



Regional Catalão
Unidade Acadêmica Especial de
Matemática e Tecnologia
Mestrado Profissional em Matemática



Aplicação de Determinante: Área de Polígono Convexo e Volume de Pirâmide

Elismar José de Araújo

Catalão

2015

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: ☒ **Dissertação** ☐ **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Elismar José de Araújo		
E-mail:	elismarjose@bol.com.br		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	☒ Sim	☐ Não	
Vínculo empregatício do autor	Professor da SEE-DF		
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior	Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	DF
CNPJ:	00.394.676/0001-07		
Título:	Aplicação de Determinante: Área de Polígono Convexo e Volume de Pirâmide		
Palavras-chave:	Matriz, determinante, área, volume, polígono convexo, pirâmide, tetraedro e triângulo.		
Título em outra língua:	Determinants of application : Convex Polygon Area and Volume of Pyramid		
Palavras-chave em outra língua:	Matrix, determinant, polygon, area, volume, pyramid, tetrahedron, triangle		
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico		
Data defesa:	17/06/2015		
Programa de Pós-Graduação:	PROFMAT		
Orientador (a):	Dr. Thiago Porto de Almeida Freitas		
E-mail:	tpporto@gmail.com		
Co-orientador (a):*			
E-mail:			

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM ☐ NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Elismar José de Araújo
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 31 / 07 / 2015

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Elismar José de Araújo

Aplicação de Determinante: Área de Polígono Convexo e Volume de Pirâmide

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à IMTec/RC/UFG, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Thiago Porto de Almeida Freitas

Catalão

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

ARAÚJO, ELISMAR JOSÉ DE

Aplicação de Determinante: Área de Polígono Convexo e Volume de
Pirâmide [manuscrito] / ELISMAR JOSÉ DE ARAÚJO. - 2015.
CII, 102 f.

Orientador: Prof. Dr. Prof. Dr. Thiago Porto de Almeida Freitas.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional
Catalão, Catalão, Programa de Pós-Graduação em Matemática
(PROFMAT - profissional), Catalão, 2015.

Bibliografia.

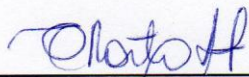
Inclui siglas, símbolos, gráfico, lista de figuras.

1. Matriz, Determinante. 2. Área, Volume. 3. Proposição, Teorema,
Corolário. 4. Pirâmide, Tetraedro, Polígono convexo, Triângulo. 5.
Lagrange. I. Freitas, Prof. Dr. Thiago Porto de Almeida, orient. II. Título.

Elismar José de Araújo

**“Aplicação de Determinante: Área de Polígono
Convexo e Volume de Pirâmide”**

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 17 de Junho de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

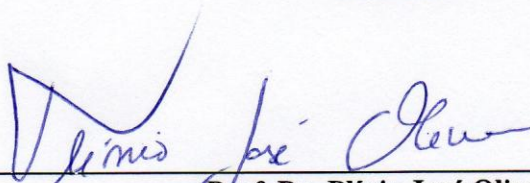


Prof. Dr. Thiago Porto de Almeida Freitas

Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG
Presidente da Banca



Profa. Dra. Bianka Carneiro Leandro
PUC/GO



Prof. Dr. Plínio José Oliveira

Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Elismar José de Araújo graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual do Piauí-UESP, no ano de 2005. Atua como Professor de Matemática na Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal - SEEDF desde 2008.

Dedico este trabalho à minha esposa Laurena Brandão, aos meus filhos João Pedro e Laura, aos meus pais José Bispo e Helena Juaquina e a todos meus irmãos.

Agradecimentos

Tenho o prazer de externar minha gratidão, primeiramente, a Deus, Ser Supremo, Fonte de Sabedoria, por ter me dado forças por mais essa conquista; à minha família, em especial minha esposa Laurena Brandão e aos meus filhos João Pedro e Laura Brandão pela inspiração; ao professor Thiago Porto de Almeida Freitas, pelas valorosas e pacientes orientações.

Meus agradecimentos são também extensivos aos colegas Herton e Lourival pela companhia nas longas viagens para Catalão e pela parceria nos estudos, assim como, ao colega de trabalho Evandro Barbosa Nunes pelas orientações junto ao latex; a todos meus colegas do curso e a todos os meus professores da UFG. As inúmeras sugestões, explicações e críticas dessas pessoas, melhoraram muito meu desenvolvimento ao longo do curso.

Também me sinto grato pelo apoio dado pela CAPES pelo incentivo financeiro.

Sumário

Resumo	13
Abstract	14
Introdução	15
1 Matrizes e Determinantes	19
1.1 Definição de Matriz	19
1.2 Representação Genérica de uma Matriz	20
1.3 Determinantes	21
1.3.1 Permutação	22
1.3.2 Determinante de uma Matriz de Ordem 1	23
1.3.3 Determinante de uma Matriz de Ordem 2	24
1.3.4 Determinante de uma Matriz de Ordem 3	24
1.3.5 Determinante de uma Matriz de Ordem $n \geq 4$	25
1.4 Propriedades dos Determinantes	30
2 Coordenadas no Plano e no Espaço	31
2.1 Coordenadas no Plano	31
2.2 Distância Entre Dois Pontos no Plano	33
2.3 Equipolência de Segmentos Orientados	33
2.4 Vetores no Plano	34
2.4.1 Operações com Vetores no Plano	35
2.4.2 Produto Interno	37
2.5 Equações da Reta no Plano	40
2.5.1 Equação Paramétrica da Reta	40
2.5.2 Equação Cartesiana da Reta	41
2.5.3 Distância de um Ponto a uma Reta	42
2.6 Polígonos no Plano	44
2.7 Coordenadas no Espaço	46
2.8 Distância Entre Dois Pontos do Espaço	48
2.9 Vetores no Espaço	49
2.9.1 Produto Interno	49
2.9.2 Produto Vetorial	50

2.9.3	Produto Misto	53
3	Aplicação dos Determinantes	55
3.1	Condição de Alinhamento de Três Pontos	55
3.2	Determinante e Polígonos	64
3.3	Área do Triângulo	65
3.4	Área de um Polígono Convexo	66
3.5	Determinantes e Pirâmide	73
3.5.1	Definição e Construção de Pirâmide	73
3.6	Volume do Tetraedro	74
3.7	Volume da Pirâmide	77
4	Conclusão	100
	Referências	102

Lista de Figuras

1	Sistema Cartesiano Ortogonal.	32
2	Quadrantes do Sistema OXY.	32
3	Distância Entre Dois Pontos do Plano π	33
4	Representantes do Vetor AB	34
5	Soma de Vetores.	35
6	Vetor Diferença.	36
7	Ângulo Entre Dois Vetores.	38
8	Diferença Entre Dois Vetores.	38
9	Vetor Direção da Reta r	41
10	Vetor Normal à Reta r	42
11	Distância do Ponto P à Reta r	43
12	Eixos do Sistema $OXYZ$ no Espaço ε	46
13	Planos Cartesianos do Sistema $OXYZ$	47
14	Distância Entre Dois Pontos no Espaço.	48
15	Interpretação Geométrica da Norma do Produto Vetorial.	53
16	Interpretação Geométrica do Produto Misto.	54
17	Três Pontos Colineares.	56
18	Inclinação da Reta AB é Positiva, $C' \in \pi'$	58
19	Inclinação da Reta AB é Negativa, $C' \in \pi'$	59
20	Reta AB Perpendicular ao Eixo OX , $C' \in \pi'$	59
21	Reta AB Horizontal ao Eixo OX , $C' \in \pi'$	60
22	Inclinação da Reta AB é Positiva, $C'' \in \pi''$	61
23	Inclinação da Reta AB é Negativa, $C'' \in \pi''$	62
24	Três Pontos Não Colineares $C'' \in \pi''$	62
25	Reta AB Paralela ao Eixo OX , $C'' \in \pi''$	63
26	Polígono Convexo.	64
27	Triângulo ABC	65
28	Polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n+2}$ Decomposto em Triângulos.	69
29	Construindo uma pirâmide.	74
30	Pirâmide de Base Triangular.	74
31	Paralelepípedo $ABCDEFGH$	76
32	Prisma $ABDEFH$ Decomposto em Tetraedros.	76
33	Pirâmide Decomposta em Tetraedros.	77

34	Pirâmide de Base $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n+2}$ Decomposta em Tetraedros.	83
35	Pirâmide de Base $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n+1}$	92

Resumo

O presente trabalho versará em fazer uma releitura das teorias que circundam os procedimentos de cálculo da área de um polígono convexo, assim como, do volume de uma pirâmide cuja base é um polígono convexo, com seus vértices devidamente representados em um sistema de coordenadas, no plano ou no espaço, respectivamente. Aborda alguns tópicos sobre matrizes e determinante e algumas de suas aplicações, em especial o estudo de área de polígonos e o volume de pirâmide. Baseado na aplicação de determinante para o cálculo da área de um triângulo com seus vértices representados em um sistema de coordenadas, apresenta um novo teorema para o cálculo da área de qualquer polígono convexo, assim como, uma nova fórmula para calcular o volume de qualquer pirâmide com base convexa como uma aplicação direta do volume do tetraedro com seus vértices representados em um sistema ortogonal. Para tanto, foi imprescindível abordar o conceito de coordenadas no plano e no espaço, vetores no plano e no espaço e algumas de suas propriedades, sendo fundamentais para a demonstrar o volume do tetraedro e a área do triângulo, usando determinante.

Palavras-chave: Volume. Área. Polígono convexo. Pirâmide. Triângulo. Tetraedro. Determinante. Matriz. Vértice. Sistema ortogonal.

Abstract

This work will concentrate on making a rereading of the theories that surround the procedures for calculating the area of a convex polygon, as well as the volume of a pyramid whose base is a polygon convex, with its vertices properly represented in a coordinate system, in the plan or in space, respectively. Addresses some topics on arrays and determinant and some of its applications, in particular the study of polygon area and the volume of the pyramid. Based on applying a decisive factor for the calculation of the area of a triangle with its vertices represented in a coordinate system, presents a new theorem to calculate the area of any polygon convex, as well as, a new formula to calculate the volume of any pyramid with convex basis as a direct application of the volume of the tetrahedron with its vertices represented in an orthogonal system. For both, it was essential to the concept of coordinates in the plane and in space, vectors in the plane and in space, and some of its properties, being essential for the demonstrate the volume of the tetrahedron and the area of the triangle, using determinant.

Keywords: Volume. Area. Convex polygon. Pyramid. Triangle. Tetrahedron. Determinant. Matrix. Vertex. Orthogonal system.

Introdução

Intuitivamente, área de uma figura é um número que mede sua extensão em um determinado plano que a contém. Para estabelecer uma unidade de área, considere uma unidade quadrada como uma superfície contida em um quadrado de lado medindo 1 unidade linear. Assim, a área de uma figura contida em um plano, é o número de unidades quadradas contidas na superfície compreendida pela figura. Enquanto que o volume de um sólido é um número que mede sua extensão no espaço, ou seja, a porção do espaço ocupada por ele. Como unidade de volume, considere uma unidade cúbica, como o volume de um cubo com aresta medindo 1 unidade linear. Então, para cada polígono, tem-se, associado a ele, um número positivo denominado área; da mesma forma, para cada sólido, tem-se um número não negativo chamado de volume.

Desde a pré-história aos dias de hoje, as medidas de áreas e de volume foram de tal forma incorporadas às vidas dos humanos que é impossível imaginar uma civilização sem elas. No antigo Egito, civilização que se desenvolveu no fértil vale do rio Nilo, por exemplo, métodos para calcular áreas - baseados nas conhecidas áreas do triângulo, retângulo e trapézio - eram utilizados para determinar as medidas de superfície destinadas a uma melhor ocupação do terreno pelos agricultores. Foi quando surgiu a Geometria Egípcia, segundo Heródoto¹, pois havia a necessidade de redistribuir os campos cultiváveis entre os proprietários após cada inundação do rio Nilo. Conforme escreve Elza F. Gomide em seu livro HISTÓRIA DA MATEMÁTICA (1996, pág. 6):

Sesóstris ... repartiu o solo do Egito entre seus habitantes ... se o rio levava qualquer parte do lote de um homem ... o rei mandava pessoas para examinar, e determinar por medidas a extensão exata da perda ... Por esse costume, eu creio, é que a geometria veio a ser conhecida no Egito, de onde passou para a Grécia.

HERÓDOTO

Sabe-se que o estudo de áreas de figuras planas está ligado aos conceitos relacionados à Geometria Euclidiana, que surgiu na Grécia Antiga, embasada no estudo de ponto,

¹Heródoto (485-420) foi um geógrafo e historiador grego, considerado o pai da história. O seu segundo livro, EUTERPE, é destinado à história do Egito - geografia, religião, reis, animais sagrados e costumes.

reta e plano. Para Cavalieri², uma região plana era a união de linhas paralelas a uma reta dada e uma região sólida como uma união de seções planas paralelas a um plano fixado. De posse dessas decomposições e ciente das dificuldades em somar tais quantidades infinitas de indivisíveis, Cavalieri evitou calcular áreas e volumes pela soma dessas partes indivisíveis, mas desenvolveu um método para relacionar áreas ou volume de figuras em que os indivisíveis têm relação constante.

A área de uma figura ou o volume de um sólido são conhecidos, desde que, tenha informações que possibilita tais cálculos. Por exemplo, para determinar a área de um retângulo é necessário que conheça as medidas de seus lados; para o volume de um prisma é preciso saber a sua altura e a área da sua base. Esses valores também podem ser obtidos de forma analítica, onde são consideradas as informações dos seus vértices em um sistema de coordenadas ortogonais.

O modelo de cálculo de área de polígonos convexos e de volume de pirâmides com bases convexas, baseado nas informações dos seus vértices, até então utilizado, consiste na decomposição em uma série de triângulos e de tetraedros, respectivamente. Ao calcular a área de cada um desses triângulos e o volume desses tetraedros, tem-se a área do polígono e o volume da referida pirâmide. Considerando que este procedimento torna-se demasiadamente extenso à medida que aumenta os lados do polígono, decidiu-se desenvolver um novo procedimento de cálculo sem a necessidade de decomposição, tornando-os menos extensos.

Tem-se que um polígono convexo $A_1A_2A_3 \cdots A_n$, com $A_i = (x_i, y_i)$, pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos - sejam $t_1 = \triangle A_1A_2A_3$, $t_2 = \triangle A_1A_3A_4$, $\cdots$, $t_{n-2} = \triangle A_1A_{n-1}A_n$ - e que, a área de cada um desses triângulos, primeiramente demonstrado por Lagrange³, é dada por:

²Bonaventura Cavalieri (1598-1647) foi um sacerdote jesuíta e matemático italiano. Demonstrou que dados dois sólidos incluídos em um par de planos paralelos, se todo plano paralelo ao par de planos e que intersecta os sólidos, o faz em seções cujas áreas estão sempre na mesma razão, então os volumes dos sólidos também estão nessa mesma razão.

³Joseph Louis Lagrange (1736-1813) foi um matemático italiano. Foi o primeiro matemático a demonstrar o Teorema do Valor Médio, muito usado no Cálculo diferencial; dentre outras contribuições, demonstrou que o volume de um tetraedro pode ser calculado usando as coordenadas de seus vértices. Para Napoleão Bonaparte: "Lagrange é a pirâmide mais alta das ciências matemáticas".

$$A_{t_i} = \frac{1}{2}|D_i|, i \in \{1, 2, 3, \dots, n-2\}, \text{ sendo } D_i = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \\ x_{i+2} & y_{i+2} & 1 \end{vmatrix}.$$

A ideia é somar os valores de D_i , desde que D_i tenha mesmo sinal para todo valor de i - sendo demonstrado ao longo do trabalho - para se chegar a uma nova relação para o cálculo da área de qualquer polígono convexo.

Tem-se ainda que uma pirâmide cuja base é um polígono convexo $A_1A_2A_3 \dots A_n$ e vértice V , sendo $A_i = (x_i, y_i, z_i)$ e $V = (x_V, y_V, z_V)$, pode ser decomposta em $n-2$ tetraedros - considere $T_1 = A_1A_2A_3V$, $T_2 = A_1A_3A_4V$, $\dots$, $T_{n-2} = A_1A_{n-1}A_nV$ - e que, o volume de cada um desses tetraedros, sendo Lagrange o primeiro a demonstrar, é dado por:

$$V_{T_i} = \frac{1}{6}|D_i|, i \in \{1, 2, 3, \dots, n-2\}, \text{ sendo } D_i = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & z_{i+1} & 1 \\ x_{i+2} & y_{i+2} & z_{i+2} & 1 \\ x_V & y_V & z_V & 1 \end{vmatrix}.$$

Com isso, para se chegar a uma nova relação para calcular o volume da pirâmide em questão, a estratégia é somar os valores de D_i , sendo necessário inicialmente demonstrar que D_i tem mesmo sinal para todo valor de i .

Como resultado dos estudos, propõe-se um novo teorema, tanto para a área de polígonos convexos como para o volume de pirâmides com bases convexas, que facilita a computação dos dados necessários, pois dispensa a decomposição e adota a junção de todos os vértices do polígono e da pirâmide, respectivamente, em um único cálculo, tornando-o mais curto e prático; sendo necessário especificar quanto a paridade do número de lados do polígono, assim como, o da base da pirâmide.

Utilizou-se de Pesquisa Bibliográfica para a melhor compreensão das teorias já existentes. Aborda-se, no primeiro capítulo, matrizes e determinante e algumas de suas propriedades, uma vez que todo trabalho está fundamentado nas aplicações de determinante, sobretudo, o cálculo de área de polígonos e o volume de pirâmides.

No segundo capítulo, apresenta-se um breve resumo sobre alguns conceitos da Geometria Analítica no plano e no espaço, haja vista, toda proposta do trabalho ser baseada nas informações das coordenadas dos vértices, a saber: coordenadas no plano e no espaço, retas no plano, vetores no plano e no espaço, algumas propriedades e

operações com vetores - tanto no plano, quanto no espaço - produto misto, interno e vetorial, assim como, suas interpretações geométricas.

O terceiro capítulo se destina ao estudo de algumas aplicações de determinante, convergindo para duas principais que é o cálculo de área de polígonos convexos e o volume de pirâmides com bases convexas. Sendo imprescindível abordar, primeiramente, o método de como calcular a área do triângulo e do volume do tetraedro, o que dá sustentação às novas fórmulas apresentadas.

Com esses novos teoremas, os cálculos se tornam menos extensos e mais práticos, uma vez que dispensa a decomposição do polígono em triângulos e da pirâmide em tetraedros, adotando a junção de todos os vértices em um único cálculo.

1 Matrizes e Determinantes

Muitas vezes, é mais conveniente formar grupos ordenados de números que se apresentam dispostos em linhas e colunas. Esses grupos são chamados na matemática de matrizes. Na computação, por exemplo, as matrizes adquiriram grande importância, pois há necessidade de se guardar muita informação.

As imagens em uma tela de computador são, na verdade, formadas por pequenos pontos, denominados pixels, que são elementos de uma matriz. Uma imagem de resolução 800×600 tem $800 \cdot 600 = 480000$ pixels em 800 linhas e 600 colunas.

As matrizes são largamente utilizadas em aplicação de banco de dados, tão importantes na organização de qualquer empresa; ao realizar um cadastro numa página da internet, os dados vão imediatamente para um banco de dados, que nada mais é do que uma matriz que relaciona as informações de todos cadastros com as respectivas pessoas.

Este capítulo apresentará um esboço sobre matrizes, determinantes e algumas de suas propriedades.

1.1 Definição de Matriz

Considere um conjunto $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$, etc), uma matriz A sobre esse conjunto é um quadro retangular de $m \times n$ (m linhas e n colunas) elementos $a_{ij} \in \mathbb{K}$ ($i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Exemplos:

- a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$ é uma matriz de ordem 2×2 .
- b) $\begin{bmatrix} -2i & 1+i & \sqrt{-7} \\ 10 & -2i & 18 \end{bmatrix}$ é uma matriz de ordem 2×3 .

c) Quando $m = 1$, a matriz é chamada de matriz-linha. Por exemplo $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ é uma matriz-linha de ordem 1×3 .

d) Quando $n = 1$, a matriz é chamada de matriz-coluna. Por exemplo $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$ é

uma matriz-coluna de ordem 4×1 .

1.2 Representação Genérica de uma Matriz

Os elementos da matriz são chamados de elementos ou termos da matriz.

Na matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -7 \\ -3 & 10 & 11 \\ 7 & \sqrt{3} & 8 \\ 17 & -10 & 20 \end{bmatrix}.$$

pode-se observar:

- O elemento 10 está na segunda linha e na segunda coluna; indica-se: $a_{22} = 10$.
- O elemento $\sqrt{3}$ está na terceira linha e segunda coluna; indica-se: $a_{32} = \sqrt{3}$.

Assim, o elemento genérico de uma matriz A será indicado por a_{ij} , em que i representa a linha em que o termo se encontra e j , em que coluna; ele é chamado de ij -ésimo termo da matriz.

A matriz A , de ordem $m \times n$, genericamente, será escrita da seguinte forma:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Uma matriz A pode ser escrita na seguinte forma:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \text{ com } 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n \text{ e } i, j \in \mathbb{N}.$$

Quando o número de linhas for igual ao número de colunas, ou seja, $m = n$, diz-se que A é uma matriz quadrada de ordem $n \times n$, ou simplesmente n .

Exemplos:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2.

b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 7 \\ -3 & 0 & -2 & 10 \\ 30 & -30 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 21 & 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 4.

Numa matriz quadrada de ordem n , os elementos a_{ij} em que $i = j$, ou seja, os elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ formam a diagonal principal da matriz.

Os elementos da matriz a_{ij} em que $i + j = n + 1$ formam a outra diagonal da matriz, chamada diagonal secundária.

Nos exemplos anteriores, 2 e 10 formam a diagonal principal e a diagonal secundária é formada pelos elementos 4 e -3 , no item a; enquanto 2, 0, -1 e 6 formam a diagonal principal e a diagonal secundária é determinada por 7, -2 , -30 e 1, no item b.

1.3 Determinantes

O determinante surgiu, inicialmente, da necessidade de resolver sistemas de n equações lineares a n incógnitas. Sendo posteriormente identificado como a área de um paralelogramo e o volume de um paralelepípedo.

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ tem um número, associado a ela, chamado de determinante da matriz A - denotado por $\det A$, $|A|$ ou $\det[a_{ij}]$ - obtido por meio de operações que envolvem todos os elementos a_{ij} . Sendo que não existe determinante de matriz que não seja quadrada.

Para entender determinante, primeiro veja algumas noções de permutações, que são usadas na definição de determinante.

1.3.1 Permutação

Seja $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Uma permutação de J_n é uma aplicação $\sigma : J_n \rightarrow J_n$ que é bijetora. Denota-se por S_n o conjunto de todas as permutações de J_n . Usualmente, um elemento σ de S_n é denotado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Assim, por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

representa a permutação σ de J_3 definida por $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 3$ e $\sigma(3) = 2$. Quando $\sigma(j) = j$ para todo $1 \leq j \leq n$, tem-se uma permutação identidade e é denotada por id .

Percebe-se que S_n tem $n!$ elementos, pois, ao permutar os n elementos de um conjunto, pode-se colocar qualquer um desses n elementos na primeira posição, qualquer um dos restantes $n - 1$ elementos na segunda posição, qualquer um dos restantes $n - 2$ elementos na terceira posição, e assim segue, até que a n -ésima posição seja preenchida pelo último elemento restante. Com isso, existe

$$n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

permutações de S_n .

Considere $\sigma \in S_n$. O conjunto dos pares (i, j) com $1 \leq i < j \leq n$ tais que $\sigma(i) < \sigma(j)$ é denotado por P^+ . Quando $\sigma(i) > \sigma(j)$, com $1 \leq i < j \leq n$, o conjunto dos pares (i, j) é denotado por P^- . O número de pares m pertencentes a P^- é chamado número de inversões de σ .

Por exemplo, considere a seguinte permutação de J_4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Tem-se que o número de inversões nessa permutação é 2. Já a permutação dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

tem três inversões.

O sinal de σ , denotado por $\varepsilon(\sigma)$, é definido pelo número $(-1)^m$, onde m é o número de inversões de σ .

O sinal das duas permutações apresentadas em (1) e (2) são 1 e -1 , respectivamente.

Definição 1.1 *O determinante de uma matriz A com entradas reais, denotado por $\det A$, é o número real dado por*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \quad (3)$$

Observação 1.3.1 *O determinante de uma matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ também*

pode ser denotado por

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

1.3.2 Determinante de uma Matriz de Ordem 1

Quando $n = 1$, tem-se a matriz $A = [a_{11}]$. Existe somente a permutação identidade em S_1 . Portanto,

$$\det A = \varepsilon(id) a_{1id(1)} = a_{11}.$$

Exemplos:

a) Se $A = [2]$, então $\det A = 2$.

b) Se $B = [-1]$, então $\det B = -1$.

1.3.3 Determinante de uma Matriz de Ordem 2

Em S_2 existem duas permutações, a saber:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sejam id e σ_1 , respectivamente, essas permutações.

Daí, o determinante de uma matriz A de ordem 2, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, será dado por

$$\begin{aligned} \det A &= \varepsilon(id)a_{1id(1)}a_{2id(2)} + \varepsilon(\sigma_1)a_{1\sigma_1(1)}a_{2\sigma_1(2)} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned} \tag{4}$$

Por exemplo, o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ é dado por:

$$\det A = 2 \cdot 5 - 8 \cdot 1 = 2.$$

1.3.4 Determinante de uma Matriz de Ordem 3

Considere a matriz genérica de ordem 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Em S_3 , tem-se 6 permutações. São elas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sejam id , σ_1 , σ_2 , σ_3 , σ_4 e σ_5 essas permutações, respectivamente. Note que id , σ_3 e σ_4 possuem um número par de inversões, enquanto σ_1 , σ_2 e σ_5 possuem um número ímpar de inversões.

Então, o determinante de A será calculado da seguinte forma:

$$\det A = \varepsilon(id)a_{1id(1)}a_{2id(2)}a_{3id(3)} + \varepsilon(\sigma_3)a_{1\sigma_3(1)}a_{2\sigma_3(2)}a_{3\sigma_3(3)} + \varepsilon(\sigma_4)a_{1\sigma_4(1)}a_{2\sigma_4(2)}a_{3\sigma_4(3)} + \varepsilon(\sigma_1)a_{1\sigma_1(1)}a_{2\sigma_1(2)}a_{3\sigma_1(3)} + \varepsilon(\sigma_2)a_{1\sigma_2(1)}a_{2\sigma_2(2)}a_{3\sigma_2(3)} + \varepsilon(\sigma_5)a_{1\sigma_5(1)}a_{2\sigma_5(2)}a_{3\sigma_5(3)}.$$

Ou seja,

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (5)$$

Esse determinante pode ser obtido usando uma regra prática, conhecida como Regra de Sarrus ⁴, repetindo as duas primeiras colunas à direita da terceira e calculando o produto das diagonais formadas. Sendo que o produto da diagonal principal, assim como, de suas paralelas, permanecerá com o mesmo sinal; o produto das diagonais secundária e suas paralelas mudam de sinal.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

O determinante é a soma dos valores obtidos.

$$\text{Por exemplo, o determinante da matriz } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \text{ pela Regra de Sarrus,}$$

é dado por:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \cdot 3 - (-1) \cdot 3 \cdot (-2) \\ &= -14. \end{aligned}$$

1.3.5 Determinante de uma Matriz de Ordem $n \geq 4$

Como pode observar, o cálculo de determinantes de matrizes de ordem $n \geq 4$, pela definição, é muito trabalhoso, pois tem-se $n!$ parcelas. Mas, existe um método muito

⁴Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861) foi um matemático francês autor de vários tratados, incluindo uma solução de equações numéricas com múltiplas incógnitas, entre outras. Ele também descobriu uma regra memorável para solucionar o determinante de uma matriz de ordem 3, conhecida como Regra de Sarrus.

mais prático, que permite calcular o determinante de uma matriz de ordem $n \geq 2$, a partir de uma linha ou coluna da matriz, conhecido como Teorema de Laplace⁵.

Para enunciá-lo, são necessárias algumas definições.

Definição 1.2 *Seja A uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$. Denomina-se menor complementar de A pelo elemento a_{ij} o determinante D_{ij} associado à matriz quadrada que se obtém de A ao se suprimir a linha i e a coluna j que contém o elemento a_{ij} considerado.*

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, tem-se que o menor complementar de A pelo elemento a_{22} é:

$$D_{22} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-2) - (2 \cdot 2) = -6.$$

Definição 1.3 *Sendo A uma matriz quadrada de ordem $n > 1$. Denomina-se cofator do elemento a_{ij} de A o número real $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$, em que D_{ij} é o menor complementar de A pelo elemento a_{ij} .*

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$, o cofator de a_{12} é dado por:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot D_{12} = (-1)^3 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -1 \cdot 1 = -1.$$

O cofator de a_{22} é:

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot D_{22} = (-1)^4 \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-1 - 9) = -10.$$

Agora, tem-se condições de enunciar o Teorema de Laplace.

⁵Pierre Simon Marquis de Laplace (1749-1827) foi um matemático, astrônomo e físico francês. Dentre outras contribuições no campo da matemática, em Álgebra Linear desenvolveu um teorema que leva seu nome, criando um novo método que permite calcular o determinante de uma matriz de ordem $n \geq 2$.

Teorema 1.3.1 (Teorema de Laplace) *O determinante de uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem $n \geq 2$, é a soma dos produtos, efetuados termo a termo, dos elementos de uma fila qualquer pelos seus respectivos cofatores. Mais precisamente, para cada i , $1 \leq i \leq n$ fixado, tem-se que*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

e para cada j , $1 \leq j \leq n$ fixado, tem-se

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

Demonstração 1.3.1 *A demonstração será feita por indução sobre n .*

Primeiramente, o teorema será demonstrado para as colunas de $A = (a_{ij})$. Como foi visto em (4), o determinante de uma matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ é dado por $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Veja que ao desenvolver esse determinante pela primeira coluna, tem-se $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} = a_{11}(-1)^{1+1}D_{11} + a_{21}(-1)^{2+1}D_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ e desenvolvendo pela segunda coluna tem-se $a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} = a_{12}(-1)^{1+2}D_{12} + a_{22}(-1)^{2+2}D_{22} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Portanto, o teorema é válido para $n = 2$.

Suponha agora que o teorema é verdadeiro para $n - 1$.

Primeiro, considere as seguintes observações: os menores complementares das entradas de A são determinantes de matrizes de ordem $n - 1$ e denota-se por D_{ik}^{jl} o determinante da matriz que se obtém suprimindo de A as linhas i e j e as colunas k e l .

Fixa-se a k -ésima coluna de A , $1 \leq k \leq n$, e calculamos o número

$$C = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk}.$$

Pela definição de cofator, tem-se que

$$C = a_{1k}(-1)^{1+k}D_{1k} + a_{2k}(-1)^{2+k}D_{2k} + \cdots + a_{nk}(-1)^{n+k}D_{nk}. \quad (6)$$

Como foi observado, $D_{1k}, D_{2k}, \dots, D_{nk}$ são determinantes de matrizes de ordem $n - 1$, podendo ser calculados, pelo Teorema de Laplace, por hipótese de indução. Escolhendo, sem perda de generalidade, fazer o desenvolvimento pela primeira coluna da matriz gerada. Assim,

$$\begin{aligned} D_{1k} &= a_{21}(-1)^{2+1}D_{1k}^{21} + a_{31}(-1)^{3+1}D_{1k}^{31} + \cdots + a_{n1}(-1)^{n+1}D_{1k}^{n1} \\ &= \sum_{i=2}^n a_{i1}(-1)^{i+1}D_{1k}^{i1}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D_{2k} &= a_{11}(-1)^{1+1}D_{2k}^{11} + a_{31}(-1)^{3+1}D_{2k}^{31} + \cdots + a_{n1}(-1)^{n+1}D_{2k}^{n1} \\ &= a_{11}D_{2k}^{11} + \sum_{i=3}^n a_{i1}(-1)^{i+1}D_{2k}^{i1}. \end{aligned}$$

Prosseguindo analogamente tem-se que

$$\begin{aligned} D_{nk} &= a_{11}D_{nk}^{11} - a_{21}D_{nk}^{21} + \cdots \pm a_{(n-1)1}D_{nk}^{(n-1)1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} a_{i1}(-1)^{i+1}D_{nk}^{i1}. \end{aligned}$$

Substituindo $D_{1k}, D_{2k}, \dots, D_{nk}$ na expressão (6), acarreta em

$$\begin{aligned} C &= a_{1k}(-1)^{1+k} \left\{ \sum_{i=2}^n a_{i1}(-1)^{i+1}D_{1k}^{i1} \right\} + a_{2k}(-1)^{2+k} \left\{ a_{11}D_{2k}^{11} + \sum_{i=3}^n a_{i1}(-1)^{i+1}D_{2k}^{i1} \right\} + \cdots + \\ &\quad a_{nk}(-1)^{n+k} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} a_{i1}(-1)^{i+1}D_{nk}^{i1} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Tomando em (7) todas as parcelas onde a_{11} aparece, tem-se

$$\begin{aligned} a_{11} \{ a_{2k}(-1)^{2+k}D_{2k}^{11} + a_{3k}(-1)^{3+k}D_{3k}^{11} + \cdots + a_{nk}(-1)^{n+k}D_{nk}^{11} \} &= \\ a_{11} \{ a_{2k}(-1)^kD_{2k}^{11} + a_{3k}(-1)^{1+k}D_{3k}^{11} + \cdots + a_{nk}(-1)^{n+k-2}D_{nk}^{11} \} &= \\ a_{11}D_{11}. \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo com as parcelas onde a_{21} aparece, tem-se

$$\begin{aligned} a_{21} \{ a_{1k}(-1)^{1+k}D_{1k}^{21} + a_{3k}(-1)^{3+k}D_{3k}^{21} + \cdots + a_{nk}(-1)^{n+k}D_{nk}^{21} \} &= \\ a_{21} \{ a_{1k}(-1)^kD_{1k}^{21} - a_{3k}(-1)^{k+1}D_{3k}^{21} - \cdots - a_{nk}(-1)^{n+k-2}D_{nk}^{21} \} &= \\ -a_{21}D_{21}. \end{aligned}$$

Raciocinando indutivamente, tem-se que se tomar em (7) somente as parcelas onde a_{n1} aparece, então

$$\begin{aligned} \pm a_{n1} \{ a_{1k}(-1)^{n+k+1}D_{1k}^{n1} + a_{2k}(-1)^{2+k+n}D_{2k}^{n1} + \cdots + a_{n-1k}(-1)^{2n+k-1}D_{n-1k}^{n1} \} &= \\ \pm a_{n1} \{ a_{1k}(-1)^{k+1}D_{1k}^{n1} + a_{2k}(-1)^{2+k}D_{2k}^{n1} + \cdots + a_{n-1k}(-1)^{n+k-1}D_{n-1k}^{n1} \} &= \\ \pm a_{n1}D_{n1}. \end{aligned}$$

Daí, conclui-se que

$$C = a_{11}D_{11} - a_{21}D_{21} + \cdots \pm a_{n1}D_{n1}.$$

Logo,

$$C = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}.$$

Veja que $\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1}$, ou seja, tem-se a prova do Teorema de Laplace pela primeira coluna da matriz A .

Pela arbitrariedade da escolha de k conclui-se que o teorema é verdadeiro para todas as colunas da matriz A .

A demonstração baseada nas linhas da matriz A é de forma análoga.

■

Exemplo:

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O seu determinante pode ser calculado usando o determinante de ordem 3 e o teorema de Laplace. Veja:

Tomando os elementos da quarta coluna, tem-se:

$$\det A = a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \det A = & 0 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \\ & 1 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Usando a regra de Sarrus para calcular o determinante dessas matrizes de ordem 3, lembrando que, como um dos fatores da primeira e terceira parcela é zero, não há necessidade de calcular o determinante das respectivas matrizes.

$$\det A = 2 \cdot [-1 \cdot 7 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 7 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 3] + 1 \cdot [(-1) \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 7 - 3 \cdot 4 \cdot 3 - (-1) \cdot 0 \cdot 7 - 2 \cdot 1 \cdot 1] = -45.$$

Observação 1.3.2 As melhores linhas ou colunas a serem escolhidas para o cálculo de determinante, usando o teorema de Laplace, são aquelas que tiverem elementos iguais a

zero, pois, os cofatores que forem multiplicados pelos zeros, não precisam ser calculados, uma vez que o produto sempre será zero, independente do valor do cofator. Sendo assim, melhor ainda é optar por aquelas que tiverem maior quantidade de elementos iguais a zero. Com isso, é fácil ver que toda matriz quadrada que tiver uma linha ou coluna com todos elementos iguais a zero seu determinante é nulo.

1.4 Propriedades dos Determinantes

Visando mais agilidade para o cálculo do determinante de determinadas matrizes, grandes matemáticos como Jacques Philippe Marie Binet e Carl Gustav Jacobi dedicaram ao estudo de propriedades. Este capítulo fará menção de apenas duas delas - filas iguais e troca de filas paralelas - pois serão fundamentais para justificar alguns cálculos posteriores.

Propriedade 1.4.1 *Se a matriz $B = (b_{ij})$ é obtida da matriz $A = (a_{ij})$ pela troca de duas linhas ou duas colunas, então $\det B = -\det A$.*

Demonstração 1.4.1 *Suponha, sem perda de generalidade, que a matriz B é obtida permutando a i -ésima linha com a $(i+1)$ -ésima linha da matriz A . Note que os mesmos termos aparecem em ambos os desenvolvimentos, mas ao trocar duas linhas da matriz A , altera a paridade do número de inversões dos índices, e portanto o sinal dos termos será trocado.*

A demonstração baseada nas colunas é análoga.

■

Propriedade 1.4.2 *Se $A = (a_{ij})$ possui duas linhas ou duas colunas iguais, então $\det A = 0$.*

Demonstração 1.4.2 *Seja $B = (b_{ij})$ a matriz obtida de A trocando de posição as duas linhas ou as duas colunas iguais, mantendo as demais fixas. Pela propriedade 1.4.1 tem-se que $\det B = -\det A$. Mas $A = B$. Então, $\det A = -\det A$. Logo, $\det A = 0$.*

■

2 Coordenadas no Plano e no Espaço

Neste capítulo, há uma introdução de coordenadas no plano a fim de representar pontos por meio de pares de números reais e, conseqüentemente, identificar um polígono por meio de seus vértices, pois, a representação dos pontos por meio de suas coordenadas permite resolver algebricamente diversos problemas geométricos; abordando também noções de vetores, o que permite estudar vários conceitos geométricos de forma mais simples e direta. Assim como, um breve resumo sobre coordenadas no espaço, vetores no espaço e algumas de suas propriedades.

2.1 Coordenadas no Plano

Aplicado pela primeira vez em 1637 pelo matemático francês René Descartes ⁶ - motivo pelo qual, frequentemente, a Geometria Analítica é chamada de Geometria Cartesiana - o sistema de coordenadas no plano, podendo ser chamado de sistema ortogonal, é amplamente utilizado para determinar a posição de pontos no plano, possibilitando o estudo algébrico de formas geométricas do plano.

Definição 2.1 *Considere dois eixos num plano π que se intersectam perpendicularmente em um ponto O - denominado origem - eixo OX e eixo OY , com unidade de medida estabelecida. O par de eixos OX e OY é um sistema de coordenadas retangulares, chamado de Sistema de Eixos Ortogonais OXY , ou simplesmente, Sistema OXY . Por convenção, o eixo horizontal é OX e OY o eixo vertical.*

Para cada par de coordenadas (x, y) tem um e apenas um ponto P no plano ordenado. Ou seja, para cada ponto do plano π existe um único par ordenado (x, y) - $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ - isto é, ao ponto $P \in \pi$ faz-se corresponder o par ordenado (x, y) onde x é a coordenada do pé da perpendicular ao eixo OX , baixada de P e y é a coordenada do pé da perpendicular ao eixo OY que passa por P (Figura 1). Então, se $(x, y) = (x', y')$ em $\mathbb{R}^2$ isso implica que $x = x'$ e $y = y'$. Reciprocamente, ao par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associa-se o ponto $P \in \pi$, sendo a intersecção da perpendicular ao eixo OX que passa pela coordenada x com a perpendicular ao eixo OY que passa

⁶René Descartes (1596-1650) foi filósofo, físico e matemático francês. Obteve reconhecimento matemático por sugerir a fusão da álgebra com a geometria, fato que gerou a geometria analítica e o sistema de coordenadas que hoje leva o seu nome.

pela coordenada y . Com isso, existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano π e o conjunto dos pares ordenados de números reais.

Dado o ponto P , correspondente ao par ordenado (x, y) , denomina-se que x é a abscissa ou primeira coordenada de P e y é a ordenada ou segunda coordenada de P . Doravante, se $P \in \pi$ corresponde a $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, escreve-se $P = (x, y)$.

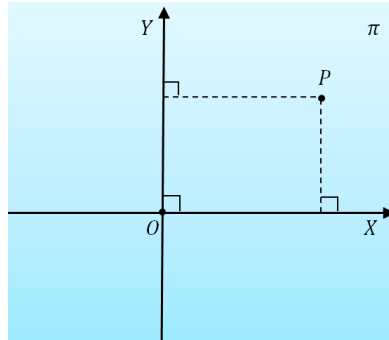


Figura 1: Sistema Cartesiano Ortogonal.

Os eixos OX e OY dividem o plano π em quatro regiões denominadas quadrantes e enumeradas como na Figura 2.

Os pontos que pertencem ao eixo OX têm coordenadas $(x, 0)$, os pontos que estão sobre o eixo OY têm coordenadas $(0, y)$ e os pontos que pertencem aos quadrantes são dados em coordenadas:

$$1^{\circ} \text{ Quadrante} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0 \text{ e } y > 0\};$$

$$2^{\circ} \text{ Quadrante} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < 0 \text{ e } y > 0\};$$

$$3^{\circ} \text{ Quadrante} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < 0 \text{ e } y < 0\};$$

$$4^{\circ} \text{ Quadrante} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0 \text{ e } y < 0\}.$$

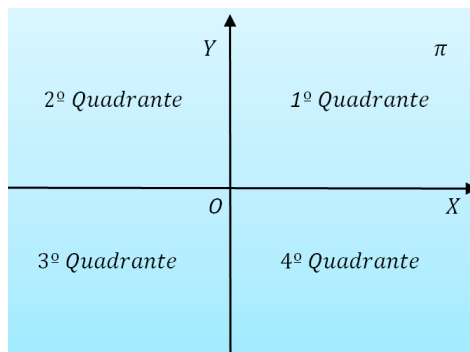


Figura 2: Quadrantes do Sistema OXY.

2.2 Distância Entre Dois Pontos no Plano

Considere dois pontos do plano π , $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$, dados por suas coordenadas em relação a um sistema OXY .

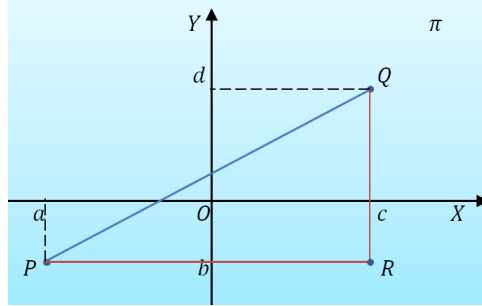


Figura 3: Distância Entre Dois Pontos do Plano π .

Observando o triângulo retângulo PQR , tem-se que a distância do ponto P ao ponto Q , designada por $d(P, Q)$, é a medida da hipotenusa PQ . Tem-se que as medidas dos catetos são, respectivamente, $|\overline{PR}| = |a - c|$ e $|\overline{QR}| = |b - d|$. A medida da hipotenusa é dado por:

$$d(P, Q) = |\overline{PQ}| = \sqrt{|\overline{PR}|^2 + |\overline{QR}|^2} = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}. \quad (8)$$

Essa relação é conhecida como Teorema de Pitágoras ⁷.

2.3 Equipolência de Segmentos Orientados

Seja $\overline{AB}$ um segmento orientado de origem A e extremidade B . Isto é, no segmento AB tem-se o sentido do percurso de A para B . Enquanto o segmento BA tem sentido de percurso oposto ao do segmento AB . Bellavitis ⁸ classificou os segmentos orientados do plano a partir da relação de equipolência.

⁷Pitágoras de Samos, cidade onde nasceu, foi um filósofo e matemático grego. Sua maior descoberta se deu no campo da geometria, demonstrando uma relação entre os lados do triângulo retângulo, denominada Teorema de Pitágoras, embora essa relação já ser conhecida pelos babilônicos, a mais de um milênio antes de Pitágoras.

⁸Giusto Bellavitis (1803-1880) foi um matemático italiano, autodidata, se destacando no estudo de vetores. Classificou os segmentos orientados por uma relação que ele chamou de equipolência, dando origem a noção de vetor.

Definição 2.2 Os segmentos orientados AB e CD são equipolentes, e escreve-se $AB \equiv CD$, quando têm mesmo comprimento, são paralelos e têm mesmo sentido.

2.4 Vetores no Plano

Os vetores têm aplicação em diversas áreas de conhecimento. Na física, por exemplo, a velocidade e a aceleração de um objeto, assim como, as forças que agem sobre ele são descritas por vetores.

Baseado na relação de equipolência, é possível classificar os segmentos orientados do plano por meio da seguinte definição.

Definição 2.3 Sejam A e B pontos no plano. O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes ao segmento AB . Cada segmento equipolente ao segmento AB é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$.

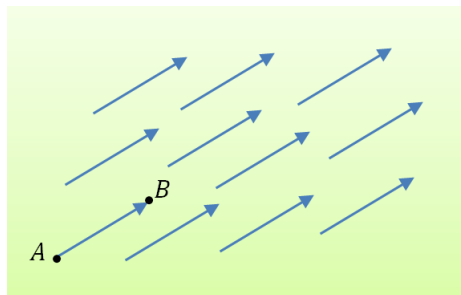


Figura 4: Representantes do Vetor AB .

Quando em um vetor, representado por um segmento, a origem é igual a extremidade, diz-se que o vetor é nulo ou vetor zero.

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \dots$$

É interessante ressaltar, no entanto, que os componentes de um vetor físico dependem do sistema de coordenadas para descrevê-lo.

Definição 2.4 Dados os pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, os números $b_1 - a_1$ e $b_2 - a_2$ são as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, e escreve-se $\vec{v} = (a_1 - a_2, b_1 - b_2)$.

Pela relação de equipolência, as coordenadas de um vetor podem ser calculadas usando qualquer segmento orientado que o represente.

Proposição 2.4.1 Considere o sistema de eixos ortogonais OXY . Tem-se, para cada vetor $\vec{v}$, um único ponto P tal que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$. Sendo que as coordenadas de P coincidem com as do vetor $\vec{v}$.

2.4.1 Operações com Vetores no Plano

Tem-se duas operações no conjunto de vetores no plano, bem definidas: adição de vetores e multiplicação de um vetor por um número real.

Definição 2.5 Adição de vetores é a operação que associa o vetor $\overrightarrow{AC}$ a cada par de vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, designado por $\vec{u} + \vec{v}$.

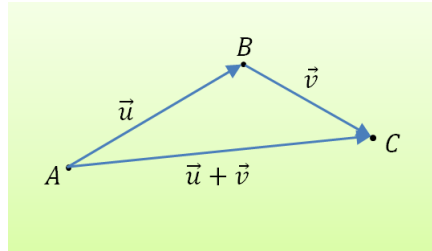


Figura 5: Soma de Vetores.

Proposição 2.4.2 Dados dois vetores $\vec{u} = (a_1, b_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2)$ expressos por meio de suas coordenadas do sistema OXY . Então,

$$\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Demonstração 2.4.1 Sejam os pontos $P = (a_1, b_1)$ e $Q = (a_2, b_2)$, tal que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$, e seja o ponto $S = (a_3, b_3)$, tal que $\vec{v} = \overrightarrow{PS}$.

Com isso, tem-se:

$$\vec{v} = \overrightarrow{OQ} = (a_2 - 0, b_2 - 0) = (a_3 - a_1, b_3 - b_1) = \overrightarrow{PS}.$$

Então,

$$S = (a_3, b_3) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Portanto,

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OS} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

■

É fácil ver uma propriedade da adição de vetores que é a existência do inverso aditivo, isto é, para cada vetor $\vec{u}$ existe um único vetor, o inverso ou simétrico aditivo de $\vec{u}$ denotado por $-\vec{u}$, com $\vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$.

Ao justificar essa propriedade, tem-se que o simétrico do vetor $\overrightarrow{AB}$ é representado pelo segmento $\overrightarrow{BA}$, com isso, ao somar $\vec{u}$ e $-\vec{u}$, tem-se

$$\vec{u} - \vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

Observação 2.4.1 *O vetor diferença do vetor $\vec{u}$ pelo vetor $\vec{v}$ é o vetor $\vec{u} + (-\vec{v})$, designado por $\vec{u} - \vec{v}$. Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, então*

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}.$$

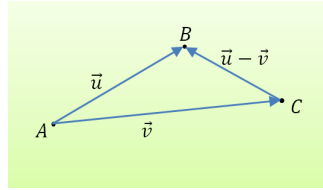


Figura 6: Vetor Diferença.

Ao multiplicar um vetor por uma número real positivo pode-se alterar a magnitude do vetor, alongando ou encurtando, ou mantendo o mesmo tamanho caso esse número seja 1. Essa operação é chamada de multiplicação de um escalar por um vetor, que a cada vetor $\vec{u}$ associa o vetor $\lambda\vec{u}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, chamado de produto do escalar λ pelo vetor $\vec{u}$. Observe a definição dessa operação.

Definição 2.6 *O produto $\lambda \in \mathbb{R}$ por $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é o vetor $\lambda\vec{v} = \lambda\overrightarrow{AB}$, representado pelo segmento orientado AC , tal que:*

- (a) A, B e C são colineares;
- (b) $d(A, C) = |\lambda|d(A, B)$;
- (c) $C = A$ se $\lambda = 0$;
- (d) Os segmentos AC e AB têm igual sentido se $\lambda > 0$, e sentidos opostos se $\lambda < 0$.

Usando o produto de um escalar por um vetor, é possível verificar se um ponto P qualquer pertence a uma reta que passa pelos pontos A e B , ou seja, verificar se os pontos A, B e P são colineares.

Proposição 2.4.3 *Um ponto P pertence à uma reta r que passa pelos pontos A e B se, e somente se, $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demonstração 2.4.2 *Pela Definição 2.6, o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$ pertence à reta r .*

Por outro lado, considere que a reta r contém o ponto P e que $\beta = \frac{d(A, P)}{d(A, B)}$.

Caso o sentido do percurso de A para P for o mesmo do de A para B , então $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$, com isso, $\lambda = \beta$, pois P é o único ponto da semirreta com origem em A e passa por B tal que $d(A, P) = \beta d(A, B)$.

Se o sentido do percurso de A para P for oposto ao sentido de A para B , então $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$, onde $\lambda = -\beta$, pois P é o único ponto da semirreta de origem em A com sentido oposto ao da semirreta de mesma origem que passa por B tal que $d(A, P) = \beta d(A, B)$.

■

2.4.2 Produto Interno

Existe outra operação entre vetores denominada de produto interno ou produto escalar, que associa a cada par de vetores um escalar. Para definir geometricamente o produto interno, é fundamental abordar dois conceitos preliminares: norma de um vetor e ângulo entre dois vetores.

Definição 2.7 *A norma ou comprimento de um vetor $\vec{v}$ é dado pelo comprimento de um segmento representante de $\vec{v}$. Esse número é denotado por $\|\vec{v}\|$.*

Se $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, então

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Se $P = (x, y)$ é o ponto tal que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, então

$$\|\vec{v}\| = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Definição 2.8 *Dados dois vetores não nulos $\vec{v}$ e $\vec{u}$. O ângulo entre esses dois vetores é o menor ângulo entre os segmentos representantes de $\vec{v}$ e $\vec{u}$. Designa-se por $\theta = \angle(\vec{v}, \vec{u})$ a medida do ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{u}$.*

Sejam AB e AC os segmentos representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente.

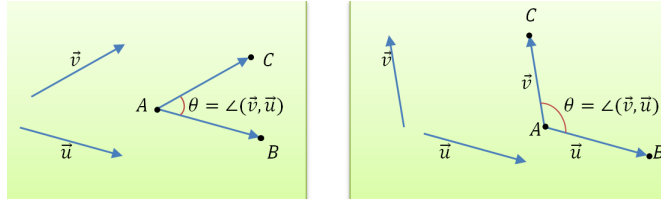


Figura 7: Ângulo Entre Dois Vetores.

Definição 2.9 Dados dois vetores do plano $\vec{v}$ e $\vec{u}$, o produto interno entre esses dois vetores é o número real:

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{Se } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}; \\ \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cos \theta, & \text{Se } \vec{v} \neq \vec{0}, \vec{u} \neq \vec{0} \text{ e } \theta = \angle(\vec{v}, \vec{u}). \end{cases}$$

Na proposição seguinte, ver-se que o produto interno entre dois vetores pode ser calculado baseado em suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais.

Proposição 2.4.4 Tem-se que o produto interno entre os vetores $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$ é dado por

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = ac + bd.$$

Demonstração 2.4.3 Caso um dos vetores seja nulo, então, pela definição, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ e $ac + bd = 0$, satisfazendo a identidade.

Considere os pontos $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ e sejam os vetores não nulos $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$, então,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \vec{v} - \vec{u} = (c - a, d - b).$$

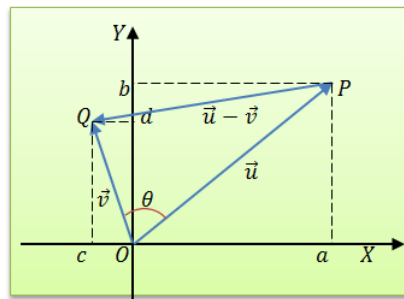


Figura 8: Diferença Entre Dois Vetores.

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo OPQ , obtém-se

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta,$$

onde $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$.

Assim,

$$\begin{aligned} 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \\ &= (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) - ((c - a)^2 + (d - b)^2) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (c^2 - 2ca + a^2 + d^2 - 2bd + b^2) \\ &= 2ca + 2bd \\ &= 2(ac + bd). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta = ac + bd.$$

■

Tem-se que, quando o cosseno de θ for zero, isso implica que o ângulo formado entre os dois vetores, é reto. É equivalente dizer que os vetores são perpendiculares. Segue uma definição sobre a condição de perpendicularismo entre dois vetores.

Definição 2.10 O vetor $\vec{u}$ é perpendicular ou ortogonal ao vetor $\vec{v}$, denota-se por $\vec{u} \perp \vec{v}$, se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$.

É possível estabelecer um critério de perpendicularidade entre dois vetores usando produto interno. Observe a seguinte proposição.

Proposição 2.4.5 Dois vetores são perpendiculares se, e somente se, seu produto interno é zero, ou seja,

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0.$$

Demonstração 2.4.4 Caso os vetores $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ sejam nulos, então, pela Definição 2.10, $\vec{u} \perp \vec{v}$ e também, pela Definição 2.9, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

Considere $\vec{u} \neq 0$, $\vec{v} \neq 0$ e $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$, então:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 90^\circ$$

■

2.5 Equações da Reta no Plano

É possível estabelecer uma relação entre a Geometria e a Álgebra, obtendo equações associadas a um conjunto de pontos.

Nesse capítulo serão apresentadas dois tipos de equações relacionadas a uma reta do plano, equações paramétricas e equações cartesianas da reta, pelas propriedades geométricas da reta.

2.5.1 Equação Paramétrica da Reta

Dado um ponto P pertencente a uma reta r , nesse tipo de equação, as coordenadas de P são dadas por expressões do primeiro grau em função de um número real, denominado parâmetro. À medida que o valor desse parâmetro varia, tem-se pontos distintos da reta, e, reciprocamente, cada ponto da reta corresponde um parâmetro.

Dois casos serão analisados: reta que passa por dois pontos e reta que contém um ponto e é paralela a um vetor.

1º Caso - Reta r que passa pelos pontos A e B .

Considere uma reta r que contém dois pontos A e B e seja P um ponto qualquer do plano. Pela Proposição 2.4.3, tem-se que o ponto P pertence à reta r se e só se $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Então, para deslocar do ponto A para o ponto P , basta usar a operação $t\overrightarrow{AB}$. É possível então escrever a equação que determina o ponto P , baseada na variação do parâmetro t , da seguinte forma:

$$r : P = A + t\overrightarrow{AB},$$

para algum $t \in \mathbb{R}$.

Essa equação é chamada de equação paramétrica da reta r .

Considerando $A = (a_1, b_1)$, $B = (a_2, b_2)$ e $P = (x, y)$, então, para algum $t \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in r, & \Leftrightarrow (x, y) = (a_1, b_1) + t(a_2 - a_1, b_2 - b_1) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = a_1 + t(a_2 - a_1) \\ y = b_1 + t(b_2 - b_1) \end{cases}. \end{aligned}$$

Com isso, tem-se as equações paramétricas da reta r , para algum $t \in \mathbb{R}$

$$r : \begin{cases} x = a_1 + t(a_2 - a_1) \\ y = b_1 + t(b_2 - b_1) \end{cases}.$$

2º Caso - Reta r que passa pelo ponto A e é paralela ao vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Pela Geometria Euclidiana, sabe-se que dado um vetor $\vec{v} = (a, b)$ não nulo e um ponto $A = (x_0, y_0)$, existe uma única reta r com direção de v que contém o ponto A . Dizer que r tem a mesma direção de v significa que dois pontos quaisquer de r determinam um vetor com a mesma direção de v .

Assim, uma reta r contém um ponto $P = (x, y)$ se, e só se,

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v},$$

para algum $t \in \mathbb{R}$.

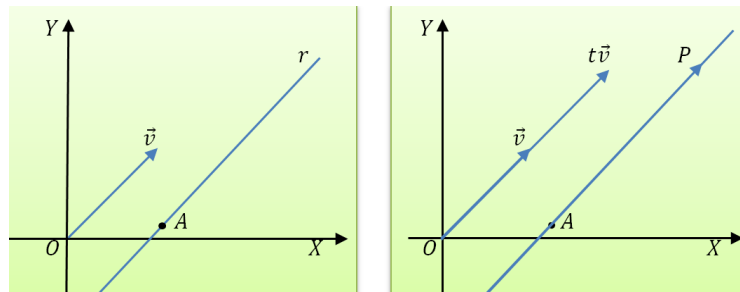


Figura 9: Vetor Direção da Reta r .

Em função das coordenadas, tem-se

$$(x - x_0, y - y_0) = t(a, b).$$

Então, tem-se o sistema de equação

$$r : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}.$$

Que são as equações paramétricas da reta r , para algum $t \in \mathbb{R}$.

2.5.2 Equação Cartesiana da Reta

Usando o produto interno, é possível caracterizar algebricamente uma reta perpendicular a uma direção dada. Com isso, tem-se o segundo tipo de equação da reta no plano: a equação cartesiana.

Definição 2.11 Um vetor $\vec{v}$ não-nulo é perpendicular ou normal a uma reta r , que passa por dois pontos A e B , se $\vec{v} \perp \overrightarrow{AB}$.

Considere uma reta r que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0)$ e é perpendicular ao vetor não-nulo $\vec{v} = (a, b)$. Logo,

$$\begin{aligned}
 P = (x, y) \in r &\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp \vec{v} \\
 &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AP}, \vec{v} \rangle = 0 \\
 &\Leftrightarrow \langle (x - x_0, y - y_0), (a, b) \rangle = 0 \\
 &\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \\
 &\Leftrightarrow ax + by = ax_0 + by_0 \\
 &\Leftrightarrow ax + by = c, \quad \text{onde } c = ax_0 + by_0.
 \end{aligned}$$

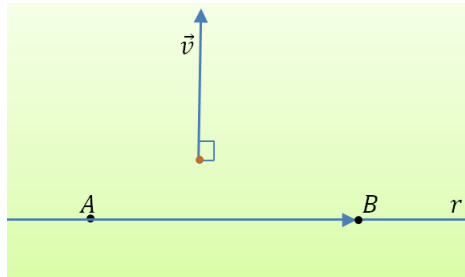


Figura 10: Vetor Normal à Reta r .

Então, é possível representar uma reta algebricamente, conhecendo o vetor direção e apenas um ponto da reta. Diferentemente das equações paramétricas, neste caso, tem-se uma única equação para relacionar as coordenadas dos pontos pertencentes à uma reta.

2.5.3 Distância de um Ponto a uma Reta

Sejam P e r , respectivamente, um ponto e uma reta no plano. Como visto, é possível determinar a distância de P a um ponto qualquer de r . Agora, veja como determinar a distância de P à reta r .

Definição 2.12 Dado um ponto P e uma reta r , a distância do ponto P à reta r , denotada por $d(P, r)$, é definida por

$$d(P, r) = \min\{d(P, P') | P' \in r\},$$

Diz que um ponto $P^* \in r$ realiza a distância do ponto P à reta r se

$$d(P, P^*) \leq d(P, P'),$$

para todo $P' \in r$.

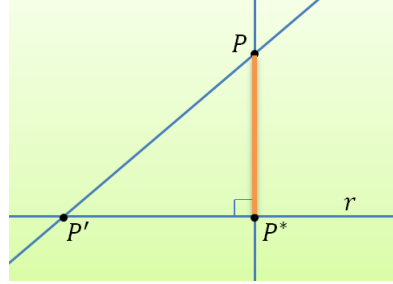


Figura 11: Distância do Ponto P à Reta r .

Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que a distância do ponto P à reta r é o valor do cateto PP^* , ou seja, P^* é o pé da perpendicular a r que passa pelo ponto P . Então,

$$d(P, r) = \min\{d(P, P') | P' \in r\} = d(P, P^*).$$

Teorema 2.5.1 *Sejam $r : ax + by = c$ uma reta e $P = (x_0, y_0)$ um ponto do plano. Tem-se que a distância do ponto P à reta r é dada por*

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (9)$$

Demonstração 2.5.1 *Seja s a reta que passa por P e é normal à reta r . Como $\vec{v} \perp r$, isso implica que $\vec{v}$ é paralelo a s . Logo, tem-se as equações paramétricas de s*

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases},$$

para algum $t \in \mathbb{R}$.

Seja $\{P^\} = r \cap s$, ou seja, o pé da perpendicular a r que passa por P . Então, tem-se as coordenadas de P , para algum $t^* \in \mathbb{R}$:*

$$P^* = (x_0 + at^*, y_0 + bt^*).$$

Como $P^* \in r$, então,

$$\begin{aligned} a(x_0 + at^*) + b(y_0 + bt^*) &= c \\ \Leftrightarrow (a^2 + b^2)t^* + ax_0 + by_0 &= c \\ \Leftrightarrow t^* &= \frac{c - (ax_0 + by_0)}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Como $d(P, r) = d(P, P^*) = \|\overrightarrow{PP^*}\|$ e $\overrightarrow{PP^*} = (a, b)t^*$, então:

$$d(P, r) = |t^*| \cdot \|(a, b)\| = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

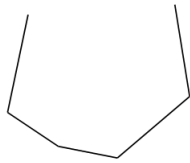
■

2.6 Polígonos no Plano

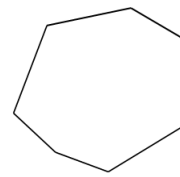
O presente trabalho abordará alguns métodos para o cálculo da área de polígonos em função das coordenadas de seus vértices. Para tanto, essa seção apresentará algumas definições da Geometria Elementar sobre polígonos.

A palavra polígono vem do grego, *polúgonos*, que significa ter muitos lados ou ângulos. Para Euclides⁹, polígono era uma figura limitada por linhas retas, sendo que essas linhas deviriam ser mais de quatro.

Uma linha poligonal é uma sucessão de segmentos consecutivos e não colineares, dois a dois. A linha poligonal $A_1A_2A_3 \cdots A_{n-1}A_n$ corresponde a reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \cdots, \overline{A_{n-1}A_n}$. Sendo que, quando os extremos A_1 e A_n coincidem a linha é chamada de linha poligonal fechada; quando não coincidem, linha poligonal aberta.



(a) Linha Poligonal Aberta.



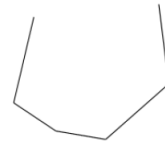
(b) Linha Poligonal Fechada.

⁹Euclides de Alexandria foi um matemático e escritor, possivelmente egípcio. Além de sua principal obra, Os Elementos, Euclides também escreveu sobre perspectivas, secções cônicas, geometria esférica e teoria dos números.

Quando a interseção de qualquer dois segmentos não consecutivos é vazia, a linha poligonal é chamada de linha poligonal simples; quando for não-vazia, é chamada de linha poligonal não-simples.



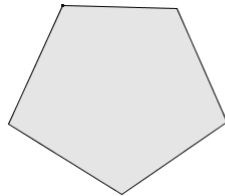
(c) Linha Aberta Não-Simples.



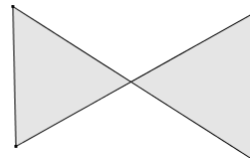
(d) Linha Aberta Simples.

Definição 2.13 *Polígono é a região plana limitada por uma linha poligonal fechada. Sendo assim, um polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_{n-1}A_n$, com $n \geq 3$, corresponde a região limitada pela reunião dos segmentos A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 , $\cdots$, $A_{n-1}A_n$ e A_nA_1 .*

Caso a linha associada ao polígono for uma linha poligonal simples, o polígono é classificado como polígono simples. Quando a linha for não-simples, o polígono é classificado como polígono não-simples ou complexo.



(e) Polígono Simples.



(f) Polígono Não-simples.

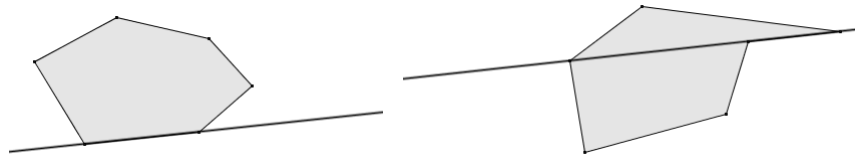
Na literatura também encontra-se o termo polígono como sinônimo de linha poligonal fechada. Sendo assim, a região plana limitada pelo polígono é chamada de seu interior e a união do polígono com seu interior é chamada de região poligonal ou superfície poligonal.

Num polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_n$, os pontos $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ são os vértices do polígono; os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \cdots, \overline{A_{n-1}A_n}$ são os lados do polígono; segmentos de reta com extremidades em dois vértices não consecutivos são as diagonais do polígono; e os ângulos $\widehat{A_nA_1A_2}, \widehat{A_1A_2A_3}, \cdots, \widehat{A_{n-1}A_nA_1}$ são os ângulos internos do polígono.

Uma região do plano se diz convexa quando o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer dessa região está inteiramente contido nela.

Definição 2.14 Um polígono $A_1A_2A_3\cdots A_n$ é convexo se, para $1 \leq i \leq n$, a reta A_iA_{i+1} não contém nenhum outro ponto A_j , mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que determina (aqui e no que se segue, $A_0 = A_n$, $A_{n+1} = A_1$ e $A_{n+2} = A_2$).

Um polígono não-convexo é chamado de polígono côncavo.



(g) Polígono Convexo.

(h) Polígono Côncavo.

2.7 Coordenadas no Espaço

Começando o estudo da Geometria Analítica Espacial, primeiro tem-se as noções de coordenadas no espaço, vetores, como também, algumas de suas operações, que serão fundamentais para compreender o volume de uma pirâmide, mediante as informações de seus vértices.

Definição 2.15 Um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço ε da Geometria Euclidiana consiste de três eixos mutuamente perpendiculares, OX , OY e OZ , com a mesma origem O .

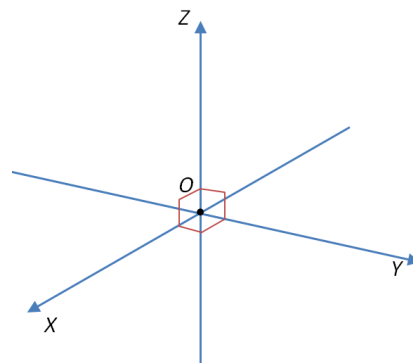


Figura 12: Eixos do Sistema $OXYZ$ no Espaço ε .

Escolhido um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço ε , há três planos especiais, chamados **planos cartesianos**:

- π_{XY} , o plano que contém os eixos OX e OY ;
- π_{XZ} , o plano que contém os eixos OX e OZ ;
- π_{YZ} , o plano que contém os eixos OY e OZ .

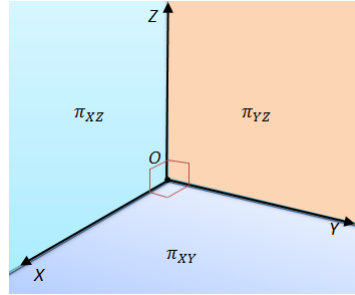


Figura 13: Planos Cartesianos do Sistema $OXYZ$.

Cada ponto do espaço corresponde exatamente a um terno ordenado de números reais, e cada terno ordenado de números reais corresponde exatamente a um ponto de ε . Isto é, um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos P do espaço ε e os ternos ordenados de números reais (x, y, z) .

Diz que x , y e z são as coordenadas de P em relação ao sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, se o ponto P está em correspondência com o terno (x, y, z) . Essas coordenadas são obtidas da seguinte forma:

- **coordenada x** : coordenada no eixo OX do ponto de intersecção deste eixo com o plano π' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano π_{YZ} ;
- **coordenada y** : coordenada no eixo OY do ponto de intersecção deste eixo com o plano π'' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano π_{XZ} ;
- **coordenada z** : coordenada no eixo OZ do ponto de intersecção deste eixo com o plano π''' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano π_{XY} .

Designa-se por $\mathbb{R}^3$ o conjunto de todos os ternos ordenados (x, y, z) de números reais. Uma vez escolhido um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço ε , identifica-se cada ponto $P \in \varepsilon$ pelas suas coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e escreve-se

$$P = (x, y, z).$$

Com esta identificação, tem-se que:

- O ponto $O = (0, 0, 0)$ é a origem do sistema de eixos ortogonais.

- os conjuntos abaixo são os eixos do sistema:

$$\text{eixo } OX = \{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{R}\};$$

$$\text{eixo } OY = \{(0, y, 0) | y \in \mathbb{R}\};$$

$$\text{eixo } OZ = \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\}.$$

- os planos cartesianos são os conjuntos:

$$\pi_{XY} = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\}, \text{ ou seja, } \pi_{XY} \Rightarrow z = 0;$$

$$\pi_{XZ} = \{(x, 0, z) | x, z \in \mathbb{R}\}, \text{ ou seja, } \pi_{XZ} \Rightarrow y = 0;$$

$$\pi_{YZ} = \{(0, y, z) | y, z \in \mathbb{R}\}, \text{ ou seja, } \pi_{YZ} \Rightarrow x = 0.$$

2.8 Distância Entre Dois Pontos do Espaço

Sejam $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$ pontos do espaço e P_0 e Q_0 suas respectivas projeções no plano OXY . Considerando um ponto S tal que o segmento PS seja paralelo ao segmento P_0Q_0 , obtem-se o triângulo retângulo PSQ . Então, pelo Teorema de Pitágoras, a hipotenusa PQ , distância do ponto P ao ponto Q , é dada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{\overline{SQ}^2 + \overline{SP}^2}. \quad (10)$$

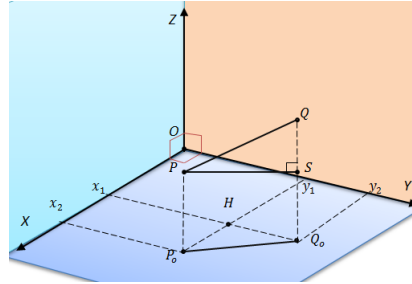


Figura 14: Distância Entre Dois Pontos no Espaço.

Tem-se que o quadrilátero SQ_0P_0P é um retângulo. Então,

$$\overline{SQ}^2 = (z_2 - z_1)^2. \quad (11)$$

e aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo P_0HQ_0 , onde $H = (x_1, y_1, 0)$, tem-se

$$\overline{SP}^2 = \overline{Q_0P_0}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \quad (12)$$

Substituindo (12) e (11) em (10), tem-se

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (13)$$

2.9 Vetores no Espaço

As noções de vetor no espaço são semelhantes as de vetores no plano, mantendo as principais propriedades.

Para estabelecer uma relação de equipolência, é interessante observar que, no espaço, duas retas são paralelas quando são coplanares e não têm ponto em comum.

Definição 2.16 *Dois segmentos AB e CD , no espaço, são equipolentes, e escreve-se $AB \equiv CD$, quando têm mesmo sentido, estão contidos em retas paralelas ou na mesma reta e têm igual comprimento.*

O conjunto de todos os segmentos orientados do espaço pode ser dividido em subconjuntos denominados classe de equivalência pela relação de equipolência ou, simplesmente, classe de equipolência. Cada classe de equipolência é denominada um vetor no espaço. A mesma notação de vetor no plano é usada para designar todos os segmentos orientados, equipolentes a um determinado segmento AB :

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \{CD | AB \equiv CD\}.$$

A definição de vetor nulo ou vetor zero no espaço, segue a mesma do vetor nulo no plano. Ou seja,

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \dots$$

Sendo P e $\vec{v}$, respectivamente, um ponto e um vetor do espaço, tem-se que P é origem de um segmento representante do vetor $\vec{v}$. Ou seja, existe um único ponto $Q \in \varepsilon$ tal que $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$.

2.9.1 Produto Interno

Analogamente à definição de produto interno no plano, tem-se sua definição no espaço.

Definição 2.17 Dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, no espaço, sua norma ou comprimento é o número

$$\|\vec{v}\| = d(A, B).$$

Para a definição de produto interno, ainda se faz necessário definir o conceito de ângulos entre dois vetores no espaço.

Definição 2.18 Dados dois vetores não nulos $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, o ângulo entre esses dois vetores, e escreve-se $\angle(\vec{v}, \vec{u})$, é o menor ângulo formado pelos segmentos AB e AC medido no plano π_{ABC} , determinado pelos pontos A, B e C . Observe que $\angle(\vec{v}, \vec{u}) \in [0, \pi]$.

Com os conceitos de norma e ângulo, a definição de produto interno entre dois vetores no espaço é de forma semelhante a que foi feita para dois vetores do plano.

Definição 2.19 Dados dois vetores do espaço $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o produto interno entre esses dois vetores é o número real

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{Se } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}; \\ \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cos \theta, & \text{Se } \vec{v} \neq \vec{0}, \vec{u} \neq \vec{0} \text{ e } \theta = \angle(\vec{v}, \vec{u}). \end{cases}$$

A seguinte proposição caracteriza o produto interno entre dois vetores do espaço por meio das coordenadas dos vetores em relação a um sistema de eixos ortogonais. A demonstração é de forma análoga a que foi feita para dois vetores no plano.

Proposição 2.9.1 O produto interno entre dois vetores do espaço $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (a', b', c')$ é dado por

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = aa' + bb' + cc'.$$

2.9.2 Produto Vetorial

Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais no espaço e considere os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

Definição 2.20 O produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é o vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1 z_2 - z_1 y_2, -(x_1 z_2 - x_2 z_1), x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Propriedades do Produto Vetorial

Para melhor compreender e justificar alguns cálculos posteriores, duas propriedades de produto vetorial serão abordadas.

Para quaisquer vetores do espaço $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ valem as seguintes propriedades:

Propriedade 2.9.1 $\vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é, $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$

Demonstração 2.9.1 Calculando o produto interno entre os vetores $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v}$, tem-se

$$\begin{aligned}\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle &= (y_1 z_2 - z_1 y_2)x_1 - (x_1 z_2 - x_2 z_1)y_1 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)z_1 \\ &= x_1 z_2 y_1 - z_1 y_2 x_1 - y_1 x_1 z_2 + x_2 z_1 y_1 + z_1 x_1 y_2 - x_2 y_1 z_1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Para mostrar que $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ é de forma análoga. ■

Propriedade 2.9.2 Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e seja $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$, tem-se que

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta.$$

Demonstração 2.9.2 Tem-se

$$\begin{aligned}\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (x_1 z_2 - x_2 z_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \\ &= y_1^2 z_2^2 - 2y_1 y_2 z_1 z_2 + y_2^2 z_1^2 + x_1^2 z_2^2 - 2x_1 x_2 z_1 z_2 \\ &\quad + x_2^2 z_1^2 + x_1^2 y_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 y_1^2 \\ &= x_1^2(y_2^2 + z_2^2) + y_1^2(x_2^2 + z_2^2) + z_1^2(x_2^2 + y_2^2) \\ &\quad - 2x_1 x_2 y_1 y_2 - 2z_1 z_2(x_1 x_2 - y_1 y_2) \\ &= x_1^2(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + y_1^2(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + z_1^2(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) \\ &\quad - x_1^2 x_2^2 - y_1^2 y_2^2 - z_1^2 z_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 - 2z_1 z_2(x_1 x_2 - y_1 y_2) \\ &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - [x_1^2 x_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 y_2^2 \\ &\quad + 2z_1 z_2(x_1 x_2 + y_1 y_2) + z_1^2 z_2^2]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - ((x_1x_2 + y_1y_2)^2 \\
&\quad + 2z_1z_2(x_1x_2 + y_1y_2) + z_1^2z_2^2) \\
&= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2.
\end{aligned}$$

Como $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$, então:

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2\cos^2\theta \\
&= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2(1 - \cos^2\theta) \\
&= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2\sin^2\theta.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta.$$

■

Propriedade 2.9.3 $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, onde

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

é a matriz de ordem 3 com as linhas compostas pelas coordenadas dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, na ordem em que são listados.

Demonstração 2.9.3 Tem-se que

$$\begin{aligned}
\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle &= \langle (y_1z_2 - z_1y_2, -(x_1z_2 - x_2z_1), x_1y_2 - x_2y_1), (x_3, y_3, z_3) \rangle \\
&= (y_1z_2 - z_1y_2)x_3 - (x_1z_2 - x_2z_1)y_3 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_3.
\end{aligned}$$

Por outro lado, ao desenvolver o determinante da matriz (14), tomando os elementos da linha a_{3j} , ao aplicar o Teorema 1.3.1, tem-se

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = (y_1z_2 - z_1y_2)x_3 - (x_1z_2 - x_2z_1)y_3 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_3.$$

Portando, $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

■

Interpretação Geométrica da Norma do Produto Vetorial

Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ vetores não nulos e não coplanares, e seja C o quarto ponto do paralelogramo $P = OABC$.

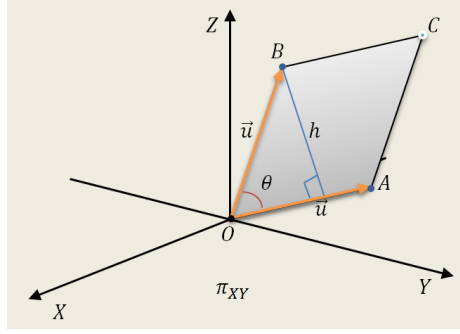


Figura 15: Interpretação Geométrica da Norma do Produto Vetorial.

Considerando o segmento OA como base do paralelogramo, sua altura é dada por

$$h = \|\overrightarrow{OB}\| \sin \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).$$

Daí, tem-se a área de P

$$\begin{aligned} \text{Area}(P) &= \|\overrightarrow{OA}\| \|\overrightarrow{OB}\| \sin \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \\ &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}). \end{aligned}$$

E pela Propriedade 2.9.2, tem-se

$$\text{Area}(P) = \|\vec{u} \times \vec{v}\|. \quad (15)$$

Isto é, a norma do produto vetorial entre dois vetores $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, é a área do paralelogramo que tem os segmentos OA e OB como lados adjacentes.

2.9.3 Produto Misto

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, tem-se que o produto misto desses vetores é o número real

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle.$$

Como visto na Propriedade 2.9.3 do produto vetorial, o produto misto é o determinante da matriz do tipo 3×3 cujas linhas são as coordenadas dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, na ordem em que são listados. Isto é,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

Interpretação Geométrica do Produto Misto

Sejam A , B , C e D pontos não coplanares - vértices de um tetraedro - e P o paralelepípedo que tem os segmentos AB , AC e AD como arestas adjacentes.

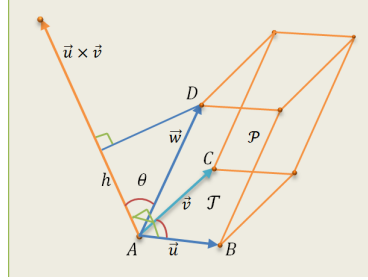


Figura 16: Interpretação Geométrica do Produto Misto.

Tem-se que o volume de P é dado por

$$Vol(P) = Area(\tau).h. \quad (16)$$

Onde h é a altura relativa à base τ do paralelepípedo de lados adjacentes AB e AC .

Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$, pela Propriedade 2.9.1 do produto vetorial, sabe-se que $\vec{u} \times \vec{v}$ é vetor perpendicular a $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Com isso, a altura relativa à base τ do paralelepípedo P é dada por

$$h = \|\vec{w}\| \cdot |\cos \angle(\vec{w}, \vec{u} \times \vec{v})|. \quad (17)$$

e ainda que, como visto ao interpretar geometricamente o produto vetorial, a área de τ é dada por

$$Area(\tau) = \|\vec{u} \times \vec{v}\|. \quad (18)$$

Substituindo (17) e (18) em (16), tem-se

$$Vol(P) = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot |\cos \angle(\vec{w}, \vec{u} \times \vec{v})|.$$

Isto é,

$$Vol(P) = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle.$$

Então, pela Propriedade 2.9.3, tem-se o volume de P

$$Vol(P) = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|.$$

Em termos dos vértices A , B , C e D , tem-se o volume de P

$$Vol(P) = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|. \quad (19)$$

Ou seja, o volume de P é o módulo do produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

3 Aplicação dos Determinantes

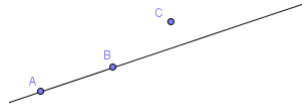
Os determinantes apareceram há cerca de 300 anos (apesar de já existirem esboços do que seriam determinantes na matemática chinesa de 2000 anos atrás) associados à resolução de equações lineares. Hoje em dia, juntamente com matrizes, são uma importante ferramenta matemática, com aplicações diversas.

Por exemplo, os determinantes de matrizes de ordem 2 podem ser interpretados geometricamente como a área de um paralelogramo e os determinantes de matrizes de ordem 3, como o volume de um paralelepípedo. Para tanto, é necessário considerar tanto o paralelogramo quanto o paralelepípedo definidos pelos seus vértices, devidamente representados em um sistema de coordenadas, no plano ou no espaço, respectivamente.

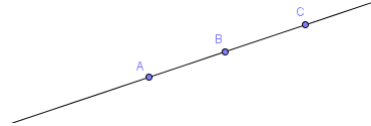
O presente trabalho versará algumas aplicações dos determinantes, a saber: condição de alinhamento de três pontos, equação geral da reta, área do triângulo, área de polígonos, volume do tetraedro e volume da pirâmide.

3.1 Condição de Alinhamento de Três Pontos

Pela Geometria Plana, diz-se que três pontos distintos estão alinhados, ou que três pontos distintos são colineares, quando existe uma reta que os contém.



(a) Três Pontos não Colineares.



(b) Três Pontos Colineares.

Segue uma proposição, usando determinante, que identificará quando três pontos quaisquer representados em um sistema de coordenadas são colineares ou não.

Proposição 3.1.1 *Três pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ são colineares se, e somente se, $D = 0$, onde D é o determinante:*

$$D = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Demonstração 3.1.1 *Veja, genericamente, que o fato se verifica sempre que três pontos A , B e C estão alinhados:*

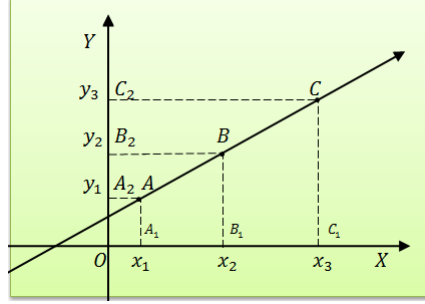


Figura 17: Três Pontos Colineares.

Pelo teorema de Tales¹⁰, tem-se

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A_1B_1}{A_1C_1} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}. \quad (20)$$

e

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A_2B_2}{A_2C_2} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}. \quad (21)$$

Comparando (20) e (21), tem-se: $\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} \Leftrightarrow x_3y_2 - x_3y_1 - x_1y_2 + x_1y_1 = x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_1y_1 \Leftrightarrow x_3y_2 - x_3y_1 - x_1y_2 - x_2y_3 + x_2y_1 + x_1y_3 = 0 \Leftrightarrow x_1y_2 \cdot 1 - x_1y_3 \cdot 1 + x_2y_3 \cdot 1 - x_2y_1 \cdot 1 + x_3y_1 \cdot 1 - x_3y_2 \cdot 1 = 0$.

Ou seja,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

■

Se três pontos são colineares, então pertencem a uma mesma reta. Então, baseado nessa aplicação, pode-se encontrar uma equação que descreve algebricamente essa reta,

¹⁰Tales de Mileto (623-556), foi matemático, engenheiro, homem de negócio e astrônomo da Grécia Antiga. Dentre outras contribuições no campo da geometria, demonstrou que um feixe de retas paralelas determinam segmentos proporcionais a um feixe de retas transversais, teorema que leva seu nome.

mediante as coordenadas de dois desses três pontos, pois, pela Geometria Euclidiana, para determinar uma reta é suficiente e necessário que tenha apenas dois pontos.

Como visto na Proposição 3.1.1, se três pontos são alinhados, então o determinante da matriz correspondente é zero. Então, dados dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ distintos no plano e um ponto qualquer $P = (x, y)$, uma reta contém esses três pontos, se, e somente se, $D = 0$, onde D é o determinante

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exemplo 3.1.1 *Determine a equação geral da reta que passa pelos pontos $A = (1, 2)$ e $B = (2, 1)$.*

Pela Proposição 3.1.1 tem-se o determinante da matriz:

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Daí,

$$2x + 2y + 1 - 4 - x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y - 3 = 0.$$

Isso implica que, se três pontos não são colineares, o determinante correspondente é diferente de zero, podendo ser um número positivo ou negativo.

As duas proposições a seguir abordam as condições quanto ao sinal do determinante, quando três pontos não colineares.

Proposição 3.1.2 *Dados três pontos não colineares $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C' = (x, y) \in \pi'$, sendo π' um dos semiplanos determinados pela reta AB como nas figuras dos quatro casos seguintes, tem-se que $D' > 0$, onde D' é dado por:*

$$D' = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}.$$

Demonstração 3.1.2 *Quatro casos precisam ser analisados:*

1º Caso - *A inclinação da reta AB é positiva.*

Considere o ponto C pertencente à reta AB, tal que $x = x_C$.

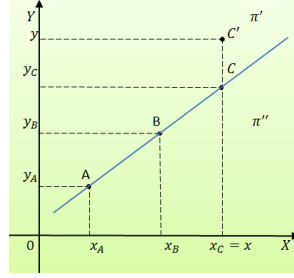


Figura 18: Inclinação da Reta AB é Positiva, $C' \in \pi'$.

Como os pontos A, B e C são colineares, segue pela proposição 3.1.1, que

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Isto é,

$$x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A = 0. \quad (22)$$

De (22), tem-se

$$-y_C(x_B - x_A) = x_A y_B + x_C y_A - x_C y_B - x_B y_A. \quad (23)$$

Montando a matriz baseada nos pontos A, B e C' e calculando o determinante, tem-se:

$$D' = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = y(x_B - x_A) + x_A y_B + x y_A - x y_B - x_B y_A. \quad (24)$$

Comparando (23) e (24), visto que $x = x_C$, tem-se:

$$D' = y(x_B - x_A) - y_C(x_B - x_A) = (y - y_C)(x_B - x_A). \quad (25)$$

Como $x_B > x_A$ e $y > y_C$, então:

$$D' > 0.$$

2º Caso - a inclinação da reta AB é negativa.

Considere o ponto C pertencente à reta AB , tal que $x = x_C$.

Como $x_A > x_B$ e $y_C > y$, de (25), obtém-se

$$D' > 0.$$

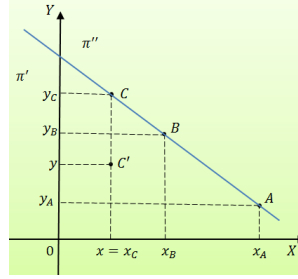


Figura 19: Inclinação da Reta AB é Negativa, $C' \in \pi'$.

3º Caso - A reta AB é perpendicular ao eixo OX .

Considere o ponto C pertencente à reta AB , tal que $y = y_C$.

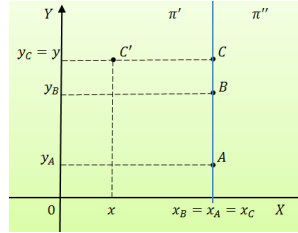


Figura 20: Reta AB Perpendicular ao Eixo OX , $C' \in \pi'$.

De (22), tem-se

$$-x_C(y_A - y_B) = x_A y_B + x_B y_C - x_A y_C - x_B y_A. \quad (26)$$

Montando a matriz baseada nos pontos A , B e C' e calculando o determinante, tem-se:

$$D' = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = x_A y_B + x y_A + y x_B - x y_B - y x_A - x_B y_A. \quad (27)$$

De (27), tem-se

$$D' = x(y_A - y_B) + x_A y_B + x_B y - x_A y - x_B y_A. \quad (28)$$

Comparando (26) e (28), visto que $y_C = y$, tem-se:

$$D' = x(y_A - y_B) - x_C(y_A - y_B) = (x - x_C)(y_A - y_B).$$

Como $x_C > x$ e $y_B > y_A$, então:

$$D' > 0.$$

4º Caso - A reta AB é paralela ao eixo OX .

Considere o ponto C pertencente à reta AB , tal que $x = x_C$.

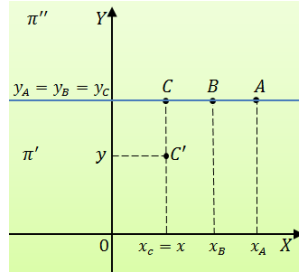


Figura 21: Reta AB Horizontal ao Eixo OX , $C' \in \pi'$.

Como $y < y_C$ e $x_B < x_A$, de (25), tem-se

$$D' > 0.$$

■

Proposição 3.1.3 Dados três pontos não colineares $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C'' = (x, y) \in \pi''$, sendo π'' um dos semiplanos determinados pela reta AB como nas figuras dos quatro casos abaixo, tem-se que $D'' < 0$, onde

$$D'' = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}.$$

Demonstração 3.1.3 *Quatro casos precisam ser analisados.*

1º Caso - a inclinação da reta AB é positiva.

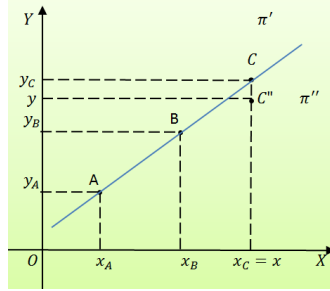


Figura 22: Inclinação da Reta AB é Positiva, $C'' \in \pi''$.

Como os pontos A, B e C são colineares, segue pela Proposição 3.1.1, que

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Isto é,

$$x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A = 0. \quad (29)$$

De (29), tem-se

$$-y_C(x_B - x_A) = x_A y_B + x_C y_A - x_C y_B - x_B y_A. \quad (30)$$

Da matriz formada pelos pontos A, B e C'' , tem-se o determinante

$$D'' = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = y(x_B - x_A) + x_A y_B + x y_A - x y_B - x_B y_A. \quad (31)$$

Comparando (30) e (31), visto que $x = x_C$, tem-se

$$D'' = y(x_B - x_A) - y_C(x_B - x_A) = (y - y_C)(x_B - x_A). \quad (32)$$

Como $x_B > x_A$ e $y < y_C$, então

$$D'' < 0.$$

2º Caso - a inclinação da reta AB é negativa.

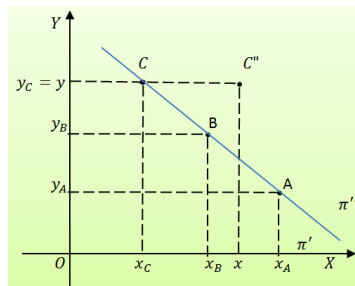


Figura 23: Inclinação da Reta AB é Negativa, $C'' \in \pi''$.

De modo análogo ao caso anterior, tem-se

$$D'' = (y - y_C)(x_B - x_A).$$

Como $x_A > x_B$ e $y_C < y$, então,

$$D'' < 0.$$

3º Caso - A reta AB é perpendicular ao eixo OX .

Considere o ponto C pertencente à reta AB , tal que $y = y_C$.

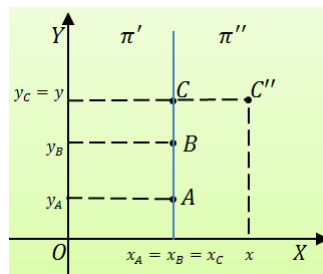


Figura 24: Três Pontos Não Colineares $C'' \in \pi''$.

De (29), obtém-se

$$-x_C(y_A - y_B) = x_A y_B + x_B y_C - x_A y_C - x_B y_A. \quad (33)$$

Considerando os pontos A , B e C'' , tem-se o determinante:

$$D'' = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = x_A y_B + x y_A + y x_B - x y_B - y x_A - x_B y_A. \quad (34)$$

De (34), tem-se

$$D'' = x(y_A - y_B) + x_A y_B + x_B y - x_A y - x_B y_A. \quad (35)$$

Comparando (33) e (35), visto que $y_C = y$ tem-se

$$D'' = x(y_A - y_B) - x_C(y_A - y_B) = (x - x_C)(y_A - y_B).$$

Como $x_C < x$ e $y_B > y_A$, então,

$$D'' < 0.$$

4º Caso - A reta AB é paralela ao eixo OX .

Considere um ponto C pertencente à reta AB , tal que $x_C = x$.

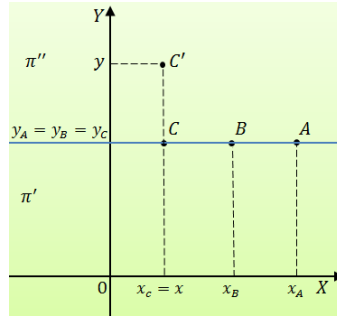


Figura 25: Reta AB Paralela ao Eixo OX , $C'' \in \pi''$.

De (32), tem-se

$$D'' = (y - y_C)(x_B - x_A). \quad (36)$$

Como $x_B < x_A$ e $y > y_C$, então

$$D'' < 0.$$

■

3.2 Determinante e Polígonos

No capítulo anterior foram abordadas algumas definições da geometria plana sobre polígonos. Nesta seção, tem-se algumas aplicações de determinantes relacionadas a polígonos representados em um sistema de coordenadas.

Considere o polígono convexo $A_1A_2A_3 \cdots A_n$

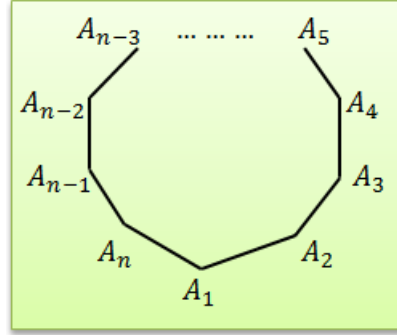


Figura 26: Polígono Convexo.

Proposição 3.2.1 Dado um polígono convexo $A_1A_2A_3 \cdots A_n$, como na Figura 26,

$$\text{tem-se que } D_i = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_{i-1} & y_{i-1} & 1 \\ x_i & y_i & 1 \end{vmatrix} > 0, \text{ com } i \in \{3, 4, 5, \dots, n\}, \text{ onde } A_i = (x_i, y_i).$$

Demonstração 3.2.1 Considerando a reta A_1A_{i-1} , tem-se que o ponto A_i pertence ao semiplano π' descrito na Proposição 3.1.2, logo, $D_i > 0$ para todo $i \in \{3, 4, 5, \dots, n\}$. ■

Corolário 1 Dado um polígono convexo $A_1A_2A_3 \cdots A_n$, como na Figura 26, tem-se

$$\text{que } D_i = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_i & y_i & 1 \\ x_{i-1} & y_{i-1} & 1 \end{vmatrix} < 0, \text{ com } i \in \{3, 4, 5, \dots, n\}, \text{ onde } A_i = (x_i, y_i).$$

Demonstração 3.2.2 Considerando a reta A_1A_i , tem-se que o ponto A_{i-1} pertence ao semiplano π'' descrito na Proposição 3.1.3, logo, $D_i < 0$ para todo $i \in \{3, 4, 5, \dots, n\}$. ■

3.3 Área do Triângulo

A geometria analítica possui um artifício para o cálculo da área de um triângulo, primeiramente demonstrado por Lagrange em um artigo publicado no ano de 1775 - *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires* - usando as coordenadas dos vértices do triângulo. Montando uma matriz conveniente com tais coordenadas, a área será a partir do determinante dessa matriz.

Dado o triângulo ABC .

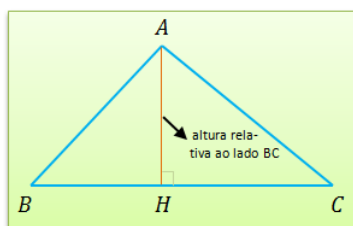


Figura 27: Triângulo ABC.

Pela geometria plana, sabe-se que a área da região triangular é dada por:

$$A = \frac{1}{2}(\overline{BC})(\overline{AH}). \quad (37)$$

Em geometria analítica, tem-se que:

- $d(B, C)$ expressa a medida do lado BC .
- a distância entre A e a reta que contém o lado BC expressa a medida da altura AH .

Proposição 3.3.1 (*Proposição de Lagrange*) Se os vértices de um triângulo são os pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, então sua área é dada por $A = \frac{1}{2!}|D|$, onde D é o determinante

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Demonstração 3.3.1 Tem-se, por (8), que a distância entre os vértices B e C é dada por:

$$d(B, C) = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}. \quad (38)$$

Por (9), a distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ a uma reta $r : ax + by + c = 0$ é dada por:

$$d = \frac{a.x_0 + b.y_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Calculando a equação geral da reta que passa pelos pontos B e C , tem-se:

$$(y_B - y_C) \cdot x + (x_C - x_B) \cdot y + x_B y_C - y_B x_C = 0.$$

Então, a distância entre o vértice A e a reta BC é dada por:

$$d = \frac{|(y_B - y_C) \cdot x_A + (x_C - x_B) \cdot y_A + x_B y_C - y_B x_C|}{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}}. \quad (39)$$

Substituindo (38) e (39) em (37), tem-se:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(\overline{BC})(\overline{AH}) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} \cdot \frac{|(y_B - y_C) \cdot x_A + (x_C - x_B) \cdot y_A + x_B y_C - y_B x_C|}{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}} \\ &= \frac{1}{2}|(y_B - y_C) \cdot x_A + (x_C - x_B) \cdot y_A + x_B y_C - y_B x_C| \\ &= \frac{1}{2}|x_A \cdot y_B \cdot 1 + y_A \cdot x_C \cdot 1 + x_B \cdot y_C \cdot 1 - y_B \cdot x_C \cdot 1 - x_A \cdot y_C \cdot 1 - y_A \cdot x_B \cdot 1|. \end{aligned}$$

Logo,

$$A = \frac{1}{2}|D|.$$

■

3.4 Área de um Polígono Convexo

Usando o artifício para cálculo da área de um triângulo, pode-se determinar a área de qualquer polígono convexo. Primeiro observe a proposição.

Proposição 3.4.1 *Um polígono convexo $A_1 A_2 A_3 \cdots A_n$ pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos.*

Demonstração 3.4.1 *Para $n = 3$, não há o que demonstrar.*

Para $n = 4$, tem-se os triângulos $A_1 A_2 A_3$ e $A_1 A_3 A_4$, ou seja, $2 = 4 - 2$ triângulos.

Supondo $n \geq 5$. Unindo o vértice A_1 aos $n - 1$ vértices restantes $A_2, A_3, \dots, A_n$ obtém-se $n - 1$ segmentos; destes, dois são lados $A_1 A_2$ e $A_1 A_n$ e os $n - 3$ restantes $(A_1 A_3, \dots, A_1 A_{n-1})$ são diagonais. Esse raciocínio é análogo, tomando qualquer outro

vértice como referência. Segue que, essas $n - 3$ diagonais formarão com os lados $(A_3A_4, \dots, A_{n-2}A_{n-1})$, $n - 4$ triângulos. Somando com os demias triângulos $A_1A_2A_3$ e $A_1A_{n-1}A_n$, resultará em $n - 2$. Provando que um polígono convexo com n lados pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos. ■

Como visto, um polígono convexo pode ser decomposto em triângulos. Sendo assim, a estratégia para calcular sua área é somar todas as áreas dos triângulos resultantes da decomposição.

Exemplo 3.4.1 Determine a área do polígono convexo $A_1A_2A_3A_4$, sendo $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$, $A_3 = (x_3, y_3)$ e $A_4 = (x_4, y_4)$.

Pela Proposição 3.4.1, tem-se que o polígono pode ser decomposto em dois triângulos. Seja t_1 o triângulo formado pelos vértices A_1 , A_2 e A_3 e t_2 o triângulo determinado pelos vértices A_1 , A_3 e A_4 .

Com isso, a área do polígono será dada por:

$$A = A_{t_1} + A_{t_2}.$$

Pela Proposição 3.3.1, A_{t_1} é dada por:

$$A_{t_1} = \frac{1}{2}|D_1|,$$

onde D_1 é o determinante

$$D_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Calculando D_1 , tem-se

$$D_1 = x_1y_2 + y_1x_3 + x_2y_3 - y_2x_3 - x_1y_3 - y_1x_2. \quad (40)$$

Pela Proposição 3.3.1, A_{t_2} é dada por:

$$A_{t_2} = \frac{1}{2}|D_2|,$$

onde D_2 é o determinante

$$D_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Calculando D_2 , tem-se

$$D_2 = x_1y_3 + y_1x_4 + x_3y_4 - y_3x_4 - x_1y_4 - y_1x_3. \quad (41)$$

Pelo Corolário 3.2.1, tem-se que D_1 e D_2 têm mesmo sinal, isso implica que

$$|D_1| + |D_2| = |D_1 + D_2|.$$

Então, somando (40) e (41), tem-se

$$\begin{aligned} D_1 + D_2 &= x_1y_2 + y_1x_3 + x_2y_3 - y_2x_3 - x_1y_3 - y_1x_2 + x_1y_3 + y_1x_4 + x_3y_4 \\ &\quad - y_3x_4 - x_1y_4 - y_1x_3 \\ &= x_1y_2 + x_2y_3 - y_2x_3 - y_1x_2 + y_1x_4 + x_3y_4 - y_3x_4 - x_1y_4 \\ &= x_1(y_2 - y_4) - y_1(x_2 - x_4) + x_3(y_4 - y_2) - y_3(x_4 - x_2). \end{aligned}$$

Logo,

$$D_1 + D_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 - x_2 & y_4 - y_2 \end{vmatrix}.$$

Sendo assim, a área do polígono $A_1A_2A_3A_4$ é $\frac{1}{2}$ do módulo do valor dessa soma.

Teorema 3.4.1 A área de um polígono convexo $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n}$, $n > 1$, onde $A_i = (x_i, y_i)$, com $i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$, é dada por $A = \frac{1}{2}|S|$, sendo S a soma

$$S = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_{2i-1} & y_{2i-1} \\ x_{2i} - x_{2i-2} & y_{2i} - y_{2i-2} \end{vmatrix}.$$

Demonstração 3.4.2 A prova será por indução.

Para $n = 2$, tem-se o Exemplo 3.4.1.

Suponha que a área de um polígono convexo $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n}$, sendo $A_i = (x_i, y_i)$, seja dada por

$$H_{2n} = \frac{1}{2}|S|,$$

onde S é a soma

$$S = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_{2i-1} & y_{2i-1} \\ x_{2i} - x_{2i-2} & y_{2i} - y_{2i-2} \end{vmatrix}. \quad (42)$$

Considere um polígono convexo $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n+2}$.

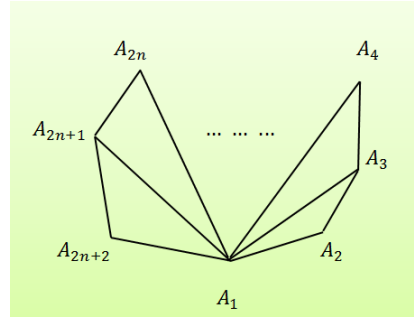


Figura 28: Polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n+2}$ Decomposto em Triângulos.

Tem-se que, em relação ao polígono convexo $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n}$, o polígono considerado, quando decomposto, aumentará em dois triângulos. Seja t_1 o triângulo formado pelos pontos A_1 , A_{2n} e A_{2n+1} e t_2 o triângulo determinado pelos pontos A_1 , A_{2n+1} e A_{2n+2} . Sendo assim, a área do polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n+2}$ será dada por

$$A = H_{2n} + A_{t_1} + A_{t_2}.$$

Pela Proposição 3.3.1, A_{t_1} é dada por

$$A_{t_1} = \frac{1}{2}|D_1|,$$

onde D_1 é o determinante

$$D_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_{2n} & y_{2n} & 1 \\ x_{2n+1} & y_{2n+1} & 1 \end{vmatrix}.$$

Calculando D_1 , tem-se

$$D_1 = x_1y_{2n} + y_1x_{2n+1} + x_{2n}y_{2n+1} - y_{2n}x_{2n+1} - x_1y_{2n+1} - y_1x_{2n}. \quad (43)$$

Pela Proposição 3.3.1, A_{t_2} é dada por

$$A_{t_2} = \frac{1}{2}|D_2|,$$

onde D_2 é o determinante

$$D_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_{2n+1} & y_{2n+1} & 1 \\ x_{2n+2} & y_{2n+2} & 1 \end{vmatrix}.$$

Calculando D_2 , tem-se

$$D_2 = x_1y_{2n+1} + y_1x_{2n+2} + x_{2n+1}y_{2n+2} - y_{2n+1}x_{2n+2} - x_1y_{2n+2} - y_1x_{2n+1}. \quad (44)$$

Considerando o polígono $A_1A_{2n}A_{2n+1}A_{2n+2}$, pelo Corolário 3.2.1, tem-se que D_1 e D_2 têm mesmo sinal, isso implica que

$$|D_1| + |D_2| = |D_1 + D_2|.$$

Então, somando (43) e (44), tem-se

$$\begin{aligned} D_1 + D_2 &= x_1y_{2n} + y_1x_{2n+1} + x_{2n}y_{2n+1} - y_{2n}x_{2n+1} - x_1y_{2n+1} - y_1x_{2n} + x_1y_{2n+1} + \\ &+ y_1x_{2n+2} + x_{2n+1}y_{2n+2} - y_{2n+1}x_{2n+2} - x_1y_{2n+2} - y_1x_{2n+1} = x_1y_{2n} + x_{2n}y_{2n+1} - y_{2n}x_{2n+1} - \\ &- y_1x_{2n} + y_1x_{2n+2} + x_{2n+1}y_{2n+2} - y_{2n+1}x_{2n+2} - x_1y_{2n+2} = x_1(y_{2n} - y_{2n+2}) - y_1(x_{2n} - x_{2n+2}) + \\ &+ x_{2n+1}(y_{2n+2} - y_{2n}) - y_{2n+1}(x_{2n+2} - x_{2n}). \end{aligned}$$

Logo,

$$D_1 + D_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_{2n} - x_{2n+2} & y_{2n} - y_{2n+2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{2n+1} & y_{2n+1} \\ x_{2n+2} - x_{2n} & y_{2n+2} - y_{2n} \end{vmatrix}. \quad (45)$$

Então,

$$A_{t_1} + A_{t_2} = \frac{1}{2}|D_1 + D_2|.$$

Somando (42) e (45), tem-se:

$$A = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_{2i-1} & y_{2i-1} \\ x_{2i} - x_{2i-2} & y_{2i} - y_{2i-2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_{2n} - x_{2n+2} & y_{2n} - y_{2n+2} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} x_{2n+1} & y_{2n+1} \\ x_{2n+2} - x_{2n} & y_{2n+2} - y_{2n} \end{vmatrix}.$$

Para melhor compreensão, duas parcelas de A - a primeira e a penúltima - serão somadas separadamente.

Somando essas parcelas, tem-se:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 - x_{2n} & y_2 - y_{2n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_{2n} - x_{2n+2} & y_{2n} - y_{2n+2} \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_1 y_{2n} - y_1 x_2 + y_1 x_{2n} + \\ & x_1 y_{2n} - x_1 y_{2n+2} - y_1 x_{2n} + y_1 x_{2n+2} = x_1 y_2 - y_1 x_2 - x_1 y_{2n+2} + y_1 x_{2n+2} = x_1 (y_2 - y_{2n+2}) - \\ & y_1 (x_2 - x_{2n+2}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 - x_{2n+2} & y_2 - y_{2n+2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} A = & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 - x_{2n+2} & y_2 - y_{2n+2} \end{vmatrix} + \sum_{i=2}^n \begin{vmatrix} x_{2i-1} & y_{2i-1} \\ x_{2i} - x_{2i-2} & y_{2i} - y_{2i-2} \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} x_{2n+1} & y_{2n+1} \\ x_{2n+2} - x_{2n} & y_{2n+2} - y_{2n} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$A = \sum_{i=1}^{n+1} \begin{vmatrix} x_{2i-1} & y_{2i-1} \\ x_{2i} - x_{2i-2} & y_{2i} - y_{2i-2} \end{vmatrix}.$$

Visto que $A_0 = A_{2n+2}$, $A_1 = A_{2n+3}$, $\dots$

Logo, pelo Princípio de Indução Finita, a fórmula é válida para todo valor de $n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 3.4.2 A área de um polígono convexo $A_1 A_2 A_3 \dots A_{2n+1}$, $n > 1$, onde $A_i = (x_i, y_i)$, com $i \in \{1, 2, \dots, 2n+1\}$, é dada por $A = \frac{1}{2}|H|$, sendo H a soma:

$$H = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_{2i-1} & y_{2i-1} \\ x_{2i} - x_{2i-2} & y_{2i} - y_{2i-2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{2n} & y_{2n} \\ x_{2n+1} & y_{2n+1} \end{vmatrix}.$$

Demonstração 3.4.3 *Pelo Teorema 3.4.1, tem-se que a área do polígono convexo $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n}$ é dada por $A = \frac{1}{2}|S|$, sendo S a soma*

$$S = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_{2i-1} & y_{2i-1} \\ x_{2i} - x_{2i-2} & y_{2i} - y_{2i-2} \end{vmatrix}. \quad (46)$$

Então, a área do polígono em questão é a soma da área do polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n}$ com a área do triângulo t formado pelos vértices A_1 , A_{2n} e A_{2n+1} isto é,

$$A = A_{2n} + A_t.$$

Pela Proposição 3.3.1, A_t é dada por:

$$A_t = \frac{1}{2}|D|,$$

onde D é o determinante

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_{2n} & y_{2n} & 1 \\ x_{2n+1} & y_{2n+1} & 1 \end{vmatrix}.$$

Calculando o valor de D , tem-se que

$$D = x_1y_{2n} + y_1x_{2n+1} + x_{2n}y_{2n+1} - y_{2n}x_{2n+1} - x_1y_{2n+1} - y_1x_{2n}. \quad (47)$$

Tem-se a primeira parcela de 46, visto que $A_0 = A_{2n}$,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 - x_{2n} & y_2 - y_{2n} \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_1y_{2n} - y_1x_2 + y_1x_{2n}. \quad (48)$$

Somando (47) e (48), tem-se

$$\begin{aligned} & x_1y_2 - x_1y_{2n} - y_1x_2 + y_1x_{2n} + x_1y_{2n} + y_1x_{2n+1} + x_{2n}y_{2n+1} - y_{2n}x_{2n+1} - x_1y_{2n+1} - y_1x_{2n} = \\ & x_1y_2 - y_1x_2 + y_1x_{2n+1} + x_{2n}y_{2n+1} - y_{2n}x_{2n+1} - x_1y_{2n+1} = x_1(y_2 - y_{2n+1}) - y_1(x_2 - x_{2n+1}) + \\ & x_{2n}y_{2n+1} - y_{2n}x_{2n+1}. \end{aligned}$$

Colocando essa soma em forma de determinante, tem-se

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 - x_{2n+1} & y_2 - y_{2n+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{2n} & y_{2n} \\ x_{2n+1} & y_{2n+1} \end{vmatrix}. \quad (49)$$

Somando (49) e (46), lembrando que a primeira parcela de (46) já foi considerada em (49), tem-se

$$H = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 - x_{2n+1} & y_2 - y_{2n+1} \end{vmatrix} + \sum_{i=2}^n \begin{vmatrix} x_{2i-1} & y_{2i-1} \\ x_{2i} - x_{2i-2} & y_{2i} - y_{2i-2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{2n} & y_{2n} \\ x_{2n+1} & y_{2n+1} \end{vmatrix}.$$

Então,

$$H = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_{2i-1} & y_{2i-1} \\ x_{2i} - x_{2i-2} & y_{2i} - y_{2i-2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{2n} & y_{2n} \\ x_{2n+1} & y_{2n+1} \end{vmatrix}.$$

■

3.5 Determinantes e Pirâmide

Esta seção abordará uma das aplicações dos determinantes que é o cálculo do volume de uma pirâmide de base triangular - tetraedro - com seus vértices representados em um sistema de coordenadas. E, a partir dessa aplicação, apresentará uma relação que permite determinar o volume de qualquer pirâmide cuja base é um polígono convexo; nesse contexto, sendo necessário as informações de seus vértices.

3.5.1 Definição e Construção de Pirâmide

Considere um polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_n$, contido em um plano ε e um ponto V não pertencente a esse plano. Traça-se os segmentos A_1V , A_2V , $A_3V \cdots$, A_nV . Cada dois vértices consecutivos de $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ determinam com V uma região triangular. Esses triângulos, juntamente com o polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ determinam um poliedro chamado pirâmide de base $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ e vértice V . Os segmentos A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 , $\cdots$, A_nA_1 são as arestas da base; os segmentos A_1V , A_2V , $A_3V \cdots$, A_nV são as arestas laterais; as regiões triangulares são as faces laterais da pirâmide.

Uma pirâmide com base triangular é chamada de tetraedro. Em particular, qualquer face da pirâmide pode ser considerada como base, pois, tanto a base, como as faces laterais são regiões triangulares.

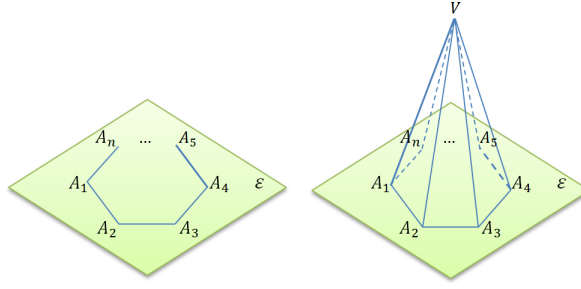


Figura 29: Construindo uma pirâmide.

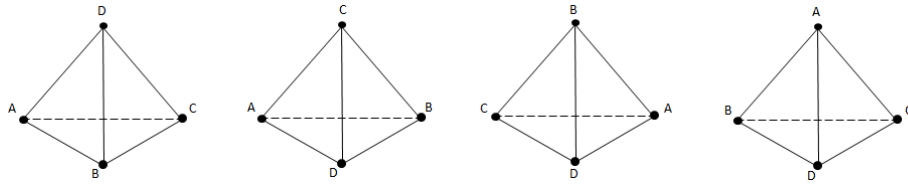


Figura 30: Pirâmide de Base Triangular.

3.6 Volume do Tetraedro

No ano de 1773 o ilustre matemático Lagrange , em um trabalho sobre mecânica - *Solutions analytiques de quelques problemes sur les pyramides triangulaires* - desenvolveu um método de como calcular o volume de um tetraedro, sendo apresentado em 1775. Nesse contexto, é necessário apenas as informações de seus vértices.

Proposição 3.6.1 (*Proposição de Lagrange*) Dado um tetraedro $ABCD$ de vértices $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$ e $D(x_D, y_D, z_D)$ o seu volume é dado por $V = \frac{1}{3!}|D|$, onde D é o determinante

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \end{vmatrix}.$$

Demonstração 3.6.1 Sejam A , B , C e D pontos não coplanares - vértices de um tetraedro - e P o paralelepípedo que tem os segmentos AB , AC e AD como arestas adjacentes.

Considerando o paralelogramo τ de lados adjacentes AB e AC como base de P e h a altura de P em relação a τ . Então, por (19), o volume de P é dado por

$$Vol(P) = |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|.$$

Isto é o determinante da matriz de ordem 3 que tem por linha as coordenadas dos vetores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ e $\vec{AD}$. Segue, então:

$$Vol(P) = \left| \det \begin{bmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A & z_D - z_A \end{bmatrix} \right|.$$

Calculando o valor desse determinante, tem-se

$$D = (x_B - x_A)(y_C - y_A)(z_D - z_A) + (y_B - y_A)(z_C - z_A)(x_D - x_A) + (z_B - z_A)(x_C - x_A)(y_D - y_A) - (z_B - z_A)(y_C - y_A)(x_D - x_A) - (x_B - x_A)(z_C - z_A)(y_D - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)(z_D - z_A).$$

Desenvolvendo esses produtos e organizando de forma conveniente, tem-se

$$D = 1 \cdot [(x_B y_C z_D) + y_B z_C x_D + z_B x_C y_D - z_B y_C x_D - x_B z_C y_D - y_B x_C z_D] - 1 \cdot [x_A y_C z_D + y_A z_C x_D + z_A x_C y_D - z_A y_C x_D - x_A z_C y_D - y_A x_C z_D] + 1 \cdot [y_B x_A z_D + z_B y_A x_D + x_B z_A y_D - y_B z_A x_D - z_B x_A y_D - x_B y_A z_D] - 1 \cdot [y_B z_C x_A + z_B x_C y_A + x_B y_C z_A - y_B x_C z_A - z_B y_C x_A - x_B z_C y_A].$$

Percebe-se que esse é o determinante de uma matriz de ordem 4 com todos elementos da última coluna iguais a 1, tomando como referência essa coluna ao aplicar o Teorema de Laplace. Isto é,

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \end{vmatrix}.$$

Agora, resta mostrar que o tetraedro $ABCD$ é um $\frac{1}{6}$ do paralelepípedo P .

Considere um paralelepípedo $ABCDEFGH$

Considerando somente os vértices, A , B , D , E , F e H , tem-se um novo sólido chamado de prisma triangular $ABDEFH$. É fácil ver que esse prisma é a metade do paralelepípedo $ABCDEFGH$. Sendo assim, é suficiente analisar somente o prisma $ABDEFH$.

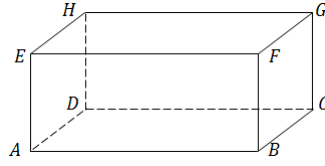


Figura 31: Paralelepípedo $ABCDEFGH$.

A ideia é determinar o volume de uma pirâmide triangular a partir do volume de um prisma triangular. Então, ao decompor esse prisma triangular em três pirâmides, como indicam a figura 32, tem-se que os tetraedros I e II têm bases congruentes e alturas iguais. De fato, os triângulos ABD e EFH são congruentes e a distância de E ao plano (ABD) é igual à distância de B ao plano (EFH) - altura do prisma original. Logo, I e II têm mesmo volume, pelo Princípio de Cavaliere ¹¹; e ainda, que os tetraedros I e III também têm bases congruentes e alturas iguais. De fato, o triângulo ADE é congruente ao triângulo EDH , pois cada um deles é a metade do paralelogramo $ADHE$ e a altura de cada um desses tetraedros é a distância de B ao plano $(ADHE)$. Logo, I e III têm o mesmo volume. Assim, $V_I = V_{II}$ e $V_I = V_{III}$. Pela transitividade, tem-se $V_I = V_{II} = V_{III}$. Sendo assim, o volume do prisma é o triplo do volume de um tetraedro gerado por ele e o volume do paralelepípedo $ABCDEFGH$, seis vezes, pois $ABCDEFGH$ é o dobro de $ABDEFH$.

Portanto, o volume do tetraedro $ABCD$ é $\frac{1}{6}$ do volume de P .

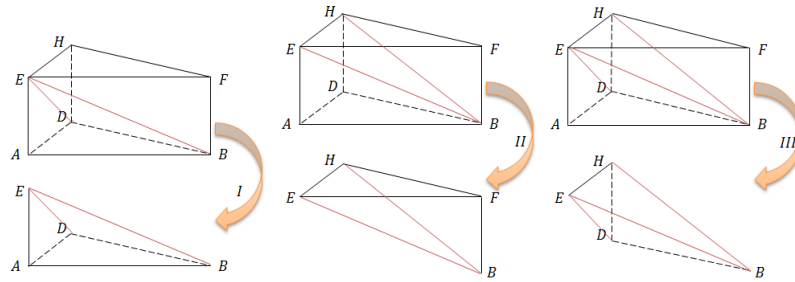


Figura 32: Prisma $ABDEFH$ Decomposto em Tetraedros.

¹¹Bonaventura Cavaliere (1598-1647) foi um sacerdote jesuíta e matemático italiano. Demonstrou que dados dois sólidos incluídos em um par de planos paralelos, se todo plano paralelo ao par de planos e que intersecta os sólidos, o faz em seções cujas áreas estão sempre na mesma razão, então os volumes dos sólidos também estão nessa mesma razão.

3.7 Volume da Pirâmide

Como visto na demonstração da Proposição 3.6.1, o volume de uma pirâmide é $\frac{1}{3}$ do volume do prisma de mesma base. Uma vez que o volume desse prisma é conhecido, consequentemente, tem-se o volume de uma pirâmide de mesma base.

Neste trabalho, o volume da pirâmide será calculado analiticamente e será fundamentado na Proposição 3.6.1. Então, dada uma pirâmide P , cujos vértices estão representados em um sistema de coordenadas, para calcular o volume de P , a estratégia inicial é decompor a pirâmide em tetraedros.

Proposição 3.7.1 *Uma pirâmide P cuja base é um polígono convexo $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ e vértice V pode ser decomposta em $n - 2$ tetraedros.*

Demonstração 3.7.1 *Segundo a Proposição 3.4.1 o polígono convexo $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ - base da pirâmide - pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos. Considerando cada triângulo resultante da decomposição desse polígono com o vértice V , tem-se $n - 2$ tetraedros.*

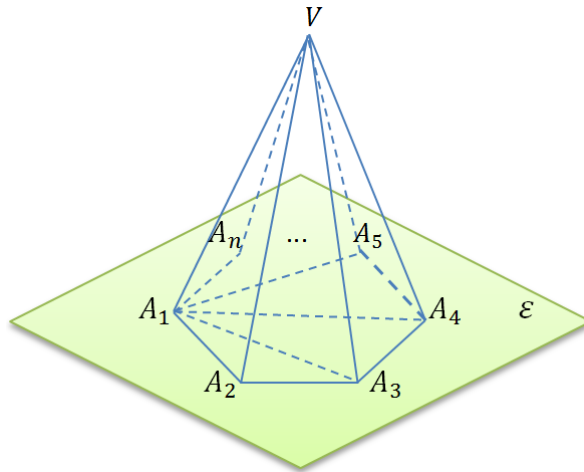


Figura 33: Pirâmide Decomposta em Tetraedros.

■

Ao calcular o volume dessa pirâmide, para cada um desses tetraedros, pela Proposição 3.6.1, tem-se um determinante de ordem 4. A proposição a seguir identificará o sinal desses determinantes.

Proposição 3.7.2 Dada uma pirâmide cuja base é um polígono convexo $A_1A_2A_3 \cdots A_n$,

$$\text{e vértice } V, \text{ tem-se que } D_i = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_{i-1} & y_{i-1} & z_{i-1} & 1 \\ x_i & y_i & z_i & 1 \\ x_V & y_V & z_V & 1 \end{vmatrix} \text{ tem mesmo sinal, para todo}$$

$i \in \{3, 4, 5, \dots, n\}$, sendo $A_i = (x_i, y_i, z_i)$ e $V = (x_V, y_V, z_V)$.

Demonstração 3.7.2 Sem perda de generalidade, pode-se supor o polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ - base da pirâmide - contido no plano OXY , isto é, $A_i = (x_i, y_i, 0)$. Sendo assim, tem-se

$$D_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 & 1 \\ x_V & y_V & z_V & 1 \end{vmatrix}; \dots; D_n = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 & 1 \\ x_{n-1} & y_{n-1} & 0 & 1 \\ x_n & y_n & 0 & 1 \\ x_V & y_V & z_V & 1 \end{vmatrix}.$$

Ao determinar o valor dos determinantes D_i , pelo Teorema de Laplace, tem-se os seguintes cofatores pelo elemento a_{43}

$$D_3 = -z_V \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}; \dots; D_n = -z_V \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_{n-1} & y_{n-1} & 1 \\ x_n & y_n & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Pela Proposição 3.1.2 e pela Proposição 3.1.3, tem-se que } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_{i-1} & y_{i-1} & 1 \\ x_i & y_i & 1 \end{vmatrix} \text{ tem}$$

mesmo sinal para todo $i \in \{3, 4, 5, \dots, n\}$. ■

Exemplo 3.7.1 Considere uma pirâmide com base $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ e $A_4(x_4, y_4, z_4)$ e vértice $V(x_V, y_V, z_V)$.

Pela Proposição 3.7.1, tem-se que a pirâmide pode ser decomposta em dois tetraedros, a saber: $T_1(A_1A_2A_3V)$ e $T_2(A_1A_3A_4V)$. Com isso, o volume da pirâmide, V_P , será dado por:

$$V_P = V_{T_1} + V_{T_2}.$$

Pela Proposição 3.6.1, V_{T_1} é dado por

$$V_{T_1} = \frac{1}{6}|D_1|,$$

onde D_1 é o determinante

$$D_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_V & y_V & z_V & 1 \end{vmatrix}.$$

Usando o Teorema 1.3.1 para calcular o valor do determinante, considerando os elementos a_{i1} , tem-se a soma envolvendo os menores complementares

$$D_1 = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_V & z_V & 1 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_V & z_V & 1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_V & z_V & 1 \end{vmatrix} - x_V \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Aplicando novamente o Teorema 1.3.1, ao determinar os valores desses determinantes, tomando a terceira coluna como referência - lembrando, pela Propriedade 1.4.1, que ao trocar duas linhas, muda o sinal do determinante.

$$\begin{aligned} D_1 = & (x_1 - x_2) \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + (x_1 - x_3) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + (x_1 - x_V) \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + (x_2 - \\ & x_3) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + (x_2 - x_V) \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_3 - x_V) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (50)$$

Pela Proposição 3.6.1, V_{T_2} é dado por

$$V_{T_2} = \frac{1}{6}|D_2|,$$

onde D_2 é o determinante

$$D_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_V & y_V & z_V & 1 \end{vmatrix}.$$

Usando o Teorema 1.3.1 para calcular o valor do determinante, considerando os elementos a_{i1} , tem-se a soma envolvendo os menores complementares

$$D_2 = x_1 \begin{vmatrix} y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \\ y_V & z_V & 1 \end{vmatrix} - x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \\ y_V & z_V & 1 \end{vmatrix} + x_4 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_V & z_V & 1 \end{vmatrix} - x_V \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Aplicando novamente o Teorema 1.3.1, ao determinar os valores desses determinantes, tomando a terceira coluna como referência - lembrando que ao trocar duas linhas, muda o sinal do determinante, pela Propriedade 1.4.1 - tem-se

$$D_2 = (x_1 - x_3) \begin{vmatrix} y_4 & z_4 \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + (x_1 - x_4) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + (x_1 - x_V) \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix} + (x_3 - x_4) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + (x_3 - x_V) \begin{vmatrix} y_4 & z_4 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_4 - x_V) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (51)$$

Pela Proposição 3.7.2, tem-se que D_1 e D_2 têm mesmo sinal, isso implica que

$$|D_1| + |D_2| = |D_1 + D_2|.$$

Então, somando (50) e (51), tem-se

$$D_1 + D_2 = (x_1 - x_3) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + (x_1 - x_2) \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + (x_1 - x_4) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + (x_2 - x_V) \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_4 - x_V) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + (x_1 - x_3) \begin{vmatrix} y_4 & z_4 \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + (x_2 - x_3) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + (x_3 - x_4) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + (x_3 - x_V) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + (x_3 - x_V) \begin{vmatrix} y_4 & z_4 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_1 - x_V) \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + (x_1 - x_V) \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix}.$$

Juntando os termos com determinantes semelhantes, ainda que linhas sejam invertidas, fato que muda o sinal do determinante, pela Propriedade 1.4.1, obtém-se

$$\begin{aligned}
D_1 + D_2 = & (x_1 - x_3) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + (x_2 - x_4) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + (x_2 - x_4) \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_3 - x_1) \\
& \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix} + (x_4 - x_2) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_V - x_3) \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_V - x_3) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix} + \\
& (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_4 & z_4 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{52}
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo os termos $(x_1 - x_3) \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}$, $(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} y_4 & z_4 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}$ e $(x_4 - x_2) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}$ na equação (52), obtém-se

$$\begin{aligned}
D_1 + D_2 = & (x_1 - x_3) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + (x_1 - x_3) \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_2 - x_4) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + (x_2 - x_4) \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_3 - x_1) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix} + (x_3 - x_1) \begin{vmatrix} y_4 & z_4 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + \\
& (x_4 - x_2) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_4 - x_2) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_V - x_3) \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} - (x_1 - x_3) \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_V - x_3) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix} - \\
& (x_3 - x_1) \begin{vmatrix} y_4 & z_4 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_4 & z_4 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Agora, a ideia é juntar os termos com primeiro fator semelhante e somar os que apresentam mesmo determinante, invertendo linhas, caso necessário, o que acarreta pela Propriedade 1.4.1 a mudança de sinal. Então,

$$D_1 + D_2 = (x_1 - x_3) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + (x_2 - x_4) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + (x_3 - x_1) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix} + (x_4 - x_2) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_V - x_3) \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} - (x_1 - x_3) \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_V - x_3) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix} - (x_3 - x_1) \begin{vmatrix} y_4 & z_4 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_4 & z_4 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
& x_1) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix} + (x_4 - x_2) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_V - \\
& x_1) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_4 & z_4 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
D_1 + D_2 &= (x_1 - x_3) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + (x_2 - x_4) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + (x_3 - \\
& x_1) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix} + (x_4 - x_2) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \end{vmatrix} + \\
& (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_4 & z_4 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$D_1 + D_2 = \sum_{i=1}^4 (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^2 (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix},$$

visto que $A_1 = A_5$ e $A_2 = A_6$.

Portanto, o volume da pirâmide com base $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ e $A_4(x_4, y_4, z_4)$ e vértice $V(x_V, y_V, z_V)$ é $\frac{1}{6}$ do módulo dessa soma.

Teorema 3.7.1 *O volume de uma pirâmide P cuja base é um polígono convexo $A_1 A_2 A_3 \dots A_{2n}$, $n > 1$, e vértice V , sendo $A_i = (x_i, y_i, z_i)$ e $V = (x_V, y_V, z_V)$, é dado por $V = \frac{1}{6}|S|$, onde S é a soma:*

$$\sum_{i=1}^{2n} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix}.$$

Demonstração 3.7.3 *A prova será por indução.*

Para $n = 2$, tem-se o Exemplo 3.7.1.

Suponha que o volume V_P de uma pirâmide P cuja base é um polígono convexo $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n}$ e vértice V , onde $A_i = (x_i, y_i, z_i)$ e $V = (x_V, y_V, z_V)$, seja dado por

$$V_P = \frac{1}{6} \left[\sum_{i=1}^{2n} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix} \right]. \quad (53)$$

Considere uma pirâmide P cuja base é um polígono convexo $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n+2}$ e vértice V .

Em relação à pirâmide de base $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n}$, a de base $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n+2}$, quando decomposta, aumentará em dois tetraedros. Seja T_1 o tetraedro formado pelos pontos A_1, A_{2n}, A_{2n+1} e V e T_2 o tetraedro delimitado pelos pontos A_1, A_{2n+1}, A_{2n+2} e V .

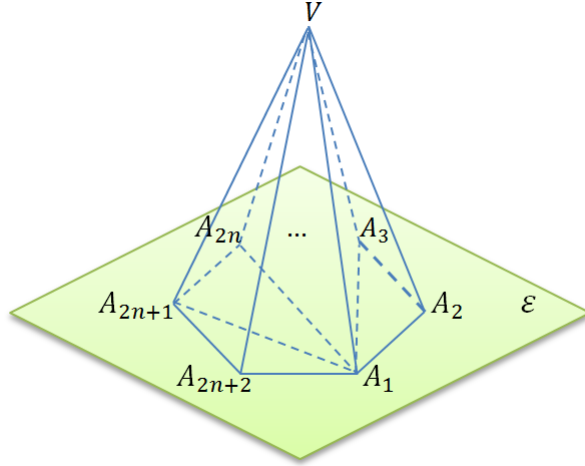


Figura 34: Pirâmide de Base $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n+2}$ Decomposta em Tetraedros.

Com isso, o volume V dessa pirâmide de base $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n+2}$ será dado por

$$V = V_P + V_{T_1} + V_{T_2}.$$

Pela Proposição 3.6.1, V_{T_1} é dado por

$$V_{T_1} = \frac{1}{6} |D_1|, \quad (54)$$

onde $|D_1|$ é o módulo do determinante

$$D_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_{2n} & y_{2n} & z_{2n} & 1 \\ x_{2n+1} & y_{2n+1} & z_{2n+1} & 1 \\ x_V & y_V & z_V & 1 \end{vmatrix}.$$

Calculando o valor desse determinante, pelo Teorema 1.3.1, considerando os elementos a_{i1} , obtém-se

$$D_1 = x_1 \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} & 1 \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} & 1 \\ y_V & z_V & 1 \end{vmatrix} - x_{2n} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} & 1 \\ y_V & z_V & 1 \end{vmatrix} + x_{2n+1} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_{2n} & z_{2n} & 1 \\ y_V & z_V & 1 \end{vmatrix} - x_V \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_{2n} & z_{2n} & 1 \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} & 1 \end{vmatrix}.$$

Aplicando novamente o Teorema 1.3.1, ao determinar os valores desses determinantes, tomando a terceira coluna como referência - lembrando que ao trocar duas linhas, muda o sinal do determinante, pela Propriedade 1.4.1 - assim como, já agrupando os termos com determinante semelhante, tem-se

$$D_1 = (x_1 - x_{2n}) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + (x_1 - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} + (x_1 - x_V) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix} + (x_{2n} - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + (x_{2n} - x_V) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_{2n+1} - x_V) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix}. \quad (55)$$

Pela Proposição 3.6.1, V_{T_2} é dado por

$$V_{T_2} = \frac{1}{6}|D_2|, \quad (56)$$

onde D_2 é o determinante

$$D_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_{2n+1} & y_{2n+1} & z_{2n+1} & 1 \\ x_{2n+2} & y_{2n+2} & z_{2n+2} & 1 \\ x_V & y_V & z_V & 1 \end{vmatrix}.$$

Aplicando o Teorema 1.3.1 ao calcular o valor do determinante, tomando como referência os elementos a_{i1} , obtém-se

$$D_2 = x_1 \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} & 1 \\ y_{2n+2} & z_{2n+2} & 1 \\ y_V & z_V & 1 \end{vmatrix} - x_{2n+1} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_{2n+2} & z_{2n+2} & 1 \\ y_V & z_V & 1 \end{vmatrix} + x_{2n+2} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} & 1 \\ y_V & z_V & 1 \end{vmatrix} - x_V \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} & 1 \\ y_{2n+2} & z_{2n+2} & 1 \end{vmatrix}.$$

Usando novamente o Teorema 1.3.1, ao determinar os valores desses determinantes, tomando os elementos a_{i3} , assim como, já agrupando os termos com determinante semelhante - lembrando que, por consequência, ao trocar duas linhas, muda o sinal do determinante, pela Propriedade 1.4.1 - tem-se

$$D_2 = (x_1 - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_{2n+2} & z_{2n+2} \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + (x_1 - x_{2n+2}) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix} + (x_1 - x_V) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_{2n+2} & z_{2n+2} \end{vmatrix} + (x_{2n+1} - x_{2n+2}) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + (x_{2n+1} - x_V) \begin{vmatrix} y_{2n+2} & z_{2n+2} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_{2n+2} - x_V) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix}. \quad (57)$$

Considerando a pirâmide de base $A_1 A_{2n} A_{2n+1} A_{2n+1}$ e vértice V , pela Proposição 3.7.2, tem-se que D_1 e D_2 têm mesmo sinal, isso implica que

$$|D_1| + |D_2| = |D_1 + D_2|.$$

Então, somando (55) e (57), tem-se

$$\begin{aligned}
D_1 + D_2 = & (x_1 - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} + (x_1 - x_{2n}) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + (x_1 - x_{2n+2}) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix} \\
& + (x_{2n} - x_V) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_{2n+2} - x_V) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix} + (x_1 - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_{2n+2} & z_{2n+2} \\ y_V & z_V \end{vmatrix} \\
& + (x_{2n} - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + (x_{2n+1} - x_{2n+2}) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + (x_{2n+1} - x_V) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} + \\
& (x_{2n+1} - x_V) \begin{vmatrix} y_{2n+2} & z_{2n+2} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_1 - x_V) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix} + (x_1 - x_V) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_{2n+2} & z_{2n+2} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Agrupando os termos com determinantes semelhantes, mesmo que para isso seja necessário a inversão de linhas, o que acarreta, pela Propriedade 1.4.1, a mudança de sinal, tem-se

$$\begin{aligned}
D_1 + D_2 = & (x_1 - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} + (x_{2n} - x_{2n+2}) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix} + (x_{2n} - x_{2n+2}) \\
& \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_{2n+1} - x_1) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_{2n+2} & z_{2n+2} \end{vmatrix} + (x_{2n+2} - x_{2n}) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + \\
& (x_V - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_V - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{2n+2} & z_{2n+2} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} \\
& + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n+2} & z_{2n+2} \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix}. \tag{58}
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo os termos:

$$(x_1 - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}, (x_{2n+1} - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n+2} & z_{2n+2} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} e (x_{2n+2} - x_{2n}) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} na$$

equação (58), obtém-se

$$\begin{aligned}
D_1 + D_2 = & (x_1 - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} + (x_1 - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_{2n} - x_{2n+2}) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix} \\
& + (x_{2n} - x_{2n+2}) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_{2n+1} - x_1) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_{2n+2} & z_{2n+2} \end{vmatrix} + (x_{2n+1} - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n+2} & z_{2n+2} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} \\
& + (x_{2n+2} - x_{2n}) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_{2n+2} - x_{2n}) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_V - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} \\
& - (x_1 - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_V - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{2n+2} & z_{2n+2} \end{vmatrix} - (x_{2n+1} - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n+2} & z_{2n+2} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} \\
& + (x_1 - x_V) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix} + (x_1 - x_V) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_{2n+2} & z_{2n+2} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Juntando os termos com primeiro fator semelhante e somando os que apresentam mesmo determinante, ainda que seja necessário inverter as linhas, o que altera o sinal do determinante, pela Propriedade 1.4.1. Com isso, obtém-se a soma de (54) com (56). Isto é

$$\begin{aligned}
D_1 + D_2 = & (x_1 - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} + (x_{2n} - x_{2n+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix} + \\
& (x_{2n+1} - x_1) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{2n+2} & z_{2n+2} \end{vmatrix} + (x_{2n+2} - x_{2n}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} \\
& + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{2n+2} & z_{2n+2} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n+2} & z_{2n+2} \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Então,

$$V_{T_1} + V_{T_2} = \frac{1}{6} \left[(x_1 - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} + (x_{2n} - x_{2n+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& (x_{2n+1} - x_1) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{2n+2} & z_{2n+2} \end{vmatrix} + (x_{2n+2} - x_{2n}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \\
& \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_1 - y_{2n+1} & z_1 - z_{2n+1} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n+2} & z_{2n+2} \\ y_{2n+1} - y_1 & z_{2n+1} - z_1 \end{vmatrix} \Bigg]. \quad (59)
\end{aligned}$$

Somando a parcela de (53) quando $i = 2n - 1$ com a primeira parcela de (59), tem-se

$$\begin{aligned}
& (x_{2n-1} - x_1) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} + (x_1 - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} = (x_{2n-1} - \\
& x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix}. \quad (60)
\end{aligned}$$

Somando a parcela de (53) quando $i = 2n$ - visto que $A_{2n+1} = A_1$ - com a ante-penúltima parcela de (59), tem-se

$$\begin{aligned}
& (x_{2n} - x_2) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_{2n+2} - x_{2n}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} = (x_{2n+2} - \\
& x_2) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}. \quad (61)
\end{aligned}$$

Somando a última parcela de (53) - visto que $A_{2n+1} = A_1$ - com a penúltima parcela de (59), tem-se

$$\begin{aligned}
& (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_{2n-1} - y_1 & z_{2n-1} - z_1 \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_1 - y_{2n+1} & z_1 - z_{2n+1} \end{vmatrix} = (x_V - \\
& x_1) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_{2n-1} - y_{2n+1} & z_{2n-1} - z_{2n+1} \end{vmatrix}. \quad (62)
\end{aligned}$$

Somando as parcelas restantes de (53) e (59) com (60), (61) e (62), tem-se

$$\begin{aligned}
V = \frac{1}{6} & \left[\sum_{i=1}^{2n-2} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix} + (x_{2n-1} - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} + \right. \\
& (x_{2n} - x_{2n+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix} + (x_{2n+1} - x_1) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{2n+2} & z_{2n+2} \end{vmatrix} + (x_{2n+2} - x_2) \\
& \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \sum_{i=1}^{n-1} \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \\
& \left. \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_{2n-1} - y_{2n+1} & z_{2n-1} - z_{2n+1} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n+2} & z_{2n+2} \\ y_{2n+1} - y_1 & z_{2n+1} - z_1 \end{vmatrix} \right].
\end{aligned}$$

Então,

$$V = \frac{1}{6} \left[\sum_{i=1}^{2(n+1)} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \sum_{i=1}^{n+1} \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix} \right],$$

visto que $A_1 = A_{2n+3}$ e $A_2 = A_{2n+4}$

Como pode observar, ao supor que o Teorema é válido para algum $n \in \mathbb{N}$, essa verdade implicou que para $n + 1 \in \mathbb{N}$ o Teorema também é verdadeiro. Então, pelo Princípio de Indução Finita, a fórmula é válida $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

Observação 3.7.1 Ao aplicar o Teorema de Laplace para calcular o determinante das matrizes de ordem 4, envolvidas no cálculo do volume de cada tetraedro, tomar como referência os elementos a_{i2} , coluna da coordenada y , o volume de P pode ser reescrito da seguinte forma

$$V = \frac{1}{6} |S|,$$

onde S é a soma

$$\sum_{i=1}^{2n} (y_i - y_{i+2}) \begin{vmatrix} x_V - x_1 & z_V - z_1 \\ x_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix} + (y_V - y_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_{2i} & z_{2i} \\ x_{2i-1} - x_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix}.$$

Observação 3.7.2 Caso tome como referência os elementos a_{i3} , coluna da coordenada z , ao aplicar o Teorema de Taplace para calcular o determinante das matrizes de ordem 4, envolvidas no cálculo do volume de cada tetraedro, o volume de P pode ser reescrito da seguinte forma

$$V = \frac{1}{6}|S|,$$

onde S é a soma

$$\sum_{i=1}^{2n} (z_i - z_{i+2}) \begin{vmatrix} x_V - x_1 & y_V - y_1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix} + (z_V - z_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_{2i} & y_{2i} \\ x_{2i-1} - x_{2i+1} & y_{2i-1} - y_{2i+1} \end{vmatrix}.$$

Corolário 2 O volume de uma pirâmide P cuja base é um polígono convexo $A_1A_2A_3 \dots A_{2n}$, $n > 1$, e vértice V , sendo $A_i = (x_i, y_i, z_i)$ e $V = (x_V, y_V, z_V)$, com uma aresta lateral ortogonal ao plano OXY , é dado por

$$V = \frac{1}{6}|S|,$$

onde S é a soma

$$\sum_{i=1}^{2n} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix}.$$

Demonstração 3.7.4 Sem perda de generalidade, considere A_1V a aresta ortogonal ao plano OXY . Então, tem-se $x_1 = x_V$. Isso implica que $x_V - x_1 = 0$, por conseguinte

$$(x_V - x_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Como o volume de P é dado por

$$V = \frac{1}{6} \left[\sum_{i=1}^{2n} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix} \right],$$

então, o volume da pirâmide em questão é igual a

$$V = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{2n} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix}.$$

■

Corolário 3 *O volume de uma pirâmide P cuja base é um polígono convexo $A_1A_2A_3 \dots A_{2n}$, $n > 1$, e vértice V , sendo $A_i = (x_i, y_i, z_i)$ e $V = (x_V, y_V, z_V)$, com o plano ε , determinado pela base da pirâmide, paralelo ao plano OXY , é dado por*

$$V = \frac{1}{6}|S|,$$

onde S é a soma

$$\sum_{i=1}^{2n} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix}.$$

Demonstração 3.7.5 *Pelo Teorema 3.7.1, o volume de P é dado por*

$$V = \frac{1}{6} \left[\sum_{i=1}^{2n} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix} \right].$$

Com o plano ε paralelo ao plano OXY , então $z_1 = z_2 = z_3 = \dots = z_{2n-1} = z_{2n}$. Logo,

$$(x_V - x_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix} = (x_V - x_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{2i} & z_1 \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & 0 \end{vmatrix}.$$

Calculando o somatório dos determinantes, tem-se

$$-z_1y_1 + z_1y_3 - z_1y_3 + z_1y_5 - \dots - z_1y_{2n-3} + z_1y_{2n-1} - z_1y_{2n-1} + z_1y_1 = 0,$$

visto que $A_{2n+1} = A_1$.

Então,

$$(x_V - x_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Portanto,

$$V = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{2n} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix}.$$

■

Teorema 3.7.2 *O volume de uma pirâmide P cuja base é um polígono convexo $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n+1}$, $n > 1$, e vértice V , sendo $A_i = (x_i, y_i, z_i)$ e $V = (x_V, y_V, z_V)$, é dado por*

$$V = \frac{1}{6}|S|,$$

onde S é a soma

$$\sum_{i=1}^{2n+1} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix}.$$

Demonstração 3.7.6 *Pelo Teorema 3.7.1, tem-se que o volume da pirâmide cuja base é um polígono convexo $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n}$ é dado por $V_{P_{2n}} = \frac{1}{6}|S|$, onde S é a soma*

$$\sum_{i=1}^{2n} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix}. \quad (63)$$

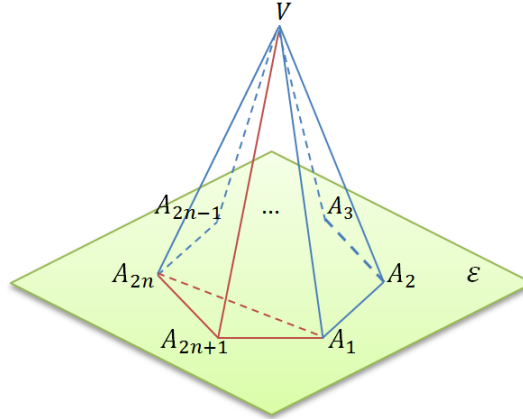


Figura 35: Pirâmide de Base $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n+1}$.

Então, o volume $V_{P_{2n+1}}$ da pirâmide em questão é a soma do volume da pirâmide de base $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n}$ com o volume do tetraedro T determinado pelos vértices A_1 , A_{2n} , A_{2n+1} e V .

$$V_{P_{2n+1}} = V_{P_{2n}} + V_T.$$

Pela Proposição 3.6.1, o volume do tetraedro T é dado por $V_T = \frac{1}{6}|D|$, onde D é o determinante

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_{2n} & y_{2n} & z_{2n} & 1 \\ x_{2n+1} & y_{2n+1} & z_{2n+1} & 1 \\ x_V & y_V & z_V & 1 \end{vmatrix}.$$

Tem-se o valor do determinante, aplicando o Teorema 1.3.1, considerando os elementos a_{i1} .

$$\begin{aligned} D = & x_1 \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} & 1 \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} & 1 \\ y_V & z_V & 1 \end{vmatrix} - x_{2n} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} & 1 \\ y_V & z_V & 1 \end{vmatrix} + x_{2n+1} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_{2n} & z_{2n} & 1 \\ y_V & z_V & 1 \end{vmatrix} \\ & - x_V \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_{2n} & z_{2n} & 1 \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Aplicando novamente o Teorema 1.3.1, ao determinar os valores desses determinantes, tomando a terceira coluna como referência - lembrando que ao trocar duas linhas, muda o sinal do determinante, pela Propriedade 1.4.1 - assim como, já agrupando os termos com determinantes semelhantes, tem-se

$$\begin{aligned} D = & (x_1 - x_{2n}) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + (x_1 - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} + (x_1 - x_V) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix} \\ & + (x_{2n} - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + (x_{2n} - x_V) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_{2n+1} - x_V) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix}. \quad (64) \end{aligned}$$

Sendo assim, tem-se

$$\begin{aligned}
V_{P_{2n+1}} = & \frac{1}{6} \left[\sum_{i=1}^{2n} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix} \right. \\
& + (x_1 - x_{2n}) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + (x_1 - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} + (x_1 - x_V) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix} + \\
& \left. (x_{2n} - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + (x_{2n} - x_V) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_{2n+1} - x_V) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} \right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
V_{P_{2n+1}} = & \frac{1}{6} \left[\sum_{i=1}^{2n-2} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix} + (x_{2n-1} - x_1) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} + (x_{2n-1} - \right. \\
& x_1) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_{2n} - x_2) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \sum_{i=1}^{n-1} \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix} + \\
& (x_V - x_1) + \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_{2n-1} & z_{2n-1} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} + (x_1 - x_{2n}) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + \\
& (x_1 - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} + (x_1 - x_V) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix} + (x_{2n} - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + (x_{2n} - \\
& x_V) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_{2n+1} - x_V) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} \left. \right]. \tag{65}
\end{aligned}$$

Agrupando os termos com primeiro fator semelhante e somando os que apresentam mesmo determinante, podendo haver a inversão de linhas, fato que muda o sinal do determinante, pela Propriedade 1.4.1.

Então, nestas duas parcelas, invertendo as linhas da segunda matriz, tornando os determinantes iguais, e somando-as, tem-se

$$\begin{aligned}
(x_{2n} - x_2) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_{2n} - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_V & z_V \end{vmatrix} &= (x_{2n} - x_2) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_{2n+1} - \\
x_{2n}) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} &= (x_{2n+1} - x_2) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}. \tag{66}
\end{aligned}$$

As duas parcelas abaixo têm primeiro fator semelhante, então, agrupando-as, tem-se

$$\begin{aligned}
(x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_{2n-1} & z_{2n-1} \end{vmatrix} &= (x_V - x_1) [y_{2n}(z_{2n-1} - z_{2n+1}) - \\
z_{2n}(y_{2n-1} - y_{2n+1})] &= (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_{2n-1} - y_{2n+1} & z_{2n-1} - z_{2n+1} \end{vmatrix}. \tag{67}
\end{aligned}$$

Nestas parcelas os determinantes são iguais. Com isso, tem-se

$$(x_{2n-1} - x_1) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} + (x_1 - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} = (x_{2n-1} - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix}. \tag{68}$$

Assim como, nestas

$$(x_{2n+1} - x_V) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} = (x_{2n+1} - x_1) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix}. \tag{69}$$

Somando a parcela $(x_{2n-1} - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}$ com (68) e (69), tem-se

$$\begin{aligned}
&(x_{2n-1} - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} + (x_{2n-1} - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_{2n+1} - x_1) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} = \\
&(x_{2n-1} - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} + (x_{2n-1} - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_1 - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (x_{2n-1} - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} + (x_{2n-1} - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} = (x_{2n-1} - x_{2n+1}) [-y_{2n}(z_V - \\
& z_1) + z_{2n}(y_V - y_1)] = (x_{2n-1} - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix}. \quad (70)
\end{aligned}$$

Agrupando as parcelas restantes de (65) com (66), (67) e (70), tem-se

$$\begin{aligned}
V_{P_{2n+1}} = & \frac{1}{6} \left[\sum_{i=1}^{2n-2} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix} + (x_{2n-1} - x_{2n+1}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{2n} & z_{2n} \end{vmatrix} + \right. \\
& (x_1 - x_{2n}) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + (x_{2n+1} - x_2) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_{2n} - x_V) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_V - \\
& x_1) \sum_{i=1}^{n-1} \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n} & z_{2n} \\ y_{2n-1} - y_{2n+1} & z_{2n-1} - z_{2n+1} \end{vmatrix} \left. \right]. \quad (71)
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo os termos $(x_{2n} - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}$ *e* $(x_{2n+1} - x_2) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}$ *na equação (71), tem-se:*

$$\begin{aligned}
V_{P_{2n+1}} = & \frac{1}{6} \left[\sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix} + (x_1 - x_{2n}) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_V & z_V \end{vmatrix} + (x_{2n} - x_1) \right. \\
& \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_{2n+1} - x_2) \begin{vmatrix} y_V & z_V \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_{2n+1} - x_2) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_{2n} - x_V) \\
& \left. \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} - (x_{2n} - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix} \right].
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$V_{P_{2n+1}} = \frac{1}{6} \left[\sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix} + (x_{2n} - x_1) [-y_{2n+1}(z_V - z_1) + z_{2n+1}(y_V - y_1)] + (x_{2n+1} - x_2) [-y_1((z_V - z_1) + z_1(y_V - y_1)) + (x_1 - x_V) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix} \right].$$

Isto é,

$$V_{P_{2n+1}} = \frac{1}{6} \left[\sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix} + (x_{2n} - x_1) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix} + (x_{2n+1} - x_2) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix} \right].$$

Logo,

$$V_{P_{2n+1}} = \frac{1}{6} \left[\sum_{i=1}^{2n+1} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix} \right].$$

■

Corolário 4 *O volume de uma pirâmide P cuja base é um polígono convexo $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n+1}$, $n > 1$, e vértice V , sendo $A_i = (x_i, y_i, z_i)$ e $V = (x_V, y_V, z_V)$, com uma aresta lateral ortogonal ao plano OXY é dado por:*

$$V = \frac{1}{6}|S|,$$

onde S é a soma

$$\sum_{i=1}^{2n} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix}.$$

Demonstração 3.7.7 Sem perda de generalidade, considere A_1V a aresta lateral ortogonal ao plano OXY , com isso, $x_1 = x_V$. Isso implica que $x_V - x_1 = 0$, consequentemente,

$$(x_V - x_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Como o volume de P é dado por

$$V_{P_{2n+1}} = \frac{1}{6} \left[\sum_{i=1}^{2n+1} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix} \right. \\ \left. + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix} \right]$$

Então, o volume da pirâmide em questão é dado por

$$V = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{2n+1} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix}.$$

■

Corolário 5 O volume de uma pirâmide P cuja base é um polígono convexo $A_1A_2A_3 \cdots A_{2n+1}$, $n > 1$, e vértice V , sendo $A_i = (x_i, y_i, z_i)$ e $V = (x_V, y_V, z_V)$, com o plano ε , determinado pela base da pirâmide, paralelo ao plano OXY , é dado por

$$V = \frac{1}{6}|S|,$$

onde S é a soma

$$\sum_{i=1}^{2n+1} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix}.$$

Demonstração 3.7.8 *Pelo Teorema 3.7.2, o volume de P é dado por*

$$V = \frac{1}{6} \left[\sum_{i=1}^{2n+1} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix} \right]. \quad (72)$$

Como o plano ε é paralelo ao plano OXY , então $z_1 = z_2 = z_3 = \dots = z_{2n} = z_{2n+1}$. Logo,

$$(x_V - x_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix} = (x_V - x_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{2i} & z_1 \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & 0 \end{vmatrix}.$$

Calculando o somatório dos determinantes, tem-se

$$-z_1 y_1 + z_1 y_3 - z_1 y_3 + z_1 y_5 - \dots - z_1 y_{2n-3} + z_1 y_{2n-1} - z_1 y_{2n-1} + z_1 y_{2n+1} = -z_1 y_1 + z_1 y_{2n+1} = -z_{2n+1} y_1 + z_1 y_{2n+1}.$$

Então,

$$(x_V - x_1) \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{2i} & z_{2i} \\ y_{2i-1} - y_{2i+1} & z_{2i-1} - z_{2i+1} \end{vmatrix} = (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}. \quad (73)$$

Somando a última parcela de (72) com (73), tem-se

$$(x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_{2n+1} & z_{2n+1} \end{vmatrix} + (x_V - x_1) \begin{vmatrix} y_{2n+1} & z_{2n+1} \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Portanto,

$$V = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{2n+1} (x_i - x_{i+2}) \begin{vmatrix} y_V - y_1 & z_V - z_1 \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix}.$$

■

4 Conclusão

O atual modelo utilizado para encontrar a área de um polígono convexo e o volume de uma pirâmide com base convexa, usando as coordenadas de seus vértices, consiste em decompor o polígono em triângulos e a pirâmide em tetraedros e, a partir daí, aplicando as respectivas proposições de Lagrange, tem-se os referidos cálculos. Por essas proposições, a área de cada triângulo é calculada usando um determinante de uma matriz de ordem 3, e para o volume de um tetraedro, um determinante de uma matriz de ordem 4. Como visto, para um polígono com n lados, tem-se $n - 2$ triângulos, consequentemente, $n - 2$ determinantes, assim como, para uma pirâmide cuja base é um polígono com n lados. Tais modelos, pode até não ser necessariamente uma forma mais difícil, pelo fato de ser processo repetitivo, mas isso o torna, inevitavelmente, um cálculo mais extenso, à medida que aumenta os lados dos polígonos.

Na tentativa de resumir o procedimento para tais cálculos, foram então apresentados novos teoremas, usando determinantes de matrizes de ordem 2, que demonstram mais praticidade.

Por exemplo, dado um polígono com 6 lados, tem-se $6 - 2 = 4$ matrizes de ordem 3, implicando $4 \times 3 = 12$ matrizes de ordem 2; aplicando o novo teorema, tem-se 6 matrizes de ordem 2, pois, se trata de um somatório de 1 a n . Para uma pirâmide cuja base é um polígono com 6 lados, tem-se $6 - 2 = 4$ matrizes de ordem 4 que, pelo Teorema de Laplace, resulta em $4 \times 4 \times 3 = 48$ matrizes de ordem 2; usando o novo Teorema, tem-se 9 matrizes de ordem 2, uma vez que se trata de um somatório de 1 a n e de outro somatório de 1 a $\frac{n}{2}$.

A escolha do melhor método dependerá do valor de n (número de lados do polígono), pois com n pequeno, não faz tanta diferença com relação ao tamanho do cálculo, mas à medida que n aumenta, é mais viável a aplicação dos novos Teoremas. Esse procedimento torna-se mais apropriado para n consideravelmente grande. Ou seja, se a quantidade de lados de um polígono é relativamente pequena, o procedimento corriqueiro de cálculo da área do polígono e do volume da pirâmide atende à necessidade sem complicações, mas se um polígono apresenta uma quantidade demasiadamente maior de vértices, os novos Teoremas serão melhores empregados, visto que, uma de suas principais características é a capacidade de reduzir a quantidade de cálculos - matrizes de ordem 2 - na computação dos dados.

Além de possibilitar uma flexibilidade quanto à escolha do melhor método, percebe-se esses novos teoremas como sendo uma alternativa prática para a compreensão e

execução dos cálculos envolvidos.

O professor do Ensino Médio ao trabalhar conteúdos relacionados ao tema, pode mostrar para seus alunos essas novas possibilidades de cálculo , pois, acredita-se que no processo educacional, estas fórmulas terão grande aceitação, por parte dos alunos, pois se percebe que seu caráter prático pode proporcionar maior interesse de resolução e aprendizado; além de trabalhar matrizes/determinantes de forma contextualizada, despertando em seus alunos mais interesse e dando significado àquilo que está sendo ensinado.

Referências

- [1] MOL, Rogério Santos. Introdução à história da matemática. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.
- [2] DANTE, Luiz Roberto. Matemática, contexto e aplicações - Ensino médio, volume 3. São Paulo: Ática, 1999.
- [3] DANTE, Luiz Roberto. Matemática, contexto e aplicações - Ensino médio, volume 2. São Paulo: Editora Ática, 2004.
- [4] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. Geometria analítica - Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- [5] REIS, Genésio Lima; SILVA, Valdir Vilmar da. Geometria Analítica, 2ª edição. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1996.
- [6] GOMIDE, Elza F. História da Matemática. São Paulo: Editora Edgard Blucher LTDA, 1999.
- [7] LEHMANN, Charles H. Geometria Analítica; Tradução de Ruy Pinto da Silva Sieczkowski. 7 ed. São Paulo: Globo, 1991.
- [8] LIMA, Elon Lages. Álgebra Linear. 4 ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2000.
- [9] KOLMAN, Bernard. Álgebra Linear; Tradução de João Pitombeira de Carvalho. Rio de Janeiro: Editora Guanabara, 1987.
- [10] RICH, Barnett. Teoria e Problemas de Geometria; Tradução de Irineu Bicudo. 3 ed. Porto Alegre: Bookman, 2003.
- [11] NETO, Aref Antar. Geometria 2º grau. São Paulo: Editora Moderna, 1912.
- [12] EVES, Howard. Introdução à História da Matemática; Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.