}$$

Este fluxo é o fluxo de partículas através de uma superfície fechada S, e é notável a semelhança com o lado esquerdo da lei de Gauss.

Você só precisa substituir o campo vetorial $\vec{A}$ com o campo elétrico $\vec{E}$ para tornar as expressões idênticas.

Fluxo do campo elétrico

Considere uma superfície S. Um campo elétrico gera um fluxo através dessa superfície S.



$$\phi = \sum \vec{E_i} . \vec{n_i} . \Delta A_i$$

Fazendo ΔA_i muito pequenos, o fluxo total através da superfície contínua será uma integral:

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} . \hat{n} dA = \oint_S E dA cos\theta \begin{cases} \phi > 0 \\ \phi = 0 \\ \phi < 0 \end{cases}$$

superfície fechada

depende da orientação do campo com a normal

$\boxed{\oint_S \vec{E} \circ \hat{n}\, da}$ **Fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada**

$$\Phi_E = |\vec{E}| \times (área\ da\ superfície)$$

$\vec{E}$ é uniforme e perpendicular à superfície.

$$\Phi_E = |\vec{E}| \circ \hat{n} \times (área\ da\ superfície)$$

$\vec{E}$ é uniforme e oblíquo ($\neq 90°$) em relação à superfície.

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \circ \hat{n}\, da$$

$\vec{E}$ é variável (não uniforme) e oblíquo ($\neq 90°$) em relação à superfície.

Apêndice F - Slides utilizados para ministrar a aula 5, referente à Lei de Gauss para campos elétricos.

Fluxo do campo elétrico (Φ_E) ≡ número de linhas que atravessama superfície

Linhas de campo através de superfícies fechadas.

q_{int} A carga interna

Se você entendeu o conceito de fluxo, conforme descrito na seção anterior, deve estar claro por que o lado direito da Lei de Gauss envolve apenas a carga interna ou seja, a carga contida pela superfície fechada sobre a qual o fluxo é determinado.

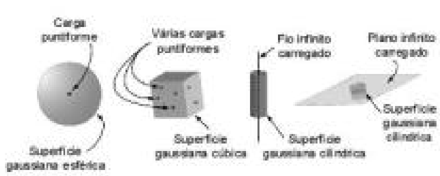
Simplificando, é porque qualquer carga localizada fora da superfície produz uma quantidade igual de fluxo (negativo) para dentro e (positivo) para fora, portanto, a contribuição líquida de fluxo através da superfície é igual a zero.

Como você pode determinar a superfície adequada que envolve uma carga? Em alguns problemas, você é livre para escolher uma superfície que envolve uma quantidade conhecida de carga.

Em cada um desses casos, a superfície selecionada pode ser facilmente determinada através de considerações geométricas (alta simetria). Para problemas envolvendo grupos de cargas discretas delimitadas por superfícies de qualquer forma, encontrar a carga total é simplesmente uma questão de adicionar as cargas individuais.

$$carga\ interna\ total = \sum_i q_i$$

Superfícies gaussianas



Superfícies gaussianas adequadas envolvendo os objetos eletrizados.

Enquanto um número pequeno de cargas discretas pode aparecer em problemas de física e engenharia, no mundo real é mais provável encontrar objetos carregados contendo bilhões de portadores de cargas alinhados ao longo de um fio, sobre uma superfície esférica ou dispostos ao longo de um volume.

Em tais casos, contar as cargas individuais não é nada prático, mas você pode determinar a carga total se você souber a densidade de carga. A densidade de carga pode ser especificada em uma, duas ou três dimensões (1, 2 ou 3-D).

Apêndice F - Slides utilizados para ministrar a aula 5, referente à Lei de Gauss para campos elétricos.

Dimensão	Terminologia	Símbolo	Unidade
1	Densidade linear de carga	λ	C/m
2	Densidade superficial de carga	σ	C/m^2
3	Densidade volumétrica de carga	ρ	C/m^3

1-D: $q_{int} = \lambda L$

(L = Comprimento delimitado do fio infinito carregado)

2-D: $q_{int} = \sigma A$

(A = área delimitada da superfície carregada)

3-D: $q_{int} = \rho V$

(V = parte delimitada do volume carregado)

É provável encontrar situações em que a densidade de carga não é constante ao longo da linha, superfície ou volume delimitados pela superfície gaussiana. Em tais casos, utilizam-se as técnicas de integração.

1-D: $q_{int} = \int_L \lambda \, dl$, em que λ varia ao longo do fio.

2-D: $q_{int} = \int_S \sigma \, da$, em que σ varia sobre a superfície.

3-D: $q_{int} = \int_V \rho \, dV$, em que ρ varia sobre o volume.

A permissividade elétrica do vácuo

A constante de proporcionalidade entre o fluxo elétrico no lado esquerdo da lei de Gauss e a carga interna do lado direito é ε_0, a permissividade dielétrica no vácuo.

A permissividade de um material determina a sua resposta a um campo elétrico aplicado sobre ele. Em um material não condutor (chamado 'isolante' ou 'dielétrico'), as cargas não podem mover-se livremente, mas podem ser ligeiramente deslocadas de suas posições de equilíbrio.

A permissividade relevante na lei de Gauss para campos elétricos é a permissividade dielétrica do vácuo (ou 'constante de permissividade do vácuo'), e é por isso que possui o zero subscrito.

$$\boxed{\varepsilon_0 = 8{,}8541878176 \times 10^{-12}\ C/Vm}$$

→ Constante eletrostática do vácuo:

$$\boxed{k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}$$

A presença dessa quantidade significa que esta forma da Lei de Gauss é válida somente no vácuo?

Não, a Lei de Gauss é geral, e se aplica a campos elétricos dentro de dielétricos, bem como aqueles no vácuo, desde que você considere toda a carga interna, incluindo as cargas intrínsecas aos átomos do material.

O efeito de cargas acopladas aos átomos do material pode ser entendido quando observamos o que acontece quando um dielétrico é colocado em um campo elétrico externo.

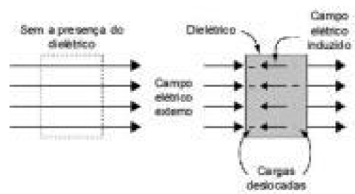
Dentro do material dielétrico, a amplitude do campo elétrico total é geralmente menor que a amplitude do campo aplicado.

A razão disso é que os dielétricos tornam-se 'polarizados' quando colocados em um campo elétrico, o que significa que as cargas positivas e negativas são ligeiramente deslocadas de suas posições originais.

As cargas positivas são deslocadas em uma direção (paralela ao campo elétrico aplicado) e as cargas negativas são deslocadas no sentido oposto (antiparalelo de campo aplicado).

Apêndice F - Slides utilizados para ministrar a aula 5, referente à Lei de Gauss para campos elétricos.

Estas cargas deslocadas dão origem a seu próprio campo elétrico que se opõe ao campo externo, como mostrado a seguir:



Campo elétrico induzido em um dielétrico.

Isso torna o campo resultante no interior do dielétrico menor do que o campo externo.

É a capacidade de materiais dielétricos para reduzir a amplitude de um campo elétrico que leva a sua aplicação mais comum: aumentando a capacitância e a tensão ou voltagem máxima dos capacitores.

Você pode recordar que a capacitância (capacidade de armazenar carga) de um capacitor de placas planas e paralelas é dada por:

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon A}{d}}$$

Em que A é a área das placas, d é a separação entre as placas, e ε é a permissividade do material entre as placas.

Materiais de alta permissividade podem proporcionar aumento da capacitância sem a necessidade de maior área das placas ou diminuição do espaçamento entre elas.

A permissividade de um dielétrico é muitas vezes expressa como a constante dielétrica, que é o fator pelo qual a permissividade do material ultrapassa a do vácuo:

$$\boxed{permissividade\ relativa\ \varepsilon_r = {}^{\varepsilon}/_{\varepsilon_0}}$$

→ Alguns textos referem-se à permissividade relativa do meio como a 'constante dielétrica', embora a variação na permissividade com freqüência sugere que a palavra 'constante' é melhor usada em outro lugar.

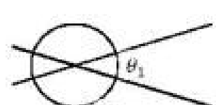
→ A constante dielétrica do gelo, por exemplo, muda de aproximadamente 81 nas freqüências abaixo de 1 kHz a menos de 5 em freqüências acima de 1MHz.

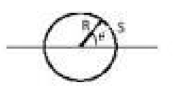
→ Mais frequentemente, é o valor de baixa frequência da permissividade que é chamado de constante dielétrica.

→ A permissividade do meio é um parâmetro fundamental na determinação da velocidade com que uma onda eletromagnética propaga-se por esse meio.

Ângulo sólido

Ângulo plano

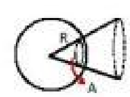




$$\theta = \frac{S}{R} \rightarrow S = \theta . R$$

$$\theta_{pleno} = 2\pi\ rad$$

Ângulo sólido

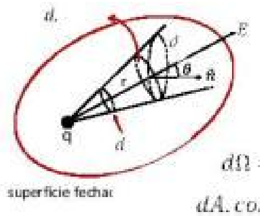


$$\Omega = \frac{A}{R^2} = \frac{área}{quadrado\ do\ raio}$$

$$A = 4\pi R^2$$

$$\Omega_{pleno} = 4\pi \text{ esferorradiano}$$

Apêndice F - Slides utilizados para ministrar a aula 5, referente à Lei de Gauss para campos elétricos.



$$d\Omega = \frac{dA.cos\theta}{r^2}$$

$$dA.\,cos\theta = r^2 d\Omega$$

$$d\phi = \vec{E}(r).\,\hat{n}dA = E(r)dAcos\theta$$

$$d\phi = E(r)r^2 d\Omega$$

$$\oint \vec{E}\,.\hat{n}dA = \oint Ecos\theta dA$$

$$\oint \vec{E}\,.\,\hat{n}.\,dA = \oint E\,d\Omega r^2$$

$$\oint \vec{E}\,.\hat{n}dA = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\,q\oint d\Omega$$

$$\oint \vec{E}\,.\,\hat{n}.\,dA = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\,q.\,4\pi$$

$$\oint \vec{E}\,.\,\hat{n}.\,dA = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \boxed{\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

Aplicações

A Lei de Gauss se configura como a primeira equação de Maxwell. É uma alternativa sofisticada e ágil para calcular o campo elétrico quando a distribuição de cargas apresenta elevada simetria.

Aplicações da Lei de Gauss:

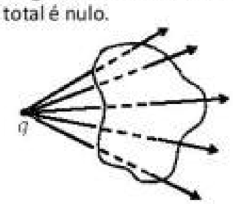
- ✓Cálculo do Campo elétrico;
- ✓da carga puntiforme;
- ✓da esfera condutora carregada;
- ✓da esfera isolante carregada;
- ✓do fio retilíneo carregado;
- ✓do plano infinito carregado;
- ✓entre as placas eletrizadas do capacitor plano.

Apêndice G - Slides utilizados para ministrar a aula 6, referente às aplicações da Lei de Gauss.

Fluxo do campo elétrico:

CONSIDERAÇÕES

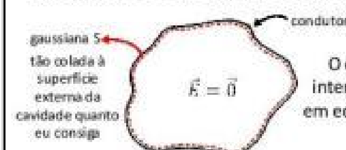
a) Uma carga puntiforme fora de uma superfície fechada. O número de linhas de campo que entram na superfície é igual ao número de linhas que saem dela. O fluxo total é nulo.



b) Superfícies fechadas de vários formatos envolvendo uma carga q. O fluxo através de todas as superfícies é o mesmo.

Aplicações da Lei de Gauss para campos elétricos

A) Condutores em equilíbrio eletrostático



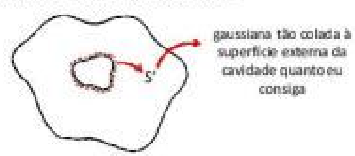
O campo elétrico no interior de um condutor em equilíbrio eletrostático é nulo.

Pela Lei de Gauss: onde estão as cargas de um condutor em equilíbrio eletrostático?

$$\phi = \int \vec{E}.\hat{n}.dA = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Se $\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow q_{int} = 0 \rightarrow$ As cargas estão na superfície externa.

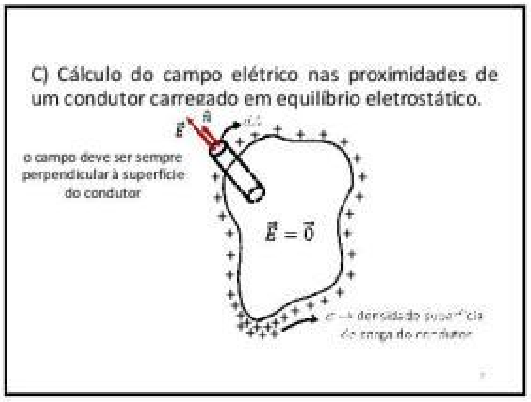
B) Condutor com uma cavidade

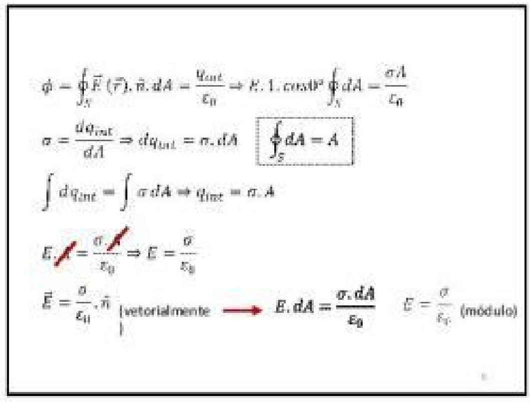


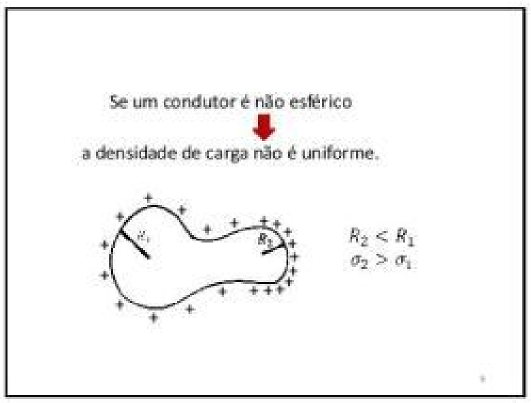
$$\phi_{S'} = \int \vec{E}.\hat{n}.dA = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

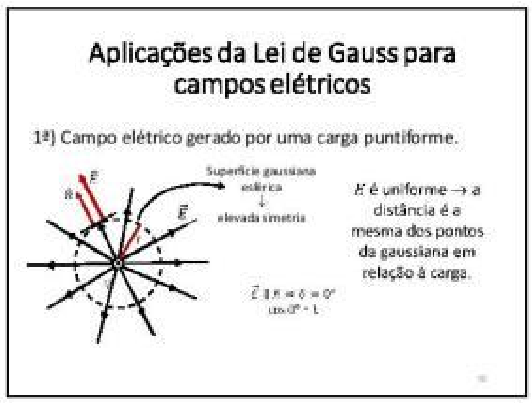
Se $\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow q_{int} = 0 \rightarrow$ As cargas estão na superfície externa.

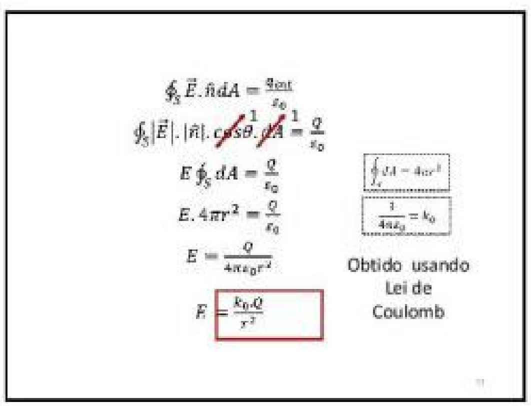
Apêndice G - Slides utilizados para ministrar a aula 6, referente às aplicações da Lei de Gauss.

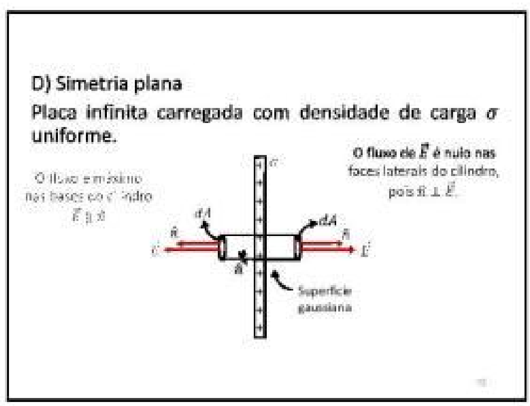












Apêndice G - Slides utilizados para ministrar a aula 6, referente às aplicações da Lei de Gauss.

$$\phi = \oint_S \vec{E}\,.\,\hat{n}\,dA = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

A carga interna à superfície gaussiana é dada por:

$$\sigma = \frac{dq_{int}}{dA} \Rightarrow dq_{int} = \sigma.\,dA \Rightarrow q_{int} = \oint_S \sigma.\,dA$$

O produto escalar: $\vec{E}.\,\hat{n} = E.\,1.\,\overset{1}{\cancel{\cos}}\,0° = E$

O campo total externo à placa (nos dois lados) é:

$$E_{total} = 2E$$

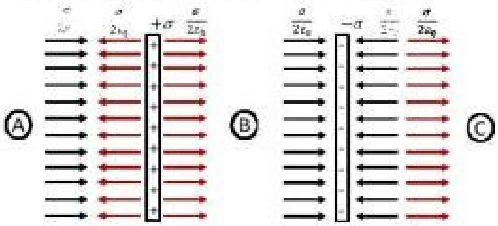
Então:

$$\oint_S \vec{E}.\,\hat{n}dA = \frac{\int \sigma.\,dA}{\varepsilon_0}$$

$$2E\oint_S dA = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\oint_S dA$$

$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, vetorialmente: $\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}}$

E) Campo elétrico entre duas placas planas e infinitas carregadas com densidades de carga $+\sigma$ e $-\sigma$.



Aplicando o Princípio da Superposição:

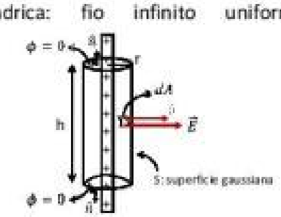
Região A $\rightarrow E_A = 0$

Região B $\rightarrow E_B = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{2\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (entre as placas)

Região C $\rightarrow E_C = 0$

F) Cálculo do campo elétrico

Simetria cilíndrica: fio infinito uniformemente carregado.



Nos pontos de S: $\begin{cases} \vec{E} \parallel \hat{n} \\ |\vec{E}| = \text{uniforme} \end{cases}$ $\vec{E}.\,\hat{n} = |\vec{E}|.\,1.\,\overset{1}{\cancel{\cos}}\,0°$

$$\lambda = \frac{dq_{int}}{dl} \Rightarrow dq = \lambda.\,dl$$

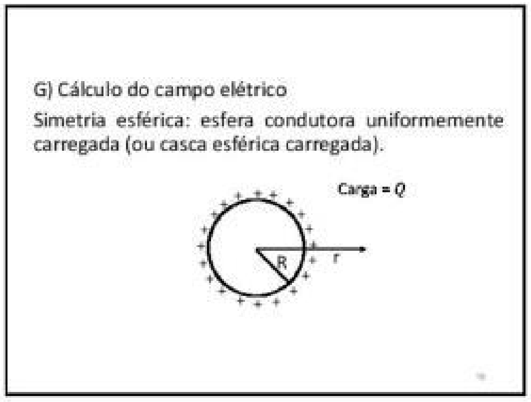
$$\int dq_{int} = \lambda\int dl \Rightarrow q_{int} = \lambda.\,h$$

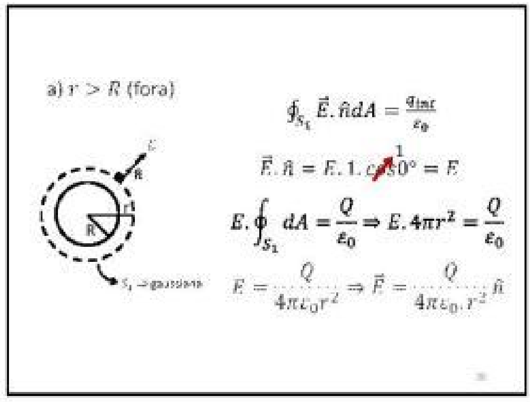
Aplicando a Lei de Gauss:

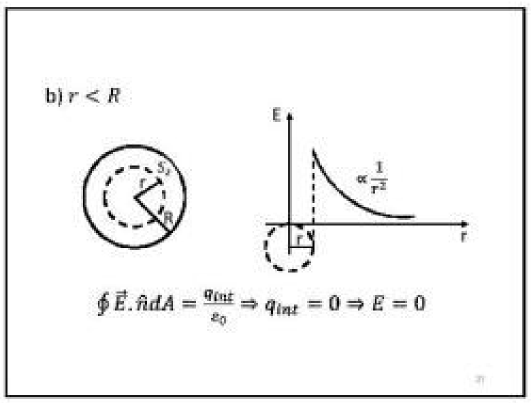
$$\phi = \oint_S \vec{E}\,.\,\hat{n}dA = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

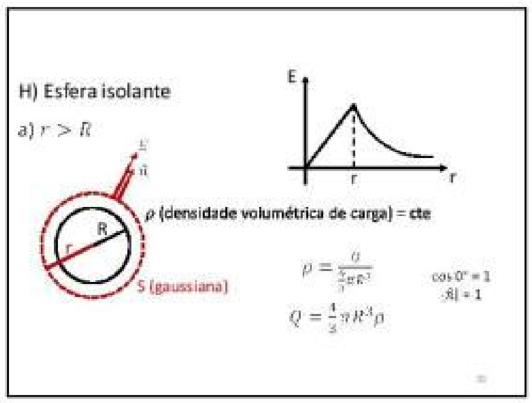
$$E\oint_S dA = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \rightarrow E.\,2\pi r.\cancel{h} = \frac{\lambda\cancel{h}}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0} \quad \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}\hat{r}}$$

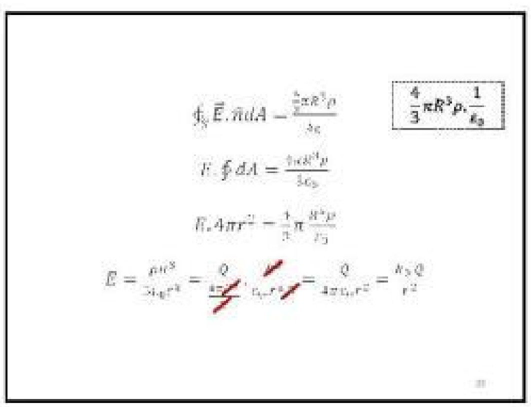
Apêndice G - Slides utilizados para ministrar a aula 6, referente às aplicações da Lei de Gauss.

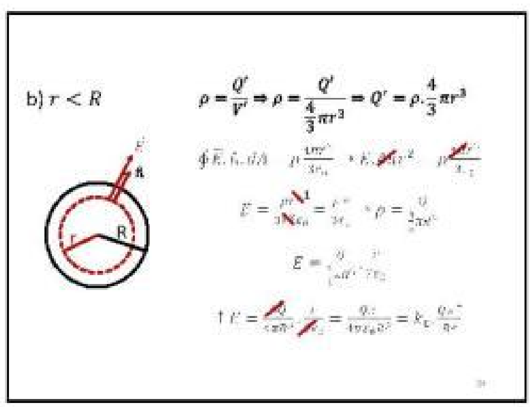




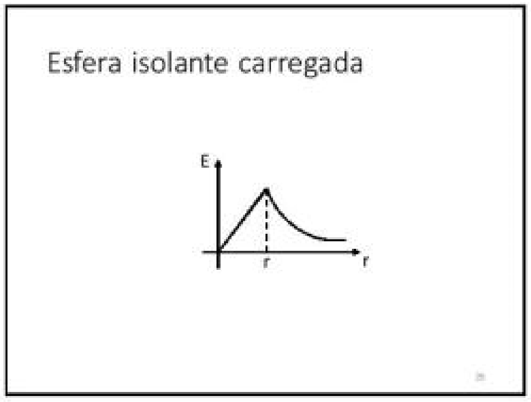


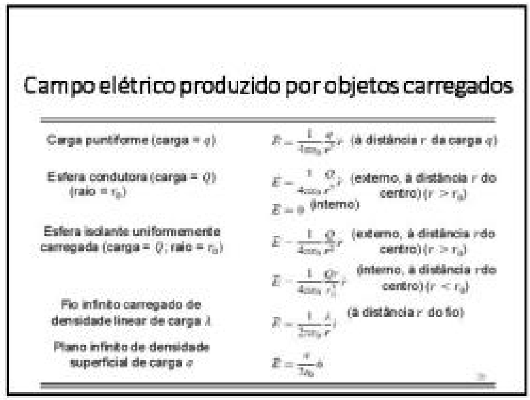






Apêndice G - Slides utilizados para ministrar a aula 6, referente às aplicações da Lei de Gauss.





Apêndice H - Slides utilizados para ministrar a aula 7, referente à Lei de Gauss para campos magnéticos.

A Lei de Gauss para campos magnéticos

O fluxo magnético total que passa através de uma superfície fechada é zero.

A Lei de Gauss para campos magnéticos na forma integral:

Lembre-se de que o campo magnético é um vetor

Produto escalar considerando a parte do vetor $\vec{B}$ paralelo ao versor $\hat{n}$ (perpendicular à superfície)

O versor normal à superfície

$$\oint_S \vec{B} \circ \hat{n}\, da = 0$$

Lembre-se de que esta integral é sobre uma superfície fechada

O campo magnético em tesla (T)

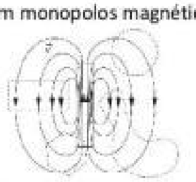
Um incremento de área em metro quadrado (m^2)

Lembre-se de que esta é uma integral de superfície (não é de volume ou de linha)

Considerando as contribuições de cada parte da superfície

Consequências da Lei de Gauss para campos magnéticos

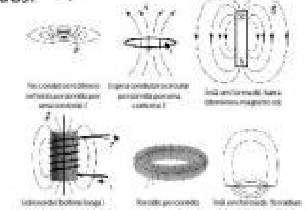
→ Não existem monopolos magnéticos.



As linhas de indução magnética entram e saem das superfícies fechadas. Lembre-se de que, externamente ao ímã, elas são orientadas do polo norte para o polo sul magnético.

O campo magnético

→ Campos magnetostáticos são produzidos por correntes elétricas ou domínios magnéticos orientados.



Propriedades dos campos magnéticos:

→ As linhas de indução do campo magnético não se originam e terminam em cargas; elas formam circuitos fechados.

→ As linhas de indução do campo magnético que parecem se originar no polo norte e terminar no polo sul de um ímã são realmente laços contínuos (dentro do ímã, as linhas do campo correm entre os polos).

Propriedades dos campos magnéticos:

→ O campo magnético resultante em qualquer ponto é a soma vetorial de todos os campos magnéticos presentes naquele ponto (princípio da superposição).

→ As linhas de indução do campo magnético não podem se cruzar, uma vez que indicariam que o campo teria duas direções diferentes no mesmo local - se os campos de duas ou mais fontes se sobrepõem, no mesmo local, somam-se vetorialmente para produzirem um único campo resultante naquele ponto.

Apêndice H - Slides utilizados para ministrar a aula 7, referente à Lei de Gauss para campos magnéticos.

A equação de Lorentz

Da mesma forma que o campo elétrico pode ser definido considerando a força elétrica sobre uma pequena carga de prova, o campo magnético pode ser definido considerando a força magnética experimentada por uma partícula carregada em movimento. Como você pode recordar, partículas carregadas experimentam força magnética apenas se elas estão em movimento em relação ao campo magnético e direção não paralela, como mostrado pela equação de Lorentz para a força magnética.

$$\boxed{\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}}$$

onde:

$\vec{F}_B$ é a força magnética,

q é a carga da partícula,

$\vec{v}$ é a velocidade da partícula (com relação a $\vec{B}$), e

$\vec{B}$ é o campo magnético.

Utilizando a definição de produto vetorial como ($a \times b$...) em que θ é o ângulo entre a e b, o módulo ou intensidade do campo magnético é dado por:

$$\boxed{|\vec{B}| = \frac{|\vec{F}_B|}{q|\vec{v}|sen(\theta)}}$$

Considerações

Comparando as equações, várias distinções importantes entre campos magnéticos e elétricos tornam-se claras:

$$\boxed{|\vec{B}| = \frac{|\vec{F}_B|}{q|\vec{v}|sen(\theta)}} \qquad \boxed{|\vec{E}| = \frac{|\vec{F}_e|}{q_0}}$$

1) Como a intensidade do campo elétrico, a intensidade do campo magnético é diretamente proporcional à intensidade da força magnética. Mas, ao contrário $\vec{E}$, que é paralelo ou antiparalelo à força elétrica, a direção de $\vec{B}$ é perpendicular à força magnética.

$$\boxed{|\vec{B}| = \frac{|\vec{F}_B|}{q|\vec{v}|sen(\theta)}} \qquad \boxed{|\vec{E}| = \frac{|\vec{F}_e|}{q_0}}$$

2) Como $\vec{E}$, o campo magnético pode ser definido através da força experimentada por uma pequena carga de prova, mas, ao contrário $\vec{E}$, a velocidade e a direção do movimento da carga de prova devem ser tomados em consideração quando se relaciona forças magnéticas e campos magnéticos.

3) Uma vez que a força magnética é perpendicular à velocidade em cada instante, a componente da força na direção de deslocamento é igual a zero, e o trabalho realizado por o campo magnético é, por conseguinte, sempre zero.

A lei de Biot-Savart

Todos os campos magnéticos estáticos são produzidos pelo movimento de cargas elétricas. A contribuição $d\vec{B}$ para o campo magnético no ponto P especificado a partir de um pequeno elemento de corrente elétrica é determinado pela lei de Biot-Savart:

A lei de Biot-Savart

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}}$$

Nesta equação:

μ_0 é a permeabilidade elétrica do vácuo,

I é a corrente através de um pequeno elemento,

$d\vec{l}$ é um vetor infinitesimal que representa o elemento de comprimento e aponta na direção da corrente,

$\hat{r}$ é um vetor unitário que aponta a partir do elemento de comprimento para o ponto P em que o campo será calculado, e

o símbolo r representa a distância entre o elemento de comprimento e P, como mostrado na figura.

Apêndice H - Slides utilizados para ministrar a aula 7, referente à Lei de Gauss para campos magnéticos.

As equações para o campo magnético na vizinhança de alguns objetos simples podem ser encontrados na Tabela:

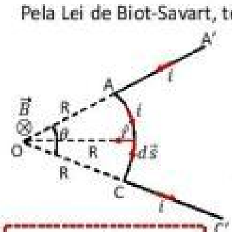
Campo magnético produzido por um fio retilíneo percorrido por uma corrente I (a uma distância r)	$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\varphi}$
Campo magnético produzido por um elemento de fio retilíneo percorrido por uma corrente I (a uma distância r)	$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$
Campo magnético produzido por uma espira circular percorrida por uma corrente I e contida no plano xy (a uma distância z ao longo do eixo z a partir do centro)	$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}\hat{k}$
Campo magnético no interior de um solenoide com N espiras, comprimento l e percorrido por uma corrente I	$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{l}\hat{k}$
Campo magnético no interior de um toroide com N espiras e raio r percorrido por uma corrente I	$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\hat{\varphi}$

Campo magnético no centro de uma espira circular

Considere um fio curvo percorrido por uma corrente i. A contribuição do campo no ponto O devido a um elemento ds do fio é mostrada na figura. Os elementos AA' e CC' não contribuem, pois neles $d\vec{s} \parallel \hat{r}$ (produto vetorial nulo, $sen\ 0° = 0$).

Em todos os pontos de AC, temos $d\vec{s} \perp \hat{r}$, portanto: $|d\vec{s} \times \hat{r}| = ds.1.sen\ 90° = ds$. A direção do campo magnético em O é entrando na página.

Pela Lei de Biot-Savart, temos:



$$dB = \frac{\mu_0 . i |d\vec{s} \times \hat{r}|}{4\pi R^2}$$

$$dB = \frac{\mu_0 . i . ds}{4\pi R^2}$$

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 . i}{4\pi R^2} ds$$

$$B = \frac{\mu_0 . i}{4\pi R^2} \int ds \ , \int ds = \theta . R$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 . i}{4\pi R^2} . \theta . R \qquad B = \frac{\mu_0 . i . \theta}{4\pi R}}$$

Se tivermos uma espira completa, $\theta = 2\pi$, temos:

$$B = \frac{\mu_0 . i . \cancel{2\pi}}{2\ \cancel{4\pi} R} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 . i}{2R}}$$

REFERÊNCIAS

LIMA, M. Lei de Ampere. In: ______. **Eletromagnetismo**. cap. 7, p. 59-68. Disponível em: <http://fma.if.usp.br/~mlima/teaching/4320292_2012/Cap7.pdf>. Acesso em: 17 jun. 2016.

Apêndice I - Slides utilizados para ministrar a aula 8, referente à Lei de Faraday.

Lei de Faraday

Numa série de experiências em 1831, Michael Faraday demonstrou que uma corrente elétrica pode ser induzida num circuito fechado alterando o fluxo magnético através do mesmo.

Enunciado da Lei de Faraday

→ A alteração do fluxo magnético através de uma superfície induz uma força eletromotriz (ddp) em qualquer caminho do contorno da superfície, e um campo magnético variável induz um campo elétrico que circula por esse contorno.

→ Em outras palavras, se o fluxo magnético sofre variações através da superfície, um campo elétrico é induzido ao longo do limite da referida superfície. Se um material condutor está presente ao longo desse limite, o campo elétrico induzido estabelece uma (fem) que conduz uma corrente através do material.

Lei de Faraday - Forma integral

$$\boxed{\oint_C \vec{E} \circ d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \circ \hat{n}\, da}$$

Aqui está uma visão detalhada da forma padrão da Lei de Faraday:

Lembre-se de que o campo elétrico é uma grandeza vetorial

Produto escalar de $\vec{E}$ e o $d\vec{l}$. Corresponde à projeção de $\vec{E}$ na direção de $d\vec{l}$ (ao longo do caminho C)

Fluxo magnético através de toda a superfície delimitada pelo caminho C

Um vetor deslocamento de módulo infinitesimal na direção do caminho C

$$\oint_C \vec{E} \circ d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\overbrace{\int_S \vec{B} \circ \hat{n}\, da}$$

Campo elétrico em $V/m = N/C$

Taxa de variação com o tempo

Diz-lhe para reunir as contribuições de cada parte do caminho fechado C em uma direção dada pela regra da mão direita

Lembre-se de que esta é uma integral de linha (não é uma integral de superfície ou uma integral de volume)

E aqui está uma visão expandida da forma alternativa da lei de Faraday:

Produto escalar de $\vec{E}$ e o $d\vec{l}$. Corresponde à projeção de $\vec{E}$ na direção de $d\vec{l}$ (ao longo do caminho C)

Lembre-se de que o campo elétrico é uma grandeza vetorial

Um vetor deslocamento de módulo infinitesimal na direção do caminho C

Fluxo da taxa de variação do campo magnético

$$\oint_C \vec{E} \circ d\vec{l} = -\overbrace{\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \circ \hat{n}\, da}$$

Campo elétrico em $V/m = N/C$

Taxa de variação do campo magnético com o tempo

Diz-lhe para reunir as contribuições de cada parte do caminho fechado C

Lembre-se de que esta é uma integral de linha (não é uma integral de superfície ou uma integral de volume)

Dadas informações sobre a variação do fluxo magnético é possível encontrar a (fem) induzida (ε):

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t}}$$

Apêndice I - Slides utilizados para ministrar a aula 8, referente à Lei de Faraday.

Campo elétrico induzido ($\vec{E}$)

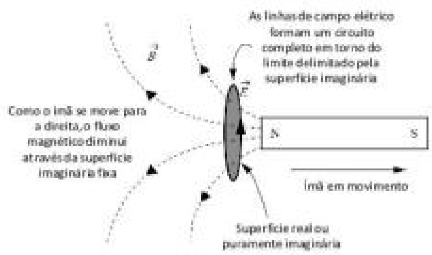
De acordo com a Lei de Faraday, um campo magnético variável produz um campo elétrico.

Tais "campos elétricos induzidos" são muito diferentes dos campos produzidos pela carga elétrica, apesar de acelerarem cargas de prova da mesma forma e serem representados por linhas de campo.

Comparando os campos elétricos:

a) Campo elétrico gerado por cargas elétricas (eletrostático)

b) Campo elétrico induzido (Lei de Faraday)



$\boxed{\oint_C ()dl}$ A integral de linha

Para entender a Lei de Faraday, é essencial que você compreenda o significado da integral de linha. Este tipo de integral é comum em Física e Engenharia.

Exemplo:

Utilizando a integral de linha vamos encontrar a massa total de um fio para o qual a sua densidade varia ao longo do seu comprimento.

Considere o fio de densidade linear variável mostrado na figura abaixo:

Para determinar a massa total do fio, dividiremos o mesmo numa série de segmentos infinitesimais, sobre cada um dos quais a densidade linear λ (massa por unidade de comprimento) é aproximadamente constante, como mostrado na figura a seguir:

A massa de cada segmento é o produto da densidade linear λ_i pelo comprimento dx_i, e a massa de todo o fio é a soma das massas dos segmentos.

Para os N segmentos temos:

$$Massa = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i dx_i$$

Permitindo que o comprimento do segmento se aproxime de zero, o somatório vira uma integral de linha e a massa do fio é dada por:

$$Massa = \int_0^L \lambda(x) dx$$

Apêndice I - Slides utilizados para ministrar a aula 8, referente à Lei de Faraday.

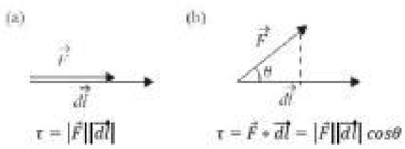
$\boxed{\oint_C \vec{A} \circ d\vec{l}}$ **A integral de caminho de um campo vetorial**

A integral de linha de um campo vetorial em torno de um caminho fechado é chamado de "circulação" do campo. Uma boa maneira de entender o significado desta operação é a de considerar o trabalho realizado por uma força que atua sobre uma partícula ao longo de um caminho.

Trabalho é a transferência de energia de um sistema para outro mediante a aplicação de uma força e de um deslocamento adequados.

É calculado pelo produto escalar da força pelo deslocamento:

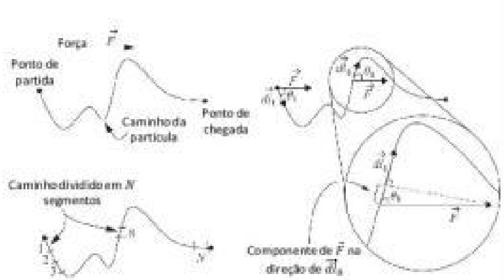
$$\boxed{\tau = \vec{F} \circ d\vec{l} = |\vec{F}||d\vec{l}|\cos(\theta)}$$



Partícula em movimento sob a influência de uma força.

→ No caso mais geral, o ângulo entre a força e o deslocamento pode variar, o que significa que a projeção da força em cada segmento pode ser diferente (e também é possível que o módulo da força mude ao longo do caminho).

→ Note-se que, como o caminho serpenteia a partir do ponto de partida ao ponto de chegada, a componente da força na direção do deslocamento varia de ponto a ponto ao longo do caminho.



Para encontrar o trabalho neste caso, o caminho pode ser pensado como uma série de segmentos infinitesimais, sobre cada um dos quais a componente da força é constante.

O trabalho infinitesimal é dado por:

$$d\tau_i = \vec{F} \circ \vec{dl}_i$$

O trabalho total ao longo do caminho:

$$\tau = \sum_{i=1}^{N} d\tau_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F} \circ \vec{dl}_i$$

Apêndice I - Slides utilizados para ministrar a aula 8, referente à Lei de Faraday.

Considerando $\overrightarrow{dl}_i$ tendendo a zero, o somatório se torna uma integral de linha ou de caminho:

$$\tau = \int_C \vec{F} \circ \overrightarrow{dl}$$

Esta integral é semelhante à integral de linha usada para encontrar a massa de um fio de densidade variável mas neste caso, o integrando é o produto escalar entre os dois vetores em vez da função escalar λ.

$\boxed{\oint_C \vec{E} \circ \overrightarrow{dl}}$ A circulação do campo elétrico

A circulação do campo elétrico em torno de um circuito recebe o nome de força eletromotriz (fem). É claro, a integral de caminho de um campo elétrico não é uma força (a qual deve ter unidades SI, em newtons), mas sim uma força por unidade de carga ($^N/_C$) integrado ao longo de uma distância (m).

$$\frac{N}{C}.m = V(volt)$$

força eletromotriz (fem) = ddp = $\oint_C \vec{E} \circ \overrightarrow{dl}$

$$\oint_C \vec{E} \circ \overrightarrow{dl} = \oint_C \frac{\vec{F}}{q} \circ \overrightarrow{dl} = \frac{\oint_C \vec{F} \circ \overrightarrow{dl}}{q} = \frac{\tau}{q}$$

Assim, a circulação do campo elétrico induzido é igual à energia dada para cada coulomb de carga que se move em torno do circuito.

$\boxed{\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \circ \hat{n}\, da}$ A taxa de variação do fluxo magnético

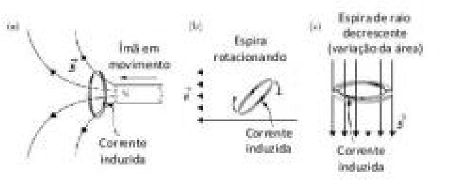
O fluxo magnético (proporcional ao número de linhas do campo magnético) através de uma superfície aberta:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \circ \hat{n}\, da$$

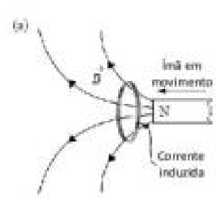
Na Lei de Faraday é importante a taxa de variação do fluxo através de uma superfície aberta:

$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \circ \hat{n}\, da$$

Quais são as maneiras de variar o fluxo?



A intensidade do vetor campo magnético $\vec{B}$ pode variar com o tempo, fazendo com que o número de linhas do campo que atravessam a superfície se altere, variando o fluxo.



Apêndice I - Slides utilizados para ministrar a aula 8, referente à Lei de Faraday.

O ângulo entre $\vec{B}$ e a normal à superfície pode mudar, fazendo com que o número de linhas do campo que atravessam à superfície se altere, variando o fluxo.

A área da superfície pode alterar: mesmo se a magnitude de $\vec{B}$e a direção entre $\vec{B}$e $\hat{n}$permanecem inalterados, variando a área de superfície S vai mudar o valor do fluxo através da superfície.

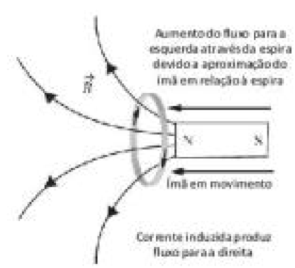
E uma vez que o lado esquerdo da Lei de Faraday é a fem induzida, agora você deve entender a relação entre fem induzida e a variação do fluxo magnético através da superfície. A Lei de Faraday diz-lhe que a mudança do fluxo magnético através de uma superfície induz uma fem em qualquer circuito que é um limite a essa superfície.

A Lei de Lenz

→ Correntes induzidas pela mudança de fluxo magnético sempre fluem no sentido de modo a opor-se à mudança no fluxo.

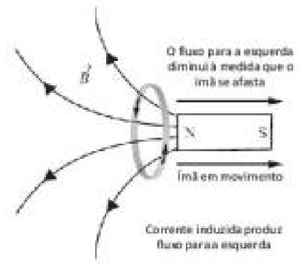
→ A Lei de Lenz indica o sentido da circulação do campo elétrico induzido em torno de um percurso especificado, mesmo se nenhuma corrente realmente flui ao longo desse percurso.

À medida que o fluxo para a esquerda devido ao ímã aumenta, o fluxo gerado pela corrente induzida no sentido mostrado, produz o fluxo magnético induzido para a direita (de acordo com a regra da mão direita envolvente) que se opõe ao aumento do fluxo do ímã.



Apêndice I - Slides utilizados para ministrar a aula 8, referente à Lei de Faraday.

O ímã está afastando-se da espira e o fluxo para a esquerda através do circuito está diminuindo. Neste caso, a corrente induzida flui no sentido oposto, produzindo fluxo para esquerda para compensar a diminuição de fluxo gerado pelo ímã.



Apêndice J - Slides utilizados para ministrar a aula 9, referente à Lei de Ampère-Maxwell.

A Lei de Ampère-Maxwell

Há milhares de anos, as únicas fontes conhecidas de campos magnéticos eram minérios de ferro e outros materiais que tinham sido acidentalmente ou deliberadamente magnetizados. Em seguida, em 1820, o físico francês André-Marie Ampère, ouviu falar que, na Dinamarca, Hans Christian Oersted tinha desviado a direção de uma agulha de uma bússola passando uma corrente elétrica na sua proximidade e, dentro de uma semana, Ampère começara a quantificar a relação entre correntes elétricas e campos magnéticos.

A Lei de Ampère-Maxwell

→ A Lei de Ampère relativa a uma corrente elétrica constante a um campo magnético circulante era conhecida quando James Clerk Maxwell começou seu trabalho na área, na década de 1850.

→ No entanto, a Lei de Ampère era conhecida para ser aplicada somente a situações estacionárias, ou seja, envolvendo correntes constantes.

→ Foi a adição de outro termo por James Clerk Maxwell (1850) – uma mudança do fluxo do campo elétrico – que estendia a aplicabilidade da Lei de Ampère para condições variáveis com o tempo.

A presença deste termo na equação

↓

agora chamada **Lei de Ampère-Maxwell**

↓

permitiu a Maxwell <u>explicar a natureza eletromagnética da luz</u> e desenvolver uma <u>teoria mais abrangente do eletromagnetismo</u>.

Enunciado da Lei de Ampère-Maxwell

Uma corrente elétrica ou uma taxa de variação do fluxo do campo elétrico através de uma superfície produz um campo magnético circulante ao redor de qualquer caminho fechado que delimita a superfície.

A Lei de Ampère-Maxwell na forma integral:

Lembre-se de que o campo magnético é um vetor

Produto escalar considerando a projeção de $\vec{B}$ paralela ao $d\vec{l}$ (ao longo do caminho C)

Vetor deslocamento de módulo infinitesimal ao longo do caminho C

Corrente elétrica em ampere (A)

Taxa de variação com o tempo

$$\oint_C \vec{B} \circ \overrightarrow{dl} = \mu_0 \Big(i_{env} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \underbrace{\int_S \vec{E} \circ \hat{n}\, da}_{\text{O fluxo do campo elétrico através da superfície delimitada por } C} \Big)$$

Campo magnético em tesla (T)

A permeabilidade magnética do vácuo

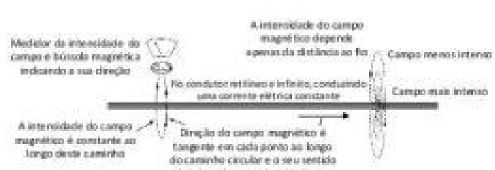
Lembre-se de que somente a corrente envolvida pelo circuito fechado contribui

Permissividade elétrica do vácuo

Considerando a soma de todas as contribuições de cada parte do caminho fechado C no sentido dado pela regra da direita

$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l}$ A circulação do campo magnético

Explorando o campo magnético em torno de um fio condutor e infinito conduzindo uma corrente i



Apêndice J - Slides utilizados para ministrar a aula 9, referente à Lei de Ampère-Maxwell.

$\boxed{\mu_0}$ A permeabilidade magnética no vácuo

A constante de proporcionalidade entre a circulação do campo magnético no lado esquerdo da Lei de Ampère-Maxwell e a corrente interna e a taxa de variação do fluxo no lado direito é μ_0

↓

a **PERMEABILIDADE MAGNÉTICA NO VÁCUO**

Assim como a permissividade elétrica caracteriza a resposta de um dielétrico a um campo elétrico aplicado, a permeabilidade magnética determina a resposta do material a um campo magnético aplicado.

$$\boxed{\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ Vs/Am}$$

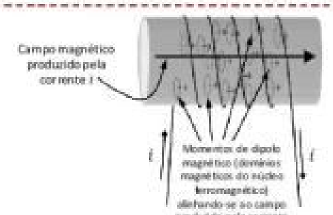
$$\frac{Vs}{Am} = \frac{Volts.segundos}{Ampere.metros}$$

→ Como no caso da permissividade elétrica na lei de Gauss para campos elétricos, a presença dessa grandeza não significa que a Lei de Ampère-Maxwell aplica-se somente a fontes de campos no vácuo.

→ Uma diferença interessante entre o efeito de dielétricos em campos elétricos e o efeito das substâncias magnéticas em campos magnéticos é que o campo magnético é realmente mais forte do que o campo aplicado dentro de muitos materiais magnéticos.

A razão para isto é que estes materiais se tornam magnetizados quando expostos a um campo magnético externo, e o campo magnético induzido é na mesma direção do campo aplicado, conforme mostrado na figura a seguir:

Efeito do núcleo de ferro sobre o campo magnético dentro do solenoide



A permeabilidade de um material magnético é muitas vezes expressa como a permeabilidade relativa, que é o fator pelo qual a permeabilidade do material ultrapassa a do vácuo.

$$\boxed{\text{Permeabilidade relativa } \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}}$$

$$\boxed{\text{Permeabilidade relativa } \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}}$$

Materiais são classificados como:

✓diamagnético,

✓paramagnético,

✓ferromagnético,

com base na permeabilidade relativa.

Apêndice J - Slides utilizados para ministrar a aula 9, referente à Lei de Ampère-Maxwell.

→ $\mu_r < 1{,}0$ – **Substâncias diamagnéticas**

O campo induzido fracamente se opõe ao campo aplicado.

Exemplos: ouro e prata - $\mu_r \cong 0{,}99997$.

→ $\mu_r > 1{,}0$– **Substâncias paramagnéticas**

O campo induzido reforça fracamente o campo aplicado.

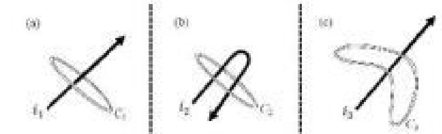
Exemplo: Alumínio - $\mu_r = 1{,}00002$.

→ $\mu_r \gg 1{,}0$ – **Substâncias ferromagnéticas**

A permeabilidade depende do campo magnético aplicado. Valores típicos de máximos de permeabilidade variam de várias centenas para níquel e cobalto para mais de 5000 para ferro puro.

i_{env} - A corrente elétrica envolvida

Correntes envolvidas (e não envolvidas) por caminhos fechados.



(a) A corrente i_1 contribui para a circulação, gerando um campo magnético cujo sentido é dado pela regra da mão direita ($i_{env} = i_1$).

(b) A corrente i_2 gera um $i_{env} = 0$, pois gera circulações opostas, entrando e saindo da superfície delimitada pela amperiana.

(c) A corrente i_3 não contribui na circulação, pois não está envolvida pela amperiana.

As membranas esticadas entre os caminhos facilitam as análises:

$\frac{d}{dt}\int_S \vec{E} \circ \hat{n}\, da$ A taxa de variação do fluxo

Maxwell e seus contemporâneos perceberam que a Lei de Ampère como originalmente concebida se aplica somente a correntes elétricas estacionárias (constantes).

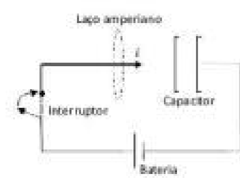
$$\boxed{\oint_C \vec{B} \circ \vec{dl} = \mu_0(i_{env})}$$

A inconsistência na Lei de Ampère quando aplicada ao processo de carga de um capacitor servirá para demonstrar a necessidade do termo

↓

taxa de variação do fluxo do campo elétrico na Lei de Ampère-Maxwell

Considere o circuito mostrado na figura abaixo. Quando o interruptor é fechado, uma corrente flui da bateria e carrega o capacitor. Esta corrente produz um campo magnético em torno dos fios, e a circulação desse campo é dado pela Lei de Ampère.

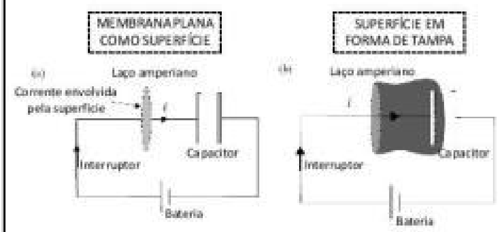


Apêndice J - Slides utilizados para ministrar a aula 9, referente à Lei de Ampère-Maxwell.

Surge um problema grave para determinar a corrente envolvida. De acordo com a Lei de Ampère, a corrente envolvida inclui todas as correntes que penetram em qualquer superfície para qual caminho C é um limite.

No entanto, teremos respostas muito diferentes para a corrente envolvida se escolhermos uma membrana plana como a superfície, ou uma superfície em forma de "tampa", como mostram as figuras a seguir:

Superfícies alternativas para a determinação da corrente envolvida.



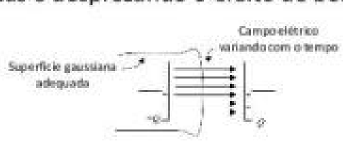
Apesar da corrente atravessar a membrana plana quando o capacitor está sendo carregado, nenhuma corrente penetra a superfície em forma de "tampa" (a carga se acumula na placa de capacitor).

A amperiana é o limite para ambas as superfícies, e a integral do campo magnético em torno da amperiana deve ser a mesma, não importa qual superfície você escolher (inconsistência).

Se não ocorre fluxo gerado por corrente entre as placas do capacitor, o que mais poderia estar acontecendo naquela região que serviria como a fonte de um campo magnético?

→ Se a carga está se acumulando nas placas com o processo de carga do capacitor, significa que o campo elétrico entre as placas deve estar mudando com o tempo. O fluxo do campo elétrico através da superfície em forma de "tampa" entre as placas também deve estar mudando.

Podemos usar a Lei de Gauss para campos elétricos para determinar a alteração do fluxo. Escolhendo uma superfície gaussiana adequada, que seja perpendicular ao campo elétrico e que o campo elétrico seja uniforme entre as placas, ou zero perpendicular às placas e desprezando o efeito de bordas:



O fluxo do campo elétrico entre as placas é dado por:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \circ \hat{n}\, da = \int_S \frac{\sigma}{\varepsilon_0} da = \frac{Q}{A\varepsilon_0}\int_S da = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Encontrando a taxa de variação do fluxo:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_S \vec{E} \circ \hat{n}\, da\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{\varepsilon_0}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{dQ}{dt}$$

Multiplicando ambos os membros da equação pela permissividade elétrica no vácuo:

$$\boxed{\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\int_S \vec{E} \circ \hat{n}\, da\right) = \frac{dQ}{dt}}$$

Apêndice J - Slides utilizados para ministrar a aula 9, referente à Lei de Ampère-Maxwell.

Assim, a mudança do fluxo do campo elétrico com o tempo multiplicado pela permissividade tem unidades de carga dividida pelo tempo (coulombs por segundo ou amperes em unidades SI), que é, naturalmente, a unidade de corrente.

Por razões históricas, o produto da permissividade e a mudança do fluxo do campo elétrico através de uma superfície chama-se de corrente de 'deslocamento' mesmo que nenhuma carga realmente flua através da superfície.

$$\boxed{i_d = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\int_S \vec{E} \circ \hat{n}\ da\right)}$$

Aplicações da Lei de Ampère para o cálculo de campos magnéticos em situações de alta simetria

a) Fio retilíneo e infinito

Em C: $\begin{cases} \vec{B} \parallel \vec{dl} \\ |\vec{B}|\ é\ uniforme \end{cases}$

$$\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \oint_C B\ dl\ cos0° =$$

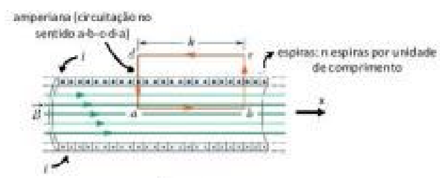
$$\oint_C B\ dl = B \oint_C dl = B(2\pi r)$$

Como: $\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 . i$ (Lei de Ampère)

$$B.2\pi r = \mu_0 . i \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 . i}{2\pi r}}$$

Vetorialmente: $\vec{B} = \frac{\mu_0 . i}{2\pi r}\hat{\varphi}\hat{\varphi} \perp \hat{r}$

b) Solenoide



$$\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 . i_{env}$$

$$i_{env} = n.h.i$$

$$\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \int_a^b \vec{B}.\vec{dl} + \underbrace{\int_b^c \cancel{\vec{B}.\vec{dl}}^{\,0}}_{\vec{B} \perp \vec{dl}} + \underbrace{\int_c^d \cancel{\vec{B}.\vec{dl}}^{\,0}}_{\vec{B} = \vec{0}} + \underbrace{\int_d^a \cancel{\vec{B}.\vec{dl}}^{\,0}}_{\vec{B} \perp \vec{dl}} = \mu_0 . n.h.i$$

Então;

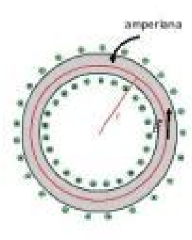
$$\int_a^b \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 . n.h.i$$

$$B.h = \mu_0 . n.h.i$$

$$B = \mu_0 . i.n$$

Vetorialmente: $\vec{B} = \mu_0 . i.n.\hat{x}$ $\quad n = \frac{N}{L}$

c) Toroide



$B(r)$:

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 . i_{env}$$

N espiras:

$$B.2\pi r = \mu_0 . N.i$$

$B(r) = \frac{\mu_0 . N.i}{2\pi r}$ (campo não uniforme)

$\frac{N}{2\pi r} = n'$ (compactamento)

$$B(r) = \mu_0 . i.n'$$

$$\vec{B}(r) = \mu_0 . i.n'.\hat{\varphi}$$

Apêndice K - Lista de exercícios envolvendo limites

1) Calcule os limites:

a) $\lim_{x \to 1} (4x^2 - 7x + 5)$

b) $\lim_{x \to 2} \frac{3x+2}{x^2-6x+5}$

c) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$

d) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

e) $\lim_{x \to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$

f) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

g) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x < 2 \\ 0 & \text{se } x = 2 \\ x - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

I) $\lim_{x \to 2_+} f(x)$ II) $\lim_{x \to 2_-} f(x)$ III) $\lim_{x \to 2} f(x)$

h) $\lim_{x \to 2} \frac{3x-4}{(x-2)^2}$

i) $\lim_{x \to -1} \frac{5x+2}{|x+1|}$

GABARITO: Apêndice K - Lista de exercícios envolvendo limites

1)

a) 2

b) $-8/3$

c) $2/5$

d) $1/2$

e) n

f) 1

g) I) 1 II) -3 III) Não existe.

h) $+\infty$

i) $-\infty$

Apêndice L - Lista de exercícios envolvendo integrais

1) Calcular:

a) $\int (x^2 + x^3 - 2x)\, dx$

b) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x^3}\right)\, dx$

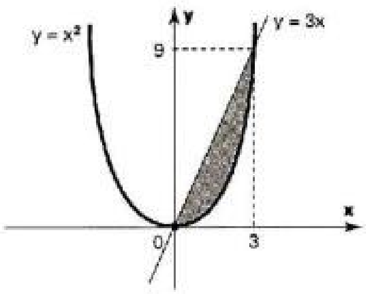
c) $\int (2e^x + 2^x)\, dx$

d) $\int \left(\cos x + \frac{1}{2}.\, sen\, x - \frac{1}{x}\right)\, dx$

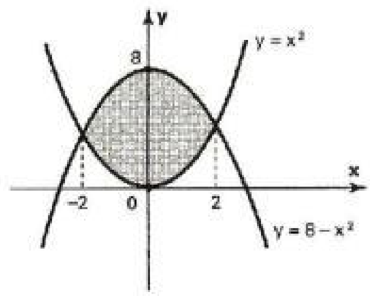
e) $\int \left(\frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\, dx$

2) Calcule a área das regiões indicadas nas figuras:

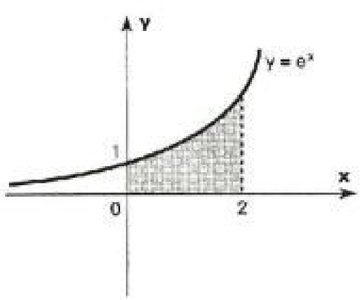
a)



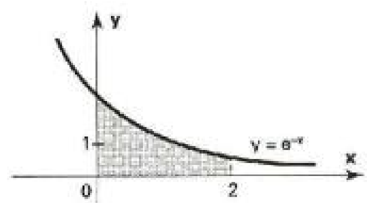
b)



c)



d)



3) Calcule:

a) $\int e^{3x}\, dx$

b) $\int (sen\, x)^5 \cos x\, dx$

c) $\int sen\, 5x\, dx$

d) $\int \cos(3x + 1)\, dx$

e) $\int (3 - 2x)^4\, dx$

GABARITO: Apêndice L - Lista de exercícios envolvendo integrais

2)

a) $\frac{9}{2}\ ua$ b) $\frac{64}{3}\ ua$ c) $(e^2 - 1)\ ua$ d) $\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)\ ua$

$ua \Rightarrow unidades\ de\ \text{área}$

3)

a) $\frac{1}{3}e^{3x} + C$

b) $\frac{(senx)^6}{6} + C$

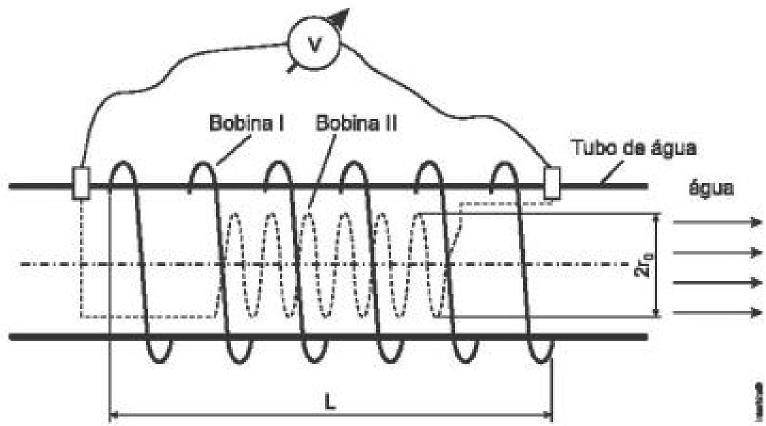
c) $\frac{-cos5x}{5} + C$

d) $\frac{sen(3x+1)}{3} + C$

e) $\frac{-(3-2x)^5}{10} + C$

Apêndice M - Lista de exercícios envolvendo a lei de Faraday

1)



Considere a figura acima. A bobina I, com N_1 espiras, corrente i e comprimento L, gera um campo magnético constante na região da bobina II. Devido à variação da temperatura da água que passa no cano, surge uma tensão induzida na bobina II com N_2 espiras e raio inicial r_0. Determine a tensão induzida na bobina II medida pelo voltímetro da figura.

Dados:

- permissividade da água: μ;
- coeficiente de dilatação da bobina: α;
- variação temporal da temperatura: b.

Observações:

- considere que $\frac{\Delta r^2}{\Delta t} = 2r_0 \frac{\Delta r}{\Delta t}$, onde Δr e Δt são respectivamente, a variação do raio da bobina II e a variação do tempo;
- suponha que o campo magnético a que a bobina II está sujeita é constante na região da bobina e igual à determinada no eixo central das bobinas.

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

Se precisar, utilize os valores das constantes aqui relacionadas.

Constante dos gases: $R = 8J/(mol \cdot K)$.

Pressão atmosférica ao nível do mar: $P_0 = 100\,kPa$.

Massa molecular do $CO_2 = 44$ u.

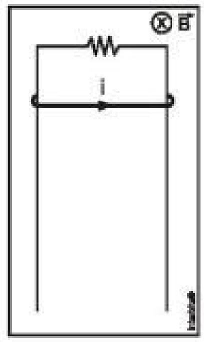
Calor latente do gelo: $80\,cal/g$.

Calor específico do gelo: $0{,}5\,cal/(g \cdot K)$.

$1cal = 4 \times 10^7 erg$.

Aceleração da gravidade: $g = 10{,}0\,m/s^2$.

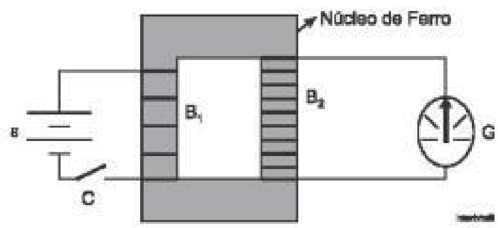
2)



Uma haste condutora, de comprimento igual a 1,0m e de peso igual a 10,0 N, cai a partir do repouso, deslizando nos fios metálicos dispostos no plano vertical e interligados por um resistor de resistência elétrica igual a $1,0\Omega$, conforme a figura.
Desprezando-se a forças dissipativas e sabendo-se que o conjunto está imerso na região de um campo magnético uniforme de intensidade igual a 1,0T, o módulo da velocidade máxima atingida pela haste é igual, em m/s, a:

a) 10,0 b) 15,0 c) 21,0 d) 25,0 e) 30,0

3) A figura a seguir representa um esquema de uma das experiências que Michael Faraday (século 19) realizou para demonstrar a indução eletromagnética.



Nessa figura, uma bateria de tensão constante ε é conectada a uma chave interruptora C e a uma bobina B_1, que, por sua vez, está enrolada a um núcleo de ferro doce, ao qual também se enrola uma outra bobina B_2, esta conectada a um galvanômetro G, que poderá indicar a passagem de corrente elétrica.

Quando a chave C fecha o circuito com a bobina B_1, o ponteiro do galvanômetro G :

a) não registra qualquer alteração, porque a fonte de corrente do circuito da bobina B_1 é contínua.

b) não registra qualquer alteração, porque a fonte de corrente do circuito só inclui a bobina B_1.

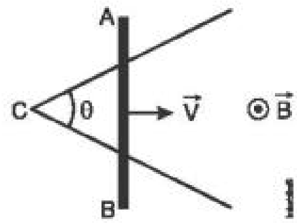
c) indica a passagem de corrente permanente pela bobina B_2.

d) indica a passagem de corrente pela bobina B_2 por um breve momento, e logo volta à posição original.

e) gira alternadamente para a direita e para a esquerda, indicando a presença de corrente alternada circulando pela bobina B_2.

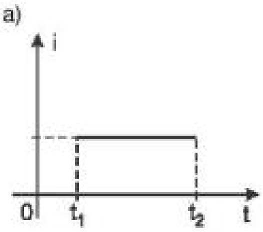
4) Numa região onde atua um campo magnético uniforme $\vec{B}$ vertical, fixam-se dois trilhos retos e homogêneos, na horizontal, de tal forma que suas extremidades ficam unidas formando entre si um ângulo θ.

Uma barra condutora AB, de resistência elétrica desprezível, em contato com os trilhos, forma um triângulo isósceles com eles e se move para a direita com velocidade constante $\vec{V}$, a partir do vértice C no instante $t_0 = 0$, conforme ilustra a figura abaixo.

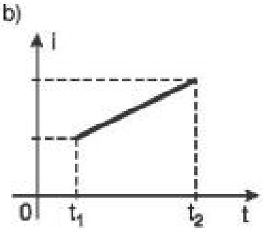


Sabendo-se que a resistividade do material dos trilhos não varia com a temperatura, o gráfico que melhor representa a intensidade da corrente elétrica i que se estabelece neste circuito, entre os instantes t_1 e t_2, é

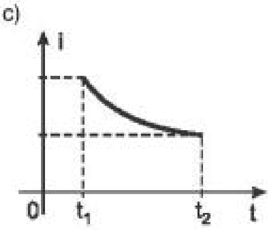
a)



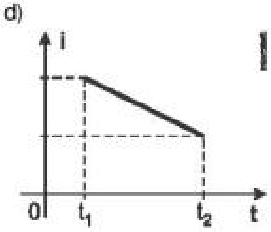
b)



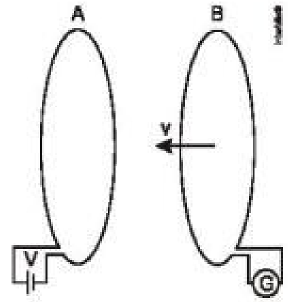
c)



d)



5) Observe a figura abaixo:



Esta figura representa dois circuitos, cada um contendo uma espira de resistência elétrica não nula. O circuito A está em repouso e é alimentado por uma fonte de tensão constante V. O circuito B aproxima-se com velocidade constante de módulo v, mantendo-se paralelos os planos das espiras. Durante a aproximação, uma força eletromotriz (f.e.m.) induzida aparece na espira do circuito B, gerando uma corrente elétrica que é medida pelo galvanômetro G.

Sobre essa situação, são feitas as seguintes afirmações.

I. A intensidade da f.e.m. induzida depende de v.

II. A corrente elétrica induzida em B também gera campo magnético.

III. O valor da corrente elétrica induzida em B independe da resistência elétrica deste circuito.

Quais estão corretas?

a) Apenas I.

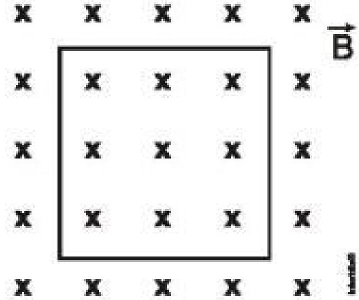
b) Apenas II.

c) Apenas III.

d) Apenas I e II.

e) I, II e III.

6) Na figura a seguir está representada uma espira quadrada de lado igual a 10,0 cm, situada no interior de um campo magnético uniforme **B**, perpendicular ao plano do papel e dirigido para dentro do papel, cuja intensidade é 0,50 Weber/m². O plano formado pela espira é paralelo ao papel. Quando o campo magnético tem seu sentido completamente invertido, surge na espira uma força eletromotriz induzida de 5,0 V.



O intervalo de tempo médio utilizado para inverter completamente o sentido do campo magnético, neste caso, é:

a) $1{,}0 \times 10^{-4}$ s b) $1{,}0 \times 10^{-3}$ s c) $2{,}0 \times 10^{-3}$ s d) 10 s e) zero

GABARITO: Apêndice M - Lista de exercícios envolvendo a lei de Faraday

1) $U = 2\pi r_0^2 \alpha b \frac{N_1 N_2 \mu i}{L}$

2) A

3) D

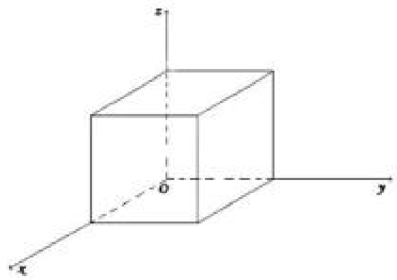
4) A

5) D

6) C

Apêndice N - Lista de exercícios envolvendo a lei de Gauss

1) O cubo abaixo tem 1,40 m de aresta e está orientado da forma mostrada na figura em uma região onde existe um campo elétrico uniforme. Determine o fluxo elétrico através da face direita do cubo se o campo elétrico, em newtons por coulomb, é dado por (a) 6,00$\hat{\imath}$; (b) -2,00$\hat{\jmath}$; (c) -3,00$\hat{\imath}$; +4,00$\hat{k}$. (d) Qual é o fluxo total através do cubo nos três casos?



2) Uma carga pontual de 1,8 μC está no centro de uma superfície gaussiana cúbica de 55 cm de aresta. Qual é o fluxo elétrico através da superfície?

3) Uma linha infinita de cargas produz um campo de módulo $4{,}5 \times 10^4\ N/C$ a uma distância de 2,0 m. Calcule a densidade linear de cargas.

4) Uma esfera não condutora com 5,0 cm de raio possui uma densidade volumétrica uniforme de cargas $\rho = 3{,}2\ \mu C/m^3$. Determine o módulo do campo elétrico (a) a 3,5 cm e (b) a 8,0 cm do centro da esfera.

5) Enquanto um capacitor de placas paralelas com placas circulares de 20 cm de diâmetro está sendo carregado, a densidade de corrente da corrente de deslocamento na região entre as placas é uniforme e tem um módulo de $20A/m^2$. (a) Calcule o módulo B do campo magnético a uma distância $r = 50\ mm$ do eixo de simetria dessa região. (b) Calcule $\frac{dE}{dt}$ nessa região.

GABARITO: Apêndice N - Lista de exercícios envolvendo a lei de Gauss

1)

a) 0 b) $-3{,}92\ N.m^2/C$ c) 0 d) 0

2) $2.10^5\ N.m^2/C$

3) $5\ \mu C/m$

4) Veja o campo elétrico da esfera isolante carregada.

5)

a) $0{,}63\ \mu T$

b) $2{,}3.10^{11}\ V/m$

Apêndice O: Questionário nº 1

Data: ___/___/___	ENSINO MÉDIO 3º ano - Prof. Paulo Roberto Aluno(a):	**NOÇÕES INTUITIVAS DE LIMITES E DERIVADAS**

1) O potencial elétrico (V) criado por uma carga puntiforme (Q), a uma distância d da mesma é dado por:

$$V = \frac{kQ}{d}$$

em que k é a constante eletrostática. Considerando Q > 0, faça o esboço do gráfico de V em função de d e diga o que acontece com o valor do potencial se a distância d for muito pequena ou muito grande.

2) Repita a questão anterior considerando Q < 0.

3) Qual é a diferença entre velocidade escalar média e velocidade escalar instantânea?

4) A partir da função horária da posição de um movimento uniformemente variado: $S = -2 + 2t + 3t^2$ (SI), determine a função horária da velocidade e a aceleração.

5) A partir da função horária da elongação de um MHS: x = 0,2cos $(\pi + \frac{\pi}{2}t)$ (SI), determine as funções horárias da velocidade e aceleração.

6) O que você entende por inclinação de uma reta? Nos pontos de máximo e mínimo do gráfico de uma parábola da função dada por: $y = ax^2+bx +c$ em que a, b e c são constantes reais, qual é a inclinação da reta que tangencia esses pontos? Faça um esboço de cada caso.

7) O que ocorre com o movimento de uma partícula nos pontos de máximo e mínimo da função horária da posição $S = S_0 + v_0t \pm at^2/2$?

Apêndice P: Teste sobre limites e derivadas

TESTE

1) (FGV-SP) O limite $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$:

a) não existe. b) é 4. c) é 0. d) é 2. e) é $+\infty$.

2) (Fuvest-SP) Sabe-se que $\lim_{x \to 0} \frac{1-cos^2x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{sen^2x}{x^2} = 1$. Conclui-se que $\lim_{x \to 0} \frac{1-cosx}{x^2}$:

a) é $\frac{1}{2}$. b) é 0. c) é infinito. d) é indeterminado. e) não existe.

3) (PUC-SP) O $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-x^2-2x}{x^2-3x+2}$ vale:

a) 0. b) 1. c) 2. d) 4. e) 6.

4) (UFPA) A função $F(x) = x^2 - x + 35$ é a derivada da função $f(x)$. Qual das expressões abaixo corresponde à função $f(x)$?

a) $2x - 1$

b) $x^3 - x^2 + 35$

c) $x^3 - x^2 + 35x + 4$

d) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 35x - 1$

e) $\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{3} + 35x + 1$

5) (MACK-SP) Se $f(x) = \frac{x^2}{a}$, então $f'(a)$ vale:

a) 2. b) 1. c) 0. d) a. e) 2a.

Apêndice Q: Questionário nº 2

Data: ___/___/___	ENSINO MÉDIO 3º ano - Prof. Paulo Roberto Aluno(a):	**Questionário 2 Eletromagnetismo**

1) O que você entende por campo elétrico?

2) Quais são as semelhanças e diferenças entre o campo elétrico e o campo gravitacional?

3) O que você entende por linhas de força ou linhas de campo?

4) O que você compreende por campo magnético? Quais são as fontes de campo magnético que você conhece?

5) Quais são as expressões do fluxo magnético, trabalho e força magnética? Quais são semelhantes?

6) É possível estabalecer a idéia de fluxo do campo elétrico.

7) O que é densidade superficial de carga?

8) Qual é a expressão da capacitância de um capacitor a vácuo de área das placas A, e d, a distância entre elas?

9) Qual é a expressão do campo elétrico uniforme entre as placas de um capacitor plano carregado?

10) qual é a expressão da intensidade do campo elétrico criado por uma carga puntiforme no vácuo?