



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO



Jaqueline Garcia Silva

**PROPRIEDADES DE ESCALA EM UM MODELO COM
COMPORTAMENTO COLETIVO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CATALÃO – GO, 2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese

2. Nome completo do autor

Jaqueline Garcia Silva

3. Título do trabalho

PROPRIEDADES DE ESCALA EM UM MODELO COM COMPORTAMENTO COLETIVO

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

- a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
 - b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
- O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Celso Vieira Abud, Orientador**, em 04/05/2020, às 12:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **JAQUELINE GARCIA SILVA, Discente**, em 04/05/2020, às 12:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1309261** e o código CRC **8E9DFB5E**.

JAQUELINE GARCIA SILVA

PROPRIEDADES DE ESCALA EM UM MODELO COM
COMPORTAMENTO COLETIVO

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem e Otimização pela Universidade Federal de Goiás.

Orientador:

Celso Vieira Abud

CATALÃO – GO

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Garcia Silva, Jaqueline
PROPRIEDADES DE ESCALA EM UM MODELO COM
COMPORTAMENTO COLETIVO [manuscrito] / Jaqueline Garcia
Silva. - 2020.
48 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Celso Vieira Abud.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade
Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão,
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização, Catalão, 2020.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui lista de figuras.

1. Sincronização. 2. Modelo de Kuramoto. 3. Teoria de escala . 4.
Classe de universalidade. I. Vieira Abud, Celso , orient. II. Título.

CDU 5



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 03 da sessão de Defesa de Dissertação de **Jaqueline Garcia Silva**, que confere o título de Mestre(a) em Matemática, na área de concentração em **Modelagem e Otimização**.

Em 06 de abril de 2020, às 10h 03min, reuniram-se os componentes da banca examinadora, professores(as) **Dr. Celso Vieira Abud (IMTec) (orientador) - à distância pelo RNP, Dr. Fran Sérgio Lobato (FEQ/UFU) - à distância pelo RNP, Dr. Paulo Eduardo Gonçalves de Assis (IF) - à distância pelo RNP** para, em sessão pública realizada na Sala Virtual do Sistema de webconferência da Rede Nacional de Ensino e Pesquisa (RNP), procederem a avaliação da Dissertação intitulado(a) "*PROPRIEDADES DE ESCALA EM UM MODELO COM COMPORTAMENTO COLETIVO*", de autoria de **Jaqueline Garcia Silva - à distância pelo RNP**, discente do Programa de Pós-graduação em Modelagem e Otimização – PPGMO, da "UFG/RC - UFCAT em transição". A sessão foi aberta pelo(a) presidente, que fez a apresentação formal dos membros da banca. Em seguida, a palavra foi concedida ao(à) discente que, em 45 min procedeu a apresentação. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o(a) examinando(a). Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da Dissertação, que foi considerado(a): **(X) Aprovado(a) ou () Reprovado(a)**. Cumpridas as formalidades de pauta, às 12h 01 min a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu Celso Vieira Abud, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo(a) discente.

Obs: "*Banca Examinadora de Qualificação/Defesa Pública de Dissertação/Tese realizada em conformidade com a Portaria da CAPES n. 36, de 19 de março de 2020, de acordo com seu segundo artigo:*

Art. 2o A suspensão de que trata esta Portaria não afasta a possibilidade de defesas de tese utilizando tecnologias de comunicação à distância, quando admissíveis pelo programa de pós-graduação stricto sensu, nos termos da regulamentação do Ministério da Educação."

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Fran Sérgio Lobato, Usuário Externo**, em 06/04/2020, às 12:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Celso Vieira Abud, Orientador**, em 06/04/2020, às 12:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **JAQUELINE GARCIA SILVA, Discente**, em 06/04/2020, às 12:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Paulo Eduardo Gonçalves De Assis, Professor do Magistério Superior**, em 06/04/2020, às 17:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1265020** e o código



CRC **99C8ACF1**.

RESUMO

SILVA, J.G.. *PROPRIEDADES DE ESCALA EM UM MODELO COM COMPORTAMENTO COLETIVO*. 2020. 54 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem e Otimização) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás, Catalão – GO.

Desenvolvido para a modelagem do fenômeno de sincronização, o modelo de Kuramoto consiste em um sistema de N -osciladores acoplados com frequências naturais distribuídas aleatoriamente cuja dinâmica é descrita por um conjunto de equações diferenciais. Variações no número de osciladores e na aleatoriedade imposta pela distribuição das frequências naturais induzem à mudanças no processo de sincronização. Neste trabalho, uma análise de escala sobre o número de osciladores e o parâmetro de dispersão das frequências naturais para as funções Normal, de Cauchy-Lorentz e de Laplace foi realizada. Mostrou-se em ambos os casos que a sincronização, metrificada pelo parâmetro de ordem, obedece a funções de escala específica e, portanto, o número de osciladores e o parâmetro de dispersão da distribuição das frequências naturais são invariantes de escala, isto é, não alteram qualitativamente o processo de sincronização. A metodologia proposta pode auxiliar a análises de outros parâmetros ou modelos.

Palavras-chaves: Sincronização, Modelo de Kuramoto, Teoria de escala, Classe de universalidade.

ABSTRACT

SILVA, J.G.. *SCALE PROPERTIES IN A MODEL WITH COLLECTIVE BEHAVIOR*. 2020. 54 f. Master Thesis in Modelling and Optimization – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás, Catalão – GO.

Developed for modeling the synchronization phenomenon, the Kuramoto model consists of a system of N -coupled oscillators with randomly distributed natural frequencies whose dynamics is described by a set of differential equations. Variations in number of oscillators and randomness imposed by distribution of natural frequencies induce changes in the synchronization process. In this work, a scale analysis on the number of oscillators and the dispersion parameter of natural frequencies of Normal, Cauchy-Lorentz and Laplace distributions was performed. It is shown in both cases that the synchronization, measured by the order parameter, obeys specific scaling functions and, therefore, the number of oscillators and the order parameters are scalar invariants, i.e., they do not change qualitatively the synchronization. The proposed methodology can aid in the analysis of other parameters or models.

Keywords: Synchronization, Kuramoto Model, Scale theory, Class of universality.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Representação do parâmetro de ordem no plano complexo	12
Figura 2.2 – Evolução temporal do parâmetro de ordem	16
Figura 2.3 – Simulação numérica da evolução temporal do parâmetro de ordem	17
Figura 2.4 – Curvas simuladas para diferentes quantidades de osciladores	18
Figura 3.1 – Curvas simuladas para diferentes quantidades de osciladores	21
Figura 3.2 – Método empírico utilizado para estimar o ponto de <i>crossover</i>	22
Figura 3.3 – Gráfico utilizado para estimar o valor de expoente crítico para a teoria de tamanho finito	24
Figura 3.4 – Colapso entre curvas obtido após análise de escala adequada	25
Figura 4.1 – Distribuição Normal para diferentes valores de desvio padrão	27
Figura 4.2 – Curvas simuladas para diferentes valores do desvio padrão	28
Figura 4.3 – Gráfico log-log para diferentes valores de dispersão	31
Figura 4.4 – Gráfico para estimar valor do expoente crítico para a distribuição Normal	32
Figura 4.5 – Colapso entre curvas obtido após análise de escala adequada	33
Figura 4.6 – Distribuição de Cauchy-Lorentz para diferentes valores do parâmetro de escala	34
Figura 4.7 – Comparação entre as curvas das distribuições Normal e de Cauchy-Lorentz	35
Figura 4.8 – Curvas simuladas para diferentes valores do desvio padrão	36
Figura 4.9 – Curvas obtidas obtidas após mudança de escala proposta	37
Figura 4.10 – Comparação entre curvas provenientes da simulação computacional e resolução analítica do parâmetro de ordem em função do fator de acoplamento	37
Figura 4.11 – Gráfico log-log para diferentes valores de dispersão	39
Figura 4.12 – Gráfico para estimar valor do expoente crítico para a distribuição de Cauchy-Lorentz	40
Figura 4.13 – Colapso entre curvas obtido após aplicação de expoente de adequado	41
Figura 4.14 – Distribuição unimodal de Laplace para diferentes valores do parâmetro de escala	42
Figura 4.15 – Distribuição de Laplace para diferentes valores do parâmetro de dispersão	43

Figura 4.16–Curvas obtidas obtidas após mudança de escala proposta	44
Figura 4.17–Curvas obtidas obtidas após mudança de escala proposta	44
Figura 4.18–Colapso entre curvas obtido após aplicação de expoente de escala aleatório	45
Figura 4.19–Curva de uma distribuição Normal	46

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	REVISÃO TEÓRICA	11
2.1	O modelo de Kuramoto	11
2.2	Simulações numéricas	15
3	INVESTIGAÇÕES DE ESCALA NO MODELO DE KURAMOTO	19
3.1	Teoria de escala	19
3.2	Teoria de escala para tamanho finito	20
4	TEORIA DE ESCALA PARA DISTRIBUIÇÕES SIMÉTRICAS DE FREQUÊN- CIA	26
4.1	Distribuição Normal	26
4.2	Distribuição de Cauchy-Lorentz	33
4.3	Distribuição de Laplace	41
4.4	Comentários sobre os diferentes valores dos expoentes de escala	45
5	CONCLUSÕES	47
	REFERÊNCIAS	50
6	APÊNDICES	53
6.1	Apêndice A	53

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Sistemas massa-mola, pêndulos simples, e até mesmo as batidas do coração são exemplos de osciladores que, por definição, são corpos que apresentam um certo grau de repetição em determinada ação. Oscilações são quantificadas em termos do número de ciclos por unidade de tempo, ou seja, sua frequência. Além disso, todo oscilador apresenta uma frequência natural, a qual o particulariza quando em vibração livre, determinada por sua composição, forma e tamanho (NUSSENZVEIG, 2002).

Em 1665, Christiaan Huygens notou, após inúmeras observações com relógios de pêndulos, que seus movimentos tendiam a um consenso rítmico movendo-se com uma mesma frequência, tornando os relógios objetos acoplados, fato possível, segundo ele, pela transmissão de vibrações através da parede (PIKOVSKY; ROSENBLUM; KURTHS., 2003). Tal ordenamento possui uma analogia direta para um dos mais belos efeitos da natureza observado nos enxames de vagalumes (BUCK, 1988). Ao anoitecer os vagalumes começam a piscar desordenadamente, contudo após um intervalo de tempo os pulsos luminescentes espontaneamente tornam-se ordenados em perfeito uníssono. Esses interessantes fenômenos têm intrigado os cientistas por tempos (PIKOVSKY; ROSENBLUM; KURTHS., 2003) e, aparentemente a base para a explicação desses fenômenos pode ser dada ao se considerar o sistema como osciladores acoplados que alcançam o estado sincronizado através de interações mútuas. Logo, sincronização é um fenômeno coletivo no qual um sistema oscilatório espontaneamente converge para um fenômeno comum, apesar das diferenças iniciais de cada indivíduo do sistema (PIKOVSKY; ROSENBLUM; KURTHS., 2003).

A sincronização é um fenômeno com grande aplicabilidade em diferentes campos de estudo, desde estudos ecológicos como o comportamento cooperativo durante o acasalamento de vagalumes (PIKOVSKY; ROSENBLUM; KURTHS., 2003), estudos biológicos como células marca-passo cardíacas (JALIFE, 1984) (MIROLLO; STROGATZ, 1990), de desordens neurológicas em redes neurais, tais como mal de Parkinson e epilepsia (STAM, 2005), até assuntos tecnológicos como aplicações em lasers (KOZYREFF; VLADIMIROV; MANDEL, 2000).

Na prática, porque após instantes de tempo, os aplausos de uma multidão apresentam sincronia?

Diante da vasta abrangência sobre estudos de sincronização, inúmeros modelos matemáticos foram criados no decorrer do tempo, a fim de estudá-la de maneira unificada. Um dos arquétipos para modelagem do fenômeno de sincronização foi proposta por Yoshiki Kuramoto na década de 70 (KURAMOTO, 1975). O modelo de Kuramoto consiste de uma amostra de osciladores acoplados entre si cada qual com uma frequência natural distribuída aleatoriamente. O acoplamento entre cada par de osciladores depende das fases e de suas variações temporais.

Analisando seu próprio modelo para um número infinito de osciladores, Kuramoto descobriu uma transição entre o estado incoerente, onde a distribuição das frequências instantâneas é a mesma da distribuição das frequências naturais, e o estado parcialmente sincronizado, onde um grupo de osciladores compartilham da mesma frequência instantânea. Nesse contexto, a notável contribuição de Kuramoto para a teoria foi a definição de um acoplamento crítico que define a transição entre o estado não sincronizado para o estado sincronizado (KURAMOTO, 1975; STROGATZ, 2000).

Sabe-se que uma transição de fase é observada em um sistema infinito, para o qual leva um tempo infinitamente longo à criticalidade (LEE *et al.*, 2014). No entanto, tal resultado não pode ser alcançado em sistemas reais, tendo em vista os limites computacionais impostos à dinâmica do sistema. Dessa forma, tendo em vista que as abordagens computacionais são sempre finitas e, portanto, não descrevem qualquer transição de fase com a previsão das equações teóricas, o método denominado escala de tamanho finito (do inglês, *finite-size-scaling*) torna-se particularmente, importante no estudo da transição do estado não-sincronizado para o estado sincronizado (MALAKIS; FYTAS; KALOZOU MIS, 2007; PIKOVSKY; ROSENBLUM, 2015).

Efeitos de tamanho finito são observados nas resoluções numéricas do modelo de Kuramoto para variações no tamanho do sistema, consequência das flutuações presentes para pequenas quantidades de osciladores (TANG, 2010) e pela aleatoriedade imposta na distribuição das frequências naturais. Uma função de escala dá a possibilidade de estimar valores teóricos das grandezas físicas para um infinito número de osciladores, nessa situação, recentes estudos sobre o modelo de Kuramoto propõem uma reescala do parâmetro de ordem em tamanho finito, sendo o mesmo responsável em mensurar a sincronização.

A diversidade introduzida ao tomar as frequências naturais a partir de uma função de distribuição tem um papel importante no processo de sincronização no modelo de Kuramoto. De maneira geral, a transição para o estado sincronizado ocorre em um acoplamento crítico, onde acima deste valor existe uma sincronia crescente conforme o aumento do acoplamento. Contudo, a dependência da sincronização sob o acoplamento varia de acordo com a simetria da distribuição (BASNARKOV; URUMOV, 2008; PETKOSKI *et al.*, 2013) e seu

formato (PETER; PIKOVSKY, 2018).

Diante do que foi apresentado, esta dissertação visa estudar as invariantes de escala relacionadas ao modelo de Kuramoto, para isso, fez-se uso de uma metodologia baseada nos estudos sobre teoria de escala de Barabási e Stanley (2002). Essa teoria baseia-se na definição de hipóteses sobre a dependência da quantidade em questão sobre as variáveis do sistema (LEONEL, 2004; LEONEL, 2007). O objetivo é usar o estudo para constatar os expoentes críticos já definidos pela literatura a fim de validar a metodologia para que seja possível utilizá-la em outras análises. Desse modo, a partir dos resultados obtidos, será realizada uma investigação sobre o parâmetro de dispersão, a partir do qual constatou-se distintos expoentes críticos para diferentes distribuições simétricas e unimodais.

Dessa forma, organizou-se o trabalho da seguinte maneira: no Capítulo 2, uma introdução teórica sobre o Modelo de Kuramoto bem como as simulações provenientes da resolução numérica das equações deste modelo considerando distribuições de frequências unimodal e simétrica são apresentadas. No Capítulo 3 será discutido a teoria de escala e seu tratamento analítico, para tanto fez-se uso da teoria de escala para tamanho finito. Já no Capítulo 4 apresenta a aplicação da teoria de escala para o parâmetro de dispersão considerando distribuições Normal, de Cauchy-Lorentz e de Laplace. As conclusões e as perspectivas para trabalhos futuros encontram-se apresentadas no Capítulo 5.

Capítulo 2

REVISÃO TEÓRICA

No presente Capítulo alguns conceitos fundamentais sobre a teoria e simulações numéricas no modelo de Kuramoto são revisados. O modelo original de Kuramoto é apresentado na seção 2.1 enquanto algumas simulações numéricas são apresentadas na seção 2.2.

2.1 O modelo de Kuramoto

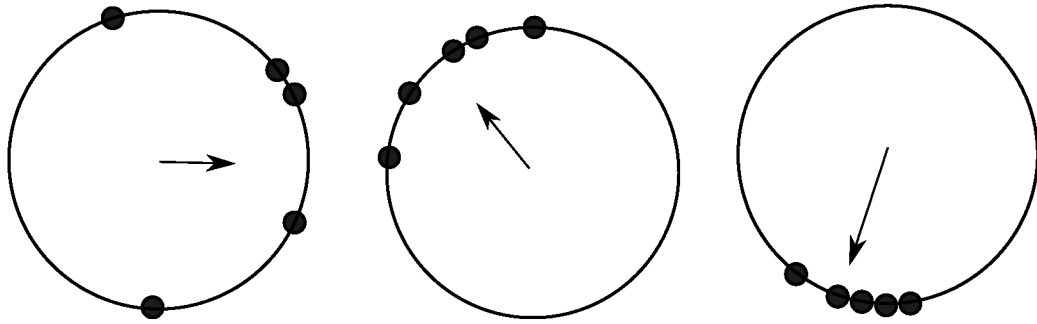
Proposto em 1975 por Yoshiki Kuramoto ([KURAMOTO, 1975](#)), o modelo visa o estudo do fenômeno da sincronização a partir de uma rede completa de N -osciladores acoplados cuja dinâmica é descrita pelo seguinte conjunto de equações diferenciais,

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (2.1)$$

onde $i = 1, 2, \dots, N$. O fator de acoplamento, K , mensura a força de ligação entre os osciladores, cujas frequências naturais, ω_i , são distribuídas de acordo com uma densidade de probabilidade $g(\omega)$. A fase do oscilador i é denotada por θ_i e sua frequência instantânea por $\dot{\theta}_i$.

Conceitualmente, pode-se entender este modelo como sendo uma nuvem de osciladores no plano complexo. Geometricamente, os osciladores são representados como pontos movendo em torno de um círculo unitário complexo, e o parâmetro de ordem, Δ , um vetor resultante, cuja direção e sentido apontam para o local de maior coerência, como ilustrado na Figura 2.1.

Figura 2.1 – Representação do parâmetro de ordem no plano complexo.



Fonte: O autor.

Além disso, o parâmetro de ordem complexo é uma quantidade interpretada como um ritmo coletivo produzido pela população de osciladores totais, campo médio (SALINAS, 2005). Matematicamente (KURAMOTO, 1975),

$$\Delta e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}, \quad (2.2)$$

sendo que o parâmetro de ordem em função do tempo, $\Delta(t)$, mede a coerência das fases e, $\psi(t)$ é a fase média. O parâmetro de ordem pode variar entre $0 \leq \Delta(t) < 1$, sendo $\Delta \approx 0$ caracterizado como um estado dessincronizado e $\Delta \approx 1$, um estado sincronizado ou travado, cujos osciladores compartilham a mesma fase em torno do círculo unitário.

Kuramoto (1975) percebeu que a Equação 2.1 pode ser reescrita em termos do parâmetro de ordem complexo. Para isso, faz-se a multiplicação da Equação 2.2 por $\exp(-i\theta_i)$ e posterior uso da fórmula de Euler,

$$\Delta \sin(\psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i). \quad (2.3)$$

Substituindo esse resultado na Equação 2.1, obtém-se a seguinte equação:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + K\Delta \sin(\psi - \theta_i). \quad (2.4)$$

Assim, o caráter de campo médio proposto na confecção do modelo fica evidente, cujas fases dos osciladores se interagem através da fase média, como se estivessem desacopladas dos demais (STROGATZ, 2000).

Por simplificação, Kuramoto propôs descrever seu modelo em um referencial alternativo, o qual gira com velocidade angular constante no tempo (FONSECA; ABUD, 2018). Assim sendo, aplica-se a seguinte transformação:

$$\theta_i \rightarrow \psi_i + \Omega t, \quad (2.5)$$

em que θ_i é a fase e ψ_i a fase média do oscilador i no quadro girante.

E, então, a Equação 2.4 é reescrita da seguinte maneira:

$$\dot{\psi}_i = \omega_i - \Omega + K\Delta \sin(\psi - \psi_i). \quad (2.6)$$

Escolhendo a origem de um referencial girante corretamente, pode-se assumir $\psi = 0$, portanto tem-se:

$$\dot{\psi}_i = \omega_i - \Omega - K\Delta \sin(\psi_i). \quad (2.7)$$

A medida que a população se torna mais sincronizada, o parâmetro de ordem cresce, e assim o termo $K\Delta$ presente na Equação 2.7 aumenta, de modo que mais osciladores são recrutados para o estado sincronizado (STROGATZ, 2000). Ademais, admitindo $K\Delta$ como parâmetro, a Equação 2.7 possui duas soluções,

i) Caso $|\omega_i - \Omega| \leq K\Delta$ o sistema é denominado atrator, diz-se que os osciladores estão travados a um ponto fixo localizado em $\psi_i = \arcsin((\omega - \Omega)/K\Delta)$

ii) Caso $|\omega_i - \Omega| > K\Delta$ o sistema é denominado à deriva, isto é, os osciladores movem-se individualmente.

Os casos analisados indicam a existência de dois tipos de osciladores, os osciladores aglomerados que são aqueles cujas frequências naturais estão compreendidos entre $\Omega - K\Delta$ e $\Omega + K\Delta$ e os osciladores de deriva, que apresentam frequências naturais fora dessa região. Uma análise sobre a distribuição dos osciladores aglomerados e de deriva podem ser usados para expressar o parâmetro em função da fase média da seguinte forma (FONSECA; ABUD, 2018),

$$\Delta = K\Delta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\psi) g(\Omega + K\Delta \sin(\psi)) e^{i\psi} d\psi + iJ, \quad (2.8)$$

onde J é a integral definida pela equação (SAKAGUCHI; KURAMOTO, 1986),

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\psi)(1 - \cos(\psi))}{\sin^3(\psi)} \left[g\left(\Omega + \frac{k\Delta}{\sin(\psi)}\right) - g\left(\Omega - \frac{k\Delta}{\sin(\psi)}\right) \right] d\psi. \quad (2.9)$$

Como o parâmetro de ordem é um valor real, a Equação 2.8 admite o seguinte sistema de soluções,

$$\Delta = K\Delta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(\Omega + K\Delta \sin(\psi)) \cos^2(\psi) d\psi, \quad (2.10a)$$

$$0 = K\Delta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(\Omega + K\Delta \sin(\psi)) \cos(\psi) \sin(\psi) d\psi + J. \quad (2.10b)$$

Para uma distribuição de frequências simétrica tem-se que o centro de simetria coincide com a frequência crítica, dessa maneira $g(\omega) = g(-\omega)$ e, portanto, $J = 0$. Consequentemente, a Equação 2.10b apresenta valor nulo, tendo em vista que a primeira integral também se anula. Assim sendo, o parâmetro de ordem pode ser deduzido analiticamente pela

resolução da Equação 2.10a, a qual é simplificada por:

$$1 = K \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(\Omega + K\Delta \sin(\psi)) \cos^2(\psi) d\psi. \quad (2.11)$$

Com o uso da Equação 2.11 pode-se determinar o acoplamento crítico, K_c , cujo ponto marca a transição entre o estado sincronizado e o não-sincronizado. Para isso, inicialmente, faz-se a expansão em série de Taylor de g nas proximidades de Ω , da seguinte maneira,

$$1 = K \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\psi) \left[g(\Omega) + g'(\Omega)(K\Delta \sin(\psi)) + \frac{1}{2}g''(\Omega)(K\Delta \sin(\psi))^2 \right] d\psi. \quad (2.12)$$

Considerando a distribuição simétrica e unimodal, pode-se afirmar que $g'(\Omega)$ é nula. O parâmetro de ordem cresce a partir de K_c , logo o valor de K_c é determinado tomando $\Delta \rightarrow 0$, assim,

$$1 = K_c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\psi) g(\Omega) d\psi = K_c g(\Omega) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\psi) d\psi = K_c g(\Omega) \frac{\pi}{2}. \quad (2.13)$$

Para uma distribuição simétrica centrada em zero, tem-se que $\Omega = 0$, e, então:

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)}. \quad (2.14)$$

Outro importante cálculo para o modelo de Kuramoto trata do comportamento do parâmetro de ordem para valores de K ligeiramente maiores do que K_c . A resolução da integral ilustrada na Equação 2.12 e posterior, substituição de termos coincidentes a K_c (Equação 2.14), obtém-se

$$1 = K \left[\frac{\pi}{2} g(0) + \frac{\pi K^3 \Delta^2 g''(0)}{16} \right] = \frac{K}{K_c} + \frac{\pi K^3 \Delta^2 g''(0)}{16}. \quad (2.15)$$

E, portanto,

$$K_c = K + K_c \frac{\pi K_c^3 \Delta^2 g''(0)}{16}. \quad (2.16)$$

Isolando, o parâmetro de ordem, Δ , obtém-se:

$$\Delta(K) = \frac{4}{\sqrt{(-\pi K_c^3 |g''(0)|)}} \sqrt{\frac{K - K_c}{K_c}}. \quad (2.17)$$

Percebe-se da Equação 2.17 que nas proximidades de K_c vale a lei de crescimento $\Delta \approx (K - K_c)^\beta$, onde $\beta = 1/2$ para qualquer distribuição unimodal e simétrica $g(\omega)$.

2.2 Simulações numéricas

As simulações numéricas aqui apresentadas, baseiam-se na solução numérica do modelo de Kuramoto (Equação 2.1) utilizando a função *odeint* integrante do pacote *scipy* da linguagem Python[®]. Como mencionado na seção 2.1, a sincronização no modelo de Kuramoto é mensurada através do parâmetro de ordem, Δ , assim sendo, a Equação 2.2 é manipulada para obter uma função do parâmetro de ordem numericamente tratável, isto é, que esteja relacionada aos parâmetros e variáveis da Equação 2.1, portanto, pode-se escrever:

$$\Delta(\cos(\psi) + i \sin(\psi)) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \cos(\theta_j) + i \sin(\theta_j). \quad (2.18)$$

Igualando as partes reais e imaginárias, tem-se:

$$\Delta \cos(\psi) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \cos(\theta_j), \quad (2.19a)$$

$$\Delta \sin(\psi) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j). \quad (2.19b)$$

O parâmetro de ordem é um vetor, dessa maneira, geometricamente em um plano complexo, $\Delta \cos(\psi)$ refere-se a um ponto no eixo real e, $\Delta \sin(\psi)$ no eixo imaginário. Assim sendo, observa-se que:

$$\Delta = \sqrt{(\Delta \cos(\psi))^2 + (\Delta \sin(\psi))^2}. \quad (2.20)$$

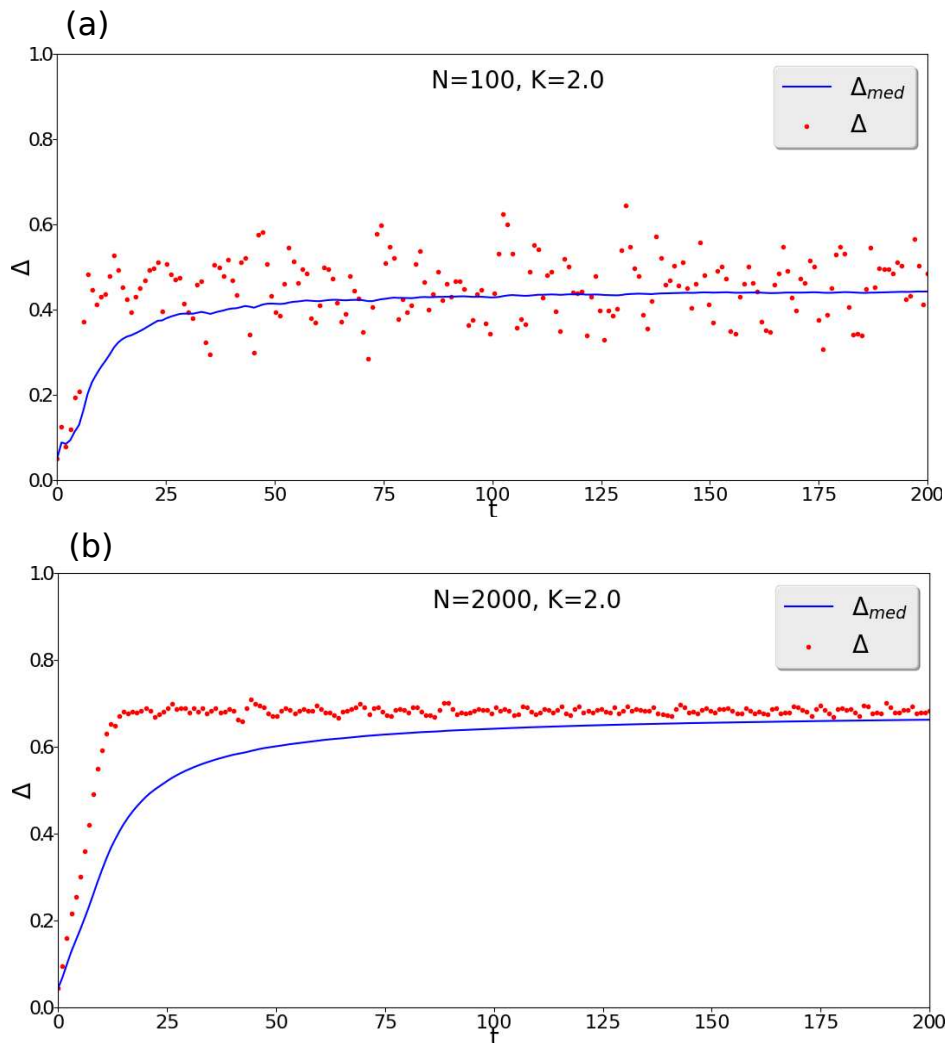
Finalmente, a partir da substituição das relações (2.19a) e (2.19b) em 2.20, obtém-se:

$$\Delta(t) = \frac{1}{N} \sqrt{\left(\sum_{j=1}^N \cos(\theta_j)(t) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^N \sin(\theta_j)(t) \right)^2}. \quad (2.21)$$

As simulações numéricas foram realizadas a partir da resolução da Equação 2.1, nas quais valores para o parâmetro de ordem ao longo do tempo, $\Delta(t)$, foram obtidos e encontram-se ilustrados por pontos vermelhos nas Figuras 2.2 e 2.3. As fases iniciais (θ_i) foram distribuídas uniformemente com valores entre $[0, 2\pi[$. Ressalta-se que as frequências naturais (ω_i) foram escolhidas aleatoriamente de acordo com uma função Normal com média, $\mu = 0$, e desvio padrão, $\sigma = 1$: $g_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\omega)^2}{2}\right)$.

Os resultados da teoria são melhores previstos em simulações com grandes quantidades de osciladores já que apresentam poucas flutuações (Figura 2.2(b)) quando comparadas a simulações com baixo número de osciladores (Figura 2.2(a)), dessa forma, a fim de melhor exatidão nos resultados a média aritmética dos valores para o parâmetro de ordem ao longo do tempo foram calculados, e encontra-se ilustrada pela curva em azul no gráfico (Δ_{med}).

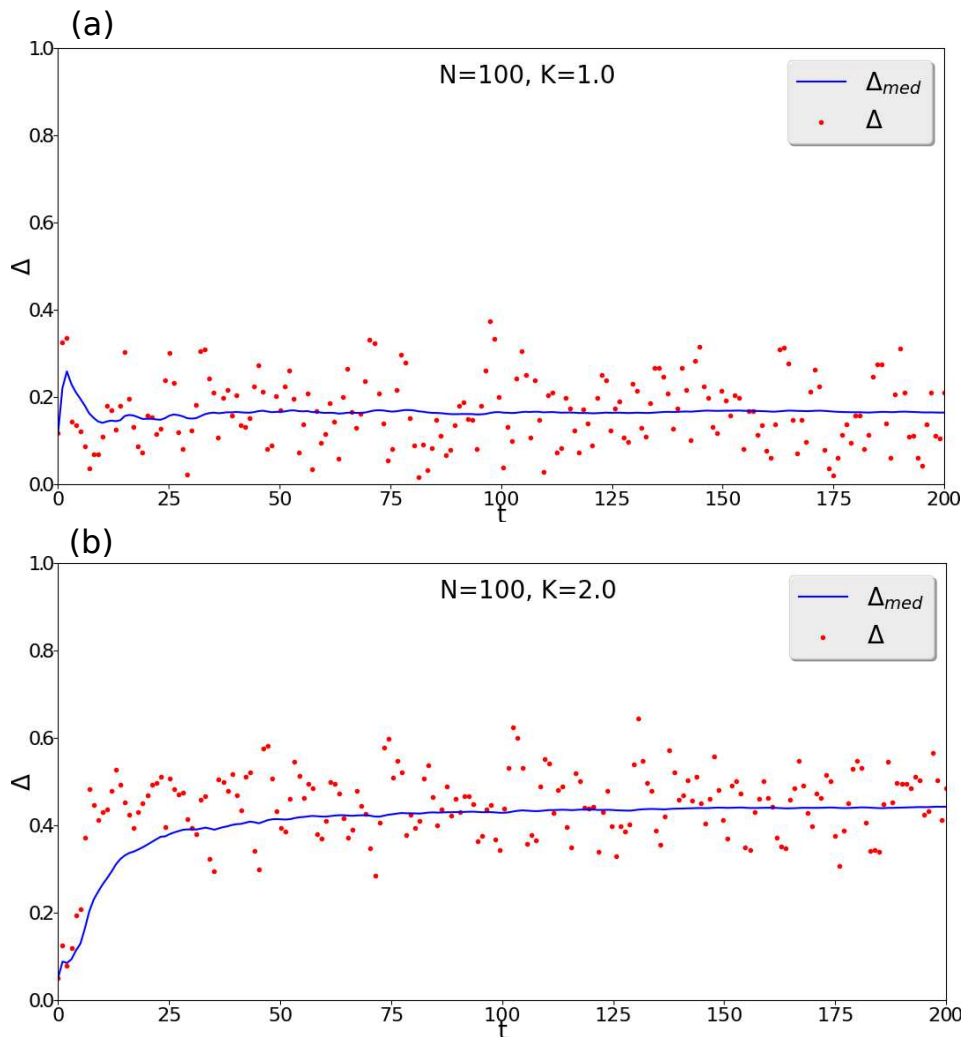
Figura 2.2 – Simulação numérica da evolução temporal do parâmetro de ordem, Δ , para diferentes valores do número de osciladores, N . As frequências naturais foram distribuídas de acordo com uma função Normal com média, $\mu = 0$, e desvio padrão, $\sigma = 1$.



Fonte: O autor.

Além disso, os valores obtidos na Figura 2.3 comprovam que para valores inferiores ao acoplamento crítico, neste caso, $K_c \approx 1,596$ (Equação 2.14), a interação é fraca, e o parâmetro de ordem, Δ , mantém-se próximo de zero revelando um sistema dessincronizado (Figura 2.3(a)). Porém, com o aumento do acoplamento o parâmetro de ordem cresce rapidamente e a sincronização é observável (Figura 2.3(b)).

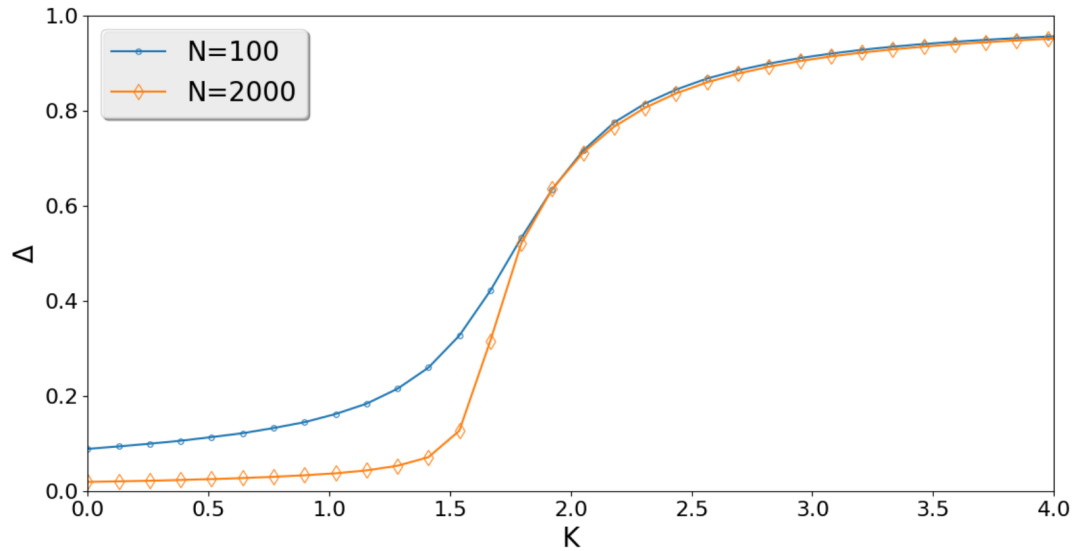
Figura 2.3 – Simulação numérica da evolução temporal do parâmetro de ordem, Δ , para valores abaixo ($K = 1.0$) e acima ($K = 2.0$) de K_c . As frequências naturais foram distribuídas de acordo com uma função Normal com média, $\mu = 0$, e desvio padrão, $\sigma = 1$.



Fonte: O autor.

A Figura 2.4 apresenta o gráfico do parâmetro de ordem, Δ , em função do fator do acoplamento, K , proveniente da simulação para 100 e 2000 osciladores. Nota-se que, o número de osciladores influencia nos resultados da simulação, o que pode ser observado pela curva que caracteriza os dados colhidos para 2000 osciladores, a qual apresenta baixos valores para o parâmetro de ordem inicial, fato corroborado com a teoria, a qual prediz que $\Delta \approx 0$ para valores de K menores do que K_c . Observe ainda que independente da quantidade de osciladores, as curvas colidem no mesmo ponto para valores maiores do que K_c . Em sumo, a Figura 2.4 mostra que a transição para a sincronização ocorre em um acoplamento crítico, K_c , onde acima deste ponto existe uma sincronia crescente conforme o aumento do acoplamento.

Figura 2.4 – Simulação numérica do parâmetro de ordem, Δ , em função do fator de acoplamento, K , para diferentes quantidade de osciladores, N . As frequências naturais foram distribuídas de acordo com uma função Normal com média, $\mu = 0$, e desvio padrão, $\sigma = 1$.



Fonte: O autor.

A diferença entre as curvas com relação ao número de osciladores na região $K < K_c$ propõe um questionamento: será que fisicamente essas curvas podem sugerir um fator de escala para o número de osciladores? A resposta será abordada nos próximos Capítulos.

Capítulo 3

INVESTIGAÇÕES DE ESCALA NO MODELO DE KURAMOTO

O Capítulo 3 destina-se ao estudo do comportamento crítico do modelo de Kuramoto com ênfase em determinar se o número de osciladores é uma invariante de escala do parâmetro de ordem, Δ . Ou seja, busca-se verificar se as alterações causadas no parâmetro de ordem devido à diferentes números de osciladores podem ser escalados por um fator comum, de tal forma que a transição de fase seja qualitativamente mantida. A seção 3.1 apresenta uma breve introdução à teoria de escala. Na seção 3.2 tem-se uma investigação de escala sobre o número de osciladores do modelo, onde uma abordagem para determinação dos expoentes de escala são obtidos numericamente e validados com os resultados previstos na literatura.

3.1 Teoria de escala

A universalidade entre sistemas é estudada em um ramo da mecânica estatística moderna conhecido por teoria de escala. A sua obtenção garante modelos padrões, reduzindo a necessidade na realização de simulações computacionais. O uso de funções de escala tem como propósito adquirir comportamentos universais em sistemas. Para uma breve contextualização da teoria, considere uma função de duas variáveis, x e y , homogênea generalizada de grau d (SALINAS, 2005). Logo, por definição,

$$f(x, y) = \xi^{-d} f(\xi^a x, \xi^b y), \quad (3.1)$$

em que ξ é um fator de escala arbitrário e, a e b os expoentes de escala. A escolha de ξ tem a finalidade de adquirir uma nova função de uma variável proporcional à função original, a qual é uma função homogênea de duas variáveis. Por exemplo, uma escolha possível seria $\xi = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{a}}$, assim sendo reescreve-se a Equação 3.1 da seguinte maneira:

$$f(x, y) = x^{\frac{d}{a}} f\left(1, \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{b}{a}}\right) = x^{\frac{d}{a}} \Theta\left(\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{b}{a}}\right), \quad (3.2)$$

onde Θ é dita função de escala.

Outra escolha possível seria $\xi = \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{b}}$, então:

$$f(x, y) = y^{\frac{d}{b}} f\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{a}{b}}, 1\right) = y^{\frac{b}{d}} \Theta\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{a}{b}}\right). \quad (3.3)$$

Assim sendo, as escolhas realizadas para ξ , juntamente com a obtenção dos fatores de escala a e b , garantem que todos os sistemas descritos por essas novas funções colapsam em uma mesma curva sem sofrer mudanças qualitativas no sistema em estudo. Essa definição de escala será aplicada na próxima seção para o parâmetro de ordem do modelo de Kuramoto.

3.2 Teoria de escala para tamanho finito

O estudo sobre a criticalidade no modelo de Kuramoto (KURAMOTO, 1975), isto é, a transição do estado não-sincronizado para o estado sincronizado, pressupõe a existência de um número infinito de osciladores no sistema. Por outro lado, sistemas reais estudados por abordagens computacionais são sempre finitos, e como consequência, as análises das equações realizadas a partir de um modelo de campo médio, na seção 2.1, não descrevem de forma integral matematicamente conveniente as quantidades físicas relevantes para o sistema, como o parâmetro de ordem. Nesse contexto, desenvolveu-se o estudo do comportamento de escala em tamanho finito (do inglês, *finite-size-scaling*) (PIKOVSKY; ROSENBLUM, 2015) que visa, justamente, analisar a possibilidade de se estudar o comportamento do parâmetro de ordem e a transição de fase do sistema para diferentes quantidades de osciladores.

Um dos problemas de se trabalhar com análises de escala de tamanho finito é que a obtenção dos expoentes críticos só é possível a partir de uma averiguação sobre um quantitativo finito de sistemas, o que leva à um processamento computacional, geralmente, muito longo. Tal problema é ocasionado pelas flutuações nos cálculos do parâmetro de ordem para N baixo (DAIDO, 1990) e, também, devido ao fato que diferentes escolhas para as frequências naturais dos osciladores induzem a resultados ligeiramente distintos para o parâmetro de ordem, Δ . Assim, a forma ideal para o estudo de escala de tamanho finito é considerar uma média sobre diferentes curvas do parâmetro de ordem $\Delta(K, N)$, ou seja, $\langle \Delta(K, N) \rangle$. Neste trabalho, realizou-se uma média sobre 100 sistemas distintos.

Recentes estudos sobre escala de tamanho finito no modelo de Kuramoto (HONG; HA; PARK, 2007; HONG *et al.*, 2007b; HONG *et al.*, 2015), propõem que o parâmetro de ordem satisfaça a seguinte função de escala:

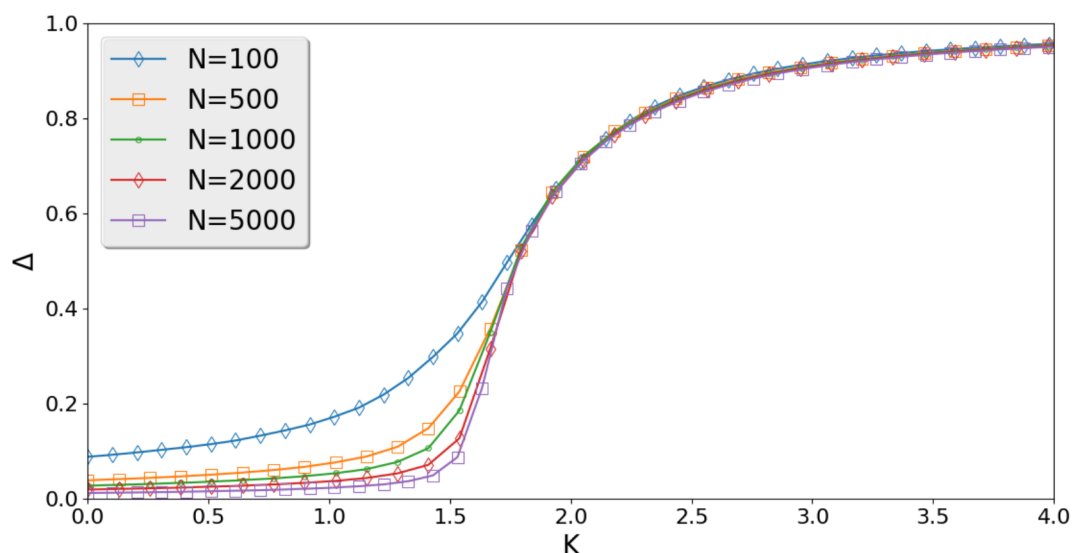
$$\Delta(K, N) = N^{-\frac{\beta}{\nu}} \Theta\left((K - K_c) N^{-\frac{1}{\nu}}\right), \quad (3.4)$$

onde $\beta = 1/2$ e $\hat{\nu}$ é conhecido como expoente da função de escala e vale $5/2$. O expoente $\beta = 1/2$ é típico de vários modelos de campo-médio, contudo o expoente de tamanho $\hat{\nu} = 5/2$ não é usual e implica que o modelo sofre muitas flutuações (TANG, 2010). Este resultado foi proposto analiticamente e confirmado por simulações (HONG; PARK; CHOI, 2005; HONG *et al.*, 2007a) e encontrado inclusive em extensões do próprio modelo de Kuramoto (HONG; TANG, 2007; HONG; PARK, 2013; UM; PARK, 2014).

Nesta seção, o parâmetro de ordem é calculado pela Equação 2.21 a partir de N osciladores com fases ordenadas de maneira uniforme e frequências naturais distribuídas de acordo com uma função Normal com média, $\mu = 0$, e desvio padrão, $\sigma = 1$.

O gráfico da Figura 3.1 apresenta a simulação do modelo de Kuramoto (Equação 2.1) para diferentes valores de N . O acoplamento crítico, K_c , é o ponto que marca a transição do estado não-sincronizado para o sincronizado e, vale aproximadamente 1,596 (Equação 2.14). Observa-se que a variação nos valores de N influenciam nas curvas simuladas na região de $K \ll K_c$, as quais apresentam comportamento diferenciado, tendendo a zero a medida que N aumenta. Isto ocorre porque altos valores de N apresentam maior regularidade e baixas flutuações em relação ao parâmetro de ordem e, portanto tendem a zero como é previsto na teoria.

Figura 3.1 – Simulação numérica do parâmetro de ordem, Δ , em função do fator de acoplamento, K , para diferentes quantidade de osciladores, N . As frequências naturais foram distribuídas de acordo com uma função Normal com média, $\mu = 0$, e desvio padrão, $\sigma = 1$.



Fonte: O autor.

Com o intuito de obter a relação de escala (Equação 3.4) proposta pela literatura, uma metodologia baseada nos estudos sobre teoria de escala de Barabási e Stanley (2002) é apre-

sentado. Tal metodologia baseia-se na definição de hipóteses sobre a dependência da quantidade em questão sobre as variáveis do sistema (LEONEL, 2004; LEONEL, 2007). O objetivo é usar o estudo para constatar os expoentes críticos já definidos pela literatura a fim de validar a metodologia para que seja possível utilizá-la em outras análises. Desse modo, a partir do comportamento do parâmetro de ordem observado na Figura 3.1, três hipóteses de escala são definidas. Além disso, sem perda de generalidade, a transformação $K \rightarrow (K - K_c)$ foi aplicada, a fim de obter coalescência dos pontos de transição.

(1) Para $K \approx K_c$ as curvas evoluem segundo uma lei de crescimento dada por:

$$\Delta((K - K_c), N) \approx (K - K_c)^\beta, \quad (3.5)$$

onde β é o expoente de crescimento.

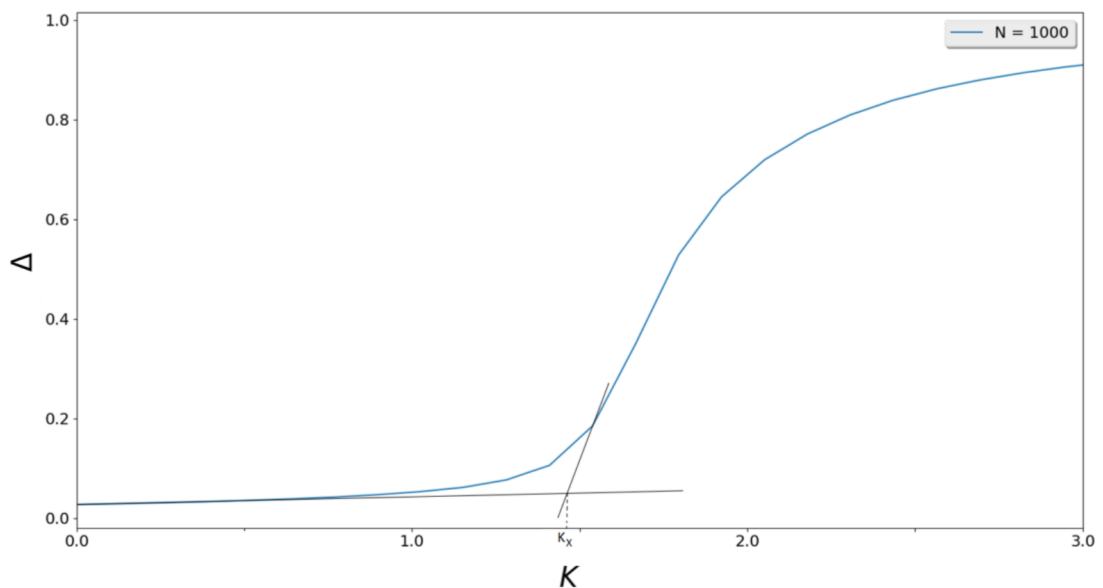
(2) Para valores de K tendendo a zero pela direita, observa-se que os valores iniciais do parâmetro de ordem, Δ , estão relacionados a N , de maneira inversa, de modo que:

$$\Delta((K - K_c), N) \approx N^{-\alpha}, \quad (3.6)$$

neste caso, α é o expoente crítico de fase não sincronizado.

A transição entre o estado não sincronizado ($\Delta \approx 0$) e a lei de crescimento uniforme da criticalidade é definido em pontos nomeados de pontos de *crossover*, K_x , o qual é estimado pela intersecção entre retas tangentes às curvas de crescimento e saturação. O método utilizado para estimar este ponto de *crossover* está apresentado na Figura 3.2.

Figura 3.2 – Método empírico utilizado para estimar ponto de *crossover*.



Fonte: O autor.

A Figura 3.2 apresenta o método empírico utilizado para estimar o ponto *crossover*. Através das curvas simuladas, observa-se que tal ponto desloca-se para direita conforme o número de osciladores aumenta. Assim sendo, a terceira hipótese pode ser elaborada como,

(3) Para $K = K_x$,

$$(K_x - K_c) \approx N^{\hat{\nu}}. \quad (3.7)$$

O limite lateral à esquerda da função correspondente a hipótese (1) (Equação 3.5) e, o limite lateral à direita da função correspondente a hipótese (2) (Equação 3.6), convergem para o mesmo ponto, K_x . Dessa forma, tem-se:

$$(K - K_c)^\beta = N^{-\alpha}, \quad (3.8)$$

utilizando a hipótese (3) (Equação 3.7) na Equação 3.8,

$$N^{\hat{\nu}\beta} = N^{-\alpha}. \quad (3.9)$$

Da igualdade presente na Equação 3.9, obtém-se a relação entre os expoentes críticos:

$$\hat{\nu} = -\frac{\alpha}{\beta}. \quad (3.10)$$

A partir da teoria apresentada no Capítulo 2, sabe-se que o expoente de crescimento, β , exposto na hipótese (1) (Equação 3.5), vale 1/2 (Equação 2.17). Como $\alpha = -\beta\hat{\nu}$, necessita-se determinar apenas o valor de um dos expoentes críticos restantes, $\hat{\nu}$ ou α , para que assim, a lei de escala para o parâmetro de ordem, proposta na Equação 3.4, esteja estabelecida. Tais valores pretendidos, podem ser estimados a partir das hipóteses desenvolvidas. Para tanto, supõe-se que $\Delta((K - K_c), N)$ satisfaça uma função de escala generalizada como a Equação (3.1), apresentada na seção 3.1, da seguinte forma:

$$\Delta((K - K_c), N) = \xi \Delta\left(\xi^a (K - K_c), \xi^b N\right), \quad (3.11)$$

sendo a e b expoentes de escala e ξ o fator de escala escolhido arbitrariamente.

Como mencionado anteriormente, o valor de ξ é arbitrário, de modo que a sua escolha influenciará na obtenção de uma nova função de uma variável equivalente à anterior. Sabendo disso, inicialmente, escolhe-se: $\xi = N^{-\frac{1}{b}}$, e portanto:

$$\Delta((K - K_c), N) = N^{-\frac{1}{b}} \Delta\left(N^{-\frac{a}{b}} (K - K_c), 1\right). \quad (3.12)$$

Não se espera que o parâmetro de ordem dependa de N para valores de $K \gg K_c$, dessa forma, conclui-se que a função $\Delta\left(N^{-\frac{a}{b}} (K - K_c), 1\right)$ é constante. Portanto, o termo restante, $\Delta((K - K_c), N) = N^{-\frac{1}{b}}$, relaciona-se com a hipótese (2) (Equação 3.6) e, assim a relação entre α e o expoente de escala, b , é estabelecida por:

$$\alpha = \frac{1}{b}. \quad (3.13)$$

Outra escolha possível para ξ seria: $\xi = (K - K_c)^{-\frac{1}{a}}$,

$$\Delta((K - K_c), N) = (K - K_c)^{-\frac{1}{a}} \Delta(1, (K - K_c)^{-\frac{b}{a}} N). \quad (3.14)$$

Assumindo que $\Delta\left(1, (K - K_c)^{-\frac{b}{a}} N\right)$ é constante para valores de $K = K_c$, observa-se que o termo restante, $\Delta((K - K_c), N) = (K - K_c)^{-\frac{1}{a}}$, está relacionado com a hipótese (1) (Equação 3.5) estabelecendo-se, assim, a relação entre β e o expoente de escala, a , da seguinte forma:

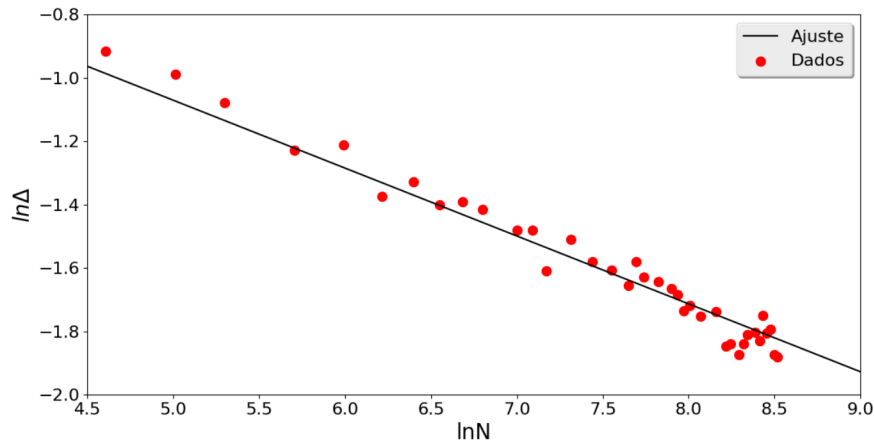
$$\beta = -\frac{1}{a}. \quad (3.15)$$

Como a lei de escala pretendida refere-se a escala de tamanho finito, substitui-se os valores encontrados de α e β na função de escala (Equação 3.12),

$$\Delta((K - K_c), N) = N^{-\alpha} \Delta\left(\frac{K - K_c}{N^{-\hat{\nu}}}\right). \quad (3.16)$$

A partir da Equação 3.16 para $K = K_c$, o expoente α foi estimado, o qual corresponde ao coeficiente angular da reta de melhor ajuste proveniente dos pontos obtidos numericamente no gráfico log-log do parâmetro de ordem, Δ , em função do número de osciladores, N , ilustrado na Figura 3.3. Assim sendo, estimou-se o valor de $\alpha = 0,208569$, cujo resultado é muito próximo ao relatado na literatura, $\alpha = \frac{1}{5}$.

Figura 3.3 – Gráfico log-log do parâmetro de ordem, Δ , como função do número de osciladores, N , utilizado para estimar o expoente crítico, α .



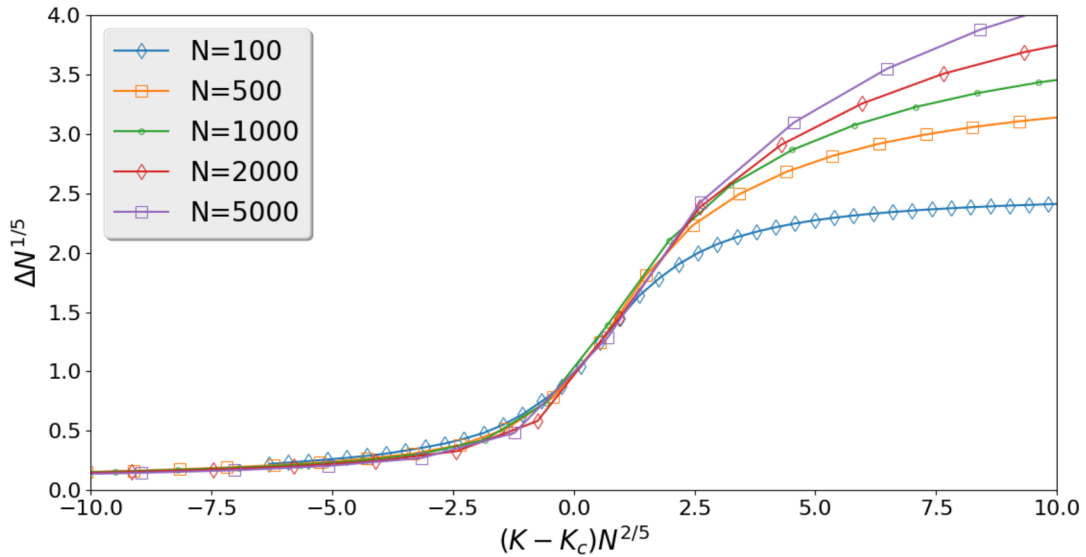
Fonte: O autor.

Com o valor de α e β conhecidos, o valor de $\hat{\nu}$ é determinado pela relação apresentada na Equação 3.10, cujo valor já esperado por Choi, Ha e Kahng (2013), Lee *et al.* (2014), Hong *et al.* (2015) equivale a: $\hat{\nu} = \frac{5}{2}$. Portanto, após substituição em 3.16, tem-se a função de escala desejada:

$$\Delta((K - K_c), N) = N^{-\frac{1}{5}} \Delta\left(\frac{K - K_c}{N^{-\frac{2}{5}}}\right). \quad (3.17)$$

A função de escala encontrada propõe a mudança ($\Delta \rightarrow \Delta N^{\frac{1}{5}}$) no eixo das ordenadas, e ($K \rightarrow (K - K_c)N^{\frac{2}{5}}$) para o eixo das abscissas. O colapso proveniente da mudança dos eixos, encontra-se ilustrado na Figura 3.4, a partir do qual pode-se afirmar que N é uma invariante de escala.

Figura 3.4 – Colapso entre curvas obtido após a análise de escala adequada.



Fonte: O autor.

É importante salientar que a discrepância nas curvas para valores de $K \gg K_c$ proveniente das funções de escala serem dependentes de N , já que cada curva foi plotada de acordo com uma quantidade específica de osciladores. No entanto, esse efeito não é considerado neste estudo, já que o interesse da teoria de tamanho finito está no comportamento das curvas no intervalo de $K < K_c$. Outro ponto a ser mencionado é que o expoente $\hat{\nu} = 5/2$ é obtido devido ao tipo de distribuição aleatória considerada, na qual frequências individuais são definidas independentemente para cada oscilador de acordo com uma distribuição de frequência unimodal $g(\omega)$. No caso de uma distribuição dada de maneira regular, ou seja, de maneira que as frequências sejam uniformemente espaçadas de acordo com $g(\omega)$, o expoente $\hat{\nu} = 5/2$ é obtido (HONG *et al.*, 2015).

Capítulo 4

TEORIA DE ESCALA PARA DISTRIBUIÇÕES SIMÉTRICAS DE FREQUÊNCIA

A diversidade introduzida ao tomar as frequências naturais a partir de uma função de distribuição possui um papel importante no processo de sincronização. No geral, a dependência do parâmetro de ordem sobre o fator de acoplamento deve variar de acordo com a simetria das distribuições (BASNARKOV; URUMOV, 2008; PETKOSKI *et al.*, 2013), a dispersão, e a forma da amostra (PETER; PIKOVSKY, 2018). Assim sendo, na seção 4.1, um estudo sobre o parâmetro da dispersão da distribuição das frequências naturais, para uma função Normal, é realizado, no qual busca-se compreender seus efeitos e principalmente, se tal parâmetro trata-se de uma invariante de escala no modelo de Kuramoto. A seção 4.2 e 4.3, encarrega-se em testar e analisar os resultados obtidos anteriormente para uma distribuição de frequência de Cauchy-Lorentz e de Laplace, respectivamente.

O objetivo principal é observar se há universalidade entre os expoentes de escala mesmo ao considerar distintas distribuições simétricas e unimodais.

4.1 Distribuição Normal

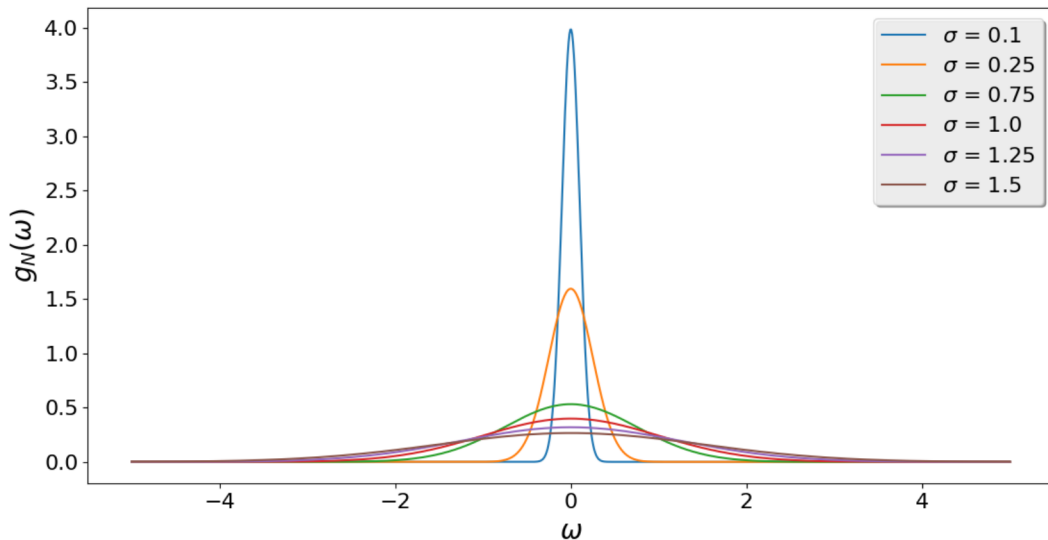
A distribuição Normal também conhecida como Gaussiana trata-se de uma das distribuições mais familiares e importantes na área de estatística, caracteriza-se em ser unimodal e simétrica, e é representada pela função:

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(\omega - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (4.1)$$

onde σ é o desvio padrão, cujo valor denota a variação de um conjunto de dados em relação a média aritmética (μ) ou valor esperado.

A Figura 4.1 apresenta uma distribuição Normal com média, $\mu = 0$, para diferentes valores do desvio padrão, σ , cuja variação proporciona perfis de curvas diferentes, assim sendo, quão menor for seu valor, mais próximo estará da média e, portanto, as curvas apresentam-se mais achatadas e com o pico da função mais elevado.

Figura 4.1 – Distribuição Normal com média, μ , zero para diferentes valores do desvio padrão, σ .



Fonte: O autor.

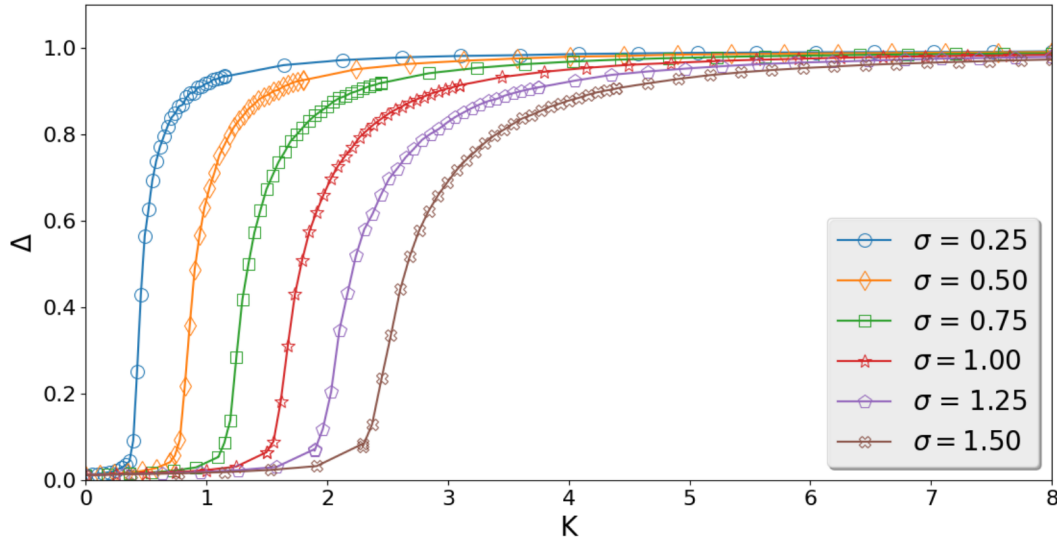
Como visto no Capítulo 2, em termos do modelo de Kuramoto, o acoplamento crítico, K_c , é o ponto que marca a transição do estado não-sincronizado para o sincronizado, o qual depende da distribuição das frequências naturais, $g(\omega)$ (Equação 2.14), baseando-se nisso, para uma distribuição Normal, calcula-se:

$$K_c = \sqrt{\frac{8\sigma^2}{\pi}}. \quad (4.2)$$

Neste Capítulo busca-se entender como a variação nos valores do parâmetro de dispersão influem na sincronização do sistema. Seria σ uma invariante de escala? Sendo essa resposta positiva, sob qual expoente de escala?

A Figura 4.2 ilustra o gráfico do parâmetro de ordem em função do fator de acoplamento proveniente da resolução do modelo de Kuramoto (Equação 2.1) para 5000 osciladores distribuídos de acordo com uma distribuição Normal com $\mu = 0$ e diferentes valores do desvio padrão, σ . Nas simulações, iniciou-se o sistema a partir das distribuições descritas e uma média ao longo do tempo ($t = 200$) foi realizada para coletar o valor para o parâmetro de ordem. Tal procedimento foi repetido para 50 valores de K e tomando uma média sobre 30 amostras diferentes para $\theta_i(0)$ e $\omega_i(0)$.

Figura 4.2 – Parâmetro de ordem, Δ , como função do fator de acoplamento, K , para diversos valores do desvio padrão, σ . As frequências naturais foram distribuídas de acordo com uma função Normal com média, $\mu = 0$, e desvio padrão, $\sigma = 1$.



Fonte: O autor.

Pela Figura 4.2 pode se observar que conforme o fator de acoplamento aumenta o parâmetro de ordem sofre uma transição no ponto K_c (Equação 4.2), estabelecendo um crescimento para a sincronização. Eventualmente, o parâmetro de ordem satura em torno de $\Delta \approx 1$.

Com o objetivo de se estudar a universalidade das curvas faz-se necessário marcar a mudança de comportamento entre o crescimento e a saturação do parâmetro de ordem através de um ponto hipotético denotado por ponto de *crossover*, K_x . Logo, a partir da Figura 4.2, três hipóteses de escala foram definidas em termos do parâmetro de ordem, semelhantes ao realizado na seção 3.2 do Capítulo anterior. Sendo que,

(1) Para $0 < (K - K_c) < (K_x - K_c)$ as curvas evoluem segundo o expoente de crescimento, β , da seguinte maneira,

$$\Delta((K - K_c), \sigma) \approx (\sigma^\nu (K - K_c))^\beta. \quad (4.3)$$

Note que a hipótese aqui apresentada é particularmente diferente da hipótese (1) (Equação 3.5) da seção 3.2, isto é proposto devido ao fato das curvas provenientes da simulação dos distintos valores de σ sofrerem um leve deslocamento na região de transição, consequente da diferença entre os valores de K_c . Além disso, ressalta-se que a transformação $K \rightarrow (K - K_c)$ leva à coalescência dos pontos de transição.

(2) Para $(K - K_c) > (K_x - K_c)$, observa-se que todas as curvas saturam-se no mesmo

ponto, $\langle \Delta \rangle \approx 1$, independente do valor de σ . Ou seja, podemos escrever,

$$\Delta_{sat}((K - K_c), \sigma) \approx \sigma^{-\alpha} = 1 \quad (4.4)$$

e, portanto, $\alpha = 0$.

O ponto *crossover*, K_x , desloca-se para a direita com o aumento dos valores de dispersão. Assim sendo, pode-se definir a terceira hipótese.

(3) Para $K = K_x$,

$$(K_x - K_c) \approx \sigma^z. \quad (4.5)$$

O limite lateral à direita da função correspondente a hipótese (1) (Equação 4.3) e, o limite lateral à esquerda da função correspondente a hipótese (2) (Equação 4.4), convergem para um mesmo ponto. Ou seja,

$$(\sigma^y (K - K_c))^\beta \approx \sigma^{-\alpha}, \quad (4.6)$$

avaliando no ponto de convergência, K_x , tem-se,

$$(\sigma^y \sigma^z)^\beta \approx \sigma^{-\alpha}. \quad (4.7)$$

Da igualdade presente na Equação 4.7, obtém-se a relação entre os expoentes críticos:

$$z = -\frac{\alpha}{\beta} - y. \quad (4.8)$$

Como $\alpha = 0$, tem-se $z = -y$ e, portanto, necessita-se determinar apenas o valor de um dos expoentes críticos restantes, z ou y , para que assim, a lei de escala para o parâmetro de ordem seja estabelecida. Em busca de uma função de escala adequada supõe-se que $\Delta((K - K_c), \sigma)$ satisfaça uma função de escala generalizada semelhante a Equação (3.1), apresentada na seção 3.1, da seguinte forma:

$$\Delta((K - K_c), \sigma) = \xi \Delta\left(\xi^a \sigma^y (K - K_c), \xi^b \sigma\right), \quad (4.9)$$

sendo a e b expoentes de escala e, ξ o fator de escala escolhido arbitrariamente, escolhe-se $\xi = \sigma^{-\frac{1}{b}}$, e então obtém-se:

$$\Delta((K - K_c), \sigma) = \sigma^{-\frac{1}{b}} \Delta\left(\sigma^{-\frac{a}{b} + y} (K - K_c), 1\right). \quad (4.10)$$

Para valores de $(K - K_c) \gg (K_x - K_c)$ não se espera que o parâmetro de ordem, Δ , dependa do fator de acoplamento, K , ou da variabilidade, σ , portanto $\Delta\left(\sigma^{-\frac{a}{b} + y} (K - K_c), 1\right)$ é constante. Logo, a Equação 4.10 relaciona-se com a hipótese (2) (Equação 4.4) e, assim a relação entre α e o expoente de escala, b , é estabelecida por:

$$\alpha = \frac{1}{b}. \quad (4.11)$$

Outra escolha possível seria: $\xi = (\sigma^y(K - K_c))^{-\frac{1}{a}}$, e então:

$$\Delta((K - K_c), \sigma) = (\sigma^y(K - K_c))^{-\frac{1}{a}} \Delta\left(1, (\sigma^y(K - K_c))^{-\frac{b}{a}} \sigma\right). \quad (4.12)$$

Assumindo que $\Delta\left(1, (\sigma^y(K - K_c))^{-\frac{b}{a}} \sigma\right)$ é constante para $K \gg K_c$, observa-se que $\Delta((K - K_c), \sigma) = (\sigma^y(K - K_c))^{-\frac{1}{a}}$ relaciona-se com a hipótese (1) (Equação 4.3) estabelecendo-se assim a relação entre β e o expoente de escala, a , da seguinte forma:

$$\beta = -\frac{1}{a}. \quad (4.13)$$

Como a escala pretendida refere-se a mudança para o eixo x , os valores encontrados de α e β são substituídos na lei de escala pretendida (na Equação 4.10),

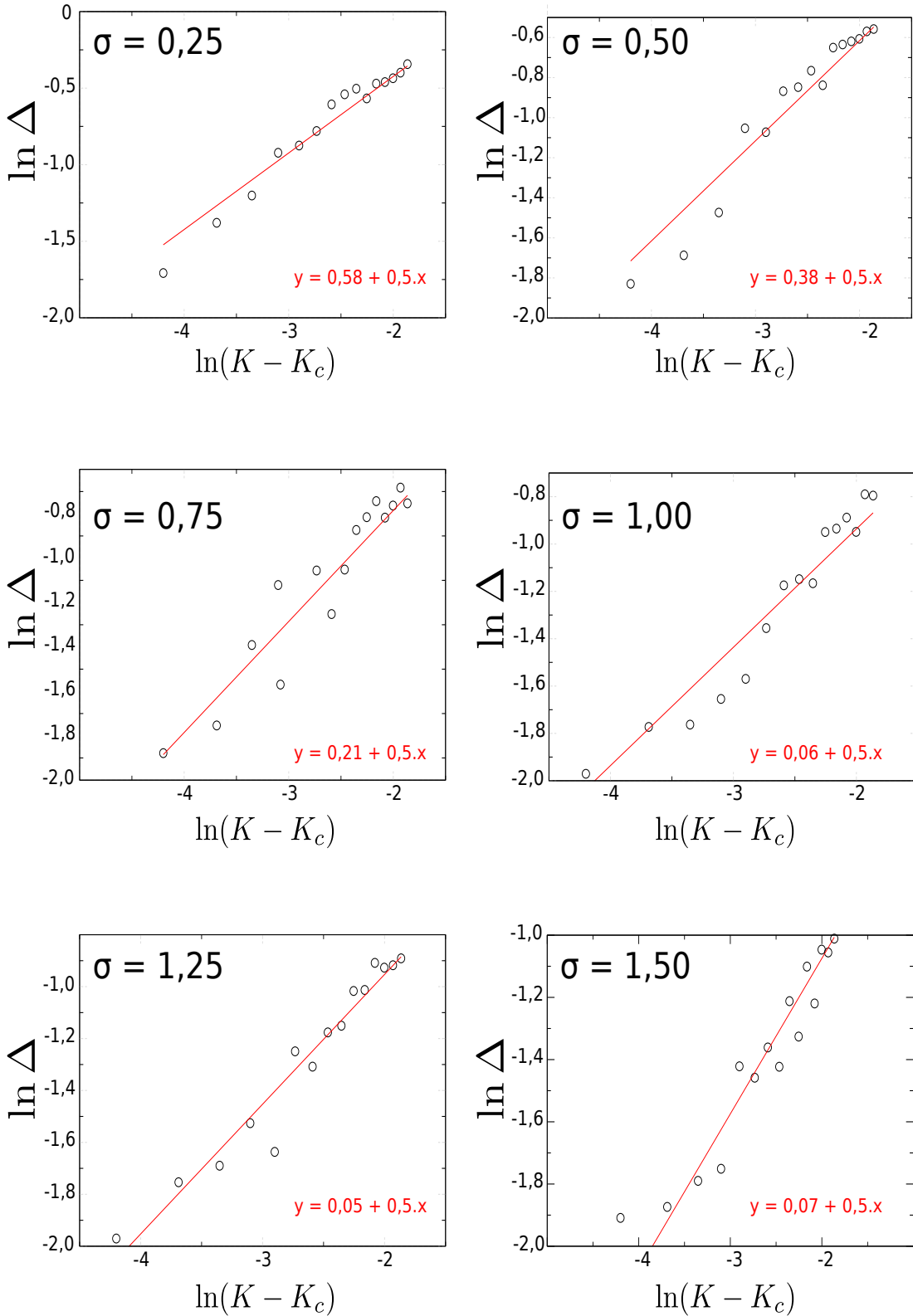
$$\Delta((K - K_c), \sigma) = \Delta\left(\frac{K - K_c}{\sigma^z}\right). \quad (4.14)$$

Com base na hipótese (3) (Equação 4.5) o expoente crítico z presente na lei de escala (Equação 4.14) poderá ser estimado através de uma regressão linear dos pontos provenientes do gráfico log-log de $(K_x - K_c)$ em função de σ (Figura 4.4). Os valores de $\ln(K_x - K_c)$ para cada valor de σ foram determinados admitindo a existência de um ponto de convergência entre as curvas características ao crescimento e saturação, o qual é denominado de ponto de *crossover*, K_x , portanto para determiná-lo é necessário definir as equações que caracterizam tais curvas e, em seguida, a intersecção entre elas.

Para a obtenção da equação característica do crescimento das curvas, foi necessário considerar da teoria que para qualquer distribuição simétrica e unimodal todas as curvas, nas proximidades de K_c , crescem de acordo com a lei de crescimento, $\beta = 1/2$ (Equação 2.17). Assim sendo, para cada valor de σ , fez-se a coleta dos dados em torno do ponto crítico através da simulação computacional, os quais foram plotados em um gráfico log-log do parâmetro de ordem, Δ , em função de $(K - K_c)$. Em seguida, determinou-se a equação almejada fixando $\beta = 1/2$ como coeficiente angular da reta de melhor ajuste dos pontos, as quais encontram-se registrados no canto inferior direito de cada gráfico ilustrado na Figura 4.3. Já para a determinação das equações referentes à saturação, levou-se em consideração que para $K \rightarrow \infty$ todas as curvas convergem para o mesmo ponto, $\Delta \approx 1$, portanto, para qualquer valor de σ , tem-se: $y = 0$, já que $\ln(1) = 0$.

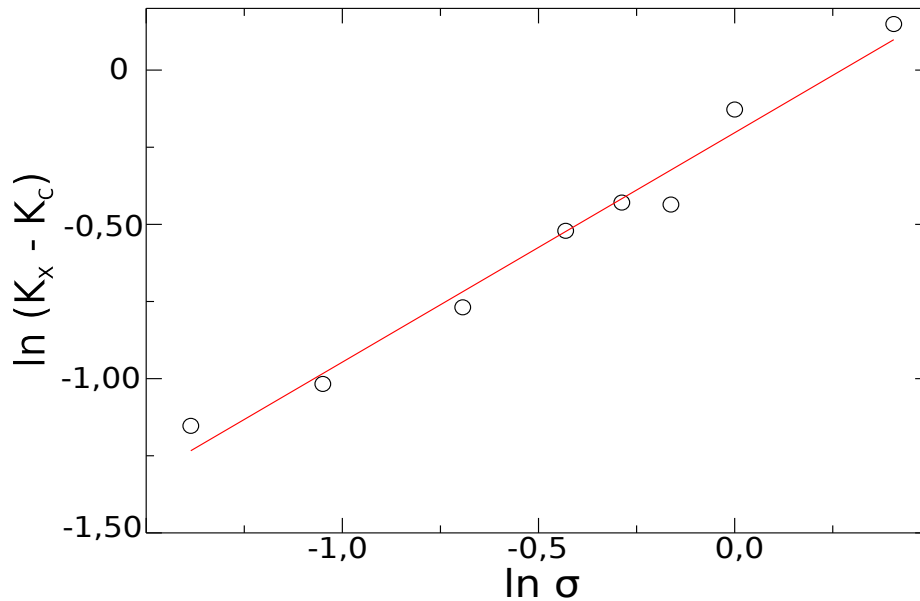
Em posse das equações pretendidas, o cálculo de intersecção foi realizado, dessa forma, obteve-se os valores de $\ln(K_x - K_c)$ para cada valor de σ , os quais foram plotados no gráfico log-log de $(K_x - K_c)$ em função de σ (Figura 4.4). O coeficiente z representa o coeficiente angular da reta de melhor ajuste de tais pontos, assim sendo, estimou-se $z = 0,743$, cujo valor é aproximadamente igual a $3/4$.

Figura 4.3 – Gráfico log-log do parâmetro de ordem, Δ , como função de $K - K_c$ para diferentes valores de dispersão, σ . As equações apresentadas no canto direito de cada gráfico representam a reta de melhor ajuste com coeficiente angular, $\beta = 1/2$, fixado.



Fonte: O autor.

Figura 4.4 – Gráfico log-log de $K_x - K_c$ em função de σ . O coeficiente angular da reta representa o expoente crítico, z , na distribuição Normal.



Fonte: O autor.

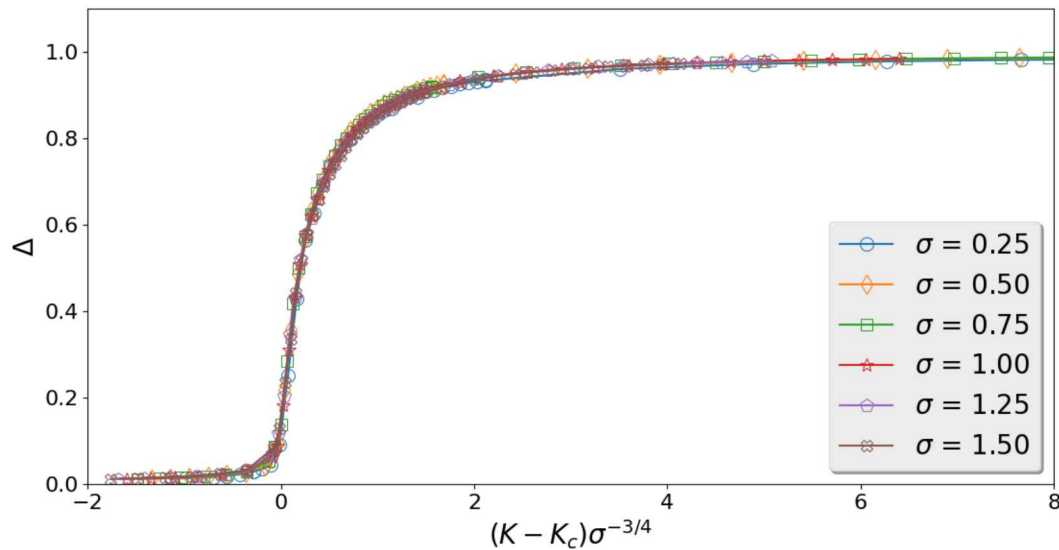
Com o valor de z determinado, a função de escala pretendida é estabelecida:

$$\Delta((K - K_c), \sigma) = \Delta\left(\frac{K - K_c}{\sigma^{\frac{3}{4}}}\right). \tag{4.15}$$

A função de escala obtida propõe a mudança $((K - K_c) \rightarrow (K - K_c)\sigma^{-\frac{3}{4}})$ para o eixo das abscissas, e assim o colapso entre as curvas é observado, o qual indica que σ é uma invariante de escala. A Figura 4.5 mostra o resultado da mudança de escala e o colapso de todas as curvas presentes no gráfico da Figura 4.2. Ressalta-se que a transformação $K \rightarrow (K - K_c)$ foi utilizada apenas para indexar os pontos de transição em zero nos eixos das ordenadas.

Levando em consideração a vasta utilização de distribuições da função Normal na obtenção de resultados mais genéricos, inclusive em estatística, poderia sugerir uma universalidade do expoente z , ou seja, toda e qualquer distribuição simétrica e unimodal no modelo de Kuramoto apresentaria tal expoente. Contudo, nas próximas seções verifica-se resultados distintos do apresentado.

Figura 4.5 – Colapso entre curvas obtido após análise de escala adequada.



Fonte: O autor.

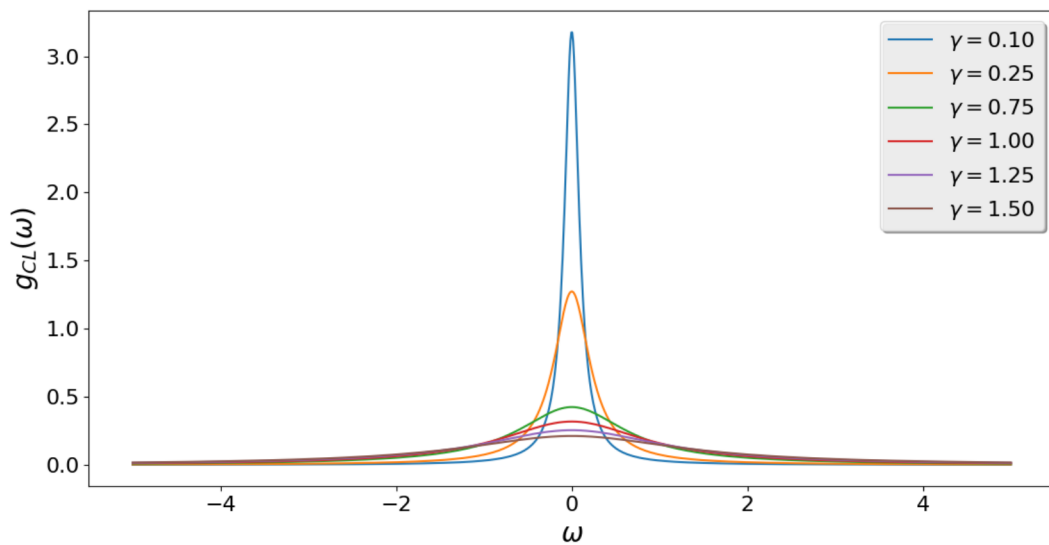
4.2 Distribuição de Cauchy-Lorentz

Os resultados encontrados na seção anterior para a distribuição Normal sugerem uma generalização para toda e qualquer distribuição simétrica e unimodal, de modo que presume-se o colapso entre as curvas provenientes do parâmetro de ordem, Δ , em função do fator de acoplamento, K , para diferentes valores do desvio padrão, com o expoente de escala $3/4$. Dessa maneira, optou-se por testar os mesmos resultados para a distribuição de Cauchy-Lorentz, também conhecida como função lorenziana, a qual é definida através da função:

$$g_{CL}(\omega) = \frac{\gamma}{\pi [\gamma^2 + (\omega - \mu)^2]}, \quad (4.16)$$

onde γ é dito parâmetro de escala.

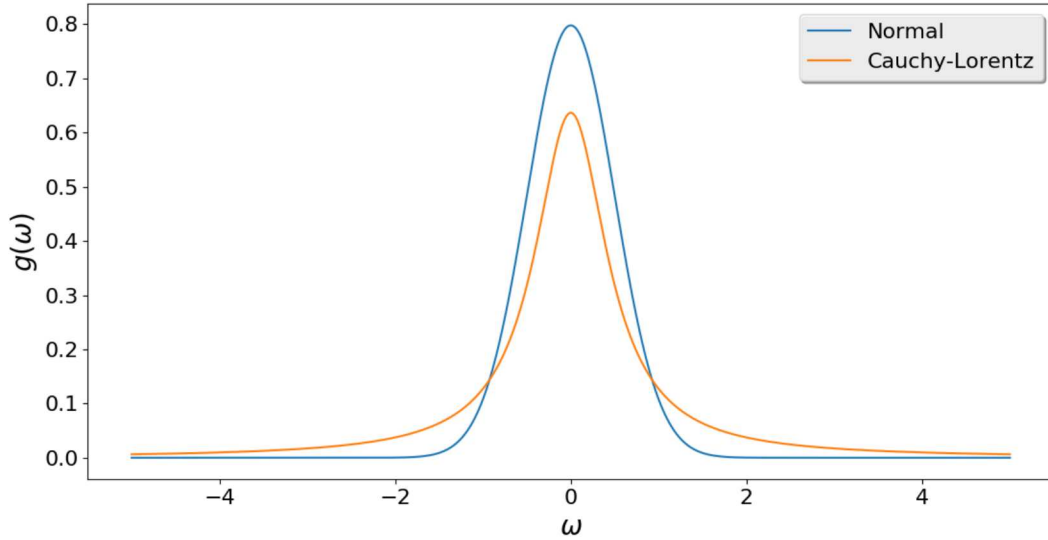
A Figura 4.6 ilustra a distribuição mencionada para diferentes valores do parâmetro de escala, sendo que o aumento nos valores de γ provoca a variação na largura das curvas, tornando-as mais achatadas e com os picos da função mais baixos.

Figura 4.6 – Distribuição unimodal de Cauchy-Lorentz para diferentes valores do parâmetro de escala, γ .

Fonte: O autor.

A distribuição de Cauchy-Lorentz apresenta similaridades visuais com a distribuição Normal, no entanto não são idênticas, já que a distribuição de Cauchy possui caudas que se aproximam de zero mais lentamente, isto é, possuem caudas mais largas e consequentemente, picos mais baixos e estreitos quando comparado a distribuição Normal, conforme ilustra a Figura 4.7. O fato da distribuição de Cauchy-Lorentz ter uma cauda mais espessa indica uma maior probabilidade de termos osciladores à deriva (não sincronizados).

Figura 4.7 – Comparação entre curvas das distribuições Normal e de Cauchy-Lorentz com parâmetros de dispersão, σ , e de escala, γ , iguais a 0,50.



Fonte: O autor.

Como visto no Capítulo 2, em termos do modelo de Kuramoto, o acoplamento crítico, K_c , depende da distribuição de frequência em análise (Equação 2.14), assim sendo, neste caso, obtém-se:

$$K_c = 2\gamma. \quad (4.17)$$

A distribuição de Cauchy-Lorentz costuma ser bastante requisitada em trabalhos com o modelo de Kuramoto (LAFUERZA; COLET; TORAL, 2010; FONSECA; ABUD, 2018) devido a simplicidade matemática proporcionada, o que garante uma amplitude de soluções analíticas. Por exemplo, com a distribuição de Cauchy-Lorentz é possível obter a solução analítica do parâmetro de ordem como função do acoplamento, como apresentado a seguir.

Haja vista que o parâmetro de ordem em função da fase média é descrito pela Equação 2.11, aplicando a distribuição de Cauchy-Lorentz, Equação 4.16 na Equação 2.11, tem-se:

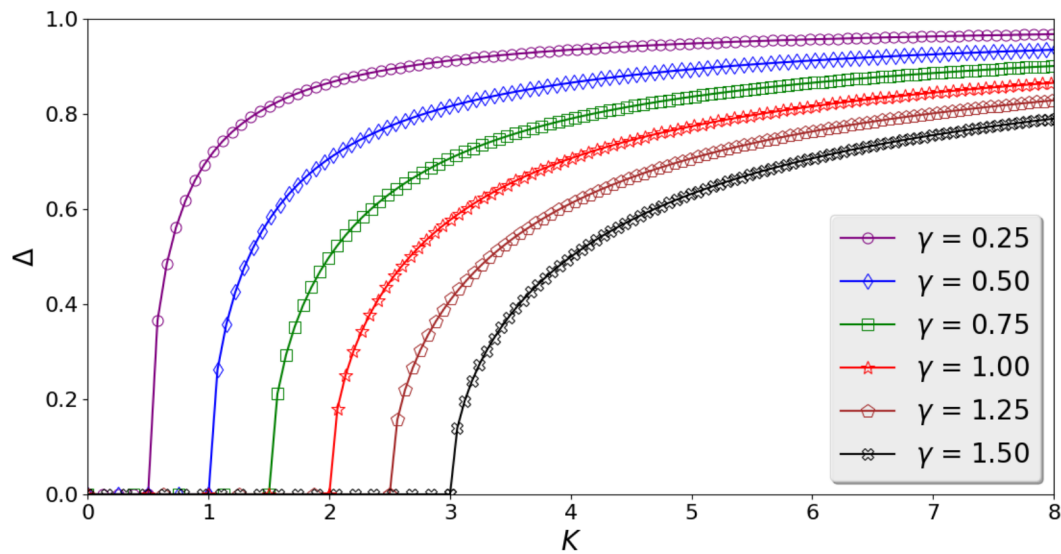
$$1 = \frac{K\gamma}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(\psi)}{\gamma^2 + K^2 \Delta^2 \sin^2(\psi)} d\psi, \quad (4.18)$$

A resolução da Equação 4.18 (veja a resolução completa no Apêndice A) resulta em:

$$\Delta = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{2\gamma}{K}}, & \text{para } K > 2\gamma. \\ 0, & \text{para } K \leq 2\gamma \end{cases} \quad (4.19)$$

A Figura 4.8 ilustra o gráfico do parâmetro de ordem em função do fator de acoplamento proveniente da resolução da Equação 4.19, tal procedimento foi realizado para 150 valores de K e cinco diferentes valores de λ .

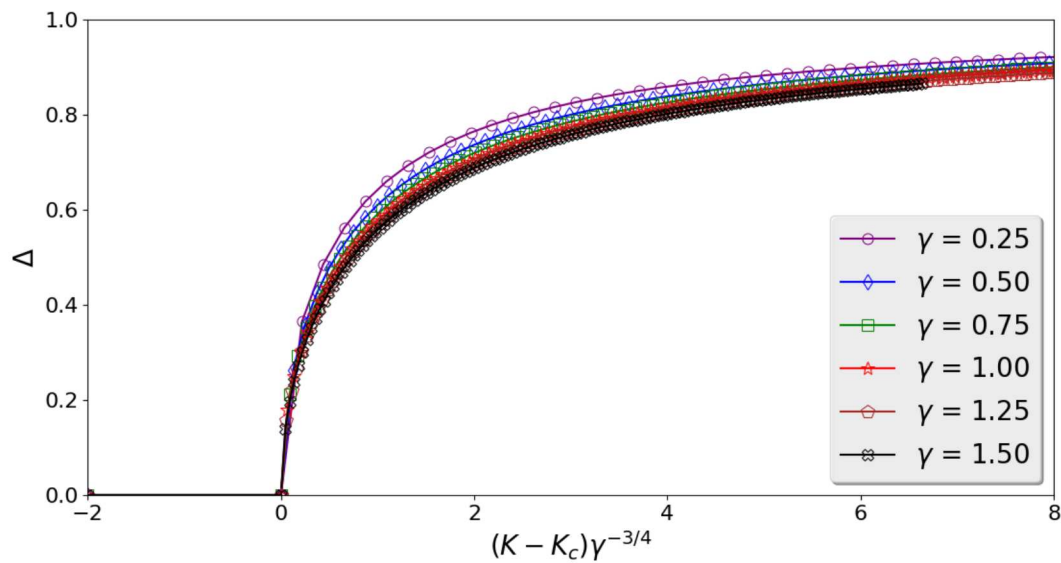
Figura 4.8 – Parâmetro de ordem, Δ , como função do fator de acoplamento, K , para diversos valores do parâmetro de dispersão, γ . As frequências naturais foram distribuídas de acordo com uma função unimodal de Cauchy-Lorentz.



Fonte: O autor.

Pressume-se da seção anterior que o colapso entre as curvas poderá ocorrer após a aplicação da seguinte transformação de escala para o eixo das abscissas: $(K \rightarrow ((K - K_c))\gamma^{-\frac{3}{4}})$, já que a distribuição das frequências naturais também é simétrica e unimodal. No entanto, neste caso, não observou-se o colapso conforme mostrado na Figura 4.9.

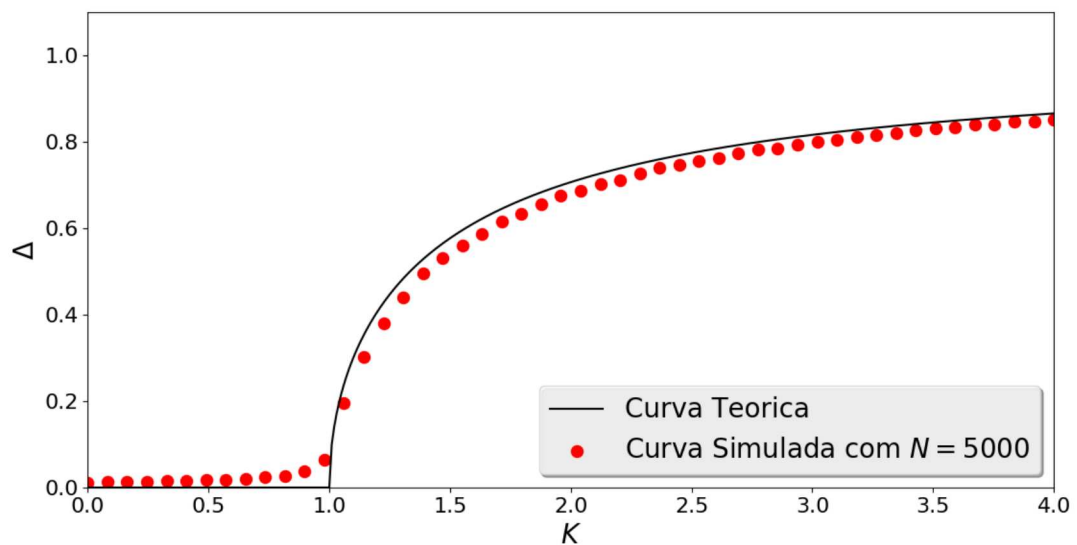
Figura 4.9 – Curvas obtidas após mudança de escala proposta na seção 4.1 para o valor de $z = 3/4$.



Fonte: O autor.

Mediante a consistência entre as curvas teórica e simulada (vide Figura 4.10) busca-se pelo valor para o expoente de escala para esta distribuição através do estudo analítico, haja vista que o colapso não foi observado para $z = 3/4$ (Figura 4.9).

Figura 4.10 – Comparação entre curvas provenientes da simulação computacional e resolução analítica do parâmetro de ordem, Δ , em função do fator de acoplamento, K . Os pontos vermelhos representam os dados coletados com simulação computacional, enquanto que a curva refere-se aos dados coletados a partir da resolução da Equação 4.19. Para ambas as curvas, $\gamma = 0,50$.



Fonte: O autor.

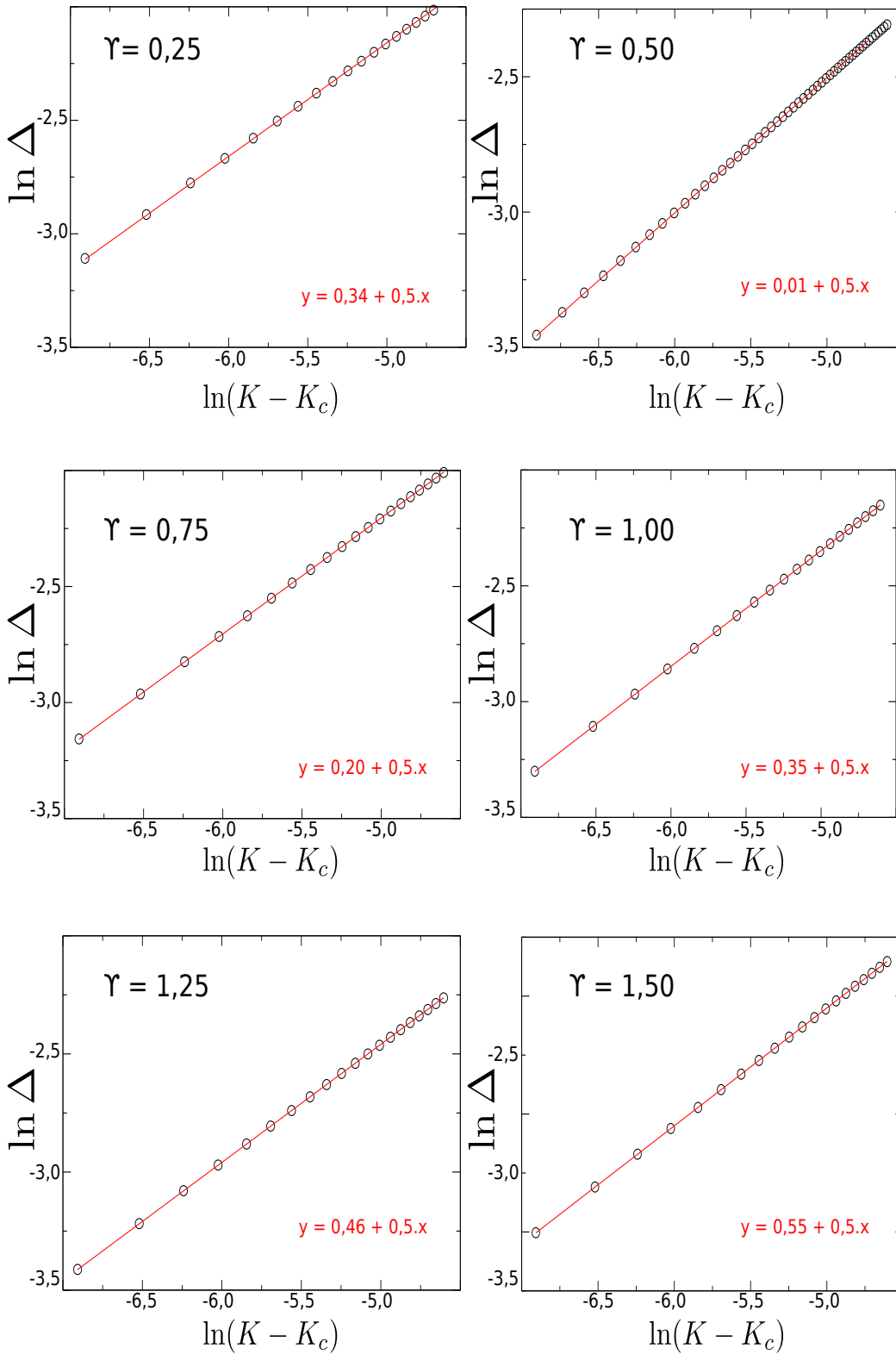
Como, basicamente, as mesmas hipóteses levantadas na seção anterior são válidas também para a distribuição de Cauchy-Lorentz, a única alteração possível de ser observada deve ocorrer quanto à posição do ponto de crossover, K_x .

Com base na hipótese (3) (Equação 4.5) apresentada na seção anterior, estima-se o expoente crítico z presente na lei de escala 4.15 através de uma regressão linear dos pontos provenientes do gráfico log-log de $(K_x - K_c)$ em função de γ (Figura 4.12). Os valores de $\ln(K_x - K_c)$ para cada valor de γ , são determinados admitindo a existência de um ponto de convergência entre as curvas características ao crescimento e saturação, o qual é denominado de ponto de *crossover*, K_x . Portanto para determiná-lo é necessário definir as equações que caracterizam tais curvas e, em seguida, a intersecção entre elas.

Observa-se pela Equação 4.19 que para $K > 2\lambda$, a lei de crescimento $\beta = 1/2$ é válida, assim como nos estudos anteriores (Equação 2.17). Assim sendo, para cada valor de γ , fez-se a coleta dos dados em torno do ponto crítico através da simulação computacional, os quais foram plotados em um gráfico log-log do parâmetro de ordem, Δ , em função de $(K - K_c)$. Em seguida, determinou-se a equação almejada fixando $\beta = 1/2$ como coeficiente angular da reta de melhor ajuste dos pontos, as quais encontram-se registradas no canto inferior direito de cada gráfico ilustrado na Figura 4.11. Já para a determinação das equações referentes à saturação, levou-se em consideração que para $K \rightarrow \infty$ todas as curvas convergem para o mesmo ponto, $\Delta \approx 1$, portanto, para qualquer valor de γ , tem-se: $y = 0$, já que $\ln(1) = 0$.

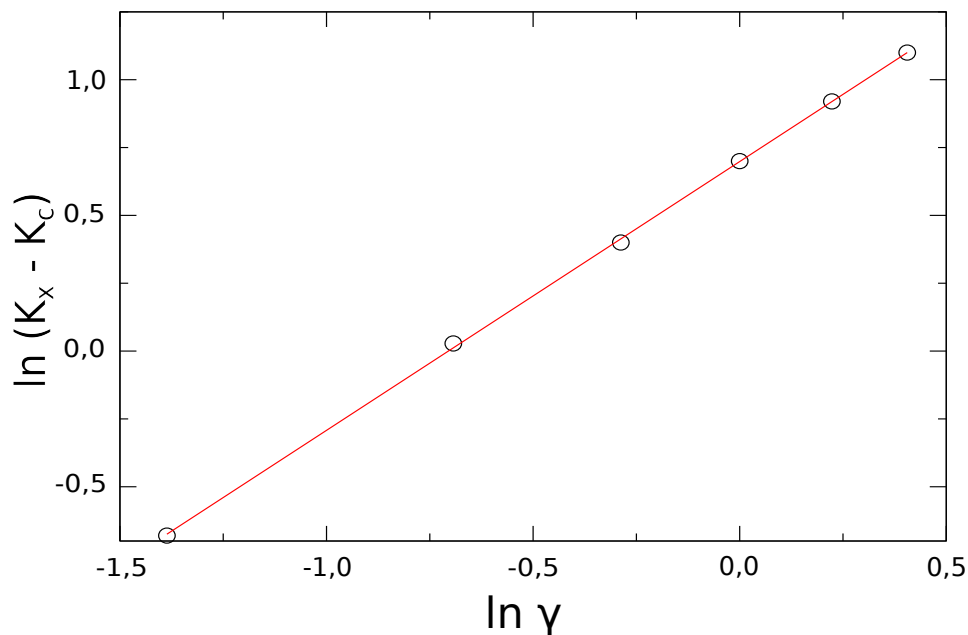
Em posse das equações pretendidas, o cálculo de intersecção foi realizado, dessa forma, obteve-se os valores de $\ln(K_x - K_c)$ para cada valor de γ , os quais foram plotados no gráfico log-log de $(K_x - K_c)$ em função de γ (Figura 4.12). O coeficiente z representa o coeficiente angular da reta de melhor ajuste de tais pontos, assim sendo, estimou-se $z = 0,99$, e portanto pode-se dizer que $z \approx 1$, o que corresponde ao valor determinado aleatoriamente através dos testes.

Figura 4.11 – Gráfico log-log do parâmetro de ordem, Δ , como função de $K - K_c$ para diferentes valores de dispersão, γ . As equações apresentadas no canto direito de cada gráfico representam a reta de melhor ajuste com coeficiente angular, $\beta = 1/2$, fixado.



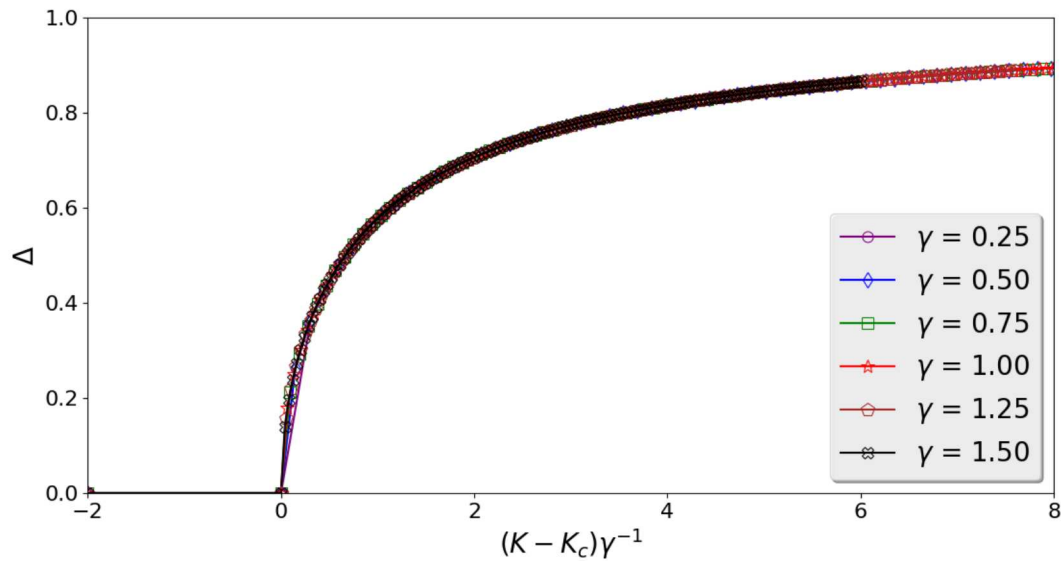
Fonte: O autor.

Figura 4.12 – Gráfico log-log de $K_x - K_c$ em função de γ . O coeficiente angular da reta representa o expoente crítico, z , na distribuição de Cauchy-Lorentz.



Fonte: O autor.

O valor encontrado para z , sugere a seguinte transformação no eixo das ordenadas: $((K - K_c) \rightarrow ((K - K_c))\gamma^{-1})$, a partir da qual pode-se observar o colapso entre as curvas na Figura 4.13, o qual indica que γ é uma invariante de escala. No entanto, mediante aos resultados apresentados na presente e anterior seção, observa-se uma discrepância entre os valores do expoente de escala, já que as curvas não colapsaram com $z = 3/4$, mas sim com $z = 1$. Diante disso, na próxima seção é investigada uma terceira distribuição simétrica e unimodal, chamada distribuição de Laplace, com o intuito de verificar se as escalas ainda se diferem.

Figura 4.13 – Colapso entre curvas obtido após aplicação de expoente de escala igual a $z = 1$.

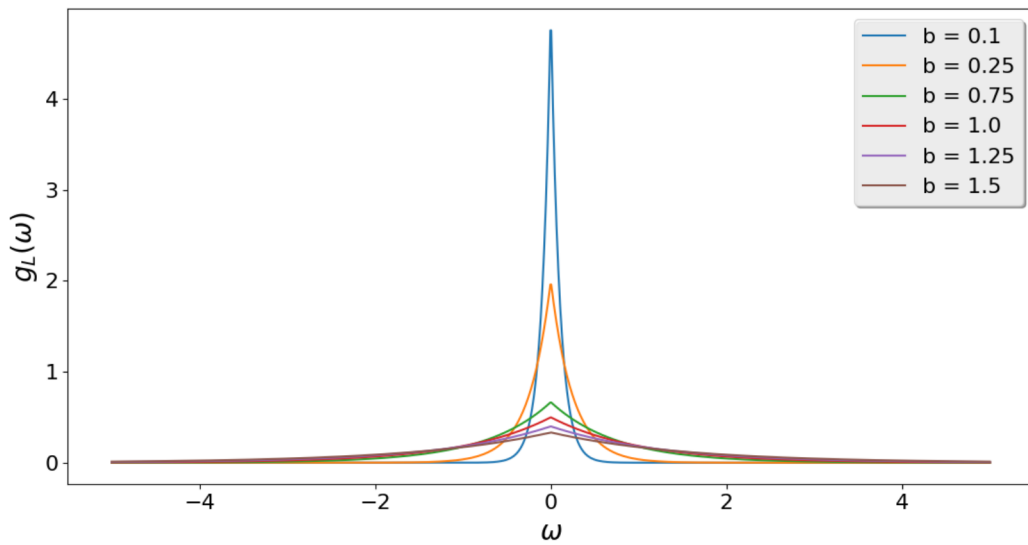
Fonte: O autor.

4.3 Distribuição de Laplace

Nas seções anteriores observou-se uma discrepância entre os valores do expoente de escala para as distribuições Normal e de Cauchy-Lorentz, mesmo ambas sendo unimodais e simétricas. Diante disso, optou-se por realizar os mesmos testes para a distribuição de Laplace, a qual é definida pela equação:

$$g_L(\omega) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|\omega - \mu|}{b}\right) \quad (4.20)$$

onde μ é a média, sendo que $\mu = 0$ e, b é o parâmetro de escala, cuja variação interfere na dispersão das frequências naturais, conforme pode ser observado na Figura 4.14.

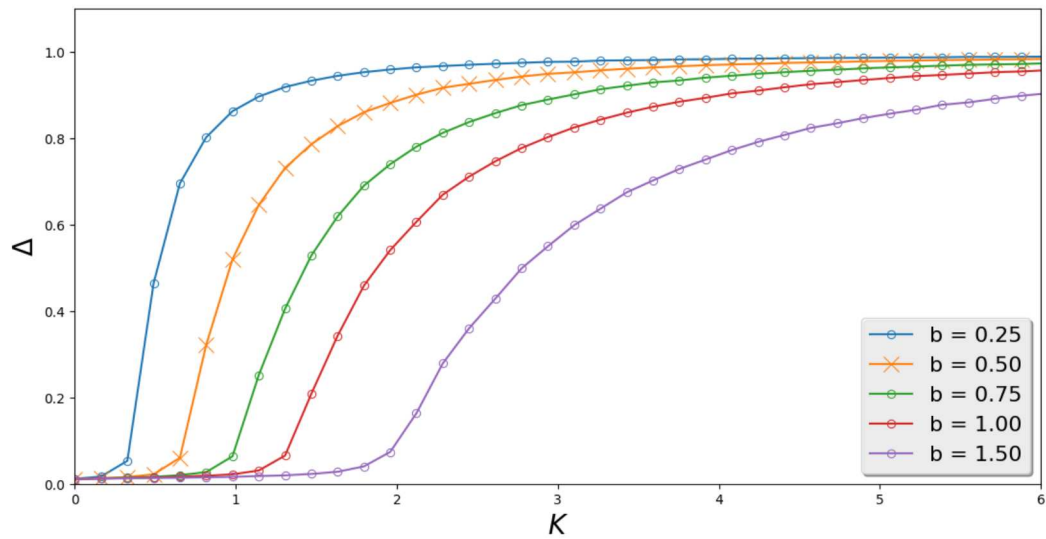
Figura 4.14 – Distribuição unimodal de Laplace para diferentes valores do parâmetro de escala, b .

Fonte: O autor.

Como o acoplamento crítico, K_c , depende da distribuição de frequência em análise (Equação 2.14), tem-se que:

$$K_c = \frac{4b}{\pi}. \quad (4.21)$$

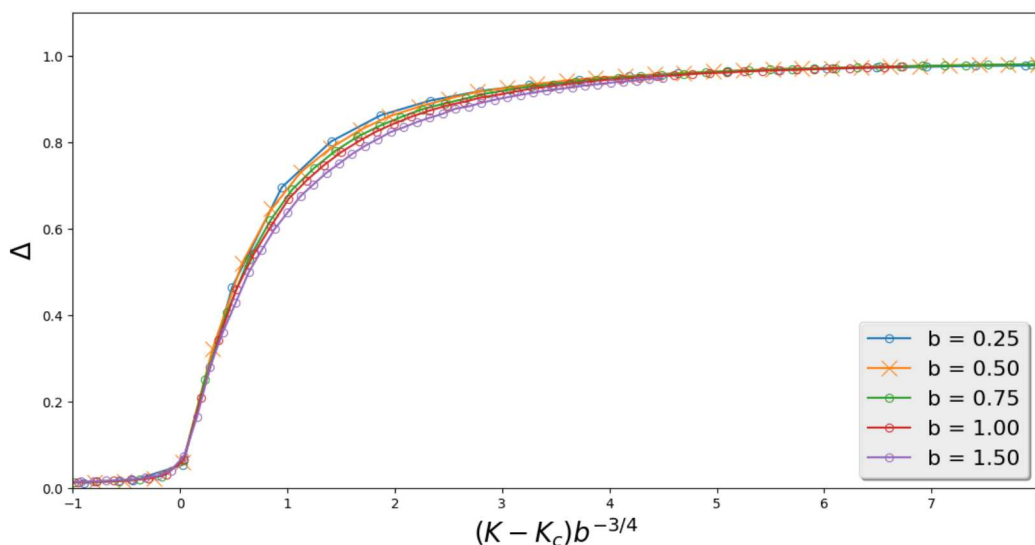
A Figura 4.15 ilustra o gráfico do parâmetro de ordem em função do fator de acoplamento proveniente da resolução do modelo de Kuramoto (Equação 2.1) para 5000 osciladores com as fases θ distribuídas uniformemente entre $[0, 2\pi[$ e as frequências naturais de acordo com uma distribuição de Laplace unimodal para diferentes valores do parâmetro de escala, b . Observa-se que as curvas diferenciam-se na região de $K \approx K_c$ conforme o valor de b varia. Nas simulações, iniciou-se o sistema a partir das distribuições descritas e uma média ao longo do tempo ($t = 200$) foi realizada para coletar o valor para o parâmetro de ordem. Tal procedimento foi repetido para 50 valores de K e tomando uma média sobre 30 amostras diferentes para $\theta_i(0)$ e $\omega_i(0)$.

Figura 4.15 – Distribuição unimodal de Laplace para diferentes valores do parâmetro de dispersão, b .

Fonte: O autor.

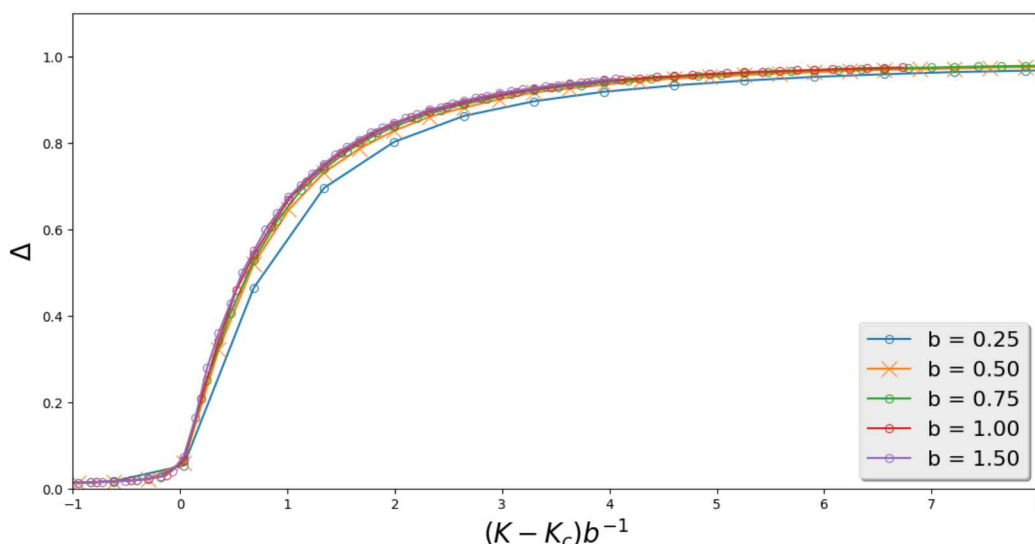
Com base na vasta aplicação da distribuição Normal, hipotetizou-se uma generalização do expoente de escala, $z = 3/4$, para toda e qualquer distribuição simétrica e unimodal. Assim sendo, foi esperado o colapso entre as curvas após aplicar a seguinte transformação: $(K \rightarrow (K - K_c)b^{-3/4})$, o que não ocorreu como pode-se observar na Figura 4.16. Assim sendo, mediante o resultado, testou-se o expoente de escala obtido com a distribuição de Cauchy-Lorentz, na seção 4.2, $z = 1,0$. Após aplicar a transformação: $(K \rightarrow (K - K_c)b^{-1})$ não observou-se o colapso entre as curvas (Figura 4.17). Mediante isso, uma indagação foi levantada: seria o coeficiente de escala, z , um valor particular para cada distribuição?

Figura 4.16 – Curvas obtidas após mudança de escala proposta na seção 4.1, para o valor de $z = 3/4$.



Fonte: O autor.

Figura 4.17 – Curvas obtidas após mudança de escala proposta na seção anterior, para o valor de $z = 1,0$.

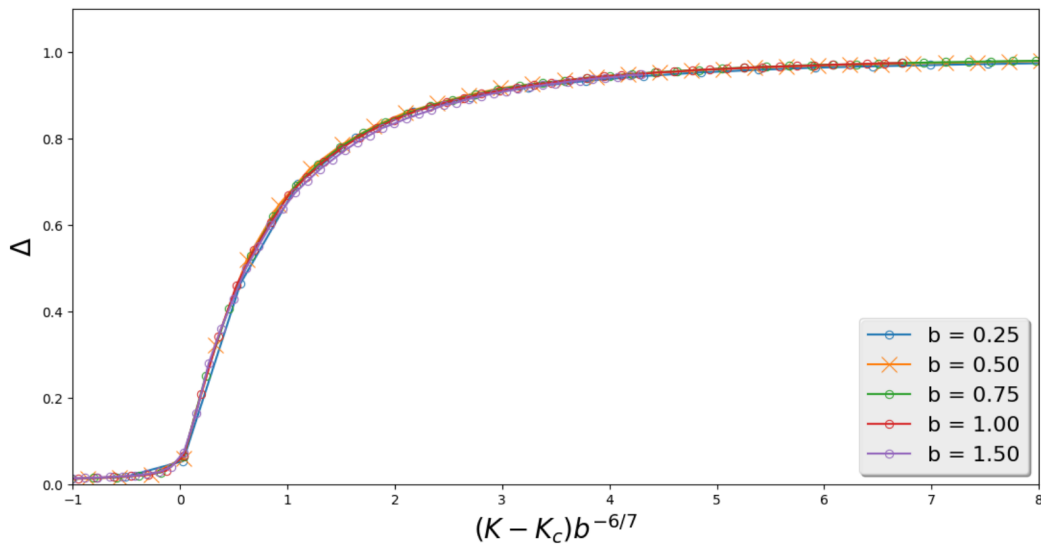


Fonte: O autor.

Aleatoriamente, outras transformações foram testadas, e quando aplicado a transformação: $(K \rightarrow (K - K_c)b^{-6/7})$, o colapso foi observado (Figura 4.18). Dessa forma, surge uma suspeita: As curvas provenientes de distintas distribuições de frequência unimodais e simétricas, não apresentam expoente de escala idênticos, no entanto, as curvas são escaláveis, logo apresentam uma universalidade. Além disso, mediante aos resultados obtidos,

acredita-se que para outras distribuições, unimodais e simétricas, o colapso ocorrerá com o valor do expoente de escala entre $3/4$ e $1,0$, assim como foi observado para a distribuição de Laplace com expoente de escala igual a $6/7$.

Figura 4.18 – Colapso entre curvas obtido após aplicação de expoente de escala aleatório, igual a $z = 6/7$.



Fonte: O autor.

4.4 Comentários sobre os diferentes valores dos expoentes de escala

Nesta seção, uma discussão sobre o fato das diferentes distribuições simétricas unimodais gerarem diferentes expoentes de escala é apresentado sob o ponto de vista das equações desenvolvidas no Capítulo 2. Sabe-se pela teoria apresentada no Capítulo 2, que o parâmetro de ordem para distribuições simétricas e unimodais é representado pela Equação (2.10a), lembrando:

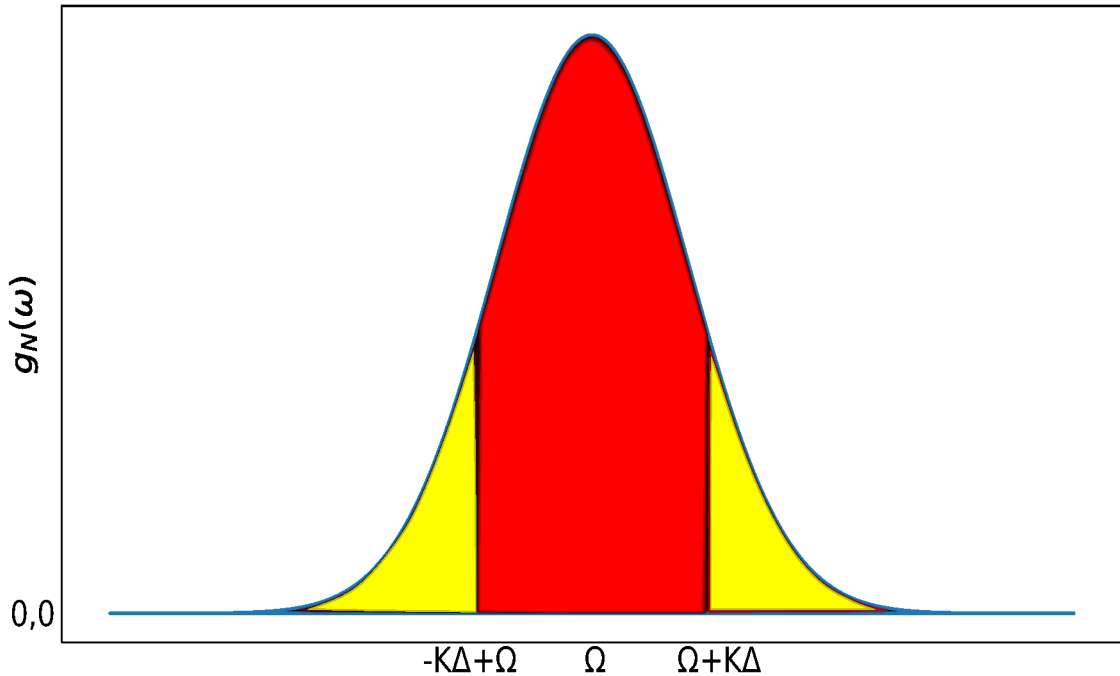
$$\Delta = K\Delta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(\Omega + K\Delta \sin(\psi)) \cos^2(\psi) d\psi. \quad (4.22)$$

O argumento da integral é a contribuição para o parâmetro de ordem dos osciladores sincronizados (FONSECA; ABUD, 2018), sendo assim, para distribuições unimodais e simétricas, apenas os osciladores sincronizados contribuem para o parâmetro de ordem.

Além disso, foi discutido no Capítulo 2 que a aplicação de campo médio no modelo de Kuramoto leva a uma modelo dado pela Equação 2.7, que pressupõem um atrator na região entre $[-K\Delta + \Omega, \Omega + K\Delta]$, região definida pelos osciladores sincronizados. A Figura 4.19 ilustra uma distribuição $g(\omega)$ com a região destacada onde se distribuem os osciladores

sincronizados. A quantidade de osciladores sincronizados, r_s , pode ser determinada pela área destacada em vermelho, ou seja:

Figura 4.19 – Curva de uma distribuição Normal. Em vermelho, a região de osciladores sincronizados. Em amarelo, a região de osciladores dessincronizados.



Fonte: O autor.

$$r_s = \int_{-K\Delta + \Omega}^{\Omega + K\Delta} g(\omega, \hat{x}) d\omega, \quad (4.23)$$

onde o parâmetro \hat{x} foi utilizado para pontuar a dependência sobre a dispersão para diferentes distribuições.

Como Ω é o centro da distribuição, pode-se adotar $\Omega = 0$ sem perda de generalidade. Portanto, sendo o parâmetro de ordem dependente dos osciladores sincronizados e estes, por sua vez, estão relacionados a Equação 4.23, é possível concluir que a variação do número de osciladores sincronizados acoplados conforme o parâmetro de dispersão é alterado, $\frac{dr_s}{d\hat{x}}$, depende única e exclusivamente da distribuição de frequência em estudo.

Para valores altos do fator de acoplamento tem-se que o parâmetro $K\Delta$, também é alto, portanto a quantidade de osciladores sincronizados tende a ser quase todo sistema e neste caso, a variação do número de osciladores sincronizados, conforme se altera o parâmetro de dispersão, tende a ser igual inclusive para distribuições diferentes. Contudo, durante o intervalo de crescimento, que consiste em valores do fator de acoplamento entre K_c e K_x , é praticamente impossível que as variações da $\frac{dr_s}{d\hat{x}}$ sejam idênticas entre distribuições diferentes. Logo, os expoentes de escalas, como foi demonstrado a existência neste Capítulo, se definem individualmente para cada distribuição unimodal e simétrica.

Capítulo 5

CONCLUSÕES

O modelo de Kuramoto refere-se a um conjunto de osciladores acoplados através de um sistema de equações diferenciais, o qual é importante no estudo da sincronização. A transição do estado dessincronizado para o estado sincronizado é demarcada pelo ponto de acoplamento crítico, K_c , sendo o parâmetro de ordem, Δ , a variável responsável em mensurar a sincronização. Variações no número de osciladores e parâmetros de dispersão induzem à mudanças no processo de sincronização, fato evidenciado por perfis de curvas diferentes do parâmetro de ordem em função do fator de acoplamento, K . Com base nisso, buscou-se neste trabalho entender como tais modificações afetam o modelo em estudo, seria uma mudança apenas quantitativa? As respostas foram obtidas a partir do uso de uma metodologia baseada nos estudos sobre teoria de escala de [Barabási e Stanley \(2002\)](#).

A obtenção de uma teoria de escala tem como propósito adquirir comportamentos universais em sistemas. Para isso, faz-se necessário a definição de hipóteses de escala para o parâmetro de ordem em torno do ponto crítico. Inicialmente, o estudo de tamanho finito foi abordado, a fim de comprovar a eficiência do método, para isso teve como base os resultados previstos na literatura ([HONG; HA; PARK, 2007](#); [HONG *et al.*, 2007b](#); [HONG *et al.*, 2015](#)). Após confirmada a eficácia, da metodologia, uma investigação sobre o parâmetro de dispersão, neste caso, para as distribuições Normal, de Cauchy-Lorentz e de Laplace foi realizada

As chamadas hipóteses de escalas foram levantadas, considerando o comportamento do parâmetro de ordem como função do fator de acoplamento e de um parâmetro que controla a dispersão da distribuição das frequências naturais. Tais hipóteses basearam-se em leis de potência, na qual a marcação de um ponto hipotético, K_x , de intersecção entre a curva de crescimento e a curva de saturação, teve um papel fundamental na metodologia adotada e, conseqüentemente, no êxito em se obter os expoentes de escala, pois hipotetizou-se o ponto de intersecção entre retas tangentes às curvas de crescimento e saturação, o ponto de *crossover*, K_x . É importante evidenciar a robustez deste estudo, no qual as simulações para coletar o valor para o parâmetro de ordem foram realizadas com média ao longo do tempo ($t = 200$), além disso o procedimento foi repetido para vários valores de K e tomando uma

média sobre 30 amostras diferentes para $\theta_i(0)$ e $\omega_i(0)$.

Após aplicada a teoria de escala para tamanho finito e variáveis de dispersão, obteve-se o colapso entre as curvas, isto significa que as variáveis: N , σ , γ e b , são invariantes de escala, ou seja, a variação de tais parâmetros não afeta qualitativamente o modelo, portanto apresentam comportamento universal. Além disso, haja vista que o colapso garante modelos padrões, a necessidade na realização de simulações computacionais poderá ser reduzida.

Levando em consideração a vasta utilização da distribuição Normal na obtenção de resultados mais genéricos, inclusive em estatística, acreditou-se em uma universalidade do expoente z , ou seja, toda e qualquer distribuição simétrica e unimodal no modelo de Kuramoto apresentaria tal expoente. Contudo, verificou-se resultados distintos do apresentado para as distribuições de Cauchy-Lorentz e de Laplace demonstrando assim a não universalidade entre as distribuições. Através de uma análise sobre a teoria do modelo de Kuramoto (seção 4.4) observou-se que tal distinção pode estar relacionada com a diferença entre a quantidade de osciladores sincronizados em cada tipo de distribuição como mencionado na seção 4.4.

A metodologia aqui utilizada pode auxiliar a análises de outros parâmetros ou modelos, sendo assim sugere para estudos posteriores, a fim de dar continuidade a este trabalho:

- Estudo do modelo com distribuições unimodais e assimétricas:

Na seção 2.1 deste trabalho, viu-se que para distribuições simétricas, a integral J , presente na definição do parâmetro de ordem em função da fase média (Equação 2.8) é nula. No entanto, para distribuições assimétricas, o centro de simetria da função não coincide com a frequência crítica, e por isso, J é diferente de zero. Consequentemente, novas equações serão consideradas, e os valores antes encontrados para o parâmetro de ordem, Δ , e acoplamento crítico, K_c , se diferenciarão, exigindo maior robustez na resolução. Além disso, busca-se saber se os expoentes críticos continuarão a obedecer as leis de escala estabelecidas para uma distribuição simétrica, e se seus valores permanecerão os mesmos, inclusive o valor de β . É importante salientar que, o uso de uma distribuição assimétrica, oferece novos resultados, dessa forma, novas simulações serão necessárias.

- Possibilidade das funções de escala em outro modelo:

Diante da vasta quantidade de modelos matemáticos que descrevem a sincronização, citados na literatura, a teoria de escala pode ser aplicada em mais de um modelo matemático, como exemplo, o modelo de Kuramoto-Sakaguchi, no qual um parâmetro de atraso é adicionado ao modelo original de Kuramoto (SAKAGUCHI; KURAMOTO, 1986). Neste caso, estudos apontam que mesmo com valores altos do acoplamento, o parâmetro de ordem não

satura na mesma posição em relação ao eixo das ordenadas. Assim sendo, para que o colapso entre as curvas seja evidenciado, torna-se necessário a transformação não somente no eixo das abcissas, como aqui observado, mas também no eixo das ordenadas. Assim sendo, novos estudos e análises deverão ser realizadas.

REFERÊNCIAS

BARABÁSI, A.-L.; STANLEY, H. E. *Lecture Notes in Physics*. new. Torktown Heights, New York and Boston, Massachusetts: Cambridge University Press, 2002. 388 p. Citado 3 vezes nas páginas 10, 21 e 47.

BASNARKOV, L.; URUMOV, V. Kuramoto model with asymmetric distribution of natural frequencies. *PHYSICAL REVIEW E*, v. 78, p. 011113, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 26.

BUCK, J. Synchronous rhythmic flashing of fireflies. *Quarterly Review of Biology*, (63), 1988. Citado na página 8.

CHOI, C.; HA, M.; KAHNG, B. Extended finite-size scaling of synchronized coupled oscillators. *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, v. 88, p. 032126, 09 2013. Citado na página 24.

DAIDO, H. Intrinsic fluctuations and a phase transition in a class of large populations of interacting oscillators. *Journal of Statistical Physics*, v. 60, p. 753–800, 09 1990. Citado na página 20.

FONSECA, J. C. D.; ABUD, C. V. The model kuramoto revisited. *Journal of statistical mechanics - theory and experiment*, v. 2018, p. 103204, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 12, 13, 35 e 45.

HONG, H. *et al.* Entrainment transition in populations of random frequency oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 99, p. 184101, Oct 2007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.184101>>. Citado na página 21.

_____. _____. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 99, p. 184101, Oct 2007. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 47.

_____. Finite-size scaling, dynamic fluctuations, and hyperscaling relation in the kuramoto model. *Phys. Rev. E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, v. 92, p. 022122, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 20, 24, 25 e 47.

HONG, H.; HA, M.; PARK, H. Finite-size scaling in complex networks. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 98, p. 258701, Jun 2007. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 47.

HONG, H.; PARK, H.; CHOI, M. Y. Collective synchronization in spatially extended systems of coupled oscillators with random frequencies. *Phys. Rev. E, American Physical Society*, v. 72, p. 036217, Sep 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.72.036217>>. Citado na página 21.

- HONG, H. P. H.; TANG, L.-H. Finite-size scaling of synchronized oscillation on complex networks. *Physical review E*, v. 76, p. 066104, 2007. Citado na página 21.
- HONG, J. U. H.; PARK, H. Link-disorder fluctuation effects on synchronization in random networks. *Physical review E*, v. 87, p. 042105, 2013. Citado na página 21.
- JALIFE, J. Mutual entrainment and electrical coupling as mechanisms for synchronous firing of rabbit sino-atrial pace-maker cells. *J. Physiol*, p. 221–243, 1984. Citado na página 8.
- KOZYREFF, G.; VLADIMIROV, A.; MANDEL, P. Global coupling with time delay in an array of semiconductor lasers. *Physical review letters*, v. 85, p. 3809–12, 11 2000. Citado na página 8.
- KURAMOTO, Y. *Lecture Notes in Physics*. 30. ed. Kyoto, Japão: Valcan Editora, 1975. 420-422 p. Citado 4 vezes nas páginas 9, 11, 12 e 20.
- LAFUERZA, L. F.; COLET, P.; TORAL, R. Nonuniversal results induced by diversity distribution in coupled excitable systems. *Physical Review Letters*, v. 105, p. 084101, 2010. Citado na página 35.
- LEE, M. J. *et al.* Finite-time and finite-size scaling of the kuramoto oscillators. *Physical review letters*, v. 1, p. 074102, 2 2014. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 24.
- LEONEL, E. D. The fermi-ulam accelerator model under scaling analysis. *Physical Review Letters*, v. 93(2), p. 029902, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 22.
- _____. Corrugated waveguide under scaling investigation. *Physical Review Letters*, v. 98(11), p. 114102, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 22.
- MALAKIS, A.; FYTAS, N.; KALOZOUKIS, P. First-order transition features of the triangular ising model with nearest- and next-nearest-neighbor antiferromagnetic interactions. *Physica A Statistical and Theoretical Physics*, v. 383, p. 351–371, 09 2007. Citado na página 9.
- MIROLLO, R.; STROGATZ, S. Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, v. 50(6), p. 1645–1662, 1990. Citado na página 8.
- NUSSENZVEIG, H. M. *O oscilador harmônico*. 4. ed. Rio de Janeiro: Blucher, 2002. 314 p. Citado na página 8.
- PETER, F.; PIKOVSKY, A. Transition to collective oscillations in finite kuramoto ensembles. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 97, p. 032310, Mar 2018. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 26.
- PETKOSKI, S. *et al.* Kuramoto model with asymmetric distribution of natural frequencies. *Physical review E*, v. 87, p. 032908, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 26.
- PIKOVSKY, A.; ROSENBLUM, M. Dynamics of globally coupled oscillators: progress and perspectives. *Chaos, LLC*, v. 25, p. 097616, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 20.
- PIKOVSKY, A.; ROSENBLUM, M.; KURTHS., J. *Lecture Notes in Physics*. 1. ed. Germany: Cambridge University Press, 2003. 432 p. Citado na página 8.
- SAKAGUCHI, H.; KURAMOTO, Y. A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entrainment. *Progress of Theoretical Physics*, v. 76(3), p. 576–581, 1986. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 48.

SALINAS, S. R. A. *Teorias de escala e grupo de renormalização*. 2ª. ed. Barueri, São Paulo: Edusp, 2005. 337-341 p. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 19.

STAM, C. Nonlinear dynamical analysis of eeg and meg: Review of an emerging field. *Clinical neurophysiology: official journal of the International Federation of Clinical Neurophysiology*, v. 116, p. 2266–301, 11 2005. Citado na página 8.

STROGATZ, S. H. From kuramoto to crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D*, v. 143, p. 1–20, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 9, 12 e 13.

TANG, L. To synchronize or not to synchronize, that is the question: Finite-size scaling and fluctuation effects in the kuramoto model. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, v. 2011, 11 2010. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 21.

UM, H. H. J.; PARK, H. Nature of synchronization transitions in random networks of coupled oscillators. *Physical review E*, v. 89, p. 012810, 2014. Citado na página 21.

Capítulo 6

APÊNDICES

6.1 Apêndice A

A solução para o parâmetro de ordem apresentada na seção 4.2 foi determinada a partir da resolução apresentada neste apêndice, a qual é proveniente da solução da equação do parâmetro de ordem em função da fase média (Equação 2.11) para a distribuição de Cauchy-Lorentz. Para isso, escreve-se 2.11 da seguinte maneira:

$$1 = \frac{K\gamma}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \frac{\cos^2(\psi)}{\gamma^2 + K^2\Delta^2 \sin^2(\psi)}, \quad (6.1)$$

a substituição de $\cos^2(\psi)$ por $(1 - \sin^2(\psi))$, permite reescrevê-la como:

$$1 = \frac{K\gamma}{\pi} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\gamma^2 + K^2\Delta^2 \sin^2(\psi)} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \frac{\sin^2(\psi)}{\gamma^2 + K^2\Delta^2 \sin^2(\psi)} \right], \quad (6.2)$$

colocando o termo $K^2\Delta^2$ em evidência e, readequando a segunda integral presente a fim de resolvê-la conforme o que se conhece na literatura, pode-se escrever,

$$1 = \frac{K\gamma}{\pi K^2\Delta^2} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\frac{\gamma^2}{K^2\Delta^2} + \sin^2(\psi)} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\gamma^2}{K^2\Delta^2} + \sin^2(\psi)}{\frac{\gamma^2}{K^2\Delta^2} + \sin^2(\psi)} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\gamma^2}{K^2\Delta^2}}{\frac{\gamma^2}{K^2\Delta^2} + \sin^2(\psi)} \right], \quad (6.3)$$

que também pode ser escrito como,

$$1 = \frac{K\gamma}{\pi K^2\Delta^2} \left[-\pi + \left[\left(1 + \frac{\gamma^2}{K^2\Delta^2} \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\frac{\gamma^2}{K^2\Delta^2} + \sin^2(\psi)} \right) \right] \right]. \quad (6.4)$$

A presente integral poderá ser solucionada a partir do método de substituição, para isso necessita-se realizar a divisão por $\cos^2(\psi)$ para ambos os termos da fração, assim:

$$1 = \frac{K\gamma}{\pi K^2\Delta^2} \left[-\pi + \left[\left(1 + \frac{\gamma^2}{K^2\Delta^2} \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d\psi}{\cos^2(\psi)}}{\frac{\frac{\gamma^2}{K^2\Delta^2} + \sin^2(\psi)}{\cos^2(\psi)}} \right) \right] \right]. \quad (6.5)$$

Além disso, levando em consideração que $\cos^2(\psi) + \sin^2(\psi) = 1$, pode-se escrever:

$$1 = \frac{K\gamma}{\pi K^2 \Delta^2} \left[-\pi + \left[\left(1 + \frac{\gamma^2}{K^2 \Delta^2} \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d\psi}{\cos^2(\psi)}}{\frac{\gamma^2}{K^2 \Delta^2} \frac{(\sin^2(\psi) + \cos^2(\psi))}{\cos^2(\psi)} + \frac{\sin^2(\psi)}{\cos^2(\psi)}} \right) \right] \right]. \quad (6.6)$$

E, ainda,

$$1 = \frac{K\gamma}{\pi K^2 \Delta^2} \left[-\pi + \left[\left(1 + \frac{\gamma^2}{K^2 \Delta^2} \right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2(\psi) d\psi}{\frac{\gamma^2}{K^2 \Delta^2} + \left(1 + \frac{\gamma^2}{K^2 \Delta^2} \right) \tan^2(\psi)} \right] \right]. \quad (6.7)$$

Através do método de substituição, admite-se que: $u = \tan(\psi)$ e, portanto, $du = \sec^2(\psi) d\psi$. O que resulta em:

$$1 = \frac{K\gamma}{\pi K^2 \Delta^2} \left[-\pi + \left[\left(1 + \frac{\gamma^2}{K^2 \Delta^2} \right) \left(\frac{2K^2 \Delta^2}{K^2 \Delta^2 + \gamma^2} \int_0^\infty \frac{du}{\frac{\gamma^2}{K^2 \Delta^2 + \gamma^2} + u^2} \right) \right] \right]. \quad (6.8)$$

Portanto, após a resolução da integral, obtém-se:

$$1 = \frac{K\gamma}{\pi K^2 \Delta^2} \left[-\pi + \frac{\pi \sqrt{\left(1 + \frac{\gamma^2}{K^2 \Delta^2} \right)}}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{K^2 \Delta^2}}} \right]. \quad (6.9)$$

Após o reordenamento dos termos, obtém-se:

$$K\Delta^2 = -\gamma + \sqrt{K^2 \Delta^2 + \gamma^2} \quad (6.10)$$

E, portanto, têm-se as seguintes soluções:

$$\Delta = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{2\lambda}{K}}, & \text{para } K > 2\lambda. \\ 0, & \text{para } K \leq 2\lambda \end{cases} \quad (6.11)$$