

MNPEF Mestrado Nacional
Profissional em
Ensino de Física



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE FÍSICA

BASES DA INFORMAÇÃO QUÂNTICA NO ENSINO MÉDIO ATRAVÉS DA
PLATAFORMA MOODLE

Rafael Victor Helerbrock Mendonça

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Goiás no Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

ORIENTADOR: *Paulo Eduardo Gonçalves de Assis*

CATALÃO

2018

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: Dissertação Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

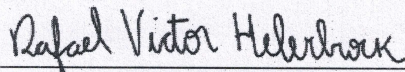
Nome completo do autor: **RAFAEL VICTOR HELERBROCK MENDONÇA**

Título do trabalho: Bases da informação quântica no Ensino Médio através da plataforma Moodle

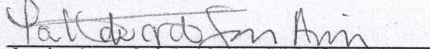
3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.


Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:


Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 20 / 08 / 2018

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

² A assinatura deve ser escaneada.

BASES DA INFORMAÇÃO QUÂNTICA NO ENSINO MÉDIO ATRAVÉS DA
PLATAFORMA MOODLE

Rafael Victor Helerbrock Mendonça

ORIENTADOR: *Paulo Eduardo Gonçalves de Assis*

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Goiás no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

CATALÃO

2018

Helerbrock, Rafael Victor M.

Bases da informação quântica no Ensino Médio através da plataforma moodle.

Rafael Victor Helerbrock Mendonça - Catalão.

Dissertação (Mestrado) - Unidade Acadêmica Especial de Física.

Universidade Federal de Goiás, 2017 - — páginas.

Orientador: Paulo Eduardo Gonçalves de Assis

1. Informação Quântica. 2. Ensino de Física Contemporânea no Ensino Médio. 3. Bits quânticos

I. Bases da informação quântica no Ensino Médio através da plataforma moodle



Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física



Relatório de Defesa de Dissertação
Candidato: **Rafael Victor Helerbrock Mendonça**

Aos 13/07/2018 às 14:00 horas, realizou-se na Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão a Defesa de Dissertação de Mestrado sob o título: **BASES DA INFORMAÇÃO QUÂNTICA NO ENSINO MÉDIO ATRAVÉS DA PLATAFORMA MOODLE**, pelo candidato: **Rafael Victor Helerbrock Mendonça**. Ao final dos trabalhos a banca examinadora reuniu-se em sessão reservada para o julgamento tendo os membros chegado ao seguinte resultado:

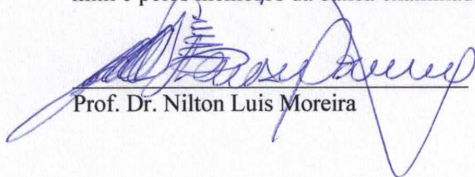
Participantes da Banca:	Função	Instituição
Prof. Dr. Nilton Luis Moreira	Titular	UFG
Prof ^ª . Dr ^ª . Marina Valentim Barros	Titular	UFG
Prof ^ª . Dr ^ª . Mariana Mieko Odashima	Titular	UFU

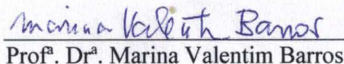
Resultado Final: APROVADO.

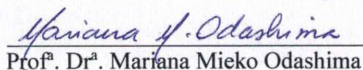
Parecer da Comissão Julgadora:

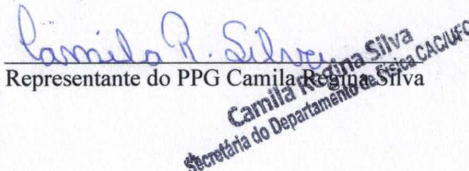
A BANCA ENTREGA AO CANDIDATO AS RECOMENDAÇÕES E SUGESTÕES DE MELHORIA NO TEXTO.

Encerrada a sessão reservada, o presidente informou ao público presente o resultado. Nada mais havendo a tratar, a sessão foi encerrada e, para constar eu Camila Regina Silva representante do Programa de Pós Graduação em Ensino de Física lavrei o presente relatório que será assinado por mim e pelos membros da banca examinadora.


Prof. Dr. Nilton Luis Moreira


Prof^ª. Dr^ª. Marina Valentim Barros


Prof^ª. Dr^ª. Mariana Mieko Odashima


Representante do PPG Camila Regina Silva
Secretária do Departamento de Física CAC/UFG

BASES DA INFORMAÇÃO QUÂNTICA NO ENSINO MÉDIO ATRAVÉS DA
PLATAFORMA MOODLE.

Rafael Victor Helerbrock Mendonça

ORIENTADOR: *Paulo Eduardo Gonçalves de Assis*

O presente trabalho se objetiva a descrever os aspectos teóricos pertinentes ao âmbito da computação quântica, uma área de crescente ascensão na Física contemporânea, além de apresentar a elaboração e aplicação de um ambiente virtual de aprendizagem criado na plataforma Moodle direcionado para alunos do Ensino Médio. Através da utilização do AVA, pretendeu-se que os alunos produzissem novos conhecimentos, buscando a promoção de sua alfabetização científica relativa aos aspectos fundamentais da computação quântica.

Palavras-chave: 1. Mecânica Quântica. 2. Ensino de Física Contemporânea no Ensino Médio. 3. Informação quântica

ABSTRACT

BASES DA INFORMAÇÃO QUÂNTICA NO ENSINO MÉDIO ATRAVÉS DA
PLATAFORMA MOODLE.*Rafael Victor Helerbrock Mendonça*SUPERVISOR: *Paulo Eduardo Gonçalves de Assis*

The present work aims to describe pertinent theoretical aspects related to the scope of quantum computation, an increasing ascent area in contemporary physics, besides presenting the elaboration and application of a virtual learning environment created in the Moodle platform directed to high school students. Through AVA, it was intended that students produce new knowledge, seeking to promote their scientific literacy regarding the fundamental aspects of quantum computing.

Keywords: 1. Quantum mechanics. 2. Contemporary physics teaching in high school. 3. Quantum information

Sumário

1	Introdução	1
1.1	A Física quântica no Ensino Médio	2
1.2	O uso do AVA como ferramenta no Ensino Médio	3
1.3	O ensino de quântica para a promoção da alfabetização científica	4
2	A descrição de sistemas com dois graus de liberdade	9
2.1	Vetores	9
2.2	Matrizes	10
2.2.1	Matrizes Especiais	12
2.2.2	Cálculo do determinante de uma matriz	13
2.2.3	Autovalores e autovetores	14
2.3	Atuação de uma matriz genérica em um vetor	16
2.4	Operações no plano cartesiano	16
2.4.1	Rotações no plano	16
2.4.2	Comutatividade das operações de rotação no plano	17
2.5	Operações no espaço tridimensional	18
2.5.1	Rotações no espaço tridimensional	18
2.5.2	Não-comutatividade das operações de rotação no espaço tridimensional	18
3	Computação clássica	20
3.1	A base decimal	21
3.2	A base binária	21
3.3	Sequências de bits	22
3.4	Portas lógicas	23
3.4.1	Descrição matricial das portas lógicas	23

4	Mecânica quântica	31
4.1	Postulados da teoria quântica	33
4.1.1	O Primeiro Postulado e os Estados Quânticos	34
4.1.2	O Segundo Postulado e os operadores quânticos	36
4.1.3	O Terceiro Postulado e as Medições Quânticas	38
4.1.4	O Quarto Postulado e o Colapso Quântico	39
4.1.5	O Quinto Postulado e a Evolução Quântica	40
4.1.6	O Sexto Postulado e a Simetrização Quântica	41
4.1.7	Notação de Dirac	42
4.2	Momento Angular	44
4.2.1	Momento Angular Orbital	44
4.2.2	O Experimento de Stern-Gerlach	48
4.2.3	Spin	51
5	Computação quântica	60
5.1	A esfera de Bloch	62
5.2	Computação quântica	66
5.2.1	Estados com múltiplos qubits	68
5.3	Quantum gates: Portas lógicas quânticas	70
5.4	Circuitos quânticos	79
5.5	Emaranhamento Quântico e Teorema da Não-Clonagem	81
6	Considerações finais	84
7	Referências Bibliográficas	86
A	Produto educacional - O AVA Qubit	90
A.1	Construindo o seu próprio AVA no Moodle®	100
A.2	Produto educacional - Sugestão de sequência didática	102
A.3	Uma experiência de uso do produto educacional	105

Capítulo 1

Introdução

Com o avanço tecnológico recente, a capacidade de processamento dos computadores tornou-se cada vez maior e suas dimensões diminuíram, bem como suas potencialidades futuras: estamos chegando ao limite físico dos processadores (CUI, 2001). As unidades básicas de processamento, conhecidas como transistores já são produzidas em escalas atômicas, na ordem de 10 nanômetros. Nesse limite as propriedades físicas são regidas por leis diferentes daquelas que governam a Física clássica dos computadores eletrônicos. Objetos nessas dimensões apresentam comportamento quântico e estão sujeitos a todas as especificidades da mecânica quântica.

Há atualmente um grande esforço da comunidade científica para a criação de um computador que não seja baseado na eletrônica clássica, mas sim na manipulação de sistemas quânticos. Diferentemente da informação armazenada e processada pelos nossos computadores atuais, baseados na memória (histerese) magnética, e na física de semicondutores, a computação quântica opera com sistemas em condições de equilíbrio muito sensíveis (NIELSEN, 2002). A validade dessa informação depende de fatores como baixas temperaturas, isolamento adiabático e leituras extremamente precisas. Todas essas restrições da física quântica impõem uma série de barreiras tecnológicas impostas à construção de um computador quântico plenamente funcional, regido pelos aspectos fundamentais da teoria quântica, que apesar de intimamente relacionados a sistemas de escalas reduzidas e distantes de nossa experiência cotidiana, ditam o ritmo do desenvolvimento de diversas tecnologias contemporâneas.

Em vista das razões expostas, os autores acreditam que a computação quântica é um tema interessante para promover o ensino da mecânica quântica no Ensino Médio, uma área que vem sendo debatida, ao longo dos anos, por diversos

pesquisadores do Ensino de Física, por tratar-se de um solo fértil para o Ensino Médio, visto o grande interesse dos alunos pelo tema, descrito nos trabalhos de Kalmus

1.1 A Física quântica no Ensino Médio

Tópicos avançados da mecânica quântica, esses como a computação quântica, vem sendo publicados em veículos de comunicação pouco especializados, como revistas populares de divulgação científica, blogs pessoais e sites de conteúdo pouco verossímil ou exclusivamente informativo. Notícias sobre investimentos em pesquisa voltadas à produção de computadores quânticos e sobre as promessas dessa tecnologia vem despertando a atenção e o interesse dos estudantes do Ensino Médio. Esses assuntos, por sua vez, são pouco debatidos nas aulas de Física, por não fazerem parte do currículo proposto atualmente nos ambientes formais de educação.

Para Terrazan (TERRAZAN, 1994), o currículo adotado no ensino de Física segue as tendências ditadas por modelos estrangeiros que por sua vez, excluem a Física desenvolvida ao longo do último século. Para ele, tal tipo de currículo causa nos estudantes, a impressão de que a Física não é o resultado do empreendimento humano e que por isso, precisa ser atualizado. Para o autor, o entendimento do mundo contemporâneo requer uma atualização no currículo de Física, a grosso modo, que forme cidadãos conscientes e participativos, nos âmbitos científico e tecnológico da sociedade (OSTERMANN, 2016).

Oliveira, Vianna e Gerbassi (2007) fizeram um levantamento sobre a opinião de diversos professores de Física das redes particular e privada acerca da inserção de tópicos da Física Moderna no Ensino Médio. Segundo seus resultados não há, entre os professores de Ensino Médio por eles entrevistados, um consenso quanto à quais conteúdos devam preceder os assuntos da Física Moderna. No entanto, a maioria dos entrevistados concordou que o terceiro ano é o período mais adequado para que a mecânica quântica seja inserida no conteúdo programático do Ensino Médio. Além disso, os mesmos professores acreditam que a matematização desse conteúdo deva ser feita de forma superficial, e que a ênfase dada ao assunto seja majoritariamente qualitativa e fenomenológica.

Para além da formação inicial, Barros (2015) propõe em sua tese de doutorado que o ensino de conceitos da mecânica quântica deva ser inserido durante a

formação inicial de professores sob diferentes abordagens, como através da metodologia do *Peer instruction*. Seus resultados indicaram, por meio da análise de diferentes modos de comunicação, que a abordagem adotada possibilitou um crescimento na compreensão dos conceitos da quântica por parte dos participantes analisados.

1.2 O uso do AVA como ferramenta no Ensino Médio

Terrazan (1994) defende que a escolha das metodologias usadas para o ensino dos fenômenos quânticos devam ser tomadas pelos professores, de acordo com sua predileção. Dessa forma os autores desse trabalho decidiram construir e utilizar um AVA (Ambiente Virtual de Aprendizagem) para discutir os aspectos fundamentais da computação quântica. Nesse âmbito, o tema computação quântica é usado como um tema norteador para o aprendizado dos conceitos centrais da mecânica quântica.

Segundo os autores Moresco e Behar (MORESCO, BEHAR, 2005 apud OLIVEIRA, 2012, p.2) define-se por AVA, os ambientes computacionais que disponham de recursos de telecomunicações, possibilitando o intercâmbio de informações, reflexões, pesquisas entre os sujeitos do aprendizado. Além disso, esses ambientes devem apresentar uma interface e proposta pedagógica bem definida, trazendo, dentre outras coisas, conteúdo multimídia, como imagens, sons e vídeos. Para esses autores, o uso desses ambientes justifica-se pela dinamização da comunicação, e conseqüentemente o aumento da capacidade de resolução de problemas pelos estudantes, potencializado pela utilização de fóruns, listas de discussões e salas de chat, que permitem a comunicação síncrona entre os seus usuários.

O uso desse tipo de tecnologias voltadas para o ensino da Física Moderna é apoiado por autores como Machado e Nardi (2007). Em seu trabalho, os autores descrevem a validação dada para os diversos recursos hipermídia produzidos por eles para o ensino da Física Moderna, usados por alunos do terceiro ano do Ensino Médio, alunos de graduação e pesquisadores da área de Ensino de Física. Suas conclusões apontam que o material favorece a leitura crítica do conteúdo, apresenta recursos capazes de tornar a aprendizagem mais motivadora, auxilia a fixação da atenção devido à variedade de recursos de hipermídia, entre outros. Para os alunos participantes do estudo, a utilização do computador foi um fator motivante, constituindo-se como um diferencial às aulas tradicionais. Além disso, os autores deixam sugestões para que novos conteúdos

de hipermídia sejam estruturados e aplicados no Ensino Médio para abordar tópicos de Física Moderna.

De maneira geral, a sociedade não consegue acompanhar os avanços tecnológicos na mesma velocidade que eles surgem: entendendo os processos, seus pontos positivos e negativos, as possíveis implicações dessas novas tecnologias nos âmbitos tecnológico, ambiental, econômico, social. Portanto, cabe aos professores o papel de alertar, instruir e construir novos conhecimentos em relação a todo o avanço tecnológico recente junto a seus estudantes. É por essa razão que elaboramos um AVA, direcionado a alunos de Ensino Médio que desejam aprender sobre um avanço tecnológico real e pouco debatido nas salas de aulas, que provavelmente revolucionará as possibilidades da Ciência como um todo. As possibilidades dessa área emergente são inúmeras: com o advento do computador quântico, a capacidade humana de criar modelos matemáticos mais avançados, que simulem sistemas biológicos, cosmológicos e até mesmo quânticos, é tangível. Exatamente por essas razões é que o tema pode ser explorado nos ambientes formais de educação, já que, os estudantes têm acesso a ele por meio de vídeos e textos disponíveis na internet escritos em uma linguagem pouco acessível, ou mesmo de pouca confiabilidade.

1.3 O ensino de quântica para a promoção da alfabetização científica

A elaboração desse ambiente virtual de aprendizagem, de nome Qubit teve como princípio norteador a alfabetização científica (SASSERON, 2016) dos estudantes. Como o próprio nome diz, trata-se de um processo de letramento, na qual os alunos têm o primeiro contato com alguma área do conhecimento científico. A alfabetização científica diz respeito ao conhecimento de novos conceitos, apropriação da linguagem simbólica e matemática pertinente, e internalização da cultura científica que envolve os temas trabalhados.

Para Santos et al. (2011), o tema Computação Quântica apresenta elementos potenciais para a discussão da alfabetização científica. Os autores concluíram que ele foi suficiente para promover o esforço cognitivo dos estudantes, que puderam compreender, ao menos minimamente, conceitos centrais como superposição e medidas quânticas, além de apontarem a grande quantidade de conceitos novos e pouco tempo

disponível como fatores limitantes em seu estudo.

Em sua revisão bibliográfica sobre alfabetização científica, Teixeira (2011), ressalta que existe mais de uma interpretação para o termo alfabetização científica, mas que ela pode ser compreendida como:

competência de interpretação sobre o conteúdo da informação, que no caso de textos científicos [...] envolvem a identificação de evidências empíricas ou teorias que fundamentam o que é dito, interpretação sobre aspectos não verbais da linguagem tais como: gráficos, tabelas, diagramas, expressões matemáticas reflexão e a capacidade de distinguir entre o que é descrição de fatos (observações) e o que é interpretação de fatos.

Para Norris e Phillips (NORRIS, 2003, apud TEIXEIRA, 2011, p.10) a alfabetização científica tem que ver com uma formação plena do estudante, no que tange a capacidade de compreensão e a elaboração de significados, bem como a análise e formação de um senso crítico relacionado ao conhecimento científico.

Fourez (FOUREZ, 2000 apud SASSERON, 2016, p.9), traz algumas das características presentes em uma pessoa que é alfabetizada cientificamente, para o autor, aquele que o é:

"Utiliza os conceitos científicos e é capaz de integrar valores, e sabe fazer por tomar decisões responsáveis no dia a dia".

"Conhece os principais conceitos, hipóteses e teorias científicas e é capaz de aplicá-los".

"Compreende que a produção dos saberes científicos depende, ao mesmo tempo, de processos de pesquisas e de conceitos teóricos".

"Faz a distinção entre os resultados científicos e a opinião pessoal".

"Reconhece a origem da ciência e compreende que o saber científico é provisório, e sujeito a mudanças a depender do acúmulo de resultados".

"Apresenta uma certa compreensão da maneira como as ciências e as tecnologias foram produzidas ao longo da história".

A partir do momento em que os estudantes adquirem o vocabulário científico mínimo e necessário para a compreensão global de um conteúdo, o processo de aculturação científica se inicia, englobando novos graus de aprendizagem, estimulando-se o senso crítico e aprimorando a capacidade de julgamento por parte dos estudantes. Um processo de ensino-aprendizagem que vise a alfabetização científica deve, portanto, garantir uma introdução aos conceitos físicos, leis, métodos da Ciência e da investigação científica, bem como o estabelecimento de relações entre Ciência, tecnologia, sociedade e meio-ambiente, permitindo ao estudante um julgamento de possíveis implicações a cada uma dessas áreas, quando for pertinente, em decorrência desenvolvimento científico e tecnológico.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1999), é desejado que o ensino de Física contribua para a formação de uma cultura científica efetiva, que permita ao indivíduo a interpretação de fatos, fenômenos e processos naturais, bem como a compreensão da interação do ser humano com a natureza, sendo esse último, uma parte dela em constante processo de transformação. Além disso, o documento ressalta que o conhecimento de Física trabalhado nas salas de aula é apresentado como um produto acabado, produzindo um entendimento de que não restam problemas da Física a serem resolvidos, nem novos conhecimentos a serem construídos. O texto também deixa claro que esses problemas não são fruto exclusivo do despreparo dos professores, ou ainda das condições e recursos disponíveis nas escolas, trata-se, no entanto, de uma deformação estrutural, produto de uma introjeção gradual ao longo de muitos anos, executada pelos próprios participantes da educação, tornando-se assim, algo naturalmente aceito nos dias atuais.

Face aos argumentos expostos, o PCN defende que é necessário à Física possibilitar uma melhor compreensão de mundo, e que para isso, precisa-se atribuir novas dimensões ao Ensino de Física, apresentando aos estudantes conhecimentos científicos que os tornem parte do processo educativo, não como meros espectadores, mas no papel de principais interessados. O despertar do interesse dos estudantes pelo conhecimento é portanto, imprescindível para a reformulação do processo educativo e o ponto de partida para isso é levar em conta, quais abordagens dos fenômenos físicos são significativas para os estudantes, seja por sua importância tecnológica, social, ambiental ou mesmo por mera curiosidade.

Para além da alfabetização científica, a discussão de novos temas da Ciência nas salas de aula, como o da computação quântica, abre espaço para que sejam trabalhadas algumas das competências e habilidades da área de ciências da natureza, previstas pelo Exame Nacional do Ensino Médio (BRASIL, 2009), como indicadores de uma educação secundária satisfatória. Como exemplo, podemos tratar de algumas competências das ciências naturais (BRASIL, 2009) que preconizam:

"Compreender as ciências naturais e as tecnologias a elas associadas como construções humanas, percebendo seus papéis nos processos de produção e no desenvolvimento econômico e social da humanidade".

"Entender métodos e procedimentos próprios das ciências naturais e aplicá-los em diferentes contextos".

"Apropriar-se de conhecimentos da física para, em situações problema, interpretar, avaliar ou planejar intervenções científico-tecnológicas".

Dessa forma, os autores desse trabalho presumem que seja possível ensinar alguns aspectos fundamentais da mecânica quântica no Ensino Médio por meio da computação quântica, visto que a área desperta o interesse dos estudantes e a matemática nela envolvida é relativamente simples, além disso, investigam a presença de indicadores da alfabetização científica em alunos que realizaram as atividades disponibilizadas no AVA Qubit.

Diante do exposto, o presente trabalho é estruturado em sete capítulos. No segundo capítulo é feita uma descrição sobre o que são sistemas de dois níveis e algumas de suas propriedades básicas, uma vez que tanto os bits clássicos quanto os bits quânticos tratam-se de sistemas dois níveis.

Adiante, apresenta-se brevemente as bases da computação clássica, a ser, o bit, aqui onde são definidas a base binária e o que são cadeias de bits, artifícios utilizados pelos computadores para o armazenamento e leitura da informação. Em seguida, apresenta-se as operações lógicas realizadas sobre os bits, conhecidas como portas lógicas, nessa seção traz-se uma descrição matricial das portas lógicas, bem como sua combinação afim de se implementar algum algoritmo executável por um computador.

O capítulo que trata da mecânica quântica é iniciado com um breve histórico da sua construção. E em seguida apresentam-se os conceito de função de onda,

operadores, densidade de probabilidade, colapso da função de onda e os principais postulados da teoria quântica, bem como o ferramental matemático necessário para a compreensão dos capítulos seguintes.

Em seguida, tratamos sobre o Spin, começando com o experimento de Stern-Gerlach e as suas conclusões, seguido da definição de momento angular e suas propriedades no âmbito da mecânica quântica. Adiante define-se o Spin e suas propriedades como um momento angular intrínseco da matéria, seguido da notação de Dirac e a representação dos estados up e down do spin em forma matricial. Na seção que trata a dinâmica quântica apresenta-se a evolução temporal de um estado quântico genérico e o operador de energia para o sistema spin-campo magnético.

O sétimo capítulo trata das bases da computação quântica, onde trazemos a definição e apresentação das principais portas lógicas quânticas, além de uma descrição matricial para cada uma delas. Em seguida mostra-se de maneira simplificada o que são circuitos quânticos, estados produzidos por múltiplos qubits e estados emaranhados. A seção seguinte traz alguns sistemas físicos que podem ser implementados como bits quânticos, em seguida, traz-se a representação geométrica mais geral para um bit quântico, a esfera de Bloch.

O último capítulo discute a elaboração e aplicação de um curso de curta duração, desenvolvido num ambiente virtual de aprendizagem Moodle norteado pelos preceitos teóricos da Alfabetização Científica, de nome Qubit e as expectativas dos autores relativas as potencialidades de aplicação desse trabalho, deixa-se aqui também uma sugestão de uso do ambiente, como uma ferramenta a ser utilizado por professores do Ensino Médio.

Capítulo 2

A descrição de sistemas com dois graus de liberdade

Sistemas com dois graus de liberdade podem ser caracterizados por apenas dois parâmetros. Exemplos de sistemas desse tipo são frequentes no cotidiano, indo desde o mecanismo que localiza as casas no plano municipal, em termos dos parâmetros *rua* e *número*, até a forma de codificar informações em dispositivos eletrônicos, por meio da base binária, que assume dois valores, **0** e **1**.

A formulação matemática natural para descrever tais sistemas baseia-se na ideia dos vetores, além das matrizes, que são objetos matemáticos que atuam sobre os vetores. Assim, os vetores e as matrizes são especialmente úteis para o estudo da computação quântica, já que, a definição dos estados dos bits quânticos é feita a partir de vetores, enquanto as operações realizadas sobre eles são, geralmente, matrizes, como será discutido posteriormente.

2.1 Vetores

Podemos localizar todos os pontos no plano cartesiano por meio de suas coordenadas

$$\vec{r} = (x, y) = x \hat{x} + y \hat{y},$$

sendo \hat{x} e \hat{y} vetores de módulo unitário, chamados de versores, nas direções x e y respectivamente. Sua posição em relação a origem do plano é dada pelo vetor que parte do ponto $(0, 0)$. O módulo, ou comprimento total desse vetor pode ser calculado através do Teorema de Pitágoras, devido à ortogonalidade de suas componentes x e y , ou seja $\sqrt{x^2 + y^2}$.

As bases dos vetores de dimensão N são os N vetores linearmente independentes, que permitem escrever um vetor qualquer como combinação linear destes. Por conveniência, é muitas vezes útil defini-las de modo a serem perpendiculares entre si, de modo que o produto escalar entre direções ortogonais será sempre nulo. De fato, a base natural para um sistema bidimensional satisfaz

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = 1 \quad \hat{y} \cdot \hat{y} = 1 \quad (2.1)$$

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = 0 \quad \hat{y} \cdot \hat{x} = 0 \quad (2.2)$$

Dessa forma, o vetor que define a posição no sistema de coordenadas acima pode ser escrito em termos de uma base de dois estados:

$$\vec{v} = (\alpha, \beta) = \alpha \hat{x} + \beta \hat{y}. \quad (2.3)$$

Caso queiramos calcular as projeções v_x e v_y de \vec{v} nas direções de \hat{x} e \hat{y} , fazemos, respectivamente, os produtos escalares

$$v_x = \vec{v} \cdot \hat{x} = \alpha \hat{x} \cdot \hat{x} + \beta \hat{y} \cdot \hat{x} = \alpha, \quad (2.4)$$

$$v_y = \vec{v} \cdot \hat{y} = \alpha \hat{x} \cdot \hat{y} + \beta \hat{y} \cdot \hat{y} = \beta. \quad (2.5)$$

Tomemos como um exemplo, o vetor apresentado na figura 2.1, onde $\alpha = 2$ e $\beta = 5$. Nela o ponto (2,5) é definido por um vetor genérico de origem (0,0) e extremidade (2,5):

Quando desejamos realizar transformações sobre os vetores, como ao aplicar uma rotação, faz-se necessário introduzir o conceito de matrizes. Dessa forma, na próxima seção apresenta-se uma breve revisão sobre o que são matrizes e as principais propriedades.

2.2 Matrizes

No âmbito da álgebra linear, as matrizes podem ser usadas para descrever operadores, isto é, operações matemáticas que agem em vetores, transformando-os em outros vetores, como por exemplo, a matriz de rotação, que gira por um ângulo θ um determinado vetor. Diversos operadores utilizados pela mecânica quântica são escritos em forma matricial, de modo que entender as propriedades de matrizes é de fundamental importância para a computação quântica.

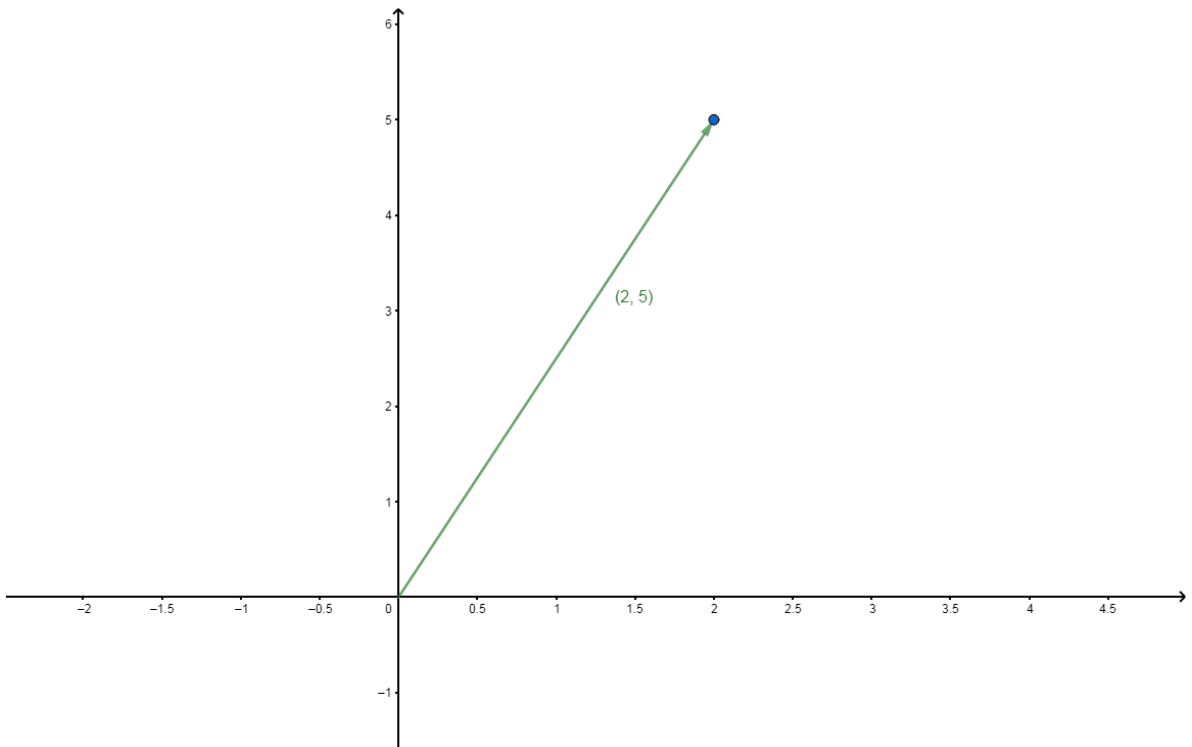


Figura 2.1: Vetor que define o ponto (2,5)

Denota-se uma matriz de dimensão $m \times n$ como um arranjo de termos, formado por m linhas e n colunas, sendo uma forma rápida de operar vários números simultaneamente. Considere a matriz abaixo, seus elementos são dados $a_{1,1}, a_{1,2}, \dots$, o primeiro índice de cada elemento diz respeito a sua linha, o segundo elemento é relacionado à sua coluna. De forma mais geral, podemos definir as matrizes como

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{m_1, n_1} & a_{m_1, n_2} & \cdots \\ a_{m_2, n_1} & a_{m_2, n_2} & \cdots \\ a_{m_3, n_1} & a_{m_3, n_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

com $a_{m,n} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, podendo ser usado para descrever quaisquer sistemas lineares, como $A\vec{v} = \vec{v}'$, ou

$$\begin{bmatrix} a_{m_1, n_1} & a_{m_1, n_2} & \cdots \\ a_{m_2, n_1} & a_{m_2, n_2} & \cdots \\ a_{m_3, n_1} & a_{m_3, n_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n_1} \\ v_{n_2} \\ v_{n_3} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'_{n_1} \\ v'_{n_2} \\ v'_{n_3} \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Existem matrizes de diversos tipos e com diversas características, portanto retomaremos nas seções a seguir alguns tipos de matrizes, bem como as suas propriedades.

2.2.1 Matrizes Especiais

Matriz linha ou coluna

As matrizes de ordem igual a 1, isto é, que apresentam somente uma linha e coluna são chamadas de vetor, podendo ser um vetor do tipo linha ($1 \times n$), ou do tipo coluna ($m \times 1$), caso seus termos estejam alinhados na direção horizontal ou vertical, respectivamente. A seguir temos um exemplo de uma matriz do tipo coluna, ou vetor:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

onde os termos são dispostos segundo a forma a_{mn} sendo m o índice referente à linha em que o termo se encontra, e n à coluna referente ao termo. Abaixo, um exemplo de como é uma matriz do tipo linha:

$$[a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot]. \quad (2.9)$$

Matriz quadrada

Matrizes quadradas são aquelas cujo número m de linhas coincide com o número n , tal que ($m = n$) de colunas, a seguir apresenta-se um exemplo desse tipo de matrizes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Matriz diagonal

Matrizes diagonais, são aquelas cujos elementos são nulos tal que $m \neq n$, ou seja, só apresenta valores não nulos em sua diagonal, observe um exemplo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Matriz identidade

A matriz identidade é aquela cujos termos são igual 1 em sua diagonal, enquanto os demais termos são iguais a 0. A aplicação da matriz identidade em qualquer

vetor, ou sua multiplicação com outra matriz não afeta em nada o resultado, é como multiplicar algo pelo escalar 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

É comum nos referirmos à essa matriz como simplesmente I .

Matriz inversa

A matriz inversa A^{-1} de uma matriz A é definida sempre uma matriz quadrada ($i = j$) tal que o seu produto resulta na matriz identidade

$$A^{-1}A = I, \quad (2.13)$$

ou

$$AA^{-1} = I. \quad (2.14)$$

Matriz transposta

A matriz transposta surge da troca das linhas pelas colunas de uma matriz qualquer. Veja o exemplo abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Para encontrarmos a matriz transposta de A , ou seja, A^T basta trocarmos linhas por colunas, tal que:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

2.2.2 Cálculo do determinante de uma matriz

Para calcular o determinante da seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

onde a, b, c e d podem ser, de maneira mais geral, números complexos, $(a, b, c, d) \in \mathbf{C}$, realizamos a seguinte operação

$$\det \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = ad - bc. \quad (2.18)$$

Para matrizes de ordem maior, tais como matrizes 3×3 o procedimento é um pouco mais complexo e envolve o cálculo dos determinantes de submatrizes. Vamos usar como exemplo a matriz abaixo,

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

de forma que seu determinante pode ser calculado através do seguinte processo

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \right) &= a \det \left(\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} \right) - b \det \left(\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} \right) + c \det \left(\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix} \right) \\ &= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \\ &= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg. \end{aligned}$$

2.2.3 Autovalores e autovetores

Diversas operações da mecânica quântica são feitas em formas de matrizes, associando observáveis físicos, como a sua energia, au quantidade de movimento, seu momento angular ou seu estado de polarização, por exemplo, a operadores matriciais. Os operadores podem ser escritos em forma matricial, mesmo que apenas formalmente no caso de operadores cuja representação tenha dimensão infinita.

O conjunto de autovalores de um operador é chamado de espectro do operador e corresponde aos possíveis resultados de uma eventual medição do referido observável, sendo ainda associados aos seus estados característicos, ou seus autovetores. As noções de autovalores e autovetores são trazidas na subseção a seguir. Nela apresentaremos a equação secular, que pode ser aplicada a qualquer operador, afim de se determinar quais são os seus autoestados e seus respectivos autovalores.

A equação secular e os autovalores

A equação secular permite que encontremos o conjunto de autovetores de um operador A (BOLDRINI, 1980). Essa equação pode ser definida através da diferença de A com o produto da matriz identidade I com uma constante real λ . Além disso, A condição para encontrarmos os autovalores de A é tal que o determinante de $A - \lambda I$ seja igual a zero:

$$A - \lambda I \quad (2.20)$$

$$\det [A - \lambda I] = 0. \quad (2.21)$$

Os autovetores, ou autoestados de A , por sua vez podem ser calculados a partir de seus autovalores, utilizando a relação a abaixo:

$$[A - \lambda I] \vec{v} = 0. \quad (2.22)$$

Na equação acima, \vec{v} é um vetor do tipo coluna, correspondente à um dos autovetores de A de acordo com o valor de λ , um dos autovalores de A . Tomemos a matriz A como uma matriz quadrada, de valores reais, apresentada abaixo, em seguida será aplicada sobre A a equação secular, em seguida calcularemos seu determinante afim de encontrarmos os seus autovalores:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 7 \\ -1 & -6 - \lambda \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

$$\det [A - \lambda I] = (2 - \lambda)(-6 - \lambda) + 7 = \lambda^2 + 4\lambda - 5 = (\lambda + 5)(\lambda - 1) = 0. \quad (2.25)$$

Analisando a equação acima é possível perceber que $\det [A - \lambda I]$ só será nulo se os autovalores de λ forem $\lambda_1 = -5$ e $\lambda_2 = 1$, respectivamente.

Os autovetores

Em seguida, para encontrarmos o autovetor, ou autoestado, correspondente ao primeiro autovalor, $\lambda_1 = -5$, basta substituírmos λ por -5 :

$$\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

$$7v_1 + 7v_2 = 0 \longrightarrow v_1 = -v_2. \quad (2.28)$$

Guardamos o resultado obtido ($v_1 = -v_2$) e fazemos o mesmo cálculo para o segundo autovalor $\lambda_2 = 1$. Dessa forma teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -7 \end{bmatrix} \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

$$v_1 + 7v_2 = 0 \longrightarrow v_1 = -7v_2. \quad (2.31)$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Usando $\lambda_2 = 1$, teremos o seguinte resultado:

$$\vec{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ para } \lambda_2 = 1, \quad (2.33)$$

$$\vec{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ para } \lambda_1 = -5. \quad (2.34)$$

2.3 Atuação de uma matriz genérica em um vetor

Podemos multiplicar uma matriz genérica A com um vetor \vec{x} (matriz coluna), resultando em uma transformação de forma que $A\vec{x}$ seja igual a \vec{x}' . Para fazer uma multiplicação dessas matrizes é preciso que o número de colunas de uma matriz seja igual ao número de linhas da outra. Observe o exemplo dado a seguir:

$$\vec{X} = A\vec{x}, \quad (2.35)$$

onde

$$\vec{X} = A\vec{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

De forma similar podemos definir as rotações no plano, por meio da aplicação das matrizes a vetores no plano.

2.4 Operações no plano cartesiano

2.4.1 Rotações no plano

A operação de rotação no plano é definido por meio de uma matriz rotação unitária, isso é, de módulo igual a 1. Portanto, a aplicação dessa matriz em algum vetor não altera seu módulo, apenas a sua projeção, ou o tamanho de suas componentes, de acordo com o ângulo de rotação. A matriz de rotação no plano, para um ângulo θ é expressa a seguir:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

A aplicação dessa matriz em um vetor $\vec{v} = x \cdot \hat{x} + y \cdot \hat{y}$ transforma-o em um vetor \vec{v}' e é apresentada a seguir:

$$\vec{v}' = R(\theta) \vec{v}, \quad (2.37)$$

de forma que:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

resultando

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' &= x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned} \quad (2.39)$$

A aplicação de rotações em vetores segue algumas propriedades comutativas, e elas são discutidas a seguir.

2.4.2 Comutatividade das operações de rotação no plano

As rotações no plano são comutativas, ou seja, a ordem que se aplicam as rotações não afetam a direção e o sentido do vetor resultante. A propriedade comutativa pode ser facilmente observada ao aplicar-se uma matriz de rotação duas vezes com ângulos distintos. Tomemos como exemplo um vetor $\vec{A} = (3, 4)$ que será rotacionado duas vezes, sob ângulos de 90° e 180° . Faremos inicialmente a rotação de 90° e 180° e depois trocaremos a ordem da operação:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Para o próximo ângulo, de 180° temos:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Mudando a ordem das operações, faremos em primeiro lugar a rotação de 180° , seguido da rotação de 90° :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

A próxima rotação, de 90° é portanto:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

De forma um pouco mais geral, também é possível descrever as rotações consecutivas, em ângulos θ_1 e θ_2 da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Portanto, mesmo mudando a ordem das rotações no plano conseguimos transformar o mesmo vetor $\vec{A} = (3, 4)$ no vetor $\vec{A} = (4, -3)$. Perceba que o módulo do vetor não se alterou, mesmo após a aplicação das matrizes de rotação, uma vez que $\sqrt{(3)^2 + (4)^2}$ é igual a $\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}$.

2.5 Operações no espaço tridimensional

2.5.1 Rotações no espaço tridimensional

As rotações no espaço tridimensional devem ser analisadas de acordo com um eixo espacial, escrevemos as matrizes em torno de x,y e z tal que a rotação tridimensional é dada pelo produto entre elas, dessa forma $R(\alpha, \beta, \gamma) = C_\gamma \cdot B_\beta \cdot A_\alpha$. Definimos as matrizes C_γ, B_β e A_α como:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$B_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

$$C_\gamma = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Dessa forma, as rotações tridimensionais podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Em discordâncias às rotações feitas no plano, as rotações tridimensionais são não-comutativas, exploraremos essa propriedade na seção a seguir.

2.5.2 Não-comutatividade das operações de rotação no espaço tridimensional

Diferentemente das rotações no plano, as rotações tridimensionais não comutam entre si, isto é, mudando-se a ordem das rotações não obtêm-se o mesmo re-

sultado. Vamos tomar o resultado acima, para um ângulo de 90° , nas três direções do espaço, porém, invertemos a ordem das operações: faremos primeiro a rotação para γ , seguido de β e α , depois faremos essas rotações na ordem inversa:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ -y \\ x \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Fazendo as mesmas rotações, porém em uma ordem diferente, isso é, começando em α , seguido de β e γ teremos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ y \\ -x \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

O resultado acima nos mostra que as rotações tridimensionais não são comutativas entre si, isso é, mudando-se a ordem das rotações, altera-se o resultado final. A figura 2.2, apresenta uma ilustração para mostrar que as rotações tridimensionais não comutam entre si:

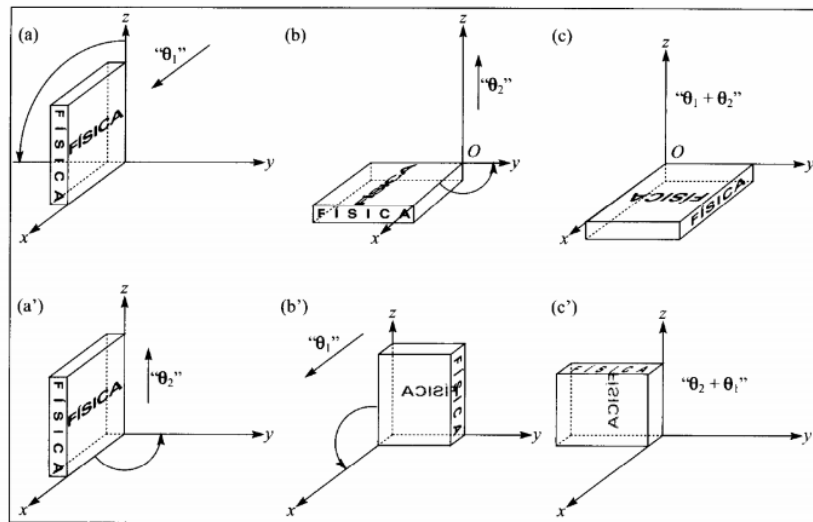


Figura 2.2: Não-comutatividade das rotações tridimensionais, retirado de: Curso de Física Básica, Vol.4, página 44.

Capítulo 3

Computação clássica

Os bits são as unidades fundamentais de informação usadas na informática e computação. São definidos a partir de alguma grandeza física, como um potencial elétrico alto e baixo, por exemplo (SHANNON, 2001). Para se definir uma base de bits é necessário que se escolha uma grandeza física capaz de apresentar um salto entre seus valores. Em outras palavras a grandeza escolhida não pode apresentar um espectro contínuo para um dado intervalo de tempo, mas sim um salto muito rápido, quase instantâneo, entre dois valores diferentes. Em outras palavras, é desejável que suas amplitudes, ou módulos, sejam discretos.

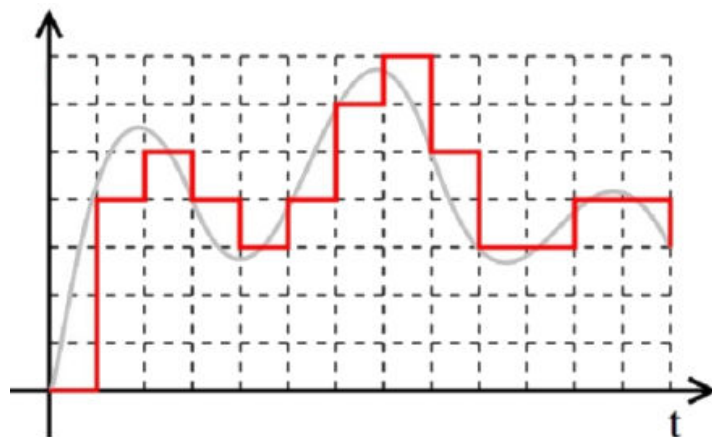


Figura 3.1: Grandeza digital (vermelho) e grandeza analógica (cinza).

Quando uma grandeza física apresentar quaisquer módulos dentro de um intervalo de amplitude (assim como o conjunto de velocidades possíveis no velocímetro de um automóvel) classificamo-a como uma grandeza analógica. De outro modo, se a grandeza física puder ser descrita através de valores discretos, dizemos que é quantizada,

e pode ser utilizada para definir uma grandeza virtual.

Na computação clássica, o bit é definido pelo valor de potencial elétrico alto e baixo que se forma nos circuitos dos computadores, colocando-se uma distância suficientemente grande entre dois valores distintos de potencial é possível definir um estado que favorece a corrente elétrica (bit 0 - verdadeiro, potencial alto), e de um estado que não favorece a formação de corrente elétrica (bit 1 - falso, baixo potencial).

Dessa forma, na computação clássica temos um número finito de possibilidades para os valores dos bits, numa base de dois estados o bit pode assumir valores 0 e 1 somente, e se o bit tiver valor igual a 1 ele não poderá ser lido como 0, por exemplo.

3.1 A base decimal

A base decimal é uma convenção utilizada para a escrita dos números usada para diversos fins e por todo o mundo. A base do sistema decimal é organizada usando dez algarismos:

$$[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. \quad (3.1)$$

Todo número escrito na base decimal será dividido entre unidade, dezena, centena, milhar, milhão, de acordo com a posição dos seus algarismos e da ordem de grandeza associada ao número. Tomemos como exemplo o número 42_{10} :

$$42 = 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 = 40 + 2. \quad (3.2)$$

3.2 A base binária

A base binária é a base usada pelos computadores (TIETZE, 2015) para realizar todos os tipos de operações lógicas, uma vez que os bits, 0 e 1 podem ser usados para escrever qualquer número da base decimal, ou de qualquer que seja a base. A base binária é organizada usando-se somente dois algarismos:

$$[0, 1]. \quad (3.3)$$

Vamos tomar como exemplo novamente o número 42, escrito em sua forma decimal 42_{10} . Para escrevê-lo em sua forma binária, temos que dividi-lo por 2 sucessivas vezes, sempre que o resto da divisão for 0, anotamos 0, quando o resto da divisão for 1, anotamos o 1, até que cheguemos na última divisão ($2/2$), e então escrevemos os

números anotados de traz pra frente: $42/2 = 21$, resto = 0; $21/2 = 10$, resto = 1; $10/2 = 5$, resto = 0; $5/2 = 2$, resto = 1; $2/2 = 1$, resto = 0; $1/2 = 0$, resto = 1.

Escrevendo o resto de trás pra frente teremos: 101010_2 , que é o equivalente a 42_{10} na base decimal.

O caminho inverso é ainda mais simples, para voltarmos o número binário para a base decimal fazemos a seguinte operação:

$$101010_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 32 + 8 + 2 = 42_{10} \quad (3.4)$$

3.3 Sequências de bits

Na computação é normal encontrarmos informações escritas como longas cadeias de bits (bitstrings), representando números decimais, caracteres ou qualquer que seja a grandeza computacional. Um computador cuja arquitetura for de 64 bits é capaz de fazer operações com cadeias de 64 bits por vez. A codificação de bits segue uma nomenclatura simples, um arranjo de oito bits é chamado de Byte, enquanto 1 kB (quilobyte) equivale a 1024 bits, 1 MB (Megabyte) equivale a 1024 kB e etc.

Existe um padrão para a utilização das strings (MACKENZIE, 1980) chamado de ASCII (*American Standard Code for Information Interchange*), esse conjunto de códigos utiliza somente os bits 0 e 1, agrupando-os de oito em oito. Ao todo são 128 sinais, dos quais 95 são sinais gráficos como letras, símbolos, sinais matemáticos e 33 sinais de controle, esses últimos são sinais não-imprimíveis, isso é, são somente lidos e interpretados pelo computador sem serem exibidos. A tabela abaixo apresenta alguns exemplos de bits de controle e bits gráficos na codificação binária:

Tabela 3.1: Códigos ASCII para alguns caracteres não-imprimíveis

Código binário	Nome
0000 0000	Nulo
0000 0010	Início do texto
0000 0011	Fim do texto
0000 1010	Nova linha
0001 1111	Separador de unidades
0001 1100	Separador de Arquivos
0001 1001	Fim de mídia
0000 0100	Fim de transmissão

A tabela a seguir traz alguns exemplos dos caracteres gráficos (impressos) de acordo com a codificação ASCII:

Tabela 3.2: Códigos ASCII para alguns caracteres imprimíveis

Código binário	Nome
0010 0000	Nulo
0010 0001	Exclamação !
0100 0001	Letra A
0100 0010	Letra B
0100 0011	Letra C
0100 0100	Letra D
0100 0101	Letra E
0100 0110	Letra F
0011 0000	Número 0
0011 0001	Número 1
0011 0010	Número 2
0011 0011	Número 3
0011 0100	Número 4
0011 0101	Número 5

3.4 Portas lógicas

As portas lógicas representam as operações realizadas com os bits, elas são capazes de manipular os bits usando sentenças lógicas e são descritas por meio de uma tabela verdade. Fisicamente, as portas lógicas são pequenos circuitos lógicos capazes de interpretar um sinal elétrico de entrada, produzindo uma única saída, podendo ser implementados através do uso de resistores, diodos, ou até mesmo interruptores, além disso, o comportamento das portas lógicas é descrito por uma tabela verdade, segundo a lógica Booleana. Algumas das portas lógicas mais usadas na computação clássica são as portas **NOT**, **AND**, **OR**, **NAND**, **NOR**, **NAND**, **NOR** e **XNOR**. Adiante faremos uma breve descrição das principais portas lógicas, apresentando a forma como cada uma delas atua em seus respectivos bits de entrada.

3.4.1 Descrição matricial das portas lógicas

As portas lógicas são descritas através da álgebra booleana e de forma similar à álgebra linear podem ser representadas por meio de matrizes que relacionam

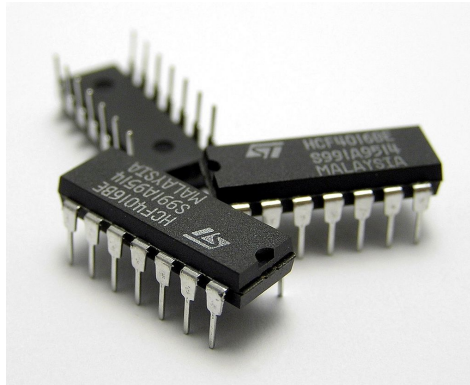


Figura 3.2: Os circuitos integrados são formados por diversas portas lógicas internas e largamente utilizados em dispositivos eletrônicos. Feito por Kimmo Palosari [Domínio público], via Wikimedia commons.

os bits de entrada em seus circuitos com os bits de saída. Essas matrizes são chamadas de tabela-verdade. Nas subseções abaixo apresentaremos as portas lógicas utilizadas na computação clássica para a elaboração de todos circuitos lógicos existentes.

Porta lógica NOT

A porta lógica **NOT** (não) atua sobre um único bit, invertendo o seu valor, de 0 para 1 ou de 1 para 0. Pode ser usado para negar a saída obtida após a aplicação de outras portas lógicas. Sua representação matricial é apresentada a seguir, onde A é o bit de entrada e S é o bit de saída:

$$\begin{bmatrix} A & S = \text{NOT}(A) \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

A função booleana da porta lógica **NOT** é a negação de A , $S = \bar{A}$. O símbolo usado para a porta lógica NOT de acordo com a norma ANSI (*American National Standards Institute*) é apresentado abaixo:

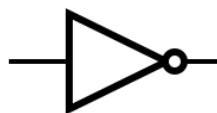


Figura 3.3: Porta lógica NOT, Por jjbeard (feito no Inkscape 0.43) [Domínio Público], via Wikimedia Commons

A porta lógica NOT pode ser implementada com um simples circuito elétrico envolvendo um resistor, uma chave e uma lâmpada, como no esquema apresentado

a seguir:

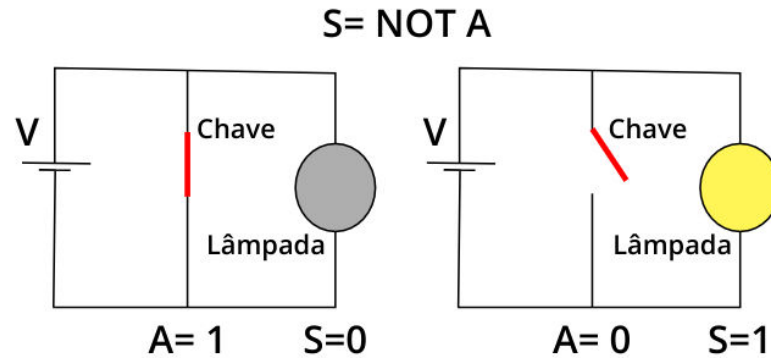


Figura 3.4: Circuito usado para a implementação da porta lógica NOT

No circuito mostrado acima, se a corrente passa através da chave (1), a lâmpada permanece desligada, no caso contrário, ela é acesa.

Porta lógica AND

A porta lógica **AND** (e), que também recebe o nome de conjunção lógica, atua em dois bits e retorna um resultado verdadeiro somente se os dois bits de entrada forem iguais. Sua tabela verdade é representada abaixo para dois bits de entrada A e B:

$$\begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 A & B & S = A \text{ AND } B \\
 \hline
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 \end{array} \tag{3.6}$$

A função booleana da porta lógica **AND** é dada por $S = A \cdot B$, enquanto o símbolo ANSI dessa porta é apresentado abaixo:



Figura 3.5: Porta lógica AND, Por jjbeard (feito no Inkscape 0.43) [Domínio Público], via Wikimedia Commons

A porta lógica AND pode ser implementada usando um circuito simples como o mostrado abaixo:

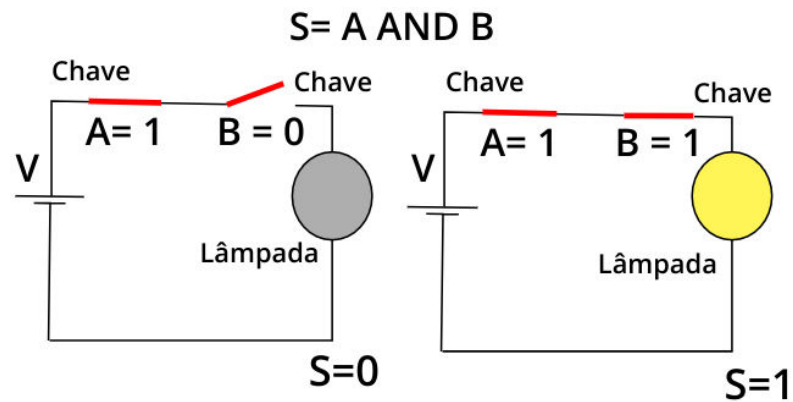


Figura 3.6: Circuito usado para a implementação da porta lógica AND.

No circuito acima, a lâmpada só acenderá se as duas chaves, A e B, estiverem fechadas (1).

Porta lógica OR

A porta lógica **OR** (ou), também chamada de disjunção opera em dois bits retornando um bit de saída falso se e somente se todos os bits de entrada forem falsos. Confira a tabela verdade dessa operação lógica:

$$\begin{bmatrix} A & B & S = A \text{ OR } B \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

A função booleana dessa porta lógica é dada por $S = A + B$ e o seu símbolo ANSI é apresentado abaixo:



Figura 3.7: Porta lógica OR, Por jjbeard (feito no Inkscape 0.43) [Domínio Público], via Wikimedia Commons

No circuito mostrado acima, se alguma das chaves (A ou B) estiverem fechadas, a lâmpada acenderá.

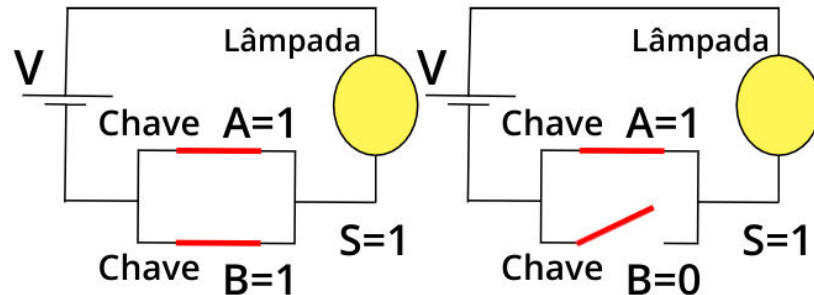


Figura 3.8: Circuito usado para implementação da porta lógica OR

Porta lógica NAND

A porta lógica **NAND** (e negado) é a porta **AND** negada, isso é, uma associação da operação **AND** com a operação **NOT**. Confira a tabela verdade dessa porta lógica:

$$\begin{bmatrix} A & B & S = A \text{ NAND } B \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

A função booleana da porta lógica **NAND** é dada por $S = \overline{(A \cdot B)}$. O símbolo ANSI dessa porta é exibido abaixo:



Figura 3.9: Porta lógica NAND, Por jjbeard (feito no Inkscape 0.43) [Domínio Público], via Wikimedia Commons

Porta lógica NOR

Assim como a porta lógica **NAND**, a porta lógica **NOR** (ou negado) é uma associação de duas portas: a porta lógica **AND** com a porta lógica **NOT**. Sua tabela verdade é expressa a seguir:

$$\begin{bmatrix} A & B & S = A \text{ NOR } B \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

A função booleana da porta lógica **NOR** é dada por $S = \overline{A + B}$. Seu símbolo ANSI é apresentado abaixo:

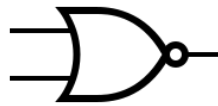


Figura 3.10: Porta lógica NOR, Por jjbeard (feito no Inkscape 0.43) [Domínio Público], via Wikimedia Commons

Porta lógica XOR

A porta lógica **XOR** (não exclusivo), também conhecida como disjunção exclusiva opera em dois bits e retorna o valor lógico verdadeiro se o número de entradas falsas for ímpar. A tabela verdade desse tipo de porta lógica é mostrada a seguir:

$$\begin{bmatrix} A & B & S = A \text{ XOR } B \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

A função booleana da porta lógica **XOR** é dada por $S = A \oplus B$. Seu símbolo ANSI é mostrado abaixo:



Figura 3.11: Porta lógica XOR, Por jjbeard (feito no Inkscape 0.43) [Domínio Público], via Wikimedia Commons

Porta lógica XNOR

A porta lógica **XNOR** (ou exclusivo negado), que também recebe o nome de coincidência lógica é a operação inversa da porta lógica **XOR**, ou seja, é a porta

XOR seguida de uma porta lógica **NOT**. Sua tabela-verdade é apresentada abaixo:

$$\begin{bmatrix} A & B & S = A \text{ XNOR } B \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Sua função booleana é dada por $S = (A \odot B) = \overline{(A \oplus B)}$, o primeiro símbolo (\odot) indica a operação ou exclusivo seguida de uma negação e o seu símbolo ANSI é exibido abaixo:



Figura 3.12: Porta lógica XNOR, Por jjbeard (feito no Inkscape 0.43) [Domínio Público], via Wikimedia Commons

Combinação de portas lógicas

Através da aplicação de cada uma das portas lógicas é possível realizar associações distintas que permitem a realização de algoritmos complexos, o bit de saída de cada porta lógica pode ser tomado como a entrada para outras portas lógicas, porém, diferentemente das portas lógicas quânticas, as operações realizadas na informação clássica não são reversíveis, isso é, ao aplicar-se mais de uma vez a mesma operação, nem sempre retorna-se ao resultado anterior. Na figura a seguir mostramos um circuito formado pelas portas lógicas **AND**, **OR**, e **NOT**:

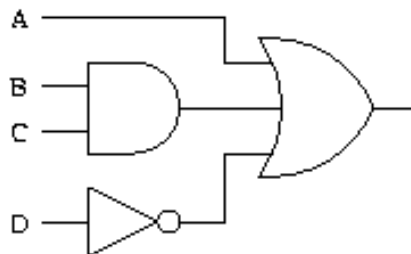


Figura 3.13: Associação de portas lógicas.

No exemplo mostrado acima temos quatro bits de entrada, **A**, **B**, **C** e **D**. Entre os bits **B** e **C** aplica-se a porta lógica **AND**, a entrada do bit **D** é negada pela

porta lógica **NOT**, o bit de entrada **A**, juntamente com o bit negado **D** e o resultado da porta lógica **AND** aplicada aos bits **B** e **C** passam pela porta lógica **OU**. A sentença booleana para esse sistema é portanto dada por $S = A + B \cdot C + \bar{D}$. A sentença também pode ser lida como **A ou B e C ou o inverso de D**.

Podemos também exemplificar outra situação: Como deve ser o circuito formado pela associação de portas lógicas, implementado para fazer funcionar um dispositivo como uma bomba d'água? Consideremos, por exemplo que: Uma bomba de água só funciona se: o indicador de nível mostrar que a altura de água é ideal (**A**), se a temperatura do motor não for maior que um valor crítico (**B**), se houver óleo lubrificante no motor (**C**) e se a corrente (**D**), ou a tensão elétrica (**E**) não forem maiores que um valor máximo suportado.

De acordo com a notação **ANSI**, o circuito que faria essa bomba d'água funcionar corretamente é mostrado abaixo:

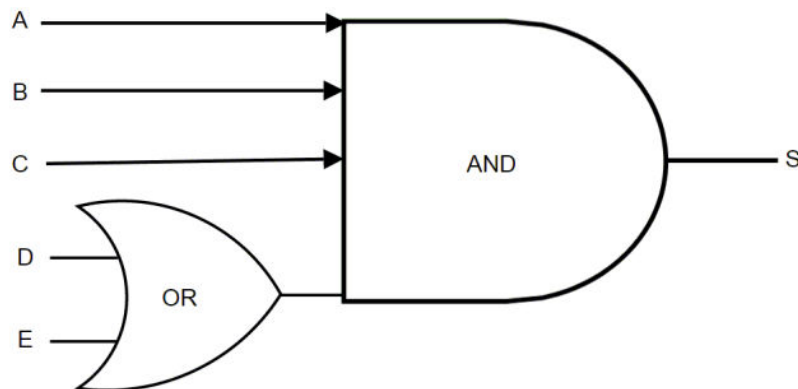


Figura 3.14: Circuito lógico usada para a bomba d'água.

A expressão booleana que descreve o funcionamento desse circuito é dado por:

$$S = A.B.C.(D + E). \quad (3.12)$$

O capítulo seguinte trata dos sistemas quânticos, perpassando a ideia de função de onda, os principais postulados da mecânica quântica e a descoberta do spin e suas propriedades.

Capítulo 4

Mecânica quântica

Para entendermos os conceitos da computação quântica é interessante discutirmos a fundamentação da mecânica quântica, já que essa grande e importante teoria é o pano de fundo do advento dos computadores quânticos. Portanto, nesse capítulo apresentaremos o contexto de surgimento da teoria quântica, bem como os seus principais postulados.

A teoria quântica trata dos fenômenos relacionados a sistemas de escalas reduzidas como os de ordem atômica e subatômica, os quais estão longe de nossa experiência cotidiana mas que afetam, indiretamente e muito contundentemente, a vida contemporânea. Atualmente, convivemos com diversas aplicações tecnológicas decorrentes do estudo da mecânica quântica, como os processadores modernos, o laser, o led, relógios atômicos, supercondutores, novos materiais e etc.

Por outro lado, os alicerces dessa teoria apresentam um esqueleto de interesse contemporâneo, havendo ainda desafios a serem transpostos ou, pelo menos, melhor esclarecidos. A teoria quântica cresceu gradativamente a partir da solução apresentada por Max Planck (EINSTEIN, 1980) para o problema da radiação de corpo negro. Trata-se de uma construção teórica em que um corpo é capaz de absorver toda radiação sobre ele incidente, sendo que o eletromagnetismo clássico falhava ao explicar a emissão eletromagnética de corpos em equilíbrio térmico com o meio externo. Por questões de simplificação, classicamente previa-se que nesse caso, os corpos poderiam emitir em quaisquer frequências do espectro eletromagnético, no entanto, como a densidade de energia do campo eletromagnético é proporcional ao quadrado da frequência emitida, para frequências na faixa do ultravioleta a densidade de energia tendia para valores infinitos. Esse comportamento estranho ficou conhecido como a catástrofe do

ultravioleta, ou catástrofe de Rayleigh-Jeans. A adequação teórica foi feita por Planck, ao subdividir a energia da radiação emitida em pequenos pacotes de energia, os *quanta* de luz, essa proposta representou uma grande mudança de paradigma na Física, até então se entendia que a energia eletromagnética era contínua e não discreta.

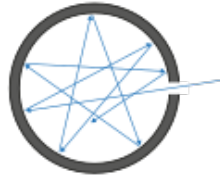


Figura 4.1: O corpo negro é capaz de absorver toda a radiação incidente, mas emite-a em frequências discretas, Por AG Caesar [Domínio público], via Wikimedia Commons.

Em 1905, o físico alemão Albert Einstein sugere que toda a radiação eletromagnética é quantizada (EINSTEIN, 1905) e não somente a radiação de corpo negro, como sugeriu Planck (PLANCK, 1901), fornecendo assim uma explicação teórica para as observações experimentais de Henrich Hertz (HERTZ, 1893) sobre o efeito fotoelétrico. Em 1921 a Academia Real de Ciências da Suécia decide laurear Einstein com o prêmio Nobel pela descoberta da lei do Efeito fotoelétrico.

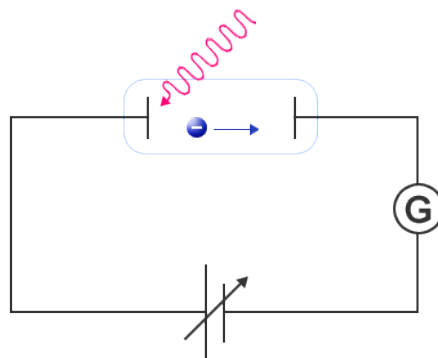


Figura 4.2: Esquema do experimental para a detecção do efeito, certos comprimentos de onda ejetam fotoelétrons que formam uma corrente no circuito. Feito por By Björn Nordberg [Domínio público] via Wikimedia Commons.

Em 1924, Louis de Broglie postula, em sua tese de doutorado, a existência das ondas de matéria, atribuindo à matéria um certo comprimento de onda, hoje conhecida como comprimento de onda de de Broglie, $\lambda = \frac{h}{p}$ sendo h a constante de Planck com valor aproximado de $6,62607004 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ e p o momento linear da partícula.

Nessa época também afirmou-se que se adequadamente preparados e submetidos ao experimento de dupla fenda, os elétrons também deveriam apresentar um padrão de interferência, estabelecendo assim a dualidade onda-partícula para a matéria. Cerca de três anos depois esse comportamento foi observado no experimento de Davisson-Germer. Em 1929 de Broglie (FEYNMAN, 2006) recebeu o prêmio Nobel de Física pela descoberta da natureza ondulatória dos elétrons.

As bases teóricas da mecânica quântica, e.g. (FREIRE, 2011), foram estabelecidas na primeira metade do século XX por grandes pesquisadores como Max Planck, Niels Bohr, Werner Heisenberg, Louis de Broglie, Arthur Compton, Albert Einstein, Erwin Schrödinger, Max Born, John von Neumann, Paul Dirac, Enrico Fermi, Wolfgang Pauli, Max von Laue, Freeman Dyson, David Hilbert, Wilhelm Wien, Satyendra Nath Bose, Arnold Sommerfeld entre outros (JAMMER, 1989). A revolução quântica trouxe não apenas uma mudança radical na descrições qualitativas, quantitativas e até mesmo pictóricas, mas também fez emergir a necessidade de um ferramental matemático nunca antes usado nas ciências naturais. Nesse novo roteiro para as partículas fundamentais, como veremos, deixa de fazer sentido falarmos em trajetórias que satisfaçam as equações diferenciais ordinárias da segunda lei de Newton. Uma nova descrição para os estados quânticos deve ser introduzida, bem como um novo detalhamento sobre sua dinâmica e sobre o processo de medição de grandezas físicas.

4.1 Postulados da teoria quântica

A separação dos princípios básicos da mecânica quântica não é universalmente padronizada, havendo diferentes abordagens que variam de autor para autor. Nesta seção apresentaremos uma das possíveis divisões para os postulados, já que os postulados da teoria quântica são fundamentais para a compreensão do funcionamento dos sistemas quânticos usados para implementar a computação quântica.

Ao estudarmos sistemas quânticos busca-se, dada a dinâmica a que uma partícula esteja submetida, especificar seu estado. Esse conhecimento pode ser codificado em um vetor de estado $|\psi\rangle$; no caso de um problema com infinitos graus de liberdade, esse vetor torna-se uma função, conhecida como "função de onda" $\psi(x, t)$ do sistema. Essa função, ou vetor de estado, é um objeto que contém toda a informação capaz de ser observada naquele sistema (SAKURAI, 1995), ou melhor, todas as grandezas físicas

capazes de serem medidas (velocidade, posição, energia, momento angular, etc.).

De forma geral trata-se de uma função complexa, sendo assim, a função de onda por si só não tem nenhum significado físico por não apresentar valores reais. Max Born percebeu que o que nos interessa é o módulo quadrático da função de onda $|\psi|^2$ (DE , TOLEDO PIZA, 2003) esse sim é um número real - interpretado como a densidade de probabilidade da função de onda. Por exemplo, se conhecemos a função de onda de uma partícula quântica, podemos saber qual a probabilidade de encontrarmos essa partícula numa determinada região do espaço. Para tanto, basta calcularmos o módulo quadrado de sua função de onda, ao fazermos a integração dessa função no espaço, calcularemos a densidade de probabilidades de se encontrar a partícula naquela região. Além disso, ela permite determinar o valor esperado de grandezas físicas como energia ou momentum, por exemplo.

4.1.1 O Primeiro Postulado e os Estados Quânticos

O estado quântico de um sistema é totalmente caracterizado por um vetor $|\psi\rangle$ que vive num espaço vetorial \mathcal{H} de Hilbert, uma generalização do espaço Euclidiano. Grosseiramente falando, trata-se de um espaço no qual se pode definir um produto escalar,

$$\langle f, g \rangle = \sum_i f_i^* g_i.$$

A generalização para espaços de dimensão infinita,

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int \phi(x)^* \psi(x) dx \quad (4.1)$$

corresponde ao espaço L^2 , das funções quadraticamente integráveis, tais que a integral da função $|\psi(x)|^2$ ao longo da linha dos reais seja limitada. Assim, essa função deve ser contínua e com derivadas contínuas, e deve ser também uma função de quadrado integrável. Entendemos

$$\mathcal{P}(x) = |\psi(x)|^2$$

como a densidade de probabilidade de encontrar a partícula num dado valor de x , de modo que $dP = \psi^*(x) \psi(x) dx$ é a probabilidade do sistema encontrar-se nos entornos da região de $x + dx$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1. \quad (4.2)$$

Uma importante consequência da descrição dos estados como vetores, de dimensão finita ou infinita, é o chamado Princípio da Superposição. Ele permite que a função de onda possa ser escrita como combinação linear de duas funções de onda quaisquer, $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ ou seja,

$$\psi(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x), \quad (4.3)$$

resultando em

$$|\psi|^2 = |c_1|^2|\psi_1|^2 + |c_2|^2|\psi_2|^2 + c_1^*c_2\psi_1^*\psi_2 + c_2^*c_1\psi_2\psi_1^*. \quad (4.4)$$

Assim, pode-se perceber que a probabilidade total, descrita por duas funções de onda apresenta termos cruzados entre $c_1\psi_1(x)$ e $c_2\psi_2(x)$, c_1 e c_2 são as amplitudes de probabilidade dos respectivos estados $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ e os termos cruzados representam a superposição, ou interferência, entre os mesmos.

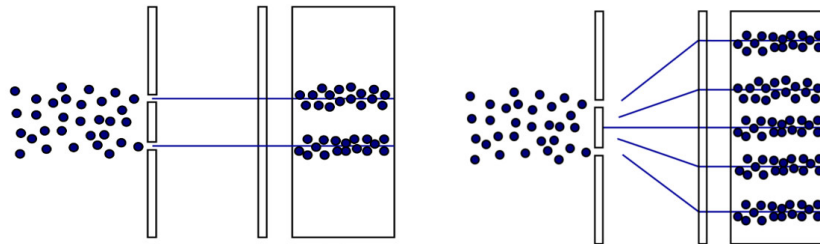


Figura 4.3: Comportamento de partículas clássicas (esquerda) e quânticas (direita), no experimento de dupla fenda. Feito por inductive load [Domínio público], editado, via Wikimedia commons.

A figura abaixo mostra os gráficos de distribuição de probabilidade $|\psi(x)|^2$ para partículas que passam por um aparato do tipo dupla fenda: à esquerda temos o gráfico referente a uma partícula clássica, como uma bola de gude; na direita um elétron atravessa o aparato. Em cor laranja temos a distribuição de probabilidade de que uma bola de gude atinja o anteparo numa dada posição, após passar pela fenda da direita, apresentando maior probabilidade de ser encontrada perto dessa fenda; em verde a densidade de probabilidade no caso em que a bola passa pela fenda da esquerda. Em azul mostramos o que acontece quando ambas as fendas são abertas, de modo que quanticamente se vê o surgimento de um processo de interferência, o caminho tomado por um elétron no aparato de dupla fenda interfere na probabilidade de onde encontraríamos os elétrons subsequentes.

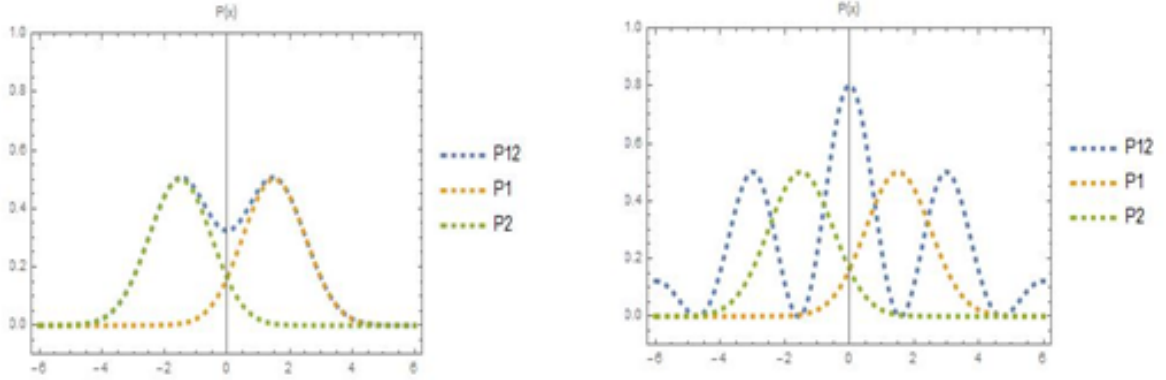


Figura 4.4: Distribuição de probabilidade no aparato de dupla fenda nos casos clássico (esquerda) e quântico (direita).

O primeiro postulado e a interferência quântica têm papéis de grande importância nos bits quânticos já que, diferentemente dos bits clássicos, os bits quânticos apresentam ao mesmo tempo os seus estados up e down. De forma simples podemos dizer que cada qubit pode carregar informação correspondente a 2^N bits clássicos. Além disso, a simples existência de dois bits quânticos presume uma correlação entre eles que afeta as probabilidades de observá-los, esse comportamento torna os bits quânticos totalmente diferentes dos bits clássicos.

4.1.2 O Segundo Postulado e os operadores quânticos

Os operadores podem ser pensados como os responsáveis por quaisquer alterações no estado de um sistema quântico. Assim, podemos considerar operadores cuja ação seja por exemplo:

- a) evoluir de um instante inicial a um instante final o arranjo de interesse,

$$\hat{U}(t, t_0) \psi(\vec{q}, t_0) = \psi(\vec{q}, t). \quad (4.5)$$

- b) transladar o conjunto por uma certa distância,

$$\hat{T}(\vec{q}, q_0) \psi(\vec{q}_0, t) = \psi(\vec{q}, t). \quad (4.6)$$

- c) girar o sistema ao longo de uma certa direção,

$$\hat{R}(\vec{\theta}) \psi(\vec{q}) = \psi(\vec{q}'). \quad (4.7)$$

De maneira simples, os operadores quânticos são objetos matemáticos que atuam sobre uma função, ou estado, transformando-a em outra função,

$$\hat{A}\psi = \psi'. \quad (4.8)$$

Pode-se ainda admitir que existam operadores responsáveis pelas medições de grandezas físicas, como posição, velocidade, momentum angular, energia, etc. A cada um desses observáveis físicos a , atribuímos um operador A que atua no espaço de Hilbert do nosso problema. Logo, a representação do operador dependerá fortemente do espaço de Hilbert que descreve o problema de interesse. Suponha, por exemplo, que estejamos interessados em sistemas com apenas dois graus de liberdade, como ocorre por exemplo quando estudamos estados de spin que só admitem duas possibilidades (apontados para cima ou para baixo), nesse caso é necessário trabalharmos apenas com um espaço vetorial de dimensão $d = 2$, de modo que os estados são descritos por vetores com apenas duas entradas. Consequentemente todas as operações sobre esse tipo de sistema físico podem ser quantificadas por meio de matrizes.

Por outro lado, no caso em que nos interessamos por estados que podem assumir um contínuo de configurações, como é o caso da distribuição espacial de um elétron sobre uma linha, é necessário trabalharmos com uma representação de dimensão infinita para os operadores. Na representação de coordenadas, para construirmos o operador quântico posição $\hat{Q} = (X, Y, Z)$ podemos simplesmente substituí-lo pela coordenada $q = (x, y, z)$ nessa mesma base de representação, e das coordenadas, o operador de momento linear das partículas do sistema é dado por

$$\hat{\vec{P}} = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (4.9)$$

As propriedades mostradas aqui para os operadores quânticos aplicam-se nas portas lógicas quânticas, isso é, as transformações aplicadas sobre os bits quânticos a fim de se construir algoritmos ou até mesmo programas capazes de simular sistemas com um grande número de variáveis, impossíveis de serem resolvidos por computadores clássicos. Em suma, as portas lógicas quânticas são operadores unitários, escritos na forma de matrizes, capazes aplicar rotações sobre os bits quânticos.

4.1.3 O Terceiro Postulado e as Medições Quânticas

Como vimos, qualquer ação sobre o sistema quântico deve ser descrita por um operador. Se essa operação não influenciar fisicamente o sistema, isto é, se não alterar o seu estado quântico, o vetor que o descreve pode, no máximo, sofrer um reescalamiento (caso contrário, o estado seria afetado, uma contradição). Nesses casos, dizemos que o sistema está em um autoestado associado a tal operador. Considere assim um operador \hat{A} que atua sobre um sistema que se encontra em um dos possíveis autoestados $\psi_n(x)$, então

$$\hat{A}\psi_n(x) = a_n\psi_n(x). \quad (4.10)$$

Matematicamente, da expressão acima podemos ver que, para esse operador, a cada autofunção $\psi_n(x)$ corresponde um autovalor a_n , que pode corresponder a um conjunto discreto ou contínuo. Se o operador atuante em $\psi_n(x)$ for linear, qualquer múltiplo da mesma, $c\psi_n(x)$, é uma autofunção do operador com o mesmo autovalor que $\psi_n(x)$, ou seja, a_n . Tais autovalores correspondem aos únicos possíveis valores que podem ser obtidos ao se realizar uma medição.

Fisicamente, sabemos que os resultados de quaisquer medições, isto é, os autovalores, devem ser reais. Uma maneira de garantir a realidade dos autovalores de um problema é impor que o operador seja Hermitiano. Um operador é chamado Hermitiano caso ele seja igual ao seu operador adjunto: $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$, um operador hermitiano deve satisfazer a seguinte relação:

$$\int_{R^n} \psi(x)^* \hat{A}\psi(x) dx = \int_{R^n} (\hat{A}\psi(x))^* \psi(x) dx. \quad (4.11)$$

Pode-se mostrar que todos os autovalores de operadores hermitianos devem ser valores reais:

$$a = \int_{R^n} \psi^* \hat{A}\psi dx = \int_{R^n} (\hat{A}\psi)^* \psi dx = \int_{R^n} (a\psi)^* \psi dx = a^*.$$

Além disso, duas autofunções de um operador Hermitiano \hat{A} que correspondam a autovalores distintos são ortogonais. A exemplo, sejam $\hat{A}\psi_i = a_i\psi_i$ e $\hat{A}\psi_j = a_j\psi_j$ tal que $a_i \neq a_j$. Fazendo a projeção entre as autofunções temos:

$$\int_{R^n} \psi_i^* \hat{A}\psi_j dq = a_j \delta_{ij} \equiv \int_{R^n} (\hat{A}\psi_j)^* \psi_i dq = a_i^* \delta_{ij} = a_i \delta_{ij}. \quad (4.12)$$

De acordo com a expressão escrita acima, percebe-se que: $(a_i - a_j) \delta_{ij} = 0$, portanto $\delta_{ij} = \int_{R^n} \psi_i^* \psi_j dq = 0$, chamamos δ_{ij} de Delta de Kronecker e suas propriedades são:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (4.13)$$

Se a autofunção $\psi_n(x)$ apresentar mais de um autovetor para o mesmo autovalor de um operador, dizemos que o estado é degenerado, a multiplicidade de autovetores para o mesmo autovalor é chamado de grau de degenerescência. Além disso, tomando-se uma autofunção arbitrária ψ_n do operador \hat{A} tal que $\hat{A}\psi_n = a_n\psi_n$, dizemos que o conjunto de todas as autofunções independentes formam um conjunto completo de forma que a função de onda de um estado qualquer do sistema possa ser sempre descrito como uma combinação linear das autofunções independentes:

$$\psi(x) = \sum_n \psi_n(x) C_n. \quad (4.14)$$

Precisamente, dizemos que um operador pode apresentar um espectro contínuo de autovalores e não somente valores discretos tal que:

$$\psi(x) = \sum_n \psi_n(x) C_n + \int_a \psi(a) C(a) da. \quad (4.15)$$

O conjunto de todas as autofunções forma um espaço vetorial chamado de Espaço de Hilbert e as autofunções constituem a base deste espaço (PRUGOVECKI, 1982).

Os sistemas escolhidos para a computação quânticos, são sistemas de dois níveis, isso é, sistemas quânticos cuja base pode ser descrita com apenas dois autovetores ortonormais, tomados como os vetores up e down. Podendo ser o estado de polarização de fótons, ou ainda a orientação do spin eletrônico na presença de um campo magnético externo, tendo esse último se mostrado um dos mais promissores candidatos à bit quântico, devido à sua relativa facilidade de operação face à outros sistemas quânticos.

4.1.4 O Quarto Postulado e o Colapso Quântico

O ato da medição de um observável associado a um operador \hat{A} em um estado misto $\psi = \sum_n \psi_n C_n$ transforma o estado do sistema no autoestado ψ_n e retorna como resultado o autovalor a_n com probabilidade proporcional a $|c_n|^2$. Consequentemente o valor médio de um conjunto de medidas do operador \hat{A} num mesmo estado é

dado por:

$$\langle A \rangle = \frac{\int_{R^n} \psi^* \hat{A} \psi dx}{\int_{R^n} \psi^* \psi dx}, \quad (4.16)$$

para uma ψ não normalizada. Esse postulado traz uma diferença radical entre a mecânica clássica e a mecânica quântica: a informação contida na função de onda é perdida após o ato da medida, conseqüentemente após uma medida realizada não é possível determinar todas as observáveis do estado original.

Ele também é intimamente relacionado ao princípio de incerteza de Heisenberg, que afirma que não é possível saber com certeza o valor de uma grandeza física sem perder completamente a informação sobre outra grandeza, por exemplo: ao aumentar-se a precisão sobre a medida da posição de uma partícula, perde-se precisão em relação ao seu momento linear, em outras palavras, a precisão na posição é inversamente proporcional à precisão no momento da partícula, de forma que: $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, como consequência, ao termos total certeza da posição de uma partícula, perdemos totalmente a informação sobre o seu momento linear.

Uma das consequências fundamentais do colapso da função de onda para a computação quântica é o fato da informação não poder ser replicada livremente tal como a informação clássica. A leitura de um arquivo gravado por meio de estados quânticos 0 e 1, up e down, respectivamente, destruiria o seu estado inicial, devido ao colapso da função de onda. Isso muda totalmente a forma como a informação quântica pode ser utilizada, uma vez que é possível saber se alguém mais tem acesso à alguma informação que é transmitida antes do receptor lê-la. Esse comportamento torna a informação quântica muito mais segura do que a informação clássica.

4.1.5 O Quinto Postulado e a Evolução Quântica

A função de onda do sistema varia com o tempo de acordo com a equação de onda de Schrödinger:

$$\hat{H} \psi(q, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(q, t),$$

onde \hat{H} é operador de Hamilton e representa a soma das energias cinética e potencial do sistema: $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$, sendo $\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$, \hat{p} o operador momento linear da partícula e \hat{V} o operador de energia potencial.

O operador de evolução temporal $U(t, t_0)$ na mecânica quântica fornece o autovalor de determinado estado, para um instante posterior $t + \Delta t$, esse operador é

definido tal que:

$$\psi(t) = \hat{U}(t, t_0)\psi(t_0). \quad (4.17)$$

Ele é Hermitiano e unitário,

$$\hat{U}(t, t_0)\hat{U}^\dagger(t, t_0) = I. \quad (4.18)$$

podendo nos fornecer a função de onda evoluída para um instante de tempo posterior sem afetar sua norma.

A aplicação do operador de evolução temporal segue a seguinte regra:

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t, t_1)\hat{U}(t_1, t_0). \quad (4.19)$$

Ou seja, a função de onda é evoluída de um instante de tempo t_0 , passando por um intervalo de tempo na qual é indeterminada t_1 até evoluir para o instante de tempo t .

Pode-se escrever a evolução de um sistema quântico a partir do operador de evolução temporal, como resultado temos a equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t)\psi(t_0 = 0) = \hat{H}\hat{U}(t)\psi(t_0 = 0). \quad (4.20)$$

Na equação acima, H é o operador Hamiltoniano do sistema a ser temporalmente evoluído, ou seja, a soma das parcelas potencial e cinética da energia total. Podemos ainda escrever:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t) = \hat{H}\hat{U}(t). \quad (4.21)$$

Dessa forma, a condição estabelecida para o operador $\hat{U}(t)$ só é satisfeita se

$$\hat{U}(t) = e^{\frac{-iHt}{\hbar}}, \quad (4.22)$$

que é a forma exponencial do operador evolução temporal. Logo, podemos relacionar dois estados quânticos em instantes diferentes por meio de

$$\psi(t) = e^{\frac{-i\hbar(t-t_0)}{\hbar}} \psi(t_0). \quad (4.23)$$

4.1.6 O Sexto Postulado e a Simetrização Quântica

O postulado de simetrização diz que, num sistema formada por muitas partículas indistinguíveis, apenas algumas componentes da função de onda podem descrever totalmente o sistema físico, essas componentes dependem da natureza das partículas

constituintes do sistema podendo ser totalmente simétricos ou assimétricos com a permutação das partículas, quando os vetores de estado das partículas são simétricos elas são chamadas de bósons, quando assimétricos são chamadas de férmions,

$$\psi(q_1, \dots, q_i \dots q_j, \dots, q_N, t) = \pm \psi(q_1, \dots, q_i \dots q_j, \dots, q_N, t).$$

Para continuarmos, é conveniente introduzirmos os aspectos básicos da notação de Dirac, essa notação é largamente utilizada na mecânica quântica, bem como na computação quântica.

4.1.7 Notação de Dirac

A notação de Dirac (DIRAC, 1981) é um simbolismo utilizado para denotar os estados e as operações utilizadas pela mecânica quântica, essa notação utiliza noções como o bra e o ket, definidos pelo símbolo $\langle |$ e $| \rangle$, respectivamente. O ket $|a\rangle$, por exemplo é um vetor do tipo coluna, enquanto o bra $\langle a|$ é um vetor do tipo linha, dessa forma o ket a pode ser denotado como:

$$|a\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

E por fim o bra a :

$$\langle a| = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdot \quad \cdot]. \quad (4.25)$$

O produto interno entre o bra a e o ket b , ou seja, a projeção de a em b , resulta em um número real que pode ser escrito como $\langle a|b\rangle$. De forma análoga, quando um operador \hat{A} atuar num estado $|a\rangle$ teremos:

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle. \quad (4.26)$$

A quantidade a pode ser entendida como um dos possíveis autovalores do operador \hat{A} . Além disso, o número de autovalores do operador A depende do número de autoestados correspondentes à esse operador, entretanto, é possível que um operador de um único autoestado apresente múltiplos autovalores. A exemplo do spin, como será visto mais á frente, temos dois autoestados possíveis, up e down, e um autovalor

associado a cada um desses autoestados, de forma que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

ou, de maneira compacta,

$$\hat{S}_z |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle. \quad (4.29)$$

Portanto, entendemos que os autovalores são os possíveis valores associados a alguma grandeza física, enquanto seus autoestados são o conjunto de todas as bases escolhidas para representá-lo (como para um vetor de posição, que pode ser descrito em termos das bases x , y e z). A partir de um bra $\langle\alpha|$ podemos escrever o ket $|\alpha\rangle$, já que um é o transposto conjugado do outro, tal que:

$$A |\alpha\rangle \longleftrightarrow \langle\alpha| A^*, \quad (4.30)$$

onde A^* é o complexo conjugado de A , $\langle\alpha|$ e $|\alpha\rangle$ são, respectivamente, os vetores linha e coluna:

$$\langle\alpha| = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3] \quad (4.31)$$

e

$$|\alpha\rangle = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

No espaço em que se operam os kets e bras também é definido o produto externo. Seja o produto externo entre $|\alpha\rangle$ e $\langle\beta|$ tal que:

$$|\alpha\rangle\langle\beta| = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3]. \quad (4.33)$$

Podemos ainda calcular os elementos da matriz de um operador. Digamos que um operador \hat{X} apresente os autoestados $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$, os elementos desse operador, podem ser calculados a partir da operação de "sanduíche":

$$\langle\alpha|\hat{X}|\beta\rangle. \quad (4.34)$$

A operação mostrada acima nos fornece os elementos de matriz do operador \hat{X} , para uma base de dois autovetores, $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$.

É através do formalismo de Dirac que descrevemos os estados up e down dos bits quânticos, esses são os estados fundamentais para a formulação da computação. Na subseção a seguir, discutiremos qual é a grandeza física usada para definir esses estados e quais são as suas propriedades.

4.2 Momento Angular

Na presente seção serão apresentados o o momento angular orbital dos elétrons, bem como experimento de Stern-Gerlach e a introdução do conceito do spin. Essas propriedades físicas são de grande importância para o objetivo desse trabalho, uma vez que o spin é um forte candidato à bit quântico, devido à algumas de suas propriedades.

4.2.1 Momento Angular Orbital

O momento angular é uma grandeza vetorial definida pelo produto vetorial entre o vetor posição \vec{r} e o vetor quantidade de movimento \vec{p} . É uma quantidade que se conserva, isso é, à qual se aplica um princípio de conservação: se o torque resultante sobre um sistema é nulo, o módulo do seu momento angular é mantido constante. A definição de momento angular pela mecânica clássica é dada por:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (4.35)$$

Na mecânica quântica, por sua vez, ao se aplicar as condições de quantização de momento linear (que serão apresentadas mais adiante, no capítulo 5) e posição define-se o momento angular quântico como um operador hermitiano que obedece à seguinte condição:

$$\hat{L}_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{X}_j \hat{P}_k. \quad (4.36)$$

Podemos detalhar a definição de momento angular, no sistema de coordenadas cartesiano temos que:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad (4.37)$$

onde $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ e $\vec{p} = p_x\hat{x} + p_y\hat{y} + p_z\hat{z}$.

O produto vetorial desses dois vetores é dado pelo determinante da matriz abaixo:

$$\begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Dessa forma, temos que:

$$L_x = yp_z - zp_y \quad L_y = zp_x - xp_z \quad L_z = xp_y - yp_x. \quad (4.39)$$

Aplicando a regra de quantização aos operadores \vec{x} e \vec{p} , podemos escrever os operadores de momento angular quânticos como:

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (4.40)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (4.41)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (4.42)$$

Uma importante característica da Mecânica Quântica reside no fato de que não é possível se medir simultaneamente duas componentes espaciais do momento angular ou do spin de uma partícula com total precisão e isso é decorrente do fato dessas grandezas não comutarem entre si. A seguir descreveremos a operação realizada para se determinar se duas grandezas são comutativas: os comutadores.

Comutadores

Os comutadores são usados para testar a propriedade comutativa de dois operadores ou matrizes, caso o comutador de dois operadores for zero, dizemos que eles comutam entre si. A definição de comutador dos operadores \hat{A} e \hat{B} é dada a seguir:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (4.43)$$

O uso de comutadores na mecânica quântica traz importantes resultados, como o próprio princípio de Incerteza, decorrente da não-comutação dos operadores de posição e momento linear:

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = \hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} \quad (4.44)$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] f(x) = \hat{x}\hat{p}_x f(x) - \hat{p}_x\hat{x} f(x) \quad (4.45)$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] f(x) = -i\hbar x \frac{\partial f(x)}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial(x \cdot f(x))}{\partial x} \quad (4.46)$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] f(x) = i\hbar f(x). \quad (4.47)$$

Logo, temos como decorrência, a relação fundamental de comutação entre os operadores de posição e momento, que pode ser associado a um princípio de incerteza (GRIFFITHS, 2005):

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar. \quad (4.48)$$

Em termos simples, esse princípio nos indica que a observação simultânea de grandezas como posição e momento impõe uma limitação na precisão na medida, de forma que, quanto maior for a precisão obtida na posição de uma partícula, maior será a incerteza em seu momento linear, e vice-versa. Como os momentos angulares são grandezas relacionadas a rotações, é natural pensar que eles não comutem entre si, portanto, de forma similar, podemos aplicar os comutadores aos operadores de momento angular \hat{L}_x , \hat{L}_y e \hat{L}_z , de forma que:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = \hat{L}_x \hat{L}_y - \hat{L}_y \hat{L}_x = i\hbar \hat{L}_z \quad (4.49)$$

$$[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = \hat{L}_y \hat{L}_z - \hat{L}_z \hat{L}_y = i\hbar \hat{L}_x \quad (4.50)$$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = \hat{L}_z \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_z = i\hbar \hat{L}_y. \quad (4.51)$$

Portanto, da permutação entre as comutações das componentes x , y e z do momento angular quântico temos que:

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{L}_k. \quad (4.52)$$

Todo momento angular quântico deve satisfazer as seguintes condições:

$$L^2 = (L_x)^2 + (L_y)^2 + (L_z)^2, \quad (4.53)$$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = 0, \quad (4.54)$$

$$\left[\hat{L}^2, \hat{L}_y \right] = 0, \quad (4.55)$$

$$\left[\hat{L}^2, \hat{L}_z \right] = 0. \quad (4.56)$$

Os resultados apresentados acima indicam que o operador de momento angular total \hat{L}^2 comuta com as suas componentes \hat{L}_x , \hat{L}_y e \hat{L}_z , isso é, é possível medi-lo simultaneamente a uma de suas componentes espaciais. O mesmo não acontece entre as componentes do momento angular, elas não comutam entre si, ou seja, ao medirmos a componente z do momento angular, perdemos a informação das componentes x e y . Definidas as propriedades comutativas do momento angular, na seção a seguir discutiremos o quê são, e como são definidos, os autovalores do operador de momento angular.

Autovalores do momento angular

As propriedades mostradas acima indicam que é possível medir simultaneamente, sem limitações na precisão da medida, o módulo do momento angular total \hat{L}^2 e suas componentes \hat{L}_x , \hat{L}_y e \hat{L}_z . Além disso, quando aplicados sobre o estado do sistema quântico, ϕ , os operadores de momento angular total L^2 e L_z fornecem um valor numérico, chamado de autovalor dos operadores \hat{L}^2 , \hat{L}_x , \hat{L}_y e \hat{L}_z . Dito isso, temos que o operador L^2 aplicado sobre o estado ϕ fornece o autovalor $l(l+1)\hbar^2$, que é o autovalor do operador momento angular total, enquanto a aplicação de L_z em ϕ fornece o autovalor da projeção do momento angular na direção z , dado por $m_l\hbar$:

$$L^2\phi = \lambda\phi = l(l+1)\hbar^2\phi, \quad (4.57)$$

$$L_z\phi = \lambda\phi = m_l\hbar\phi. \quad (4.58)$$

Os números l e m_l são chamados de número quântico azimutal e número quântico magnético e estão relacionados, respectivamente, ao subnível de energia da partícula, dado pelo módulo de seu momento angular, e ao valor de suas componentes espaciais da momento angular, como múltiplos, inteiros ou semi-inteiros de \hbar . O conhecimento desses números, bem como ao número m_s relacionado ao spin eletrônico, nos permite conhecer o nível de energia do elétron, o subnível de energia e até mesmo a orientação espacial da nuvem eletrônica.

Momento angular em coordenadas esféricas

A formulação geométrica mais genérica empregada à descrição dos bits quânticos é a esfera de Bloch, cuja definição será mostrada na seção 5.1. Devido à grande simetria de alguns sistemas quânticos como o átomo de Hidrogênio e até mesmo o próprio spin, por exemplo, é conveniente escrever o momento angular em coordenadas esféricas, para tanto, precisamos nos lembrar que:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta \quad (4.59)$$

Portanto, a representação do operador momento angular quântico, para as três direções do espaço, em coordenadas esféricas é dada por:

$$\hat{L}_x = i\hbar \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad (4.60)$$

$$\hat{L}_y = i\hbar \left(-\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad (4.61)$$

$$\hat{L}_z = i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (4.62)$$

A seção seguinte trata de um tipo particular de momento angular, intrínseco à matéria. O spin confere aos prótons, elétrons e nêutrons, algumas propriedades que são de grande interesse para a computação quântica.

4.2.2 O Experimento de Stern-Gerlach

A descoberta do Spin se deu através da interpretação do experimento de Stern-Gerlach, realizado no ano de 1922 pelos físicos alemães Otto Stern e Walther Gerlach: o que se observou era a existência de um momento magnético intrínseco dos elétrons e quantizado.

O experimento era relativamente simples, observe a figura 4.5: um forno muito quente emitia um feixe de átomos de prata que era direcionado a um campo magnético unidirecional. Como os átomos eram emitidos de forma aleatória, cada um deles teria sua direção de momento magnético (um vetor que aponte no sentido norte-sul do seu campo magnético). Esperava-se observar esses átomos formarem uma linha contínua numa placa posicionada logo após a passagem da região de campo magnético, no entanto uma divisão do feixe de átomos foi observada: cerca de metade dos átomos

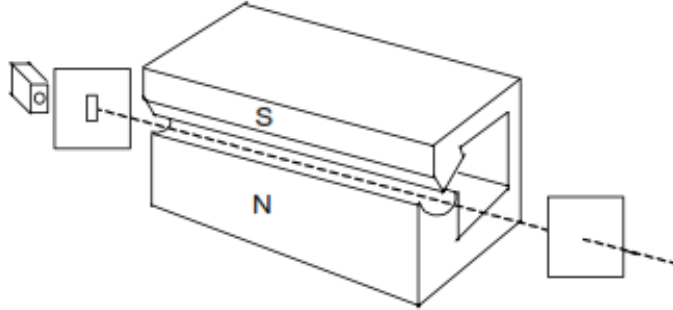


Figura 4.5: Esquema do experimento de Stern-Gerlach. Feito por André Luis Bonfim Bathista e Silva [Domínio público], via Wikimedia Commons

se dirigiam pra cima e metade para baixo, atingindo apenas dois pontos do anteparo. Esse comportamento indicava que nos átomos, aquela observável apresenta um espectro discreto de estados.

A explicação dos resultados experimentais tardou, no entanto, demonstrou que existia uma outra propriedade da matéria: o spin - um "momento angular" das partículas subatômicas que tinha componentes "para cima" e "para baixo" nas três direções do espaço x , y e z , conhecidos como spin up e down.

A figura abaixo traz um esquema dos magnetos utilizados, de forma que o campo magnético $\vec{B} = B(z)\hat{z}$ tem módulo constante. Como os átomos são defletidos devido à ação da força magnética, podemos escrever essa força em termos da energia potencial resultante da interação do momento magnético do spin, com o campo magnético externo, dessa forma temos:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad (4.63)$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = \vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}\vec{B}, \quad (4.64)$$

$$F_z \approx \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (4.65)$$

onde

$$\mu_z = -\mu_b \frac{L_z}{\hbar} \quad \text{com} \quad \mu_b = \frac{e\hbar}{2m}, \quad (4.66)$$

de modo que a força magnética exercida sobre os átomos é dada por

$$F_z = \frac{\mu_b L_z}{\hbar} \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (4.67)$$

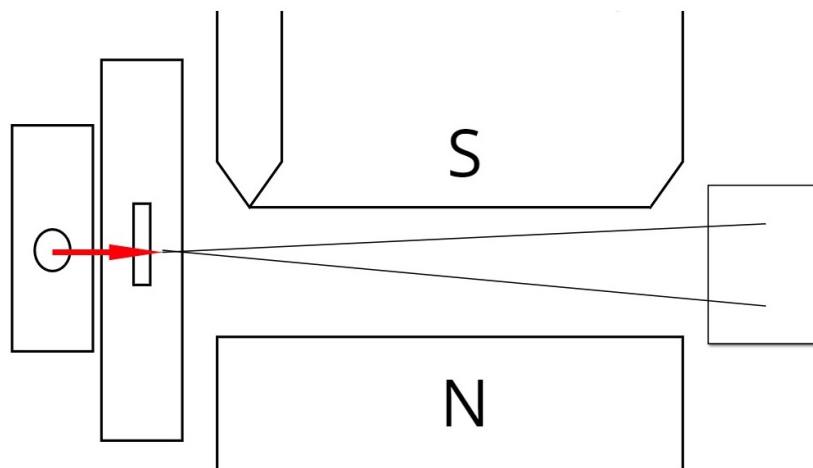


Figura 4.6: Esquema ampliado do forno de Stern-Gerlach

Na equação acima, L_z é o momento angular orbital dos átomos, no caso do experimento de Stern-Gerlach, Prata. A escolha da Prata se deu devido à sua distribuição eletrônica particular, já que seu momento angular de spin não é nulo. A distribuição eletrônica desse elemento, que quando neutro conta com 47 prótons, 47 elétrons e 62 nêutrons é apresentada abaixo:

$$\begin{array}{l}
 1s^2 \\
 2s^2 \quad 2p^6 \\
 3s^2 \quad 3p^6 \quad 3d^{10}. \\
 4s^2 \quad 4p^6 \quad 4d^{10} \\
 5s^1
 \end{array} \tag{4.68}$$

A última camada eletrônica desse elemento tem orbitais com um único elétron desemparelhado, e momento angular orbital nulo, dessa forma, esperava-se que os átomos de prata fossem distribuídos continuamente ao longo do anteparo que havia sido colocado logo após a passagem dos átomos pelos ímãs, entretanto, observou-se uma separação clara entre os átomos, indicando que o seu momento angular total não era nulo e também que era espacialmente quantizado. A explicação desse comportamento foi atribuída ao momento angular intrínseco dos elétrons, o spin e o momento magnético total desses átomos passou a ser escrito como:

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_b}{\hbar} (\vec{L} + g_e \vec{S}). \tag{4.69}$$

Chamamos por g_e o fator de giro magnético, se trata de um calibre de

correção para podermos utilizar o referencial do elétron.

4.2.3 Spin

O spin é uma propriedade intrínseca da matéria assim como a massa ou carga, a palavra origina-se do inglês e significa rotação. Em termos simples, o spin é uma espécie de momento angular (a quantidade de movimento na rotação) inerente da matéria, uma propriedade das partículas subatômicas. É uma grandeza vetorial, tem módulo, direção e sentido definidos. Seu módulo depende do tipo de partícula: os férmions (elétrons, por exemplo) apresentam spin semi-inteiro enquanto os bósons apresentam spin inteiro (0, 1, 2). O módulo resultante do spin pode ser calculado através de suas componentes espaciais, tendo como base a relação

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2. \quad (4.70)$$

De maneira similar aos momentos angulares, podemos dizer que o módulo do operador de spin, ou que o autovalor de \hat{S} é dado por

$$|S| = \hbar\sqrt{s(s+1)}. \quad (4.71)$$

Na igualdade apresentada acima, s é um dos números quânticos, chamado número quântico de spin. Além disso, apesar do nome sugerir uma rotação o spin não é um movimento rotacional, é um fenômeno quântico que não tem qualquer analogia com a Física clássica.

Representações 2x2 dos operadores de Spin

Podemos representar o operador de spin através de matrizes 2×2 através da relação:

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}. \quad (4.72)$$

Na relação acima, \hbar é a constante de Planck dividida por 2π ($\frac{h}{2\pi}$) e σ é conhecida como Matriz de Pauli, e que pode ser dividida em suas componentes x , y e z , σ_x , σ_y , e σ_z :

$$\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.73)$$

$$\hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.74)$$

$$\hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.75)$$

Dessa forma, as componentes dos operadores de spin nas direções x, y e z são dados por:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_x, \quad (4.76)$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_y, \quad (4.77)$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_z. \quad (4.78)$$

É importante perceber que, independente da direção escolhida o módulo do spin é $\frac{\hbar}{2}$ já que as matrizes de Pauli tem módulo 1 (seu determinante é unitário). A figura abaixo mostra as três componentes do spin $\frac{1}{2}$, S_x , S_y e S_z bem como o seu autovalor para as direções up e down da sua componente z:

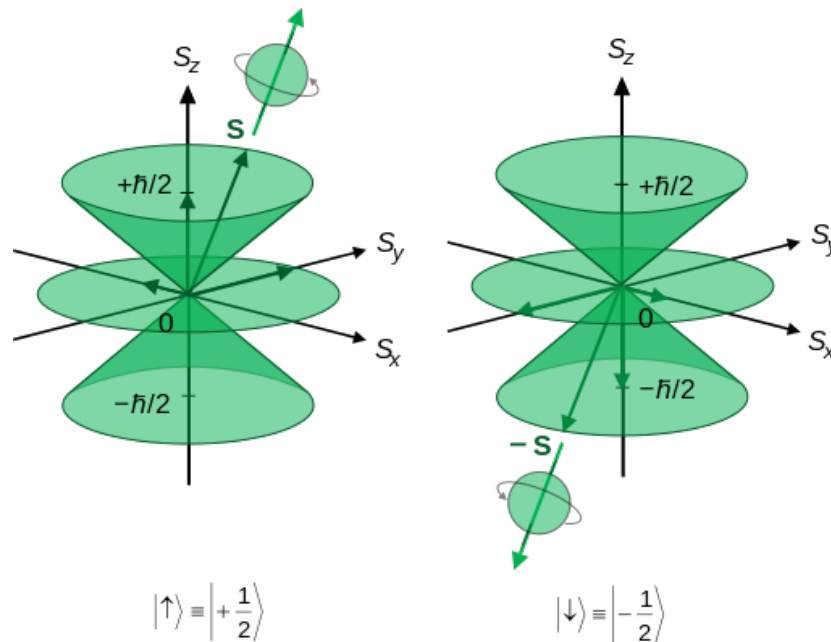


Figura 4.7: Componentes S_x , S_y e S_z do spin. Feito por Maschen [Domínio público], via Wikimedia commons.

Sendo assim, podemos escrever o operador \hat{S}^2 através da relação:

$$\hat{S}^2 = \frac{\hbar^2}{4} (\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2 + \hat{\sigma}_z^2), \quad (4.79)$$

$$\hat{S}^2 = 3 \frac{\hbar^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.80)$$

Operadores de Spin: Levantamento e Abaixamento

Como dito anteriormente, na seção 4.2.3, os operadores de Spin $\frac{1}{2}$ podem ser escritos utilizando matrizes 2×2 . Aqui, serão detalhados os operadores S_x , S_y , S_z , S_+ , S_- , S^2 . Podemos representar o operador de spin nas três direções do espaço através da relação:

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}. \quad (4.81)$$

Outro operador interessante e bastante útil na mecânica quântica é o operador degrau, também conhecido como operador de abaixamento ou levantamento. Ele permite subir ou descer o nível de energia, é escrito como (S_+ e S_-). Esses operadores somam ou subtraem o valor \hbar ao estado em que eles estejam atuando e são dados por:

$$S_+ = S_x + iS_y, \quad (4.82)$$

$$S_- = S_x - iS_y, \quad (4.83)$$

ou

$$S_{\pm} = S_x \pm iS_y. \quad (4.84)$$

Se escrevermos S_x e S_y em suas formas matriciais podemos encontrar a forma matricial (2×2) dos operadores degrau S_+ e S_- :

$$S_+ = \hbar \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.85)$$

$$S_- = \hbar \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.86)$$

De forma similar, é possível definir os operadores degrau em termos das matrizes de Pauli σ_+ e σ_- da seguinte forma:

$$\sigma_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.87)$$

$$\sigma_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.88)$$

A seção a seguir explica como se dá a medida dos estados up e down para uma partícula de spin semi-inteiro.

Estados up e down

O estado quântico de partículas de spin $\frac{1}{2}$ pode ser descrito pelos estados up e down. Esses estados estão relacionados à mudança no valor da energia potencial que o spin sofre, quando acoplado a um campo magnético externo. Caso o spin esteja alinhado com o campo magnético (na mesma direção e sentido) ele apresentará a menor energia potencial possível, caso ele esteja na mesma direção, mas com sentido oposto ao do campo magnético ele apresentará o maior valor de energia potencial. Quando um dipolo magnético muda sua orientação em relação a um campo magnético, esse campo realiza um trabalho sobre ele. O trabalho realizado pelo campo magnético nessa mudança de orientação é chamada de energia potencial do dipolo magnético e pode ser definida através do produto escalar abaixo:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (4.89)$$

A energia potencial associada à interação do campo magnético com um dipolo magnético é um produtor escalar no qual μ é o vetor momento de dipolo magnético e B é o campo magnético externo. No caso em que μ e B apresentem a mesma direção, a energia potencial será mínima enquanto no caso antiparalelo a energia potencial terá seu valor máximo. Como a diferença de energia de um estado para o outro é quantizada, ou seja, não existem valores intermediários, é possível descrevê-lo como um sistema de dois níveis, dessa forma, os estados up e down, são os autoestados da função de onda do spin, e podem ser representados por vetores do tipo coluna. Utilizando a notação de Dirac, os estados up e down podem representados por $|0\rangle$ e $|1\rangle$ por meio vetores do tipo coluna:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.90)$$

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.91)$$

Durante o experimento de Stern-Gerlach, a porção de átomos de prata lançada em direção ao campo magnético, cujos momentos magnéticos fossem paralelos a direção do campo magnético externo, isso é, que apresentassem valores de $m = \frac{\hbar}{2}$ são associados ao nível de energia mais baixo, e relacionados ao estado down, de forma similar, os átomos de prata, cujo momento angular fosse antiparalelo ($m = -\frac{\hbar}{2}$) ao campo magnético externo, associa-se o nível de energia potencial mais alto, juntamente

ao estado up. O momento magnético $\frac{1}{2}$, dos elétrons, é explicitado abaixo:

$$M_s = \frac{2\mu_b}{\hbar} S. \quad (4.92)$$

Na equação acima, μ_b é conhecido como magnéton de Bohr (O'HANDLEY, 2000), dado por $\frac{q\hbar}{2m_e}$, na qual m_e é a massa do elétron. A figura abaixo mostra o desdobramento dos níveis de energia do spin na presença de um campo magnético externo \vec{B}_0 :

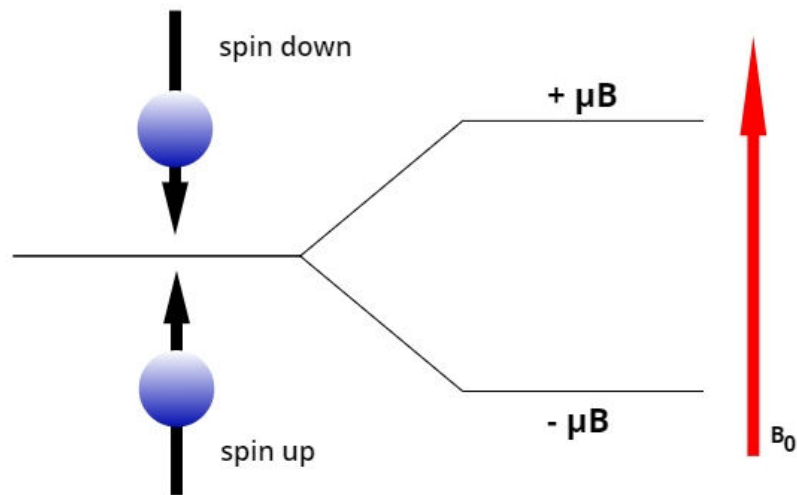


Figura 4.8: Estados up e down do spin na presença de um campo magnético externo.

Atuação de σ_+ e σ_- nos estados up e down

Vamos analisar qual é o efeito dos operadores operadores σ_+ e σ_- (levantamento e abaixamento, escrito em termos das matrizes de Pauli) nos estados up e down a partir das definições apresentadas acima. Primeiramente, atuaremos o operador σ_+ no estado down ($|1\rangle$), em seguida, atuaremos o operador σ_- no mesmo estado:

$$\sigma_+|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle, \quad (4.93)$$

$$\sigma_-|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \quad (4.94)$$

Com os resultados acima é possível entender qual é o comportamento dos operadores σ_+ e σ_- , eles aumentam ou diminuem o estado de up para down, ou de down para up, respectivamente, caso o operador σ_- seja aplicado em um estado down,

o resultado será 0, uma vez que não é possível descer para um nível de energia menor que estado down. De forma similar temos

$$\sigma_+|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 + 1.0 \\ 0.1 + 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad (4.95)$$

$$\sigma_-|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 + 0.0 \\ 1.1 + 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle, \quad (4.96)$$

indicando que não é possível atingirmos estados de energia superiores ao estado up, para sistemas de dois níveis quânticos.

A operação de medição dos estados

Há uma probabilidade associada à medição dos estados do spin. Essa probabilidade varia com o tempo e depende do estado inicial. Digamos que o estado dos spins de um átomo pode ser definido por $|\psi\rangle$ através da superposição dos estados up e down, da seguinte forma:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle). \quad (4.97)$$

O estado apresentado acima encontra-se normalizado, isso é, seu módulo é igual a 1, indicando que a probabilidade de medirmos os estados up e down, quando somadas, não ultrapassem 100 por cento %. Além disso, o fator de normalização $\frac{1}{\sqrt{2}}$ indica que os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são igualmente prováveis de serem observados, com 50 % de chance cada, já que $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Tomemos um outro exemplo para o estado de uma partícula de spin semi-inteiro, cujas amplitudes de probabilidade são de $3b$ para o estado $|0\rangle$ e b para o estado $|1\rangle$:

$$|\psi\rangle = \frac{3b|0\rangle + b|1\rangle}{\sqrt{10b^2}}. \quad (4.98)$$

O estado representado acima já se encontra normalizado pela constante de normalização $\sqrt{10b^2}$, uma vez que $(3b)^2 + b^2 = c^2$. A realização de uma medida do estado up ($|0\rangle$) de spin nesse sistema é representada pela projeção de $|0\rangle$ na função de onda ψ , resultando em $\langle 0|\psi\rangle$:

$$\langle 0|\psi\rangle = (1\ 0) \frac{3b|0\rangle + b|1\rangle}{\sqrt{10b^2}}, \quad (4.99)$$

$$\langle 0|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10b^2}} (1\ 0) \left[3b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \quad (4.100)$$

$$|\psi_0\rangle = \langle 0|\psi\rangle = \frac{3b}{\sqrt{10b^2}}. \quad (4.101)$$

O resultado acima nos mostra quanto do estado $|\psi\rangle$ se encontra na direção $|0\rangle$, para obtermos a probabilidade de obter-se esse estado ao fazermos uma medida tomamos o seu módulo quadrado, dado por:

$$P = |\langle\psi_0|\psi_0\rangle|^2 = \left| \frac{3b}{\sqrt{10b^2}} \right|^2, \quad (4.102)$$

$$P = \frac{9b^2}{10b^2}, \quad (4.103)$$

$$P = \frac{9}{10} = 0.9 = 90\%. \quad (4.104)$$

O resultado encontrado acima indica que a chance medirmos o momento angular dessa partícula e encontrarmos ele no estado $|0\rangle$ é de 90%.

Operador de energia de um spin na presença de campo magnético

Vamos supor um campo magnético externo, constante, de módulo B_0 , na direção z do espaço. A energia potencial de um spin, quando na presença desse campo é dada por:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0, \quad (4.105)$$

onde, tomamos B_0 como o campo magnético orientado na direção \hat{k} de forma que $\vec{B}_0 = B_0\hat{k}$, na qual $\vec{\mu}$ é o momento magnético do spin, tal que:

$$U = -\frac{2\mu_b B_0 L_z}{\hbar}. \quad (4.106)$$

Podemos adotar uma notação mais compacta, denotando assim $\omega_0 = \frac{2\mu_b B_0}{\hbar}$, de forma que a energia potencial do spin e o seu Hamiltoniano sejam escritos respectivamente como

$$\hat{U} = \omega_0 S_z, \quad (4.107)$$

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U} = \omega_0 S_z, \quad (4.108)$$

onde \hat{T} é o operador de energia cinética. Na igualdade apresentada acima, apresentamos os dois autovalores E do Hamiltoniano spin-campo magnético, para os estados up e down, respectivamente, que podem ser escritos como:

$$E_+|+\rangle = +\frac{\hbar\omega_0}{2}|+\rangle \quad (4.109)$$

$$E_-|-\rangle = -\frac{\hbar\omega_0}{2}|-\rangle \quad (4.110)$$

Existem, portanto dois níveis de energia associados às partículas com spin $1/2$ quando na presença de um campo magnético externo: $E_+ = +\frac{\hbar\omega_0}{2}$ e $E_- = -\frac{\hbar\omega_0}{2}$. No instante de tempo inicial $t_0 = 0$. Utilizando o sistema de coordenadas apropriado, que será discutido futuramente na seção que trata sobre a esfera de Bloch, a função de onda de uma partícula de spin $1/2$ é dado por:

$$|\psi(0)\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-\frac{i\phi}{2}}|+\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\phi}{2}}|-\rangle. \quad (4.111)$$

Aplicando o operador de evolução temporal temos que:

$$|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-\frac{i\phi}{2}}e^{-\frac{iE_+t}{\hbar}}|+\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\phi}{2}}e^{-\frac{iE_-t}{\hbar}}|-\rangle. \quad (4.112)$$

Denotando $E_{\pm} = \pm\frac{\hbar\omega_0}{2}$ temos que:

$$|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i(\phi+\omega_0 t)}{2}}|+\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i(\phi-\omega_0 t)}{2}}|-\rangle. \quad (4.113)$$

Devido ao ângulo $\phi(t) = \phi + \omega_0 t$ conclui-se que quando um spin se encontra na presença de um campo magnético, seu ângulo θ em relação ao eixo z se mantém fixo e a mesma gira com frequência angular ω_0 em relação a ele, dando origem ao movimento de precessão, também chamado de precessão de Larmor (GRIFFITHS, 2005). A figura abaixo apresenta os estados up e down para uma partícula com spin $\frac{1}{2}$ quando em movimento de precessão devido a um campo magnético externo B :

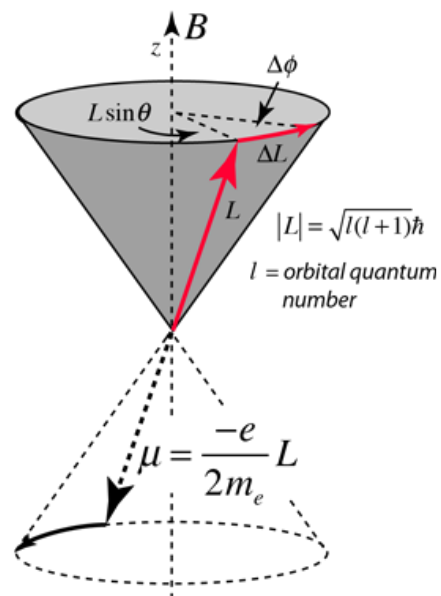


Figura 4.9: Precessão do spin. Retirado de <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/magnetic/larmor.html>

Capítulo 5

Computação quântica

Os quantum bits, ou simplesmente qubits, assim chamados em referência a uma antiga unidade de medida utilizada pelos egípcios são as unidades básicas da informação clássica. Assim como na computação clássica, as medidas de estado dos bits quânticos são expressas de forma binária, com os algarismos 0 e 1. No entanto, as semelhanças param por aí, os bits quânticos são vetores e podem apresentar componentes nas direções 0 e 1. Por meio da aplicação de portas lógicas nesses estados diversas operações podem ser realizadas. Representamos o estado up, ou 0, por meio do vetor $|\uparrow\rangle$ e o estado 1, ou down, através do vetor $|\downarrow\rangle$, ambos os estados são descritos pelas relações abaixo:

$$|\uparrow\rangle = |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

$$|\downarrow\rangle = |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Analogamente aos bits clássicos, os bits quânticos podem ser representados numa base de estados binários (estados up e down, \uparrow ou \downarrow) (EKERT; HAYDEN; INAMORI, 2001) através da notação $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. Antes de medirmos o estado de um qubit, no entanto, ele pode estar num estado misto: um único qubit pode apresentar os estados $|0\rangle$ ou $|1\rangle$ simultaneamente.

Os estados unicamente up ou down, de um bit quântico podem ser escritos como:

$$|\psi\rangle = |0\rangle, \quad (5.3)$$

$$|\psi\rangle = |1\rangle. \quad (5.4)$$

O estado "misto" é escrito como uma superposição dos dois estados anteriores, de forma que o módulo da função de onda $|\psi\rangle$ deve continuar sendo unitário, por isso adicionamos a ela uma constante de normalização:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle). \quad (5.5)$$

As constantes α e β representam as amplitudes de probabilidade dos estados up ou down, enquanto a probabilidade é calculada por meio do módulo quadrado da função de onda e não pode ultrapassar 1. O ganho computacional ao utilizar bits quânticos delimita que n bits quânticos equivalham 2^n bits clássicos, já que cada qubit apresenta, antes da operação de medida, duas possibilidades: 0 e 1. Os computadores modernos operam com sistemas de 64 bits, um computador quântico de 6 qubits teria equivalência numérica em número de bits já que $2^6 = 64$, conseqüentemente um computador quântico de 64 qubits apresentaria um número absurdo de $2^{64} = 1,8446744 \cdot 10^{19}$ bits.

Além disso, a definição geométrica do estado quântico de um qubit, dada através de uma construção geométrica que será apresentada posteriormente, chamada de esfera de Bloch, indica que a probabilidade de medi-lo no estado $|0\rangle$ é dada por $|\alpha|^2$, portanto, o sinal da amplitude de probabilidade não afeta a distribuição de probabilidades, esse sinal é tratado como uma fase global, e geralmente é definida por uma exponencial complexa de forma $e^{i\phi}$ no lugar de ± 1 .

Apesar de o ato de observar um qubit levar ao colapso da sua função de onda, isso não significa, necessariamente, que a sua leitura destruirá seu estado. Por exemplo: No caso em que todos os qubits utilizados estiverem em estados quânticos "puros", isso é, $|0\rangle$ ou $|1\rangle$, sem a ocorrência da superposição entre esses estados, a leitura do qubit somente irá retornar 0 ou 1. Dessa forma, é possível produzir estados quânticos que repliquem as informações como no computador clássico, entretanto, a possibilidade de armazenamento de informação nas duas formas, clássica e quântica é o que dá grande vantagem aos computadores quânticos. Além disso, o armazenamento de informação nesse tipo de computadores é mais seguro, uma vez que a própria natureza da medição tem como consequência dificultar a cópia indiscriminada de informações, através do Teorema de não-clonagem, que será discutido mais adiante.

5.1 A esfera de Bloch

Apesar de os sistemas físicos reais serem bastante complexos, apresentarem diversas variáveis bem como múltiplos graus de liberdade, é possível, em alguns casos, descrever seu comportamento como um sistema com dois graus de liberdade. Essa aproximação permite uma descrição mais simples e pode ser de grande utilidade para a simplificação matemática. Um sistema de dois níveis clássico pode assumir, para um determinado intervalo de tempo, somente duas configurações, podemos tomar como exemplo os possíveis estados de uma lâmpada: acesa ou apagada. Os sistemas de dois níveis quânticos por sua vez, apesar de similares, apresentam algumas distinções em relação aos sistemas de dois níveis clássicos. É possível, por exemplo, fazer a descrição dos seus estados como um vetor, cuja projeção em cada uma de suas direções fornece um número relacionado à probabilidade de cada estado de forma que o quadrado desse número por sua vez, nos informa a probabilidade de um sistema se encontrar nesse estado. Muitos são os sistemas quânticos que podem ser descritos dessa forma. Uma das possíveis condições a ser respeitada nesse caso é que a diferença de energia entre dois estados consecutivos (E_1 e E_2), completamente distinguíveis entre si, sem a existência de níveis intermediários.

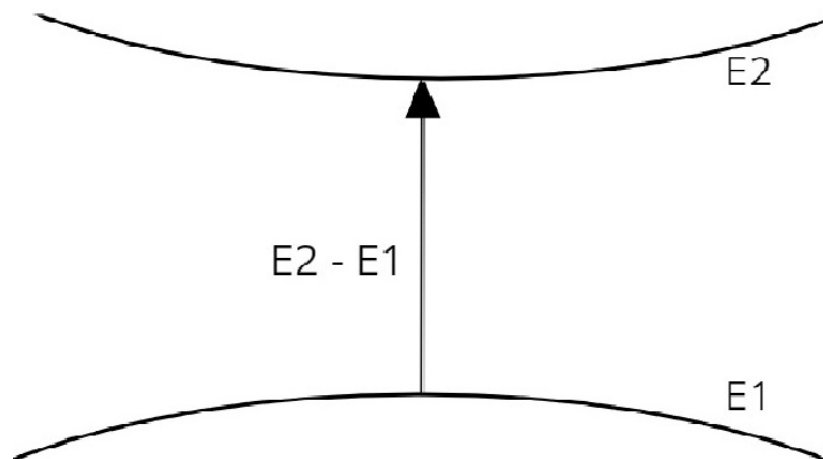


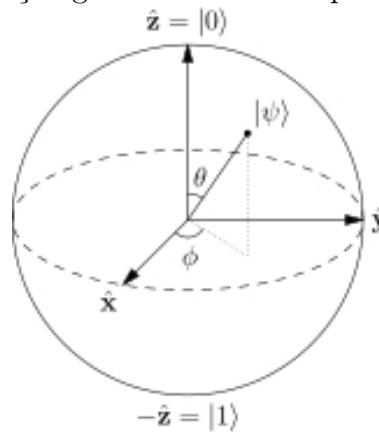
Figura 5.1: Em sistemas de dois níveis, a diferença de energia entre dois níveis consecutivos é significativamente grande

$$|E_1 - E_2| \ll |E_1| \text{ ou } |E_1 - E_2| \ll |E_2|. \quad (5.6)$$

Observe a figura 5.1, que ilustra a diferença de energia em um sistema que pode ser resumido em um sistema de dois níveis.

Muitos sistemas podem ser reduzidos usando essa condição, como o spin eletrônico, a diferença entre dois níveis de energia do átomo de Hidrogênio, estados de polarização da luz entre outros. Um dos mais promissores sistemas quânticos usados nesse intuito é o spin eletrônico, uma vez que esse, na presença de um campo magnético externo, pode se encontrar totalmente alinhado ou em sentido oposto ao do campo magnético, os estados intermediários são transitórios, facilitando a sua descrição como um sistema de dois níveis. De forma bastante simples e satisfatória, podemos descrever esses níveis como as bases perpendiculares de um vetor no plano (x, y) . A formulação matemática dos sistemas de dois níveis permite construir uma base de estados que se refere à probabilidade de se estar em um dos níveis. A esfera de Bloch é uma construção geométrica (CARVALHO, 2007) que permite a visualização dos estados quânticos de um sistema de dois níveis, como na figura 5.2.

Figura 5.2: Representação geométrica do bit quântico na esfera de Bloch



Wikimedia commons, Glosser (2017)

Quaisquer bits quânticos que são construídos a partir de um sistema de dois níveis podem ser esquematizados a partir de uma esfera de Bloch. O ângulo θ do vetor de estado $|\psi\rangle$ define a probabilidade do qubit se encontrar no estado $|0\rangle$ ou $|1\rangle$, como mostrado na figura 5.3.

No caso de um partícula de spin $\frac{1}{2}$ temos somente duas possibilidades de valor para a componente z spin, que são $S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$ em que $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ sendo h a constante de Planck, denotamos na esfera de Bloch os valores de $S_z = +\frac{\hbar}{2}$ e $S_z = -\frac{\hbar}{2}$ como

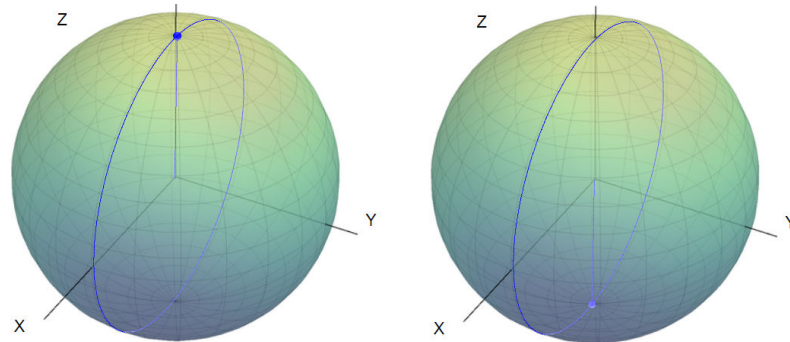


Figura 5.3: Visualização dos estados up e down no eixo z da esfera de Bloch. Retirado de [<https://www.st-andrews.ac.uk/physics/quvis/simulations-html5/sims/blochsphere/blochsphere.html>].

os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, posicionados nas extremidades do eixo z vertical. Nessa esfera podemos escrever um estado de superposição geral de um qubit como:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}|1\rangle. \quad (5.7)$$

O ângulo polar θ define a amplitude de probabilidade de cada estado, indo de 0 a π rad, enquanto o ângulo azimutal φ indica a fase global do estado e não afeta sua probabilidade, variando também entre 0 e π rad. A figura mostra os estados up e down acrescidos de uma fase global $e^{i\pi}$, observe:

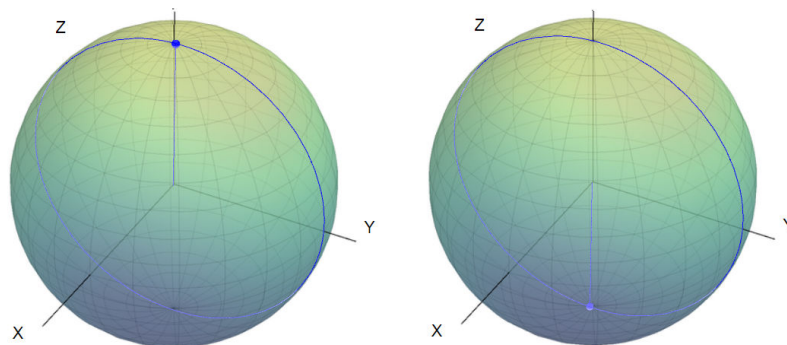


Figura 5.4: Visualização dos estados up e down no eixo z da esfera de Bloch, acrescido da fase global $e^{i\pi}$. Retirado de [<https://www.st-andrews.ac.uk/physics/quvis/simulations-html5/sims/blochsphere/blochsphere.html>].

É importante notar que para um ângulo polar de $\theta = \frac{\pi}{4}$ os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são igualmente prováveis. Além disso, apesar de os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ da esfera de Bloch serem antipodais (opostos), eles são na verdade perpendiculares entre si, de forma que

o produto escalar entre eles é nulo, isso é:

$$\langle 0|1\rangle = 0 \quad (5.8)$$

$$\langle 1|0\rangle = 0. \quad (5.9)$$

Todos os estados produzidos em um bit quântico que se encontrem na superfície da esfera de Bloch são chamados de estados puros, de forma que quaisquer estados não-puros estarão inseridos no interior do volume da esfera de Bloch.

Existem alguns estados da esfera de Bloch especialmente interessantes para a computação quântica, esses estados são obtidos após a aplicação de transformações unitárias, como rotações, feitas aos bits quânticos. O processo de transformar o estado de um bit quântico em um estado conhecido é chamado de preparação do estado, todos os estados devem ser previamente preparados e um estado conhecido, afim de que um algoritmo quântico possa operar corretamente a partir deles. Entre esses estados podemos ressaltar os estados $|0\rangle$, $|1\rangle$, já conhecidos, além dos estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$, localizados no eixo x da esfera de Bloch, mostrados, a partir da equação 5.7, na figura 5.5. Dessa forma, estado $|+\rangle$ pode ser definido como:

$$|+\rangle = \cos((\pi/2)/2)|0\rangle + \sin((\pi/2)/2)|1\rangle \quad (5.10)$$

$$|+\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle, \quad (5.11)$$

$$|+\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle \quad (5.12)$$

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (5.13)$$

O estado $|-\rangle$, por sua vez, é definido através da seguinte operação:

$$|-\rangle = \cos((\pi/2)/2)|0\rangle + \sin((\pi/2)/2)|1\rangle e^{i\pi} \quad (5.14)$$

$$|-\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle, \quad (5.15)$$

$$|-\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle \quad (5.16)$$

$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (5.17)$$

Na figura 5.5 é possível visualizar os estados referidos acima:

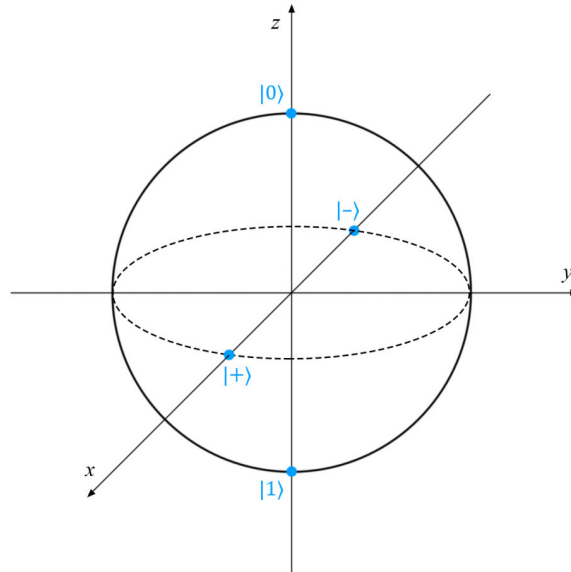


Figura 5.5: Estados da esfera de Bloch.

5.2 Computação quântica

A computação quântica leva em conta as bases da teoria clássica da informação (OLIVEIRA, 2004) bem como as leis da mecânica quântica, todas as suas operações lógicas operam por meio da manipulação dos estados dos bits quânticos.

A manipulação desses qubits, assim como no caso dos bits clássicos são realizadas através de portas lógicas, que no caso quântico recebem o nome de portas quânticas, ou quantum gates. Matematicamente são transformações que preservam o produto interno, unitárias, que fisicamente podem ser medidas nas mudanças no nível de energia de um átomo, mudanças no plano de polarização de fótons, ou ainda rotações na orientação do spin nuclear dos átomos. A associação de diversas portas quânticas permite a construção de circuitos quânticos, capazes de implementar programas mais complexos.

A implementação física dos qubits é bastante flexível e pode ser feita por meio de diversos sistemas. Somente isso já é uma grande vantagem, no entanto, alguns sistemas quânticos são muito sensíveis e difíceis de serem implementados (DIVINCENZO, 2000). Podemos citar como exemplo os computadores quânticos baseados em supercondutores: nesses computadores, os qubits são implementados pelo estado de magnetização de pequenos circuitos supercondutores, resfriados em baixíssimas temperaturas, chamados de junção Josephson.

Há também os computadores quânticos que utilizam armadilhas de íons para implementar os qubits, nesse caso, os modos vibracionais dos íons são quantizados (TESCH, 2002) e emulam os estados quânticos (CIRAC, 1995).

Também é possível basear um computador quântico por meio de redes ópticas, nesse caso os qubits são implementados através dos estados de átomos neutros presos em uma rede óptica (KNILL, 2001).

Além dessas opções podem existir computadores quânticos baseados em quantum-dots (LOSS, 1998) (nos quais os qubits são baseados nos estados singleto e tripleto dos spins de pontos quânticos); cavidades quânticas eletrodinâmicas (BLAIS, 2004) (qubits emulados pelo estado interno de átomos aprisionados em poços quânticos); moléculas de fulereno (na qual os qubits são baseados no spin eletrônico de átomos ou moléculas envoltos em fulerenos); computadores quânticos ótico-lineares (qubits produzidos por diferentes modos estacionários de luz por meio de elementos lineares, como espelhos, divisores de feixe e deslocadores de fase); computadores quânticos baseados no condensado de Bose-Einstein; computadores quânticos baseados em cristais inorgânicos dopados com íons de terras raras (qubit implementado pelo estado eletrônico dos átomos dopantes dentro de fibras ópticas) e até mesmo computadores quânticos baseados em nanoesferas de carbono.

O conceito da computação quântica surgiu em 1982 através de grandes nomes como Richard Feynman (FEYNMAN, 1982) e Paul Benioff (BENIOFF, 1980). Pouco tempo depois em 1985, David Deutsch idealizou o primeiro algoritmo voltado para a resolução de um problema num computador quântico mostrando que esse tipo de computador poderia realizar a tarefa com menos passos que um computador clássico (IFRAH, 2000). Para isso usou uma ideia simples como uma moeda: num teste se uma moeda apresentar cara e coroa será considerada verdadeira, um computador clássico teria de fazer duas verificações enquanto o computador quântico verificaria as duas faces simultaneamente.

Mais tarde em 1994, Peter Shor (SHOR, 1994) apresentou um algoritmo capaz de fatorar números não primos em computadores quânticos e também foi capaz de mostrar que para números muito grandes os computadores eletrônicos levariam um tempo muito maior que os de natureza quântica, computadores clássicos fazem fatorações em inteiros usando um tempo sub-polinomial (da ordem de $e^{2 \log N^{\frac{1}{3}}}$), sendo N

o tamanho da entrada numérica, enquanto computadores quânticos executando o algoritmo de Shor levam um tempo polinomial (na ordem de $\log N$), significativamente mais rápido (SIPSER, 2006).

5.2.1 Estados com múltiplos qubits

Afim de considerarmos estados formados por mais de um qubit (chamados de registrador quântico) é necessário compreender a ideia de produto tensorial (WEISSTEIN, 2013), vejamos um exemplo do produto tensorial entre $|0\rangle$ e $|1\rangle$ também denotado como $|0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle$:

$$|0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.1 \\ 0.0 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Outros produtos tensoriais, como $|00\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$ são exemplificados a seguir:

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.0 \\ 0.1 \\ 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

$$|1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.0 \\ 1.1 \\ 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

$$|1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.1 \\ 1.0 \\ 1.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Como é possível perceber nas igualdades mostradas acima, o produto tensorial resultante da combinação de dois qubits produz quatro estados, daí é que se fundamenta a afirmação de que n qubits equivalem a 2^n bits clássicos, já que, para representar os estados de qualquer par de qubits acima, seriam necessários pelo menos quatro bits clássicos. Costuma-se abreviar a notação dos produtos tensoriais por uma notação mais compacta na qual trocamos:

$$|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle \quad (5.22)$$

por

$$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle. \quad (5.23)$$

De forma mais geral, podemos aplicar as operações de tensores para matrizes de maiores dimensões, por exemplo:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} & b \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\ c \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} & d \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae & af & be & bf \\ ag & ah & bg & bh \\ ce & cf & de & df \\ cg & ch & dg & dh \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Há ainda, uma notação utilizada para condensar a informação, quando temos o produto tensorial entre dois ou mais qubits idênticos ou ainda de operadores em forma de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\otimes 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{\otimes 1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Podemos ainda, codificar, em um computador quântico, a sequência de bits 1011001 através dos seguintes produtos tensoriais:

$$1011001 \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Um registrador quântico composto por dois qubits apresenta quatro estados da base computacional, sendo eles: $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$. Cada um desses estados apresenta uma amplitude de probabilidade própria: α_{00} , α_{01} , α_{10} e α_{11} , respectivamente. Dessa forma, o estado de dois qubits normalizado (de módulo unitário) pode ser escrito da seguinte forma:

$$|\psi\rangle = \frac{\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle}{\sqrt{\alpha_{00}^2 + \alpha_{01}^2 + \alpha_{10}^2 + \alpha_{11}^2}}. \quad (5.28)$$

5.3 Quantum gates: Portas lógicas quânticas

As portas lógicas quânticas (conhecidas como quantum logic gates) são circuitos quânticos análogos às portas lógicas dos computadores digitais (PORTUGAL, et. al., 2004), porém são reversíveis, isso é, se forem aplicadas novamente elas podem retornar ao estado inicial do qubit. As portas lógicas quânticas comumente atuam em um, em dois ou até mesmo em três qubits e são descritas por matrizes unitárias de ordem 2×2 , 3×3 , 4×4 e etc. Em seguida apresentamos algumas das portas quânticas mais comuns:

Porta Hadamard H

A porta Hadamard é definida pelo operador:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

Ela é comumente denotada nos circuitos quânticos pelo símbolo a seguir:

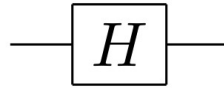


Figura 5.6: Porta lógica quântica Hadamard

Façamos a aplicação da porta H sobre um qubit que se encontre no estado up puro $|0\rangle$:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] = |\psi\rangle, \quad (5.32)$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle). \quad (5.33)$$

Ou seja, o resultado obtido acima mostra que a aplicação de H no estado $|0\rangle$ o transforma num estado misto com a mesma probabilidade de se obter $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. Podemos visualizar a aplicação da porta lógica Hadamard no estado $|0\rangle$ através da esfera de Bloch:

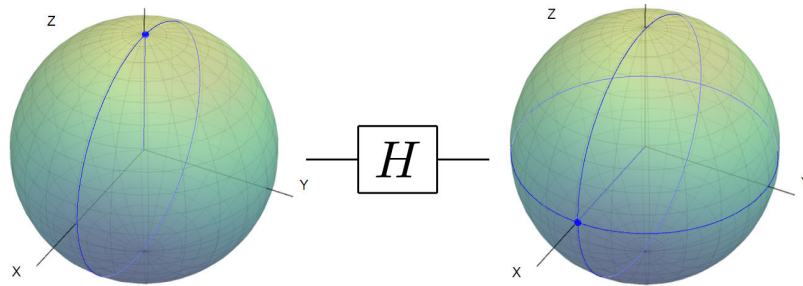


Figura 5.7: A porta lógica Hadamard mapeia o estado $|0\rangle$ no estado $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$. Retirado de <https://www.st-andrews.ac.uk/physics/quvis/simulations-html5/sims/blochsphere/blochsphere.html>

Porta Pauli-X (NOT)

A porta Pauli-X, geralmente é representada por meio do símbolo a seguir:

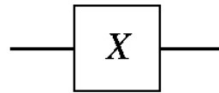


Figura 5.8: Porta lógica Pauli-X

Ela também é conhecida como U-NOT e atua sobre um único qubit realizando uma rotação de π radianos em torno do eixo x da esfera de Bloch, levando o estado $|0\rangle$ para o estado $|1\rangle$ e vice-versa, sendo definida pelo operador a seguir:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.34}$$

observe abaixo um exemplo da aplicação da porta Pauli-X no estado $|0\rangle$:

$$X|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle. \tag{5.35}$$

Note que a porta Pauli-X rotaciona o qubit, mapeando o estado up em um estado down, e vice-versa, ou ainda, um estado em um outro estado ortogonal. Seu análogo na computação clássica é a porta NOT. Podemos visualizar a atuação da porta Pauli-X no estado $|0\rangle$ através da figura 5.9:

Porta Pauli-Y

A porta Pauli-Y realiza uma rotação de π radianos no eixo y de um qubit, mapeando um estado $|0\rangle$ para um estado $|1\rangle$ e um estado $|1\rangle$ para um estado $-i|0\rangle$, o

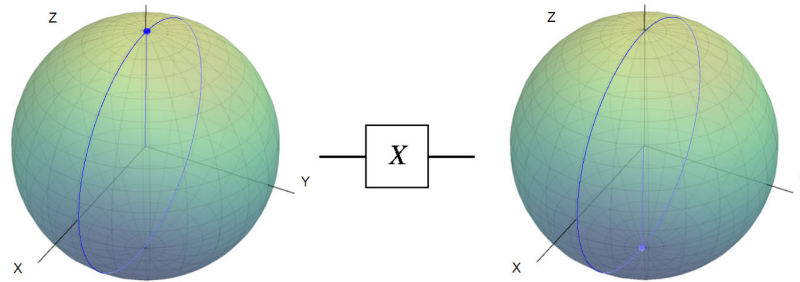


Figura 5.9: A porta lógica quântica Pauli-X mapeia o estado $|0\rangle$ no estado $|1\rangle$. Retirado de <https://www.st-andrews.ac.uk/physics/quvis/simulations-html5/sims/blochsphere/blochsphere.html>

fator $-i$ não afeta a probabilidade de se medir o qubit no estado up ou down, trata-se apenas de uma fase global. Essa porta lógica é representada matricialmente por:

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

Na representação acima, i é o número complexo $i = \sqrt{-1}$. Observe um exemplo da aplicação da porta lógica Pauli-Y no estado $|1\rangle$:

$$Y|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -i|0\rangle. \quad (5.37)$$

Essa porta lógica quântica costuma ser representada pelo símbolo abaixo:

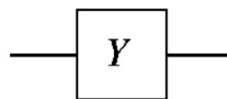


Figura 5.10: Porta lógica quântica Pauli-Y.

A atuação da porta lógica quântica Pauli-Y pode ser visualizada através da esfera de Bloch, como mostra a figura 5.11:

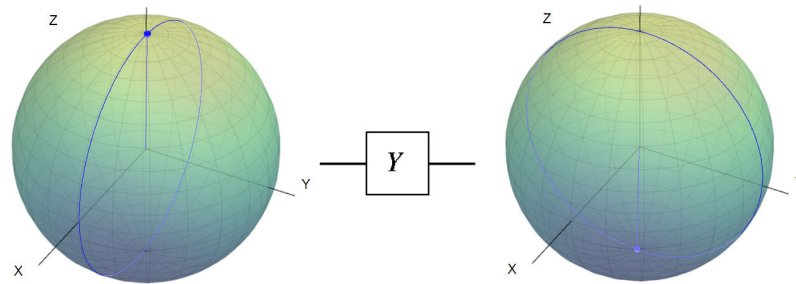


Figura 5.11: A porta lógica quântica Pauli-Y mapeia o estado $|0\rangle$ no estado $-i|0\rangle$. Retirado de <https://www.st-andrews.ac.uk/physics/quvis/simulations-html5/sims/blochsphere/blochsphere.html>

Porta Pauli-Z ($R(\pi)$)

A porta quântica Pauli-Z representa uma rotação de um único qubit em torno do eixo z . Pauli-Z está representada pela matriz a seguir:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.38)$$

Essa porta lógica quântica geralmente é representada pelo símbolo abaixo:

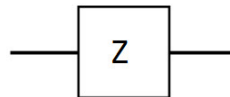


Figura 5.12: Porta lógica quântica Pauli-Z.

A atuação dessa porta lógica sobre o estado $|1\rangle$ pode ser visualizada através da figura 5.13:

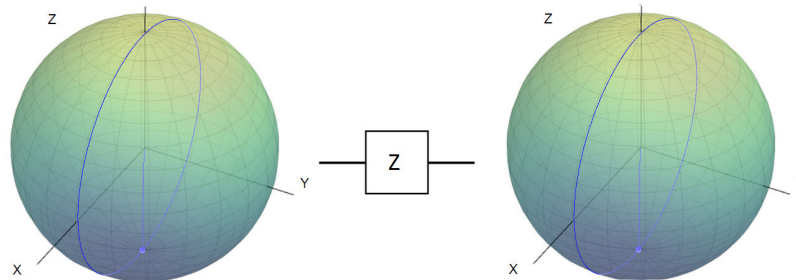


Figura 5.13: A porta lógica quântica Pauli-Z mapeia o estado $|1\rangle$ no estado $-i|1\rangle$. Retirado de <https://www.st-andrews.ac.uk/physics/quvis/simulations-html5/sims/blochsphere/blochsphere.html>

Porta Fase ($R(\theta)$)

A porta de fase é uma generalização da porta Pauli-Z. A porta $R(\theta)$ pode ser representada pela matriz abaixo:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix}. \quad (5.39)$$

Ela não afeta a probabilidade dos estados, apenas leva um estado genérico:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle. \quad (5.40)$$

para um estado

$$R(\theta)|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + i\beta|1\rangle. \quad (5.41)$$

Porta Fase Swap

A porta Swap atua em dois qubits trocando suas posições, de tal forma que:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}|00\rangle &\longrightarrow |00\rangle \\ \mathbf{S}|01\rangle &\longrightarrow |10\rangle \\ \mathbf{S}|10\rangle &\longrightarrow |01\rangle \\ \mathbf{S}|11\rangle &\longrightarrow |11\rangle \end{aligned} \quad (5.42)$$

Sua forma matricial é dada a seguir:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

Existe ainda, uma porta lógica mais geral, capaz de implementar mais algoritmos que a porta SWAP, trata-se de uma porta lógica universal, chamada de \sqrt{SWAP} , ela é definida por:

$$\sqrt{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(1-i) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(1+i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

Essa porta lógica realiza a troca dos qubits, assim como a porta swap, porém, atua somente no primeiro e último conjunto, deixando os qubits do meio inalterados. Por isso ela também é chamada de meia troca.

Portas de controle (c_x, c_y, c_z)

As portas quânticas c_x , c_y e c_z são portas controladas, elas operam lendo o valor do primeiro qubit e então alteram o segundo qubit. Essas portas lógicas são usadas principalmente para se produzir estados emaranhados, impossíveis de serem conseguidos unicamente pelo produto tensorial entre diferentes qubits. A forma matricial geral das portas lógicas controladas x, y e z é dada a seguir:

$$C(U) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{00} & u_{01} \\ 0 & 0 & u_{10} & u_{11} \end{bmatrix}. \quad (5.45)$$

Quando U é respectivamente, uma das matrizes de Pauli, σ_x , σ_y ou σ_z , temos as portas c_x , c_y e c_z . A atuação dessa porta lógica é tal que:

$$\begin{aligned} |00\rangle &\mapsto |00\rangle, \\ |01\rangle &\mapsto |01\rangle, \\ |10\rangle &\mapsto |1\rangle \otimes U|0\rangle = |1\rangle \otimes (u_{00}|0\rangle + u_{01}|1\rangle), \\ |11\rangle &\mapsto |1\rangle \otimes U|1\rangle = |1\rangle \otimes (u_{10}|0\rangle + u_{11}|1\rangle). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Nas relações mostradas acima, os termos u_{ij} tratam-se dos respectivos elementos das matrizes de Pauli.

Porta CNOT

A porta C-NOT é uma porta controlada que atua em dois bits simultaneamente, usando primeiro bit como controle, caso seu valor seja 0 ela não faz nada, caso seu valor seja 1 ela altera o valor do segundo bit:

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle, \quad (5.47)$$

$$|01\rangle \rightarrow |01\rangle, \quad (5.48)$$

$$|10\rangle \rightarrow |11\rangle, \quad (5.49)$$

$$|11\rangle \rightarrow |10\rangle. \quad (5.50)$$

Sua representação matricial é dada por uma matriz 4x4 com a forma:

$$C(NOT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.51)$$

Assim como a porta Hadamard, a porta CNOT pode ser usada para emaranhar qubits, transformando os estados singulares de cada qubit em um estado emaranhado que não pode ser obtido apenas pelo produto tensorial entre eles.

Porta Toffoli (CCNOT)

A porta lógica Toffoli é uma porta universal controlada e reversível que atua em três estados simultaneamente. Seu funcionamento é simples: se os dois primeiros estados lidos forem 1 o terceiro estado será invertido. Sua representação matricial é dada abaixo:

$$CC(U) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.52)$$

Façamos a aplicação da porta lógica CCNOT no estado $|110\rangle$ para analisar os bits de saída:

$$|110\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.53)$$

$$CC(U) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |111\rangle. \quad (5.54)$$

Como havia sido dito, a atuação da porta CCNOT sobre o estado $|110\rangle$ é tal que $C(U)|110\rangle \rightarrow |111\rangle$.

Porta Fredkin (Cswap)

A porta lógica Fredkin é universal, ou seja, pode ser usada para construir quaisquer outras portas lógicas. Ela opera sobre três qubits de entrada, transmitindo o primeiro qubit de entrada inalterado e alternando o valor dos outros dois, se e somente se o primeiro bit for 1. Sua representação matricial é dada a seguir:

$$F(U) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.55)$$

Vamos atuar a porta lógica Fredkin sobre o estado $|100\rangle$ afim de analisarmos o seu comportamento:

$$|100\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.56)$$

$$F(U)|100\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = |111\rangle. \quad (5.57)$$

Portanto, a aplicação da porta lógica Fredkin sobre o estado $|100\rangle$ resulta em um estado $|111\rangle$. Como havia sido mencionado, caso o primeiro bit for 1, os outros bit são invertidos.

Porta Ising (XX)

A porta lógica de Ising está presente na implementação dos computadores baseados em armadilhas de íons. Essa porta lógica atua sobre dois qubits, podendo ser definida matricialmente por:

$$XX_\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & e^{i(\phi-\frac{\pi}{2})} \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ e^{i(\phi-\frac{\pi}{2})} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.58)$$

Tomando a porta lógica de Ising, para um ângulo $\phi = \pi$, atuando sobre o estado $|00\rangle$, teremos:

$$XX_\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & e^{i(\pi-\frac{\pi}{2})} \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ e^{i(\pi-\frac{\pi}{2})} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & e^{i(\frac{\pi}{2})} \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ e^{i(\frac{\pi}{2})} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.59)$$

Como sabemos $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, para o ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$, temos que $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$, logo, a porta de Ising para esse ângulo é dada pela matriz abaixo:

$$XX_\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.60)$$

Vamos atuar a porta mostrada acima no estado $|10\rangle$ para analisarmos o seu comportamento:

$$XX_\pi |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.61)$$

O resultado indica que a atuação da porta de Ising sobre o estado escolhido é tal que:

$$XX_\pi |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|10\rangle - i|01\rangle]. \quad (5.62)$$

Em outras palavras, a porta Ising para o ângulo $\phi = \pi$ produziu um estado emaranhado, impossível de se obter unicamente pela aplicação de produtos tensoriais, igualmente provável e com uma fase global $-i$ no segundo estado, que por sua vez é uma o primeiro estado negado.

Porta Deustch ($D(\theta)$)

A porta lógica Deustch se trata de uma rotação em três bits quânticos em um determinado ângulo α , se e somente se os dois primeiros deles forem iguais a 1. É uma generalização da porta lógica Tofoli. É definida por meio da matriz de rotação a seguir:

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & i \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (5.63)$$

Vamos tomar um ângulo $\alpha = \pi$, dessa forma teremos a seguinte porta Deustch:

$$T_3^\pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.64)$$

Determinada a porta Deustch para o ângulo $\alpha = \pi$, faremos a sua atuação sobre o estado $|110\rangle$, de forma que teremos:

$$T_3^\pi |110\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -|110\rangle. \quad (5.65)$$

5.4 Circuitos quânticos

Por meio da aplicação de portas lógicas quânticas sequenciais é possível construir circuitos quânticos (LADD, 2010). A grande diferença dos circuitos lógicos

clássicos para os circuitos quânticos é a reversibilidade: ao se aplicar uma porta lógica quântica repetidas vezes volta-se ao valor original e isso nem sempre é possível na computação clássica. Por exemplo, é possível, através do produto tensorial de duas portas Hadamard, construir-se uma porta lógica que atue simultaneamente em dois qubits. Damos o nome dessa porta lógica de porta G. Ela pode ser produzida através do produto tensorial abaixo:

$$G = H \otimes H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.66)$$

Vamos utilizar a porta lógica acima, aplicando-a ao estado $|00\rangle$:

$$G|00\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.67)$$

Mas, também sabemos que:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle = \frac{|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle}{2}. \quad (5.68)$$

Ou seja, a aplicação dessa porta lógica em dois qubits, cria quatro estados de superposição igualmente prováveis de serem observados. De forma similar, podemos aplicar portas lógicas nessa sequência de qubits, por exemplo, caso queiramos aplicar a porta Pauli-X (NOT) no primeiro bit, e então aplicar a porta C-NOT sobre o segundo e o terceiro qubit, fazemos a seguinte operação:

$$(X \otimes \text{CNOT}_{12} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

$$\equiv 0011001. \quad (5.70)$$

Em seguida discutiremos dois aspectos importantes dos bits quânticos que os tornam totalmente diferentes dos bits clássicos: o emaranhamento quântico e o teorema da não-clonagem.

5.5 Emaranhamento Quântico e Teorema da Não-Clonagem

O Emaranhamento é um fenômeno quântico que surge quando partículas interagentes não podem ser descritas por funções de ondas distintas (DEUSTCH; HAYDEN, 2000), mesmo quando separadas por grandes distâncias essas partículas ainda se comportam como um único sistema.

Partículas com essa natureza são chamadas de par EPR, cujo nome se deve ao fato do fenômeno ter sido discutido por Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen em 1935. O par EPR parece seguir um princípio de não localidade (HORODECKI, 2009): ao medir-se alguma grandeza de uma das partículas emaranhadas, a função de onda do conjunto se colapsa para um dos possíveis valores, assim, todas as outras partículas se apresentarão exatamente como a primeira que fora observada e ao que tudo indica, instantaneamente.

Um estado emaranhado não é necessariamente um produto tensorial entre estados de 1 qubit, por exemplo: o estado $|01\rangle$ pode ser escrito como o produto tensorial entre $|0\rangle$ e $|1\rangle$, no entanto o estado abaixo não pode ser escrito através de qualquer produto tensorial entre estados de 1 qubit (como foi mostrado anteriormente em 5.18), tratando-se portanto de um estado emaranhado:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.71)$$

Classicamente, é possível clonar a informação, como nos discos rígidos ou CDs. No caso quântico, entretanto, o teorema da não clonagem impossibilita a cópia de qubits. Em caso contrário estaríamos habilitados à clonar um estado quântico por diversas vezes e realizar as medidas nesses estados evitando a perturbação no estado original, diminuindo assim as interferências externas que levam ao surgimento da perda de informação. O nome dado a esse processo de perda de informação é decoerência e ela está relacionada à perda de fase global em um sistema de bits quânticos. No caso do jogo de cara ou coroa, seria como se pudéssemos medir o resultado com a moeda ainda em vôo.

Por fim, vamos tomar como exemplo o seguinte circuito quântico $CNOT \otimes H|00\rangle$: Nele temos dois bits de entrada, o estado inicial é o estado $|00\rangle$, aplica-se nesses

dois qubits a porta Hadamard, em seguida, aplica-se a porta CNOT:

$$CNOT \otimes H|00\rangle. \quad (5.72)$$

Vamos aplicar a porta H em $|0\rangle$:

$$\begin{aligned} H|0\rangle|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} |0\rangle, \\ H|0\rangle|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} |0\rangle, \\ H|0\rangle|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] |0\rangle, \\ H|0\rangle|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle + |1\rangle] |0\rangle, \end{aligned}$$

Logo, temos a seguinte igualdade:

$$H|0\rangle|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|00\rangle + |10\rangle]. \quad (5.73)$$

Como sabemos, as sequências $|00\rangle$ e $|10\rangle$ são produtos tensoriais entre os dois qubits de entrada, dessa forma:

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.74)$$

$$|10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.75)$$

Aplicamos agora a porta lógica CNOT, essa porta lógica é um porta de controle, que inverte o segundo qubit caso o primeiro seja igual a 1, dessa forma, temos:

$$C(NOT)H|0\rangle|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right], \quad (5.76)$$

o resultado da aplicação dessa última porta quântica é portanto:

$$C(NOT)H|0\rangle|0\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} [|00\rangle + |11\rangle]. \quad (5.77)$$

O resultado encontrada acima é chamado de Estado de Bell, o mesmo usado no par EPR (Einstein, Podolsy, Rosen) (BELL, 2001), pois ele torna os dois bits de entrada $|00\rangle$ entrelaçados quânticamente. Portanto, a partir da aplicação de alguns circuitos quânticos é possível produzir pares de estados quânticamente ligados.

Diante do corpo de conhecimentos expostos até aqui, podemos apresentar no apêndice, o produto educacional construído por meio dessa dissertação, a ser, um ambiente virtual de aprendizagem, baseado na tecnologia Moodle, e uma sugestão de sequência didática para os professores de Ensino Médio que possam se interessar em ministrar o conteúdo de computação quântica em suas aulas.

Capítulo 6

Considerações finais

Através da aplicação de um curso à distância sobre Computação Quântica foi possível perceber que os estudantes Ensino Médio conseguem aprender os aspectos fundamentais de teorias bastante complexas como a Mecânica Quântica. Por meio da análise das respostas dos estudantes é possível também perceber o uso de termos próprios da área, indicando os primeiros passos de uma alfabetização científica.

Percebeu-se que as páginas de um AVA não podem ser demasiadamente carregadas de informação, e que, com o passar do tempo, o interesse dos estudantes pelo tema de estudo tende a diminuir, bem como sua adesão. Entretanto, alguns dos estudantes melhoram nitidamente o seu vocabulário científico, bem como sua compreensão geral do tema. Dessa forma, deve-se sempre procurar por novos recursos, que prendam a atenção dos participantes do curso, sem fugir do propósito inicialmente traçado.

Baseado nessas ideias, publicamos uma nova versão do ambiente Qubit, de navegação mais simples, mais enxuto, com mais conteúdo e menos informação nas páginas principais.

Não obstante, foi possível notar que o rendimento acadêmico dos alunos que participaram do curso cresceu em relação ao restante da turma. Alguns dos participantes passaram a ter mais assiduidade nas aulas e a entregar suas atividades em dia, além de conseguirem notas melhores em suas avaliações de Física.

Ao longo das atividades foi possível notar a aquisição do vocabulário próprio da área da computação quântica, nos estágios iniciais do curso os alunos não tinham ideia alguma sobre conceitos como função de onda, dualidade, interferência, entre outros, sendo esses, leves indícios que apontam para o começo de um processo de

alfabetização científica.

Uma parte razoável dos alunos conseguiu fazer as operações matemáticas que envolviam multiplicações de matrizes e isso sugere que a parte operacional do curso, envolvendo cálculos, seja uma das partes menos problemáticas para os alunos.

No entanto, ao mesmo tempo pudemos perceber que diversos participantes simplesmente copiaram trechos da internet em suas respostas, ou ainda à respostas dadas por outros participantes, quando essas eram postadas de forma pública, como no caso dos glossários de termos e das atividades de wiki colaborativa.

Muitos participantes que deixaram de participar do curso usaram como justificativa o volume de atividades extra-classe e à semana de avaliação que aconteceu ao mesmo tempo das últimas semanas do curso. No entanto, entre os estudantes foi unânime que os mesmos gostariam de utilizar mais ambientes virtuais de aprendizagem como ferramentas para apoiar seus estudos convencionais.

Concluimos que é possível construir um curso à distância usando recursos livres, como ferramenta auxiliar no processo de ensino e aprendizagem, destinada ao ensino da computação quântica no Ensino Médio, com o intuito da promoção da alfabetização científica, a verificação dessa última, no entanto, fica comprometida face à participação dos estudantes: não sabemos até que ponto as respostas publicadas são de autoria própria. Entretanto, o uso dos AVA pode facilitar a construção de conhecimentos para além da sala de aula, mostrando-se um forte aliado dos professores que buscam, dentre outros quesitos, a alfabetização científica de seus estudantes.

Capítulo 7

Referências Bibliográficas

BARROS, Marina Valentim. Tópicos de física quântica na formação de professores de física: análise das interações discursivas através da utilização de uma metodologia interativa de instrução pelos colegas. 2016. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

BELL, John S. On the einstein podolsky rosen paradox. In: John S Bell On The Foundations Of Quantum Mechanics. 2001. p. 7-12.

BENIOFF, Paul. The computer as a physical system: A microscopic quantum mechanical Hamiltonian model of computers as represented by Turing machines. Journal of statistical physics, v. 22, n. 5, p. 563-591, 1980.

BLAIS, Alexandre et al. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation. Physical Review A, v. 69, n. 6, p. 062320, 2004.

BRASIL, Ministério da Educação. Matriz de referência de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Disponível em http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=841-matriz-1&category_slug=documentos-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 17 de jul. de 2018.

BRASIL, Ministério da educação. Secretaria de educação média e tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais-PCN: ensino médio: ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. MEC/SEMT, 2000. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>

BOLDRINI, José Luiz et al. Álgebra linear. Harper & Row, 1980.

BOUWMEESTER, Dirk et al. The physics of quantum information. Springer, Berlin, 2000.

CARVALHO, L. M.; LAVOR, C.; MOTTA, V. S. Caracterização matemática e visualização da esfera de Bloch: ferramentas para computação quântica. *Trends in Applied and Computational Mathematics*, v. 8, n. 3, p. 351-360, 2007.

CIRAC, Juan I.; ZOLLER, Peter. Quantum computations with cold trapped ions. *Physical review letters*, v. 74, n. 20, p. 4091, 1995.

COHEN-TANNOUDJI, Claude; LALOE, Franck; DIU, Bernard. *Mécanique quantique*. EDP Sciences, 2017.

CUI, Yi; LIEBER, Charles M. Functional nanoscale electronic devices assembled using silicon nanowire building blocks. *science*, v. 291, n. 5505, p. 851-853, 2001.

DE OLIVEIRA, Fabio Ferreira; VIANNA, Deise Miranda; GERBASSI, Reuber Scofano. Física moderna no ensino médio: o que dizem os professores. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 29, n. 3, p. 447-454, 2007.

DE TOLEDO PIZA, Antonio Fernando Ribeiro. *Mecânica quântica*. São Paulo: Edusp, 2003.

DEUTSCH, David. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. *Proc. R. Soc. Lond. A*, v. 400, n. 1818, p. 97-117, 1985.

DIRAC, Paul Adrien Maurice. *The principles of quantum mechanics*. Oxford university press, 1981.

DIVINCENZO, David P. et al. The physical implementation of quantum computation. *arXiv preprint quant-ph/0002077*, 2000.

DOS SANTOS, Andiara P.; FERRARI, Paulo C.; DE ALMEIDA, Norton G. Educação problematizadora no ensino de Computação Quântica: um caminho para a Alfabetização Científica e Tecnológica. VIII ENPEC: Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências. Disponível em <http://www.nutes.ufrj.br/abrapec/viiienpec/resumos/R0246-1.pdf>. Acesso em 17 de jul. de 2018.

EINSTEIN, Albert. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Annalen der physik*, v. 322, n. 6, p. 132-148, 1905.

EINSTEIN, Albert; INFELD, Leopold. *A evolução da Física*. Zahar editores, 1980.

FEYNMAN, Richard P. Simulating physics with computers. *International*

journal of theoretical physics, v. 21, n. 6-7, p. 467-488, 1982.

FEYNMAN, Richard Phillips. QED: The strange theory of light and matter. Princeton University Press, 2006.

FREIRE JR, Olival; PESSOA JR, Osvaldo; BROMBERG, Joan Lisa. Teoria quântica: estudos históricos e implicações culturais. EDUEPB, 2011.

GRIFFITHS, David J. Introduction to electrodynamics. 2005.

HERTZ, Heinrich; KELVIN, William Thomson Baron. Electric waves. London: Macmillan, 1893.

HORODECKI, Ryszard et al. Quantum entanglement. Reviews of modern physics, v. 81, n. 2, p. 865, 2009.

IFRAH, Georges et al. The universal history of computing: From the abacus to quantum computing. John Wiley & Sons, Inc., 2000.

JAMMER, Max. The conceptual development of quantum mechanics. Tomash, 1989.

KNILL, Emanuel; LAFLAMME, Raymond; MILBURN, Gerald J. A scheme for efficient quantum computation with linear optics. nature, v. 409, n. 6816, p. 46, 2001.

LADD, Thaddeus D. et al. Quantum computers. Nature, v. 464, n. 7285, p. 45, 2010. NIELSEN, Michael A.; CHUANG, Isaac. Quantum computation and quantum information. 2002.

LOSS, Daniel; DIVINCENZO, David P. Quantum computation with quantum dots. Physical Review A, v. 57, n. 1, p. 120, 1998.

MACKENZIE, Charles E. Coded-Character Sets: History and Development. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1980.

NUSENSZVEIG, Herch Moysés. Curso de física básica, Volume 4. Blucher, 2002.

O'HANDLEY, Robert C. Modern magnetic materials: principles and applications. Wiley, 2000.

OLIVEIRA, Claudete F.; LIMA, Rommel W. O uso de um Ambiente Virtual de Aprendizagem como apoio às atividades presenciais no contexto do ensino médio. In: Anais do Workshop de Informática na Escola. 2012.

OSTERMANN, Fernanda; MOREIRA, Marco Antonio. Uma revisão bibli-

ográfica sobre a área de pesquisa 'Física Moderna e Contemporânea no Ensino Médio'. Investigações em ensino de ciências, v. 5, n. 1, p. 23-48, 2016.

OLIVEIRA, Ivan Santos; SARTHOUR, Roberto S. Computação quântica e informação quântica. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2004.

PLANCK, Max. Ueber die Elementarquanten der Materie und der Elektrizität. Annalen der Physik, v. 309, n. 3, p. 564-566, 1901.

PLANCK, Max; JONES, Robert; WILLIAMS, Dorothy H. A Survey of Physics... Translated by R. Jones and DH Williams. London, 1925.)

PORTUGAL, Renato et al. Uma introdução à computação quântica. 2004.

PRUGOVECKI, Eduard. Quantum mechanics in Hilbert space. Academic Press, 1982.

SAKURAI, Jun John; COMMINS, Eugene D. Modern quantum mechanics, revised edition. 1995.

SASSERON, Lúcia Helena; DE CARVALHO, Anna Maria Pessoa. Alfabetização científica: uma revisão bibliográfica. Investigações em ensino de ciências, v. 16, n. 1, p. 59-77, 2016.

SIPSER, Michael. Introduction to the Theory of Computation. Boston: Thomson Course Technology, 2006.

SHANNON, Claude Elwood. A mathematical theory of communication. ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review, v. 5, n. 1, 2001.

SHOR, Peter W. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring. In: Foundations of Computer Science, 1994 Proceedings., 35th Annual Symposium on. Ieee, 1994. p. 124-134.

TERRAZZAN, Eduardo A. Perspectivas para a inserção da física moderna na escola média. São Paulo: curso de pós-graduação em educação - USP, 1994.

TESCH, Carmen M.; DE VIVIE-RIEDLE, Regina. Quantum computation with vibrationally excited molecules. Physical review letters, v. 89, n. 15, p. 157901, 2002.

TIETZE, Ulrich; SCHENK, Christoph; GAMM, Eberhard. Electronic circuits: handbook for design and application. Springer, 2015.

WEISSTEIN, E. W. Kronecker Product. From MathWorld.[On Line] <http://mathworld.wolfram.com/KroneckerProduct.html>, 2013.

Apêndice A

Produto educacional - O AVA Qubit

O produto educacional a ser apresentado no presente trabalho contempla duas linhas de pesquisa sugeridas pelo Programa Nacional de Mestrado Profissional em Ensino de Física - Física no Ensino Médio e Processos de Ensino e Aprendizagem e Tecnologias de Informação e Comunicação no Ensino de Física. Se trata de um AVA (Ambiente Virtual de Aprendizagem) criado na plataforma de uso livre amplamente utilizada Moodle® e leva o nome de Qubit. É destinado a estudantes do 3º ano Ensino Médio que se interessem em aprender alguns aspectos da mecânica quântica. Além disso o ambiente é organizado em forma de mini-curso e é estruturado em módulos.

A aplicação de um conteúdo de tal complexidade para alunos de Ensino Médio mostrou-se possível face à natureza das operações que são realizadas no escopo da informação quântica, que, na maioria das vezes, resumem-se a operações matriciais relativamente simples, as quais espera-se que os alunos participantes sejam minimamente familiarizados. O produto educacional foi orientado pelos seguintes objetivos:

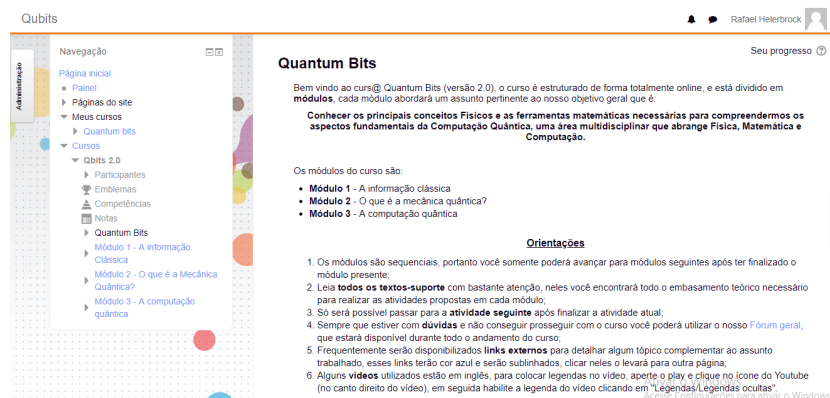


Figura A.1: Página inicial do AVA Qubit

- Objetivo geral: Elaboração de um curso de curta duração (4 semanas) à distância baseado em Moodle® sobre os principais conceitos e fundamentos da computação quântica.
- Objetivo específico: Elaborar módulos, seções, atividades, aulas, textos de suporte, monitorar o fórum de perguntas e respostas, incorporar páginas da internet e vídeos bem como avaliações ao final de cada módulo.

Os módulos integrantes do curso são apresentados a seguir, juntamente aos seus objetivos específicos:

Módulo 1 - A informação clássica

Módulo 1 - A informação Clássica

Seja bem vind@ ao primeiro módulo do nosso curso. Para entendermos o que é computação quântica é necessário compreender os elementos básicos da computação clássica, certo?

Conteúdo e Objetivos

- **Grandezas digitais e analógicas:**
 - Entender o que são *grandezas digitais e analógicas*, suas diferenças e quais grandezas físicas podem ser usadas para implementá-las.
- **O bit clássico, a base binária e a base decimal:**
 - Entender o que é um bit, sequência de bits, aprender a notação binária, aprender a realizar a conversão entre notação binária e decimal.
- **Operações lógicas (portas lógicas):**
 - Conhecer operações lógicas simples, construir um algoritmo para a implementação de alguma tarefa simples.

Metodologia

Serão utilizados os recursos: texto-suporte, links externos, vídeos indexados, questionários, fórum de debate e avaliações.

Figura A.2: Página inicial do módulo 1 - A informação clássica.

- Entender o que são grandezas digitais e analógicas, suas diferenças e quais grandezas físicas podem ser usadas para implementá-las.
- O bit clássico, a base binária e a base decimal:
Entender o que é um bit, sequência de bits, aprender a notação binária, aprender a realizar a conversão entre notação binária e decimal.
- Operações lógicas (portas lógicas):
Conhecer operações lógicas simples, construir um algoritmo para a implementação de alguma tarefa simples.

- Possibilidades e limitações físicas da computação clássica:
Conhecer os limites físicos dos computadores clássicos, compreender a necessidade de uma alternativa à computação clássica.

A seguir trazemos, na figura A.3 uma captura de tela do conteúdo primeiro módulo:

	Questionário Inicial	<input checked="" type="checkbox"/>
	Grandezas digitais e analógicas	<input checked="" type="checkbox"/>
	Restrito Disponível se: A atividade Questionário Inicial esteja marcada como concluída	
	Texto suporte da seção Grandezas digitais e analógicas.	
	O bit clássico, a base binária e a base decimal	<input checked="" type="checkbox"/>
	Restrito Disponível se: A atividade Grandezas digitais e analógicas esteja marcada como concluída	
	Texto suporte da seção - O bit clássico, a base binária e a base decimal.	
	Possibilidades e limitações físicas da computação clássica	<input checked="" type="checkbox"/>
	Restrito Disponível se: A atividade O bit clássico, a base binária e a base decimal esteja marcada como concluída	
	Texto suporte - Miniaturização, Lei de Moore e Mecânica Quântica.	
	Operações lógicas (portas lógicas)	<input checked="" type="checkbox"/>
	Restrito Disponível se: A atividade O bit clássico, a base binária e a base decimal esteja marcada como concluída	
	O que são portas lógicas e qual o seu papel para o processamento da informação?	
	Atividade 1: Glossário de Termos	<input checked="" type="checkbox"/>
	Restrito Disponível se: A atividade Possibilidades e limitações físicas da computação clássica esteja marcada como concluída	
	Complemente o conceito e o significado dos termos mais importantes dessa seção através dos comentários, tente trazer conceitos novos, sem repetir o que já foi escrito pelos seus colegas.	
	Atividade 2 - Bases binárias e decimais	<input type="checkbox"/>
	Avaliação do Módulo 1	<input type="checkbox"/>

Figura A.3: Estrutura e conteúdos do módulo 1

Módulo 2 - O que é Mecânica Quântica?

Módulo 2 - O que é a Mecânica Quântica?

Seja bem vindo ao segundo módulo do nosso minicurso, nesse módulo faremos uma breve introdução sobre o que é a mecânica quântica e algumas das suas características.

Conteúdo e objetivos:

- O surgimento da mecânica quântica;
 - Conhecer um pouco da história do surgimento da mecânica quântica e seus principais nomes,
- A função de onda;
 - Entender algumas propriedades básicas da função de onda
- Autoestados e autovalores;
 - Aprender o que são os autoestados e autovalores em sistemas quânticos
- O spin quântico
 - Conhecer o spin quântico e sua história, entender as representações dos spins em matrizes 2×2 , conhecer os operadores de spin nas direções x , y e z , conhecer os operadores S_+ e S_- , conhecer o operador S_z .
- Alguns postulados da Mecânica Quântica;
 - Conhecer alguns dos principais postulados da mecânica quântica.

Metodologia

Serão utilizados os recursos: texto-suporte, links externos, vídeos indexados, questionários, fórum de debate e avaliações.

Figura A.4: Página inicial do módulo 2 - O que é mecânica quântica?

- O surgimento da Mecânica Quântica:
Conhecer um pouco da história do surgimento da mecânica quântica e seus principais nomes.
- Aspectos qualitativos da função de onda:
Entender algumas propriedades teóricas básicas da função de onda e a como utilizá-la, compreender o colapso da função de onda, conhecer a interpretação probabilística da função de onda.
- Autoestados e autovalores:
Aprender de forma simples o que são os autoestados e autovalores em sistemas quânticos.
- O spin quântico:
Conhecer o spin quântico e sua história, entender as representações dos spins em matrizes (2×2) , conhecer os operadores de spin nas direções x , y e z , conhecer os operadores S_+ e S_- , conhecer o operador S_z .

- Alguns postulados da Mecânica Quântica: Conhecer alguns dos principais postulados necessários para a formulação da teoria quântica.

Na página seguinte, por meio da figura A.5 trazemos uma captura de tela com a estrutura do segundo módulo do AVA Qubit.












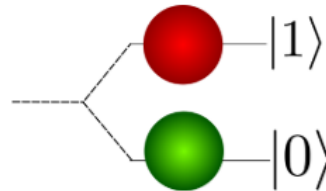
	Fórum - O que é a Mecânica Quântica?	<input type="checkbox"/>
	Acompanhe as postagens do fórum do módulo 2 e deixe suas dúvidas e comentários relacionados às atividades propostas!	
	O surgimento da mecânica quântica	<input checked="" type="checkbox"/>
	Texto de suporte da seção - O que é a Mecânica Quântica.	
	A função de onda	<input type="checkbox"/>
	Texto suporte da seção - A função de onda	
	A função de onda - Leitura complementar	<input type="checkbox"/>
	Leitura complementar sobre a seção - A função de onda (não obrigatória, mas recomendável)	
	Autoestados e autovalores	<input type="checkbox"/>
	Texto suporte da seção - O que são autoestados e autovalores?	
	Alguns postulados da mecânica quântica	<input type="checkbox"/>
	Leitura complementar: Texto suporte da seção - Alguns postulados da mecânica quântica.	
	Atividade 1 - Questionário: O que é a Mecânica Quântica	<input checked="" type="checkbox"/>
	Após ter lido e relido os textos suporte assistido aos vídeos que foram disponibilizados, você deve ter uma ideia mais clara do que é a mecânica quântica. Responda com calma à este questionário avaliativo para podermos progredir mais ainda.	
	Opcional - Recurso adicional 1 - Simulação - Interferência Quântica	<input type="checkbox"/>
	Que tal conferir uma simulação sobre a interferência quântica disponibilizada pelo site Phet Colorado? Após fazer alguns testes comente no fórum as suas dúvidas e/ou conclusões.	
	Opcional - Recurso adicional 2 - Simulação - Efeito fotoelétrico	<input type="checkbox"/>
	Confira uma simulação sobre o efeito fotoelétrico disponibilizada pelo site Phet Colorado. Após fazer alguns testes comente no fórum as suas dúvidas e/ou conclusões.	
	Atividade 2 - Glossário de Termos	<input type="checkbox"/>
	No Glossário de termos a seguir, dê um significado ou uma informação sobre as palavras diferente dos significados previamente preenchidos (caso haja), traga novas informações sobre o termo usando suas palavras.	
	Avaliação do módulo 2 - Wiki Colaborativa - O que é mecânica quântica?	
	Bem vindo à avaliação final do módulo 2, essa atividade consiste em uma atividade do tipo Wiki! uma wiki é uma página construída de forma colaborativa, ou seja, todos os participantes devem editar a página e sua colaboração será visível para todos.	
	Como processo norteador da criação da página, deixarei aqui alguns tópicos a serem abordados, os alunos responsáveis pela edição dos tópicos deverão fazer pesquisas em livros, revistas, páginas da web afim de preencher seu conteúdo.	
	Após inserir um novo conteúdo da wiki o aluno deve obrigatoriamente especificar a fonte de onde a informação foi retirada.	
	Estrutura dos Tópicos	
	<ul style="list-style-type: none"> • História de Mecânica Quântica • Descobertas provenientes da teoria Quântica • Função de onda, autovetores, autovalores e operadores quânticos • A equação de Schrödinger 	

Figura A.5: Estrutura e atividades do módulo 2

Módulo 3 - A Computação quântica

Módulo 3 - A computação quântica

Nesse módulo abordaremos de forma simplificada alguns dos principais conceitos da computação quântica!



Conteúdos e objetivos

- **O computador quântico:**
 - Entender o que é um computador quântico e quais as suas funcionalidades.
- **A teoria por trás dos bits quânticos:**
 - Conhecer as possibilidades da computação quântica e alguns candidatos à bits quânticos.
- **Portas lógicas quânticas**
 - Conhecer a forma matricial e o efeito de algumas portas lógicas quânticas sobre os estados de qubits, ou sequências de qubits.
- **Candidatos a bits quânticos**
 - Conhecer alguns sistemas físicos que podem ser utilizados para implementar os bits quânticos.
- **Possibilidades e limitações dos computadores quânticos**
 - Compreender quais são as possibilidades e limites dos computadores quânticos.

Figura A.6: Página inicial do módulo 3 - A computação quântica.

- **O computador quântico:**
Conhecer a diferença entre computadores eletrônicos e quânticos, o histórico da computação quântica e algumas condições necessárias para a implementação desses computadores.
- **A teoria por trás dos bits quânticos:**
Entender o que são sistemas quânticos de dois níveis, estados mistos de um qubit, entender o emaranhamento quântico, a codificação superdensa e as possibilidades de transmissão de dados via emaranhamento quântico, compreender a formulação teórica do qubit, compreender o que é superposição de estados, conhecer e construir strings - associações de qubits, calcular probabilidades em qubits, calcular constantes de normalização para diferentes estados.
- **A esfera de Bloch:**
Conhecer e compreender a interpretação geométrica de um qubit genérico feita a partir da esfera de Bloch.

- Candidatos a bits quânticos:

Conhecer quais sistemas quânticos podem ser implementados como bits quânticos, conhecer suas vantagens e desvantagens, conhecer os métodos de manipulação dos estados quânticos e a forma de leitura dos bits.

Na figura A.7, mostramos a estrutura e o conteúdo do módulo 3:











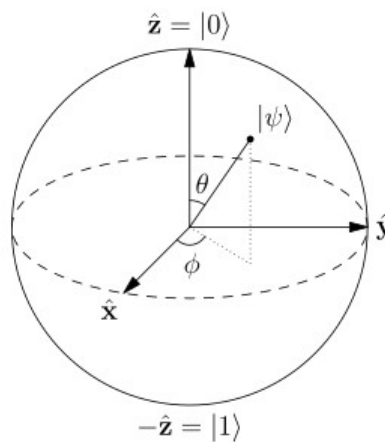
 Fórum - A computação quântica	<input type="checkbox"/>
Acompanhe as postagens do fórum do módulo 3 e deixe suas dúvidas e comentários relacionados às atividades propostas!	
 Conteúdos e objetivos	<input type="checkbox"/>
Oculto para estudantes	
 O computador quântico	<input type="checkbox"/>
Texto suporte da seção - O computador quântico	
 O computador quântico - Leitura Complementar	<input type="checkbox"/>
Leitura complementar da seção - O computador quântico	
 Informação Quântica - Informativo CBPF - Leitura Complementar Documento PDF	<input type="checkbox"/>
Leia o pequeno informativo extremamente instrucional produzido pelo CBPF - Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas/MCT que traz um panorama atual da Informação Quântica.	
Após a leitura, comente no fórum algo que tenha achado interessante ou alguma dúvida sobre o conteúdo!	
 A teoria por trás dos bits quânticos	<input type="checkbox"/>
Texto suporte da seção - A teoria por trás dos bits quânticos	
 A teoria por trás dos bits quânticos - Parte 2	<input type="checkbox"/>
Segunda parte do Texto suporte da seção - A teoria por trás dos bits quânticos	
 Atividade 1 - A computação Quântica	<input type="checkbox"/>
 Atividade 2 - A computação quântica	<input type="checkbox"/>
 Avaliação do Módulo 3 - A computação quântica	<input type="checkbox"/>

Figura A.7: Estrutura e conteúdo do terceiro módulo.

Módulo 4 - Operações lógicas com bits quânticos

Módulo 4 - Operações lógicas com bits quânticos**Conteúdos:**

- A esfera de Bloch;
- Operações lógicas com bits quânticas (**portas lógicas quânticas**, algoritmos quânticos, circuitos quânticos)

Objetivos:

Conhecer e compreender a interpretação geométrica de um qubit genérico feita a partir da esfera de Bloch, atuar algumas **portas lógicas quânticas** (quantum gates), compreender a atuação das **portas lógicas quânticas** nos estados misto e puro, conhecer algoritmos quânticos simples.

Figura A.8: Página inicial do módulo 4

- Operações lógicas com bits quânticos:

Atuar algumas portas lógicas quânticas (quantum gates) e compreender qual a sua atuação em um qubit nos estados misto e puro, conhecer algoritmos quânticos simples.

Na figura A.9 trazemos uma captura de tela com o conteúdo e a estrutura do quarto módulo do AVA:






 A esfera de Bloch	<input type="checkbox"/>
Texto suporte da seção - A esfera de Bloch	
 Portas lógicas quânticas	<input type="checkbox"/>
Texto suporte da seção - Portas lógicas quânticas.	
 Atividade 1 - A esfera de Bloch	<input type="checkbox"/>
 Link da internet - Simulação: Evolução temporal de um Qubit	<input type="checkbox"/>
Veja uma simulação da evolução temporal de um qubit para um sistema de spin 1/2. (Clique com o botão direito do mouse e traduza para o português caso ache necessário)	
Nessa simulação podemos perceber como o ângulo azimutal varia com o tempo quando o spin está na presença de um campo magnético externo (esse movimento é chamado de precessão), sem afetar a probabilidade das medidas no eixo Z. Além disso, no último passo da simulação (clique em passo-a-passo, depois em 4) vemos que, caso o estado esteja inicialmente determinado em up ou down não haverá movimento de precessão e o estado quântico não mudará com o tempo!	
 Avaliação do módulo 4	<input type="checkbox"/>

Figura A.9: Conteúdo e estrutura do módulo 4.

Módulo 5 - Possibilidades e limitações da computação quântica

- Decoerência:
Conhecer o processo da perda e correção de informação por meio da decoerência.
- Processamento de dados, criptografia e transmissão de dados:
Compreender as possibilidades e limitações desses processos em computadores quânticos.

A.1 Construindo o seu próprio AVA no Moodle®

O ambiente Moodle® conta com diversos recursos que permitem o controle do progresso de cada estudante, como data de conclusão para atividades, progressão a partir de nota mínima alcançada, progressão mediante participação em fórum de comentários ou confirmações de leitura.

O conteúdo é ofertado de acordo com a sequência dos módulos mostrada anteriormente em forma de páginas interativas, com figuras, vídeos embutidos, e links externos. Caso o estudante deseje um detalhamento mais profundo há uma leitura complementar mais aprofundada dos assuntos mais complexos. Ao decorrer de cada módulo, os alunos são apresentados à conteúdos multimídia como vídeos educativos legendados disponibilizados por portais de conteúdo bastante conceituados como Kurzgesagt, TedEd entre outros.

O ambiente está hospedado no site moodlecloud (www.moodlecloud.com), e pode ser acessado clicando aqui (<http://qubit.moodlecloud.com>). Você pode acessar o sistema e visualizar todos os módulos e atividades do AVA utilizando o login: **visitante**, e a senha: **visitante01**. O site moodlecloud oferece um sistema de edição online intuitivo e com as versões mais atualizadas da plataforma Moodle®. O serviço é gratuito para um limite de 50 alunos por curso com uma limitação de tamanho para arquivos submetidos via upload.

Após a aplicação do mini-curso com uma turma de alunos de do 3º ano do Ensino Médio, uma nova versão do sistema foi desenvolvida, essa nova versão levou em conta as principais dificuldades de utilização encontradas pelos estudantes durante o decorrer do curso. Percebeu-se que é necessário um ambiente limpo, que exiba na tela somente a informação fundamental para aquela atividade que o aluno estiver se dedicando no momento, caso contrário os estudantes ficam confusos e tanto a navegação no site, quanto o decorrer do curso, são comprometidos.

Optou-se por utilizar o serviço disponibilizado pelo site MoodleCloud pela sua gratuidade, o que o torna bastante atrativo para a maioria dos professores que desejam utilizar novos recursos para enriquecer suas aulas. Apesar da língua oficial do site ser inglês é possível ajustar as configurações do sistema para o português do Brasil. Apesar do sistema ser bastante intuitivo, há muito a se aprender antes de utilizá-lo e por isso é interessante visitar esse tutorial que explica, alguns passos que

devem ser tomados, relativos a forma de se utilizar cada um dos recursos presentes no sistema Moodle. Para utilizar o MoodleCloud e construir o seu próprio ambiente virtual de aprendizagem é necessário criar um cadastro, que pode ser feito clicando aqui (<https://moodlecloud.com/app/en/>).

A.2 Produto educacional - Sugestão de sequência didática

O público alvo a qual se destina a aplicação do curso Qubit é o de alunos do terceiro ano do Ensino Médio adiante. É necessário que o aluno tenha noções básicas de operações com matrizes (que fazem parte da ementa do Ensino Médio) e apresente interesse em aprender conteúdos novos de Física, nesse sentido, recomenda-se que o professor que venha a aplicar o curso com os seus estudantes faça uma revisão sobre o tema. É interessante que o público tenha familiaridade com o computador, que saibam navegar e pesquisar informações na internet, usar ferramentas como os navegadores da internet e que estejam dispostos a seguir o curso até o fim. É requerido também, um alto nível de abstração, pois muitos conceitos envolvidos na mecânica quântica são abstratos ou apresentam pouca relação com a física clássica que é ministrada em sala de aula.

O curso Qubit deve ser usado como uma ferramenta auxiliar no processo de ensino da mecânica quântica e quando for de interesse do professor uma abordagem mais profunda, na qual se demonstre a preocupação de apresentar não somente os aspectos teóricos, mas também uma futura, e muito poderosa, aplicação da mecânica quântica - a computação baseada em sistemas quânticos.

O tema em questão é muito rico, porém relativamente novo. Nesse caso, optou-se em trazer apenas a informação fundamental para o entendimento global do assunto, no entanto, o professor que for utilizar o material para suas aulas poderá trazer novos temas, notícias, descobertas e debates pertinentes, quer seja nas seções de fóruns, ou ainda na forma de links externos com notícias e páginas de texto da internet.

Uma barreira inicialmente encontrada para se disponibilizar conteúdos confiáveis é a língua, uma vez que a maioria das publicações sobre o assunto se restringe ao idioma inglês, trazendo à muitos alunos uma dificuldade extra na compreensão do tema. No entanto, os navegadores de internet como o Google Chrome apresentam recursos muito úteis e precisos para a tradução de páginas e até mesmo de documentos. Sendo assim, é possível disponibilizar conteúdos no Moodle em outras línguas quando algum assunto, ou notícia, não for encontrado na língua portuguesa.

A ferramenta Moodle é muito poderosa e oferece muitos recursos que podem ser utilizados pelo professor, no entanto, para que o seu uso não fique demasiadamente

complexo e se perca de vista o foco principal, optou-se pela formulação de módulos com recursos variados, mas com moderação. Percebeu-se que a aplicação de muitos recursos diferentes, quando usados sem o devido cuidado, adicionam pouco à experiência e compreensão do tema pelo estudante.

Recomenda-se que seja feitas pelo menos uma aula semanal, durante a realização do curso, essas aulas tem como intuito nortear o seu andamento e sanar algumas dúvidas que os alunos apresentem durante o processo. Abaixo, trazemos uma sequência didática adotada durante a realização do curso que pode ser utilizada por professores do Ensino Médio que desejem ministrar o curso de Computação quântica:

- **Aula 1:** Informação Clássica. **Público:** Alunos do 3^a ano E.M. **Conteúdo:** Grandezas digitais e analógicas, O bit clássico, a base binária e a base decimal, Operações lógicas (portas lógicas), Possibilidades e limitações físicas da computação clássica. **Desenvolvimento:** Explicação sobre grandezas analógicas e digitais com exemplos, exemplificação da conversão entre bases binárias e decimais, aplicações de portas lógicas, discussão sobre a Lei de Moore. **Duração estimada:** 45 minutos **Avaliação:** Atividade Presencial (6 questões) + Atividades online através do sistema Moodle Qubit. **Recursos Didáticos:** Aula expositiva, pincel, quadro, papel.
- **Aula 2:** O que é Mecânica Quântica. **Público:** Alunos do 3^a ano E.M. **Conteúdo:** O surgimento da mecânica quântica; A função de onda; Autoestados e autovalores; Alguns postulados da Mecânica Quântica. **Desenvolvimento:** Explicação sobre a evolução e o surgimento da mecânica quântica, aspectos qualitativos da função de onda, noções de autovalores e autovetores, exposição dos principais postulados da mecânica quântica e suas consequências para a área. **Duração estimada:** 45 minutos. **Avaliação:** Atividade Presencial (6 questões) + Atividades online através do sistema Moodle Qubit. **Recursos Didáticos:** Aula expositiva, pincel, quadro, papel.
- **Aula 3:** A computação quântica. **Público:** Alunos do 3^a ano E.M. **Conteúdo:** O computador quântico, a teoria por trás dos bits quânticos, candidatos à bits quânticos. **Desenvolvimento:** Explicação sobre o que é um computador quântico e o que o difere de um computador clássico, entender como é o estado de um

qubit, como calcular a probabilidade de medir-se um qubit nos estados up e down.

Duração estimada: 45 minutos. **Avaliação:** Atividade Presencial (4 questões) + Atividades online através do sistema Moodle Qubit. **Recursos Didáticos:** Aula expositiva, pincel, quadro, papel.

- **Aula 4:** Operações lógicas com bits quânticos. **Público:** Alunos do 3^a ano E.M. **Conteúdo:** A esfera de Bloch, Operações lógicas com bits quânticas (portas lógicas quânticas, algoritmos quânticos, circuitos quânticos) **Desenvolvimento:** Explicação sobre operações lógicas com bits quânticos e esfera de Bloch. **Duração estimada:** 45 minutos. **Avaliação:** Atividade Presencial (4 questões) + Atividades online através do sistema Moodle Qubit. **Recursos Didáticos:** Aula expositiva, pincel, quadro, papel.
- **Aula 5:** Decoerência e emaranhamento quântico. **Público:** Alunos do 3^a ano E.M. **Conteúdo:** Decoerência, emaranhamento quântico, paradoxo EPR, Estado de Bell. **Desenvolvimento:** Explicação sobre os fenômenos de decoerência e emaranhamento quântico através, apresentação do paradoxo EPR, demonstração do Estado de Bell. **Duração estimada:** 45 minutos. **Avaliação:** Atividade Presencial (4 questões) + Atividades online através do sistema Moodle Qubit. **Recursos Didáticos:** Aula expositiva, pincel, quadro, papel.

A.3 Uma experiência de uso do produto educacional

Após a elaboração da primeira versão do produto educacional, o ambiente Qubit foi disponibilizado online, ofertou-se para uma turma de 3º ano do Ensino Médio a inscrição no curso, feita logo em seguida. Ao todo, 19 alunos se voluntariaram a participar, 1 deles desistiu antes do começo das atividades, e outros dois não chegaram a concluir as atividades dos módulos.

Apesar de os estudantes que participaram do curso serem bastante familiarizados com a tecnologia e com a navegação da internet, muitos deles tiveram dificuldades em acessar o sistema e navegar por ele. A versão inicial do AVA mostrava muita informação nas páginas iniciais dos módulos, tornando a navegação menos intuitiva. Ao fim da primeira semana, e com o término do primeiro módulo, percebeu-se a necessidade de marcar aulas presenciais para guiar o avanço das atividades. Durante cinco semanas, foram ministradas cinco aulas, com duração de 1 hora cada, norteadas a fazer uma introdução do assunto do módulo a ser trabalhado naquela semana. Ao fim de cada aula era entregue uma atividade impressa sobre o assunto que deveria ser feita até a semana seguinte. Percebeu-se, no entanto, que o foco principal do trabalho, que era a aplicação de um curso essencialmente online havia sido perdido já que os alunos não estavam estudando o assunto por conta própria, ou não usavam todas as potencialidades do ambiente Qubit ou buscavam por poucas informações novas, disponibilizadas no ambiente. Com base nessas observações, uma versão do ambiente mais intuitiva e enxuta foi elaborada.

Para controlar a progressão dos estudantes que não fizessem as atividades estabelecidas pelo módulo, ou ainda não concluíssem a leitura de algum dos textos de suporte, foram estabelecidas algumas condições de conclusão. Os alunos só poderiam passar para a próxima atividade ou leitura se essas condições fossem cumpridas.

Nas seções a seguir apresentamos as atividades disponibilizadas na primeira versão do módulo, bem como algumas repostas feitas pelos alunos, escolhidas de maneira aleatória. O **Módulo 1 - A informação clássica**, trouxe as seguintes atividades e condições de progressão, e exemplos de participação:

- **Fórum - Informação Clássica** - Conclusão: Manual (O usuário deve visitar o fórum marcar em um campo que concluiu sua participação). Somente um aluno deixou seu comentário no fórum:

Aluno L.F: *"Um bit tem um único valor, zero ou um, verdadeiro ou falso, ou neste contexto quaisquer dois valores mutuamente exclusivos. O bit é uma unidade de medida que carrega energia."*

- **Questionário Inicial** - Conclusão: Automática (O aluno deve responder as perguntas do questionário para progredir). Dezesesseis alunos responderam a todas as questões do questionário. O menor tempo registrado de resposta foi de 4 minutos e 22 segundos, enquanto o maior tempo foi de 4 dias. Abaixo, temos uma resposta dada por um dos alunos à uma das perguntas feitas no questionário: **Questão 1** Você consegue explicar a diferença entre grandezas analógicas e digitais? O que você acha que diferencia uma da outra? dê exemplos.

Aluno M.M: *"Grandeza Digital é aquela que é finita e consegue ser dividida em outras partes, por exemplo o o relógio digital, os nossos próprios dedos, sendo que na grandeza digital não existem números quebrados, por exemplo 2,5, sempre será 2 ou 3. Grandeza Analógica ela pode ser infinita que são valores inteiros que quando divididos se tornam uma grandeza digital, para exemplificar, o tempo quando ele é dividido em horas, minutos e segundos ele se torna digital. Exemplo prático de grandeza analógica é o velocímetro".*

- **Atividade - Glossário de Termos** Conclusão: Automática (O estudante deve visualizar esta atividade para concluí-la e criar pelo menos 5 itens). Nessa atividade pede-se que o aluno complemente o conceito e o significado dos termos mais importantes da seção através dos comentários, trazendo conceitos novos, sem repetir o que já foi escrito pelos seus colegas. Segue o exemplo de um dos tópicos respondido, cuja palavra chave era "algoritmo":

Aluno J.C: *É uma série de raciocínios que mostra o que deve ser feito;*

Aluno M.M: *são uma sequência de comandos para desenvolver uma tarefa como se fosse instruções;*

Aluno W.R: *o algoritmo não explica "o que é", mas está preocupado no "como fazer"*

Aluno W.D: *conjunto das regras e procedimentos lógicos perfeitamente definidos que levam à solução de um problema em um número finito de etapas;*

Aluno N.L: *Sequência de regras lógicas feitas para resolução de problemas e operações.*

- **Atividade - Bases binárias e bases decimais** Conclusão: Automática (O estudante deve postar seu trabalho nesta atividade de forma a completá-la). Nessa atividade era pedido que os alunos fizessem a conversão de diversos números representados tanto nas formas binária e decimal. Quinze alunos submeteram suas respostas a essa atividade.
- **Avaliação do Módulo 1** Conclusão: Automática (O estudante deve postar seu trabalho nesta atividade de forma a completá-la). Nessa atividade pediu-se que os estudantes dissertassem sobre os seguintes tópicos: Como o computador mudou a nossa forma de agir; As potencialidades dos computadores eletrônicos; Os limites dos computadores atuais; A busca por novas alternativas de computadores. Dezesseis alunos submeteram suas dissertações, a menor dissertação apresentou 80 palavras, enquanto a maior, 596. Segue abaixo o exemplo de uma das dissertações enviadas:

Aluno M.M: O computador facilitou muito a vida de matemáticos, físicos e até de pessoas comuns. Criado por Alan Turing com o objetivo de desvendar mensagens alemãs na Segunda Guerra Mundial, ele criou a primeira ideia de algoritmo e foi extremamente importante para o começo da inteligência artificial. [...] Os computadores tem várias funcionalidades desde tarefas muito complexas como cálculos complicados e a utilização de softwares pesados que tem até ligações com satélites e também pode ser usado para o ensinamento de diversas matérias principalmente Física e Matemática, facilitando a vida de algumas pessoas também com o EaD. [...] A alternativa onde a computação já está caminhando é a computação quântica, que busca a criação de computadores e chips que não são baseados nem na física nem na eletrônica clássica, mas sim em manipulação de bits quânticos onde os dados transmitidos de um sistema para outro se tornariam praticamente instantâneos.

O segundo módulo do curso - **O que é Mecânica Quântica** trouxe as seguintes atividades, condições de conclusão e exemplos de participações:

- **Fórum - O que é Mecânica Quântica** - Conclusão: Manual (O usuário deve visitar o fórum marcar em um campo que concluiu sua participação). Nesse fórum, quatro estudantes deixaram seus comentários.
- **Atividade - Questionário** - Conclusão: Automática (O estudante deve responder as perguntas do questionário para prosseguir. Nesse questionário de seleção verdadeiro ou falso, houveram dezesseis alunos participantes. O menor tempo de resposta foi de 8 minutos e 33 segundos, enquanto o maior tempo de resposta foi de 1 dia e 21 horas.
- **Atividade - Glossário de Termos** - Conclusão: Automática (O estudante deve visualizar esta atividade para concluí-la e criar pelo menos 5 itens). Quinze alunos participaram com suas respostas nessa atividade. Em seguida, apresenta-se como exemplo as repostas dadas a um dos tópicos cuja palavra chave era Max Planck:

Aluno W.R: *Estudou as radiações eletromagnéticas, criando a constante de planck, que é usado para calcular a energia do fóton;*

Aluno Y.L: *Planck afirma e comprova que as partículas viajam em "pacotes" de energia;*

Aluno N.L: *Considerado pai da mecânica quântica e descobriu os quanta de luz;*

- **Avaliação do módulo 2 - Wiki colaborativa** - Conclusão: Automática (O estudante deve alterar o conteúdo da página e marcar em um campo a opção concluído para finalizar seu trabalho). Nessa avaliação pediu-se que todos os estudantes participassem da elaboração de uma wiki colaborativa, os tópicos sugeridos foram: História de Mecânica Quântica; Descobertas provenientes da teoria quântica; Função de onda, autovetores, autovalores e operadores quânticos; A equação de Schrödinger. Ao todo foram feitas 20 edições na página, resultando em um arquivo pouco maior que 10 páginas, construído por onze estudantes. O arquivo na versão pdf pode ser acessado clicando aqui.

O **módulo 3 - A computação quântica** apresentou as seguintes atividades e contou com as seguintes participações:

- **Pesquisa: A computação quântica:** Conclusão: Automática (O estudante deve submeter o seu trabalho para concluir a atividade). Nessa atividade pediu-se que os estudantes fizessem uma pesquisa na internet sobre as tentativas de se produzir um computador quântico, listando quais são as dificuldades e os avanços encontrados no processo. Treze estudantes submeteram suas pesquisas nessa atividade. Segue abaixo um exemplo:

Aluno J.C: [...] Dispositivos simples como espelhos e beamsplitters podem ser usados para realizar manipulações elementares em fótons. Interessantemente, uma dificuldade maior tem sido produzir fótons separados sucessivamente; experimentalistas têm, ao invés disto, optado por usar esquemas que produzem fótons únicos "de vez em quando", randomicamente, e esperar até que tal evento ocorra. [...] Uma desvantagem é que fótons não interagem diretamente uns com os outros. Em vés disto, a interação tem que ser mediada por outra coisa, como um átomo, o que introduz ruído adicional e complicações no experimento. Uma interação efetiva entre dois fótons é preparada, que essencialmente funciona em dois passos: o fóton número um interage com o átomo, que por sua vez interage com o segundo fóton, causando uma interação completa entre os dois fótons. [...]

- **Questionário:** Conclusão: Automática (O estudante deve submeter o seu trabalho para concluir a atividade). Nesse questionário pediu-se que os estudantes respondessem quais as vantagens em se utilizar um computador quântico em relação aos computadores clássicos, em seguida os alunos foram questionados quanto à utilidade dos computadores quânticos: teriam os computadores quânticos as mesmas finalidades dos nossos computadores atuais? Treze estudantes responderam ao questionário, a menor resposta teve 80 palavras e a maior, 165. Confira um exemplo de resposta:

Aluno W.R: O principal ganho desses computadores é a possibilidade de resolver algoritmos num tempo eficiente, alguns problemas que na computação clássica levariam tempo impraticável (exponencial no tamanho da entrada), como por exemplo, a fatoração em primos de números naturais. A redução do tempo de resolução deste problema possibilitaria a quebra da maioria dos sistemas de criptografia usados atualmente. As utilidades de um computador quântico não

seriam as mesmas de um computador clássico, uma vez que, por exemplo, um computador quântico poderia resolver um problema muito rapidamente. [...]

- **Avaliação do módulo 3 - Perguntas - Conclusão:** Automática (O estudante deve submeter o seu trabalho para concluir a atividade). Nessa avaliação foram feitas sete perguntas aos estudantes: 1) Quais as vantagens de um computador quântico sobre um computador eletrônico? 2) Cite algumas das possíveis aplicações para os computadores quânticos; 3) O que é emaranhamento quântico e qual o seu papel na computação quântica? 4) O que é um par EPR? Explique; 5) Cite alguns exemplos de candidatos à bits quânticos; 6) Quais as dificuldades em se construir um computador quântico plenamente funcional? 7) O que diz o Teorema de Não-Clonagem da informação e qual a sua importância para os computadores quânticos? Doze estudantes responderam ao questionário completo. A resposta mais curta teve 608 palavras, e a menor, apenas 77.

O quarto **módulo - Operações lógicas com bits quânticos** teve uma adesão menor por parte dos estudantes, apesar de ser um dos mais importantes para o entendimento da computação quântica:

- **Avaliação do Módulo 4 - Conclusão:** Automática (O estudante deve submeter o seu trabalho para concluir a atividade): Nessa atividade foram feitas oito perguntas, baseadas no conteúdo do módulo, aos estudantes: 1) Quais as funções das portas lógicas quânticas? O quê pode ser feito por meio da aplicação das mesmas? 2) As portas lógicas quânticas são reversíveis? Se sim, o quê isso significa? 3) É possível fazer um algoritmo que copie o estado de um bit quântico e o transfira para outro bit? Explique; 4) Pesquise e cite a função de pelo menos cinco portas lógicas quânticas; 5) Pra quê serve a esfera de Bloch? como as portas lógicas atuam sobre ela? 6) Pesquise na internet e no módulo 4 por algum algoritmo quântico já existente e cite brevemente qual a sua função. 7) Pesquise pela internet por avanços na computação quântica atual e indique aqui quais foram os resultados das pesquisas recentes (cite fontes). 8) Qual a importância dos estados emaranhados na computação quântica? qual tipo de vantagem esse comportamento quântico leva em relação aos computadores eletrônicos? Somente 9 estudantes participaram da resolução dessa avaliação. A maior resposta teve 533 palavras, enquanto a menor, somente 215.

O último módulo do curso apresentou somente textos de suporte que tratavam do conteúdo "Possibilidades e limitações da computação quântica", onde tratava-se de conceitos como emaranhamento quântico, decoerência e teorema de não-clonagem. No entanto, esse módulo foi implementado de forma mais completa na segunda versão do ambiente Qubit.

Em todos os módulos há uma grande quantidade de textos, imagens, vídeos, links externos com simulações, se o estudante tem o interesse de acessar e interagir com todos os recursos ele pode aprender ainda mais sobre o assunto abordado. Além disso, a segunda versão do AVA apresenta melhorias de navegação e também no volume e complexidade das atividades propostas. Nas figuras abaixo trazemos algumas capturas de tela com o menu de navegação, a página inicial e a página de conteúdos de cada um dos módulos da nova versão do AVA Qubit:

Módulo 1 - A informação Clássica

Seja bem vind@ ao primeiro módulo do nosso curso. Para entendermos o que é computação quântica é necessário compreender os elementos básicos da computação clássica, certo?

Conteúdo e Objetivos

- **Grandezas digitais e analógicas:**
 - Entender o que são *grandezas digitais e analógicas*, suas diferenças e quais grandezas físicas podem ser usadas para implementá-las.
- **O bit clássico, a base binária e a base decimal:**
 - Entender o que é um bit, sequência de bits, aprender a notação binária, aprender a realizar a conversão entre notação binária e decimal.
- **Operações lógicas (portas lógicas):**
 - Conhecer operações lógicas simples, construir um algoritmo para a implementação de alguma tarefa simples.

Metodologia

Serão utilizados os recursos: texto-suporte, links externos, vídeos indexados, questionários, fórum de debate e avaliações.

Módulo 1 - A informação Clássica

- Grandezas Digitais e Analógicas
- O bit clássico, a base binária e a base decimal
- Possibilidades e limitações físicas da computação ...
- Operações lógicas (portas lógicas)
- Atividade 1 - Glossário de Termos
- Atividade 2 - Lista de exercícios -Grandezas digit...
- Atividade 3 - Dissertação

Figura A.10: Nova versão do módulo 1.

Módulo 2 - O que é a Mecânica Quântica?

Seja bem vindo ao segundo módulo do nosso minicurso, nesse módulo faremos uma breve introdução sobre o que é a mecânica quântica e algumas das suas características.

Conteúdo e objetivos:

- [O surgimento da mecânica quântica](#);
 - Conhecer um pouco da história do surgimento da mecânica quântica e seus principais nomes,
- [A função de onda](#);
 - Entender algumas propriedades básicas da função de onda
- [Autoestados e autovalores](#);
 - Aprender o que são os [autoestados e autovalores](#) em sistemas quânticos
- [O spin quântico](#)
 - Conhecer o [spin quântico](#) e sua história, entender as representações dos spins em matrizes 2×2 , conhecer os operadores de spin nas direções x , y e z , conhecer os operadores S_x e S_y , conhecer o operador S_z .
- [Alguns postulados da Mecânica Quântica](#);
 - Conhecer alguns dos principais postulados da mecânica quântica.

Metodologia

Serão utilizados os recursos: texto-suporte, links externos, vídeos indexados, questionários, fórum de debate e avaliações.

Módulo 2 - O que é a Mecânica Quântica?
















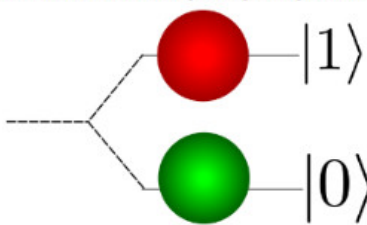
-  [O surgimento da mecânica quântica](#)
-  [Link externo: O surgimento da Mecânica Quântica](#)
-  [A função de onda](#)
-  [A função de onda \(2ª Parte\)](#)
-  [Autoestados e autovalores](#)
-  [Autoestados e autovalores \(2ª Parte - Rotações\)](#)
-  [Autoestados e autovalores - Simulação - Superposiç...](#)
-  [Simulação - Colapso da função de onda - Link externo](#)
-  [O Spin Quântico](#)
-  [Simulação - O spin quântico - Experimento de Ster...](#)
-  [Simulação - O spin quântico - Comprovação experime...](#)
-  [Alguns postulados da mecânica quântica](#)
-  [Atividade 1 - Glossário de Termos](#)
-  [Atividade 2 - Questionário](#)
-  [Atividade 3 - Lista de exercícios](#)

Figura A.11: Nova versão do módulo 2.

Módulo 3 - A computação quântica

Nesse módulo abordaremos de forma simplificada alguns dos principais conceitos da computação quântica!



Conteúdos e objetivos

- **O computador quântico:**
 - Entender o que é um computador quântico e quais as suas funcionalidades.
- **A teoria por trás dos bits quânticos:**
 - Conhecer as possibilidades da computação quântica e alguns candidatos a bits quânticos.
- **Portas lógicas quânticas**
 - Conhecer a forma matricial e o efeito de algumas **portas lógicas quânticas** sobre os estados de qubits, ou sequências de qubits.
- **Candidatos a bits quânticos**
 - Conhecer alguns sistemas físicos que podem ser utilizados para implementar os bits quânticos.
- **Possibilidades e limitações dos computadores quânticos**
 - Compreender quais são as possibilidades e limites dos computadores quânticos.

Módulo 3 - A computação quântica

- O computador quântico
- O computador quântico - Parte 2
- Artigo - Introdução à computação quântica - Leitur...
- O computador quântico - Leitura complementar
- O computador quântico - Link externo - Leitura com...
- A teoria por trás dos bits quânticos
- A esfera de Bloch
- Simulação- A esfera de Bloch - Link externo comple...
- Portas lógicas quânticas
- Candidatos a bits quânticos
- Possibilidades e limitações dos computadores quânt...
- Atividade 1 - Questionário
- Atividade 2 - Questionário
- Atividade 4 - Lista de exercícios

Figura A.12: Nova versão do módulo 3.