



Universidade Federal de Goiás
Regional Catalão

Unidade Acadêmica Especial de
Matemática e Tecnologia

Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



PROFMAT

**UMA INTRODUÇÃO À PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO
UTILIZANDO O MÉTODO DA SEÇÃO ÁUREA E
ALGORITMOS GENÉTICOS**

ADRIANA CARVALHO ROSA

Catalão/ GO

2016

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: ☒ **Dissertação** ☐ **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Adriana Carvalho Rosa		
E-mail:	adriana.cbba@gmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? ☐ Sim ☒ Não			
Vínculo empregatício do autor	Professora do IFG		
Agência de fomento:	CAPES	Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	GO CNPJ: 00.889.834/0001-08
Título:	Uma Introdução à Problemas de Otimização Utilizando o Método da Seção Áurea e Algoritmos Genéticos		
Palavras-chave:	Otimização, Seção Áurea, Algoritmos Genéticos, Educação Básica.		
Título em outra língua:	An Introduction To Optimization Problems Using Method Golden Section And Genetic Algorithms		
Palavras-chave em outra língua:	Optimization, Golden Section, Genetic Algorithm, Basic Education.		
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	26/02/2016		
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT		
Orientador (a):	Dr. Romes Antonio Borges		
E-mail:	kvtborges@gmail.com		
Co-orientador (a):*			
E-mail:			

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM ☐ NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Adriana Carvalho Rosa
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 21 / 03 / 16

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Adriana Carvalho Rosa

**UMA INTRODUÇÃO À PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO
UTILIZANDO O MÉTODO DA SEÇÃO ÁUREA E
ALGORITMOS GENÉTICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Romes Antônio Borges

Catalão

2016

iii

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Rosa, Adriana Carvalho
UMA INTRODUÇÃO À PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO UTILIZANDO O
MÉTODO DA SEÇÃO ÁUREA E ALGORITMOS GENÉTICOS [manuscrito]
/ Adriana Carvalho Rosa. - 2016.
xv, 78 f.: il.

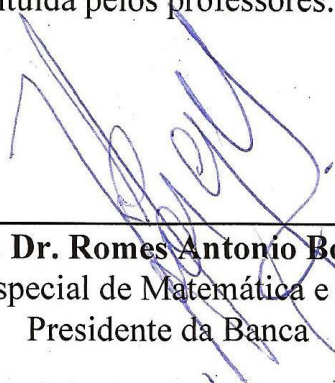
Orientador: Prof. Dr. Romes Antônio Borges.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional
Catalão, Catalão, Programa de Pós-Graduação em Matemática
(PROFMAT - profissional), Catalão, 2016.
Bibliografia.
Inclui gráfico, tabelas, algoritmos, lista de figuras, lista de tabelas.

1. OTIMIZAÇÃO. 2. Seção Áurea. 3. Algoritmos Genéticos. 4. Educação
Básica. I. Borges, Dr. Romes Antônio, orient. II. Título.

Adriana Carvalho Rosa

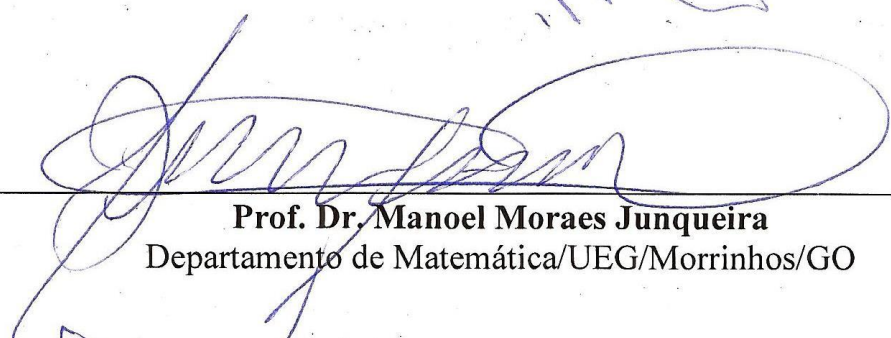
**“Uma Introdução à Problemas de Otimização
Utilizando o Método da Seção Áurea e Algoritmos
Genéticos”**

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 26 de fevereiro de 2016, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



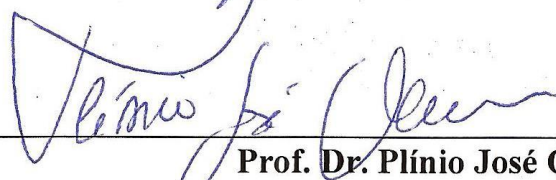
Prof. Dr. Romes Antonio Borges

Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Manoel Moraes Junqueira

Departamento de Matemática/UEG/Morrinhos/GO



Prof. Dr. Plínio José Oliveira

Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Adriana Carvalho Rosa graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão em 2004 e especializou-se em Matemática Aplicada pela Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão em 2006. Atualmente é professora da educação básica, técnica e tecnológica no Instituto Federal de Goiás – Campus Itumbiara.

Dedico este trabalho a minha família, amigos e alunos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, pela força, por me carregar no colo e por dar-me saúde, para a conclusão deste curso.

Agradeço ao meu namorado/noivo/esposo Alexandre, que de forma singular e carinhosa, me deu todo apoio nos momentos de maior dificuldade.

Agradeço também aos meus pais, João Batista e Marizete, pela vida, educação e moral que me deram, pois sei que sem estes ensinamentos não conseguiria seguir em frente. O meu muito obrigado a minha sogra, Cleusa, por sempre me apoiar. Também meu irmão, Bruno, avós, Maria e Nilza, e todos os tios e primos. Agradeço a todos pela força, paciência, compreensão e incentivo que sempre me deram durante todo o decorrer do curso, para que eu não fraquejasse mesmo em momentos críticos. Muito obrigada por tudo, amo vocês.

Agradeço aos queridos amigos do mestrado, Alexandre, Alexander, Cleuber, Dayanne, Elismar, Francinéia, Herton, Leon, Lourival, Osmar, Ronaldo, em especial ao Rei Ricardo, a Rainha Michele, ao Príncipe Gil e ao Rei dos Reis Ali. E também agradeço a turma 2014 que me acolheu tão bem. Muito obrigada amigos, por contribuírem para o meu crescimento profissional e pelo agradável convívio.

Agradeço também à Sociedade Brasileira de Matemática e a Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, por propiciar o programa de mestrado PROFMAT e a agência financiadora CAPES, pelo apoio financeiro dado ao longo do curso.

Obrigada a todos os professores, em especial, a prof. Dr. Romes Antônio Borges, pela paciência na orientação, tornando possível a conclusão deste trabalho.

Enfim agradeço a todos familiares e amigos que rezaram para que fosse estabelecida minha saúde, e que direta ou indiretamente contribuíram para que eu pudesse realizar esse sonho de hoje ser Mestra em Matemática.

“Como a fábrica do mundo é a mais perfeita e foi estabelecida pelo mais sábio Criador, nada acontece em nosso mundo sem que um problema de máximo ou de mínimo esteja envolvido”.
Leonhard Euler (1707-1783)

RESUMO

Com o avanço tecnológico, é crescente o interesse por técnicas que facilitem a compreensão de fenômenos antes não estudados. Isto é bastante evidente quando se fala em Ciências Aplicadas e Engenharias, pois com computadores cada vez mais eficientes, hoje é possível resolver problemas cada vez mais complexos e de difícil solução. Também no que tange a parte educacional, é possível perceber o grande avanço da tecnologia, tanto nos recursos didáticos quanto no próprio cotidiano de professores e alunos que, possuem cada vez mais acesso a ferramentas que melhoram o desenvolvimento acadêmico. Neste sentido, este trabalho mostra técnicas para a resolução de problemas elementares de otimização que podem ser apresentados para alunos do Ensino Básico com conhecimento mínimo sobre funções. Assim, é feito um estudo acerca das técnicas: Seção Áurea e Algoritmos Genéticos. São mostrados exemplos de possíveis aplicações das técnicas, com resoluções detalhadas para facilitar a compreensão do tema proposto. Neste sentido, pode-se afirmar que o presente trabalho traz uma abordagem didática dessas técnicas de otimização, visando ser um motivador no que diz respeito à utilização de novas tecnologias no ensino.

Palavras-chave:

Otimização, Seção Áurea, Algoritmos Genéticos, Educação Básica.

ABSTRACT

Technological developments, it increases the interest in techniques that facilitate the understanding of phenomena not previously studied. This is fairly evident when it comes to Engineering and Applied Sciences because with more efficient computers, it is now possible solve problems increasingly complex and difficult to solve. As well when it comes to education, it is possible to realize the great advancement of technology, both as teaching resources in their own daily life of teachers and students, increasingly have access to tools that improve academic development. In this regard, this work shows techniques for solving basic optimization problems that can be presented to students of Basic Education with minimal knowledge about functions. Thus, we present a study about the Golden Section and Genetic Algorithms techniques. Shown examples of possible applications of techniques, with detailed solutions to facilitate understanding of the proposed theme. In this sense, one can say than the present work provides an educational approach to optimization techniques and, is a challenging work with regard to the use of new technologies in education.

Keywords:

Optimization, Golden Section, Genetic Algorithm, Basic Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 (a) – Gráfico da parábola da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$. (b) – Gráfico da parábola da função $g(x) = -3x^2 + 2$.	5
Figura 2.2 – Gráfico de máximos e mínimos de uma função.	6
Figura 2.3 – Gráfico da função $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 5$.	7
Figura 2.4 – Cilindro reto	9
Figura 2.5 – Gráfico da função lucro $L(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 15x - 25$.	11
Figura 3.1 – O ponto X divide o segmento AB na razão áurea.	15
Figura 3.2 – O ponto y divide o intervalo $[a, b]$ na razão áurea.	16
Figura 3.3 – O ponto z divide o intervalo $[a, b]$ na razão áurea.	17
Figura 3.4 – Algoritmo do método da seção áurea.	18
Figura 3.5 – Esquema da redução de intervalo pelo algoritmo da seção áurea.	19
Figura 3.6 – Gráfico da função $f(t) = 12t^2 - 16t + 8$.	19
Figura 3.7 – Reduções sucessivas do intervalo de incerteza pelo método de seção áurea, aplicado à função $f(t) = 12t^2 - 16t + 8$.	22
Figura 3.8 – Gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.	27
Figura 3.9 – Gráfico da função $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 15x + 25$.	28
Figura 4.1 – Conversão do número 37 decimal para base 2.	33
Figura 4.2 – Um exemplo de algoritmo de seleção por roleta.	36
Figura 4.3 – Cruzamento em um ponto.	37
Figura 4.4 – Cruzamento em dois pontos.	37
Figura 4.5 – Cruzamento uniforme.	38
Figura 4.6 – Mutação.	38
Figura 4.7 – Seleção por roleta da população inicial.	41
Figura 4.8 – Seleção por roleta da 1ª geração.	43
Figura 4.9 – Gráfico da função $g(x) = -x^2 + 16x - 9$.	46
Figura 4.10 – Gráfico da função propaganda $PR(x) = \frac{x^3}{150} - \frac{11}{50}x^2 + \frac{48}{25}x + 2$.	47
Figura 4.11 – Seleção por roleta da população inicial.	48
Figura 4.12 – Seleção por roleta da 1ª geração.	50
Figura 4.13 – Gráfico da função propaganda $PR(x) = \frac{x^3}{150} - \frac{11}{50}x^2 + \frac{48}{25}x + 2$, com $x \in [5, 7]$.	54
Figura 4.14 – Seleção por roleta da população inicial.	56
Figura 4.15 – Seleção por roleta da 1ª geração.	58
Figura 4.16 – Seleção por roleta da 2ª geração.	61
Figura 4.17 – Seleção por roleta da 3ª geração.	63
Figura 4.18 – Seleção por roleta da 4ª geração.	65
Figura 4.19 – Seleção por roleta da 5ª geração.	68
Figura 4.20 – Seleção por roleta da 6ª geração.	70

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Valores de $g(2)$ quando $\Delta \rightarrow 0$.	8
Tabela 3.1 – Ponto de mínimo da função $f(t) = 12t^2 - 16t + 8$ variando intervalo de incerteza e tolerância.	23
Tabela 3.2 – Reduções sucessivas do intervalo de incerteza pelo método de seção áurea, aplicado à função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.	26
Tabela 3.3 – Ponto de mínimo da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ variando intervalo de incerteza e tolerância.	26
Tabela 3.4 – Reduções sucessivas do intervalo de incerteza pelo método de seção áurea, aplicado à função $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 15x + 25$.	29
Tabela 3.5 – Ponto de mínimo da função $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 15x + 25$ variando intervalo de incerteza e tolerância.	30
Tabela 4.1 – Um exemplo de algoritmo de seleção por roleta.	36
Tabela 4.2 – Aptidão dos indivíduos da população inicial referente a função $g(x) = -x^2 + 16x - 9$.	40
Tabela 4.3 – Cruzamento em um ponto da população inicial selecionada.	42
Tabela 4.4 – Seleção dos quatro indivíduos mais aptos, após cruzamento da população inicial.	42
Tabela 4.5 – Aptidão dos indivíduos da população da 1ª geração.	43
Tabela 4.6 – Cruzamento em um ponto da 1ª geração.	44
Tabela 4.7 – Seleção dos quatros indivíduos mais aptos, obtidos com o cruzamento da 1ª geração.	45
Tabela 4.8 – Os indivíduos da 2ª geração.	45
Tabela 4.9 – Aptidão dos indivíduos da população inicial referente a função $PR(x) = \frac{x^3}{150} - \frac{11}{50}x^2 + \frac{48}{25}x + 2$.	48
Tabela 4.10 – Cruzamento na população inicial selecionada.	49
Tabela 4.11 – Seleção dos quatro indivíduos mais aptos, após cruzamento da população inicial.	49
Tabela 4.12 – Aptidão dos indivíduos da população da 1ª geração	50
Tabela 4.13 – Mutação de dois indivíduos selecionados da 1ª geração.	51
Tabela 4.14 – Seleção dos quatro indivíduos mais aptos, após mutação da 1ª geração.	52
Tabela 4.15 – Aptidão dos indivíduos da população da 2ª geração	52
Tabela 4.16 – Mutação de todos indivíduos da 2ª geração.	53
Tabela 4.17 – Seleção dos quatro indivíduos mais aptos, após mutação da 2ª geração.	53
Tabela 4.18 – Aptidão dos indivíduos da população da 3ª geração	54
Tabela 4.19 – Aptidão dos indivíduos da população inicial referente a função $L(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 15x - 25$.	56
Tabela 4.20 – Cruzamento em um ponto da população inicial selecionada.	57
Tabela 4.21 – Seleção dos quatro indivíduos mais aptos, após cruzamento da população inicial.	57
Tabela 4.22 – Aptidão dos indivíduos da população da 1ª geração.	58
Tabela 4.23 – Mutação dos indivíduos selecionados na 1ª geração.	59

Tabela 4.24 – Seleção dos quatro indivíduos mais aptos, após mutação da 1ª geração.	60
Tabela 4.25 – Aptidão dos indivíduos da população da 2ª geração.	60
Tabela 4.26 – Cruzamento em um ponto da 2ª geração selecionada.	61
Tabela 4.27 – Seleção dos quatro indivíduos mais aptos, após cruzamento da 2ª geração.	62
Tabela 4.28 – Aptidão dos indivíduos da população da 3ª geração.	62
Tabela 4.29 – Mutação de dois indivíduos da 3ª geração selecionada.	64
Tabela 4.30 – Seleção dos quatro indivíduos mais aptos, após mutação da 3ª geração.	64
Tabela 4.31 – Aptidão dos indivíduos da população da 4ª geração.	65
Tabela 4.32 – Cruzamento em um ponto da 4ª geração selecionada.	66
Tabela 4.33 – Mutação de um indivíduo da 4ª geração.	66
Tabela 4.34 – Seleção dos quatro indivíduos mais aptos, após cruzamento e mutação da 4ª geração.	67
Tabela 4.35 – Aptidão dos indivíduos da população da 5ª geração.	67
Tabela 4.36 – Cruzamento em um ponto da 5ª geração selecionada.	68
Tabela 4.37 – Seleção dos quatro indivíduos mais aptos, após cruzamento da 5ª geração.	69
Tabela 4.38 – Aptidão dos indivíduos da população da 6ª geração.	69
Tabela 4.39 – Mutação de dois indivíduos da 6ª geração selecionada.	70
Tabela 4.40 – Seleção dos quatro indivíduos mais aptos, após mutação da 6ª geração.	71
Tabela 4.41 – Aptidão dos indivíduos da população da 7ª geração.	71

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II: PRINCÍPIOS BÁSICOS SOBRE OTIMIZAÇÃO.....	3
2.1 Conceitos Básicos e Exemplos	4
2.2 Introdução à Otimização	11
2.3 Métodos de Otimização	12
CAPÍTULO III: MÉTODO DA SEÇÃO ÁUREA.....	14
3.1 Dedução das Fórmulas do Algoritmo	15
3.2 Aplicações.....	19
CAPÍTULO IV: APLICAÇÃO DO MÉTODO ALGORITMOS GENÉTICOS EM PROBLEMAS DO ENSINO BÁSICO	31
4.1 Conceitos Básicos sobre Números Binários	32
4.2 Introdução ao Método Algoritmos Genéticos (AG)	34
4.2.1 Operador Seleção	35
4.2.2 Operador Cruzamento	36
4.2.3 Operador Mutação	38
4.2.4 Aplicações.....	39
4.3 Estudo Comparativo Entre Seção Áurea e Algoritmos Genéticos.....	55
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	73
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	75

1 INTRODUÇÃO

Otimizar é criar condições mais favoráveis para o desenvolvimento de algo; ou o processo através do qual se obtém o melhor valor de uma grandeza [1].

Utilizando-se de otimização, é possível calcular os valores ótimos para variáveis de um modelo matemático e, conseqüentemente, obter um melhor valor para a função correspondente, inclusive é bastante eficiente mesmo quando se tem um grande número de restrições para o mesmo. Normalmente busca-se maximizar ou minimizar uma função [2].

No ensino básico, é possível encontrar problemas de otimização, porém com outra nomenclatura: “maximização e minimização” de funções. Normalmente o primeiro contato dos alunos do Ensino Básico com problemas de otimização se dá ao estudar funções quadráticas, mas como já mencionado, a maioria dos casos se restringem a calcular os máximos e mínimos destas funções, encontrando, por exemplo, os vértices da parábola [3] e [4]. Poucos livros do Ensino básico abordam o conteúdo de derivadas com suas aplicações, e são raras as escolas que o ministram.

Livros do primeiro ano do Ensino Médio iniciam-se com noções de função e, depois de toda parte básica, trabalha-se também função polinomial do 2º grau (função quadrática), de onde é possível estudar elementos importantes como, por exemplo, os vértices e valor mínimo ou máximo da função. Entretanto, apesar de ser possível estudar noções básicas de máximos e mínimos, normalmente não se faz este estudo [5] e [6].

Giovanni (2005) [7] apresenta um bom número de problemas de otimização que são resolvidos com o uso de derivadas. Nesta referência, é possível fazer um razoável estudo sobre limites e funções contínuas, bem como sobre derivadas. Neste sentido, o estudo envolve conteúdos que vão desde os conceitos fundamentais até taxas de variação e derivadas de funções compostas. O presente livro traz ainda um estudo bem interessante acerca de máximos e mínimos relativos, abordando os casos onde se tem derivada nula. Aborda ainda os critérios da derivada primeira e segunda, ou seja, o conteúdo se refere à boa parte de um curso de Cálculo Diferencial. Diante disso, torna-se inviável que seja ministrado tal conteúdo devido à carga horária e quantidade de conteúdo anual a ser estudado no Ensino Básico, além disso, normalmente este conteúdo não é cobrado nos concursos de seleção para as universidades. Por este motivo, o estudo de problemas de otimização continua sendo tratado com muita restrição no Ensino Básico.

Este trabalho mostra duas técnicas de otimização, que podem ser aplicadas como motivador aos alunos do Ensino Básico. Sendo os métodos: Seção Áurea e Algoritmos Genéticos. Cada método é exemplificado com problemas, que podem ser propostos em sala de aula, motivando os alunos no estudo de Matemática e visando a aplicação de ambos os métodos para resolver problemas básicos de otimização, restringe-se a otimizar funções de uma variável real.

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos, sendo que além desta introdução, os outros quatro são descritos como segue:

O segundo capítulo apresenta uma breve introdução sobre otimização no Ensino Básico. Assim, destaca-se conceitos básicos sobre funções, máximos e mínimos de funções de uma variável real e aplicações na resolução de problemas de otimização.

No terceiro capítulo tem-se o método da seção áurea, iniciando com a dedução das equações utilizadas para reduzir o intervalo de incerteza a serem aplicadas no algoritmo com a finalidade de encontrar o extremo de uma dada função.

O capítulo 4 apresenta outro método bastante conhecido para resolver problemas de otimização, o método algoritmos genéticos, porém este método não é aplicado, com frequência, em problemas de Ensino Básico. Neste capítulo inicialmente faz-se uma breve revisão envolvendo conversões entre números decimais e binários para depois mostrar os conceitos básicos do método algoritmos genéticos que é baseado na evolução das espécies.

Finalmente no último capítulo são feitas as considerações finais.

Neste trabalho, a maioria dos gráficos é construída com o software GEOGEBRA, que é um software livre e muito utilizado no ensino de Geometria e no esboço de gráficos de funções. Este software está disponível para download no endereço: www.geogebra.org. A versão usada neste trabalho é a 4.2.60.0.

CAPÍTULO II

PRINCÍPIOS BÁSICOS SOBRE OTIMIZAÇÃO

Otimização significa buscar o melhor resultado, alcançando os objetivos determinados no problema a ser resolvido [8].

Em problemas nas áreas de engenharia, automação, administração, logística, dentre outras, pode-se utilizar da otimização para buscar melhores projetos a partir de um modelo matemático que represente o problema. Na maioria das vezes, busca-se maximizar ou minimizar uma função matemática obtida com a modelagem e, assim, encontrar uma solução ótima para o problema que resulte no melhor desempenho possível do sistema [9] e [10].

Um bom modelo matemático tem como objetivo, representar da forma mais simples possível, situações reais que são apresentadas nas mais variadas áreas do conhecimento. A capacidade representativa de um modelo pode ser certificada com experimentação, análise numérica, ou qualquer outro método capaz de verificar a precisão obtida com o mesmo. A modelagem de um problema complexo que envolva uma determinada situação, normalmente não é uma tarefa simples, pois depende de fatores subjetivos como intuição, experiência, criatividade e poder de síntese. O modelo deve descrever o problema em uma linguagem matemática formal, normalmente expressa através de funções, variáveis, equações, desigualdades e fórmulas [9] e [10].

Problemas reais de otimização costumam ser complexos e, normalmente, necessitam de ferramentas para seu tratamento. Neste sentido faz-se necessário a utilização de ferramentas como, por exemplo, a programação matemática [11].

Como mencionado anteriormente, problemas de otimização para determinar máximos e mínimos são estudados geralmente no ensino superior, voltados para as áreas de engenharias, matemática e demais ciências afins, porém alguns materiais do ensino médio (mesmo que poucos) também enfocam tal conteúdo. Para se resolver os problemas de otimização (maximização ou minimização) trabalhados no ensino superior, necessita-se de conhecimentos prévios acerca de derivadas. Assim, no ensino médio, só se consegue trabalhar com tais problemas depois de uma razoável introdução do conteúdo [12].

Neste contexto, serão inicialmente estudados alguns métodos de otimização envolvendo operações elementares típicas dessa fase do ensino básico, sem a obrigatoriedade

do aluno estudar conceitos de derivadas, sendo necessário apenas conhecimento sobre funções.

O estudo de problemas de otimização pode ser um excelente instrumento para tornar as aulas de Matemática mais dinâmicas, abordar diversos conteúdos matemáticos e facilitar o processo de ensino aprendizagem no Ensino Médio, através da metodologia da resolução estratégica de problemas, o que os torna motivador para os alunos [13].

Espera-se que problemas de otimização motivem os alunos da educação básica a se interessarem por Matemática, já que, tais problemas, podem ser aplicados em várias áreas do conhecimento, inclusive no cotidiano dos alunos. Vários tipos de problemas podem ser abordados, quais sejam: planejamento de produção para maximizar lucro e minimizar gastos e tempo, problemas que consistem em minimizar a distância entre prontos-socorros para que o paciente não demore para chegar de sua casa até uma sala de emergência, dentre outros [2].

Segundo Polya (2006, p. v):

O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta.

Um problema simples, mas que envolva o cotidiano do aluno pode despertar o interesse e motivar o estudo de Matemática.

2.1 Conceitos Básicos e Exemplos

Para uma rápida introdução à otimização, são apresentadas a seguir, as definições (2.1) a (2.6) [7], [15]:

Definição 2.1: Uma função $f:D \rightarrow \mathbb{R}$ tem máximo absoluto (ou global) em x^* se $f(x) \leq f(x^*)$ para todo x no domínio D de f . Neste caso, o valor $f(x^*)$ é chamado valor máximo de f em D .

Definição 2.2: Uma função $f:D \rightarrow \mathbb{R}$ tem mínimo absoluto (ou global) em x^* se $f(x) \geq f(x^*)$ para todo x no domínio D de f . Neste caso, o valor $f(x^*)$ é chamado valor mínimo de f em D .

Os valores de máximo e mínimo absolutos de uma função são chamados valores extremos da função.

Definição 2.3: Uma função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ tem máximo local (ou máximo relativo) em um ponto x^* de seu domínio, se existe intervalo aberto I , tal que $x^* \in I$ e $f(x) \leq f(x^*)$ para todo $x \in I$. Neste caso, diz-se que $f(x^*)$ é valor máximo local de f .

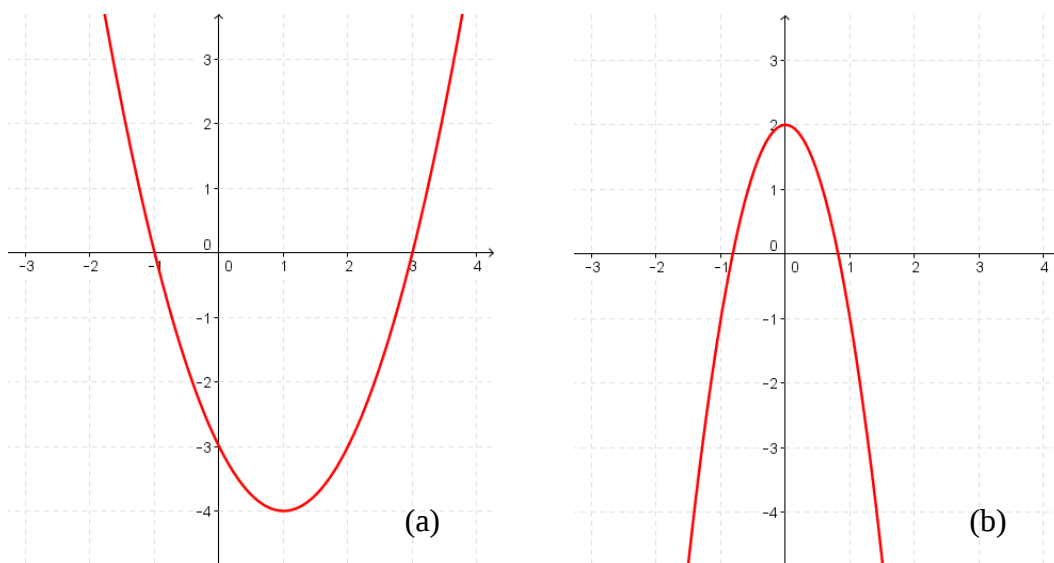
Definição 2.4: Uma função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ tem mínimo local (ou mínimo relativo) em um ponto x^* de seu domínio, se existe intervalo aberto I , tal que $x^* \in I$ e $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in I$. Neste caso, $f(x^*)$ é valor mínimo local de f .

Definição 2.5: Uma função unimodal apresenta apenas um valor de máximo ou um valor de mínimo, em um dado intervalo.

Definição 2.6: Uma função quadrática é definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$, sendo a , b e c números reais, com $a \neq 0$.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Para facilitar a compreensão acerca dos problemas a serem estudados, serão mostrados a seguir, na Figura 2.1, os gráficos, construídos no software Geogebra, que representam as funções (a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ e (b) $g(x) = -3x^2 + 2$.

Figura 2.1 (a) – Gráfico da parábola da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$. (b) – Gráfico da parábola da função $g(x) = -3x^2 + 2$.



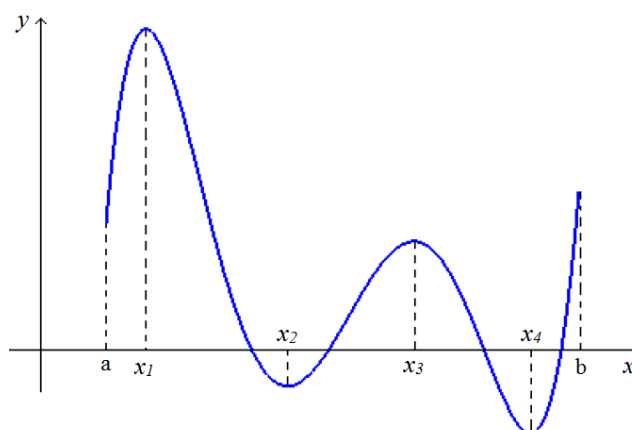
Fonte: Elaborada pela autora.

Observando a Figura 2.1(a), nota-se que esta função é unimodal, para qualquer que seja o valor de x , pertencente ao conjunto dos números reais, pois possui um ponto de mínimo em $x = 1$, já na Figura 2.1(b) vê-se que $x = 0$ é um ponto de máximo, sendo também a função $g(x)$ unimodal, para todo x real.

De modo geral, toda função quadrática é uma função unimodal, pois neste caso, sua representação gráfica é sempre dada por uma parábola.

É possível observar que, no caso em que se tem uma função como na Figura 2.2 a seguir, a função f que está definida para o intervalo aberto $I = (a, b)$, tem-se x_1 e x_3 como sendo pontos de máximos locais, x_2 e x_4 pontos de mínimos locais, o ponto de máximo absoluto é x_1 e x_4 representa o mínimo absoluto.

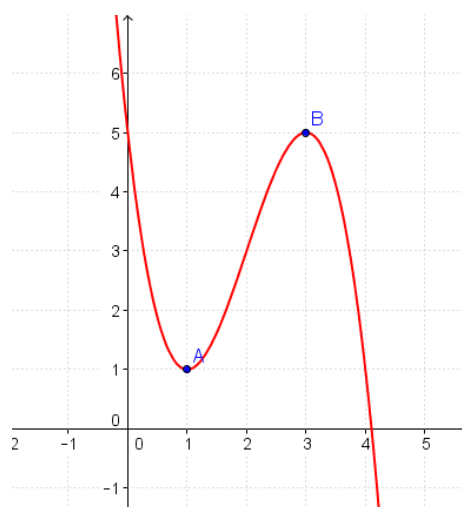
Figura 2.2 – Gráfico de máximos e mínimos de uma função.



Fonte: Elaborada pela autora.

A seguir, será mostrado um caso onde tem-se uma função cúbica, ou seja, $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 5$. A Figura 2.3 mostra o gráfico construído no software Geogebra, para a referida função:

Figura 2.3 – Gráfico da função $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 5$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Para este caso, podem-se encontrar os valores de máximo e mínimo locais, para o intervalo $(0, 4)$, que é analisado como segue:

No intervalo $[0, 2]$, a referida função é unimodal, sendo $x = 1$, o ponto de mínimo local desse intervalo e consequentemente $f(1) = 1$ o valor mínimo da função.

Analisando agora o intervalo $[2, 4]$ percebe-se que a função é unimodal, sendo $x = 3$ o ponto de máximo local desse intervalo e consequentemente $f(3) = 5$ o valor máximo da função.

Logo, no intervalo $[0, 4]$ a função dada possui $A(1, 1)$ e $B(3, 5)$ como sendo as soluções ótimas, mínima e máxima, respectivamente.

Com o objetivo de exemplificar como se dá o cálculo da derivada de uma função $f(x)$ em um ponto x_0 , pode-se considerar as funções $f(x) = 3x^2$ e $g(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ e tomar o ponto $x_0 = 2$.

Assim, aplicando na função em questão:

$$g(2) = \frac{3(2 + \Delta x)^2 - 3 \cdot 2^2}{\Delta x}$$

Depois de algumas operações aritméticas obtém-se:

$$g(2) = 12 + 3\Delta x$$

Na Tabela 2.1 são mostrados os valores que se obtém para $g(2)$ atribuindo valores para Δx :

Tabela 2.1 – Valores de $g(2)$ quando $\Delta x \rightarrow 0$.

Δx	2	1	0,5	0,1	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$g(2)$	18	15	13,5	12,3	12,03	12,003	12,0003	12,00003	12,000003

Fonte: Elaborada pela autora.

Observe que quanto mais os valores de Δx diminuem, ou seja, se aproximam de zero ($\Delta x \rightarrow 0$), mais $g(2)$ aproxima de 12 ($g(2) \rightarrow 12$). Assim, pode-se dizer que o limite de $g(2)$ ($\lim(g(2))$) quando Δx tende a valores cada vez menores ($\Delta x \rightarrow 0$), é dado pelo valor 12. Ou seja:

$$\text{Logo, } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (12 + 3\Delta x) = 12.$$

Ou seja, a derivada de $f(x) = 3x^2$ em $x_0 = 2$ é o valor desse limite, sendo denotada por $f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$, ou seja, $f'(2) = 12$.

De maneira geral, pode-se definir a derivada para uma função qualquer, em um ponto x_0 , do domínio da função, como mostra a def. 2.7:

Definição 2.7: Sejam a função $f(x)$ definida no intervalo $[a, b]$ e o ponto x_0 desse intervalo. Denomina-se derivada de f em x_0 e indica-se por $f'(x_0)$, o limite, se existir e for finito da razão $\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ quando Δx tende a zero, ou seja:

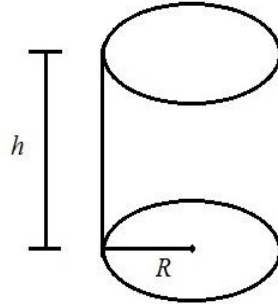
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, [7], [16].$$

É apresentado a seguir um problema simples envolvendo otimização. Este problema é bastante interessante e motivador, pois faz parte do cotidiano de todos, além de fazer com que sejam lembradas definições importantes de Geometria. O problema consiste em fixar o volume de 350 ml, para uma lata de refrigerante cilíndrica, e busca-se determinar o raio da base da lata de modo que o material gasto na fabricação da lata seja mínimo.

Nota-se que a lata tem formato de um cilindro reto, e sabe-se que seu volume é $350 \text{ ml} = 350 \text{ cm}^3$. Utilizando conceitos simples da Geometria Espacial, pode-se dizer que o

volume de um cilindro reto de raio R e altura h , como mostrado na Figura 2.4, é dado por $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$.

Figura 2.4 – Cilindro reto.



Fonte: Elaborada pela autora.

Daí,

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot h = 350$$

$$h = \frac{350}{\pi \cdot R^2} \quad (2.1)$$

Deseja-se que a área total do cilindro seja a menor possível.

No cilindro em questão, área da base é: $A_B = \pi \cdot R^2$ e a área lateral é: $A_L = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$. Logo, a área total é:

$$A_T = 2 \cdot \pi \cdot R^2 + 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h \quad (2.2)$$

Substituindo a eq. (2.1) na eq. (2.2) tem-se:

$$A_T(R) = 2 \cdot \pi \cdot R^2 + \frac{700}{R}$$

Na resolução tradicional [7], tem-se a sugestão do critério da derivada segunda. Depois de algumas manipulações matemáticas e aplicando o critério mencionado, obtém-se $R = \sqrt[3]{\frac{175}{\pi}} \cong 3,82 \text{ cm}$, como sendo o ponto de mínimo. O que mostra que, com o raio de aproximadamente $3,82 \text{ cm}$ o material gasto na fabricação da lata de refrigerante será mínimo.

Outro tipo de problema de otimização, muito comum na literatura, são os que buscam o lucro máximo. Em [7] é descrito o problema onde a função $\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$, descreve o valor gasto por uma indústria em reais, para se produzir x produtos, sendo que o preço de

venda de cada produto, também em reais, é dado pela função $50 - \frac{1}{2}x$. Necessita-se saber qual a produção diária para se obter um lucro máximo na venda de x produtos.

Para o problema em questão, pode-se considerar a função custo $c(x) = \frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$ e a função preço de venda $v(x) = 50 - \frac{1}{2}x$. Tem-se que o lucro na venda de x produtos, será representado pela função $L(x)$ conforme eq. (2.3):

$$L(x) = x \cdot v(x) - c(x) \quad (2.3)$$

O que resulta em:

$$L(x) = x \cdot \left(50 - \frac{1}{2}x\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right)$$

Assim, a função lucro é dada por:

$$L(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 15x - 25 \quad (2.4)$$

Como mencionado anteriormente, também neste caso, tem-se que a literatura clássica [7], sugere a aplicação do critério da derivada segunda para encontrar o máximo valor da função que, para este caso será mostrado como segue:

Derivando a eq. (2.4) tem-se:

$$L'(x) = -\frac{3}{2}x + 15 \quad (2.5)$$

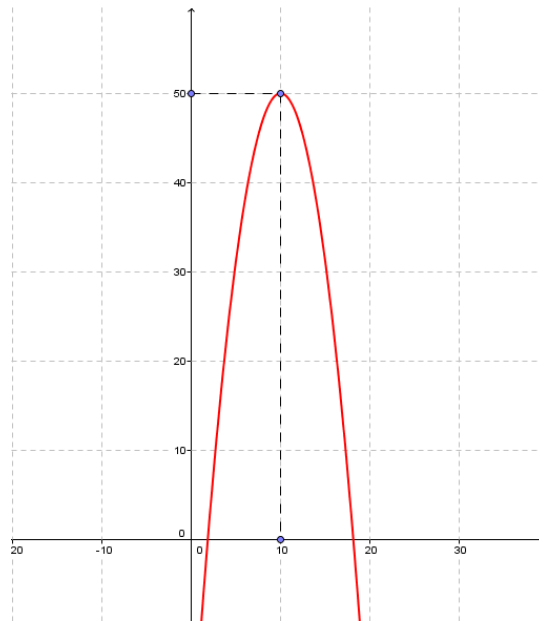
Fazendo $L'(x) = 0$, obtém-se o ponto crítico $x = 10$, e derivando novamente, a eq. (2.5) tem-se:

$$L''(x) = -\frac{3}{2} < 0 \quad (2.6)$$

Pela eq. (2.6) a segunda derivada é menor que zero, então o ponto crítico é de máximo, consequentemente o lucro será máximo para $x = 10$. Portanto, a produção diária deve ser de 10 produtos, para que o lucro seja máximo, assim, ao substituir $x = 10$ na eq. (2.4), obtém-se o lucro máximo de R\$ 50,00.

A Figura 2.5 mostra a parábola, que é o gráfico da função lucro $L(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 15x - 25$.

Figura 2.5 – Gráfico da função lucro $L(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 15x - 25$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Este problema também será resolvido posteriormente, pelos métodos: seção áurea e algoritmos genéticos.

2.2 Introdução à Otimização

Em problemas de otimização são encontrados alguns conceitos e definições importantes para seu estudo [11], tais como:

- ✓ *Variável de projeto ou de decisão*: São variáveis que podem ser alteradas durante o processo de otimização, sendo discretas ou contínuas, dependendo do problema em questão.
- ✓ *Função Objetivo*: É a função a ser otimizada, minimizada ou maximizada, pode possuir uma ou mais variáveis de projeto. É também chamada de função custo ou de critério de desempenho.
- ✓ *Restrições*: São um conjunto de funções (lineares ou não lineares) que definem o espaço de busca de soluções ótimas, através de igualdades ou desigualdades matemáticas. As restrições estabelecem limites para os recursos utilizados, como limitações físicas e tecnológicas.

✓ *Restrições laterais*: Limita os valores das variáveis de projeto, estabelecendo o espaço de busca.

✓ *Ponto ótimo*: É o ponto definido pelo vetor x^* , que é um vetor das variáveis de projeto, que deve satisfazer todas as restrições.

✓ *Valor Ótimo*: É o valor da função objetivo no ponto ótimo, ou seja, se a função objetivo é F então o valor ótimo é $F(x^*)$.

✓ *Solução Ótima*: É o conjunto formado pelo ponto ótimo e pelo valor ótimo $(x^*, F(x^*))$, podendo ser local ou global.

Considerando uma função objetivo $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, o problema geral de otimização é expresso em como:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar ou maximizar } F(x) \\ & \text{Sujeito a : } \begin{cases} g_i(x) \leq 0, & i = 1, \dots, n \\ h_k(x) = 0, & k = 1, \dots, n \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \end{aligned} \quad (2.7)$$

sendo: $g_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ as restrições laterais e $h_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$ as restrições de igualdade que limitam o espaço de soluções factíveis e x , é o vetor com as variáveis de projeto.

As principais notações para indicar o ponto de mínimo são, $x_{\min}$ e x^* . Neste trabalho, será utilizado x^* para indicar este ponto.

2.3 Métodos de Otimização

Os métodos de otimização são classificados em métodos heurísticos e métodos clássicos.

Os métodos heurísticos baseiam-se em uma população genérica e, normalmente, fazem uso de conceitos e mecanismos imitando a evolução biológica. Nos algoritmos heurísticos, seleciona-se uma população e, assim, alguns indivíduos desta população são selecionados para comporem as próximas gerações. Através da aplicação recursiva de cruzamentos e mutação, ocorre a seleção e evolução da população. Uma das vantagens destes métodos é a capacidade de determinar o mínimo global mesmo nos casos em que exista uma grande quantidade de mínimos locais. No entanto, a desvantagem é a excessiva quantidade de

operações a serem executadas para otimizar uma função, tendo assim um alto custo computacional [11], [17].

Os métodos clássicos são métodos baseados no cálculo diferencial e podem ser métodos de busca unidimensional ou de busca multidimensional. Os métodos unidimensionais otimizam a função objetivo considerando apenas uma determinada direção. Já os métodos de busca multidimensionais determinam, em cada iteração, a direção de busca e a partir daí utilizam um método de busca unidimensional para minimizar o comprimento do passo [17], [18].

Os métodos de ordem zero não utilizam o cálculo de derivadas da função objetivo, requerem apenas o cálculo de valores da função, na busca do ótimo. Nesses métodos os algoritmos são escolhidos de acordo com o tipo do problema a ser otimizado. Normalmente, são selecionados aleatoriamente um grande número de vetores x e substituídos na função objetivo $f(x)$ a ser minimizada, o vetor que corresponder ao mínimo de $f(x)$ é o ótimo x^* [11], [17].

Os métodos de primeira ordem são métodos que se utilizam da primeira derivada da função objetivo. Ou seja, calculam o gradiente ($\nabla f(x)$) da função objetivo $f(x)$ para se orientar na busca pelo ótimo. O gradiente limita a busca, a uma dada direção, evitando a busca aleatória em todo o espaço [17], [19].

Por último, têm-se os métodos de segunda ordem (ou métodos de Newton), que usam as derivadas primeiras e segundas, da função objetivo [11].

Neste trabalho buscou-se trabalhar com o método de redução de intervalos de incerteza conhecido por “Seção Áurea” e o método heurístico “Algoritmos Genéticos”. O método da seção áurea é um método de redução de intervalo de incerteza, enquanto que o método algoritmos genéticos é um método de busca aleatória. O método algoritmos genéticos que, geralmente só é utilizado em aplicações complexas, é apresentado, nesse contexto, como motivador para que alunos do Ensino Médio se interessem por Matemática.

CAPÍTULO III

MÉTODO DA SEÇÃO ÁUREA

Na resolução de problemas para determinar máximos e mínimos é possível introduzir algumas técnicas numéricas elementares, de fácil entendimento para alunos do Ensino Básico, possibilitando que o ponto ótimo da função objetivo seja encontrado, ou pelo menos, um intervalo muito pequeno contendo o valor ótimo [4].

O método da seção áurea é aplicado a problemas de otimização que envolve funções de uma variável real e apresentam apenas um extremo global num intervalo $[a, b]$ conhecido, ou seja, funções unimodais em um dado intervalo. Este intervalo é chamado de intervalo de incerteza, pois não se sabe a localização exata do ponto de ótimo. A ideia desse método numérico é reduzir, a cada iteração, o intervalo de incerteza até chegar-se um intervalo tão pequeno quanto se queira [4], [20].

O método da seção áurea é uma técnica elementar que, apesar da função ser necessariamente unimodal, mostra-se bastante eficiente. O método é considerado confiável até mesmo para o tratamento de problemas mal condicionados numericamente. As características principais do método consistem da necessidade de um número relativamente grande de avaliações da função [20], o que o inviabiliza para certos tipos de aplicações.

O método executa operações em um intervalo de incerteza $[a, b]$, onde supõe-se que exista um extremo para a função objetivo. O termo “Seção Áurea” está relacionado com o número de ouro (razão áurea) pela forma com que a partição do intervalo é feita. O intervalo é reduzido a uma taxa igual a razão áurea, até que o critério de convergência seja satisfeito [21], [22].

A razão áurea também é conhecida como proporção áurea, número de ouro, número divino, ou, simplesmente, Phi (φ), e é uma constante real algébrica irracional, verificada em muitos elementos da natureza como, conchas, plantas, insetos, seres-humanos, dentre outros. Tudo que floresce na natureza apresenta o mesmo padrão de crescimento, na razão áurea [22], [23].

A notação para o número de ouro $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ é a inicial do nome de Fídias, escultor e arquiteto encarregado da construção do Pártenon, em Atenas. Este número aparece

em muitas obras da antiguidade mostrando uma harmonia estética diferenciada. Nas obras de Leonardo Da Vinci, “Monalisa” e “O Homem Vitruviano”, por exemplo, são revelados os conhecimentos matemáticos e a utilização da razão áurea, para garantir a perfeição e a beleza ímpar, de suas magníficas obras de arte [22], [23], [24].

Esta razão aparece em muitas áreas da Matemática e possui algumas propriedades interessantes [23]:

$$1 - \varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}};$$

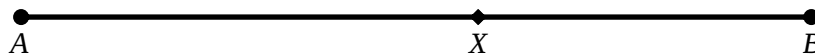
2 – φ é o único número real positivo solução da equação $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$;

3 – Na sequência de Fibonacci, a razão $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ converge para φ .

3.1 Dedução das Fórmulas do Algoritmo

A razão áurea é utilizada em intervalos como descreve o trabalho [3], o intervalo de incerteza é dividido como mostra a Figura 3.1, considerando um ponto $X \in AB$, se X divide o segmento AB na razão áurea então $\frac{AX}{XB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 = \varphi$ [22].

Figura 3.1 – O ponto X divide o segmento AB na razão áurea.



Fonte: Elaborada pela autora.

O termo "Seção Áurea" diz respeito à divisão de um intervalo em duas partes de modo que a razão do comprimento do intervalo original com o comprimento da parte maior é igual à razão do comprimento da parte maior com o comprimento da parte menor.

Considere um intervalo real $[a, b]$ e suponha que y é um ponto deste intervalo tal que y seja mais próximo de a do que de b , como mostrado na Figura 3.2:

Figura 3.2 – O ponto y divide o intervalo $[a, b]$ na razão áurea.



Fonte: Elaborada pela autora.

$$\frac{b-a}{b-y} = \frac{b-y}{y-a}$$

Segue que,

$$(b-a)(y-a) = (b-y)^2$$

O que resulta em:

$$\Rightarrow y^2 + (a-3b)y + b^2 + ab - a^2 = 0$$

Aplicando a Fórmula de Bháskara tem-se:

$$y = \frac{-(a-3b) \pm \sqrt{(a-3b)^2 - 4.(b^2 + ab - a^2)}}{2}$$

$$\text{Assim, } y' = \frac{3b-a+(\sqrt{5}a-\sqrt{5}b)}{2} \text{ ou } y'' = \frac{3b-a-(\sqrt{5}a-\sqrt{5}b)}{2},$$

$$\text{Ou seja, } y' = a + \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot (b-a) \text{ ou } y'' = a + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot (b-a).$$

Observe que para $y'' = a + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot (b-a)$, tem-se que $y > b$, o que não convém, pois $y \in [a, b]$.

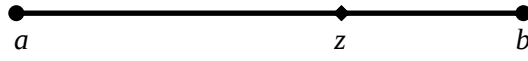
$$\text{Portanto, obtém-se que } y' = a + \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot (b-a).$$

Como $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,382$ pode-se escrever:

$$y' = a + 0,382(b-a) \quad (3.1)$$

Agora considere z , como sendo o segundo ponto que divide o intervalo $[a, b]$ a uma razão áurea, e que esteja mais próximo de b do que de a , como mostra a Figura 3.3.

Figura 3.3 – O ponto z divide o intervalo $[a, b]$ na razão áurea.



Fonte: Elaborada pela autora.

$$\frac{b-a}{z-a} = \frac{z-a}{b-z}$$

Assim como no caso anterior, encontra-se o valor de z em função de a e b .

$$(b-a)(b-z) = (z-a)^2 \quad (3.2)$$

Desenvolvendo a expressão dada pela eq. (3.2), obtêm-se as raízes:

$$z' = \frac{3a-b+(\sqrt{5}a-\sqrt{5}b)}{2} \text{ ou } z'' = \frac{3a-b-(\sqrt{5}a-\sqrt{5}b)}{2}$$

Simplificando os termos das raízes dadas na eq.(3.2) escreve-se:

$$z' = a + \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \cdot (b-a) \text{ ou } z'' = a + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot (b-a)$$

Nota-se que para $z' = a + \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \cdot (b-a)$, tem-se $z < a$, o que não convém já que $z \in [a, b]$.

Assim, tem-se que $z'' = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot (b-a)$.

No entanto, $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$ então pode-se escrever:

$$z'' = a + 0,618(b-a). \quad (3.3)$$

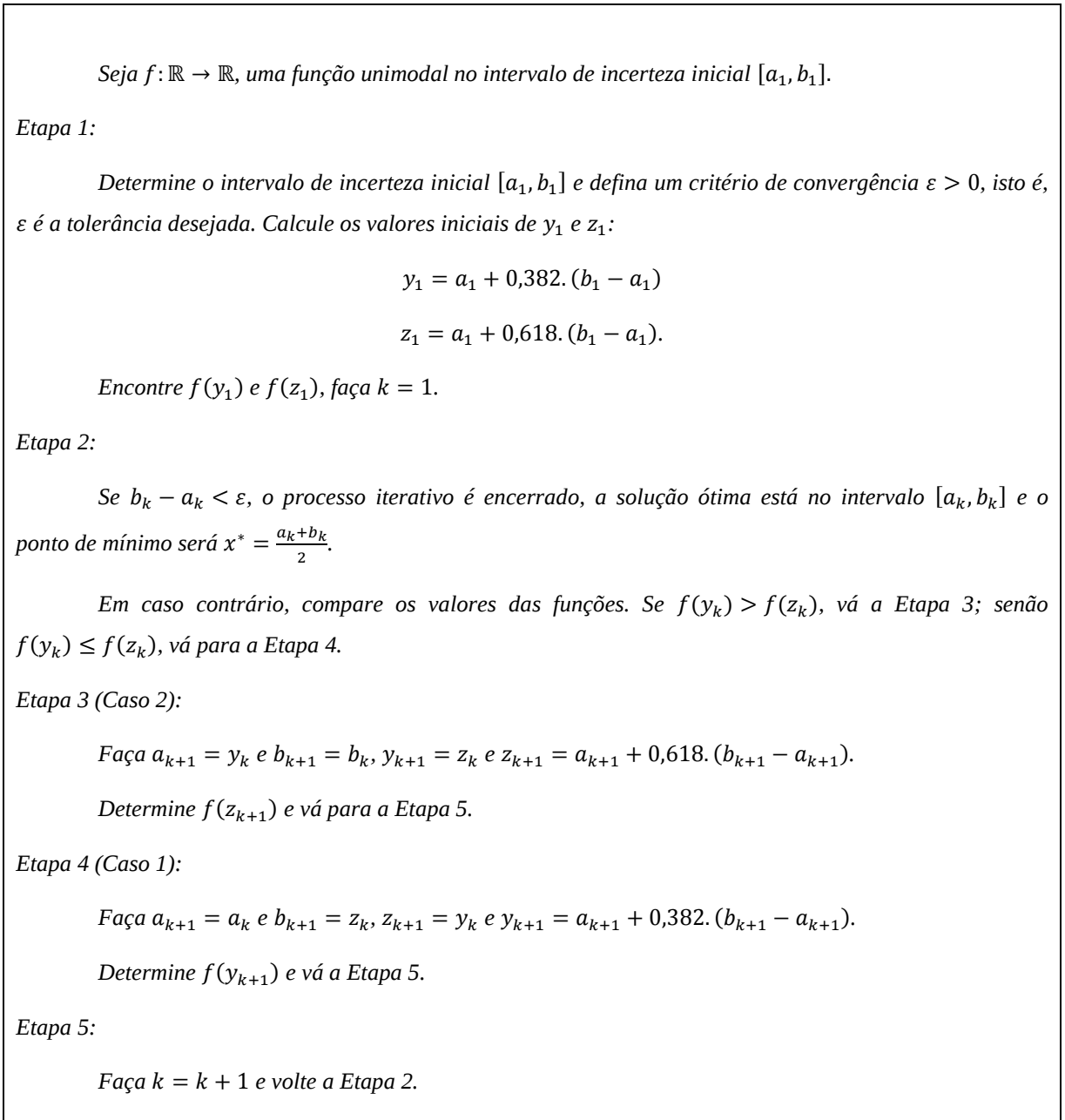
Os números representados nas eq. (3.1) e (3.3) são chamados de menor e maior ponto da seção áurea, respectivamente.

No método da seção áurea a k -ésima iteração é dada por: $y_k = a_k + \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot (b_k - a_k)$ e $z_k = a_k + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot (b_k - a_k)$. Ou ainda, pelas eq. (3.1) e (3.3) escreve-se:

$$y_k = a_k + 0,382 \cdot (b_k - a_k) \text{ e } z_k = a_k + 0,618 \cdot (b_k - a_k).$$

A seguir, na Figura 3.4 tem-se o algoritmo que mostra como ocorre à redução do intervalo de incerteza para a obtenção do ponto extremo de uma função unimodal:

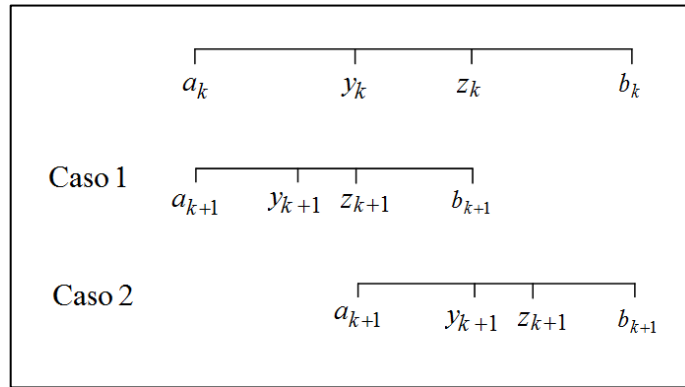
Figura 3.4 – Algoritmo do método da seção áurea.



Fonte: Adaptada de [25].

A Figura 3.5, a seguir, mostra a redução do intervalo $[a_k, b_k]$ à razão áurea 0,382 no Caso 1 e 0,618 no Caso 2.

Figura 3.5 – Esquema da redução de intervalo pelo algoritmo da seção áurea.



Fonte: Adaptado de [26].

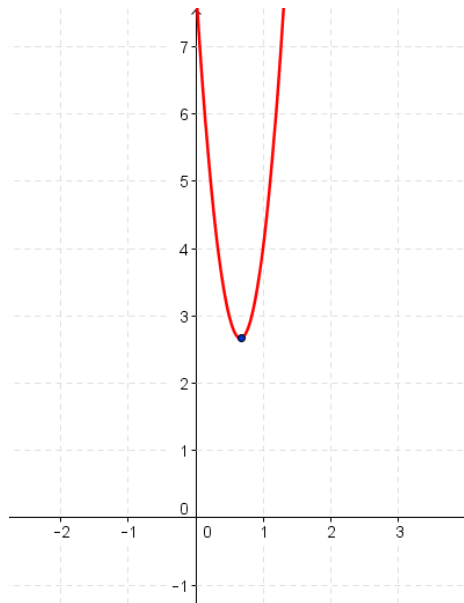
3.2 Aplicações

Pretende-se aplicar o método da seção áurea para obter o valor mínimo da função quadrática dada pela eq. (3.4) é:

$$f(t) = 12t^2 - 16t + 8. \quad (3.4)$$

Neste caso, a função é unimodal para qualquer $t \in \mathbb{R}$ como mostra a Figura 3.6:

Figura 3.6 – Gráfico da função $f(t) = 12t^2 - 16t + 8$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Será analisada a seguir, a função dada pela eq. (3.4) no intervalo $[0,1]$, e com tolerância $\varepsilon = 0,001$. De acordo com o algoritmo dado pela Figura 3.4, a redução de intervalo à razão se dá por:

Etapa 1: O intervalo de incerteza inicial é $[0,1]$ e o critério de convergência $\varepsilon = 0,001$. Assim, $a_1 = 0$ e $b_1 = 1$. Calculando os valores iniciais de y_1 e z_1 tem-se:

$$y_1 = a_1 + 0,382.(b_1 - a_1) \Rightarrow y_1 = 0,382 \text{ e}$$

$$z_1 = a_1 + 0,618.(b_1 - a_1) \Rightarrow z_1 = 0,618.$$

Neste modo, $f(y_1) = f(0,382) = 3,639088$ e $f(z_1) = f(0,618) = 2,6951$, se faça $k = 1$.

Etapa 2.1: Observe que $b_1 - a_1 = 1 > 0,001 = \varepsilon$, então o processo iterativo não é encerrado. Comparando os valores das funções $f(y_1) = 3,6391 > 2,6951 = f(z_1)$, vá à Etapa 3.

Etapa 3 (Caso 2): Fazendo $a_2 = y_1 = 0,382$ e $b_2 = b_1 = 1$, $y_2 = z_1 = 0,618$ e $z_2 = a_2 + 0,618.(b_2 - a_2) = 0,7639$. Assim, $f(z_2) = 2,7802$ e vá para a Etapa 5.

Etapa 5: Faça $k = k + 1 = 2$ e volte à Etapa 2.

Etapa 2.2: Observe que $b_2 - a_2 = 0,618 > 0,001 = \varepsilon$, então o processo iterativo não é encerrado. Comparando os valores das funções $f(y_2) = 2,6951 < 2,7802 = f(z_2)$, vá à Etapa 4.

Etapa 4 (Caso 1): Faça $a_3 = a_2 = 0,382$ e $b_3 = z_2 = 0,7639$, $z_3 = y_2 = 0,618$ e $y_3 = a_3 + 0,382.(b_3 - a_3) = 0,5279$. Determine $f(y_3) = f(0,5279) = 2,8978$ e vá à Etapa 5.

Etapa 5: Faça $k = k + 1 = 3$ e volte à Etapa 2.

Etapa 2.3: Observe que $b_3 - a_3 = 0,3819 > 0,001 = \varepsilon$, então o processo iterativo não é encerrado. Comparando os valores das funções $f(y_3) = 2,8978 > 2,6951 = f(z_3)$, vá à Etapa 3.

Etapa 3 (Caso 2): Faça $a_4 = y_3 = 0,5279$ e $b_4 = b_3 = 0,7639$, $y_4 = z_3 = 0,618$ e $z_4 = a_4 + 0,618.(b_4 - a_4) = 0,6738$.

Determine $f(z_4) = 2,6673$ e vá à Etapa 5.

Etapa 5: Faça $k = k + 1 = 4$ e volte à Etapa 2.

Etapa 2.4: Observe que $b_4 - a_4 = 0,236 > 0,001 = \varepsilon$, então o processo iterativo não é encerrado.

Comparando os valores das funções $f(y_4) = 2,6951 > 2,6673 = f(z_4)$, vá à Etapa 3.

Etapa 3 (Caso 2): Faça $a_5 = y_4 = 0,618$ e $b_5 = b_4 = 0,7639$, $y_5 = z_4 = 0,6738$ e $z_5 = a_5 + 0,618$. $(b_5 - a_5) = 0,7082$.

Determine $f(z_5) = 2,6873$ e vá à Etapa 5.

Etapa 5: Faça $k = k + 1 = 5$ e volte à Etapa 2.

Etapa 2.5: Observe que $b_5 - a_5 = 0,1459 > 0,001 = \varepsilon$, então o processo iterativo não é encerrado. Comparando os valores das funções $f(y_5) = 2,6673 < 2,6873 = f(z_5)$, vá à Etapa 4.

Após sucessivos cálculos aplicando o algoritmo da seção áurea, obtêm-se os dois últimos passos.

Etapa 2.15: Observe que $b_{15} - a_{15} = 0,6675 - 0,6663 = 0,0012 > 0,001 = \varepsilon$, então o processo iterativo não é encerrado.

Comparando os valores das funções $f(y_{15}) = 2,6667 < 2,6667 = f(z_{15})$, vá à Etapa 4.

Etapa 4 (Caso 1): Faça $a_{16} = a_{15} = 0,6663$ e $b_{16} = z_{15} = 0,6671$, $z_{16} = y_{15} = 0,6668$ e $y_{16} = a_{16} + 0,382$. $(b_{16} - a_{16}) = 0,6666$.

Daí, $f(y_{16}) = f(0,6666) = 2,6667$ e $f(z_{16}) = f(0,6668) = 2,6667$ e vá à Etapa 5.

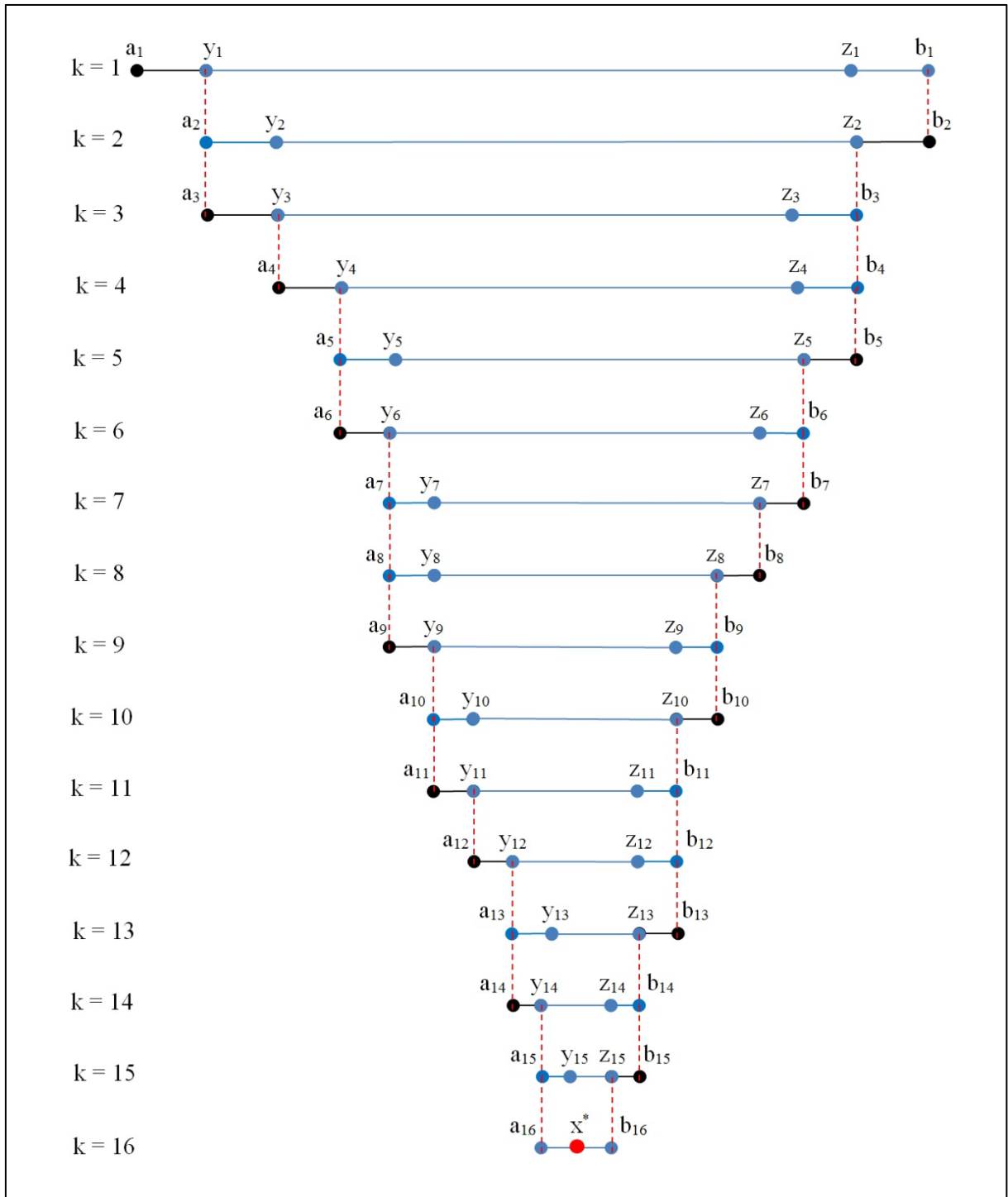
Etapa 5: Faça $k = k + 1 = 16$ e volte à Etapa 2.

Etapa 2.16: Observe que $b_{16} - a_{16} = 0,0007 < 0,001 = \varepsilon$, então o processo iterativo é encerrado.

Portanto, o ponto de mínimo será $x^* = \frac{a_{16} + b_{16}}{2} = \frac{0,6663 + 0,6671}{2} \cong 0,67$. E $f(0,6667) \cong 2,67$ é o valor mínimo da função. Ou seja, a solução ótima é $P^*(0,67; 2,67)$.

O esquema representado na Figura 3.7 mostra as sucessivas reduções do intervalo $[0, 1]$ que contém x^* . Para facilitar a visualização, não será usado medidas proporcionais, no esquema.

Figura 3.7 – Reduções sucessivas do intervalo de incerteza pelo método de seção áurea, aplicado à função $f(t) = 12t^2 - 16t + 8$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Smidi, 2015 [4], apresenta uma sequência de comandos para resolver problemas de otimização pelo método da seção áurea, utilizando planilhas eletrônicas disponíveis no Microsoft EXCEL[®] e LibreOffice CALC.

Utilizando o software mencionado, foi feita uma variação no intervalo de incerteza, e na tolerância, para a função dada pela eq. (3.4) como mostra a Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Ponto de mínimo da função $f(t) = 12t^2 - 16t + 8$ variando intervalo de incerteza e tolerância.

<i>Intervalo</i>	<i>Iterações (k)</i>	a_k	b_k	<i>Tolerância (ε)</i>	x^*
[0, 1]	2	0,382	1	$6,2 \cdot 10^{-1}$	0,691
[0, 1]	6	0,6181	0,7082	$9 \cdot 10^{-2}$	0,6631
[0, 1]	11	0,6606	0,6687	$8,1 \cdot 10^{-3}$	0,6647
[0, 1]	16	0,6663	0,6671	$7,3 \cdot 10^{-4}$	0,6667
[0, 1]	21	0,6667	0,6667	$6,6 \cdot 10^{-5}$	0,6667
[-1, 5]	5	0,4163	1,2915	$8,8 \cdot 10^{-1}$	0,8539
[-1, 5]	10	0,6229	0,7018	$7,9 \cdot 10^{-2}$	0,6624
[-1, 5]	15	0,6646	0,6717	$7,1 \cdot 10^{-3}$	0,6681
[-1, 5]	20	0,6663	0,6669	$6,4 \cdot 10^{-4}$	0,6666
[-1, 5]	24	0,6666	0,6667	$9,4 \cdot 10^{-5}$	0,6667
[-5, 15]	8	0,4099	1,0984	$6,9 \cdot 10^{-1}$	0,7542
[-5, 15]	13	0,6345	0,6966	$6,2 \cdot 10^{-2}$	0,6656
[-5, 15]	17	0,6638	0,6729	$9,1 \cdot 10^{-3}$	0,6683
[-5, 15]	22	0,6665	0,6673	$8,2 \cdot 10^{-4}$	0,6669
[-5, 15]	27	0,6666	0,6667	$7,4 \cdot 10^{-5}$	0,6667

Fonte: Elaborada pela autora.

Observa-se nos resultados apresentados na Tabela 3.1, que no método da seção áurea quanto maior o intervalo de incerteza, mais iterações são necessárias para obter a tolerância desejada e ainda, que neste exemplo em particular, não ocorreram grandes variações no valor do mínimo x^* a partir da tolerância $\varepsilon < 0,1$.

O método da seção áurea pode ser aplicado também em funções cúbicas, desde que no intervalo escolhido a função seja unimodal. Nos livros de Cálculo Diferencial podem ser encontrados vários problemas que são resolvidos usando derivadas, mas que também podem ser minimizados pelo método da seção áurea.

Quanto menor o intervalo de incerteza, mais eficaz é o método, pois convergirá rapidamente, diminuindo a quantidade de iterações, assim pode-se escolher o intervalo $[1, 3]$, já que a função cúbica dada na eq. (3.5) é unimodal neste intervalo. Adota-se para tal problema, a tolerância dada por $\varepsilon = 0,1$.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3. \quad (3.5)$$

De acordo com o algoritmo do método da seção áurea, dado pela Figura 3.4 tem-se:

Etapa 1: O intervalo de incerteza inicial é $[1, 3]$ e o critério de convergência $\varepsilon = 0,1$. Assim, $a_1 = 1$ e $b_1 = 3$.

Calcule os valores iniciais de y_1 e z_1 :

$$y_1 = a_1 + 0,382.(b_1 - a_1) \Rightarrow y_1 = 1,764$$

$$z_1 = a_1 + 0,618.(b_1 - a_1) \Rightarrow z_1 = 2,236.$$

Assim, $f(y_1) = f(1,764) = -0,8461$ e $f(z_1) = f(2,236) = -0,8198$, faça $k = 1$.

Etapa 2.1: Observe que $b_1 - a_1 = 2 > 0,1 = \varepsilon$, então o processo iterativo não é encerrado.

Comparando os valores das funções $f(y_1) = -0,8461 < -0,8198 = f(z_1)$, vá à Etapa 4.

Etapa 4 (Caso 1): Faça $a_2 = a_1 = 1$ e $b_2 = z_1 = 2,236$, $z_2 = y_1 = 1,764$ e $y_2 = a_2 + 0,382.(b_2 - a_2) = 1,4722$.

Determine $f(y_2) = f(1,4722) = -0,3112$ e vá à Etapa 5.

Etapa 5: Faça $k = k + 1 = 2$ e volte a Etapa 2.

Etapa 2.2: Observe que $b_2 - a_2 = 1,236 > 0,1 = \varepsilon$, então o processo iterativo não é encerrado.

Comparando os valores das funções $f(y_2) = -0,3112 > -0,8461 = f(z_2)$, vá à Etapa 3.

Etapa 3 (Caso 2): Fazendo $a_3 = y_2 = 1,472152$ e $b_3 = b_2 = 2,236$, $y_3 = z_2 = 1,764$ e $z_3 = a_3 + 0,618.(b_3 - a_3) = 1,9442$.

Determine $f(z_3) = -0,9908$ e vá à Etapa 5.

Etapa 5: Faça $k = k + 1 = 3$ e volte à Etapa 2.

Etapa 2.3: Observe que $b_3 - a_3 = 0,7638 > 0,1 = \varepsilon$, então o processo iterativo não é encerrado.

Comparando os valores das funções $f(y_3) = -0,8461 > -0,9908 = f(z_3)$, vá à Etapa 3.

Etapa 3 (Caso 2): Faça $a_4 = y_3 = 1,764$ e $b_4 = b_3 = 2,236$, $y_4 = z_3 = 1,9442$ e $z_4 = a_4 + 0,618 \cdot (b_4 - a_4) = 2,0557$.

Determine $f(z_4) = -0,9905$ e vá à Etapa 5.

Etapa 5: Faça $k = k + 1 = 4$ e volte à Etapa 2.

Etapa 2.4: Observe que $b_4 - a_4 = 0,472 > 0,1 = \varepsilon$, então o processo iterativo não é encerrado.

Comparando os valores das funções $f(y_4) = -0,9908 < -0,9905 = f(z_4)$, vá à Etapa 4.

Etapa 4 (Caso 1): Faça $a_5 = a_4 = 1,764$ e $b_5 = z_4 = 2,0557$, $z_5 = y_4 = 1,9442$ e $y_5 = a_5 + 0,382 \cdot (b_5 - a_5) = 1,8754$.

Determine $f(y_5) = f(1,8754) = -0,9554$ e vá à Etapa 5.

Etapa 5: Faça $k = k + 1 = 5$ e volte à Etapa 2.

Etapa 2.5: Observe que $b_5 - a_5 = 0,2916 > 0,1 = \varepsilon$, então o processo iterativo não é encerrado.

Após sucessivos cálculos aplicando o algoritmo da seção áurea, obtêm-se os dados da Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Reduções sucessivas do intervalo de incerteza pelo método de seção áurea, aplicado à função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

k	a_k	b_k	y_k	z_k	$f(y_k)$	$f(z_k)$	$b_{k+1} - a_{k+1}$
1	1	3	1,764	2,236	-0,8461	-0,8198	1,236
2	1	2,236	1,4722	1,764	-0,3112	-0,8461	0,7638
3	1,4722	2,236	1,764	1,9442	-0,8461	-0,9908	0,472
4	1,764	2,236	1,9442	2,0557	-0,9908	-0,9905	0,2917
5	1,764	2,0557	1,8754	1,944	-0,9554	-0,9908	0,1803
6	1,8754	2,0557	1,9442	1,9868	-0,9908	-0,9995	0,1115
7	1,9442	2,0557	1,9868	2,0131	-0,9995	-0,9995	0,0691
8	1,9868	2,0557					

Fonte: Elaborada pela autora.

Observe que $b_8 - a_8 = 0,0691 < 0,1 = \varepsilon$, então o processo iterativo é encerrado.

Portanto, o ponto de mínimo será $x^* = \frac{a_8 + b_8}{2} = \frac{1,9868 + 2,0557}{2} \cong 2$. E $f(2,0214) \cong -1$ é o valor mínimo da função. Ou seja, a solução ótima é $P^*(2, -1)$.

As planilhas eletrônicas do EXCEL[®] elaboradas por [4] para otimizar funções aplicando método da seção áurea, possibilitam variar o intervalo de incerteza e a tolerância, para a função representada pela eq. (3.5), como mostra a Tabela 3.3:

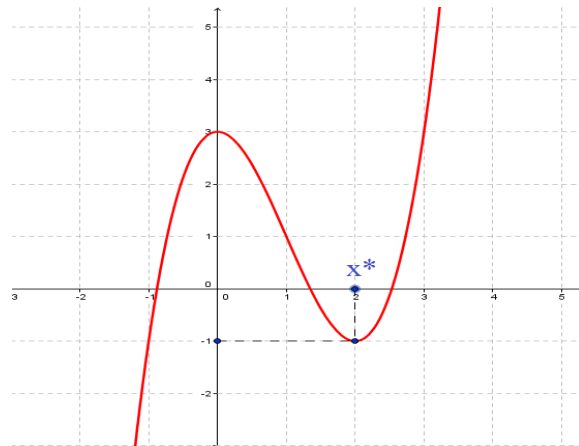
Tabela 3.3 – Ponto de mínimo da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ variando intervalo de incerteza e tolerância.

Intervalo	Iterações (k)	a_k	b_k	ε	x^*
[1, 3]	8	1,9868	2,0557	$6,9 \cdot 10^{-2}$	2,0212
[1, 3]	13	1,9969	2,0031	$6,2 \cdot 10^{-3}$	1,9999
[1, 3]	17	1,9998	2,0007	$9,1 \cdot 10^{-4}$	2,0002
[0, 5]	10	1,9756	2,0413	$6,6 \cdot 10^{-2}$	2,0084
[0, 5]	14	1,997	2,0066	$9,6 \cdot 10^{-3}$	2,0018
[0, 5]	19	1,9998	2,0007	$8,6 \cdot 10^{-4}$	2,0002

Fonte: Elaborada pela autora.

A Figura 3.8 mostra o ponto de mínimo $x^* = 2$ e $y^* = -1$ o valor mínimo da função dada pela eq.(3.5).

Figura 3.8 – Gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.



Fonte: Elaborada pela autora.

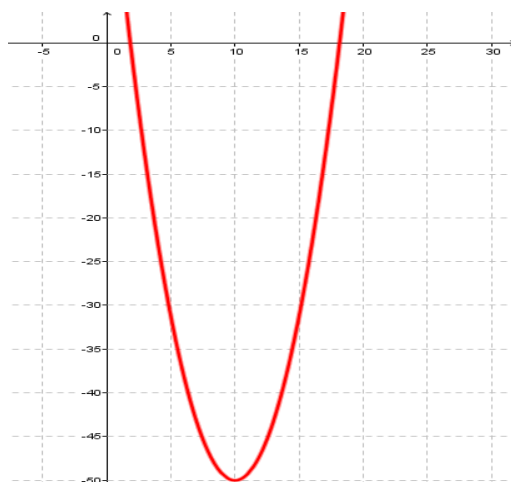
Na seção 2.1, foi resolvido o problema dado pela eq. (2.4), onde se buscou encontrar o máximo lucro da função. Utilizou-se, neste caso, derivadas para obter a solução do problema $L(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 15x - 25$. Em seguida, será proposta sua resolução pelo método da seção áurea.

Lembrando que o método da seção áurea determina o mínimo da função objetivo. Considere $f(x) = -L(x)$, a função a ser minimizada, ou seja, aplica-se o método da seção áurea para a função $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 15x + 25$.

Como a função $f(x)$ é quadrática, ela também é unimodal e seu gráfico é uma parábola com concavidade para cima.

Observando o gráfico da função $f(x)$, na Figura 3.9 nota-se que o ponto de mínimo está no intervalo $[0, 20]$, mas para o método da seção áurea, quanto menor for o intervalo de incerteza, menos iterações são necessárias para encontrar o ponto de mínimo, por isso escolhe-se o intervalo $[7, 12]$. A precisão desejada para este problema é $\varepsilon = 0,1$.

Figura 3.9 – Gráfico da função $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 15x + 25$.



Fonte: Elaborada pela autora.

De acordo com o algoritmo do método da seção áurea, tem-se:

Etapa 1: O intervalo de incerteza inicial é $[7, 12]$ e o critério de convergência $\varepsilon = 0,1$. Assim, $a_1 = 7$ e $b_1 = 12$. Calcule os valores iniciais de y_1 e z_1 :

$$y_1 = a_1 + 0,382 \cdot (b_1 - a_1) \Rightarrow y_1 = 8,91 \text{ e } z_1 = a_1 + 0,618 \cdot (b_1 - a_1) \Rightarrow z_1 = 10,09.$$

Assim, $f(y_1) = f(8,91) = -49,1089$ e $f(z_1) = f(10,09) = -49,9939$, faça $k = 1$.

Etapa 2.1: Observe que $b_1 - a_1 = 12 - 7 = 5 > 0,1 = \varepsilon$, então o processo iterativo não é encerrado.

Comparando os valores das funções $f(y_1) = -49,1089 > -49,9939 = f(z_1)$, vá à Etapa 3.

Etapa 3 (Caso 2): Fazendo $a_2 = y_1 = 8,91$ e $b_2 = b_1 = 12$, $y_2 = z_1 = 10,09$ e $z_2 = a_2 + 0,618 \cdot (b_2 - a_2) = 10,8196$.

Determine $f(z_2) = -49,4962$ e vá para a Etapa 5.

Etapa 5: Faça $k = k + 1 = 2$ e volte à Etapa 2.

Etapa 2.2: Observe que $b_2 - a_2 = 3,09 > 0,1 = \varepsilon$, então o processo iterativo não é encerrado.

Após sucessivos cálculos aplicando o algoritmo da seção áurea, obtêm-se os dados da Tabela 3.4.

Tabela 3.4 – Reduções sucessivas do intervalo de incerteza pelo método de seção áurea, aplicado à função $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 15x + 25$.

k	a_k	b_k	y_k	z_k	$f(y_k)$	$f(z_k)$	$b_{k+1} - a_{k+1}$
1	7	12	8,91	10,09	-49,1089	-49,9939	3,09
2	8,91	12	10,0904	10,8196	-49,9939	-49,4962	1,9096
3	8,91	10,8196	9,6395	10,0901	-49,9025	-49,9939	1,1801
4	9,6395	10,8196	10,0903	10,3688	-49,9939	-49,8980	0,7293
5	9,6395	10,3688	9,9181	10,0902	-49,9950	-49,9939	0,4507
6	9,6395	10,0902	9,8117	9,918	-49,9734	-49,9950	0,2785
7	9,8117	10,0902	9,9181	9,9838	-49,9950	-49,9998	0,1721
8	9,9181	10,0902	9,9838	10,0244	-49,9998	-49,9996	0,1064
9	9,9181	10,0244	9,9587	9,9838	-49,9987	-49,9998	0,0657
10	9,9587	10,0244					

Fonte: Elaborada pela autora.

Observe que para a décima iteração tem-se $b_{10} - a_{10} = 0,0657 < 0,1 = \varepsilon$, então o processo iterativo é encerrado.

Portanto, o ponto de mínimo será $x^* = \frac{a_{10}+b_{10}}{2} = \frac{9,9587+10,0244}{2} = 9,9916 \cong 10$. E $f(9,9916) = -49,9999 \cong -50$ é o valor mínimo da função. Ou seja, a solução ótima é $P_{Min}(10, -50)$.

Lembrando que o problema pede o máximo e que foi considerado $f(x) = -L(x)$ para que fosse aplicado o método da seção áurea. Se $x^* = 10$ é o ponto de mínimo da função $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 15x + 25$, então $x^* = 10$ é o ponto de máximo da função $L(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 15x - 25$. Assim, a solução ótima do problema é $P_{Máx}(10, 50)$.

Novamente, utilizando o Microsoft EXCEL[®] varia-se o intervalo de incerteza, e a tolerância, para esta função, como mostra a Tabela 3.5.

Tabela 3.5 – Ponto de mínimo da função $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 15x + 25$ variando intervalo de incerteza e tolerância.

<i>Intervalo</i>	<i>Iterações (k)</i>	a_k	b_k	ε	x^*
[7, 12]	5	9,6395	10,3688	$7,3 \cdot 10^{-1}$	10,0041
[7, 12]	10	9,9587	10,0244	$6,6 \cdot 10^{-2}$	9,9916
[7, 12]	14	9,9934	10,0030	$9,6 \cdot 10^{-3}$	9,9982
[7, 12]	19	9,9993	10,0002	$8,6 \cdot 10^{-4}$	9,9998
[0, 20]	8	9,4431	10,1317	$6,9 \cdot 10^{-1}$	9,7874
[0, 20]	13	9,9692	10,0312	$6,2 \cdot 10^{-2}$	10,0002
[0, 20]	17	9,9929	10,0019	$9,1 \cdot 10^{-3}$	9,9974
[0, 20]	22	9,9998	10,0006	$8,2 \cdot 10^{-4}$	10,0002

Fonte: Elaborada pela autora.

CAPÍTULO IV

APLICAÇÃO DO MÉTODO ALGORITMOS GENÉTICOS EM PROBLEMAS DO ENSINO BÁSICO

Este capítulo apresenta algumas características do método de otimização conhecido como algoritmos genéticos. Apesar da maioria das aplicações deste método ser voltada para áreas de projetos de engenharia, o mesmo foi adaptado para ser utilizado para encontrar o extremo de funções e, aplicado até mesmo no ensino básico. A proposta é que a aplicação do método sirva inicialmente para motivar os estudantes, pois apresenta uma abordagem bastante interessante, principalmente no que diz respeito à interdisciplinaridade, envolvendo vários conteúdos de Matemática e até mesmo de Ciências e Biologia, além de ser possível também enfocar conteúdos envolvendo ferramentas computacionais [27].

Uma técnica eficaz na resolução de problemas de otimização é o método algoritmos genéticos, por buscar a solução ótima em um enorme conjunto de soluções possíveis. Esta busca é inspirada no processo de seleção e evolução natural dos seres vivos, estudado pelo fisiologista e naturalista inglês Charles Darwin (1859) [28]. No método algoritmos genéticos a busca começa a partir de uma população inicial, onde são selecionados os melhores representantes desta população, obtendo assim uma nova população, que passa a substituir a primeira. Cada nova iteração gera uma nova população selecionada, obtendo, na maioria das vezes, melhores soluções para o problema a ser resolvido, até que se obtenha a solução ótima, ou se atinja o número máximo de gerações [11], [27],[29].

O método algoritmos genéticos é um tipo de algoritmo robusto que se adapta as várias circunstâncias. Este algoritmo dispensa o uso de derivadas da função objetivo e das funções de restrições, atuando diretamente no espaço de projeto em busca do ótimo [11], [17].

Este algoritmo foi desenvolvido por John Holland (1975) [17] e seus alunos da Universidade de Michigan, nos Estados Unidos, no começo dos anos 70, quando iniciou uma pesquisa sobre algoritmos que manipulavam um conjunto formado pelos dígitos 0 e 1, e mais tarde foi popularizado por David Goldberg (1989) [30]. O algoritmo realiza a seleção e evolução de populações, encontrando os melhores indivíduos através da manipulação do material genético contido nos mesmos, de forma eficiente, levando à resolução do problema de otimização [17], [29].

4.1 Conceitos Básicos sobre Números Binários

Ao longo dos séculos, povos de culturas e lugares distintos criaram maneiras diferentes de registrar números. Atualmente o sistema de numeração decimal é universalmente utilizado. Este sistema de números, também conhecido por sistema de numeração de base 10, é feito com os algarismos indo-arábicos [31].

Os números do sistema decimal são representados pelos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Os computadores utilizam números, que não estão na base 10 para efetuar cálculos complexos com uma maior rapidez, eficácia e praticidade. O sistema de numeração binário é utilizado por programadores e foi desenvolvido por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), segundo estudiosos ele foi o responsável pelo progresso da humanidade, tendo o auxílio de Newton para desenvolver seus trabalhos e estudos na época. No sistema de numeração binário ou na base 2, são utilizados apenas os dígitos 0 e 1. Em um sistema como esse, é possível criar letras, números, gráficos e simplificar cálculos com auxílio da lógica, em computação, sendo que um dígito binário pode ser chamado de bit [32].

Na resolução de problemas de otimização através do método algoritmos genéticos também pode ser usado o sistema de numeração na base 2. Assim, tem-se a necessidade de transformar números na base 10 em base 2, ou o contrário.

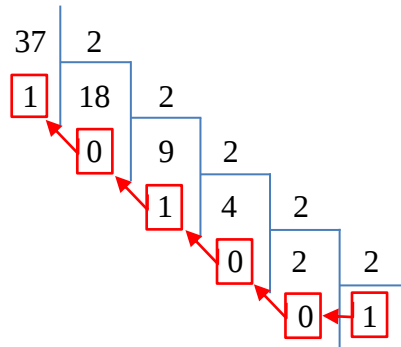
O procedimento de mudança de base é bastante simples e pode ser compreendido como segue:

Divida o número que está na base 10, por 2 e também os quocientes obtidos, quantas vezes for necessário até que o quociente da divisão seja menor que 2. O último quociente juntamente com os restos obtidos das divisões sucessivas, tomadas na ordem inversa que foram encontrados, correspondem aos algarismos na nova base, isto é, no sistema binário [33].

A transformação de números fracionários na base 10 para obter seu equivalente na base 2, também é possível. Mas, este trabalho não tratará dos números racionais binários apenas dos números inteiros.

Para exemplificar, a seguir tem-se um exemplo onde se busca converter o número 37 da base 10 para a base 2. Como mostra a Figura 4.1:

Figura 4.1 – Conversão do número 37 decimal para base 2.



Fonte: Elaborada pela autora.

O número binário é obtido pelo último quociente juntamente com os restos de todas as divisões, escritas na ordem inversa, ou seja, 100101.

Logo, 37 na base decimal, corresponde a 100101 na base 2 ($37_{(10)} = 100101_{(2)}$).

O processo inverso pode ser feito, utilizando o método descrito a seguir [34]:

Todo número da forma $a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0$ em um sistema com base n , é representado da seguinte maneira:

$a_k \cdot n^k + a_{k-1} \cdot n^{k-1} + \dots + a_2 \cdot n^2 + a_1 \cdot n^1 + a_0 \cdot n^0$, onde a_i assume valores de 0 a $n - 1$ e $a_k \neq 0$.

Se $n = 2$, a base é binária, então:

$$a_k \cdot 2^k + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \dots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0, \text{ ou}$$

$$a_k \cdot 2^k + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \dots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0.$$

$$\text{Logo, } a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0_{(2)} = (a_k \cdot 2^k + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \dots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0)_{(10)}.$$

Exemplificando a transformação de um número binário, para decimal, considere o número 101011 na base 2 e observe que é da forma $a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$, assim, $a_5 \cdot 2^5 + a_4 \cdot 2^4 + a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 2^5 + 2^3 + 2 + 1 = 43$. Portanto, $101011_{(2)} = 43_{(10)}$.

O conteúdo sobre mudança de base, normalmente não é ministrado na disciplina de Matemática no Ensino Básico, porém ambos os métodos de conversão podem ser facilmente aplicados para estes alunos, sendo que no primeiro método exige-se que se tenha

conhecimento prévio acerca de divisões com números inteiros e no segundo, que tenham conhecimento sobre potenciação.

4.2 Introdução ao Método Algoritmos Genéticos (AG)

De acordo, com [11], [17], [35], [36] o funcionamento do método algoritmos genéticos é baseado no processo de evolução encontrado na natureza e segue as etapas: inicialização, avaliação, seleção, cruzamento, mutação, atualização e finalização.

Na inicialização é gerada uma população de possíveis soluções para o problema a ser otimizado. Em seguida, esta população é submetida ao processo de evolução.

Na etapa de avaliação, cada indivíduo da população é avaliado em busca dos mais aptos, ou seja, busca-se o indivíduo que apresenta uma boa resposta ao problema.

Alguns dos principais mecanismos do AG são:

- ✓ *Cromossomos ou indivíduos*: São conjuntos de caracteres, onde cada indivíduo representa uma possível solução do problema. Normalmente um cromossomo é um vetor de bits, por exemplo, (111001011).
- ✓ *População*: É um conjunto de indivíduos (cromossomos) que são candidatos a solução. O tamanho da população pode influenciar no desempenho e na eficiência do método algoritmos genéticos.
- ✓ *Geração*: É o número de vezes que o algoritmo é executado para gerar uma nova população.
- ✓ *Operações genéticas*: São as operações realizadas sobre cada um dos indivíduos da população: seleção, cruzamento e mutação.
- ✓ *Seleção*: A probabilidade de um indivíduo ser escolhido é proporcional à sua aptidão, quanto mais apto for, maiores são as chances de serem selecionados para a reprodução.
- ✓ *Cruzamento*: Cria novos indivíduos com características dos seus pais, permitindo que estes novos indivíduos sejam acrescentados à população.
- ✓ *Mutação*: As características dos indivíduos obtidos com a reprodução são alteradas, permitindo a criação de novos indivíduos, escolhendo aleatoriamente um ou mais caracteres para serem invertidos.
- ✓ *Atualização*: Os indivíduos criados nesta geração são armazenados na nova população.

✓ *Critério de parada:* Os novos indivíduos da nova população também serão avaliados, para verificar se o resultado esperado foi atingido, em caso positivo é encerrada a execução do algoritmo.

✓ *Espaço de busca ou região viável:* É o conjunto onde estão as soluções possíveis do problema a ser otimizado, sempre é definido pelas funções de restrição.

✓ *Função objetivo ou de aptidão:* Permite o cálculo da aptidão de cada indivíduo, fornecendo o valor para encontrar a probabilidade de ser selecionado para reprodução.

4.2.1 Operador Seleção

Dada uma população, no processo de seleção, escolhem-se os indivíduos com maior aptidão para participarem do processo de reprodução, isto é, selecionam-se aqueles que apresentam um valor da função objetivo mais elevado. Existem vários métodos para selecionar os indivíduos, nesse trabalho será aplicado o método de seleção por roleta [29], [36].

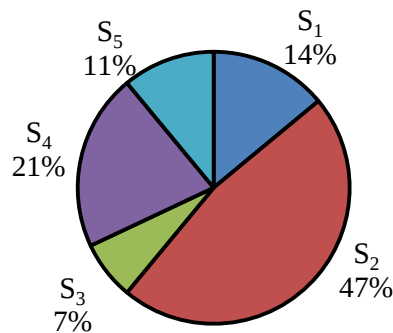
No algoritmo de seleção por roleta cada indivíduo da população é representado na roleta, proporcionalmente ao seu índice de aptidão. Assim, o círculo (roleta) é dividido em regiões com a área de cada região proporcional a aptidão do indivíduo. Com isto, os indivíduos com alta aptidão ocuparão uma porção maior da roleta do que os indivíduos que possuem uma aptidão menor. Esta roleta é girada um determinado número de vezes, e a quantidade de giros depende do tamanho da população. Em cada giro da roleta, um indivíduo é selecionado e participará do processo de geração da nova população. A Figura 4.2 e a Tabela 4.1 ilustram um exemplo do algoritmo de seleção do tipo roleta [11], [29], [36].

Tabela 4.1 – Um exemplo de algoritmo de seleção por roleta.

S_i	Indivíduo S_i	Função Objetivo $f(S_i)$	Aptidão Relativa
S_1	10110	2,23	14%
S_2	11000	7,27	47%
S_3	11110	1,05	7%
S_4	01001	3,35	21%
S_5	00110	1,69	11%
Soma:		15,59	100%

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 4.2 – Um exemplo de algoritmo de seleção por roleta.



Fonte: Elaborada pela autora.

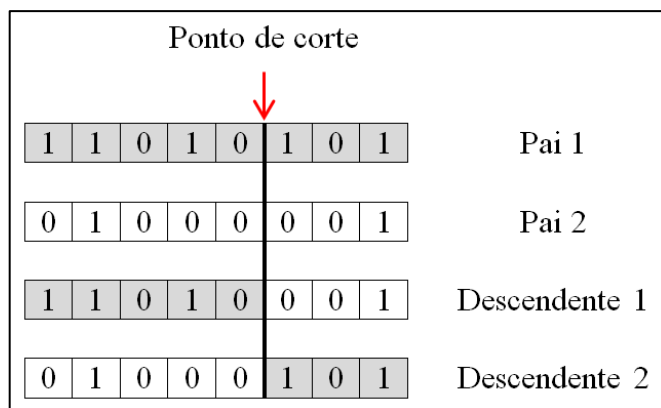
4.2.2 Operador Cruzamento

O operador de cruzamento é utilizado após a seleção dos indivíduos. Nesta operação é realizada a mistura do material genético dos pais selecionados para a geração de dois novos descendentes, com as características genéticas dos indivíduos que formarão a população da próxima geração. Com a troca de informações genéticas, os descendentes herdam as características predominantes de seus pais, favorecendo a velocidade do processo evolutivo.

O processo de cruzamento pode ser realizado de três formas: o cruzamento em um ponto, o cruzamento em dois ou mais pontos e o cruzamento uniforme, que serão detalhados a seguir [27], [36].

No processo de cruzamento em um ponto, seleciona-se aleatoriamente um ponto de corte do indivíduo, onde será aplicado o cruzamento, gerando dois novos descendentes. Na Figura 4.3 tem-se um exemplo deste tipo de cruzamento [27], [36].

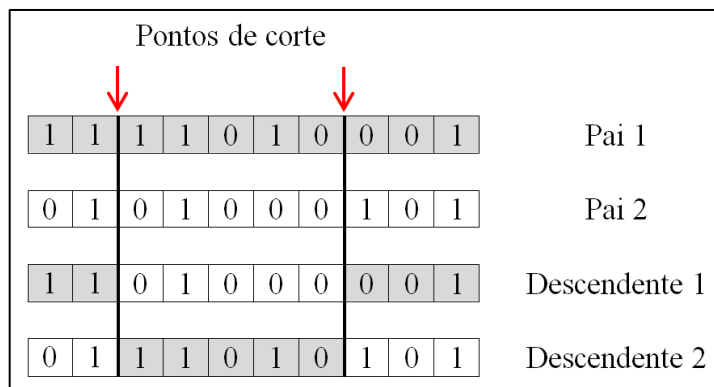
Figura 4.3 – Cruzamento em um ponto.



Fonte: Elaborada pela autora.

O cruzamento de dois ou mais pontos ocorre de forma similar ao cruzamento de um ponto, sendo que a diferença é que, neste caso, serão escolhidos mais de um ponto dos pais para se fazer a troca de material genético. A Figura 4.4 mostra um exemplo do cruzamento de dois pontos [27], [36], [37].

Figura 4.4 – Cruzamento em dois pontos.



Fonte: Elaborada pela autora.

No cruzamento uniforme, primeiramente é criada uma máscara de cruzamento de forma aleatória, cada gene do descendente é criado, copiando de um dos genes dos pais. Estes

genes são escolhidos de acordo com a máscara de cruzamento. Desta forma, se na máscara de cruzamento certo bit for 1, o gene é copiado do primeiro pai, caso o bit da máscara de cruzamento for 0, é copiado o gene do segundo pai. O processo é repetido com outros pais, para produzir o próximo descendente. Uma nova máscara de cruzamento é criada para cada par de pais. A Figura 4.5 apresenta um exemplo do cruzamento uniforme [27], [36].

Figura 4.5 – Cruzamento uniforme.

Máscara de Cruzamento	1	0	0	1	0	1	0
Pai 1	1	0	1	0	0	1	0
	0	1	1	0	1	0	1
Pai 2							
Descendente 1	1	1	1	0	1	1	1
	0	0	1	0	0	0	0
Descendente 2							

Fonte: Elaborada pela autora.

4.2.3 Operador Mutação

A operação de mutação é responsável pela manutenção da diversidade genética das populações no método algoritmos genéticos, com a introdução de um novo material genético na população de indivíduos, sendo possível recuperar algumas características perdidas durante o processo de seleção. Este operador é aplicado normalmente após o cruzamento, e tem uma determinada probabilidade de mutação, em cada bit dos dois descendentes gerados. O processo de mutação de bit é simples, dada à probabilidade, cada bit do indivíduo é avaliado, caso deva sofrer mutação, seu valor é simplesmente trocado por outro [27], [37].

A Figura 4.6 apresenta a troca de bits, para o caso de uma representação binária [36].

Figura 4.6 – Mutação.

1	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1

Fonte: Elaborada pela autora.

4.2.4 Aplicações

O método algoritmos genéticos pode ser aplicado em problemas de otimização para a busca do valor ótimo de uma função objetivo. Como foi mencionado anteriormente, o critério de parada para este método depende da tolerância adotada ou da quantidade máxima de gerações escolhidas. No presente trabalho, procura-se introduzir uma nova ferramenta para se resolver problemas de otimização a ser aplicada no ensino básico. Assim, nos problemas abordados a seguir, o algoritmo será aplicado a cada função até a obtenção da solução ótima. Esta técnica será agora utilizada na busca pelo extremo da função dada por $f(x) = x^2 - 16x + 9$. O AG é elaborado para buscar o máximo da função objetivo, quando se busca minimizar a função, considera-se $g(x) = -f(x)$, ou seja, aplica-se o método algoritmos genéticos para a função eq. (4.1):

$$g(x) = -x^2 + 16x - 9, \quad (4.1)$$

onde x é um número inteiro tal que $x \in [0,17]$.

Codifica-se o parâmetro x como uma cadeia de bits. Como a codificação binária, é dada por $17_{(10)} = 10001_{(2)}$, serão necessários então, cinco bits para escrever todos os valores inteiros de $x \in [0,17]$.

Gera-se aleatoriamente uma população de indivíduos binários com cinco bits, menores que 10001. Neste exemplo, escolhe-se uma população inicial de tamanho 4, isto é, com quatro indivíduos diferentes. A escolha de tais indivíduos pode ser feita, por exemplo, jogando uma moeda sobre a mesa. Se der cara, escreve o numeral 1, e se cair coroa escreve o numeral 0, executando esse procedimento cinco vezes para cada indivíduo obteve-se:

V_1 : 01001, V_2 : 00010, V_3 : 01111 e V_4 : 00100.

Calculam-se os valores da função objetivo para cada indivíduo, para isso, é necessário converter os valores, binário para base 10:

$$V_1: 01001_{(2)} = 0.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2 + 1 = 9_{(10)};$$

$$V_2: 00010_{(2)} = 0.2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 1.2 + 0 = 2_{(10)};$$

$$V_3: 01111_{(2)} = 0.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2 + 1 = 15_{(10)};$$

$$V_4: 00100_{(2)} = 0.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 0.2 + 0 = 4_{(10)}.$$

Agora calcule o valor de cada x , na função aptidão dada pela eq. (4.1):

$$V_1: 01001_{(2)} = 9_{(10)} \Rightarrow g(9) = -9^2 + 16.9 - 9 = 54;$$

$$V_2: 00010_{(2)} = 2_{(10)} \Rightarrow g(2) = -2^2 + 16.2 - 9 = 19;$$

$$V_3: 01111_{(2)} = 15_{(10)} \Rightarrow g(16) = -15^2 + 16.15 - 9 = 6;$$

$$V_4: 00100_{(2)} = 4_{(10)} \Rightarrow g(4) = -4^2 + 16.4 - 9 = 39.$$

Monta-se uma tabela com o percentual total de chances de cada indivíduo, de acordo com a aptidão, para que sejam selecionados, através do método da roleta, dois indivíduos para se reproduzirem. Como mostra a Tabela 4.2:

Tabela 4.2 – Aptidão dos indivíduos da população inicial referente a função $g(x) = -x^2 + 16x - 9$.

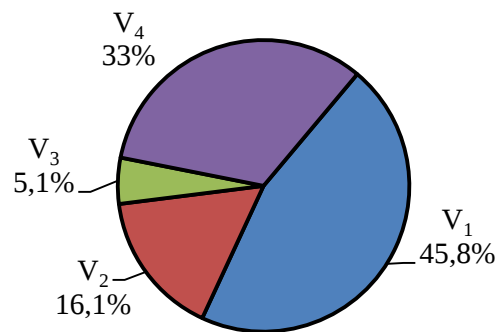
<i>Indivíduo</i>	<i>x</i>	<i>g(x)</i>	<i>% do total</i>	<i>% acumulada</i>
V ₁ : 01001	9	54	45,8	[0; 45,8]
V ₂ : 00010	2	19	16,1	[45,8; 61,9]
V ₃ : 01111	15	6	5,1	[61,9; 67]
V ₄ : 00100	4	39	33	[67; 100]
Soma:		118	100	

Fonte: Elaborada pela autora.

O valor máximo da função objetivo é 54 e a soma das aptidões dos indivíduos da população é 118.

O gráfico na Figura 4.7 mostra a região da roleta que cada indivíduo ocupa. O indivíduo V₁ tem a maior aptidão, e conseqüentemente ocupa a maior região na roleta, 45,8%.

Figura 4.7 – Seleção por roleta da população inicial.



Fonte: Elaborada pela autora.

O processo de seleção através do método da roleta inicia-se ao girar a mesma, mas uma roleta comum tem apenas números de 1 a 36, e não números de 1 a 100, que é necessário para este método. Sendo assim, uma roleta pode ser colocada sobre o círculo da Figura 4.7 ampliado, e então ser girada. Outra maneira simples, de sortear números no intervalo de 1 a 100 que pode ser feito, por exemplo, ter uma caixa com 100 bolinhas, ou papéis numerados para retirar aleatoriamente.

Após a escolha de cada número consulta-se à qual indivíduo esse número corresponde na tabela de probabilidades acumuladas.

No caso desse exemplo, sortearam-se quatro números quaisquer: 36, 63, 68 e 23.

Observando a Tabela 4.2, tem-se que:

O número 23 está entre 0 e 45,8, correspondendo ao indivíduo V₁;

O número 36 está entre 0 e 45,8, correspondendo ao indivíduo V₁;

O número 63 está entre 61,9 e 67 corresponde ao indivíduo V₃;

O número 68 está entre 67 e 100 corresponde ao indivíduo V₄.

Os indivíduos selecionados foram: V₁: 01001, V₃: 01111 e V₄: 00101. Assim, V₂ será excluído.

O operador de cruzamento em um ponto é o método de cruzamento mais simples e o mais utilizado, aplica-se a um par de indivíduos, os quais serão os pais que trocam material entre si para obter dois descendentes.

A escolha dos pais deve ser feita observando os dois indivíduos de maior aptidão, dentro os selecionados pela roleta. Pela Tabela 4.2 os de maior aptidão são V_1 , V_4 e V_3 , respectivamente. Então se cruza V_1 e V_4 como mostra a Tabela 4.3, sendo escolhido o ponto de cruzamento 3.

Tabela 4.3 – Cruzamento em um ponto da população inicial selecionada.

<i>Seleção</i>	<i>Após o Cruzamento</i>
V_1 : 0100 1	01000
V_1 : 01001	-
V_3 : 01111	-
V_4 : 0010 0	00101

Fonte: Elaborada pela autora.

Agora a população tem dois novos indivíduos, denotados por D_1 : 01000 e D_2 : 00101. Estes descendentes farão parte da nova população, juntamente com seus pais.

A Tabela 4.4 mostra os indivíduos que sobreviveram e seu valor de aptidão.

Lembrando que D_1 : 01000₍₂₎ = 8₍₁₀₎ e D_2 : 00101₍₂₎ = 5₍₁₀₎. E calculando o valor de cada x , na função aptidão dada pela eq. (4.1) tem-se:

$$D_1: 01000_{(2)} = 8_{(10)} \Rightarrow g(8) = -8^2 + 16.8 - 9 = 55; \text{ e}$$

$$D_2: 00101_{(2)} = 5_{(10)} \Rightarrow g(5) = -5^2 + 16.5 - 9 = 46$$

Tabela 4.4 – Seleção dos quatro indivíduos mais aptos, após cruzamento da população inicial.

<i>Indivíduos</i>	x	$g(x)$
V_1 : 01001	9	54
V_1 : 01001	9	54
V_3: 01111	15	6
V_4: 00100	4	39
D_1 : 01000	8	55
D_2 : 00101	5	46

Fonte: Elaborada pela autora.

Para manter a população com quatro indivíduos podem-se excluir os dois de menor aptidão, ou seja, V_3 e V_4 serão eliminados. E aplica-se novamente a seleção pelo método da roleta.

Assim, o processo é repetido, monta-se a Tabela 4.5 com o percentual total de chances de cada indivíduo, de acordo com a aptidão, para que sejam selecionados, através do método da roleta, dois indivíduos para se reproduzirem.

Tabela 4.5 – Aptidão dos indivíduos da população da 1ª geração.

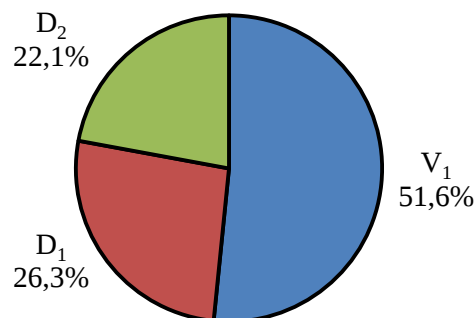
<i>Indivíduo</i>	x	$g(x)$	<i>% do total</i>	<i>% acumulada</i>
V_1 : 01001	9	54	25,8	[0; 25,8]
V_1 : 01001	9	54	25,8	[25,8; 51,6]
D_1 : 01000	8	55	26,3	[51,6; 77,9]
D_2 : 00101	5	46	22,1	[77,9; 100]
Soma:		209	100	

Fonte: Elaborada pela autora.

Note que o máximo da função objetivo cresceu de 54 para 55 e a soma das aptidões dos indivíduos da população aumentou de 118 para 209.

Na Figura 4.8 referente aos indivíduos da 1ª geração representados na Tabela 4.5, como V_1 é um indivíduo com repetição (2 vezes), optou-se por mostrar estes dois indivíduos como sendo uma mesma região.

Figura 4.8 – Seleção por roleta da 1ª geração.



Fonte: Elaborada pela autora.

Sorteando quatro novos números: 10, 20, 72 e 99. Observando a Tabela 4.5, tem-se que:

O número 10 está entre 0 e 51,6, correspondendo ao indivíduo V_1 ;

O número 20 está entre 0 e 51,6, correspondendo ao indivíduo V_1 ;

O número 72 está entre 51,6 e 77,9 corresponde ao indivíduo D_1 ;

O número 99 está entre 77,9 e 100 corresponde ao indivíduo D_2 .

Todos os indivíduos foram selecionados. Cruzam-se os pais V_1 e D_1 por serem os de maior aptidão. Observando os dígitos de V_1 : 01001 e D_1 : 01000, nota-se que independentemente do ponto de corte, o cruzamento gera descendentes iguais aos pais. Escolhe-se o ponto de cruzamento 3, veja na Tabela 4.6:

Tabela 4.6 – Cruzamento em um ponto da 1ª geração.

<i>Seleção</i>	<i>Após o Cruzamento</i>
V_1 : 01001	01000
V_1 : 01001	-
D_1 : 01000	01001
D_2 : 00101	-

Fonte: Elaborada pela autora.

Agora a população tem dois novos indivíduos que, neste caso, são iguais os seus pais D_1 : 01000 e V_1 : 01001. Estes descendentes farão parte da nova população, juntamente com seus pais. Apesar de não ser o ideal, foi o resultado obtido no sorteio atual e será respeitado.

Na Tabela 4.7 tem-se os indivíduos que farão parte da 2ª geração e seu valor de aptidão.

Tabela 4.7 – Seleção dos quatros indivíduos mais aptos, obtidos com o cruzamento da 1ª geração.

<i>Indivíduos</i>	x	$g(x)$
V ₁ : 01001	9	54
V ₁ : 01001	9	54
D ₁ : 01000	8	55
D ₂ : 00101	5	46
V ₁ : 01001	9	54
D ₁ : 01000	8	55

Fonte: Elaborada pela autora.

Para manter a população com quatro indivíduos deve-se excluir os dois de menor aptidão, porém, o indivíduo V₁ se repete por 3 vezes. Neste caso, consideram-se apenas dois deles. Como mostra a Tabela 4.8:

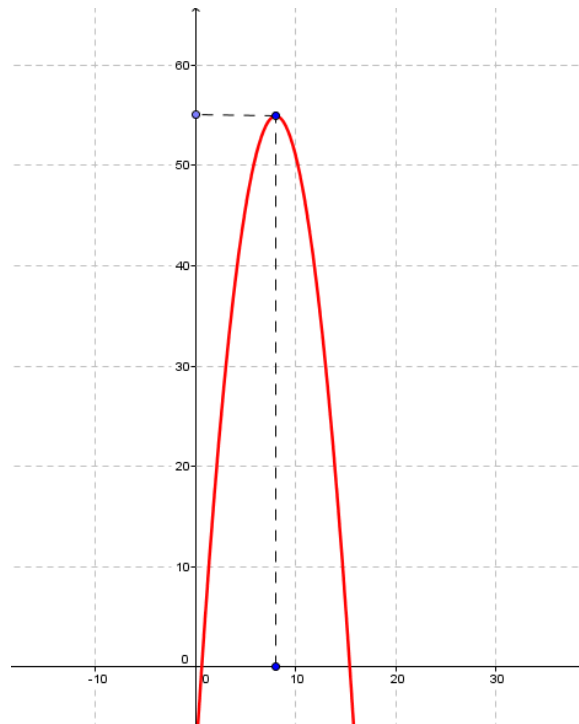
Tabela 4.8 – Os indivíduos da 2ª geração.

<i>Indivíduos</i>	x	$g(x)$
V ₁ : 01001	9	54
V ₁ : 01001	9	54
D ₁ : 01000	8	55
D ₁ : 01000	8	55

Fonte: Elaborada pela autora.

A Figura 4.9 mostra o gráfico na função dada pela eq. (4.1), sendo $x^* = 8$ seu ponto de máximo e $g(8) = 55$ o valor máximo da função. Sendo assim, pode-se observar que, com apenas duas gerações o AG obtém o valor ótimo para a função em questão.

Figura 4.9 – Gráfico da função $g(x) = -x^2 + 16x - 9$.



Fonte: Elaborada pela autora.

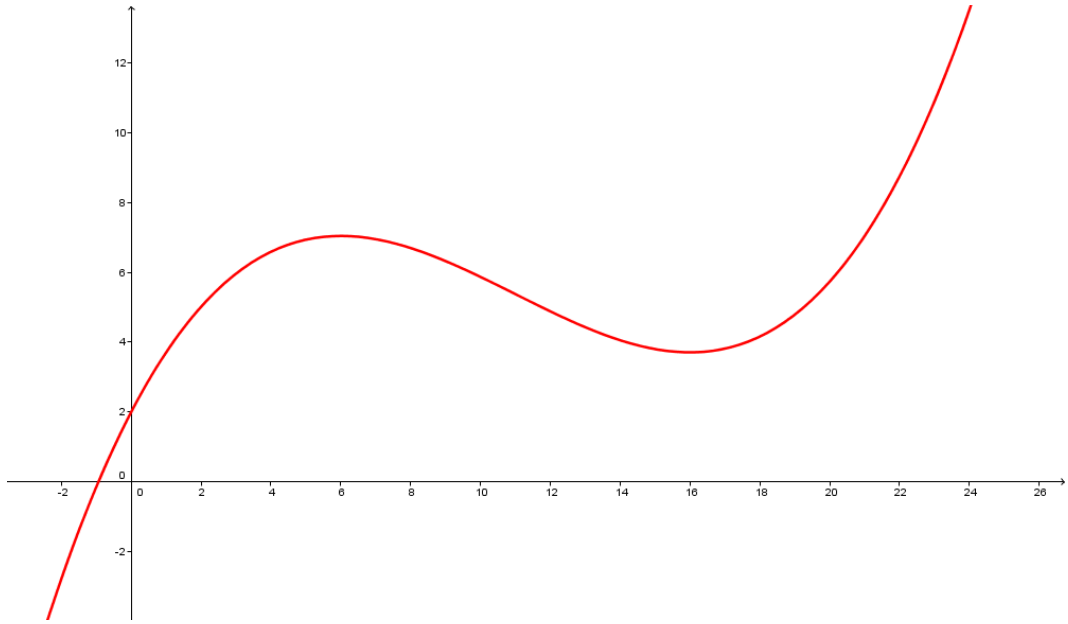
Como $g(x) = -f(x)$ tem-se que o máximo de g é igual ao mínimo de f . Portanto, a função $f(x) = x^2 - 16x + 9$ tem $x^* = 8$ seu ponto de mínimo e $f(8) = -55$ o valor mínimo da função.

Outro problema interessante [38], pode ser abordado utilizando o AG, onde se tem que o lucro (em milhões dólares) de uma companhia que gasta uma quantia x (em milhões de dólares) em propaganda, dada pela eq. (4.2) a seguir:

$$PR(x) = \frac{x^3}{150} - \frac{11}{50}x^2 + \frac{48}{25}x + 2 \quad (4.2)$$

Pretende-se calcular a quantia de dinheiro que a companhia deve investir em propaganda para obter lucro máximo, sabendo que a companhia não pode gastar mais que 20 milhões de dólares, então a função propaganda eq. (4.2), representada na Figura 4.10 será otimizada pelo método algoritmos genéticos, considerando $x \in [0,20]$ com x é um número inteiro.

Figura 4.10 – Gráfico da função propaganda $PR(x) = \frac{x^3}{150} - \frac{11}{50}x^2 + \frac{48}{25}x + 2$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Codificando 20 na base binária, tem-se $20_{(10)} = 10100_{(2)}$. Então é necessário cinco bits para escrever todos os valores inteiros de $x \in [0, 20]$.

Gerando aleatoriamente uma população de indivíduos binários com cinco bits, menores que 10101, com quatro indivíduos diferentes, jogando uma moeda utilizando o mesmo critério já descrito anteriormente, executa-se esse procedimento cinco vezes para cada indivíduo obtendo: P_1 : 10010, P_2 : 10011, P_3 : 01101 e P_4 : 00101.

Convertendo os valores binários para decimais:

P_1 : $10010_{(2)} = 18_{(10)}$, P_2 : $10011_{(2)} = 19_{(10)}$, P_3 : $01101_{(2)} = 13_{(10)}$ e P_4 : $00101_{(2)} = 5_{(10)}$. E, calculando os valores da função objetivo dada pela eq. (4.2) para cada indivíduo tem-se:

P_1 : $10010_{(2)} \Rightarrow PR(18) = 4,16$, P_2 : $10011_{(2)} \Rightarrow PR(19) = 4,79$, P_3 : $01101_{(2)} \Rightarrow PR(13) = 4,43$ e P_4 : $00101_{(2)} \Rightarrow PR(5) = 6,93$.

A Tabela 4.9 mostra o percentual total de cada indivíduo, de acordo com a aptidão, com o objetivo de selecionar dois indivíduos para se reproduzirem, através do método da roleta.

Tabela 4.9 – Aptidão dos indivíduos da população inicial referente a função $PR(x) = \frac{x^3}{150} - \frac{11}{50}x^2 + \frac{48}{25}x + 2$.

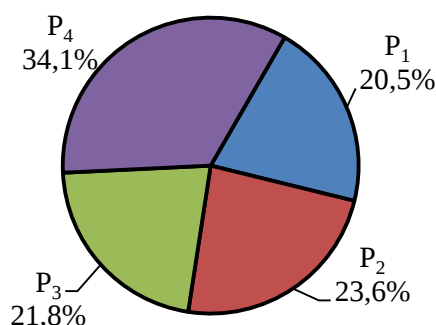
<i>Indivíduo</i>	<i>x</i>	<i>g(x)</i>	<i>% do total</i>	<i>% acumulada</i>
P ₁ : 10010	18	4,16	20,5	[0; 20,5]
P ₂ : 10011	19	4,79	23,6	[20,5; 44,1]
P ₃ : 01101	13	4,43	21,8	[44,1; 65,9]
P ₄ : 00101	5	6,93	34,1	[65,9; 100]
Soma:		20,31	100	

Fonte: Elaborada pela autora.

O valor máximo da função objetivo é 6,93 e a soma das aptidões dos indivíduos da população inicial é 20,31.

O gráfico na Figura 4.11 mostra a região da roleta que cada indivíduo ocupa. O indivíduo P₄ tem a maior aptidão, e consequentemente ocupa a maior região na roleta, 34,1%.

Figura 4.11 – Seleção por roleta da população inicial.



Fonte: Elaborada pela autora.

Iniciando o processo de seleção através do método da roleta sorteando quatro números de 1 a 100, aleatoriamente. Os números sorteados são: 32, 21, 70 e 50.

Observando a Tabela 4.9, tem-se que:

O número 21 está entre 20,5 e 44,1, correspondendo ao indivíduo P₂;

O número 32 está entre 20,5 e 44,1, correspondendo ao indivíduo P₂;

O número 50 está entre 44,1 e 65,9 corresponde ao indivíduo P₃;

O número 70 está entre 65,9 e 100 corresponde ao indivíduo P_4 .

Os indivíduos selecionados foram: P_2 , P_3 e P_4 . Assim, P_1 será excluído.

A escolha dos pais deve ser feita observando os dois indivíduos de maior aptidão, dentre os selecionados pela roleta. Pela Tabela 4.9 os de maior aptidão são P_2 e P_4 . A Tabela 4.10 mostra o cruzamento, sendo escolhido o ponto de corte 3.

Tabela 4.10 – Cruzamento na população inicial selecionada

<i>Seleção</i>	<i>Após o Cruzamento</i>
P_2 : 10011	-
P_2 : 100 11	10001
P_3 : 01101	-
P_4 : 001 01	00111

Fonte: Elaborada pela autora.

A população tem dois novos indivíduos, denotados por D_1 : 10001 e D_2 : 00111. Estes descendentes farão parte da 1ª geração, juntamente com seus pais. Veja na Tabela 4.11 os indivíduos que sobreviveram e os que nasceram, e seus valores de aptidão.

Observe que D_1 : $10001_{(2)} = 17_{(10)}$ e D_2 : $00111_{(2)} = 7_{(10)}$. Agora calculando o valor de cada x , na função aptidão, dada pela eq. (4.1) tem-se:

$$D_1: 17 \Rightarrow PR(17) = 3,81 \text{ e } D_2: 7 \Rightarrow PR(7) = 6,95.$$

Tabela 4.11 – Seleção dos quatro indivíduos mais aptos, após cruzamento da população inicial.

<i>Indivíduos</i>	<i>x</i>	<i>g(x)</i>
P_2 : 10011	19	4,79
P_2 : 10011	19	4,79
P_3: 01101	13	4,43
P_4 : 00101	5	6,93
D_1: 10001	17	3,81
D_2 : 00111	7	6,95

Fonte: Elaborada pela autora.

Excluindo os dois indivíduos de menor aptidão, mantem-se a população com quatro indivíduos, assim P_3 e D_1 são eliminados.

O processo é repetido, sendo selecionados dois novos pais, pelo método da roleta, para reproduzirem. A Tabela 4.12 mostra cada indivíduo da 1ª geração, e seu valor de aptidão.

Tabela 4.12– Aptidão dos indivíduos da população da 1ª geração.

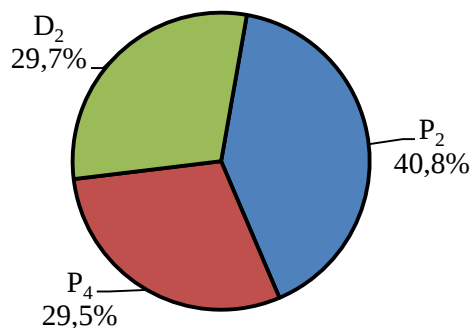
<i>Indivíduo</i>	x	$g(x)$	<i>% do total</i>	<i>% acumulada</i>
P_2 : 10011	19	4,79	20,4	[0; 20,4]
P_2 : 10011	19	4,79	20,4	[20,4; 40,8]
P_4 : 00101	5	6,93	29,5	[40,8; 70,3]
D_2 : 00111	7	6,95	29,7	[70,3; 100]
Soma:		23,46	100	

Fonte: Elaborada pela autora.

Nota-se que o máximo da função de aptidão aumentou de 6,93 para 6,95 e a soma das aptidões dos indivíduos da população aumentou de 20,31 para 23,46.

Na roleta na Figura 4.12, os indivíduos da 1ª geração que são apresentados na Tabela 4.12. O indivíduo P_2 tem a maior aptidão, e consequentemente ocupa a maior região na roleta, 40,8%.

Figura 4.12 – Seleção por roleta da 1ª geração



Fonte: Elaborada pela autora.

Sorteando quatro números de 1 a 100, aleatoriamente, através do método da roleta. Os números sorteados são: 56, 79, 98 e 51.

Observando a Tabela 4.12, tem-se que:

O número 51 está entre 40,8 e 70,3, correspondendo ao indivíduo P_4 ;

O número 56 está entre 40,8 e 70,3, correspondendo ao indivíduo P_4 ;

O número 79 está entre 70,3 e 100 corresponde ao indivíduo D_2 ;

O número 98 está entre 70,3 e 100 corresponde ao indivíduo D_2 .

Os indivíduos selecionados foram: P_4 e D_2 , mesmo P_2 tendo mais chances de ser sorteado ele será eliminado.

Observe que ao cruzar P_4 : 00101 e D_2 : 00111, independentemente do ponto de cruzamento, os descendentes serão iguais aos pais. Neste caso, será aplicado o operador mutação, para os dois indivíduos, escolhendo aleatoriamente um dígito de cada indivíduo, como mostra a Tabela 4.13.

Tabela 4.13 – Mutação de dois indivíduos selecionados da 1ª geração.

<i>Indivíduos</i>	<i>Após a Mutação</i>
P_4 : 0010 1	0010 0
P_4 : 00101	
D_2 : 0 0 111	0 1111
D_2 : 00111	

Fonte: Elaborada pela autora.

Os indivíduos que sofreram mutação fazem parte da 2ª geração, denotados por M_1 : 00100 e M_2 : 01111, juntamente com os outros.

A Tabela 4.14 mostra os indivíduos da nova população e seu valor de aptidão.

Convertendo os valores binários para inteiros, e calculando seus valores, na função aptidão dada pela eq. (4.2), tem-se:

$$M_1: 00100_{(2)} = 8_{(10)} \Rightarrow PR(8) = 6,69 \text{ e}$$

$$M_2: 01111_{(2)} = 15_{(10)} \Rightarrow PR(15) = 3,8.$$

Tabela 4.14 – Seleção dos quatro indivíduos mais aptos, após mutação da 1ª geração.

<i>Indivíduos</i>	x	$g(x)$
P ₄ : 00101	5	6,93
P ₄ : 00101	5	6,93
D ₂ : 00111	7	6,95
D ₂ : 00111	7	6,95
M ₁ : 00100	8	6,69
M ₂ : 01111	15	3,8

Fonte: Elaborada pela autora.

Eliminando os dois indivíduos de menor aptidão, serão excluídos os dois indivíduos que foram acrescentados mais recentemente à população, isso mostra que a aplicação do operador mutação não foi vantajoso neste caso.

Na Tabela 4.15 tem-se os indivíduos da 2ª geração, e seus valores de aptidão.

Tabela 4.15 – Aptidão dos indivíduos da população da 2ª geração.

<i>Indivíduo</i>	x	$g(x)$	% do total	% acumulada
P ₄ : 00101	5	6,93	25	[0,25]
P ₄ : 00101	5	6,93	25	[25; 50]
D ₂ : 00111	7	6,95	25	[50; 75]
D ₂ : 00111	7	6,95	25	[75; 100]
Soma:		27,76	100	

Fonte: Elaborada pela autora.

O máximo da função objetivo manteve 6,95, no entanto, a soma das aptidões dos indivíduos da população passou de 23,46 para 27,76.

Neste momento o cruzamento não ajudaria na busca pelo ótimo, pois P₄: 00101 e D₂: 00111 e os descendentes obtidos seriam iguais aos pais, independentemente do ponto de cruzamento.

O interessante agora seria a inserção de novos indivíduos, para diversificar a população. Então aplica-se novamente o operador mutação escolhendo aleatoriamente o indivíduo como mostra a Tabela 4.16.

Tabela 4.16 – Mutação de todos indivíduos da 2ª geração.

<i>Indivíduos</i>	<i>Após a Mutação</i>
P ₄ : 00 1 01	00 0 01
P ₄ : 0 0101	1 0101
D ₂ : 0011 1	0011 0
D ₂ : 00 1 11	00 0 11

Fonte: Elaborada pela autora.

Os novos indivíduos que fazem parte da 3ª geração são:

$$M_3: 00001_{(2)} = 1_{(10)} \Rightarrow PR(1) = 3,71$$

$$M_4: 10101_{(2)} = 21_{(10)}, \text{ que não pertence ao intervalo em estudo;}$$

$$M_5: 00110_{(2)} = 6_{(10)} \Rightarrow PR(6) = 7,04; \text{ e}$$

$$M_6: 00011_{(2)} = 3_{(10)} \Rightarrow PR(3) = 5,96$$

A Tabela 4.17 mostra os indivíduos da nova população e seus valores de aptidão.

Tabela 4.17 – Seleção dos quatro indivíduos mais aptos, após mutação da 2ª geração.

<i>Indivíduos</i>	<i>x</i>	<i>g(x)</i>
P₄: 00101	5	6,93
P ₄ : 00101	5	6,93
D ₂ : 00111	7	6,95
D ₂ : 00111	7	6,95
M₃: 00001	1	3,71
M ₅ : 00110	6	7,04
M₆: 00011	3	5,96

Fonte: Elaborada pela autora.

Os três indivíduos de menor aptidão, P_4 , M_3 e M_6 serão excluídos mantendo a população com quatro indivíduos.

Na Tabela 4.18 tem-se os indivíduos da 3ª geração, e seus valores de aptidão.

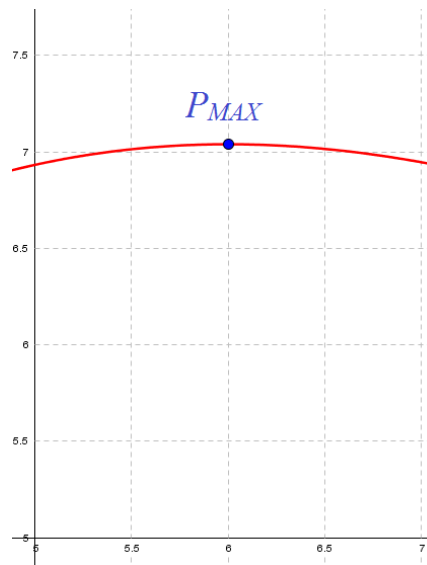
Tabela 4.18 – Aptidão dos indivíduos da população da 3ª geração.

<i>Indivíduo</i>	x	$g(x)$
P_4 : 00101	5	6,93
D_2 : 00111	7	6,95
D_2 : 00111	7	6,95
M_5 : 00110	6	7,04
Soma:		27,87

Fonte: Elaborada pela autora.

Observando o gráfico da função dada pela eq. (4.2), na Figura 4.10, e também a ampliação do gráfico, no intervalo $[5, 7]$ na Figura 4.13, nota-se que $x = 6$ é o ponto de máximo e $P_{MAX}(6; 7,04)$ é a solução ótima do problema em questão.

Figura 4.13 – Gráfico da função propaganda $PR(x) = \frac{x^3}{150} - \frac{11}{50}x^2 + \frac{48}{25}x + 2$, com $x \in [5, 7]$.



Fonte: Elaborada pela autora.

O método dos algoritmos genéticos, portanto encontrou o máximo da função dada pela eq. (4.2) em apenas três gerações.

4.3 Estudo Comparativo Entre Seção Áurea e Algoritmos Genéticos

O problema apresentado a seguir já foi resolvido na seção 2.1 usando derivadas, e na seção 3.2, pelo método da seção áurea, e agora será otimizado pelo método algoritmos genéticos. A função a ser maximizada é a função lucro dada eq. (2.4).

Considerando $x \in [0,20]$ sendo x inteiro, como $20_{(10)} = 10100_{(2)}$, com 5 bits escreve-se todos os valores inteiros de $x \in [0,20]$.

Inicialmente foram sorteados quatro indivíduos: V_1 : 10000, V_2 : 00101, V_3 : 10010 e V_4 : 00010.

Calculam-se os valores da função objetivo dada pela eq. (2.4), para cada indivíduo tem-se:

$$V_1: 10000_{(2)} = 16_{(10)} \Rightarrow L(16) = 23;$$

$$V_2: 00101_{(2)} = 5_{(10)} \Rightarrow L(5) = 31,25;$$

$$V_3: 10010_{(2)} = 18_{(10)} \Rightarrow L(18) = 2;$$

$$V_4: 00010_{(2)} = 2_{(10)} \Rightarrow L(2) = 2.$$

A Tabela 4.19 mostra em porcentagem as chances de cada indivíduo ser selecionado, de acordo com a aptidão, para que através do método da roleta, dois indivíduos selecionados possam se reproduzir.

Tabela 4.19 – Aptidão dos indivíduos da população inicial referente a função $L(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 15x - 25$.

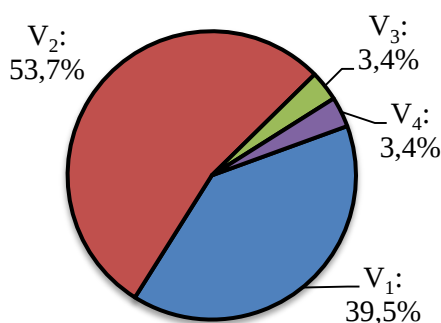
<i>Indivíduo</i>	<i>x</i>	<i>L(x)</i>	<i>% do total</i>	<i>% acumulada</i>
V ₁ : 10000	16	23	39,5	[0; 39,5]
V ₂ : 00101	5	31,25	53,7	[39,5; 93,2]
V ₃ : 10010	18	2	3,4	[93,2; 96,6]
V ₄ : 00010	2	2	3,4	[96,6; 100]
Soma:		58,25	100	

Fonte: Elaborada pela autora.

O valor máximo da função objetivo é 31,25 e a soma das aptidões dos indivíduos da população é 58,25.

O gráfico na Figura 4.14 mostra a região da roleta que cada indivíduo ocupa. O indivíduo V₂ tem a maior aptidão, e consequentemente ocupa a maior região na roleta, 53,7%.

Figura 4.14 – Seleção por roleta da população inicial.



Fonte: Elaborada pela autora.

Iniciando o processo de seleção através do método da roleta sorteando quatro números de 1 a 100, aleatoriamente. Os números sorteados são: 37, 99, 24 e 44.

Observando a Tabela 4.19, tem-se que:

O número 24 está entre 0 e 39,5, correspondendo ao indivíduo V₁;

O número 37 está entre 0 e 39,5, correspondendo ao indivíduo V₁;

O número 44 está entre 39,5 e 93,2 corresponde ao indivíduo V₂;

O número 99 está entre 96,6 e 100 corresponde ao indivíduo V_4 .

Os indivíduos selecionados foram: V_1 , V_2 e V_4 . Assim, V_3 será excluído.

A escolha dos pais deve ser feita observando os dois indivíduos de maior aptidão, dentro os selecionados pela roleta. Pela Tabela 4.19, os de maior aptidão são V_2 , V_1 e V_4 , respectivamente. Então se cruza V_1 e V_2 como mostra a Tabela 4.20, sendo escolhido o ponto de cruzamento 3.

Tabela 4.20 – Cruzamento em um ponto da população inicial selecionada.

<i>Seleção</i>	<i>Após o Cruzamento</i>
V_1 : 10000	-
V_1 : 100 00	10001
V_2 : 001 01	00100
V_4 : 00010	-

Fonte: Elaborada pela autora.

A população tem dois novos indivíduos, denotados por D_1 : 10001 e D_2 : 00100. Estes descendentes farão parte da nova população, juntamente com seus pais.

Veja na Tabela 4.21 os indivíduos que sobreviveram e seu valor de aptidão.

Lembrando que D_1 : $10001_{(2)} = 17_{(10)}$ e D_2 : $00100_{(2)} = 4_{(10)}$. E calculando o valor de cada x , na função aptidão, dada pela eq. (2.4) tem-se:

$$D_1: 17 \Rightarrow L(17) = 13,25 \text{ e } D_2: 4 \Rightarrow L(4) = 23$$

Tabela 4.21 – Seleção dos quatro indivíduos mais aptos, após cruzamento da população inicial.

<i>Indivíduos</i>	x	$L(x)$
V_1 : 10000	16	23
V_1 : 10000	16	23
V_2 : 00101	5	31,25
V_4: 00010	2	2
D_1: 10001	17	13,25
D_2 : 00100	4	23

Fonte: Elaborada pela autora.

Exclui-se os dois indivíduos de menor aptidão, para manter a população com quatro indivíduos, assim V_4 e D_1 são eliminados. E aplica-se novamente a seleção pelo método da roleta.

O processo é repetido, sendo selecionados dois novos pais, pelo método da roleta para reproduzirem. A Tabela 4.22 mostra cada indivíduo da 1ª geração, e seu valor de aptidão.

Tabela 4.22 – Aptidão dos indivíduos da população da 1ª geração.

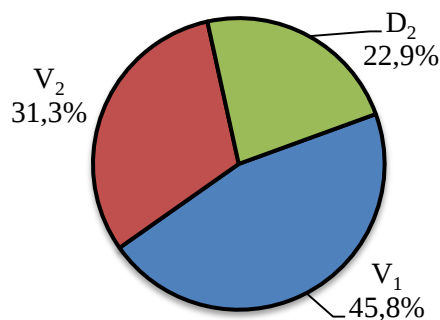
<i>Indivíduo</i>	<i>x</i>	<i>L(x)</i>	<i>% do total</i>	<i>% acumulada</i>
V_1 : 10000	16	23	22,9	[0, 22,9]
V_1 : 10000	16	23	22,9	[22,9; 45,8]
V_2 : 00101	5	31,25	31,3	[45,8; 77,1]
D_2 : 00100	4	23	22,9	[77,1; 100]
Soma:		100,25	100	

Fonte: Elaborada pela autora.

Note que o máximo da função objetivo manteve 31,25 e a soma das aptidões dos indivíduos da população aumentou de 58,25 para 100,25.

A Figura 4.15 refere-se aos indivíduos da 1ª geração que estão representados na Tabela 4.22. O indivíduo V_2 tem a maior aptidão, e consequentemente ocupa a maior região na roleta, 31,3%.

Figura 4.15 – Seleção por roleta da 1ª geração.



Fonte: Elaborada pela autora.

Iniciando o processo de seleção através do método da roleta sorteando quatro números de 1 a 100, aleatoriamente. Os números sorteados são: 52, 06, 18 e 84.

Observando a Tabela 4.22, tem-se que:

O número 6 está entre 0 e 45,8, correspondendo ao indivíduo V_1 ;

O número 18 está entre 0 e 45,8, correspondendo ao indivíduo V_1 ;

O número 52 está entre 45,8 e 77,1 corresponde ao indivíduo V_2 ;

O número 84 está entre 77,1 e 100 corresponde ao indivíduo D_2 .

Todos os indivíduos foram selecionados. Assim, escolhem-se os pais dentre os dois indivíduos de maior aptidão. Pela Tabela 4.22 os de maior aptidão são V_2 , V_1 e D_2 , respectivamente. O primeiro cruzamento foi realizado entre V_1 e V_2 , então se faz entre V_2 e D_2 , mas para cruzar V_2 : 00101 e D_2 : 00100, independentemente do ponto de cruzamento, os descendentes serão iguais aos pais.

Sugere-se a aplicação do operador mutação, para os indivíduos de menor aptidão, pela Tabela 4.22, V_2 tem o maior valor na função objetivo, então não participará do processo de mutação. Escolhido aleatoriamente, um dígito de cada indivíduo como mostra a Tabela 4.23.

Tabela 4.23 – Mutação dos indivíduos selecionados na 1ª geração.

<i>Indivíduos</i>	<i>Após a Mutação</i>
V_1 : 10000	-
V_1 : 10000	10001
V_2 : 00101	-
D_2 : 00100	00110

Fonte: Elaborada pela autora.

Os indivíduos que sofreram mutação fazem parte da nova população, denotados por M_1 : 10101 e M_2 : 00110, juntamente com os outros.

Tem-se na Tabela 4.24 os indivíduos da 2ª geração e seu valor de aptidão, sendo que:

$$M_1: 10001_{(2)} = 17_{(10)} \Rightarrow L(17) = 13,25 \text{ e}$$

$$M_2: 00110_{(2)} = 6_{(10)} \Rightarrow L(6) = 38.$$

Tabela 4.24 – Seleção dos quatro indivíduos mais aptos, após mutação da 1ª geração.

<i>Indivíduos</i>	x	$L(x)$
V₁: 10000	16	23
V ₁ : 10000	16	23
V ₂ : 00101	5	31,25
D ₂ : 00100	4	23
M₁: 10001	17	13,25
M ₂ : 00110	6	38

Fonte: Elaborada pela autora.

Exclui-se os dois indivíduos de menor aptidão, para manter a população com quatro indivíduos, assim V₁ e M₁ são eliminados e, aplica-se novamente a seleção pelo método da roleta.

Repetindo o processo, dois novos pais serão selecionados pelo método da roleta para se cruzarem. A Tabela 4.25 mostra cada indivíduo da 2ª geração, e seu valor de aptidão.

Tabela 4.25 – Aptidão dos indivíduos da população da 2ª geração.

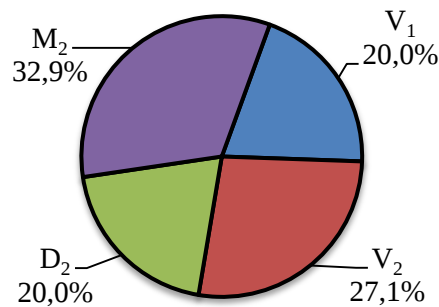
<i>Indivíduo</i>	x	$L(x)$	<i>% do total</i>	<i>% acumulada</i>
V ₁ : 10000	16	23	20	[0,20]
V ₂ : 00101	5	31,25	27,1	[20; 47,1]
D ₂ : 00100	4	23	20	[47,1; 67,1]
M ₂ : 00110	6	38	32,9	[67,1; 100]
Soma:		115,25	100	

Fonte: Elaborada pela autora.

O máximo da função aptidão aumentou de 31,25 para 38,00 e a soma das aptidões dos indivíduos da população passou de 100,25 para 115,25.

A Figura 4.16 mostra como estão representados os indivíduos da 2ª geração, constantes na Tabela 4.25. Neste caso, o indivíduo M₂ tem a maior aptidão, e consequentemente ocupa a maior região na roleta, 32,9%.

Figura 4.16 – Seleção por roleta da 2ª geração.



Fonte: Elaborada pela autora.

Novamente o método de roleta selecionará os indivíduos sorteando quatro números de 1 a 100, aleatoriamente. Os números sorteados são: 100, 10, 22 e 91.

Observando a Tabela 4.25, tem-se que:

O número 10 está entre 0 e 20, correspondendo ao indivíduo V₁;

O número 22 está entre 20 e 47,1, correspondendo ao indivíduo V₂;

O número 91 está entre 67,1 e 100 corresponde ao indivíduo M₂;

O número 100 está entre 67,1 e 100 corresponde ao indivíduo M₂.

Os indivíduos selecionados foram: V₁, V₂ e M₂. Já D₂ será excluído. Então cruza-se V₂ e M₂, os dois indivíduos com maior aptidão, como mostra a Tabela 4.26, sendo escolhido o ponto de cruzamento 4.

Tabela 4.26 – Cruzamento em um ponto da 2ª geração selecionada.

<i>Seleção</i>	<i>Após o Cruzamento</i>
V ₁ : 10000	-
V ₂ : 0010 1	00100
M ₂ : 0011 0	00111
M ₂ : 00110	-

Fonte: Elaborada pela autora.

A população tem dois novos indivíduos, denotados por D₃: 00100 e D₄: 00111. Estes descendentes farão parte da nova população, juntamente com seus pais.

A Tabela 4.27 mostra os indivíduos que sobreviveram e seu valor de aptidão.

Convertendo os valores binários para inteiros tem-se que $D_3: 00100_{(2)} = 4_{(10)}$ e $D_4: 00111_{(2)} = 7_{(10)}$. E calculando o valor de cada x , na função aptidão, tem-se:

$D_3: 4 \Rightarrow L(4) = 23$ e $D_4: 7 \Rightarrow L(7) = 43,25$.

Tabela 4.27 – Seleção dos quatro indivíduos mais aptos, após cruzamento da 2ª geração.

<i>Indivíduos</i>	<i>x</i>	<i>L(x)</i>
V₁: 10000	16	23
V ₂ : 00101	5	31,25
M ₂ : 00110	6	38
M ₂ : 00110	6	38
D₃: 00100	4	23
D ₄ : 00111	7	43,25

Fonte: Elaborada pela autora.

Exclui-se os dois indivíduos de menor aptidão, para manter a população com quatro indivíduos, assim V₁ e D₃ são eliminados. E aplica-se novamente a seleção pelo método da roleta.

O processo é repetido, sendo selecionados dois novos pais, pelo método da roleta para reproduzirem. A Tabela 4.28 mostra cada indivíduo da 3ª geração, e seu valor de aptidão.

Tabela 4.28 – Aptidão dos indivíduos da população da 3ª geração.

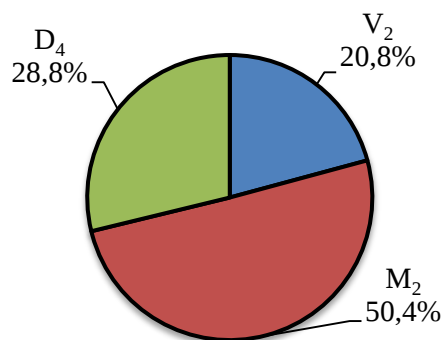
<i>Indivíduo</i>	<i>x</i>	<i>L(x)</i>	<i>% do total</i>	<i>% acumulada</i>
V ₂ : 00101	5	31,25	20,8	[0; 20,8]
M ₂ : 00110	6	38	25,2	[20,8; 46]
M ₂ : 00110	6	38	25,2	[46; 71,2]
D ₄ : 00111	7	43,25	28,8	[71,2; 100]
Soma:		150,5	100	

Fonte: Elaborada pela autora.

Note que o máximo da função de aptidão aumentou de 31,25 para 43,25 e a soma das aptidões dos indivíduos da população aumentou de 100,25 para 150,5.

O gráfico apresentado na Figura 4.17 refere-se aos indivíduos da 3ª geração representados na Tabela 4.28 o indivíduo V_2 tem a maior aptidão, e consequentemente ocupa a maior região na roleta, 31,3%.

Figura 4.17 – Seleção por roleta da 3ª geração.



Fonte: Elaborada pela autora.

Seguindo o método de roleta, selecionam-se os indivíduos sorteando quatro números de 1 a 100, aleatoriamente. Os números sorteados são: 84, 96, 12 e 04.

Observando a Tabela 4.28, tem-se que:

O número 4 está entre 0 e 20,8 correspondendo ao indivíduo V_2 ;

O número 12 está entre 0 e 20,8 correspondendo ao indivíduo V_2 ;

O número 84 está entre 71,2 e 100 corresponde ao indivíduo D_4 ;

O número 96 está entre 71,2 e 100 corresponde ao indivíduo D_4 .

Os indivíduos selecionados foram: V_2 e D_4 , sendo que M_2 será excluído. Então cruza-se V_2 e D_4 , mas ao cruzar V_2 : 00101 e D_4 : 00111, independentemente do ponto de cruzamento, os descendentes serão iguais aos pais.

Aplicando a mutação, criam-se novos indivíduos. Escolhe-se aleatoriamente um dígito de cada indivíduo, como mostra a Tabela 4.29:

Tabela 4.29 – Mutação de dois indivíduos da 3ª geração selecionada.

<i>Indivíduos</i>	<i>Após a Mutação</i>
V ₂ : 00101	-
V ₂ : 00 1 01	0 1 101
D ₄ : 00111	-
D ₄ : 00 1 11	00 0 11

Fonte: Elaborada pela autora.

Os indivíduos que passaram pela mutação fazem parte da nova população, denotados por M₃: 01101 e M₄: 00011.

Veja na Tabela 4.30 os indivíduos da 4ª geração e seu valor de aptidão.

Lembrando que M₃: $01101_{(2)} = 13_{(10)} \Rightarrow L(13) = 43,25$ e
M₄: $00011_{(2)} = 3_{(10)} \Rightarrow L(3) = 13,25$.

Tabela 4.30 – Seleção dos quatro indivíduos mais aptos, após mutação da 3ª geração.

<i>Indivíduos</i>	<i>x</i>	<i>L(x)</i>
V₂: 00101	5	31,25
V ₂ : 00101	5	31,25
D ₄ : 00111	7	43,25
D ₄ : 00111	7	43,25
M ₃ : 01101	13	43,25
M₄: 00011	3	13,25

Fonte: Elaborada pela autora.

Os indivíduos V₂ e M₄ são eliminados, por serem os de menor aptidão.

E novamente a seleção pelo método da roleta será aplicada, repetindo o processo onde dois novos pais serão selecionados para a reprodução. A Tabela 4.31 mostra cada indivíduo da 4ª geração, e seu valor de aptidão.

Tabela 4.31 – Aptidão dos indivíduos da população da 4ª geração.

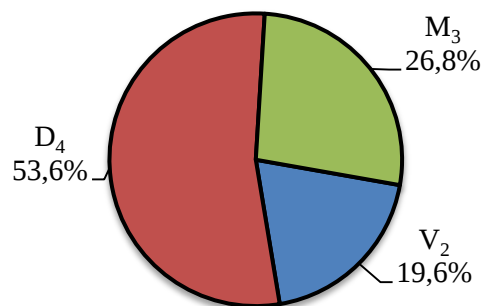
<i>Indivíduo</i>	<i>x</i>	<i>L(x)</i>	<i>% do total</i>	<i>% acumulada</i>
V ₂ : 00101	5	31,25	19,6	[0; 19,6]
D ₄ : 00111	7	43,25	26,8	[19,6; 46,4]
D ₄ : 00111	7	43,25	26,8	[46,4; 73,2]
M ₃ : 01101	13	43,25	26,8	[73,2; 100]
Soma:		161	100	

Fonte: Elaborada pela autora.

Observe que o máximo da função aptidão manteve 43,25 e a soma das aptidões dos indivíduos da população cresceu de 150,5 para 161.

Na Figura 4.18 têm-se os indivíduos da 4ª geração que estão representados na Tabela 4.31.

Figura 4.18 – Seleção por roleta da 4ª geração.



Fonte: Elaborada pela autora.

Pelo método de roleta quatro indivíduos são selecionados, sorteando números de 1 a 100, aleatoriamente. Os números sorteados são: 13, 63, 35 e 87.

Observando a Tabela 4.31, tem-se que:

O número 13 está entre 0 e 19,6 correspondendo ao indivíduo V₂;

O número 35 está entre 19,6 e 73,2 correspondendo ao indivíduo D₄;

O número 63 está entre 19,6 e 73,2 corresponde ao indivíduo D₄;

O número 87 está entre 73,2 e 100 corresponde ao indivíduo M_3 .

Todos os indivíduos foram selecionados. Então escolhe-se os mais aptos para cruzamento: D_4 e M_3 , como mostra a Tabela 4.32, sendo escolhido o ponto de cruzamento 4.

Tabela 4.32 – Cruzamento em um ponto da 4ª geração selecionada.

<i>Seleção</i>	<i>Após o Cruzamento</i>
V_2 : 00101	-
D_4 : 00111	-
D_4 : 001 11	00101
M_3 : 011 01	01111

Fonte: Elaborada pela autora.

A população tem dois novos indivíduos, denotados por D_5 : 00101 e D_6 : 00111. Estes descendentes farão parte da nova população, juntamente com seus pais.

Observe que D_5 : $00101_{(2)} = 4_{(10)}$ e D_6 : $01111_{(2)} = 15_{(10)}$. Como D_5 e V_2 são iguais, sugere-se uma mutação em um deles. A Tabela 4.33 mostra a mutação em dois bits do indivíduo D_5 .

Tabela 4.33 – Mutação de um indivíduo da 4ª geração.

<i>Indivíduos</i>	<i>Após a Mutação</i>
V_2 : 00101	-
D_4 : 00111	-
D_4 : 00111	-
M_3 : 01101	-
D_5 : 00 101	01 001
D_6 : 01111	-

Fonte: Elaborada pela autora.

O indivíduo D_5 passou pelo processo de mutação obtendo M_5 : $01001_{(2)} = 9_{(10)}$ e seu valor de aptidão é: $L(9) = 49,25$.

Veja na Tabela 4.34 os indivíduos da 5ª geração e seu valor de aptidão.

Tabela 4.34 – Seleção dos quatro indivíduos mais aptos, após cruzamento e mutação da 4ª geração.

<i>Indivíduos</i>	<i>x</i>	<i>L(x)</i>
V ₂ : 00101	5	31,25
D ₄ : 00111	7	43,25
D ₄ : 00111	7	43,25
M ₃ : 01101	13	43,25
M ₅ : 01001	9	49,25
D ₆ : 01111	15	31,25

Fonte: Elaborada pela autora.

Mantendo a população com quatro indivíduos, elimina-se os dois indivíduos de menor aptidão, V₂ e D₆. E novamente aplica-se a seleção pelo método da roleta.

O processo é repetido, sendo selecionados dois novos pais pelo método da roleta, para reproduzirem. A Tabela 4.35 mostra cada indivíduo da 5ª geração, e seu valor de aptidão.

Tabela 4.35 – Aptidão dos indivíduos da população da 5ª geração.

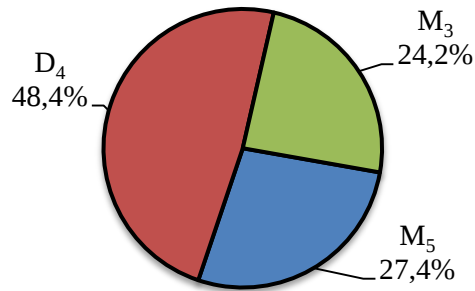
<i>Indivíduo</i>	<i>x</i>	<i>L(x)</i>	<i>% do total</i>	<i>% acumulada</i>
D ₄ : 00111	7	43,25	24,2	[0; 24,2]
D ₄ : 00111	7	43,25	24,2	[24,2; 48,4]
M ₃ : 01101	13	43,25	24,2	[48,2; 72,6]
M ₅ : 01001	9	49,25	27,4	[72,6; 100]
Soma:		179	100	

Fonte: Elaborada pela autora.

O máximo da função de aptidão cresceu de 43,25 para 49,25 e a soma das aptidões dos indivíduos da população aumentou de 161 para 179. Devido à melhora dos resultados pode-se afirmar que o método algoritmos genéticos está gerando bons resultados.

A Figura 4.19 mostra o gráfico dos indivíduos da 5ª geração representados na Tabela 4.35.

Figura 4.19 – Seleção por roleta da 5ª geração.



Fonte: Elaborada pela autora.

Selecionando pelo método de roleta quatro indivíduos para se reproduzirem, sorteando números de 1 a 100, aleatoriamente. Os números sorteados são: 40, 65, 99 e 41.

Observando a Tabela 4.35, tem-se que:

O número 40 está entre 0 e 48,4 correspondendo ao indivíduo D₄;

O número 41 está entre 0 e 48,4 correspondendo ao indivíduo D₄;

O número 65 está entre 48,4 e 72,6 corresponde ao indivíduo M₃;

O número 99 está entre 72,6 e 100 corresponde ao indivíduo M₅.

Todos os indivíduos foram selecionados. Escolhendo os dois mais aptos, M₅ tem a melhor aptidão e D₄ e M₃ tem o mesmo valor, então será escolhido por sorteio qual indivíduo cruzará com M₅. A Tabela 4.36 mostra a reprodução com ponto de cruzamento 3.

Tabela 4.36 – Cruzamento em um ponto da 5ª geração selecionada.

<i>Seleção</i>	<i>Após o Cruzamento</i>
D ₄ : 00111	-
D ₄ : 001 11	00101
M ₃ : 01101	-
M ₅ : 010 01	01011

Fonte: Elaborada pela autora.

Os novos indivíduos são D₇: 00101 e D₈: 01011.

A Tabela 4.37 mostra os indivíduos que sobreviveram, juntamente com seus valores de aptidão. Lembrando que $D_7: 00101_{(2)} = 4_{(10)}$ e $D_8: 01011_{(2)} = 11_{(10)}$, o valor de cada x , na função aptidão é: $D_7: 4 \Rightarrow L(4) = 23$ e $D_8: 11 \Rightarrow L(11) = 49,25$.

Tabela 4.37 – Seleção dos quatro indivíduos mais aptos, após cruzamento da 5ª geração.

<i>Indivíduos</i>	x	$L(x)$
D₄: 00111	7	43,25
D ₄ : 00111	7	43,25
M ₃ : 01101	13	43,25
M ₅ : 01001	9	49,25
D₇: 00101	4	23
D ₈ : 01011	11	49,25

Fonte: Elaborada pela autora.

Os dois indivíduos de menor aptidão D_4 e D_7 são eliminados, para manter a população com quatro indivíduos. Seleciona-se dois novos pais, pelo método da roleta, para reproduzirem. Veja na Tabela 4.38 os indivíduos da 6ª geração, e seu valor de aptidão.

Tabela 4.38 – Aptidão dos indivíduos da população da 6ª geração.

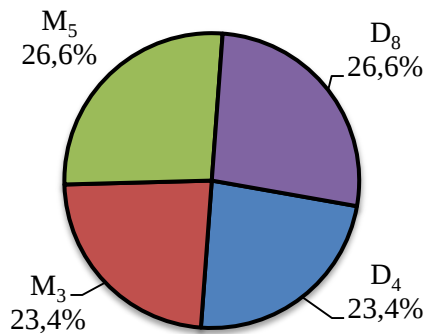
<i>Indivíduo</i>	x	$L(x)$	<i>% do total</i>	<i>% acumulada</i>
D ₄ : 00111	7	43,25	23,4	[0; 23,4]
M ₃ : 01101	13	43,25	23,4	[23,4; 46,8]
M ₅ : 01001	9	49,25	26,6	[46,8; 73,4]
D ₈ : 01011	11	49,25	26,6	[73,4; 100]
Soma:		185	100	

Fonte: Elaborada pela autora.

Neste caso, o máximo da função de aptidão se manteve em 49,25 e a soma das aptidões dos indivíduos da população aumentou de 179 para 185.

O gráfico representado na Figura 4.20 refere-se aos indivíduos da 6ª geração representados na Tabela 4.38.

Figura 4.20 – Seleção por roleta da 6ª geração.



Fonte: Elaborada pela autora.

Através do método de roleta sorteiam-se quatro indivíduos para reprodução, aleatoriamente. Os números sorteados são: 47, 97, 50 e 41.

Observando a Tabela 4.38, tem-se que:

O número 41 está entre 23,4 e 46,8 correspondendo ao indivíduo M₃;

O número 47 está entre 46,8 e 73,4 correspondendo ao indivíduo M₅;

O número 50 está entre 46,8 e 73,4 corresponde ao indivíduo M₅;

O número 97 está entre 73,4 e 100 corresponde ao indivíduo D₈.

Os indivíduos selecionados foram M₃, M₅ e D₈, sendo D₄ excluído. Então cruza-se M₅ e D₈ os dois indivíduos com maior aptidão. No entanto, independentemente do ponto de cruzamento entre M₅: 01001 e D₈: 01011, os descendentes serão iguais aos pais.

Sugere-se a aplicação do operador mutação, criam-se novos indivíduos. Escolhe-se aleatoriamente, um dígito de cada indivíduo como mostra a Tabela 4.39:

Tabela 4.39 – Mutação de dois indivíduos da 6ª geração selecionada.

<i>Indivíduos</i>	<i>Após a Mutação</i>
M ₃ : 01101	-
M ₅ : 01001	11001
M ₅ : 01001	-
D ₈ : 01011	01010

Fonte: Elaborada pela autora.

Os indivíduos que passaram pela mutação fazem parte da nova população, denotados por M_6 : 11001 e M_7 : 01010, sendo que M_6 : $11001_{(2)} = 25_{(10)}$ e M_7 : $01010_{(2)} = 10_{(10)}$. No entanto, M_6 não pertence ao intervalo a ser maximizado que é de 0 a 20.

Tem-se o valor função objetivo, para M_7 : $L(10) = 50$.

Veja na Tabela 4.40 os indivíduos da 6ª geração e seu valor de aptidão.

Tabela 4.40 – Seleção dos quatro indivíduos mais aptos, após mutação da 6ª geração.

<i>Indivíduos</i>	<i>x</i>	<i>L(x)</i>
M_3: 01101	13	43,25
M_5 : 01001	9	49,25
M_5 : 01001	9	49,25
D_8 : 01011	11	49,25
M_7 : 01010	10	50

Fonte: Elaborada pela autora

Apenas o indivíduo M_3 é excluído, por ter menor aptidão dentre os outros.

A Tabela 4.41 mostra cada indivíduo da 7ª geração, e seu valor de aptidão.

Tabela 4.41 – Aptidão dos indivíduos da população da 7ª geração.

<i>Indivíduo</i>	<i>x</i>	<i>L(x)</i>	<i>% do total</i>	<i>% acumulada</i>
M_5 : 01001	9	49,25	25	[0; 25]
M_5 : 01001	9	49,25	25	[25; 50]
D_8 : 01011	11	49,25	25	[50; 75]
M_7 : 01010	10	50	25	[75; 100]
Soma:		197,75	100	

Fonte: Elaborada pela autora.

O máximo da função de aptidão aumentou de 49,25 para 50 e a soma das aptidões dos indivíduos da população de 185 para 197,75.

Como este mesmo problema já foi resolvido utilizando derivadas (seção 2.1) e também pelo método da seção áurea (seção 3.2), conclui-se que o resultado obtido pelo AG na

sétima geração é satisfatório quando comparado a estes resultados. Assim, o ponto de máximo é $x = 10$, ou seja, M_7 : 01010 é o indivíduo solução, como mostra a Figura 2.5.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho em tela, faz uma revisão bibliográfica acerca do tema otimização. Neste contexto, inicia-se o estudo com uma revisão geral envolvendo máximos e mínimos, sempre relacionando seu estudo no ensino básico, inclusive com exemplos que são resolvidos de maneira detalhada. Em todo o estudo, utilizou-se como recurso, o software GEOGEBRA, de grande utilidade na construção dos gráficos das funções trabalhadas.

A seguir, é descrito o método da seção áurea. Neste ponto descreve-se o método com suas principais características e suas vantagens para reduzir intervalos de incerteza e encontrar o ótimo de funções unidimensionais.

Ainda, foi feita uma introdução do método algoritmos genéticos, procurando evidenciar suas características fundamentais e principais vantagens na busca pelo ótimo de uma função. Neste sentido, evidencia-se a sua simplicidade e precisão em obter resultados confiáveis, sem a necessidade de se utilizar derivadas.

Com isso, é possível dizer que tanto o método da seção áurea quanto o método algoritmos genéticos podem ser aplicados no ensino de Matemática no Ensino Básico, apesar de métodos de otimização não fazerem parte da matriz curricular nessa fase. Tais métodos podem ser apresentados aos alunos em forma de projetos desenvolvidos na escola, objetivando a motivação dos mesmos para com os conteúdos de Matemática, pois exigem apenas um conhecimento prévio sobre funções.

O método seção áurea não pode ser aplicado para qualquer função objetivo, sendo aplicado apenas para funções unimodais dentro de um intervalo fechado (intervalo de incerteza). Verificar se uma função é ou não unimodal, às vezes, exige uma análise mais aprofundada, não podendo ser feita apenas com os conhecimentos do Ensino Básico.

Assim, não se está propondo a inclusão do tema no currículo do Ensino Básico, pois é sabido que é complicado para o professor abordar todo conteúdo da matriz curricular atual. Como mencionado anteriormente, os métodos apresentados neste trabalho podem ser trabalhados como atividade complementar, despertando a curiosidade e motivando a descoberta da Matemática em sua vida cotidiana.

Contudo, o método algoritmos genéticos, apresentado neste trabalho, não se restringe apenas funções unimodais, e lida apenas com números inteiros, que são convertidos em binários, possibilitando encontrar a solução ótima, somente se inteira. No entanto, nada

impede que seja mostrado aos alunos do Ensino Básico como transformar números decimais em números binários, possibilitando estender a aplicação deste método a uma gama maior de problemas.

Observando a resolução dos problemas propostos pelos métodos da seção áurea e algoritmos genéticos nota-se que sempre é realizado um grande número de iterações até encontrar a solução ótima, ou pelo menos um valor muito próximo do ótimo. Uma característica que diferencia os dois métodos é o fato do método da seção áurea ser mais eficiente e mais rápido para intervalos de incerteza menores. Já o método algoritmos genéticos é mais eficiente quando aplicados a números binários com no mínimo cinco dígitos, o que corresponde ao 16 em número decimal, sendo assim, os intervalos de busca precisam ser grandes.

O estudo se mostrou bastante importante no sentido de trazer novas perspectivas no que diz respeito à motivação de alunos do ensino básico, pois tanto o método da seção áurea quanto o método algoritmo genético propiciam trabalhar de forma interdisciplinar para a obtenção de resultados de problemas reais que, sem dúvida, é um fator determinante para a motivação do estudante.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] HOUAISS, ANTÔNIO; VILLAR, MAURO DE SALLES, *Dicionário Houaiss da língua portuguesa*. Rio de Janeiro: Objetiva, p. 1404, 2009.
- [2] ROCHA, A. M. *Problemas de Otimização Envolvendo a Matemática do Ensino Médio*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – GO – Brasil, 2013.
- [3] CARMO, ANGELO. P., *Uma abordagem numérica para problemas de otimização no Ensino Médio*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – MG – Brasil, 2013.
- [4] SMIDI, ALI A., *Abordagem Analítica e Numérica de Técnicas de Otimização Baseadas na Redução de Intervalos de Incerteza*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – GO – Brasil, 2015.
- [5] GOULART, M. C., *Matemática no Ensino Médio – 1ª série*. 2. ed. rev. São Paulo: Scipione, 2006.
- [6] DANTE, L. R., *Matemática, volume único*. 1. ed. São Paulo: Ática, 2011.
- [7] GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R., *Matemática Completa*. 2 ed. renov. São Paulo: FTD, 2005.
- [8] CAMPONOGARA, E., *Métodos de Otimização: Teoria e Prática*, Notas de Aula, Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Automação e Sistemas – SC – Brasil, 2006.
- [9] MACULAN, NELSON; FAMPA, MARCIA H. C., *Otimização linear*. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006.
- [10] RIBEIRO, A. A.; KARAS, E. W. *Um Curso de Otimização*. [S.l.: s.n.], 2010.
- [11] BORGES, ROMES A., *Técnicas Inteligentes de Otimização*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica - MG – Brasil, 2003.

- [12] OLIVEIRA, JOZIEL. L., *Resolução de Problemas de Otimização Sem o Uso do Cálculo Diferencial: Uma Proposta para o Ensino Médio*, Dissertação de Mestrado em Matemática, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – RN – Brasil, 2014.
- [13] FILHO, SALVINO. C., *Resolução de Problemas do Ensino Médio Usando Métodos de Otimização*, Dissertação de Mestrado em Matemática, Universidade Federal do Piauí, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – PI – Brasil, 2013.
- [14] POLYA, GEORGE, *Mathematical learning and understanding, learning and teaching problem solving*. New York: John Wiley, 1981.
- [15] STEWART, JAMES, *Cálculo, Volume I*, 5 ed., São Paulo : Pioneira Thomson learning, 2006.
- [16] GUIDORIZZI, H. L, *Um curso de Cálculo – Volume 1*. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [17] HOLLAND, J., *Adaptation in natural and artificial systems*. Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1975.
- [18] CONVERSE, ALVIN O, *Otimização*. São Paulo: Edart, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1977.
- [19] PIZZOLATO, NELIO D.; GANDOLPHO, ANDRÉ A., *Técnicas de Otimização*. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- [20] VANDERPLAATS, G.N., *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*, VR&D Inc., Colorado Springs, CO, USA, 1998.
- [21] ALMEIDA, TIAGO A., *Otimização Não-Linear - Busca Linear: Métodos para Busca Unidimensional*. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação, 2015. Disponível em: <http://www.dcomp.sor.ufscar.br/talmeida/courses/otimizacao_ao_linear/Relatorio1-Busca%20Unidimensional.pdf>. Acesso em: 06 dez. 2015.
- [22] LIVIO, MARIO. *The Golden Ration: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number*. Nova York: Broadway Books, 2003.
- [23] FREITAG, MARK. *Phi: That Golden Number*, [S.l.]. 2002. Disponível em: <<http://jwilson.coe.uga.edu/emt669/Student.Folders/Frietag.Mark/Homepage/Goldenratio/goldenratio.html>>. Acesso em: 16 dez. 2015.

- [24] FERNANDES, FLÁVIA M., *Velocidade de Convergência de Métodos de Otimização Irrestrita*. Monografia de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Paraná, Departamento de Matemática, Setor de Ciências Exatas, Paraná, 2010.
- [25] SUN, W.; YAN, Y., *Optimization Theory and Methods - Nonlinear Programming*. New York: Springer, 2006.
- [26] CAMPAGNOLO, JORGE M., 2012, Introdução à Otimização, Notas de Aula, Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Elétrica. Disponível em: <http://www.labspot.ufsc.br/~campagno/numerico/Aula_27_Otimo_Met.doc>. Acesso em: 03 nov. 2015.
- [27] SILVA, RENATO M. ET AL. *Levantamento de Aplicações de Algoritmos Genéticos na Educação*. Universidade Federal de Mato Grosso Campus Universitário de Rondonópolis – MT, 2009. Disponível em: <www.dt.fee.unicamp.br/~renatoms/.../renatosilva-siges-2009.pdf>. Acesso em: 23 nov. 2015.
- [28] DARWIN, CHARLES M.A., *On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life*. London: John Murray, Albemarle Street, 1959.
- [29] FILITTO, DANILO, *Algoritmos Genéticos: Uma Visão Explanatória*, Revista Multidisciplinar da UNIESP, Saber Acadêmico - n ° 06 - Dez. 2008. Disponível em: <www.uniesp.edu.br/revista/revista6/pdf/13.pdf> Acesso em: 23 nov. 2015.
- [30] GOLDBERG, D.E., *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.
- [31] BIGODE, ANTÔNIO J. L., *Matemática – 6º ano – Projeto Velear*. São Paulo: Scipione, 2012.
- [32] NOÉ, MARCOS. *Sistema de Numeração Binária*. Disponível em: <<http://www.brasilecola.com/matematica/sistema-numeracao-binaria.htm>> Acesso em: 23 nov. 2015.
- [33] FARRER, HARRY ET AL., *Programação Estruturada de Computadores: Algoritmos Estruturados*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1985.
- [34] FOMIN, DMITRI ET AL., *Círculos Matemáticos: A Experiência Russa*. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

- [35] LUCAS, DIOGO C.; ALVARES, LUÍS OTÁVIO, *Algoritmos Genéticos: uma Introdução*. Notas de aula. Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Porto Alegre, 2002. Disponível em: <www.inf.ufrgs.br/~alvares/INF01048IA/ApostilaAlgoritmosGeneticos.pdf> Acesso em: 23 nov. 2015.
- [36] LOBO, EDUARDO L. M., *Uma Solução do Problema de Horário Escolar Via Algoritmo Genético Paralelo*. Dissertação de Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional do CEFET-MG, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, 2005.
- [37] CATARINA, ADAIR S., *SAHGA – Um Algoritmo Genético Híbrido com Representação Explícita de Relacionamentos Espaciais para Análise de Dados Geoespaciais*. Tese de Doutorado em Computação Aplicada. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE). São José dos Campos – SP, 2009.
- [38] LARSON, RON; HOSTETLER, R.; EDWARDS, B., *Cálculo, Vol.1*. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.