



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO  
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO



**Lorrany Cristina da Silva**

**MODELOS PARA O PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS  
COM RESTRIÇÕES DE EMPACOTAMENTO BIDIMENSIONAL**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

CATALÃO – GO, 2017

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE  
TESES E  
DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:**       **Dissertação**       **Tese**

**2. Identificação da Tese ou Dissertação:**

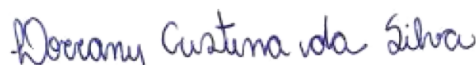
Nome completo do autor: Lorrany Cristina da Silva

Título do trabalho: **Modelos para o Problema de Roteamento de Veículos com Restrições de Empacotamento Bidimensional**

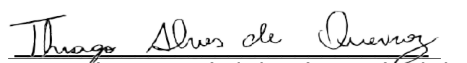
**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento  SIM       NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

  
Assinatura do(a) autor(a)<sup>2</sup>

Ciente e de acordo:

  
Assinatura do(a) orientador(a)<sup>2</sup>

Data: 14/ 08 / 2017

<sup>1</sup>Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente
- Submissão de artigo em revista científica
- Publicação como capítulo de livro
- Publicação da dissertação/tese em livro

<sup>2</sup>A assinatura deve ser escaneada.

LORRANY CRISTINA DA SILVA

MODELOS PARA O PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS  
COM RESTRIÇÕES DE EMPACOTAMENTO BIDIMENSIONAL

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem e Otimização pela Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão.

Orientador:  
Thiago Alves de Queiroz

CATALÃO – GO

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

da Silva, Lorrany Cristina  
Modelos para o Problema de Roteamento de Veículos com Restrições de Empacotamento Bidimensional [manuscrito] / Lorrany Cristina da Silva. - 2017.  
89 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Alves de Queiroz.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão, Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização, Catalão, 2017.  
Bibliografia.

Inclui siglas, abreviaturas, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Problema Integrado. 2. Problema de Roteamento de Veículos. 3. Problema de Empacotamento Ortogonal Bidimensional. 4. Programação Linear Inteira. 5. Planos de Corte. I. de Queiroz, Thiago Alves, orient.  
II. Título.

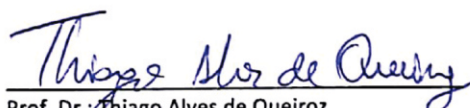



Defesa N° 22

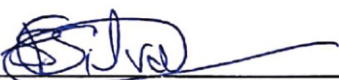
### Ata de Defesa Pública – Dissertação de Mestrado

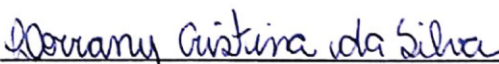
Aos 28 dias do mês de junho do ano de 2017, às 14h:00 min, reuniram-se os componentes da banca examinadora, professores(as) Dr. Thiago Alves de Queiroz (presidente e orientador), Dr. (a) Franklina Maria Bragion de Toledo e Dr. Sérgio Francisco da Silva para, em sessão pública realizada na Laboratório de Controle Operacional, da Regional Catalão (RC), da Universidade Federal de Goiás (UFG), procederem com a avaliação do trabalho intitulado: “Modelos para o Problema de Roteamento de Veículos com Restrições de Empacotamento Bidimensional”, em nível de Mestrado, área de concentração *Modelagem e Otimização*, de autoria de **Lorrany Cristina da Silva**, discente do Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização (PPGMO) da UFG/RC. A sessão foi aberta pelo presidente da banca, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida à discente que, dentro do tempo regulamentar, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu a candidata, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Ressalta-se que a participação da profa. Franklina ocorreu via videoconferência. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação do trabalho. Os membros da banca consideraram o trabalho final: (  ) **Aprovado** (unanimidade) ou (  ) **Reprovado** (por maioria simples). Cumpridas as formalidades de pauta, às 15 h: 00 min a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu Thiago Alves de Queiroz lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo discente e, posteriormente, será homologada pelo Colegiado do PPGMO.

Catalão-GO, 28 de junho de 2017.

  
Prof. Dr. Thiago Alves de Queiroz  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e  
Otimização, UFG/RC.  
(Presidente da Banca)

  
Prof.(a) Dr. (a): Franklina Maria Bragion de Toledo  
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação –  
USP/São Carlos.

  
Prof. Dr.: Sérgio Francisco da Silva  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e  
Otimização, UFG/RC.

  
Discente: Lorrany Cristina da Silva  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e  
Otimização, UFG/RC.



*Aos meus pais.*



---

# Agradecimentos

---

À Deus, pela força e coragem durante toda esta caminhada.

À minha família, meus pais, Vânia e Milton, e meus irmãos, Laura e Junior, por todo apoio e compreensão. Vocês são o meu motivo para seguir e vencer as batalhas da vida.

Ao meu orientador, Thiago Queiroz, por me orientar, aconselhar e estar sempre disposto a ajudar nos estudos e na vida.

Aos meus amigos, pelos bons momentos juntos e toda troca de amor. Vocês sabem quem são.

À todas as pessoas que torceram por mim, de forma positiva ou negativa, para o desenvolvimento deste trabalho.

E, à CAPES e FAPEG pelo apoio financeiro.



*"Consulte não a seus medos, mas a suas esperanças e sonhos. Pense não sobre suas frustrações, mas sobre seu potencial não usado. Preocupe-se não com o que você tentou e falhou, mas com aquilo que ainda é possível a você fazer." (Papa João XXIII)*



# RESUMO

DA SILVA, L. C.. *Modelos para o Problema de Roteamento de Veículos com Restrições de Empacotamento Bidimensional*. 2017. 89 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem e Otimização) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

Neste trabalho desenvolvem-se três modelos de programação linear inteira para o Problema de Roteamento de Veículos com Restrições de Empacotamento Bidimensional. A versão do problema estudado considera que o descarregamento dos itens retangulares pode respeitar (ou não) a sequência de clientes visitados na rota, ou seja, resolve-se as versões sequencial e irrestrita do problema. O primeiro modelo trata do problema de forma completa, isto é, com todas as restrições inseridas de uma só vez. O segundo e o terceiro modelo são baseados, respectivamente, em uma formulação de três e dois índices. Rotinas de separação são consideradas para detectar desigualdades violadas de empacotamento no segundo e no terceiro modelo, enquanto o último modelo considera também cortes de conectividade e capacidade. Experimentos computacionais foram realizados em instâncias da literatura com número de clientes variando de 15 a 36 e itens de 15 até 114, além de considerar os casos em que o custo da aresta é inteiro ou real. Os modelos com cortes sob demanda foram melhores em relação ao primeiro modelo, além de serem competitivos quando comparado com a literatura. O modelo completo encontrou a solução ótima em 4 das 80 instâncias, o modelo de três índices 7 e o modelo de dois índices 53. Na versão sequencial, o modelo adotado resolveu 33 instâncias para o custo inteiro (e 37 para o custo real). Na comparação com uma heurística recente da literatura, o melhor modelo conseguiu empatar em 48 instâncias na versão irrestrita e em 24 na versão sequencial.

**Palavras-chaves:** Problema Integrado, Problema de Roteamento de Veículos, Problema de Empacotamento Ortogonal Bidimensional, Programação Linear Inteira, Planos de Corte.



# ABSTRACT

DA SILVA, L. C.. *Modelos para o Problema de Roteamento de Veículos com Restrições de Empacotamento Bidimensional*. 2017. 89 f. Master Thesis in Modelling and Optimization – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

Three different integer linear programming models for the Vehicle Routing Problem with Two-dimensional Loading Constraints are developed in this work. The version of the problem studied considers that the unloading of the rectangular items can respect or not the sequence of the clients visited on the route, that is, we solve the sequential and unrestricted versions of the problem. The first model deals with the problem completely, that is, with all constraints inserted at once. The second and third models are based, respectively, on a three- and two-index formulation. Separation routines are considered to detect violated inequalities related with packing on the second and third models, while the third model also considers cuts on connectivity and capacity. Computational experiments were carried out over instances of the literature with the quantity of customers ranging from 15 to 36 and items from 15 to 114, besides to consider the cases in which the cost of traversing an edge is integer and real. The models with cuts on demand were better in relation to the first model, besides being competitive when comparing with the results from the literature. The first model solved 4 of the 80 instances, the three-index model solved 7 and, the two-index model solved 53. On the sequential version, the adopted model solved 33 instances for the case with integer costs (and 37 for the case with real costs). In comparing with a recent heuristic from the literature, the best model was capable of tying in 48 instances in the unrestricted version and 24 in the sequential version.

**Keywords:** Integrated Problem, Vehicle Routing Problem, Two-dimensional Orthogonal Packing Problem, Integer Linear Programmig, Cutting Planes.



---

# LISTA DE FIGURAS

---

Figura 2.1 – Exemplo de solução para o 2L-CVRP irrestrito (esquerda) e sequencial (direita). . . . .	30
Figura 2.2 – Exemplo de malha de pontos sem e com a discretização por Herz (1972). . .	41
Figura 3.1 – Ilustração da não sobreposição proibida pelas restrições em (3.29). . . . .	51
Figura 3.2 – Representação da restrição (3.35). . . . .	53
Figura 4.1 – Quantidade de instâncias resolvidas na otimalidade para a versão irrestrita. .	65
Figura 4.2 – GAP médio (em porcentagem) para os três modelos na versão irrestrita. . .	65
Figura 4.3 – Tempo médio (em segundos) para os três modelos sobre a versão irrestrita. .	65
Figura 4.4 – Quantidade de instâncias resolvidas na otimalidade usando o modelo de dois índices sobre a versão sequencial. . . . .	72
Figura 4.5 – Comparação entre o número de instâncias resolvidas na otimalidade usando o modelo de dois índices sobre as versões irrestrita e sequencial. . . . .	75
Figura 4.6 – Comparação entre o GAP médio (em porcentagem) usando o modelo de dois índices sobre as versões irrestrita e sequencial. . . . .	75
Figura 4.7 – Comparação entre a quantidade total de cortes usando o modelo de dois índices sobre as versões irrestrita e sequencial. . . . .	76



---

# LISTA DE TABELAS

---

Tabela 2.1 – Trabalhos encontrados na literatura sobre o 2L-CVRP e suas variantes. . . .	32
Tabela 3.1 – Resumo dos parâmetros utilizados nos modelos. . . . .	43
Tabela 4.1 – Intervalos utilizados para gerar os itens nas instâncias para $L = 20$ e $A = 40$ . . . . .	56
Tabela 4.2 – Resultados dos modelos para a versão irrestrita e custo inteiro comparados com Azevedo (2009) (continua...). . . . .	58
Tabela 4.3 – Resultados dos modelos para a versão irrestrita e custo inteiro comparados com Azevedo (2009) (...continuação). . . . .	59
Tabela 4.4 – Resultados dos modelos para a versão irrestrita e custo real comparados com Wei <i>et al.</i> (2015) (continua...). . . . .	60
Tabela 4.5 – Resultados dos modelos para a versão irrestrita e custo real comparados com Wei <i>et al.</i> (2015) (...continuação). . . . .	61
Tabela 4.6 – Quantidade de cortes inseridos e tempo gasto pelos procedimentos para a versão irrestrita (continua...). . . . .	63
Tabela 4.7 – Quantidade de cortes inseridos e tempo gasto pelos procedimentos para a versão irrestrita (...continuação). . . . .	64
Tabela 4.8 – Resultado do modelo de dois índices para a versão sequencial e custo inteiro comparado com Hokama, Miyazawa e Xavier (2016) (continua...). . . . .	68
Tabela 4.9 – Resultado do modelo de dois índices para a versão sequencial e custo inteiro comparado com Hokama, Miyazawa e Xavier (2016) (...continuação). . . . .	69
Tabela 4.10 – Resultado do modelo de dois índices para a versão sequencial e custo real comparado com Wei <i>et al.</i> (2015) (continua...). . . . .	70
Tabela 4.11 – Resultado do modelo de dois índices para a versão sequencial e custo real comparado com Wei <i>et al.</i> (2015) (...continuação). . . . .	71
Tabela 4.12 – Quantidade de cortes inseridos e tempo gasto pelos procedimentos para a versão sequencial (continua...). . . . .	73
Tabela 4.13 – Quantidade de cortes inseridos e tempo gasto pelos procedimentos para a versão sequencial (...continuação). . . . .	74

Tabela 4.14 – Resultados do modelo de dois índices considerando um tempo limite de execução de 600 segundos para a comparação com Wei <i>et al.</i> (2015) (continua...).	77
Tabela 4.15 – Resultados do modelo de dois índices considerando um tempo limite de execução de 600 segundos para a comparação com Wei <i>et al.</i> (2015) (...continuação).	78

---

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

---

2BPP — *Two-Dimensional Bin Packing Problem*

2L-CVRP — *Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Loading Constraints*

2L-CVRP-H — *Capacitated Vehicle Routing Problem with Two-dimensional Loading Constraints and Handling Costs*

2L-CVRPTW — *Two-Dimensional Loading Capacitated Vehicle Routing Problem with Time Windows*

2L-HFVRP — *Two-Dimensional Loading Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem*

2L-HFVRP-SR — *Two-dimensional Loading Vehicle Routing Problem with Heterogeneous Fleet, Sequential Loading, and Item Rotation*

2L-PDP — *Two-Dimensional Pickup and Delivery Routing Problem with Loading Constraints*

2L-SPD — *Vehicle Routing Problem with Simultaneous Pick-ups and Deliveries and Two-Dimensional Loading Constraints*

2LPC-CVRP — *Two-Dimensional Loading Capacitated Vehicle Routing Problem with Partial Conflicts*

2OPP — *Two-dimensional Orthogonal Packing Problem*

B&B — *Branch-and-Bound*

B&C — *Branch-and-Cut*

CVRP — *Capacitated Vehicle Routing Problem*

GRASP — *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*

MS-BR — *Multistart Biased-Randomized Algorithm*

NSGA-II — *Nondominated Sorting Genetic Algorithm II*

RCPS — *Resource Constrained Project Scheduling Problem*

RLMP — *Restricted Linear Master Problem*

S2L-CVRP — *Vehicle Routing with Stochastic Two-Dimensional Items*

TSP — *Traveling Salesman Problem*

VRPM-TW-CL — *Vehicle Routing Problem with Multi-Trips, Time Windows and Two-Dimensional Circular Loading Constraints*

---

# SUMÁRIO

---

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Objetivos e Justificativas	25
1.2	Estratégia de Pesquisa	25
1.3	Organização do Trabalho	26
2	CONCEITOS E REVISÃO SOBRE O 2L-CVRP	29
2.1	Definição do 2L-CVRP	29
2.2	Trabalhos da Literatura	30
2.2.1	2L-CVRP Irrestrito e Sequencial	31
2.2.2	Outras Variantes do 2L-CVRP	35
2.2.3	Considerações	38
2.3	Modelos de Programação Linear Inteira	38
2.3.1	Modelo Básico	38
2.3.2	<i>Branch-and-Bound</i>	39
2.3.3	Planos de Corte	39
2.3.4	<i>Branch-and-Cut</i>	40
2.4	Pontos de Discretização de Herz (1972)	40
3	MODELOS PARA O 2L-CVRP	43
3.1	Modelo Completo	43
3.2	Modelo de Três Índices	46
3.3	Modelo de Dois Índices	47
3.4	Procedimentos de Separação	48
3.4.1	Restrições de Capacidade Arredondadas	49
3.4.2	Restrições de Empacotamento	50
3.5	Restrições para a Versão Sequencial	52
4	EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS	55
4.1	Versão Irrestrita	56
4.1.1	Resultado para Arestas com Custo Inteiro	57
4.1.2	Resultado para Arestas com Custo Real	57
4.1.3	Comparação entre os Modelos	62
4.2	Versão Sequencial	66

4.2.1	Resultado para Arestas com Custo Inteiro . . . . .	66
4.2.2	Resultado para Arestas com Custo Real . . . . .	67
4.2.3	Comparação entre os Modelos . . . . .	67
4.3	Comparação com a Heurística de Wei <i>et al.</i> (2015) . . . . .	76
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS . . . . .	81
	REFERÊNCIAS . . . . .	85

## Capítulo 1

---

# INTRODUÇÃO

---

Este trabalho aborda o problema de roteamento de veículos com restrições de empacotamento bidimensional, definido por [Iori, Salazar-González e Vigo \(2007\)](#) como *Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Loading Constraints* (2L-CVRP). O 2L-CVRP é uma integração de dois problemas de otimização: o problema de roteamento de veículos com restrições de capacidade (*Capacitated Vehicle Routing Problem* - CVRP) e o problema de empacotamento em *bins* bidimensionais (*Two-Dimensional Bin Packing Problem* - 2BPP). A consideração da versão bidimensional de carregamento surge quando não se pode empilhar um item sobre o outro devido a questões de fragilidade ou pela própria forma do item.

O CVRP visa em obter rotas de custo mínimo total que respeitem a capacidade dos veículos de uma dada frota. As rotas devem iniciar no depósito, visitar os clientes e retornar para o depósito, tal que todo cliente seja atendido por uma única rota e uma única vez. No 2BPP, busca-se alocar ortogonalmente itens retangulares utilizando a menor quantidade possível de recipientes retangulares, sem que para tanto haja a sobreposição entre itens e os itens estejam inteiramente contidos nos recipientes. Incluir a restrição de carregamento no CVRP resulta em um problema relevante para o ramo logístico, em especial, pela forte influência do carregamento durante a elaboração das rotas. Segundo [Côté, Guastarofa e Speranza \(2017\)](#), a resolução do CVRP de forma independente do 2BPP resulta em piores soluções quando comparado a soluções obtidas a partir do problema integrado, tanto em termos de valor de solução, quanto do número de veículos utilizados e a organização do carregamento. Segundo os autores, o aumento do custo médio da solução pode chegar a 7%.

O 2L-CVRP é um problema NP-difícil, pois combina dois subproblemas NP-difíceis ([GAREY; JOHNSON, 1979](#)). Este problema busca por um conjunto de rotas, assim como no CVRP, porém cada rota deve levar em consideração a forma geométrica do empacotamento dos itens dos clientes da rota na base retangular do veículo. Além disso, é um problema pouco estudado, em especial, quanto ao desenvolvimento de métodos exatos para a sua re-

solução. Ao que se conhece, a primeira abordagem exata foi proposta na tese de doutorado de Iori (2004), em que os resultados obtidos foram reportados em um artigo Iori, Salazar-González e Vigo (2007). Os autores resolveram instâncias com até 35 clientes utilizando um algoritmo do tipo *Branch-and-Cut* (B&C) combinado com algumas heurísticas e limitantes inferiores para melhorar seu desempenho geral. Ao nosso conhecimento, os demais trabalhos que abordaram o 2L-CVRP de forma exata fizeram uso de estratégias do tipo B&C, entre eles: Azevedo (2009), propondo desigualdades válidas baseadas em restrições de capacidade e de conectividade; Hokama, Miyazawa e Xavier (2016) com rotinas de separação para restrições de capacidade e conectividade para lidar com o roteamento e algoritmos para lidar com o empacotamento sobre uma malha de pontos; e, Côté, Guastarofa e Speranza (2017) com novas rotinas de separação para resolver o problema de empacotamento, assim checando rapidamente a viabilidade das rotas.

Heurísticas para a resolução do 2L-CVRP são encontradas com mais facilidade, uma vez que conseguem resolver instâncias com maior número de clientes e de itens, porém sem garantia de otimalidade da solução. Alguns exemplos são: Gendreau *et al.* (2008) desenvolveram uma meta-heurística Busca Tabu; Fuellerer *et al.* (2009) apresentaram resultados satisfatórios utilizando um algoritmo de Colônia de Formigas; Duhamel *et al.* (2011) propuseram uma heurística que combina GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*) com Busca Local Evolucionária; e, Wei *et al.* (2015) prouseram uma heurística de Busca em Vizinhança Variável. Mais detalhes sobre estes trabalhos e outras heurísticas são dados no próximo capítulo.

Nesse trabalho, comparam-se modelos de programação linear inteira para resolver o 2L-CVRP, alguns desenvolvidos com base em modelos da literatura do CVRP. O primeiro modelo assume que todas as restrições são impostas desde o início do processo de otimização, para variáveis de decisão com três índices no que tange ao roteamento e cinco índices para a parte de empacotamento. Os dois outros modelos desenvolvidos usam variáveis de decisão com três e dois índices, respectivamente, de forma que cortes válidos são inseridos durante o processo de otimização. O objetivo é, então, comparar os modelos com relação a importância em considerar (ou não) todas as restrições de uma única vez ou inserir planos de corte durante o processo de otimização. Nesse trabalho, foram desenvolvidas rotinas de separação para os dois últimos modelos com o objetivo de lidar com o empacotamento, além de considerar no modelo de dois índices rotinas para detectar a violação da capacidade e conectividade das rotas.

O 2L-CVRP possui algumas versões, como a sequencial e a irrestrita. A versão irrestrita do 2L-CVRP considera que os itens não precisam respeitar a ordem de descarregamento em relação a rota, ou seja, pode ocorrer o remanejamento da carga durante o descarregamento dos itens no cliente. Na prática, isso acontece quando no descarregamento é permitido rearranjar a disposição dos itens dos clientes na base retangular do veículo. A versão sequencial

implica em uma solução de pior qualidade, porém evita o tempo gasto com o remanejamento dos itens durante o descarregamento. Outras restrições que podem ser inseridas na parte do roteamento foram discutidas em [Kumar e Panneerselvam \(2012\)](#), como o caso de janela de tempo, frota heterogênea e múltiplos depósitos. Já na parte do empacotamento, tem-se as restrições discutidas em [Bischoff e Ratcliff \(1995\)](#), como o caso da estabilidade de carga, questões de fragilidade, agrupamento de itens, entre outras.

## 1.1 **Objetivos e Justificativas**

No Brasil, a logística tem crescido bastante requerendo estratégias para melhorar o processo de tomada de decisão em meios práticos, como o caso de considerar problemas de roteamento e de empacotamento de forma simultânea. De acordo com uma pesquisa realizada pela Fundação Dom Cabral, o custo logístico estimado em relação à receita pode chegar a até 10%, sendo embutido geralmente no preço dos produtos ([RESENDE; SOUSA, 2012](#)).

Com isso, essa pesquisa justifica-se pelo grande número de aplicações envolvendo o carregamento e a roteirização de veículos (terrestres, hidroviários, ferroviários, aeroviários, entre outros) em que a forma geométrica dos itens precisa ser de fato levada em conta durante o carregamento dos veículos, em especial, no ramo logístico. Além disso, consideram-se diferentes formulações por programação linear inteira, sendo resolvidas por um método exato, por garantir a solução ótima do problema, a fim de comparar a eficácia de cada uma. É importante destacar que há poucos trabalhos que usam métodos exatos para resolver o 2L-CVRP. Nota-se, assim, a importância prática e teórica deste trabalho, que compreende o desenvolvimento de modelos para resolver o 2L-CVRP, a comparação entre tais modelos e a comparação com estratégias da literatura.

O objetivo principal é comparar as três formulações desenvolvidas para o 2L-CVRP quanto a melhora (ou piora) em termos de valor da solução e tempo ao considerar a inclusão (ou não) de todas as restrições do problema no modelo. Assim, os objetivos específicos estão relacionados a implementação de modelos de programação linear inteira, a inserção de planos de cortes para tratar as restrições de capacidade e de empacotamento nas rotas, a comparação dos resultados entre os diferentes modelos e a comparação dos modelos com a literatura visando apontar qual deles é mais vantajoso.

## 1.2 **Estratégia de Pesquisa**

Esta pesquisa lida com métodos exatos com a possibilidade de incluir planos de corte para resolver o problema de roteamento de veículos com restrições de empacotamento bidimensional. Para tanto, diferentes modelos e abordagens da literatura foram estudadas com

o intuito de desenvolver ou adaptar modelos de programação linear inteira para o referido problema. Os modelos foram codificados em linguagem C++, utilizando o *framework* para B&C presente no pacote de otimização *Gurobi Optimizer* na versão 7.0.

Uma revisão da literatura foi realizada inicialmente com base em artigos da base *Scielo* e *Scopus* para obter mais detalhes sobre o problema em estudo, sua motivação prática e quais autores conseguiram resolvê-lo de forma eficiente. Algumas palavras chaves utilizadas para procurar os artigos nessas bases foram: *vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints*, *two-dimensional bin packing*, *orthogonal packing problem*, 2L-CVRP, problema de roteamento de veículos e problema de empacotamento ortogonal.

Ao revisar a literatura sobre o 2L-CVRP, observou-se que a sua resolução de forma exata é bem menos tratada quando comparada com o emprego de heurísticas. Apesar das heurísticas serem encontradas com maior facilidade e conseguirem resolver instâncias com maior número de clientes e de itens, elas não garantem a solução ótima e muitas possuem passos difíceis de serem reproduzidos com sucesso. Com isso, optou-se pelo desenvolvimento e adaptação de modelos, com base nas propostas da literatura, a fim de verificar o comportamento de cada modelo frente as abordagens da literatura. Os modelos consideram tanto a inserção inicial de todas as restrições do problema quanto a inserção de algumas restrições sob a ideia de planos de corte ao longo do processo de otimização. Restrições de conectividade, capacidade e de empacotamento são adicionadas como planos de corte detectados por rotinas de separação próprias.

Optou-se pela linguagem C++ por ser compilável (permite a execução mais rápida do programa) e para realizar a comparação com outros trabalhos da literatura, que também utilizam dessa linguagem ou da linguagem C. Por se tratar do desenvolvimento de modelos, usa-se o B&C presente no pacote de otimização *Gurobi Optimizer*, que tem sido superior aos demais pacotes hoje encontrados na literatura (OPTIMIZATION, 2016). Em seguida, testes computacionais foram realizados em instâncias da literatura e compararam-se os resultados com as melhores soluções conhecidas da literatura, inclusive as obtidas por heurísticas, a fim de mostrar a eficácia de cada modelo e a viabilidade de se empregar cada um deles.

### 1.3 Organização do Trabalho

Esse trabalho está dividido em capítulos, no qual o primeiro capítulo introduziu o problema tratado, sua relevância prática, os objetivos da pesquisa e a estratégia adotada para alcançá-los. Os demais capítulos estão organizados como segue:

- **Capítulo 2:** Faz-se a descrição formal do 2L-CVRP juntamente com uma revisão bibliográfica detalhada do problema e algumas de suas variantes. A revisão inclui e discute métodos de resolução já utilizados na literatura e as contribuições que trazem

para o problema abordado. Além disso, define-se os pontos de discretização de Herz (1972) que são utilizados para lidar com o empacotamento dos itens dentro dos veículos numa das rotinas de separação.

- **Capítulo 3:** Apresenta-se os modelos utilizados e desenvolvidos para resolver o 2L-CVRP, sendo eles: modelo completo, com variáveis de três índices relacionadas as decisões de roteamento e cinco índices para as decisões relacionada ao empacotamento nos veículos; o segundo e o terceiro modelos contêm variáveis de decisão de três e dois índices, respectivamente, no qual cortes válidos são inseridos durante a otimização. Os cortes inseridos são detectados por rotinas de separação e verificam se a capacidade das rotas foi violada, se as rotas são conexas e se o empacotamento de cada rota é viável.
- **Capítulo 4:** Discutem-se os resultados computacionais obtidos pelos modelos para a versão sequencial e irrestrita do problema, considerando instâncias da literatura. Dois casos são considerados, de forma que o primeiro assume que o custo de percorrer as arestas é um valor real, ao passo que o segundo caso assume que o custo é inteiro (trunca-se o custo real). Além disso, faz-se a comparação entre os modelos e uma heurística, a fim de aferir a eficácia do modelo quando é imposto um tempo limite pequeno de resolução.
- **Capítulo 5:** Apresentam-se as conclusões obtidas na pesquisa e discutem-se as perspectivas para trabalhos futuros.



## Capítulo 2

---

# Conceitos e Revisão sobre o 2L-CVRP

---

Neste capítulo, faz-se a definição formal do 2L-CVRP com as restrições consideradas na construção dos modelos de programação linear inteira. Além disso, apresenta-se uma revisão bibliográfica do problema e de suas variantes já resolvidas pela literatura.

### 2.1 Definição do 2L-CVRP

Dado um grafo não direcionado completo  $G = (V, E)$ , em que  $V$  é o conjunto com  $n + 1$  vértices correspondente ao depósito (vértice 0) e aos clientes (vértices  $j = 1, 2, \dots, n$ ), e  $E$  é o conjunto de arestas entre os vértices, definido como  $E = \{(i, j) : i, j \in V, i \neq j\}$ . A cada aresta  $(i, j) \in E$  é atribuído um custo não negativo  $c_{ij}$  para percorrê-la. Seja  $K$  um conjunto de veículos idênticos, cada qual com capacidade de carga  $P$  e disponível no depósito. As dimensões retangulares da base do contêiner de cada veículo são:  $L$  (largura) e  $A$  (comprimento), com área total  $At = LA$ .

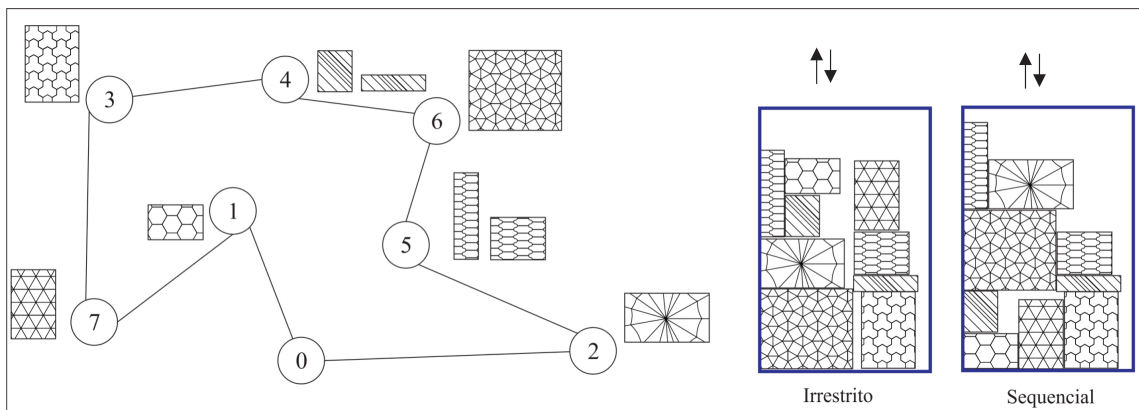
Cada cliente  $j$  demanda um conjunto  $M_j$  de itens retangulares, em que  $M = \sum_{j \in V \setminus \{0\}} M_j$ . Cada item  $m \in M_j$  possui largura  $l_j^m$ , comprimento  $a_j^m$  e peso  $p_j^m$ , com  $m = 1, 2, \dots, |M_j|$ . Assim, a área total dos itens do cliente  $j$  é dada por  $at_j = \sum_{m=1}^{|M_j|} l_j^m a_j^m$  e o peso total é dado por  $pt_j = \sum_{m=1}^{|M_j|} p_j^m$ . Considera-se que para um dado cliente, todos os seus itens devem ser carregados no mesmo veículo, ou seja, não é permitida entrega fracionada, tal que o cliente deve ser visitado exatamente uma vez e por um único veículo. Além disso, o 2L-CVRP em estudo considera que:

- o número de rotas deve ser menor ou igual ao número de veículos disponíveis;
- as rotas iniciam e terminam no depósito;
- são permitidas rotas com um único cliente (*rotas únicas*), ou seja, as rotas podem ter um, dois ou mais clientes;
- a cada rota é associado um único veículo;

- a soma dos pesos dos itens dos clientes de uma rota não pode exceder a capacidade de peso do veículo. O mesmo se aplica para as áreas desses itens com relação à área total da base do contêiner;
- os itens devem ser empacotados de forma ortogonal na base retangular do veículo sem que haja sobreposição e devem estar inteiramente contidos dentro da base;
- considera-se que os itens têm orientação fixa (não podem ser rotacionados) e devem ser empacotados pelo seu canto inferior esquerdo; e,
- as dimensões dos itens e do recipiente são, sem perda de generalidade, valores inteiros positivos.

A Figura 2.1 exemplifica o problema com sete clientes, sendo que o empacotamento da esquerda traz a versão irrestrita, enquanto o da direita representa a versão sequencial para os itens sendo retirados pela parte de cima do recipiente, dada a rota (0 - 2 - 5 - 6 - 4 - 3 - 7 - 1).

Figura 2.1 – Exemplo de solução para o 2L-CVRP irrestrito (esquerda) e sequencial (direita).



Fonte: o autor.

## 2.2 Trabalhos da Literatura

Esta seção apresenta uma revisão bibliográfica sobre o problema de roteamento de veículos com restrições de empacotamento bidimensional e algumas de suas variantes. A revisão aponta que existem poucos trabalhos que apresentam modelos de programação linear inteira e também métodos exatos para resolver o problema em estudo, além de evidenciar a dificuldade em se propor modelos que sejam simples e eficientes.

A revisão aborda exclusivamente a versão com carregamento bidimensional do problema. A Tabela 2.1 sumariza os trabalhos encontrados na literatura e traz detalhes sobre o tipo de carregamento (versões sequencial e irrestrita), se o número de rotas deve ser exatamente igual ao número de veículos disponíveis, se é permitido que uma rota atenda apenas

um cliente, se o custo da aresta é real ou inteiro e qual o método principal usado para resolver o problema. Para detalhes sobre a versão com restrições de carregamento tridimensionais, pode-se recorrer aos trabalhos de [Iori e Martello \(2010\)](#), [Iori e Martello \(2013\)](#) e [Pollaris et al. \(2015\)](#).

### 2.2.1 2L-CVRP Irrestrito e Sequencial

O 2L-CVRP foi introduzido na tese de doutorado de [Iori \(2004\)](#), com a publicação dos resultados no artigo [Iori, Salazar-González e Vigo \(2007\)](#). O autor apresentou um modelo de programação linear inteira adaptado do CVRP para resolver a versão em que o empacotamento no veículo deve respeitar a ordem dos clientes visitados na rota (sequencial). Os autores propuseram uma abordagem exata do tipo B&C, que utiliza rotinas de separação para encontrar desigualdades violadas durante a otimização. Para checar a viabilidade do empacotamento sequencial, os autores usaram um algoritmo do tipo *Branch-and-Bound* (B&B) denominado de *Check-2L*. Para os experimentos computacionais, adaptou-se de [Reinelt \(1991\)](#) e [Toth e Vigo \(2001\)](#) instâncias do CVRP, totalizando 60 exemplos com até 35 clientes e 114 itens.

Considerando o fato da abordagem exata pioneira para o 2L-CVRP resolver instâncias com um número pequeno de clientes e itens, heurísticas foram propostas para que instâncias reais pudessem ser solucionadas em tempo hábil. [Gendreau et al. \(2008\)](#) propuseram uma meta-heurística em Busca Tabu para lidar com as versões sequencial e irrestrita do problema. Durante a busca da solução, operações de troca de clientes de uma dada rota para outra rota são realizadas. Para soluções inviáveis, adiciona-se uma penalidade na função objetivo. Foram consideradas novas instâncias, também adaptadas, de [Toth e Vigo \(2001\)](#), com até 255 clientes e 786 itens, em que o método proposto conseguiu retornar solução viável para todos os casos. Estas instâncias juntamente com as de [Iori, Salazar-González e Vigo \(2007\)](#) vem sendo consideradas um *benchmark* padrão para o 2L-CVRP.

[Fuellerer et al. \(2009\)](#) desenvolveram técnicas para encontrar carregamentos viáveis a partir do cálculo de limitantes inferiores, uso de heurísticas e de um algoritmo do tipo B&B limitado, todos usados dentro de um algoritmo de Colônia de Formigas para a resolução do 2L-CVRP. Os autores foram os primeiros a abordar o carregamento com rotações ortogonais, ou seja, os itens podem ser rotacionados em 90 graus. A heurística proposta superou os resultados da literatura, em média, de 2,56% para a versão sequencial e de 3,20% para a versão irrestrita.

[Zachariadis, Kiranoudis e Tarantilis \(2009\)](#) apresentaram uma heurística de Busca Tabu Guiada, na qual a função objetivo é modificada para ajudar na diversificação da solução e, assim, cobrir diferentes áreas do espaço de busca. Para otimizar a exploração do espaço de busca, os autores desenvolveram uma estrutura para salvar as informações obtidas a partir da viabilidade de carregamento de rotas já avaliadas. A heurística conseguiu

Tabela 2.1 – Trabalhos encontrados na literatura sobre o 2L-CVRP e suas variantes.

<b>Tipo</b>	<b>Autor(es)</b>	<b>Problema</b>	<b>Versão do Carregamento</b>	<b>Número de Rotas</b>	<b>Rota Única</b>	<b>Custo</b>	<b>Método de Resolução</b>
Exatos	Iori, Salazar-González e Vigo (2007)	2L-CVRP	Sequencial	= K	Não	Inteiro	B&C
	Azevedo (2009)	2L-CVRP	Sequencial e Irrestrita	= K	Não	Inteiro	B&C
	Souza (2013)	2L-CVRP	Sequencial e Irrestrita	≤ K	Sim	Real	B&C
	Hokama, Miyazawa e Xavier (2016)	2L-CVRP	Sequencial	= K	Não	Inteiro	B&C
	Côté, Guastarofa e Speranza (2017)	2L-CVRP	Sequencial	≤ K	Sim	Inteiro	B&C
	Gendreau <i>et al.</i> (2008)	2L-CVRP	Sequencial	= K	Não	Inteiro	Busca tabu
	Fuellerer <i>et al.</i> (2009)	2L-CVRP	Sequencial e Irrestrita	≤ K	Sim	Real	Colônia de formigas
	Zachariadis, Kiranoudis e Taranitis (2009)	2L-CVRP	Sequencial e Irrestrita	≤ K	Sim	Real	Busca tabu guiada
	Strodl <i>et al.</i> (2010)	2L-CVRP	Irrestrita	≤ K	Sim	Real	Busca em vizinhança variável
	Leung <i>et al.</i> (2010)	2L-CVRP	Sequencial e Irrestrita	≤ K	Sim	Real	Recozimento simulado
Heurísticas	Duhannal <i>et al.</i> (2011)	2L-CVRP	Irrestrita	≤ K	Sim	Real	GRASP
	Leung <i>et al.</i> (2011)	2L-CVRP	Sequencial e Irrestrita	≤ K	Sim	Real	Busca tabu guiada estendida
	Shen e Murata (2012)	2L-CVRP	Sequencial	≤ K	-	Real	Algoritmo genético
	Bin, Hong e Zhi-yong (2013)	2L-CVRP	Sequencial e Irrestrita	≤ K	Sim	Real	Colônia artificial de abelhas
	Souza (2013)	2L-CVRP	Sequencial e Irrestrita	= K	Não	Inteiro	Geração de colunas
	Zachariadis, Taranitis e Kiranoudis (2013)	2L-CVRP	Sequencial e Irrestrita	≤ K	Sim	Real	Busca local
	Abdal-Hammed, Hifn e Wu (2014)	2L-CVRP	Irrestrita	≤ K	Sim	Real	Busca em vizinhança larga
	Dominguez, Juan e Faulin (2014)	2L-CVRP	Irrestrita	≤ K	Sim	Real	MS-BR
	Wei <i>et al.</i> (2015)	2L-CVRP	Sequencial e Irrestrita	≤ K	Sim	Real	Busca em vizinhança variável
	Malapert <i>et al.</i> (2008)	2L-PDP	Sequencial e Irrestrita	-	-	-	Programação por restrições
Variantes	Muñoz (2011)	2L-CVRP-H	Sequencial e Irrestrita	= K	Sim	Real	Programação inteira mista
	Hamdi-Dhaoui, Labadie e Yalaoui (2012)	2LPC-CVRP	Sequencial	≤ K	-	Real	NSGA-II
	Côté, Potvin e Gendreau (2013)	S2L-CVRP	Sequencial	= K	Não	Inteiro	B&C
	Khebbache-Hadji <i>et al.</i> (2013)	2L-CVRP-TW	Irrestrita	≤ K	Não	Real	Algoritmo memético
	Leung <i>et al.</i> (2013)	2L-HFVRP	Sequencial e Irrestrita	≤ K	-	Real	Recozimento simulado e Busca Local
	Martinez e Amaya (2013)	VRPM-TW-CL	Irrestrita	= K	Não	Real	Busca tabu
	Dominguez <i>et al.</i> (2016)	2L-HFVRP	Irrestrita	≤ K	Sim	Real	MS-BR
	Dominguez <i>et al.</i> (2016)	2L-HFVRP-SR	Sequencial	≤ K	-	Real	Busca local iterada
	Zachariadis, Taranitis e Kiranoudis (2016)	2L-SPD	Sequencial e Irrestrita	≤ K	-	Real	Busca local

Fonte: o autor.

resolver o caso sequencial e o caso irrestrito do 2L-CVRP, de forma que os resultados computacionais superaram a maioria dos resultados anteriores da literatura, obtendo melhores valores de soluções para 1,84% dos casos na versão irrestrita do problema e para 1,62% dos casos na versão sequencial.

Azevedo (2009) propôs uma abordagem exata para o 2L-CVRP para lidar com as versões sequencial e irrestrita. Usando um algoritmo do tipo B&C, o autor desenvolve novas restrições para as rotas e distintos procedimentos para a detecção de desigualdades violadas. Para lidar com o empacotamento, o autor usou um algoritmo exato com a combinação de procedimentos heurísticos. Comparando os resultados do caso sequencial com os de Iori, Salazar-González e Vigo (2007), o autor encontrou a solução ótima para outras nove instâncias e conseguiu reduzir o tempo de resolução de várias instâncias. Vale comentar que o autor também resolveu o caso irrestrito com o algoritmo proposto, o que trouxe uma redução no custo das rotas de 0,61%, em média. Parte desses resultados foram publicados em Azevedo *et al.* (2009).

Strodl *et al.* (2010) apresentaram uma heurística de Busca em Vizinhança Variável com um procedimento exato para lidar com o empacotamento, enquanto a heurística lida apenas com o roteamento, para o 2L-CVRP irrestrito. No melhor desempenho da heurística, conseguiu-se melhorar as soluções para 79 instâncias, piorar para 58 e reportar a mesma solução para 43 das instâncias testadas.

Leung *et al.* (2010) apresentaram um algoritmo de Recozimento Simulado para resolver as versões sequencial e irrestrita do 2L-CVRP. Os autores utilizaram o conjunto de heurísticas proposto por Zachariadis, Kiranoudis e Tarantilis (2009) para checar a viabilidade do empacotamento, além de terem desenvolvido uma heurística para calcular a melhor posição para arranjar um item. Para melhorar o tempo da heurística, os autores desenvolveram uma estrutura para salvar rotas viáveis e inviáveis. Os resultados obtidos apresentaram melhoria em relação aos de Gendreau *et al.* (2008) e Zachariadis, Kiranoudis e Tarantilis (2009), e apenas na versão sequencial ao comparar com Fuellerer *et al.* (2009).

Duhamel *et al.* (2011) apresentaram uma combinação de GRASP com uma Busca Local Evolucionária para a versão irrestrita do 2L-CVRP. O método se divide em duas etapas: primeiro relaxa as restrições de empacotamento em restrições do Problema de Escalonamento de Projetos com Restrição de Recursos (*Resource Constrained Project Scheduling Problem* - RCPSP). A heurística se mostrou muito eficiente, uma vez que permitiu reduzir o valor da solução e superar o tempo computacional comparado a todos os trabalhos anteriores da literatura.

Leung *et al.* (2011) propuseram uma heurística do tipo Busca Tabu Guiada Estendida para resolver o 2L-CVRP sequencial e irrestrito, baseando no método de Zachariadis, Kiranoudis e Tarantilis (2009). Em linhas gerais, ordena-se de forma decrescente os clientes considerando a área total dos itens para construir as rotas. Assim, os clientes são dispostos

com o intuito de otimizar a área usada do recipiente e em pontos da rota que geram o menor custo de transporte, tal que se algum cliente for atribuído a uma rota, faz-se a troca com um cliente já alocado em alguma outra rota. Os resultados computacionais foram superiores aos de [Zachariadis, Kiranoudis e Tarantilis \(2009\)](#).

[Shen e Murata \(2012\)](#) resolveram o 2L-CVRP por meio de um algoritmo genético com a heurística *Bottom-Left* para o empacotamento. Os autores trataram a versão que considera o veículo saindo vazio do depósito e, então, realizando a coleta dos itens nos clientes para retornar carregado para o depósito. Os autores conseguiram resolver instâncias com até 100 clientes e 273 itens, porém, não realizaram comparação com outros trabalhos da literatura.

Em [Bin, Hong e Zhi-yong \(2013\)](#), o 2L-CVRP foi resolvido por um algoritmo de Colônia Artificial de Abelhas combinado com três heurísticas para realizar o carregamento bidimensional. O algoritmo proposto usa métodos de decodificação com checagem da viabilidade para garantir soluções de qualidade, busca local sobre o roteamento e algoritmos de empacotamento do tipo *Bottom-Left Fill*, *Lowest Reference Line Best-Fit Heuristic* e *Maximum Touching Perimeter*. Além de resolverem a versão sequencial e irrestrita, consideraram também que os itens podem ser rotacionados de 90 graus. Testes computacionais foram realizados em instâncias da literatura com até 100 clientes e 310 itens, obtendo melhorias em relação a [Gendreau et al. \(2008\)](#), [Zachariadis, Kiranoudis e Tarantilis \(2009\)](#) e [Leung et al. \(2011\)](#).

[Souza \(2013\)](#) abordou o 2L-CVRP considerando a versão sequencial e também a irrestrita. Ele abordou duas situações diferentes para o problema: (i) custo das arestas como inteiro, número de rotas igual ao de veículos disponíveis e não permitindo rota com apenas um cliente; (ii) custo das arestas como real, número de rotas menor ou igual do de veículos disponíveis e permitido rota com apenas um cliente. O autor resolveu o problema usando duas heurísticas híbridas baseadas em Geração de Colunas. Após a resolução com as heurísticas, as variáveis são convertidas para valores inteiros resolvendo o RLMP (*Restricted Linear Master Problem*) e depois executando um B&B. Além disso, o autor desenvolveu um algoritmo B&C baseado em [Iori, Salazar-González e Vigo \(2007\)](#) para resolver o caso (ii), em que foi possível resolver 84 instâncias na otimalidade, sendo 14 da classe 1 (todos os itens dos clientes com dimensões igual a 1) e 35 instâncias para cada versão do problema.

[Zachariadis, Tarantilis e Kiranoudis \(2013\)](#) desenvolveram um método de Busca Local para resolver o roteamento e outra heurística para resolver o empacotamento, ao lidar com o 2L-CVRP sequencial e irrestrito. Também foi proposto um mecanismo de memória para melhorar a probabilidade de ser obter rotas com carregamentos viáveis. O algoritmo foi validado a partir de experimentos em instâncias da literatura, sendo possível melhorar o resultado de algumas delas.

[Abdal-Hammed, Hifi e Wu \(2014\)](#) resolveram a versão irrestrita do 2L-CVRP usando uma heurística de Busca em Vizinhança Larga. A heurística considera uma ordem de inserção de clientes e utiliza a *Bottom Left* para lidar com o empacotamento. Ela foi testada

com as instâncias de [Gendreau et al. \(2008\)](#), para as quais conseguiu uma melhora de 20% comparado aos resultados de [Duhamel et al. \(2011\)](#).

[Dominguez, Juan e Faulin \(2014\)](#) propuseram para resolver o 2L-CVRP irrestrito em que se pode rotacionar os itens de 90 graus, o chamado *Multistart Biased-Randomized Algorithm* (MS-BR). Em linhas gerais, a heurística usa a ideia de *multistart* para fugir de mínimos locais e a randomização durante a construção das soluções. Os resultados computacionais foram obtidos pela resolução de instâncias da literatura, conseguindo um desempenho pouco melhor do que trabalhos anteriores.

Uma heurística de Busca em Vizinhança Variável foi proposta por [Wei et al. \(2015\)](#) para resolver o 2L-CVRP nas versões irrestrita e sequencial. O empacotamento é resolvido por meio de uma heurística *skyline* com várias regras de posicionamento para os itens. Além disso, empacotamentos viáveis são guardados em uma estrutura chamada *Trie* de forma a acelerar a resolução. A heurística conseguiu melhorar o valor de 65 instâncias para a versão irrestrita e de 88 instâncias para a sequencial, das 180 instâncias da literatura consideradas.

[Hokama, Miyazawa e Xavier \(2016\)](#) apresentaram um algoritmo B&C para resolver o 2L-CVRP sequencial, em que foram usadas rotinas de separação da literatura para lidar com o roteamento e propuseram algoritmos para lidar com o empacotamento sobre uma malha de pontos. Em comparação com a literatura, os autores conseguiram resultados melhores para 8,70% das instâncias.

[Côté, Guastarofa e Speranza \(2017\)](#) discutiram a respeito da integração do CVRP com 2BPP e apresentaram um modelo de programação linear inteira para o 2L-CVRP, além de algoritmos para resolver o problema de empacotamento, uma vez que um dos gargalos apontados está na checagem da rota quanto a viabilidade de empacotamento. Os autores compararam a resolução sequencial de cada um dos problemas, a fim de obter a solução final para o problema integrado, com a solução direta do problema integrado, concluindo que os ganhos são significativos, em torno de 7%, quando se trata o problema integrado diretamente.

### 2.2.2 Outras Variantes do 2L-CVRP

[Malapert et al. \(2008\)](#) apresentaram um modelo de programação por restrições para o 2L-CVRP que considera a restrição de coleta e entrega associada ao carregamento bidimensional (*Two-Dimensional Pickup and Delivery Routing Problem with Loading Constraints - 2L-PDP*). A restrição de coleta e entrega impõe que os itens primeiro precisam ser recolhidos em clientes para depois serem entregues aos destinatários. O modelo busca identificar carregamentos inviáveis para fugir de regiões do espaço de busca não promissoras, porém os testes computacionais com o modelo não foram satisfatórios.

[Muñoz \(2011\)](#) lidou com uma variante do 2L-CVRP que considera o custo de movimentação da carga (*Capacitated Vehicle Routing Problem with Two-dimensional Loading*

*Constraints and Handling Costs* - 2L-CVRP-H). Além do objetivo de minimizar o custo de transporte, há também o objetivo de minimizar o custo associado a manipulação dos itens no local da entrega. A resolução do problema ocorreu por meio de uma heurística com três etapas: rotear, empacotar e otimizar. O algoritmo foi testado em dois conjuntos de instâncias, sendo a primeira gerada de forma aleatória com até 6 clientes e 10 itens e a segunda com instâncias da literatura, em que a heurística conseguiu resolver exemplos com até 20 clientes e 60 itens.

Hamdi-Dhaoui, Labadie e Yalaoui (2012) abordaram o 2L-CVRP com a restrição adicional de conflitos parciais (*Two-Dimensional Loading Capacitated Vehicle Routing Problem with Partial Conflicts* – 2LPC-CVRP). Esse problema considera, além da minimização do custo de transporte, o equilíbrio da carga com relação a distância que certos itens devem ter um dos outros. Os autores usaram um algoritmo genético com elitismo e ordenação não-dominada (*Nondominated Sorting Genetic Algorithm II* - NSGA-II) combinado com uma adaptação da heurística *Bottom-Left Fill* para o empacotamento. Eles resolveram a versão sequencial do 2LPC-CVRP com testes realizados em instâncias adaptadas da literatura. Como foi o primeiro artigo a lidar com tal restrição de conflito, os autores não fizeram comparações com outros trabalhos.

Côté, Potvin e Gendreau (2013) consideraram o 2L-CVRP com demanda estocástica associada aos itens dos clientes (*Vehicle Routing with Stochastic Two-Dimensional Items* - S2L-CVRP). Nessa versão, os pesos e as dimensões de alguns dos itens são conhecidos no momento do carregamento do veículo. Os autores fizeram uma distribuição probabilística discreta para os itens e caso algum item não possa ser empacotado, ele é deixado no depósito e uma penalidade é considerada na função objetivo. Os autores propuseram um modelo pelo qual se busca minimizar os custos relacionados ao transporte e também das penalidades associadas aos itens não carregados. A resolução do modelo foi feita por um algoritmo do tipo B&C considerando a versão sequencial do problema, em que testes sobre instâncias da literatura mostraram sua eficácia para instâncias com até 71 clientes e 226 itens. Em seguida, as instâncias foram adaptadas para lidar com a versão estocástica para a qual conseguiram resolver instâncias com até 44 clientes.

Khebbache-Hadji *et al.* (2013) resolveram o 2L-CVRP irrestrito com janela de tempo (*Two-Dimensional Loading Capacitated Vehicle Routing Problem with Time Windows* – 2L-CVRPTW) . Os autores fizeram a combinação de seis heurísticas para solucionar um modelo que propuseram, que é de programação não linear inteira. Duas heurísticas seguem trabalhos da literatura sobre o CVRP com janela de tempo, três heurísticas, também obtidas da literatura, são usadas para o empacotamento, além disso essas cinco heurísticas são integradas em um algoritmo memético para resolver o problema por completo. Os experimentos ocorrem em 144 instâncias adaptadas de Gendreau *et al.* (2008), com até 255 clientes e 786 itens. O algoritmo memético obteve resultados melhores se comparado a outras heurísticas

da literatura, porém, consumiu um maior tempo computacional.

Leung *et al.* (2013) resolveram uma nova versão do 2L-CVRP sequencial e irrestrito que considera uma frota heterogênea de veículos (*Two-Dimensional Loading Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem - 2L-HFVRP*). Neste caso, os veículos possuem capacidade diferentes, custos operacionais fixos e variáveis, além de dimensões diferentes. Os autores desenvolveram uma heurística que combina o Recozimento Simulado com Busca Local, em que o empacotamento é resolvido pelas heurísticas de Zachariadis, Kiranoudis e Tarantilis (2009) e Leung *et al.* (2010). Os resultados foram comparados com Zachariadis, Kiranoudis e Tarantilis (2009), Fuellerer *et al.* (2009) e Duhamel *et al.* (2011), conseguindo melhor desempenho, em média, apenas se comparado com o trabalho de Zachariadis, Kiranoudis e Tarantilis (2009).

Martinez e Amaya (2013) abordaram a versão do 2L-CVRP com janela de tempo, múltiplas viagens e carregamento de itens circulares (*Vehicle Routing Problem with Multi-Trips, Time Windows and Two-Dimensional Circular Loading Constraints – VRPM-TW-CL*). O problema surgiu a partir de um estudo de caso em uma empresa de entrega de alimentos com embalagens circulares. Como o objetivo foi resolver um caso real, os autores propuseram uma heurística de inserção sequencial com Busca Tabu, porém também apresentaram um modelo de programação linear inteira para o problema. Os testes computacionais foram realizados com 19 instâncias reais, tendo de 6 a 17 clientes, conseguindo obter solução ótima para 15 delas usando a heurística. Além disso, testes com instâncias da literatura foram realizados, sendo obtida a solução de instâncias com até 30 clientes em dois minutos de processamento.

Dominguez *et al.* (2016) resolveram o 2L-HFVRP considerando que os itens podem ser rotacionados. Os autores utilizaram o mesmo algoritmo apresentado em Dominguez, Juan e Faulin (2014), sendo os resultados comparados com Leung *et al.* (2013), em que se teve uma melhora, em média, de 4,17% por permitir a rotação dos itens em 90 graus.

Dominguez *et al.* (2016) abordaram a versão do 2L-CVRP com frota heterogênea, carregamento sequencial e rotação dos itens (*Two-dimensional Loading Vehicle Routing Problem with Heterogeneous Fleet, Sequential Loading, and Item Rotation - 2L-HFVRP-SR*), sendo o primeiro trabalho a considerar todas essas restrições de uma só vez. Os autores propuseram um algoritmo de busca local iterada que foi validado por meio de testes computacionais em instâncias da literatura. Os resultados foram comparados com Leung *et al.* (2013), mostrando uma melhora média de 3,01%.

Zachariadis, Tarantilis e Kiranoudis (2016) resolveram o *Vehicle Routing Problem with Simultaneous Pick-ups and Deliveries and Two-Dimensional Loading Constraints* (2L-SPD), uma variante do 2L-CVRP que faz a coleta e entrega simultâneas de itens retangulares para os clientes. Os autores utilizaram o método de busca local para otimizar o roteamento e uma heurística para o empacotamento. Experimentos computacionais foram realizados em

instâncias adaptadas do Gendreau *et al.* (2008) para tratar o problema. Eles compararam a influência do carregamento sequencial na solução, concluindo que, quando se adiciona essa restrição, o esforço computacional aumenta consideravelmente.

### 2.2.3 Considerações

Observando os trabalhos da literatura, nota-se que as versões mais consideradas são a sequencial e a irrestrita. Além disso, a maioria dos trabalhos (82% deles) fizeram uso de heurísticas, sendo poucas as contribuições relacionadas ao emprego de métodos exatos (6 dos 28 trabalhos apresentados). Observa-se também que o problema possui algumas variantes quanto ao roteamento (frota heterogênea, janela de tempo, múltiplas viagens, entre outros) e em relação ao empacotamento (itens circulares, demanda estocástica e rotação ortogonal dos itens).

Vale destacar que na literatura não foi possível encontrar uma comparação entre modelos para o 2L-CVRP, apontando as vantagens e dificuldades de um modelo em detrimento a outro, sendo este um dos objetivos pretendidos neste trabalho. Neste caso, dependendo da dificuldade em implementar o modelo (e as rotinas de plano de corte), torna-se mais interessante usar um modelo completo com todas as restrições.

## 2.3 Modelos de Programação Linear Inteira

Esta seção apresenta conceitos básicos sobre modelos de programação linear inteira e o esquema de funcionamento do algoritmo *Branch-and-Bound* (B&B), seguido pelo de planos de corte, com o intuito de apresentar uma discussão sobre o B&C, que é o algoritmo que foi empregado na literatura para resolver modelos de programação linear inteira e também vai ser utilizado neste trabalho.

### 2.3.1 Modelo Básico

Na programação linear inteira, busca-se construir um modelo que relaciona de forma linear as  $n$  variáveis de decisão do vetor  $x$  na função objetivo, a ser otimizada (maximizar ou minimizar), e nas restrições, a serem satisfeitas. De forma geral, um modelo possui a forma dada nas eqs. (2.1) a (2.3), sendo a função objetivo retratada na eq. (2.1), em que  $c$  é o vetor com os coeficientes que acompanham as variáveis de decisão, podendo representar, por exemplo, lucro ou custo. A eq. (2.2) representa o conjunto de restrições do problema, em que a matriz  $A$  contém os coeficientes que acompanham cada restrição e o vetor  $b$  contém o termo independente. O sinal em uma dada restrição pode ser de “ $\leq$ ”, “ $\geq$ ” ou “ $=$ ”, tal que uma restrição nada mais é do que uma inequação ou equação que relaciona as variáveis de forma linear. O domínio das variáveis está expresso na eq. (2.3) indicando, neste caso, que cada variável pode receber apenas valores inteiros.

Otimizar

$$z = cx \quad (2.1)$$

Sujeito a:

$$Ax \leq b \quad (2.2)$$

$$x \in \mathbb{Z}^n \quad (2.3)$$

### 2.3.2 *Branch-and-Bound*

O algoritmo B&B foi desenvolvido e utilizado pela primeira vez por [Land e Doig \(1960\)](#) para a resolução de problemas de programação linear inteira. O termo *branch* (ramificar), refere-se às partições que o método realiza no espaço das soluções, já o termo *bound* (podar) está relacionado ao descarte de soluções a partir dos limitantes que vão sendo encontrados durante a busca sendo realizada.

O método B&B, em resumo, faz uso de programação linear e adiciona restrições para podar soluções não inteiras, reduzindo o espaço de busca. A relaxação de um problema é resolvida encontrando soluções possivelmente não inteiras. Assim, adicionam-se restrições para ir encontrando soluções inteiras e analisar implicitamente todas as possibilidades de solução. Em outras palavras, ocorre uma enumeração, representada em forma de uma árvore, pela qual cada nó corresponde a um problema de programação linear. O problema inicial localiza-se no nó raiz e os demais são os seus nós descendentes, que surgem a partir da inclusão de restrições para eliminar soluções fracionárias.

A eficiência do método está ligada aos limitantes gerados em cada nó descendente, já que o problema original é dividido em subproblemas menores. Logo, o desenvolvimento da árvore possui direta influência no tempo necessário para a resolução do problema inicial. Assim, estratégias devem ser usadas para melhorar o desempenho do algoritmo B&B, como fornecer bons limitantes e restrições válidas. Mais detalhes sobre este método podem ser obtidas em [Arenales et al. \(2007\)](#).

### 2.3.3 Planos de Corte

O método de planos de corte busca inserir desigualdades válidas até que se encontre uma solução inteira para o modelo. Obter um plano de corte corresponde à detectar uma ou mais desigualdades em restrições do problema linear inteiro, de forma que essas desigualdades não são válidas para o problema original e, assim, precisam ser inseridas no modelo durante a sua resolução. Com isso, diminui-se a região de factibilidade do problema linear inteiro sem, no entanto, haver a perda de um ponto extremo correspondente a uma solução ótima inteira ([NEMHAUSER; WOLSEY, 1988](#)).

O algoritmo inicia com a obtenção da relaxação do problema inicial de programação linear inteira e encontrando uma solução para a relaxação. Se essa solução for inteira, então ela já é uma solução ótima para o problema e o método finaliza. Caso contrário, são aplicadas procedimentos/rotinas para detectar desigualdades (de restrições) que violam as características do problema original. Essas desigualdades são adicionadas à relaxação para que, em uma nova resolução da relaxação, as soluções inválidas (fracionárias por exemplo) sejam eliminadas e, assim, o método caminhe em direção a uma solução ótima inteira nas próximas iterações.

### 2.3.4 Branch-and-Cut

O algoritmo B&C foi introduzido por [Padberg e Rinaldi \(1987\)](#) para resolver o Problema do Caixeiro Viajante (*Traveling Salesman Problem*). Em linhas gerais, este método consiste em combinar o B&B com planos de corte, com o objetivo de reduzir o número de nós da árvore B&B ([WOLSEY, 1998](#)).

Em cada nó da árvore B&B são adicionados cortes válidos (planos de corte) para obter um bom limitante para o nó. Ou seja, faz-se a inclusão de restrições em cada nó cuja relaxação linear é factível. Por esses motivos, pacotes de otimização utilizam o B&C para resolver problemas de programação linear inteira, como é o caso do pacote *Gurobi Optimizer*, que vai ser utilizado neste trabalho.

## 2.4 Pontos de Discretização de [Herz \(1972\)](#)

No empacotamento, a base do veículo pode ser discretizada em uma malha de pontos com distância unitária, pois os itens possuem dimensões inteiras. Porém, com essa distância, tem-se um número considerável de variáveis associadas às posições no empacotamento.

[Herz \(1972\)](#) propôs o conceito de *canonical dissections* para cortes bidimensionais, assim tornando a resolução mais eficiente e sem perda de generalidade. Os conjuntos em (2.4) a (2.5) correspondem às coordenadas dos pontos de [Herz \(1972\)](#) ao longo do eixo  $x$  (largura) e do eixo  $y$  (comprimento), respectivamente:

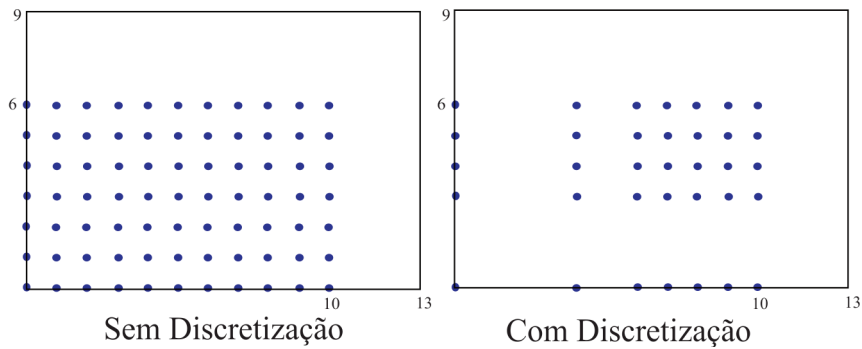
$$P_H = \{p \in \mathbb{Z} \mid p = \sum_{j \in V \setminus \{0\}} \sum_{m \in M_j} \rho_j^m l_j^m, 0 \leq p \leq L, \rho_j^m \in \{0, 1\}, j \in V \setminus \{0\}, m \in M_j\} \quad (2.4)$$

$$Q_H = \{q \in \mathbb{Z} \mid q = \sum_{j \in V \setminus \{0\}} \sum_{m \in M_j} \rho_j^m a_j^m, 0 \leq q \leq A, \rho_j^m \in \{0, 1\}, j \in V \setminus \{0\}, m \in M_j\} \quad (2.5)$$

A partir dos conjuntos em (2.4) a (2.5), obtêm-se os respectivos conjuntos  $P_j^m$  e  $Q_j^m$  de coordenadas válidas para cada item  $m$  do cliente  $j$ . Note que as coordenadas após  $L - l_j^m$  e  $A - a_j^m$  não são válidas para empacotar um item  $m$  de qualquer cliente  $j$ .

A Figura 2.2 representa uma malha de pontos com distância unitária e a outra com a discretização por Herz (1972). Observa-se que no exemplo dado, no caso da malha a esquerda, tem-se 77 possíveis pontos para se empacotar os itens, já na malha da direita, tem-se 35 pontos, o que caracteriza uma redução de aproximadamente 45% na malha e sem ocasionar a perda da solução ótima.

Figura 2.2 – Exemplo de malha de pontos sem e com a discretização por Herz (1972).



Fonte: o autor.



## Capítulo 3

# Modelos para o 2L-CVRP

Este capítulo apresenta três modelos de programação linear inteira desenvolvidos para resolver o 2L-CVRP irrestrito. O primeiro modelo utiliza variáveis com três índices para as decisões de roteamento e com cinco índices para as decisões de empacotamento, tratando-se de um modelo que contempla todas as restrições do problema em seu formato inicial. O segundo modelo consiste em uma formulação de três índices, enquanto o terceiro traz uma formulação mais compacta, que usa apenas variáveis de dois índices. Nestes dois últimos modelos, desigualdades violadas com relação à rotas inviáveis para o empacotamento e/ou capacidade e conectividade das rotas são detectadas por rotinas de separação (ou planos de corte) e adicionadas sempre que necessário. A Tabela 3.1 traz os parâmetros e conjuntos utilizados nos modelos.

Tabela 3.1 – Resumo dos parâmetros utilizados nos modelos.

Parâmetros	Descrição
$V$	Conjunto de vértices 0(depósito), $1, 2, \dots, n$ (clientes).
$V^+$	Conjunto de vértices 0(depósito), $1, 2, \dots, n$ (clientes), $n + 1$ (depósito).
$E$	Conjunto de arestas entre os vértices $V$ , isto é, $\{(i, j) : i, j \in V, i \neq j\}$ .
$E^+$	Conjunto de arestas entre os vértices em $V^+$ , isto é, $\{(i, j) : i, j \in V^+, i \neq j\}$ .
$K$	Conjunto de veículos idênticos.
$P$	Capacidade de carga do veículo.
$L, A, At$	Largura, comprimento e área total, respectivamente, da base retangular de cada veículo.
$M_j$	Conjunto com os itens retangulares de cada cliente $j$ .
$l_j^m, a_j^m, p_j^m$	Largura, comprimento e área total, respectivamente, do item $m$ do cliente $j$ .
$at_j, pt_j$	Área e peso totais, respectivamente, dado todos os itens do cliente $j$ .

### 3.1 Modelo Completo

O modelo completo é uma melhoria, em relação ao tamanho, do modelo de [Junqueira et al. \(2013\)](#). Os autores apresentaram um modelo para a versão tridimensional do problema em estudo, o qual possui variáveis de decisão de 4 índices para lidar com o roteamento e de sete índices para a parte relacionada ao empacotamento. O modelo aqui desenvolvido

considera variáveis de até três índices para as questões de roteamento e de cinco índices para concretizar o empacotamento dos itens nos veículos.

Seja  $w_{ijk}$  a variável binária que recebe valor 1 se a aresta  $(i, j)$ , com  $i, j \in V^+$  e  $i \neq j$ , for atravessada pelo o veículo  $k \in K$ , caso contrário recebe 0. A variável  $u_j$  indica a quantidade de carga acumulada, em peso, até visitar o cliente  $j$  na rota. Têm-se as variáveis  $a_{jkmprq}$ , que são binárias e recebem o valor 1 se o item  $m$ , do cliente  $j$  é levado pelo veículo  $k$ , é empacotado com seu canto inferior esquerdo no ponto de coordenadas  $p \in P_j^m$  e  $q \in Q_j^m$  da malha de pontos associada a base do veículo, e 0 caso contrário. A formulação completa do modelo é dada na função objetivo (3.1) com as restrições (3.2) a (3.19). As restrições de (3.2) a (3.13) estão relacionadas ao roteamento, ao passo que as restrições (3.14) a (3.16) garantem o empacotamento dos itens dos clientes nos respectivos veículos que atendem as rotas.

Minimizar

$$\sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E^+} c_{ij} w_{ijk} \quad (3.1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{\{j \in V^+ : j \neq i\}} w_{ijk} = 1, \quad \forall i \in V \setminus \{0\}, \forall k \in K \quad (3.2)$$

$$\sum_{\{i \in V^+ : i \neq h\}} w_{ihk} = \sum_{\{j \in V^+ : j \neq h\}} w_{hjk}, \quad \forall h \in V \setminus \{0\}, \forall k \in K \quad (3.3)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{0\}} w_{0jk} \leq 1, \quad \forall k \in K \quad (3.4)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{0\}} w_{i(n+1)k} = \sum_{j \in V \setminus \{0\}} w_{0jk}, \quad \forall k \in K \quad (3.5)$$

$$\sum_{k \in K} (w_{ijk} + w_{jik}) \leq 1, \quad \forall (i, j) \in E^+ \quad (3.6)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{0\}} (w_{0jk} + w_{(n+1)jk}) \leq 1, \quad \forall k \in K \quad (3.7)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{0\}} (w_{i0k} + w_{i(n+1)k}) \leq 1, \quad \forall k \in K \quad (3.8)$$

$$u_i - u_j + P w_{ijk} + (P - pt_i - pt_j) w_{jik} \leq P - pt_j, \quad \forall i, j \in V \setminus \{0\}, \forall k \in K \quad (3.9)$$

$$u_j \leq pt_j w_{0jk} + P(1 - w_{0jk}), \quad \forall j \in V \setminus \{0\}, \forall k \in K \quad (3.10)$$

$$u_i + \sum_{\{j \in V \setminus \{0\} : j \neq i\}} pt_j w_{ijk} \leq P, \quad \forall i \in V \setminus \{0\}, \forall k \in K \quad (3.11)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{0\}} \sum_{j \in V^+} w_{ijk} p t_i \leq P, \quad \forall k \in K \quad (3.12)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{0\}} \sum_{j \in V^+} w_{ijk} a t_i \leq A t, \quad \forall k \in K \quad (3.13)$$

$$\sum_{p \in P_j^m} \sum_{q \in Q_j^m} a_{jkmpq} = \sum_{\{i \in V^+ : j \neq i\}} w_{ijk}, \quad \forall j \in V \setminus \{0\}, \forall m \in M_j, \forall k \in K \quad (3.14)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{0\}} \sum_{m \in M_j} \sum_{\{p \in P_j^m : s - l_j^m + 1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in Q_j^m : t - a_j^m + 1 \leq q \leq t\}} a_{jkmpq} \leq 1, \quad (3.15)$$

$$\forall s \in P_H, \forall t \in Q_H, \forall k \in K$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in P_j^m} \sum_{q \in Q_j^m} a_{jkmpq} = 1, \quad \forall j \in V \setminus \{0\}, \forall m \in M_j \quad (3.16)$$

$$w_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in E^+, \forall k \in K \quad (3.17)$$

$$p t_j \leq u_j \leq P, \quad \forall j \in V \setminus \{0\} \quad (3.18)$$

$$a_{jkmpq} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in V \setminus \{0\}, \forall m \in M_j, \forall p \in P_j^m, \forall q \in Q_j^m, \forall k \in K \quad (3.19)$$

A função objetivo (3.1) minimiza o custo total de transporte associado as rotas usadas. As restrições (3.2) garantem que o cliente  $i$  é atendido pelo veículo  $k$  se, e somente se, existe uma aresta saindo de  $i$  para o cliente  $j$  usando o veículo  $k$ . As restrições de (3.3) a (3.5) estão relacionadas a conservação de fluxo para cada rota de forma que o número de arestas que chegam em um cliente  $h$  é igual ao número de arestas que partem de  $h$ , além disso permitem a utilização de um número menor ou igual ao de veículos disponíveis. As restrições (3.6) impõem que no máximo um veículo vai atravessar a aresta de  $i$  para  $j$  ou a aresta de  $j$  para  $i$ , mas não ambas. Já as restrições em (3.7) e (3.8) garantem que cada veículo  $k$  só pode executar apenas uma rota partindo do depósito, visitando um ou mais clientes, e retornando ao depósito.

As restrições em (3.9) a (3.11) servem para eliminar sub-rotas e foram obtidas de Kara (2010). Estas restrições consistem em melhorias sobre as restrições originais propostas por Miller, Tucker e Zemlin (1960) e representam a carga acumulada, em peso, para visitar os clientes nas rotas. Em outras palavras, as restrições (3.9) impõem que ao sair do cliente  $i$  diretamente para o cliente  $j$ , isto é,  $w_{ijk} = 1$ , o peso carregado até visitar o cliente  $i$ , que está armazenado em  $u_i$ , deve ser menor do que o peso armazenado em  $u_j$ , já que o cliente  $j$  vai ser visitado após o cliente  $i$ . As restrições em (3.10) dizem que o peso armazenado em  $u_j$  deve ser pelo menos o peso do cliente  $j$ , caso ela seja o primeiro a ser visitado na rota,

enquanto as restrições em (3.11) asseguram que o peso armazenado em  $u_i$  somado com peso do cliente  $j$ , isto é,  $pt_j$ , deve respeitar o peso total do veículo quando  $w_{ijk} = 1$ .

As restrições (3.12) e (3.13) asseguram, respectivamente, que o peso e a área total de carga do veículo não sejam extrapolados. As restrições (3.14) e (3.16) referem-se ao empacotamento, seguindo a ideia de alocar os itens do cliente  $j$ , atendido pelo veículo  $k$ , sobre a malha de pontos de Herz (1972). As restrições em (3.14) acoplam as variáveis de roteamento com as de empacotamento, dizendo que o item  $m$  do cliente  $j$  é empacotado na base do veículo  $k$  se, e somente se, o veículo  $k$  passa por esse cliente a partir de algum vértice  $i$ . Já as restrições em (3.15) são para evitar a sobreposição entre os itens, assim impondo que cada ponto da malha da base de cada veículo  $k$  seja coberto por no máximo um item  $m$  de algum cliente  $j$  que é atendido por esse mesmo veículo. As restrições em (3.16) são para assegurar que todos os itens sejam empacotados, ao passo que as restrições de (3.17) a (3.19) indicam o domínio das variáveis.

## 3.2 Modelo de Três Índices

O modelo apresentado na subseção anterior possui o empacotamento embutido a partir do uso de variáveis de cinco índices. O modelo torna-se demasiadamente grande quando o número de itens na instância tende a crescer. Por exemplo, para a instância denominada E016-03m.2, que possui  $n = 15$ ,  $K = 3$  e  $M = 24$  itens, o número total de variáveis de decisão é de 19.122.

A partir desse entendimento, desenvolve-se um modelo com variáveis de decisão de até três índices, em que a parte que trata especificadamente do roteamento de veículos não se altera e é dada por (3.1) a (3.13), com o domínio das variáveis em (3.17) e (3.18). Com isso, o empacotamento dos itens dos clientes em cada rota passa a ser verificado durante a otimização e, assim, tratado via planos de corte pela inserção das desigualdades (3.20), dado conjunto  $S$  de clientes de uma rota detectada inviável quanto ao empacotamento dos itens.

$$\sum_{i \in V \setminus \{0\}} \sum_{j \in V \setminus \{0\}} w_{ijk} \leq |S| - 1, \quad \forall S \in S_{inv}, \forall k \in K \quad (3.20)$$

Considera-se em (3.20) que  $S_{inv}$  é o conjunto contendo todas as rotas com empacotamento inviável para os itens dos clientes na rota, tal que  $S$  em  $S_{inv}$  corresponde a um conjunto de clientes. Como a quantidade de rotas inviáveis para o empacotamento pode ser de ordem exponencial, no pior caso, e detectar todas essas rotas de antemão corresponde a resolver uma quantidade exponencial do 2BPP, que é NP-difícil, detectam-se subconjuntos  $S \subset V$  pela rotina de separação descrita na Subseção 3.4.2. Assim, faz-se a inserção da desigualdade (3.20) para cada um desses subconjuntos que permite violá-la.

### 3.3 Modelo de Dois Índices

Modelos para o CVRP com variáveis de decisão com dois índices indicam se uma aresta foi atravessada ou não por um veículo, sem para tanto, explicitar qual dos veículos fez a travessia (IORI; SALAZAR-GONZÁLEZ; VIGO, 2007). A partir disso, seja  $x_{ij}$  a variável binária que recebe o valor 1 quando se atravessa a aresta  $(i, j) \in E$  e 0 caso contrário. Essa variável também pode receber valor 2 quando ocorre uma rota única, associada a aresta  $(0, j)$  para todo  $j \in V \setminus \{0\}$ . Seja  $S_{inv}$  o conjunto contendo todas as rotas com empacotamento inviável e seja  $r(S)$  o menor número de veículos necessários para transportar os itens dos clientes em  $S$ , que pode ser obtido resolvendo o 2BPP para os itens dos clientes em  $S$ . A formulação para o 2L-CVRP é dada a seguir:

Minimizar

$$\sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \quad (3.21)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in V \setminus \{0\}} x_{0j} \leq 2K \quad (3.22)$$

$$\sum_{\{i \in V: i \neq h\}} x_{ih} + \sum_{\{j \in V: j \neq h\}} x_{hj} = 2, \quad \forall h \in V \setminus \{0\} \quad (3.23)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S, j \neq i} x_{ij} \leq |S| - r(S), \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}, |S| \neq \emptyset \quad (3.24)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S, j \neq i} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \in S_{inv} \quad (3.25)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in E \quad (3.26)$$

$$x_{0j} \in \{0, 1, 2\}, \quad \forall j \in V \setminus \{0\} \quad (3.27)$$

A função objetivo (3.21) busca por um conjunto de rotas de custo total mínimo. A restrição (3.22) assegura que seja utilizado um número menor ou igual ao de veículos disponíveis para suprir a demanda dos clientes. As restrições (3.23) impõem que cada cliente seja visitado apenas uma vez, isto é, cada vértice tem exatamente duas arestas incidentes, o que representa na prática uma de chegada e uma de saída.

As restrições (3.24) estão associadas a um conjunto de desigualdades de capacidade e de conectividade garantindo que as rotas sejam conexas e a capacidade do veículo não seja violada. As restrições em (3.25) são para assegurar que os itens em cada rota estejam completamente organizados dentro da base retangular do veículo e sem sobreposição, ou seja, as rotas que não contêm um empacotamento viável dos itens dos clientes são proibidas.

Por fim, as restrições (3.26) e (3.27) indicam o domínio das variáveis de decisão, de modo que se admite rotas únicas.

O cálculo de  $r(S)$  é difícil segundo Cornuejols e Harche (1993), já que é necessário neste caso encontrar a solução ótima do 2BPP. Conforme Lysgaard, Letchford e Eglese (2004),  $r(S)$  pode substituído por um limitante inferior:

$$r'(S) = \max \left\{ \left\lceil \frac{\sum_{i \in S} p t_i}{P} \right\rceil, \left\lceil \frac{\sum_{i \in S} a t_i}{At} \right\rceil \right\} \quad (3.28)$$

A fórmula (3.28) calcula a razão do peso total dos itens dos clientes em  $S$  pela capacidade  $P$  do veículo e a razão da área total dos itens dos clientes em  $S$  pela área total da base retangular do veículo. Assim, atribui-se a  $r'(S)$  o máximo valor entre as razões e que deve ser arredondado para o valor inteiro sucessor, indiciando o menor número de veículos necessários para transportar a demanda unidimensional dos clientes em  $S$ . As restrições (3.24) com  $r'(S)$  são também chamadas de *desigualdades de capacidade arredondadas* (NADDEF; RINALDI, 2001).

### 3.4 Procedimentos de Separação

Procedimentos de separação são rotinas chamadas pelo algoritmo B&C durante a otimização. A cada nó da árvore de enumeração, tem-se a relaxação do problema original, com a inserção de novas restrições, sendo resolvida. Após a obtenção da solução desta relaxação, possivelmente fracionária, entra-se em ação os procedimentos de separação visando detectar, a partir da análise da solução encontrada, a classe de desigualdades que violam o problema original. Assim, ao detectar alguma desigualdade violada, ela é inserida como restrição na relaxação a fim de garantir que a solução final satisfaça todas as restrições do problema original.

Inicialmente, o modelo de dois índices é resolvido sem considerar as restrições de capacidade e conectividade das rotas inviáveis para o empacotamento (restrições (3.24) e (3.25)), já que a quantidade de restrições deste tipo é da ordem exponencial. Estas restrições são adicionadas como planos de corte utilizando os procedimentos a seguir.

Assim, a resolução do modelo de dois índices ocorre primeiramente pelo roteamento de veículos sem, para tanto, observar a capacidade e a conectividade das rotas, bem como a viabilidade do empacotamento, que à medida que são violadas, inserem-se os respectivos cortes. O B&C encontra uma solução viável quando nenhuma restrição é violada e as variáveis de decisão têm valores inteiros. No caso do modelo de três índices, aplica-se a rotina de separação para detectar apenas rotas com empacotamento inviáveis, uma vez que já são impostas restrições para assegurar a capacidade e conectividade das rotas (veja as restrições (3.9), (3.10) e (3.11)).

### 3.4.1 Restrições de Capacidade Arredondadas

A checagem da violação das restrições em (3.24) trocando  $r(S)$  por  $r'(S)$  é feita por meio do pacote CVRPSEP, proposto por [Lysgaard, Letchford e Eglese \(2004\)](#). Como mencionado, o cálculo de  $r(S)$  exige determinar o menor número de veículos capaz de atender a demanda dos clientes em  $S$ , observando tanto o peso total quanto o empacotamento factível dos itens desses clientes.

O procedimento para a detecção e a inserção de desigualdades de capacidade e conectividade arredondadas é chamado quando uma solução fracionária ou inteira é obtida, dada a resolução da relaxação em cada um dos nós da árvore B&C. O procedimento usa a rotina do CVRPSEP baseada em quatro heurísticas que buscam identificar conjuntos  $S$  de clientes, na solução fracionária ou inteira, que não satisfaçam a desigualdade em (3.24) para  $r'(S)$ . Dois procedimentos foram utilizados:

**Procedimento 1:** Seja  $G^* = (V, E^*)$  um grafo formado a partir da solução ótima  $x^*$  do nó atual da árvore, com  $E^* = \{(i, j) \in E : x_{ij}^* > 0\}$  e a capacidade de cada aresta sendo o valor da variável  $x_{ij}^*$ . Usa-se a demanda de peso dos clientes para encontrar conjuntos  $S$ , a partir da rotina do CVRPSEP para desigualdades de capacidade arredondadas, que viole o lado direito da restrição (3.24) pelo qual  $r(S)$  foi trocado por  $r'(S)$ .

**Procedimento 2:** É igual ao Procedimento 1, porém considera a área total dos itens dos clientes em  $S$  ao invés do peso total.

A rotina de [Lysgaard, Letchford e Eglese \(2004\)](#) para desigualdades de capacidade arredondadas considera o emprego de quatro heurísticas. A primeira heurística encontra as componentes conexas  $S_1, S_2, \dots, S_p$  do grafo  $G^*$ , checando a violação da desigualdade em (3.24) para cada uma dessas componentes, bem como para o complemento de cada uma, isto é, para  $V \setminus S_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, p$ . As demais heurísticas trabalham com a ideia de escolher conjuntos de clientes para formar um vértice contraído e, então, fazer a análise sobre um grafo contendo vértices contraídos. Se a primeira heurística retornar desigualdades, as demais não são chamadas, caso contrário, as outras três são invocadas na seguinte ordem:

- Segunda Heurística: resolve um problema de fluxo máximo objetivando detectar desigualdades de capacidade fracionária, que são aquelas em que no lado direito da desigualdade (3.24) substituí-se  $r(s)$  por  $r'(S)$ . Esta heurística está limitada a gerar  $\min\{\frac{n}{2}, 50\}$  desigualdades;
- Terceira Heurística: consiste em uma heurística de construção gulosa que opera sobre o grafo com vértices contraídos. Ela seleciona um vértice contraído, expande-o e verifica a desigualdade em (3.24);
- Quarta Heurística: passa pelas desigualdades detectadas sobre conjuntos  $S$ , de forma

a substituir  $S$  pelo menor vértice contraído que contém os clientes de  $S$ , podendo remover, inserir ou substituir vértices, de forma a checar a desigualdade em (3.24).

### 3.4.2 Restrições de Empacotamento

A determinação de rotas inviáveis do conjunto  $S_{inv}$ , para as desigualdades em (3.20) e (3.25), consiste em verificar, dada uma solução inteira encontrada no B&C, se cada rota possui empacotamento viável para os itens dos clientes na rota, sendo feita pelo **Procedimento 3**. Em linhas gerais, tem-se um problema de decisão que consiste em verificar se todos os itens podem (ou existe algum que não pode) ser empacotados na base retangular do veículo.

Para tanto, realiza-se a resolução do problema de empacotamento ortogonal bidimensional (*Two-dimensional Orthogonal Packing Problem* - 2OPP). O 2OPP verifica se o conjunto de itens dos clientes na rota pode ser organizado de forma ortogonal e sem sobreposição, além de respeitar as dimensões da base do veículo. Considera-se nesse trabalho a resolução do 2OPP por meio de um modelo de programação inteira.

As restrições de (3.29) a (3.31) são utilizadas para resolver o 2OPP para os clientes de uma dada rota  $S$ . Seja  $y_{mpq}$  uma variável binária que recebe o valor 1 se o item  $m$  é empacotado na posição  $(p, q)$  e 0 caso contrário.

$$\sum_{j \in S} \sum_{m \in M_j} \sum_{\{p \in P_j^m : s - l_j^m + 1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in Q_j^m : t - a_j^m + 1 \leq q \leq t\}} y_{mpq} \leq 1, \quad (3.29)$$

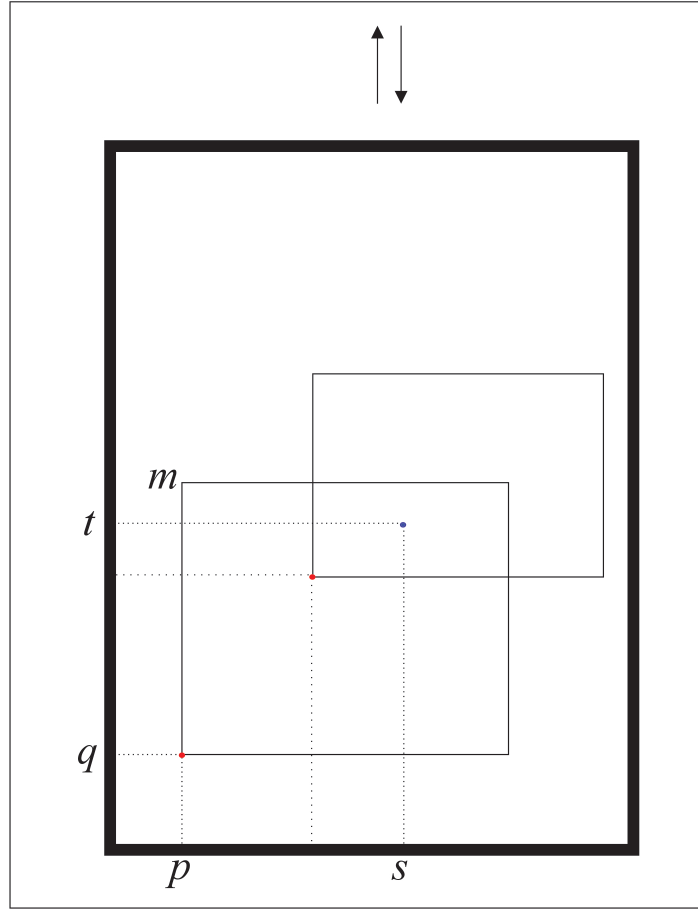
$$\forall s \in P_H, \forall t \in Q_H$$

$$\sum_{p \in P_j^m} \sum_{q \in Q_j^m} y_{mpq} = 1, \quad \forall j \in S, \forall m \in M_j \quad (3.30)$$

$$y_{mpq} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in S, \forall m \in M_j, \forall p \in P_j^m, \forall q \in Q_j^m \quad (3.31)$$

As restrições(3.29) garantem que não ocorra a sobreposição entre os itens empacotados, como mostra a Figura 3.1, em que cada ponto  $(s, t)$  da malha da base retangular só pode ser coberto por um único item  $m$  empacotado em algum outro ponto  $(p, q)$ . As restrições (3.30) asseguram que todos os itens dos clientes na rota  $S$  devem ser empacotados, sendo o domínio das variáveis expresso em (3.31). Note que não há função objetivo, pois se trata de um teste de viabilidade.

Figura 3.1 – Ilustração da não sobreposição proibida pelas restrições em (3.29).



Fonte: o autor.

Como a resolução do modelo para o 2OPP pode ser bastante cara do ponto de vista computacional, propõe-se resolver primeiramente uma formulação relaxada associada ao *One-dimensional Contiguous Bin Packing Problem*, denominado por CBP, que é mais barata computacionalmente. Esta relaxação objetiva verificar se o empacotamento é de fato inviável e, assim, inserir uma desigualdade em (3.20) e (3.25). Côté, Guastarofa e Speranza (2014) e Côté, Guastarofa e Speranza (2017) propuseram uma formulação mais elaborada e que resolve por completo o *One-dimensional Contiguous Bin Packing Problem*, fato este que não ocorre com a formulação (3.32) a (3.34), que é uma relaxação para o CBP, mais simples, porém ainda eficaz.

As restrições (3.32) a (3.34) consistem na relaxação CBP dado os clientes em  $S$ . Seja  $e_{ms}$  uma variável binária que recebe 1 se o item  $m$  é empacotado na coordenada  $s$  e 0 caso contrário. Seja  $D_m(S, s)$  o conjunto com as coordenadas  $s'$ , tal que o item  $m$ , do cliente  $j \in S$  e empacotado em  $s'$ , cobre a coordenada  $s$ .

$$\sum_{j \in S} \sum_{m \in M_j} \sum_{s' \in D_m(S, s)} l_j^m e_{ms'} \leq L, \quad s \in P_H \quad (3.32)$$

$$\sum_{s \in P_H} e_{ms} = 1, \quad \forall j \in S, \forall m \in M_j \quad (3.33)$$

$$e_{ms} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in S, \forall m \in M_j, \forall s \in P_H \quad (3.34)$$

As restrições em (3.32) asseguram que a soma do comprimento dos itens que cobrem a coordenada  $s$ , na direção da largura, seja menor ou igual a  $C$ , para todo  $s \in P_H$ . Já as restrições em (3.33) garantem que todos os itens sejam empacotados em alguma coordenada na direção da largura. Aqui também não se considera uma função objetivo, pois se trata apenas de um teste para verificar se os itens empacotados respeitam a largura do veículo. Por fim, as restrições (3.34) representam o domínio das variáveis. Observa-se que a formulação relaxada CBP pode considerar as restrições envolvendo o comprimento dos itens e o comprimento da base retangular do veículo.

**Procedimento 3:** Aplicado quando uma solução inteira é encontrada na árvore de enumeração do B&C e nenhum dos procedimentos anteriores teve sucesso em gerar algum corte. Primeiro, resolve-se a formulação relaxada CBP considerando restrições para a largura e o comprimento. Caso seja retornado que o modelo é inviável, insere-se a desigualdade, como em (3.25) e (3.20). Por outro lado, se a solução for viável, então o modelo para o 2OPP é resolvido para de fato comprovar se a rota tem um empacotamento viável (ou inserir um corte).

Em conjunto com o **Procedimento 3**, considera-se uma estrutura de dados para guardar e pesquisar rotas já testadas, com o intuito de diminuir o esforço computacional. Para isso, usa-se uma estrutura *hash* que associa chaves de busca a rotas, em que a busca de uma chave ocorre em tempo constante. Assim, torna-se possível verificar muito rapidamente se uma rota já foi avaliada quanto a inviabilidade do empacotamento e evitar chamadas ao Procedimento 3.

### 3.5 Restrições para a Versão Sequencial

Os modelos apresentados anteriormente são para a versão irrestrita do 2L-CVRP. Para considerar a versão sequencial deste problema, torna-se necessário incluir/adaptar as restrições (3.35). Vale destacar que no caso do modelo proposto, outras variáveis/restrições devem ser incluídas, em particular, para indicar a sequência dos clientes em cada rota.

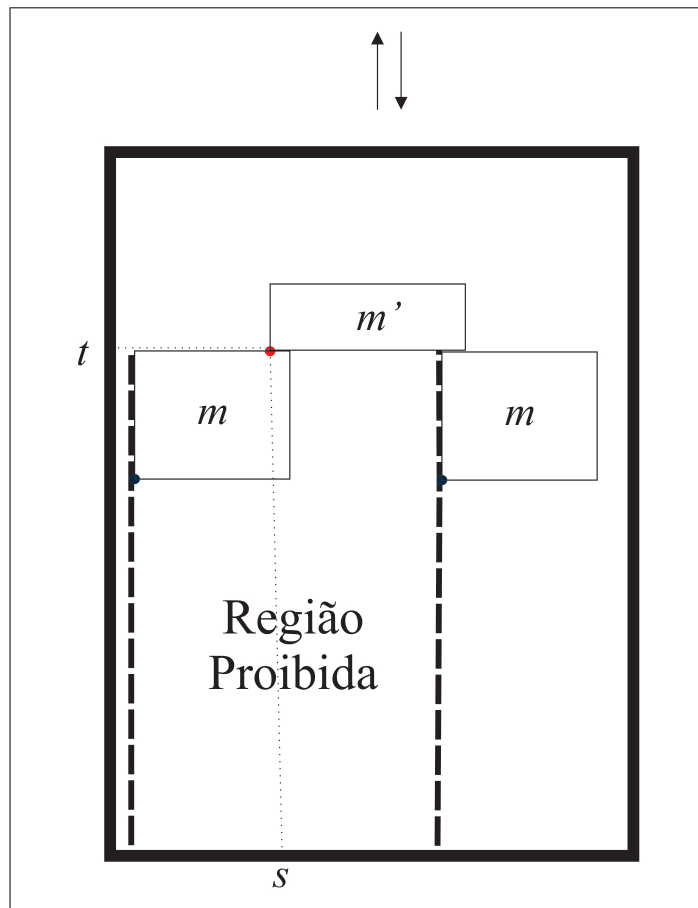
As restrições (3.35) foram desenvolvidas em [Queiroz e Miyazawa \(2013\)](#) e asseguram que se o item  $m'$  do cliente  $j'$  for empacotado na posição  $(s, t)$ , então qualquer item  $m$  do cliente  $j$  não pode ser empacotado nos pontos  $(p, q)$  que inviabilizam a sua retirada, dado que o cliente  $j'$  é visitado após o cliente  $j$  na rota  $S$ , ou seja,  $o_j < o_{j'}$ . A Figura 3.2 ilustra essa

situação, em que a região de contorno pontilhado marca os pontos  $(p, q)$  que não podem arranjar o item  $m$ , uma vez que haverá obstrução, pelo item  $m'$ , ao retirar  $m$ .

$$\sum_{\{j \in S: o_j < o'_j\}} \sum_{m \in M_j} \sum_{\{p \in P_j^m: s \leq p < s + l_j^{m'} \vee p \leq s < p + l_j^m\}} \sum_{\{q \in Q_j^m: t + a_j^{m'} > q\}} y_{mpq} \leq (1 - y_{m'st})M, \quad (3.35)$$

$$\forall j' \in S, \forall m' \in M_j, \forall s \in P_H, \forall t \in Q_H$$

Figura 3.2 – Representação da restrição (3.35).



Fonte: o autor.



## Capítulo 4

---

# Experimentos Computacionais

---

Apresenta-se neste capítulo os resultados computacionais para a resolução de instâncias do 2L-CVRP propostas na literatura. Os resultados são, então, comparados com os de Azevedo (2009), Wei *et al.* (2015) e Hokama, Miyazawa e Xavier (2016), uma vez que esses autores abordam o 2L-CVRP no caso irrestrito e/ou sequencial, sendo resolvido por métodos exatos ou heurísticas.

Os modelos foram codificados em linguagem C++ utilizando o *framework* para B&C presente no pacote de otimização *Gurobi Optimizer* versão 7.0. Os testes computacionais foram realizados em um computador com processador Intel Core i5-3570K de 3,40 GHz, 8 GB de memória RAM e sistema operacional Linux Ubuntu 16.04 LTS. Além disso, foram atribuídos como critério de parada para cada instância: 7.200 segundos como tempo limite total para a execução do B&C, o que inclui 3.600 segundos como tempo limite para cada chamada para resolver o CBP e 3.600 segundos como tempo limite para cada chamada para resolver o 2OPP.

Os testes consideram 80 instâncias<sup>1</sup> com número de clientes ( $n$ ) entre 15 a 36 e o número total de itens ( $M$ ) de 15 a 114, todas derivadas do CVRP. As instâncias estão divididas em 16 conjuntos em diferentes classes e cada qual fornece: o número de clientes, a quantidade de veículos disponíveis, o número total de itens, a capacidade do veículo, o comprimento e a largura da base retangular do veículo, as coordenadas dos clientes e do depósito, e as dimensões dos itens de cada cliente. Cada conjunto de instâncias está dividido em 5 classes, sendo a primeira classe composta por instâncias puras para o CVRP (ou seja, cada cliente demanda apenas um item e suas dimensões são iguais a um). Para as demais classes, a quantidade e a dimensão dos itens foram geradas de forma aleatória seguindo a Tabela 4.1, em que foram gerados itens de dimensões homogêneas, mais largos (horizontal) e mais cumpridos (vertical).

Nas instâncias, o custo  $c_{ij}$  de cada aresta é dado pela distância euclidiana entre os vér-

---

<sup>1</sup> <http://www.or.deis.unibo.it/>

Tabela 4.1 – Intervalos utilizados para gerar os itens nas instâncias para  $L = 20$  e  $A = 40$ .

Classe	$M_j$	Vertical		Homogênea		Horizontal	
		Largura	Comprimento	Largura	Comprimento	Largura	Comprimento
1	1	1	1	1	1	1	1
2	[1, 2]	[0, 1L ; 0, 2L]	[0, 4A ; 0, 9A]	[0, 2L ; 0, 5L]	[0, 2A ; 0, 5A]	[0, 4L ; 0, 9L]	[0, 1A ; 0, 2A]
3	[1, 3]	[0, 1L ; 0, 2L]	[0, 3A ; 0, 8A]	[0, 2L ; 0, 4L]	[0, 2A ; 0, 4A]	[0, 3L ; 0, 8L]	[0, 1A ; 0, 2A]
4	[1, 4]	[0, 1L ; 0, 2L]	[0, 2A ; 0, 7A]	[0, 1L ; 0, 4L]	[0, 1A ; 0, 4A]	[0, 2L ; 0, 7L]	[0, 1A ; 0, 2A]
5	[1, 5]	[0, 1L ; 0, 2L]	[0, 1A ; 0, 6A]	[0, 1L ; 0, 3L]	[0, 1A ; 0, 3A]	[0, 1L ; 0, 6L]	[0, 1A ; 0, 2A]

Fonte: Adaptado de Iori, Salazar-González e Vigo (2007).

tices pegando apenas o valor inteiro ou considerando o valor real com duas casas decimais. Em nenhum dos casos busca-se uma comparação de tempo, pois Azevedo (2009) estipulou 5.400 segundos como tempo limite total e usou uma máquina diferente da usada aqui para os testes, enquanto Wei *et al.* (2015) adotou um critério de parada diferente para a sua heurística, e por fim, Hokama, Miyazawa e Xavier (2016) usa também uma máquina diferente e tempo limite total de 3.600 segundos. De qualquer forma, as informações de tempo apresentadas são apenas para demonstrar como os modelos se comportam frente a cada classe de instância e para dar uma ideia com relação as propostas da literatura.

Os valores marcados com “\*” nas tabelas de resultados indicam as instâncias para as quais o respectivo modelo teve o tempo limite imposto para checar a viabilidade do empacotamento atingido. Além disso, o tempo limite de execução também foi atingido, de forma que não se pode afirmar que a solução encontrada é ótima para a instância, resultando assim em um valor maior ou até menor do que o ótimo conhecido, uma vez que se tenha utilizado menos veículos.

## 4.1 Versão Irrestrita

As tabelas apresentadas nessa seção trazem informações como o nome de cada instância, a classe, a quantidade de clientes ( $n$ ), a quantidade total de itens ( $M$ ), a quantidade de veículos ( $K$ ); os resultados de Azevedo (2009) quando considerando o custo das arestas inteiro, o tempo total gasto em segundos e o valor da solução; os resultados encontrados pelos três modelos, contendo o tempo total gasto em segundos, o valor da solução final obtido pelo B&C, o GAP (em porcentagem) retornado pelo *Gurobi* e a diferença percentual entre o valor da solução encontrado pelo respectivo modelo com o valor reportado pela literatura. No caso dos custos reais, fizeram-se as devidas comparações com Wei *et al.* (2015), que utilizaram uma heurística de busca em vizinhança variável.

No caso da comparação com Azevedo (2009) e Wei *et al.* (2015), pode-se obter, pelos modelos propostos, uma solução de custo total menor (isto é, diferença percentual negativa), pois se assume o uso de menos veículos (não necessariamente todos os veículos precisam ser usados) e que existe rotas únicas, diferente do considerado por tais autores.

### 4.1.1 Resultado para Arestas com Custo Inteiro

As Tabelas 4.2 e 4.3 trazem os resultados obtidos com o modelo completo, o modelo de três índices e o modelo de dois índices, considerando a versão irrestrita do problema e para arestas com custo inteiro, em que se faz a devida comparação apenas em relação ao valor da solução e ao tempo total reportados por [Azevedo \(2009\)](#). Dentre as 80 instâncias, o B&C de [Azevedo \(2009\)](#) não conseguiu qualquer solução para 29 delas, ao passo que o modelo completo não conseguiu para 20, o modelo de três índices não encontrou solução para 02 delas e, por fim, o modelo de dois índices para 09 instâncias.

A solução ótima (GAP igual a zero) foi encontrada para 4, 7 e 53 das 80 instâncias, respectivamente, para o modelo completo, de três e de dois índices. Para o modelo completo, o GAP varia, para as instâncias, entre 12,16% a 75,47%, enquanto que para o modelo de três índices essa variação vai de 3,34% a 76,07%. O modelo de dois índices é o que apresenta menor variação no GAP, que vai de 3,22% a 34,86%.

A diferença percentual negativa indica que a solução encontrada pelo respectivo modelo foi melhor do que a apresentada por [Azevedo \(2009\)](#), o que representa um total de 3 instâncias para o modelo completo, 10 instâncias para o de três índices e 13 instâncias para o de dois índices. Como comentado, isso ocorre por permitir rotas únicas e/ou utilizar um número menor ou igual ao de veículos disponíveis.

O tempo computacional gasto por [Azevedo \(2009\)](#) foi, em média, de 366,76 segundos, enquanto o modelo completo requereu um tempo de 7.054,53 segundos, em média. Já os modelos com três e dois índices gastaram, em média, 6.637,23 e 2.492,22 segundos, respectivamente.

### 4.1.2 Resultado para Arestas com Custo Real

As Tabelas 4.4 e 4.5 trazem os resultados obtidos com o modelo completo, de três índices e de dois índices, considerando a versão irrestrita do 2L-CVRP e com custo real para as arestas, em que se faz a devida comparação apenas em relação ao valor da solução e ao tempo total reportados pela heurística de [Wei et al. \(2015\)](#). [Wei et al. \(2015\)](#), das 80 instâncias, conseguiram apresentar uma solução viável para todas elas, obviamente por se tratar de uma heurística. Por outro lado, o modelo completo não conseguiu apontar qualquer solução para 21 instâncias, o modelo de três índices para apenas 01 delas e o modelo de dois índices para 06 instâncias.

Em termos de solução ótima, o que equivale a GAP igual a zero, os modelos conseguiram resolver, respectivamente, 4, 7 e 53 das 80 instâncias, dado o modelo completo, de três e dois índices. Para o modelo completo, o GAP para as instâncias variou entre 13,74% e 75,91%, enquanto que para o modelo de três índices essa variação foi de 6,29% a 77,27%. Novamente, o modelo de dois índices teve a menor variação, sendo ela de 2,15% a 37,30%.

Tabela 4.2 – Resultados dos modelos para a versão irrestrita e custo inteiro comparados com Azevedo (2009) (continua...).

Nome	Instâncias			Azevedo (2009)		Modelo completo			Modelo de três índices			Modelo de dois índices					
	CI	n	M K	Tempo	Solução	Tempo	Solução	GAP(%)	Diferença (%)	Tempo	Solução	GAP(%)	Diferença(%)	Tempo	Solução	GAP(%)	Diferença(%)
E016-03m	1	15	15	0,63	273	582,53	273	0,00	0,00	281,20	273	0,00	0,00	0,07	273	0,00	0,00
	2	15	24	4,80	273	7.200,00	338	34,91	23,81	319,60	273	0,00	0,00	6,31	273	0,00	0,00
	3	15	31	20,11	279	7.200,00	-	-	-	443,50	279	0,00	0,00	80,08	279	0,00	0,00
	4	15	37	0,08	277	7.200,00	280	27,78	1,08	718,10	277	0,00	0,00	58,12	277	0,00	0,00
	5	15	45	5.400,00	-	7.200,00	279	21,51	-	1.361,00	273	0,00	-	233,40	273	0,00	-
E016-05m	1	15	15	0,36	329	3.668,00	329	0,00	0,00	7.200,00	329	8,81	0,00	0,08	329	0,00	0,00
	2	15	25	0,36	329	7.200,00	329	12,16	0,00	7.200,00	329	6,07	0,00	0,28	329	0,00	0,00
	3	15	31	7,72	347	7.200,00	351	27,35	1,15	7.200,00	347	11,53	0,00	5,20	347	0,00	0,00
	4	15	40	0,45	329	7.200,00	329	22,79	0,00	7.200,00	329	3,34	0,00	2,48	329	0,00	0,00
	5	15	48	16,33	329	7.200,00	329	19,76	0,00	7.200,00	329	4,86	0,00	0,86	329	0,00	0,00
E021-04m	1	20	20	1,76	351	7.200,00	352	19,32	0,28	7.200,00	352	14,20	0,28	0,13	351	0,00	0,00
	2	20	29	42,59	381	7.200,00	430	40,46	12,86	7.200,00	381	26,25	0,00	55,61	381	0,00	0,00
	3	20	46	223,45	387	7.200,00	510	50,98	31,78	7.200,00	392	26,27	1,29	561,00	383	0,00	-1,03
	4	20	44	5.400,00	-	7.200,00	384	34,37	-	7.200,00	353	14,16	-	57,99	353	0,00	-
	5	20	49	0,22	369	7.200,00	369	31,43	0,00	7.200,00	358	17,04	-2,98	0,80	351	0,00	-4,88
E021-06m	1	20	20	0,26	423	7.200,00	423	17,26	0,00	7.200,00	423	21,51	0,00	0,11	423	0,00	0,00
	2	20	32	0,24	423	7.200,00	471	39,49	11,35	7.200,00	423	22,69	0,00	1,79	423	0,00	0,00
	3	20	43	0,32	423	7.200,00	467	39,18	10,40	7.200,00	430	25,11	1,65	9,17	423	0,00	0,00
	4	20	50	54,49	438	7.200,00	510	45,09	16,44	7.200,00	438	26,02	0,00	2,31	438	0,00	0,00
	5	20	62	1,13	423	7.200,00	520	45,77	22,93	7.200,00	423	24,82	0,00	1,32	423	0,00	0,00
E022-04g	1	21	21	0,14	367	7.200,00	367	12,81	0,00	7.200,00	367	19,89	0,00	0,11	367	0,00	0,00
	2	21	31	0,12	367	7.200,00	402	33,83	9,54	7.200,00	368	20,11	0,27	2,72	367	0,00	0,00
	3	21	37	0,38	373	7.200,00	441	40,13	18,23	7.200,00	373	17,69	0,00	6,03	373	0,00	0,00
	4	21	41	3,32	377	7.200,00	425	38,82	12,73	7.200,00	377	15,38	0,00	2,89	377	0,00	0,00
	5	21	57	0,11	389	7.200,00	377	28,38	-3,08	7.200,00	367	22,07	-5,66	0,98	367	0,00	-5,66
E022-06m	1	21	21	1,05	488	7.200,00	489	30,06	0,20	7.200,00	492	31,50	0,82	0,27	488	0,00	0,00
	2	21	33	1,35	488	7.200,00	507	44,77	3,89	7.200,00	489	30,06	0,20	5,48	488	0,00	0,00
	3	21	40	3,74	489	7.200,00	529	46,88	8,18	7.200,00	489	34,97	0,00	9,04	489	0,00	0,00
	4	21	57	1,13	489	7.200,00	607	56,84	24,13	7.200,00	489	30,06	0,00	158,90	489	0,00	0,00
	5	21	56	1,00	488	7.200,00	532	50,18	9,02	7.200,00	492	33,33	0,82	1,27	488	0,00	0,00
E023-03g	1	22	22	0,09	558	6.455,86	558	0,00	0,00	1.128,00	558	0,00	0,00	0,15	558	0,00	0,00
	2	22	32	-	-	7.200,00	912	49,78	-	7.200,00	715	26,01	-	7.200,00	715	3,22	-
	3	22	41	5,28	685	7.200,00	778	41,64	13,58	7.200,00	675	22,37	-1,46	7.200,00	669	3,29	-2,34
	4	22	51	-	-	7.200,00	768	40,36	-	7.200,00	692	23,99	-	7.200,00	724*	16,71	-
	5	22	55	514,71	742	7.200,00	808	42,69	8,89	7.200,00	651	19,51	-12,26	7.200,00	-	-	-
E023-05s	1	22	22	0,10	657	6.456,00	558	0,00	-15,07	1.127,00	558	0,00	-15,07	0,15	558	0,00	-15,07
	2	22	29	4,55	680	7.200,00	755	39,34	11,03	7.200,00	680	22,64	0,00	77,20	665	0,00	-2,21
	3	22	42	-	-	7.200,00	1.006	53,43	-	7.200,00	729	26,62	-	7.200,00	729	8,78	-
	4	22	48	-	-	7.200,00	766	41,39	-	7.200,00	686	25,36	-	7.200,00	688*	9,59	-
	5	22	52	-	-	7.200,00	740	37,97	-	7.200,00	600	12,66	-	7.200,00	636*	10,22	-

Fonte: o autor.

Tabela 4.3 – Resultados dos modelos para a versão irrestrita e custo inteiro comparados com Azevedo (2009) (...continuação.).

Nome	Instâncias			Azevedo (2009)			Modelo completo			Modelo de três índices			Modelo de dois índices					
	Cl	n	M	K	Tempo	Solução	Tempo	Solução	GAP(%)	Diferença (%)	Tempo	Solução	GAP(%)	Diferença(%)	Tempo	Solução	GAP(%)	Diferença(%)
E026-08m	1	25	25	8	1,54	609	7:200,00	638	40,75	4,76	7:200,00	614	35,50	0,82	0,24	595	0,00	-2,30
	2	25	40	8	1,58	609	7:200,00	699	49,92	14,78	7:200,00	595	34,28	-2,30	0,76	595	0,00	-2,30
	3	25	61	8	1,55	609	7:200,00	-	-	-	7:200,00	603	38,31	-0,99	1,41	595	0,00	-2,30
	4	25	63	8	127,08	626	7:200,00	-	-	-	7:200,00	629	41,01	0,48	5,76	612	0,00	-2,24
	5	25	91	8	1,59	609	7:200,00	-	-	-	7:200,00	603	35,15	-0,99	1,20	595	0,00	-2,30
E030-03g	1	29	29	3	2,33	524	7:200,00	546	41,57	4,20	7:200,00	528	35,22	0,76	10,54	524	0,00	0,00
	2	29	43	6	-	-	7:200,00	1,085	72,72	-	7:200,00	690	56,37	-	7:200,00	733	23,46	-
	3	29	49	6	-	-	7:200,00	7,44	59,67	-	7:200,00	610	50,33	-	7:200,00	637	17,89	-
	4	29	72	7	-	-	7:200,00	-	-	-	7:200,00	725	58,62	-	7:200,00	-	-	-
	5	29	86	7	-	-	7:200,00	887	66,85	-	7:200,00	736	58,42	-	7:200,00	765*	32,02	-
E030-04s	1	29	29	4	0,08	500	7:200,00	503	34,19	0,60	7:200,00	495	34,54	-1,00	0,25	494	0,00	-1,20
	2	29	43	6	-	-	7:200,00	1,080	72,04	-	7:200,00	747	59,57	-	7:200,00	756	28,44	-
	3	29	62	7	-	-	7:200,00	-	-	-	7:200,00	710	58,17	-	7:200,00	-	-	-
	4	29	74	7	-	-	7:200,00	-	-	-	7:200,00	832	64,42	-	7:200,00	-	-	-
	5	29	91	7	-	-	7:200,00	-	-	-	7:200,00	806*	63,52	-	7:200,00	-	-	-
E031-09h	1	30	30	9	1,540,39	596	7:200,00	729	52,81	22,32	7:200,00	656	47,86	10,07	370,10	596	0,00	0,00
	2	30	50	9	2,188,47	596	7:200,00	-	-	-	7:200,00	645	46,04	8,22	567,40	596	0,00	0,00
	3	30	56	9	1,918,63	596	7:200,00	856	64,02	43,62	7:200,00	649	46,99	8,89	371,30	596	0,00	0,00
	4	30	82	9	-	-	7:200,00	-	-	-	7:200,00	726	51,93	-	1,661,00	602	0,00	-
	5	30	101	9	-	-	7:200,00	-	-	-	7:200,00	649	47,15	-	434,40	596	0,00	-
E033-03n	1	32	32	3	0,14	1,991	7:200,00	1,991	12,71	0,00	7:200,00	2,032	19,54	2,06	0,35	1,991	0,00	0,00
	2	32	44	7	-	-	7:200,00	3,905	64,12	-	7:200,00	2,800	48,78	-	7:200,00	2,593	12,30	-
	3	32	56	7	-	-	7:200,00	3,191	56,44	-	7:200,00	2,487	44,03	-	7:200,00	2,470	15,95	-
	4	32	78	7	-	-	7:200,00	-	-	-	7:200,00	2,753	49,36	-	7:200,00	2,713*	23,41	-
	5	32	102	8	-	-	7:200,00	2,921	52,79	-	7:200,00	2,433	40,32	-	7:200,00	-	-	-
E033-04g	1	32	32	4	1,18	823	7:200,00	851	57,00	3,40	7:200,00	846	57,32	2,79	0,46	823	0,00	0,00
	2	32	47	7	-	-	7:200,00	1,388	74,64	-	7:200,00	1,133	68,75	-	7:200,00	1,194	29,56	-
	3	32	57	7	-	-	7:200,00	1,439	75,47	-	7:200,00	1,078	67,16	-	7:200,00	1,105	24,79	-
	4	32	65	7	-	-	7:200,00	1,369	74,21	-	7:200,00	980	63,57	-	7:200,00	-	-	-
	5	32	87	8	-	-	7:200,00	1,269	72,16	-	7:200,00	1,014	64,89	-	7:200,00	1,031	19,98	-
E033-05s	1	32	32	5	0,78	907	7:200,00	845	56,92	-6,84	7:200,00	843	56,58	-7,06	0,75	823	0,00	-9,26
	2	32	48	6	-	-	7:200,00	-	-	-	7:200,00	1,143	68,94	-	7:200,00	1,153	27,49	-
	3	32	59	6	-	-	7:200,00	-	-	-	7:200,00	1,250	71,68	-	7:200,00	-	-	-
	4	32	84	8	-	-	7:200,00	-	-	-	7:200,00	1,391*	74,62	-	7:200,00	-	-	-
	5	32	114	8	-	-	7:200,00	-	-	-	7:200,00	1,471*	76,07	-	7:200,00	1,288	34,86	-
E036-11h	1	35	35	11	190,55	682	7:200,00	861	60,28	26,25	7:200,00	911	59,38	33,58	13,25	682	0,00	0,00
	2	35	56	11	500,33	682	7:200,00	-	-	-	7:200,00	-	-	-	13,59	682	0,00	0,00
	3	35	74	11	65,93	682	7:200,00	-	-	-	7:200,00	751	51,00	10,12	13,96	682	0,00	0,00
	4	35	93	11	993,19	687	7:200,00	-	-	-	7:200,00	-	-	-	155,20	687	0,00	0,00
	5	35	114	11	190,51	682	7:200,00	-	-	-	7:200,00	797	53,70	-	13,65	682	0,00	0,00
				<b>Média</b>	366,76		7,054,53	41,17	8,25		6,637,23	34,44	0,70	2,492,22	4,82		-1,06	

Fonte: o autor.

Tabela 4.4 – Resultados dos modelos para a versão irrestrita e custo real comparados com Wei *et al.* (2015) (continua...).

Nome	Instâncias			Wei <i>et al.</i> (2015)		Modelo completo			Modelo de três índices			Modelo de dois índices						
	CI	n	M	K	Tempo	Solução	Tempo	Solução	GAP(%)	Diferença(%)	Tempo	Solução	GAP(%)	Diferença(%)	Tempo	Solução	GAP(%)	Diferença(%)
E016-03m	1	15	15	3	0,00	278,73	1,046,41	278,73	0,00	0,00	345,50	278,73	0,00	0,00	0,15	278,73	0,00	0,00
	2	15	24	3	0,70	278,73	7.200,00	339,17	34,41	21,68	248,90	278,73	0,00	0,00	6,60	278,73	0,00	0,00
	3	15	31	3	2,50	284,52	7.200,00	343,08	36,03	20,58	602,40	284,52	0,00	0,00	107,50	284,52	0,00	0,00
	4	15	37	4	0,10	282,95	7.200,00	286,00	24,61	1,08	921,20	282,95	0,00	0,00	3,44	282,95	0,00	0,00
	5	15	45	4	1,60	278,73	7.200,00	287,40	26,48	3,11	1.217,00	278,73	0,00	0,00	42,63	278,73	0,00	0,00
E016-05m	1	15	15	5	0,00	334,96	7.200,00	334,96	0,00	0,00	7.200,00	334,96	6,29	0,00	0,10	334,96	0,00	0,00
	2	15	25	5	0,10	334,96	7.200,00	334,96	19,43	0,00	7.200,00	334,96	6,88	0,00	0,33	334,96	0,00	0,00
	3	15	31	5	0,20	352,16	7.200,00	356,24	30,37	1,16	7.200,00	352,16	11,53	0,00	2,17	352,16	0,00	0,00
	4	15	40	5	0,10	334,96	7.200,00	342,43	26,70	2,23	7.200,00	334,96	5,23	0,00	2,81	334,96	0,00	0,00
	5	15	48	5	0,00	334,96	7.200,00	334,96	24,29	0,00	7.200,00	334,96	7,51	0,00	0,97	334,96	0,00	0,00
E021-04m	1	20	20	4	0,10	358,4	7.200,00	359,77	17,70	0,38	7.200,00	358,40	16,12	0,00	0,17	358,40	0,00	0,00
	2	20	29	5	0,30	387,7	7.200,00	505,35	49,17	30,35	7.200,00	387,70	26,47	0,00	59,54	387,70	0,00	0,00
	3	20	46	5	0,80	394,72	7.200,00	-	-	-	7.200,00	390,54	26,65	-1,06	422,20	390,54	0,00	-1,06
	4	20	44	5	1,90	364,45	7.200,00	387,22	33,06	6,25	7.200,00	364,45	21,82	0,00	64,53	362,41	0,00	-0,56
	5	20	49	5	0,60	358,4	7.200,00	402,75	35,52	12,37	7.200,00	358,40	19,77	0,00	0,75	358,40	0,00	0,00
E021-06m	1	20	20	6	0,00	430,89	7.200,00	441,97	29,31	2,57	7.200,00	446,61	25,70	3,65	0,14	430,89	0,00	0,00
	2	20	32	6	0,20	430,89	7.200,00	448,22	34,60	4,02	7.200,00	445,25	27,23	3,33	1,52	430,89	0,00	0,00
	3	20	43	6	0,10	430,89	7.200,00	489,50	41,26	13,60	7.200,00	430,89	22,21	0,00	8,64	430,89	0,00	0,00
	4	20	50	6	0,90	447,37	7.200,00	604,20	52,38	35,06	7.200,00	447,37	25,10	0,00	110,00	447,37	0,00	0,00
	5	20	62	6	0,20	430,89	7.200,00	500,41	41,92	16,13	7.200,00	430,89	24,51	0,00	1,41	430,89	0,00	0,00
E022-04g	1	21	21	4	0,00	375,28	7.200,00	375,28	13,74	0,00	7.200,00	375,28	12,68	0,00	0,09	375,28	0,00	0,00
	2	21	31	4	0,60	375,28	7.200,00	442,65	38,73	17,95	7.200,00	375,28	19,09	0,00	3,13	375,28	0,00	0,00
	3	21	37	4	3,40	381,69	7.200,00	391,02	29,32	2,44	7.200,00	381,69	18,03	0,00	5,95	381,69	0,00	0,00
	4	21	41	4	1,80	383,88	7.200,00	583,92	53,63	52,11	7.200,00	383,87	17,81	0,00	3,06	383,87	0,00	0,00
	5	21	57	5	0,20	375,28	7.200,00	398,38	32,03	6,16	7.200,00	375,28	14,58	0,00	0,84	375,28	0,00	0,00
E022-06m	1	21	21	6	0,10	495,85	7.200,00	511,46	31,20	3,15	7.200,00	500,43	34,66	0,92	1,70	495,85	0,00	0,00
	2	21	33	6	0,60	495,85	7.200,00	524,87	45,86	5,85	7.200,00	500,43	31,26	0,47	1,70	495,85	0,00	0,00
	3	21	40	6	0,90	498,16	7.200,00	541,79	48,14	8,76	7.200,00	500,43	34,15	0,46	33,01	498,16	0,00	0,00
	4	21	57	6	2,10	498,32	7.200,00	-	-	-	7.200,00	498,32	35,48	0,00	31,39	498,32	0,00	0,00
	5	21	56	6	0,40	495,85	7.200,00	538,26	48,34	8,55	7.200,00	503,46	32,16	1,53	0,52	495,85	0,00	0,00
E023-03g	1	22	22	3	0,00	568,56	2,079,77	568,56	0,00	0,00	1.236,00	568,56	0,00	0,00	0,12	568,56	0,00	0,00
	2	22	32	5	1,00	725,46	7.200,00	975,76	51,59	34,50	7.200,00	750,38	28,55	3,44	7.200,00	725,46	2,15	0,00
	3	22	41	5	1,80	678,75	7.200,00	829,43	43,41	22,20	7.200,00	686,43	22,68	1,13	7.200,00	678,75	3,40	0,00
	4	22	51	5	6,10	700,72	7.200,00	883,15	48,06	26,03	7.200,00	709,39	24,91	1,24	7.200,00	733,32*	15,20	4,65
	5	22	55	6	1,20	657,77	7.200,00	686,32	31,85	4,34	7.200,00	657,77	19,20	0,00	7.200,00	666,08	8,88	1,26
E023-05s	1	22	22	5	0,00	568,56	2,084,30	568,56	0,00	0,00	1.233,00	568,56	0,00	0,00	0,13	568,56	0,00	0,00
	2	22	29	5	3,30	674,55	7.200,00	792,08	41,17	17,42	7.200,00	674,55	20,21	0,00	46,80	674,55	0,00	0,00
	3	22	42	5	6,70	738,43	7.200,00	812,71	43,41	10,06	7.200,00	740,85	26,21	0,33	7.200,00	740,85	9,60	0,33
	4	22	48	5	3,30	692,47	7.200,00	916,91	49,08	32,41	7.200,00	692,47	23,77	0,00	7.200,00	692,47	4,14	0,00
	5	22	52	6	1,80	609,9	7.200,00	718,86	34,80	17,87	7.200,00	609,90	13,10	0,00	7.200,00	615,51*	3,59	0,92

Fonte: o autor.

Tabela 4.5 – Resultados dos modelos para a versão irrestrita e custo real comparados com Wei et al. (2015) (...continuação.).

Nome	Instâncias			Wei et al. (2015)			Modelo completo			Modelo de três índices			Modelo de dois índices					
	Cl	n	M	K	Tempo	Solução	Tempo	Solução	GAP(%)	Diferença(%)	Tempo	Solução	GAP(%)	Diferença(%)	Tempo	Solução	GAP(%)	Diferença(%)
E026-08m	1	25	25	8	0,10	607,65	7.200,00	620,24	38,29	2,07	7.200,00	615,44	34,59	1,28	0,59	607,65	0,00	0,00
	2	25	40	8	0,40	607,65	7.200,00	824,99	55,42	35,77	7.200,00	623,52	37,77	2,61	1,08	607,65	0,00	0,00
	3	25	61	8	0,50	607,65	7.200,00	-	-	-	7.200,00	613,60	37,78	0,98	2,69	607,65	0,00	0,00
	4	25	63	8	4,30	625,1	7.200,00	-	-	-	7.200,00	628,48	36,52	0,54	3,55	625,10	0,00	0,00
	5	25	91	8	0,20	607,65	7.200,00	-	-	-	7.200,00	607,65	34,24	0,00	3,17	607,65	0,00	0,00
E030-03g	1	29	29	3	0,10	535,8	7.200,00	556,98	40,08	3,95	7.200,00	545,16	36,29	1,75	6,13	535,80	0,00	0,00
	2	29	43	6	20,00	689,82	7.200,00	1.113,92	72,64	61,48	7.200,00	718,31	56,80	4,13	7.200,00	752,15	24,51	9,04
	3	29	49	6	3,40	620,33	7.200,00	876,90	65,08	41,36	7.200,00	791,28*	61,51	27,56	7.200,00	648,50	17,65	4,54
	4	29	72	7	3,70	710,87	7.200,00	1.166,53	73,94	64,10	7.200,00	730,46	57,71	2,76	7.200,00	791,18	31,94	11,30
	5	29	86	7	73,00	678,66	7.200,00	1.034,63	70,12	52,45	7.200,00	699,01	54,55	3,00	7.200,00	777,13*	32,09	14,51
E030-04s	1	29	29	4	0,00	505,01	7.200,00	513,38	34,55	1,66	7.200,00	505,01	31,90	0,00	0,17	505,01	0,00	0,00
	2	29	43	6	142,00	693,45	7.200,00	-	-	-	7.200,00	800,17	61,39	15,39	7.200,00	-	-	-
	3	29	62	7	6,80	706,73	7.200,00	-	-	-	7.200,00	716,31	56,87	1,36	7.200,00	781,47*	29,90	10,58
	4	29	74	7	88,00	784,88	7.200,00	-	-	-	7.200,00	911,72*	66,56	16,16	7.200,00	-	-	-
	5	29	91	7	3,50	624,82	7.200,00	902,58	66,32	44,45	7.200,00	671,8*	54,58	7,52	7.200,00	-	-	-
E031-09h	1	30	30	9	0,90	610	7.200,00	658,47	46,68	7,95	7.200,00	665,41	46,55	9,08	605,00	610,00	0,00	0,00
	2	30	50	9	1,70	610,57	7.200,00	-	-	-	7.200,00	705,77	49,29	15,59	662,90	610,57	0,00	0,00
	3	30	56	9	6,80	610	7.200,00	-	-	-	7.200,00	632,42	43,72	3,68	437,40	610,00	0,00	0,00
	4	30	82	9	6,50	614,24	7.200,00	-	-	-	7.200,00	660,52	48,27	7,53	1.471,00	614,24	0,00	0,00
	5	30	101	9	4,20	610	7.200,00	-	-	-	7.200,00	637,80	44,47	4,56	665,80	610,00	0,00	0,00
E033-03n	1	32	32	3	0,10	2006,34	7.200,00	2.077,25	16,27	3,53	7.200,00	2.013,26	20,19	0,34	0,33	2.006,34	0,00	0,00
	2	32	44	7	66,00	2585,72	7.200,00	4.353,80	66,83	68,38	7.200,00	2.750,98	48,56	6,39	7.200,00	2.744,61	16,89	6,14
	3	32	56	7	7,00	2468,06	7.200,00	-	-	-	7.200,00	2.590,85	45,35	4,98	7.200,00	2.526,46	17,12	2,37
	4	32	78	7	15,00	2548,06	7.200,00	-	-	-	7.200,00	3168,66*	55,60	24,36	7.200,00	-	-	-
	5	32	102	8	13,00	2334,78	7.200,00	2.987,42	53,31	27,95	7.200,00	2.388,17	40,88	2,29	7.200,00	-	-	-
E033-04g	1	32	32	4	0,10	837,67	7.200,00	1.019,07	63,71	21,66	7.200,00	871,42	56,90	4,03	0,32	837,67	0,00	0,00
	2	32	47	7	502,00	1040,74	7.200,00	1.951,73	81,29	87,53	7.200,00	1.154,05	68,25	10,89	7.200,00	1.178,91	27,26	13,28
	3	32	57	7	245,00	1003,52	7.200,00	1.387,99	73,64	38,31	7.200,00	1.605,7*	77,27	60,01	7.200,00	1.168,5*	27,58	16,44
	4	32	65	7	6,60	981	7.200,00	1.398,81	73,89	42,59	7.200,00	1.045,14	64,86	6,54	7.200,00	1.033,81*	18,86	5,38
	5	32	87	8	428,00	875	7.200,00	1.348,96	72,93	54,17	7.200,00	1.009,32	63,67	15,35	7.200,00	1.026,92	18,41	17,36
E033-05s	1	32	32	5	0,10	837,67	7.200,00	925,14	59,70	10,44	7.200,00	894,31	58,76	6,76	0,49	837,67	0,00	0,00
	2	32	48	6	261,00	1017,95	7.200,00	1.516,90	75,91	49,02	7.200,00	1.122,10	67,07	10,23	7.200,00	1.166,91	27,07	14,63
	3	32	59	6	646,00	1155,22	7.200,00	-	-	-	7.200,00	1.237,58	70,36	7,13	7.200,00	-	-	-
	4	32	84	8	49,00	1181,3	7.200,00	-	-	-	7.200,00	1.563,95*	76,65	32,29	7.200,00	1.308,61	35,20	10,78
	5	32	114	8	29,00	1159,94	7.200,00	-	-	-	7.200,00	1.201,60	69,54	3,59	7.200,00	1.359,16*	37,30	17,18
E036-11h	1	35	35	11	1,10	698,61	7.200,00	925,65	59,60	32,50	7.200,00	917,74	58,14	31,37	1.658,0	698,61	0,00	0,00
	2	35	56	11	1,70	698,61	7.200,00	-	-	-	7.200,00	-	-	-	242,80	698,60	0,00	0,00
	3	35	74	11	1,30	698,61	7.200,00	-	-	-	7.200,00	953,61	59,80	36,50	206,70	698,60	0,00	0,00
	4	35	93	11	1,90	703,35	7.200,00	-	-	-	7.200,00	988,48	61,88	40,54	223,60	703,35	0,00	0,00
	5	35	114	11	1,50	698,61	7.200,00	-	-	-	7.200,00	831,79	54,04	19,06	166,70	698,60	0,00	0,00
<b>Média</b>				33,59		6.995,13	42,40	20,20	35,07	5,87	6.642,55	5,87	5,52	2.502,88	5,52	2,15		

Fonte: o autor.

Na comparação da diferença percentual do valor de solução, nota-se que alguns modelos conseguiram solução com valor negativo frente a solução reportada por [Wei et al. \(2015\)](#). Isso representa a existência de rotas únicas. Assim, na comparação, tem-se que o modelo completo não obteve qualquer solução melhor, o de três índices obteve uma solução melhor e o de dois índices retornou duas soluções melhores.

O tempo computacional gasto por [Wei et al. \(2015\)](#) foi, em média, de 33,59 segundos. O modelo completo teve um tempo médio de 6.995,13 segundos, ao passo que os modelos de três e dois índices gastaram, em média, 6.642,55 e 2.502,88 segundos, respectivamente.

### 4.1.3 Comparação entre os Modelos

Com o intuito de comparar os resultados obtidos pelos modelos desenvolvidos, mostra-se nas Tabelas 4.6 e 4.7 as informações sobre a quantidade de cortes inseridos e o tempo gasto com os cortes para os modelos com procedimentos de separação e os dois diferentes tipos de custo para as arestas. Assim, cada linha da tabela contém: nome da instância; para as arestas de custo inteiro, e para o modelo de três índices: tempo gasto em segundos com as chamadas ao CBP, quantidade de cortes gerados a partir da resolução do CBP, tempo gasto em segundos com as chamadas para resolver o 2OPP e a quantidade de cortes inseridos após resolver o 2OPP; e, para o modelo de dois índices, acrescenta-se a quantidade de cortes inseridos com uso do CVRPSEP. Essas mesmas informações são colocadas para os testes envolvendo custo as arestas de custo real.

Observando as Tabelas 4.6 e 4.7, nota-se que a quantidade de cortes inseridos para o CBP e para o 2OPP é inverso ao tempo gasto em segundos de cada. Ou seja, o número total de cortes inseridos pelo CBP é maior que a quantidade de cortes inseridos pelo 2OPP, sendo que o tempo gasto do CBP, em média, é relativamente menor ao tempo médio gasto pelo 2OPP. Com isso, ao usar o CBP como relaxação para verificar a viabilidade das rotas, depara-se com a diminuição do tempo computacional exigido pelo B&C. Além disso, nota-se que as instâncias com arestas de custo real têm exigido relativamente mais cortes e, conseqüentemente, mais tempo de processamento para obter esses cortes.

As Figuras 4.1, 4.2 e 4.3 trazem as comparações entre os modelos desenvolvidos, observando as Tabelas 4.2 a 4.5, para a quantidade de soluções resolvidas na otimalidade, o valor médio do GAP e o tempo médio em segundos, respectivamente. Na mesma figura está apresentado os valores para os dois tipos de teste, para arestas com custo inteiro e real.

A Figura 4.1 mostra claramente que o modelo de dois índices é superior aos demais modelos, tendo resolvido um número bem maior de instâncias na otimalidade. Nota-se ainda que a diferença entre custo real e custo inteiro para as arestas não trouxe influência na quantidade de soluções ótimas obtidas. A Figura 4.2 enfatiza que o modelo de dois índices é o melhor, com GAP médio bem inferior ao dos demais modelos, sendo seguido pelo modelo



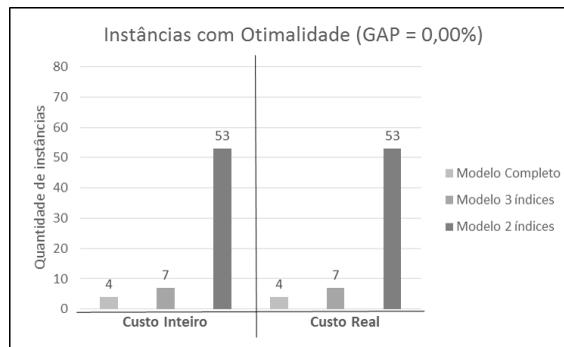
Tabela 4.7 – Quantidade de cortes inseridos e tempo gasto pelos procedimentos para a versão irrestrita (...continuação...).

Instâncias	Modelo de três índices						Custo Inerteo						Modelo de dois índices						Custo Real					
	Nome	CI	Tempo CBP	Cortes CBP	Tempo 20PP	Cortes 20PP	Cortes CVR/SEP	Tempo CBP	Cortes CBP	Tempo 20PP	Cortes 20PP	Tempo CBP	Cortes CBP	Tempo 20PP	Cortes 20PP	Cortes CVR/SEP	Tempo CBP	Cortes CBP	Tempo 20PP	Cortes 20PP				
E026-08m	1	0,00	0	0,00	0	0	520	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	1,042	0,00	0	0,00	0				
	2	0,00	8	0,31	0	0	664	0,00	1	0,31	0	0,04	32	3,54	0	971	0,00	1	0,36	0				
	3	68,25	40	10,98	0	0	520	0,00	0	0,99	0	0,16	8	5,16	0	1,042	0,01	0	1,59	0				
	4	0,05	16	2,31	0	0	3,121	0,06	1	1,90	0	0,01	8	0,71	0	1,696	0,06	1	1,60	0				
	5	0,04	0	0,81	0	0	520	0,01	0	0,51	0	0,03	0	0,79	0	1,042	0,02	0	1,81	0				
E030-03g	1	0,00	0	0,01	0	0	1,189	0,00	0	0,01	0	0,01	0	0,01	0	1,315	0,00	0	0,00	0				
	2	6,77	414	44,09	0	0	122,164	42,09	2278	260,70	0	6,29	450	49,96	6	127,441	89,25	3,020	344,90	0				
	3	4,54	36	867,50	6	0	44,082	149,40	1697	5,338,00	0	3,50	6	7,226,00	0	35,228	134,20	1,219	6,040,00	0				
	4	11,17	91	145,10	0	0	-	-	-	-	0	20,27	77	674,10	0	9,886	138,80	681	7,188,00	0				
	5	218,20	7	3,041,00	0	0	27,322	-	1448	-	0	27,23	7	109,10	0	21,418	2,683,00	1,166	4,122,00	0				
E030-04s	1	0,00	0	0,01	0	0	72	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	76	0,00	0	0,00	0				
	2	5,98	726	96,53	0	0	105,800	36,50	3153	424,40	1	11,58	960	131,80	0	-	-	-	-	0				
	3	9,59	161	202,30	0	0	-	-	-	-	0	5,54	112	117,90	0	100,251	172,50	2,981	3,946,00	0				
	4	41,28	154	5,010,00	14	0	-	-	-	-	0	24,33	196	6,893,00	14	-	-	-	-	-	0			
	5	3,827,00	0	7,309,00	0	0	-	-	-	-	0	4,064,00	0	4,523,00	0	-	-	-	-	-	0			
E031-09h	1	0,00	0	0,00	0	0	16,830	0,00	0	0,01	0	0,00	0	0,00	0	37,128	0,00	0	0,01	0				
	2	0,00	9	0,52	0	0	23,965	0,02	5	5,34	0	0,02	36	1,38	0	37,630	0,05	11	4,46	0				
	3	0,01	0	3,99	0	0	16,830	0,01	0	0,08	0	0,00	0	0,03	0	20,816	0,04	2	0,51	0				
	4	2,56	27	29,49	0	0	33,244	1,45	25,58	0	1,53	54	16,67	0	54,740	2,70	2,70	45,22	0					
	5	0,03	0	5,81	0	0	16,830	2,70	60,89	0	0,04	0	0	3,54	0	37,128	2,96	0	57,83	0				
E033-03n	1	0,00	0	0,00	0	0	410	0,00	0	0,00	0	0,01	0	0,02	0	364	0,00	0	0,00	0				
	2	4,79	1,792	141,20	0	0	154,544	22,73	3505	204,70	0	20,79	4,732	493,10	7	158,171	27,79	3,500	218,60	0				
	3	8,72	98	3,033,00	7	0	45,013	86,63	1030	6,031,00	0	20,91	217	1,958,00	7	28,363	76,13	762	7,056,00	0				
	4	107,30	119	5,646,00	7	0	57,968	601,20	2783	4,882,00	0	173,20	301	7,812,00	0	-	-	-	-	0				
	5	109,70	8	1,170,00	0	0	1,567	-	-	-	0	17,84	0	245,30	0	-	-	-	-	0				
E033-04g	1	0,01	0	0,02	0	0	537	0,00	0	0,00	0	0,01	0	0,02	0	476	0,00	0	0,00	0				
	2	27,89	1,540	289,90	0	0	157,201	100,50	1869	815,30	2	25,59	1,470	289,30	0	194,691	83,83	2,291	1,050,00	2				
	3	27,35	133	82,45	0	0	96,411	228,90	1947	3,950,00	2	8,36	35	7,241,00	0	105,492	2,25,20	2,074	4,210,00	1				
	4	9,56	56	200,60	0	0	-	-	-	-	0	1,493,00	14	734,70	0	36,109	487,90	872	6,487,00	0				
	5	24,82	0	229,30	0	0	5,195	1,079,00	212	6,057,00	0	339,10	8	207,80	0	5,695	948,90	204	6,178,00	0				
E033-05s	1	0,01	0	0,02	0	0	739	0,00	0	0,01	0	0,00	0	0,01	0	664	0,00	0	0,00	0				
	2	37,15	1,110	464,70	6	0	163,018	82,37	1921	717,80	0	22,15	618	464,90	6	206,078	105,20	2,409	924,80	0				
	3	59,28	714	1,114,00	0	0	-	-	-	-	0	114,20	402	416,90	0	-	-	-	-	0				
	4	150,00	232	7,200,00	0	0	-	-	-	-	0	206,00	120	8,471,00	0	82,366	699,10	2,159	4,799,00	0				
	5	125,40	8	8,089,00	0	0	84,265	1,818,00	1778	3,678,00	0	147,30	8	1,428,00	0	119,987	767,70	2,128	4,228,00	0				
E036-11h	1	0,00	0	0,00	0	0	4,154	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,01	0	11,933	0,00	0	0,00	0				
	2	-	-	-	-	-	4,154	0,00	0	0,21	0	-	-	-	0	9,712	0,03	3	0,56	0				
	3	0,01	0	4,44	0	0	4,154	0,00	0,00	0,47	0	0,03	0	9,12	0	14,789	0,34	1	3,36	0				
	4	-	-	-	-	-	7,772	0,43	5	21,72	0	0,63	22	15,36	0	9,588	4,85	6	10,54	0				
	5	0,02	0	0,94	0	0	4,154	0,01	0,05	0,05	0	0,10	0	8,16	0	11,933	0,03	0	0,11	0				
<b>Média</b>	<b>Total</b>	<b>8,049</b>	<b>103,19</b>	<b>640,17</b>	<b>0,59</b>	<b>1,316,016</b>	<b>123,40</b>	<b>36,302</b>	<b>706,08</b>	<b>0,11</b>	<b>91,20</b>	<b>11,042</b>	<b>711,25</b>	<b>0,57</b>	<b>1,590,514</b>	<b>167,49</b>	<b>518,01</b>	<b>1,097,77</b>	<b>0,07</b>					

Fonte: o autor.

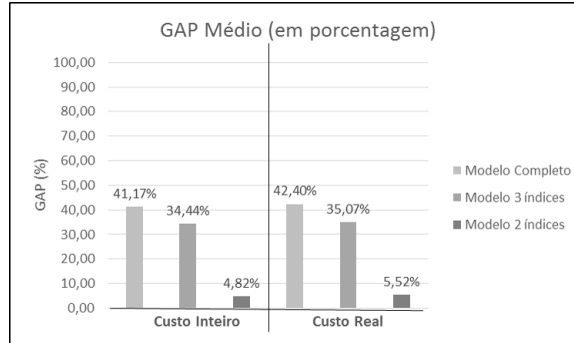
de três índices e depois pelo modelo completo. Em termos de custo para as arestas, na Figura 4.2 já é possível fazer uma distinção mais clara, observando que o custo inteiro para as arestas trouxe uma ligeira melhora para os GAPs em todos os modelos, embora na Figura 4.3 esteja demonstrado que o tempo médio gasto para resolver o modelo completo com custo real para as arestas seja ligeiramente menor, sendo que para os demais modelos o tempo médio é um pouco maior.

Figura 4.1 – Quantidade de instâncias resolvidas na otimalidade para a versão irrestrita.



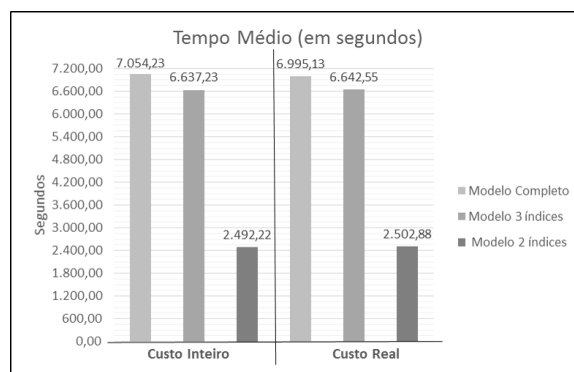
Fonte: o autor.

Figura 4.2 – GAP médio (em porcentagem) para os três modelos na versão irrestrita.



Fonte: o autor.

Figura 4.3 – Tempo médio (em segundos) para os três modelos sobre a versão irrestrita.



Fonte: o autor.

## 4.2 Versão Sequencial

As tabelas apresentadas nessa seção trazem os resultados para as instâncias comparando com [Hokama, Miyazawa e Xavier \(2016\)](#) e [Côté, Guastarofa e Speranza \(2017\)](#), quando o custo é inteiro para as arestas, e comparando com [Wei et al. \(2015\)](#), quando o custo é real. Para os efeitos de comparação, fez-se a execução apenas do modelo de dois índices, uma vez que foi o modelo com o melhor comportamento (mais instâncias resolvidas na otimalidade, menor GAP médio e menor tempo computacional médio) frente aos outros dois desenvolvidos. Vale destacar ainda que algumas soluções encontradas pelo modelo de dois índices tiveram um valor menor do que o reportado por [Hokama, Miyazawa e Xavier \(2016\)](#), uma vez que são permitidas rotas únicas e o uso de um número menor ou igual ao de veículos disponíveis.

As tabelas com os resultados da versão sequencial do 2L-CVRP possuem informações que incluem o nome de cada instância, a classe, a quantidade de clientes ( $n$ ), a quantidade total de itens ( $M$ ), a quantidade de veículos ( $K$ ), o tempo gasto em segundos e o valor da solução encontrado por [Wei et al. \(2015\)](#) ou [Hokama, Miyazawa e Xavier \(2016\)](#) ou [Côté, Guastarofa e Speranza \(2017\)](#). Inclui também os resultados encontrados pelo modelo de dois índices, isto é, o tempo total gasto em segundos, o valor da solução, o GAP em porcentagem retornado pelo *Gurobi* e a diferença percentual entre o valor da solução encontrado pelo modelo com o valor da solução reportado pela literatura.

### 4.2.1 Resultado para Arestas com Custo Inteiro

As Tabelas 4.8 e 4.9 trazem os resultados obtidos ao usar o modelo de dois índices na versão sequencial e com custo inteiro para as arestas, sendo que a comparação é feita em relação o valor da solução encontrado por [Hokama, Miyazawa e Xavier \(2016\)](#) e por [Côté, Guastarofa e Speranza \(2017\)](#). Para os resultados reportados, o modelo de dois índices conseguiu chegar na solução ótima de 33 das 80 instâncias. Para 09 dessas instâncias (diferença percentual negativa), o valor reportado por este modelo é melhor do que o apresentado por [Hokama, Miyazawa e Xavier \(2016\)](#), uma vez que são permitidas rotas únicas e/ou utilizar um número menor de veículos.

Comparando com [Côté, Guastarofa e Speranza \(2017\)](#), empata em termos de solução com 13 instâncias (solução igual) e perde em seis instâncias (solução maior). Sendo que vale destacar, que os autores em algumas instâncias fazem o uso do número de veículos maior que os  $K$  disponíveis.

Na comparação para as demais instâncias nas Tabelas 4.8 e 4.9, o modelo de dois índices foi capaz de encontrar solução viável para diversas instâncias com o GAP variando de 2,20% a 21,71%. Por outro lado, esse modelo não encontrou qualquer solução para 32 instâncias. Vale comentar que os valores marcados com (\*) indicam as instâncias que ultra-

passaram o tempo estipulado para detectar a viabilidade do empacotamento, assim com a solução sendo não ótima. Além disso, o tempo computacional gasto por [Hokama, Miyazawa e Xavier \(2016\)](#) foi, em média, de 1.125,89 segundos, por [Côté, Guastarofa e Speranza \(2017\)](#) foi 3.084,29, enquanto o modelo de dois índices teve um tempo de 4.381,93 segundos, na média por instância.

### 4.2.2 Resultado para Arestas com Custo Real

As Tabelas [4.10](#) e [4.11](#) apresentam os resultados obtidos ao usar o modelo de dois índices, na versão sequencial, para as arestas com custo real. Neste caso, a comparação ocorre com a heurística de [Wei et al. \(2015\)](#), a qual conseguiu retornar solução viável para todas as instâncias, ao contrário do modelo de dois índices.

As piores soluções encontradas, ao resolver o modelo de dois índices, possuem GAP aproximado de 29,47%, conforme as Tabelas [4.10](#) e [4.11](#). Por outro lado, com esse modelo foi possível resolver, de forma ótima, 37 das 80 instâncias (GAP igual a 0%). Para 01 dessas instâncias, o valor reportado é melhor do que o apresentado por [Wei et al. \(2015\)](#) (veja a instância E026-08m.2). Para as demais instâncias, as soluções viáveis encontradas tiveram um GAP final variando de 2,36% a 29,47%, sendo que não foi possível encontrar qualquer solução para 29 instâncias. Em termos de tempo computacional, a heurística de [Wei et al. \(2015\)](#) usou, em média, 49,92 segundos, enquanto o modelo de dois índices precisou de um tempo médio de 4.345,59 segundos por instância.

### 4.2.3 Comparação entre os Modelos

Com o intuito de comparar os resultados obtidos pelo modelo de dois índices na versão sequencial do 2L-CVRP para ambos os custos nas arestas (real e inteiro), mostram-se nas Tabelas [4.12](#) e [4.13](#) as informações sobre a quantidade de cortes inseridos em cada caso e o tempo gasto com os procedimentos de separação para obter tais cortes. Assim, cada linha das tabelas possui: nome da instância; para o custo inteiro para as arestas: quantidade de cortes inseridos usando o CVRPSEP, tempo gasto em segundos com as chamadas para resolver o CBP, quantidade de cortes gerados a partir da resolução do CBP, tempo gasto em segundos com as chamadas para resolver o 2OPP e a quantidade de cortes inseridos após resolver o 2OPP. Essas mesmas informações são colocadas para os testes envolvendo o custo real para as arestas.

Como comentado anteriormente (veja Subseção [4.1.3](#)) para a quantidade de cortes envolvendo o caso irrestrito, o número total de cortes inseridos na versão sequencial, após a resolução do CBP, é maior que a quantidade de cortes inseridos após resolver o 2OPP, sendo que o tempo gasto para obter os cortes do CBP é, em média, relativamente menor do que o tempo médio gasto com relação aos cortes para oriundos do 2OPP.

Tabela 4.8 – Resultado do modelo de dois índices para a versão sequencial e custo inteiro comparado com Hokkama, Miyazawa e Xavier (2016) (continua...).

Instâncias	Hokkama, Miyazawa e Xavier (2016)				Côté, Guastarofá e Speranza (2017)				Modelo de dois índices				
	Nome	Cl	n	M	K	Tempo	Solução	Tempo	Solução	Tempo	Solução	Diferença Hokkama, Miyazawa e Xavier (2016) (%)	Diferença Côté, Guastarofá e Speranza (2017) (%)
E016-03m	1	15	15	3	3	1,14	273	-	-	0,40	273	0,00	0,00
	2	15	24	3	3	21,16	285	0,30	277	7.200,00	327	0,00	14,74
	3	15	31	3	3	85,22	280	0,80	280	7.200,00	-	-	-
	4	15	37	4	4	23,97	288	0,40	288	7.200,00	-	-	-
	5	15	45	4	4	600,76	279	0,40	273	7.200,00	329	19,45	17,92
E016-05m	1	15	15	5	5	0,30	329	-	-	0,32	329	0,00	0,00
	2	15	25	5	5	2,76	342	0,20	337	5,71	342	0,00	0,00
	3	15	31	5	5	7,18	347	0,30	345	311,70	347	0,00	0,00
	4	15	40	5	5	287,74	336	0,10	326	1.218,00	336	0,00	0,00
	5	15	48	5	5	0,54	329	0,10	326	205,30	329	0,00	0,00
E021-04m	1	20	20	4	4	0,46	351	-	-	7,61	351	0,00	0,00
	2	20	29	5	5	2,275,52	396	1,62,00	396	7.200,00	403	9,18	1,77
	3	20	46	5	5	373,43	387	5,50	387	7.200,00	-	-	-
	4	20	44	5	5	99,07	374	2,80	360	7.200,00	-	-	-
	5	20	49	5	5	520,81	369	0,30	351	386,90	351	0,00	-4,88
E021-06m	1	20	20	6	6	1,48	423	-	-	4,76	423	0,00	0,00
	2	20	32	6	6	4,15	434	0,80	434	199,10	434	0,00	0,00
	3	20	43	6	7	4,74	432	0,70	432	1.675,00	432	0,00	0,00
	4	20	50	6	7	57,29	438	0,70	433	7.200,00	445	6,29	1,60
	5	20	62	6	6	3.011,87	423	0,10	423	73,51	423	0,00	0,00
E022-04g	1	21	21	4	4	0,05	367	-	-	0,47	367	0,00	0,00
	2	21	31	4	4	2,17	380	0,30	380	3.131,00	380	0,00	0,00
	3	21	37	4	4	46,73	373	0,10	373	863,40	373	0,00	0,00
	4	21	41	4	4	892,87	377	0,20	377	379,30	377	0,00	0,00
	5	21	57	5	4	605,29	389	0,20	367	85,39	367	0,00	-5,66
E022-06m	1	21	21	6	6	0,95	488	-	-	77,63	488	0,00	0,00
	2	21	33	6	6	4,33	491	0,40	491	155,40	491	0,00	0,00
	3	21	40	6	7	35,46	496	0,80	492	1.091,00	496	0,00	0,00
	4	21	57	6	6	141,67	489	0,30	489	7.200,00	503	3,98	2,86
	5	21	56	6	6	4.491,52	488	0,20	488	167,20	488	0,00	0,00
E023-03g	1	22	22	3	3	0,02	558	-	-	0,19	558	0,00	0,00
	2	22	32	5	5	3.600,01	724	73,90	724	7.200,00	783	21,71	8,15
	3	22	41	5	4	98,88	698	7,60	693	7.200,00	-	-	-
	4	22	51	5	4	2.120,64	714	2,50	693	7.200,00	-	-	-
	5	22	55	6	4	1.035,19	742	10,20	647	7.200,00	-	-	-
E023-05s	1	22	22	5	5	0,02	657	-	-	0,19	657	0,00	-15,07
	2	22	29	5	4	778,18	720	116,40	716	7.200,00	767	19,55	6,53
	3	22	42	5	5	3.600,00	730	6,10	730	7.200,00	-	-	-
	4	22	48	5	4	1.611,09	701	3,60	687	7.200,00	-	-	-
	5	22	52	6	3	601,37	721	237,30	605	7.200,00	658	15,20	-8,74

Fonte: o autor.

Tabela 4.9 – Resultado do modelo de dois índices para a versão sequencial e custo inteiro comparado com Hokama, Miyazawa e Xavier (2016) (...continuação.).

Nome	Instâncias				Hokama, Miyazawa e Xavier (2016)			Côté, Guastarola e Speranza (2017)			Modelo de dois índices					
	Cl	n	M	K	Tempo	Solução	Tempo	Veículos Usados	Solução	GAP	Tempo	Veículos Usados	Solução	GAP	Diferença Hokama, Miyazawa e Xavier (2016)(%)	Diferença Côté, Guastarola e Speranza (2017)(%)
E026-08m	1	25	25	8	0,62	609	-	-	-	-	0,49	8	595	0,00	-2,30	-
	2	25	40	8	0,47	612	8	598	0,00	3,17	8	598	0,00	-2,29	0,00	
	3	25	61	8	1,62	615	8	601	0,00	1,256,00	8	601	0,00	-2,28	0,00	
	4	25	63	8	95,70	626	9	609	0,00	704,60	8	612	0,00	-2,24	0,49	
	5	25	91	8	3.112,99	609	8	595	0,00	106,00	8	595	0,00	-2,30	0,00	
E030-03g	1	29	29	3	1,25	524	-	-	-	-	27,26	3	524	0,00	0,00	-
	2	29	43	6	3.600,00	-	6	687	0,00	7,200,00	-	-	-	-	-	-
	3	29	49	6	3.600,01	637	5	616	0,00	7,200,00	-	-	-	-	-	-
	4	29	72	7	3.600,00	-	6	703	0,00	7,200,00	-	-	-	-	-	-
	5	29	86	7	3.600,00	-	6	675	0,00	7,200,00	-	-	-	-	-	-
E030-04s	1	29	29	4	-	-	-	-	-	0,47	4	494	0,00	-	-	-
	2	29	43	6	-	-	6	708	6,47	7,200,00	-	-	-	-	-	-
	3	29	62	7	-	-	6	705	0,00	7,200,00	-	-	-	-	-	-
	4	29	74	7	-	-	7	781	2,27	7,200,00	-	-	-	-	-	-
	5	29	91	7	-	-	6	613	0,00	7,200,00	-	-	-	-	-	-
E031-09h	1	30	30	9	-	-	-	-	-	7,200,00	9	600	2,83	-	-	-
	2	30	50	9	-	-	10	591	0,00	7,200,00	-	-	-	-	-	-
	3	30	56	9	-	-	10	587	0,00	7,200,00	9	599	2,50	-	2,04	
	4	30	82	9	-	-	10	598	0,00	7,200,00	9	606	5,77	-	1,34	
	5	30	101	9	-	-	10	587	0,00	7,200,00	9	612	10,13	-	4,26	
E033-03n	1	32	32	3	0,15	1.991	-	-	-	1,86	3	1.991	0,00	0,00	-	-
	2	32	44	7	3.600,00	-	6	2.656	7,23	7,200,00	-	-	-	-	-	-
	3	32	56	7	3.600,00	2.854	6	2.472	0,00	7,200,00	-	-	-	-	-	-
	4	32	78	7	3.600,00	-	6	2.595	0,00	7,200,00	-	-	-	-	-	-
	5	32	102	8	3.600,00	2.621	5	2.333	0,78	7,200,00	-	-	-	-	-	-
E033-04g	1	32	32	4	-	-	-	-	-	3,43	4	823	0,00	-	-	-
	2	32	47	7	-	-	5	1.071	5,37	7,200,00	-	-	-	-	-	-
	3	32	57	7	-	-	5	1.023	4,46	7,200,00	-	-	-	-	-	-
	4	32	65	7	-	-	5	965	0,35	7,200,00	-	-	-	-	-	-
	5	32	87	8	-	-	5	907	6,39	7,200,00	-	-	-	-	-	-
E033-05s	1	32	32	5	-	-	-	-	-	11,92	4	823	0,00	-	-	-
	2	32	48	6	-	-	5	1.028	3,94	7,200,00	-	-	-	-	-	-
	3	32	59	6	-	-	6	1.165	6,20	7,200,00	-	-	-	-	-	-
	4	32	84	8	-	-	6	1.226	6,98	7,200,00	-	-	-	-	-	-
	5	32	114	8	-	-	6	1.143	0,00	7,200,00	-	-	-	-	-	-
E036-11h	1	35	35	11	218,15	682	-	-	-	7,200,00	11	682	2,20	0,00	-	-
	2	35	56	11	364,63	682	11	682	0,00	7,200,00	-	-	-	-	-	-
	3	35	74	11	712,04	682	11	682	0,00	7,200,00	-	-	-	-	-	-
	4	35	93	11	3.600,00	691	11	691	0,00	7,200,00	11	696	4,88	0,72	0,72	
	5	35	114	11	3.600,00	-	11	682	0,00	7,200,00	11	682	2,20	-	0,00	
				<b>Media</b>	1.125,89		3.084,29	0,81	4.381,93	2,95	0,21	2,68				

Fonte: o autor.

Tabela 4.10 – Resultado do modelo de dois índices para a versão sequencial e custo real comparado com Wei *et al.* (2015) (continua...).

Nome	Instâncias				Wei <i>et al.</i> (2015)		Modelo de dois índices			
	Cl	n	M	K	Tempo	Solução	Tempo	Solução	GAP(%)	Diferença(%)
E016-03m	1	15	15	3	0,00	278,73	1,50	278,73	0,00	0,00
	2	15	24	3	3,30	290,84	7.200,00	313,87	9,76	7,92
	3	15	31	3	1,10	284,52	7.200,00	-	-	-
	4	15	37	4	0,50	294,25	7.200,00	309,64*	12,58	5,23
	5	15	45	4	3,20	278,73	7.200,00	278,98*	3,08	0,09
E016-05m	1	15	15	5	0,00	334,96	1,84	334,96	0,00	0,00
	2	15	25	5	0,40	347,73	7,45	347,73	0,00	0,00
	3	15	31	5	1,60	352,16	354,30	352,16	0,00	0,00
	4	15	40	5	0,20	342,00	1.448,00	342,00	0,00	0,00
	5	15	48	5	0,00	334,96	189,10	334,96	0,00	0,00
E021-04m	1	20	20	4	0,10	358,40	0,50	358,40	0,00	0,00
	2	20	29	5	0,90	403,93	7.200,00	406,66	8,35	0,68
	3	20	46	5	1,50	394,72	7.200,00	-	-	-
	4	20	44	5	2,00	368,56	7.200,00	368,56	2,96	0,00
	5	20	49	5	1,40	358,40	156,10	358,40	0,00	0,00
E021-06m	1	20	20	6	0,00	430,89	13,94	430,89	0,00	0,00
	2	20	32	6	0,40	440,94	450,70	440,94	0,00	0,00
	3	20	43	6	0,50	440,68	1.500,00	440,68	0,00	0,00
	4	20	50	6	2,60	447,37	2.290,00	447,37	0,00	0,00
	5	20	62	6	0,30	430,89	4.585,00	430,89*	0,00	0,00
E022-04g	1	21	21	4	0,00	375,28	0,28	375,28	0,00	0,00
	2	21	31	4	2,40	388,72	3.972,00	388,72	0,00	0,00
	3	21	37	4	9,00	381,69	6.278,00	381,69	0,00	0,00
	4	21	41	4	4,40	383,88	1.689,00	383,88	0,00	0,00
	5	21	57	5	0,80	375,28	84,83	375,28	0,00	0,00
E022-06m	1	21	21	6	0,10	495,85	18,72	495,85	0,00	0,00
	2	21	33	6	0,50	499,08	81,94	499,08	0,00	0,00
	3	21	40	6	2,50	504,68	1.467,00	504,68	0,00	0,00
	4	21	57	6	3,00	498,32	7.200,00	641,04*	24,48	28,64
	5	21	56	6	0,90	495,85	229,00	495,85	0,00	0,00
E023-03g	1	22	22	3	0,00	568,56	0,23	568,56	0,00	0,00
	2	22	32	5	1,80	734,65	7.200,00	751,96	15,42	2,36
	3	22	41	5	5,20	709,72	7.200,00	808,75*	29,47	13,95
	4	22	51	5	14,00	703,49	7.200,00	-	-	-
	5	22	55	6	28,00	658,64	7.200,00	-	-	-
E023-05s	1	22	22	5	0,00	568,56	0,19	568,56	0,00	0,00
	2	22	29	5	16,00	725,91	7.200,00	808,99	22,88	11,44
	3	22	42	5	1,90	741,12	7.200,00	-	-	-
	4	22	48	5	31,00	697,92	7.200,00	-	-	-
	5	22	52	6	35,90	621,85	7.200,00	-	-	-

Fonte: o autor.

Tabela 4.11 – Resultado do modelo de dois índices para a versão sequencial e custo real comparado com Wei *et al.* (2015) (...continuação.).

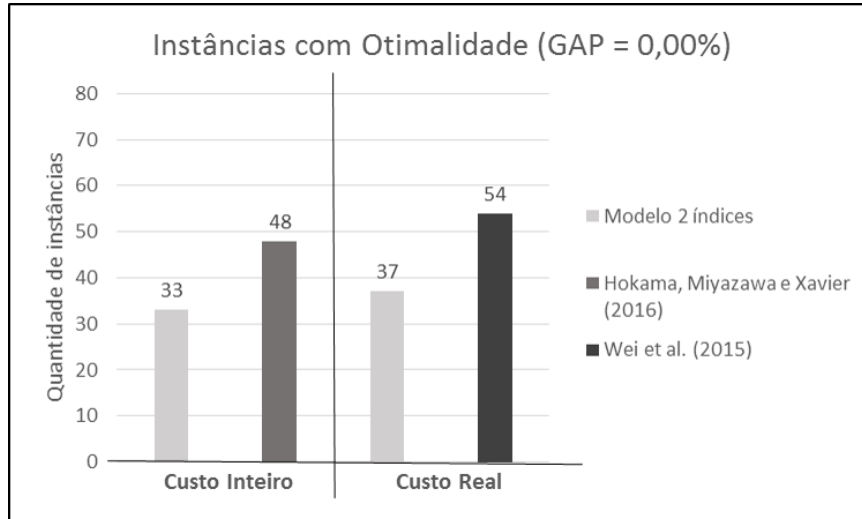
Nome	Instâncias			Wei <i>et al.</i> (2015)			Modelo de dois índices			Diferença (%)
	Cl	n	M	K	Tempo	Solução	Tempo	Solução	GAP (%)	
E026-08m	1	25	25	8	0,10	607,65	0,83	607,65	0,00	0,00
	2	25	40	8	1,20	611,49	16,96	607,65	0,00	-0,63
	3	25	61	8	1,50	613,90	1.099,00	613,90	0,00	0,00
	4	25	63	8	11,60	625,10	1.328,00	625,10	0,00	0,00
	5	25	91	8	0,60	607,65	209,60	607,65	0,00	0,00
E030-03g	1	29	29	3	0,10	535,80	35,43	535,80	0,00	0,00
	2	29	43	6	12,00	700,20	7.200,00	-	-	-
	3	29	49	6	123,00	637,38	7.200,00	-	-	-
	4	29	72	7	189,00	715,82	7.200,00	-	-	-
	5	29	86	7	139,00	690,96	7.200,00	-	-	-
E030-04s	1	29	29	4	0,00	505,01	0,45	505,01	0,00	0,00
	2	29	43	6	10,00	721,54	7.200,00	-	-	-
	3	29	62	7	136,00	717,37	7.200,00	-	-	-
	4	29	74	7	41,00	815,68	7.200,00	-	-	-
	5	29	91	7	31,00	636,77	7.200,00	-	-	-
E031-09h	1	30	30	9	0,90	610,00	7.200,00	614,23	2,62	0,69
	2	30	50	9	5,70	619,63	7.200,00	-	-	-
	3	30	56	9	1,60	610,00	7.200,00	614,23	2,96	0,69
	4	30	82	9	17,00	618,23	7.200,00	690,56	15,46	11,70
	5	30	101	9	5,80	610,23	7.200,00	610*	2,36	-0,04
E033-03n	1	32	32	3	0,10	2.006,34	1,91	2.006,34	0,00	0,00
	2	32	44	7	50,00	2.669,39	7.200,00	-	-	-
	3	32	56	7	22,00	2.486,44	7.200,00	-	-	-
	4	32	78	7	41,00	2.609,36	7.200,00	-	-	-
	5	32	102	8	101,00	2.421,88	7.200,00	-	-	-
E033-04g	1	32	32	4	0,10	837,67	22,13	837,67	0,00	0,00
	2	32	47	7	488,00	1.111,94	7.200,00	-	-	-
	3	32	57	7	533,00	1.085,42	7.200,00	-	-	-
	4	32	65	7	183,00	983,20	7.200,00	-	-	-
	5	32	87	8	462,00	924,27	7.200,00	-	-	-
E033-05s	1	32	32	5	0,10	837,67	5,45	837,67	0,00	0,00
	2	32	48	6	466,00	1.041,75	7.200,00	-	-	-
	3	32	59	6	69,00	1.181,68	7.200,00	-	-	-
	4	32	84	8	449,00	1.246,49	7.200,00	-	-	-
	5	32	114	8	210,00	1.230,40	7.200,00	-	-	-
E036-11h	1	35	35	11	1,10	698,61	4.210,00	698,61	0,00	0,00
	2	35	56	11	2,30	698,61	7.200,00	708,63	1,66	1,43
	3	35	74	11	1,60	698,61	1.902,00	698,61	0,00	0,00
	4	35	93	11	8,00	708,20	7.200,00	-	-	-
	5	35	114	11	1,70	698,61	4.396,00	698,61	0,00	0,00
				<b>Média</b>	49,92		4.345,59	3,08		1,65

Fonte: o autor.

Por outro lado, ao se comparar o número de cortes inseridos durante a resolução da versão irrestrita com o número de cortes inseridos para a versão sequencial, observa-se que mais cortes foram necessários para resolver o caso irrestrito. Isso é natural, pois o modelo de dois índices conseguiu, sobre a versão irrestrita, obter mais soluções ótimas (total de 53 para ambos os casos de custo nas arestas) do que sobre a versão sequencial (total de 33 para custo inteiro e de 37 para custo real). Verifica-se, assim, que o maior número de cortes trouxe impactos na resolução de mais instâncias de forma ótima e/ou na obtenção de pelo menos uma solução viável para mais instâncias. Outro fato a se analisar está relacionado a quantidade de cortes após resolver o 2OPP, que na versão sequencial foi bem maior que na versão irrestrita, mostrando que existe uma dificuldade computacional maior quando se adiciona a restrição sequencial no 2L-CVRP.

A Figura 4.4 traz a comparação com os resultados reportados pela literatura com relação a quantidade de instâncias resolvidas na otimalidade, ou seja, com GAP igual 0,00%. Esses resultados sumarizam as informações que estão nas Tabelas 4.8 a 4.11. Vale comentar que o GAP médio do modelo de dois índices para as arestas de custo inteiro foi de 2,95%, ao passo que para as arestas de custo real foi de 3,08%.

Figura 4.4 – Quantidade de instâncias resolvidas na otimalidade usando o modelo de dois índices sobre a versão sequencial.



Fonte: o autor.

As Figuras 4.5 a 4.7 mostram uma comparação direta entre as versões irrestrita e sequencial do 2L-CVRP com base nos resultados reportados para o modelo de dois índices, que foi o modelo de melhor comportamento entre os modelos desenvolvidos. A Figura 4.5 representa a quantidade de instâncias que foram resolvidas de forma ótima. Observa-se que o modelo consegue, para a versão irrestrita, resolver mais instâncias na otimalidade (total de 53 em cada caso de custo para as arestas) ao comparar com a versão sequencial (total de 33 para custo inteiro e de 37 para custo real) do 2L-CVRP.

Tabela 4.12 – Quantidade de cortes inseridos e tempo gasto pelos procedimentos para a versão sequencial (continua...).

Instâncias	Custo Inteiro										Custo Real									
	Modelo de dois índices										Modelo de dois índices									
	Nome	CI	Cortes	CVRPSEP	Tempo	CBP	Cortes	20PP	Cortes	2OPP	Cortes	CVRPSEP	Tempo	CBP	Cortes	20PP	Cortes	2OPP		
E016-03m	1	575	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0	0	1.170	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0		
	2	17.574	41,89	599	6.452,00	227	-	-	-	-	10.183	46,20	888	6.904,00	225	-	-	-		
	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	400	2,51	22	7.897,00	1	-	-	-		
	5	601	720,20	4	7.200,00	0	-	-	-	-	240	105,30	2	7.947,00	0	-	-	-		
E016-05m	1	267	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0	0	1.101	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0		
	2	267	0,00	0	5,00	0	0,00	0	0	0	1.101	0,00	0	5,15	0	0,00	0	0		
	3	1.630	0,27	25	297,70	8	-	-	-	-	6.720	0,22	20	212,40	6	-	-	-		
	4	1.063	0,23	0	1.208,00	4	-	-	-	-	1.840	0,36	0	1.431,00	6	-	-	-		
	5	267	0,01	0	201,60	0	-	-	-	-	1.101	0,00	0	183,60	0	-	-	-		
E021-04m	1	351	3.368,00	0	0,01	0	0,01	0	0	0	490	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0		
	2	61.145	4,69	1340	1.369,00	168	-	-	-	-	79.554	4,03	1.331	1.540,00	211	-	-	-		
	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2.598	9,92	12	7.200,00	18	-	-	-		
	5	3.776	0,03	0	362,30	0	-	-	-	-	422	0,00	0	153,00	0	-	-	-		
E021-06m	1	2.331	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0	0	3.440	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0		
	2	3.472	0,01	0	180,50	8	-	-	-	-	6.717	0,06	3	369,60	11	-	-	-		
	3	2.772	0,30	0	1.659,00	4	-	-	-	-	4.290	0,23	0	1.473,00	4	-	-	-		
	4	3.773	0,95	5	7.464,00	5	-	-	-	-	14.110	0,55	13	2.083,00	1	-	-	-		
	5	2.331	0,01	0	65,41	0	-	-	-	-	3.440	0,04	0	4.561,00	0	-	-	-		
E022-04g	1	171	0,00	0	0,01	0	0,01	0	0	0	158	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0		
	2	4.468	3,51	46	3.063,00	62	-	-	-	-	4.738	3,44	51	3.898,00	79	-	-	-		
	3	449	0,92	15	852,10	9	-	-	-	-	2.597	8,09	69	621,00	37	-	-	-		
	4	319	0,19	7	373,70	0	-	-	-	-	1.723	0,33	10	1.673,00	3	-	-	-		
	5	134	0,01	0	81,15	0	-	-	-	-	358	0,00	0	80,99	0	-	-	-		
E022-06m	1	12.483	0,00	0	0,01	0	0,01	0	0	0	4.346	0,00	0	0,01	0	0,01	0	0		
	2	8.535	0,07	2	109,30	2	-	-	-	-	6.008	0,06	2	45,85	2	-	-	-		
	3	9.336	1,94	40	887,60	10	-	-	-	-	9.860	2,13	46	1.270,00	14	-	-	-		
	4	3.558	2,31	30	7.200,00	4	-	-	-	-	1.618	3,06	3	8.287,00	4	-	-	-		
	5	12.483	0,02	0	83,41	0	-	-	-	-	4.346	0,02	0	201,20	0	-	-	-		
E023-03g	1	42	0,00	0	0,01	0	0,01	0	0	0	44	0,00	0	0,01	0	0,01	0	0		
	2	27.523	20,94	2578	3.673,00	125	-	-	-	-	32.399	24,10	2.973	3.460,00	123	-	-	-		
	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.021	21,60	342	7.200,00	16	-	-	-		
	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
E023-05s	1	42	0,00	0	0,01	0	0,01	0	0	0	44	0,00	0	0,01	0	0,01	0	0		
	2	15.006	12,61	749	6.230,00	47	-	-	-	-	9.174	13,35	985	6.871,00	62	-	-	-		
	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
	5	60	6,77	5	7.200,00	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		

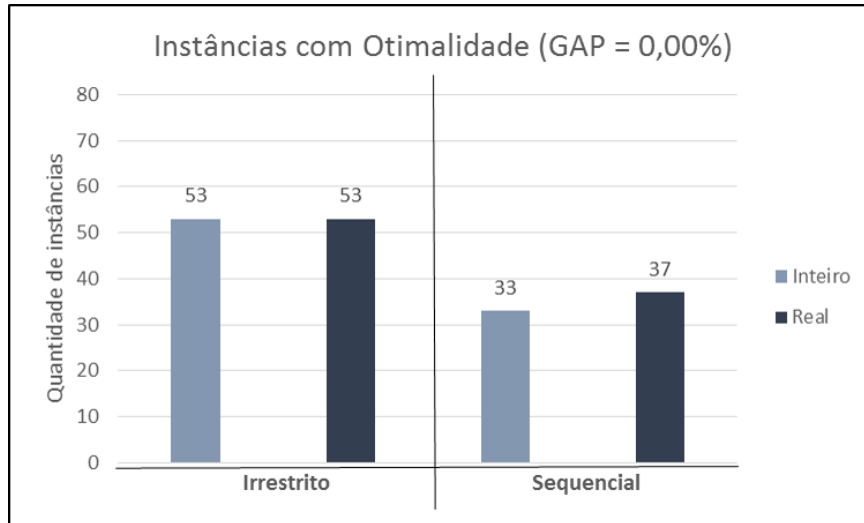
Fonte: o autor.

Tabela 4.13 – Quantidade de cortes inseridos e tempo gasto pelos procedimentos para a versão sequencial (...continuação.).

Instâncias	Nome	CI	Custo Interno						Custo Real							
			Modelo de dois índices						Modelo de dois índices							
			Cortes CVR/SEP	Tempo CBP	Cortes CBP	Tempo 20PP	Cortes 20PP	Cortes CVR/SEP	Tempo CBP	Cortes CBP	Tempo 20PP	Cortes 20PP				
E026-08m	1	316	0,00	0	0,00	0	573	0,00	0	0,01	0	316	0,00	0	0,01	0
	2	316	0,00	0	2,06	0	986	0,00	0	14,71	0	316	0,00	0	14,71	0
	3	3.822	0,02	0	1.242,00	6	5.063	0,02	0	1.047,00	4	3.822	0,02	0	1.047,00	4
	4	5.707	0,13	12	636,50	0	19.172	0,17	12	575,50	4	5.707	0,13	12	575,50	4
	5	316	0,01	0	100,10	0	573	0,01	0	199,60	0	316	0,01	0	199,60	0
E030-03g	1	2.112	0,01	0	0,12	0	3.464	0,00	0	0,00	0	2.112	0,01	0	0,00	0
	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E030-04s	1	124	0,00	0	0,01	0	133	0,00	0	0,01	0	124	0,00	0	0,01	0
	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E031-09h	1	69.916	0,00	0	0,01	0	71.365	0,00	0	0,01	0	69.916	0,00	0	0,01	0
	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	3	69.749	0,07	0	95,92	0	73.566	0,01	0	34,13	0	69.749	0,07	0	34,13	0
	4	113.333	3,97	22	1.852,00	2	132.497	2,69	15	4.325,00	2	113.333	3,97	22	4.325,00	2
	5	3.508	3,43	0	7.239,00	0	51.047	3,11	0	7.531,00	0	3.508	3,43	0	7.531,00	0
E033-03n	1	330	0,00	0	0,08	0	407	0,00	0	0,04	0	330	0,00	0	0,04	0
	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E033-04g	1	1.290	0,00	0	0,04	0	3.270	0,00	0	0,09	0	1.290	0,00	0	0,09	0
	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E033-05s	1	2.870	0,00	0	0,11	0	1.758	0,00	0	0,06	0	2.870	0,00	0	0,06	0
	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E036-11h	1	61.305	0,00	0	0,03	0	50.133	0,00	0	0,04	0	61.305	0,00	0	0,04	0
	2	-	-	-	-	-	67.165	0,02	1	49,08	13	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	27.603	0,76	4	146,60	0	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
<b>Total</b>		632.642		5.494		776.259		6.804		846		632.642		846		846
<b>Média</b>		13.180,04		87,43		114,46		1.511,06		14,56		13.180,04		14,56		16,59

Fonte: o autor.

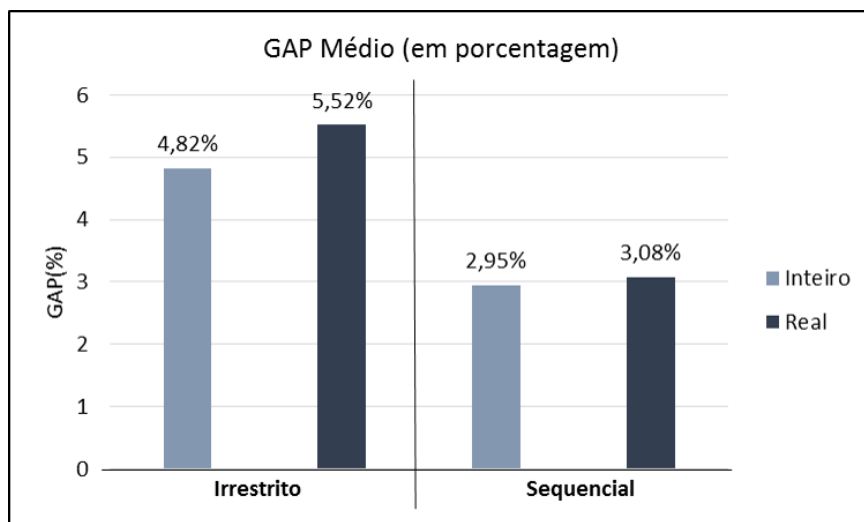
Figura 4.5 – Comparação entre o número de instâncias resolvidas na otimalidade usando o modelo de dois índices sobre as versões irrestrita e sequencial.



Fonte: o autor.

A Figura 4.6 traz o GAP médio dado pela resolução do modelo de dois índices sobre as versões irrestrita e sequencial do 2L-CVRP. Nota-se que houve uma melhora no valor do GAP para a versão sequencial ao comparar com a versão irrestrita, todavia o modelo de dois índices conseguiu resolver mais instâncias na otimalidade para a versão irrestrita.

Figura 4.6 – Comparação entre o GAP médio (em porcentagem) usando o modelo de dois índices sobre as versões irrestrita e sequencial.

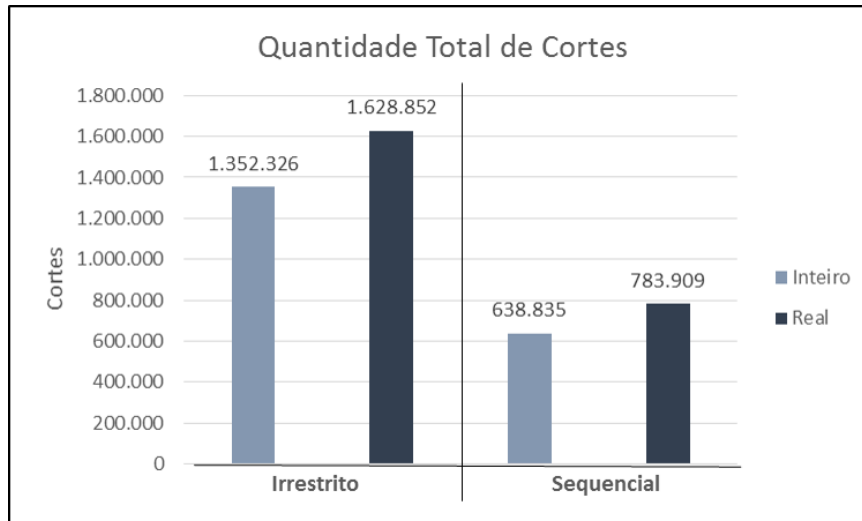


Fonte: o autor.

A Figura 4.7 mostra a quantidade de cortes inseridos durante a resolução do modelo de dois índices para ambas as versões do 2L-CVRP (irrestrita e sequencial). Observa-se que, para a versão irrestrita, a quantidade de cortes aumenta significativamente (praticamente

dobra em termos de quantidade) em relação ao número de cortes para a versão sequencial. Nota-se que isso influencia a quantidade de instâncias resolvidas na otimalidade, que é maior para o caso irrestrito do que no caso sequencial.

Figura 4.7 – Comparação entre a quantidade total de cortes usando o modelo de dois índices sobre as versões irrestrita e sequencial.



Fonte: o autor.

### 4.3 Comparação com a Heurística de *Wei et al. (2015)*

Com o intuito de discutir sobre a qualidade das soluções reportadas pelo modelo de dois índices, apresenta-se nas Tabelas 4.14 e 4.15, uma comparação entre o modelo de dois índices e a heurística de *Wei et al. (2015)*, considerando a execução do modelo limitada a um tempo total de 600 segundos (10 minutos), com limite de 300 segundos a cada chamada do CBP e a cada chamada do 2OPP. Deseja-se, assim, verificar se o modelo ainda consegue retornar soluções boas o suficiente, com valor de GAP baixo, para um de tempo de execução comparável ao de uma heurística.

Os resultados reportados nas Tabelas 4.14 e 4.15 trazem, para as versões irrestrita e sequencial do 2L-CVRP e com custo real para as arestas, o nome de cada instância, a classe, a quantidade de clientes ( $n$ ), a quantidade total de itens ( $M$ ), a quantidade de veículos ( $K$ ), o tempo gasto em segundos e o valor da solução encontrado por *Wei et al. (2015)*, e os resultados encontrados ao resolver o modelo de dois índices, isto é, o tempo total gasto em segundos, o valor da solução, o GAP em porcentagem retornado pelo *Gurobi* e a diferença percentual do valor da solução encontrado pelo modelo com o valor da solução reportado pela heurística.

Os resultados obtidos com o modelo de dois índices, considerando a versão irrestrita do 2L-CVRP, mostram que a solução ótima foi encontrada para 48 das 80 instâncias, ao passo

Tabela 4.14 – Resultados do modelo de dois índices considerando um tempo limite de execução de 600 segundos para a comparação com Wei et al. (2015) (continua...).

Instâncias	Wei et al. (2015) - irrestrito			Modelo de dois índices - irrestrito			Wei et al. (2015) - sequencial			Modelo de dois índices - sequencial					
	Nome	Cl	n	M	K	Tempo	Solução	Tempo	Solução	GAP (%)	Diferença (%)	Tempo	Solução	GAP (%)	Diferença (%)
E016-03m	1	15	15	3	0,00	278,73	0,18	278,73	0,00	0,00	0,00	0,00	278,73	0,00	0,00
	2	15	24	3	0,70	278,73	7,88	278,73	0,00	0,00	0,00	3,30	290,84	-	-
	3	15	31	3	2,50	284,52	127,20	284,52	0,00	0,00	0,00	1,10	284,52	-	-
	4	15	37	4	0,10	282,95	3,86	282,95	0,00	0,00	0,00	0,50	294,25	-	-
	5	15	45	4	1,60	278,73	40,11	278,73	0,00	0,00	0,00	3,20	278,73	315,81*	14,33
E016-05m	1	15	15	5	0,00	334,96	0,08	334,96	0,00	0,00	0,00	0,00	334,96	0,00	0,00
	2	15	25	5	0,10	334,96	0,28	334,96	0,00	0,00	0,00	0,40	347,73	0,00	0,00
	3	15	31	5	0,20	352,16	4,09	352,16	0,00	0,00	0,00	1,60	352,16	0,00	0,00
	4	15	40	5	0,10	334,96	2,55	334,96	0,00	0,00	0,00	0,20	342,00	12,84	8,99
	5	15	48	5	0,00	334,96	0,90	334,96	0,00	0,00	0,00	0,00	334,96	0,00	0,00
E021-04m	1	20	20	4	0,10	358,40	0,21	358,40	0,00	0,00	0,00	0,10	358,40	0,00	0,00
	2	20	29	5	0,30	387,70	73,78	387,70	0,00	0,00	0,00	0,90	403,93	-	-
	3	20	46	5	0,80	394,72	430,40	390,54	0,00	-1,06	-	1,50	394,72	-	-
	4	20	44	5	1,90	364,45	63,73	362,41	0,00	-0,56	-	2,00	368,56	5,94	1,51
	5	20	49	5	0,60	358,40	1,98	358,40	0,00	0,00	0,00	1,40	358,40	0,00	0,00
E021-06m	1	20	20	6	0,00	430,89	0,50	430,89	0,00	0,00	0,00	0,00	430,89	0,00	0,00
	2	20	32	6	0,20	430,89	2,36	430,89	0,00	0,00	0,00	0,40	440,94	0,00	0,00
	3	20	43	6	0,10	430,89	9,95	430,89	0,00	0,00	0,00	0,50	440,68	6,43	3,24
	4	20	50	6	0,90	447,37	8,31	447,37	0,00	0,00	0,00	2,60	447,37	-	-
	5	20	62	6	0,20	430,89	8,96	430,89	0,00	0,00	0,00	0,30	430,89	461,20*	8,49
E022-04g	1	21	21	4	0,00	375,28	0,08	375,28	0,00	0,00	0,00	0,00	375,28	0,00	0,00
	2	21	31	4	0,60	375,28	2,85	375,28	0,00	0,00	0,00	2,40	388,72	-	-
	3	21	37	4	3,40	381,69	5,97	381,69	0,00	0,00	0,00	9,00	381,69	-	-
	4	21	41	4	1,80	383,88	3,03	383,88	0,00	0,00	0,00	4,40	383,88	-	-
	5	21	57	5	0,20	375,28	0,84	375,28	0,00	0,00	0,00	0,80	375,28	0,00	0,00
E022-06m	1	21	21	6	0,10	495,85	0,23	495,85	0,00	0,00	0,00	0,10	495,85	0,00	0,00
	2	21	33	6	0,60	495,85	1,60	495,85	0,00	0,00	0,00	0,50	499,08	0,00	0,00
	3	21	40	6	0,90	498,16	9,59	498,16	0,00	0,00	0,00	2,50	504,68	6,81	3,98
	4	21	57	6	2,10	498,32	55,54	498,32	0,00	0,00	0,00	3,00	498,32	-	-
	5	21	56	6	0,40	495,85	0,51	495,85	0,00	0,00	0,00	0,90	495,85	0,00	0,00
E023-03g	1	22	22	3	0,00	568,56	0,12	568,56	0,00	0,00	0,00	0,00	568,56	0,00	0,00
	2	22	32	5	1,00	725,46	600,00	725,60	7,41	0,02	0,02	1,80	734,65	-	-
	3	22	41	5	1,80	678,75	600,00	686,43	7,48	1,13	1,13	5,20	709,72	-	-
	4	22	51	5	6,10	700,72	600,00	-	-	-	-	14,00	703,49	-	-
	5	22	55	6	1,20	657,77	600,00	790,12	25,68	20,12	20,12	28,00	658,64	-	-
E023-05s	1	22	22	5	0,00	568,56	0,17	568,56	0,00	0,00	0,00	0,00	568,56	0,00	0,00
	2	22	29	5	3,30	674,55	86,46	674,55	0,00	0,00	0,00	16,00	725,91	-	-
	3	22	42	5	6,70	738,43	600,00	740,85	12,16	0,33	0,33	1,90	741,12	-	-
	4	22	48	5	3,30	692,47	600,00	-	-	-	-	31,00	697,92	-	-
	5	22	52	6	1,80	609,90	600,00	616,33	4,45	1,05	1,05	35,90	621,85	-	-

Fonte: o autor.

Tabela 4.15 – Resultados do modelo de dois índices considerando um tempo limite de execução de 600 segundos para a comparação com Wei et al. (2015) (...continuação.).

Nome	Instâncias				Wei et al. (2015) - irrestrito		Modelo de dois índices - irrestrito				Wei et al. (2015) - sequencial		Modelo de dois índices - sequencial			
	CI	n	M	K	Tempo	Solução	Tempo	Solução	GAP (%)	Diferença (%)	Tempo	Solução	Tempo	Solução	GAP (%)	Diferença (%)
E026-08m	1	25	25	8	0,10	607,65	0,19	607,65	0,00	0,00	0,10	607,65	0,83	607,65	0,00	0,00
	2	25	40	8	0,40	607,65	0,33	607,65	0,00	0,00	1,20	611,49	17,38	607,51	0,00	-0,65
	3	25	61	8	0,50	607,65	1,29	607,65	0,00	0,00	1,50	613,90	600,00	613,90	2,01	0,00
	4	25	63	8	4,30	625,10	11,80	625,10	0,00	0,00	11,60	625,10	600,00	625,10	1,93	0,00
	5	25	91	8	0,20	607,65	0,58	607,65	0,00	0,00	0,60	607,65	600,00	607,65	0,00	0,00
E030-03g	1	29	29	3	0,10	535,80	11,53	535,80	0,00	0,00	0,10	535,80	35,87	535,80	0,00	0,00
	2	29	43	6	20,00	689,82	600,00	-	-	12,00	700,20	600,00	-	-	-	-
	3	29	49	6	3,40	620,33	600,00	657,45	19,91	5,98	123,00	637,38	600,00	-	-	-
	4	29	72	7	3,70	710,87	600,00	-	-	-	189,00	715,82	600,00	-	-	-
	5	29	86	7	73,00	678,66	600,00	777,73	32,60	14,60	139,00	690,96	600,00	-	-	-
E030-04s	1	29	29	4	0,00	505,01	0,19	505,01	0,00	0,00	0,00	505,01	0,43	505,01	0,00	0,00
	2	29	43	6	142,00	693,45	600,00	-	-	10,00	721,54	600,00	-	-	-	-
	3	29	62	7	6,80	706,73	600,00	-	-	136,00	717,37	600,00	-	-	-	-
	4	29	74	7	88,00	784,88	600,00	-	-	41,00	815,68	600,00	-	-	-	-
	5	29	91	7	3,50	624,82	600,00	-	-	31,00	636,77	600,00	-	-	-	-
E031-09h	1	30	30	9	0,90	610,00	369,10	610,00	0,00	0,00	0,90	610,00	600,00	614,24	4,22	0,70
	2	30	50	9	1,70	610,57	600,00	640,18	6,71	4,85	5,70	619,63	600,00	-	-	-
	3	30	56	9	6,80	610,00	369,70	610,00	0,00	0,00	1,60	610,00	600,00	614,24	4,17	0,70
	4	30	82	9	6,50	614,24	600,00	646,95	8,16	5,33	17,00	618,23	600,00	-	-	-
	5	30	101	9	4,20	610,00	433,50	610,00	0,00	0,00	5,80	610,23	600,00	621,53	5,54	1,85
E033-03n	1	32	32	3	0,10	2.006,34	0,32	2.006,34	0,00	0,00	0,10	2.006,34	1,19	2.006,34	0,00	0,00
	2	32	44	7	66,00	2.585,72	600,00	2.822,20	21,35	9,15	50,00	2.669,39	600,00	-	-	-
	3	32	56	7	7,00	2.468,06	600,00	2.638,42	22,86	6,90	22,00	2.486,44	600,00	-	-	-
	4	32	78	7	15,00	2.548,06	600,00	-	-	41,00	2.609,36	600,00	-	-	-	-
	5	32	102	8	13,00	2.334,78	600,00	-	-	101,00	2.421,88	600,00	-	-	-	-
E033-04g	1	32	32	4	0,10	837,67	0,65	837,67	0,00	0,00	0,10	837,67	21,10	837,67	0,00	0,00
	2	32	47	7	502,00	1.040,74	600,00	1.316,47	35,20	26,49	488,00	1.111,94	600,00	-	-	-
	3	32	57	7	245,00	1.003,52	600,00	-	-	533,00	1.085,42	600,00	-	-	-	-
	4	32	65	7	6,60	981,00	600,00	-	-	183,00	983,20	600,00	-	-	-	-
	5	32	87	8	428,00	875,00	600,00	-	-	462,00	924,27	600,00	-	-	-	-
E033-05s	1	32	32	5	0,10	837,67	0,88	837,67	0,00	0,00	0,10	837,67	5,56	837,67	0,00	0,00
	2	32	48	6	261,00	1.017,95	600,00	1.172,06	27,89	15,14	466,00	1.041,75	600,00	-	-	-
	3	32	59	6	646,00	1.155,22	600,00	-	-	69,00	1.181,68	600,00	-	-	-	-
	4	32	84	8	49,00	1.181,30	600,00	1.393,96	39,76	18,00	449,00	1.246,49	600,00	-	-	-
	5	32	114	8	29,00	1.159,94	600,00	-	-	210,00	1.230,40	600,00	-	-	-	-
E036-11h	1	35	35	11	1,10	698,61	256,60	698,60	0,00	0,00	1,10	698,61	600,00	703,35	2,98	0,68
	2	35	56	11	1,70	698,61	256,70	698,61	0,00	0,00	2,30	698,61	600,00	708,63	3,38	1,43
	3	35	74	11	1,30	698,61	268,30	698,61	0,00	0,00	1,60	698,61	600,00	707,45	3,76	1,27
	4	35	93	11	1,90	703,35	600,00	-	-	8,00	708,20	600,00	-	-	-	-
	5	35	114	11	1,50	698,61	257,20	698,61	0,00	0,00	1,70	698,61	600,00	716,88	5,37	2,62
					<b>Média</b>	33,59	264,91	4,38	1,99	49,92	449,43	2,29	0,71			

Fonte: o autor.

que não consegue qualquer solução para 16 instâncias. Isso evidencia que o modelo consegue ser competitivo quando tem o tempo de resolução pequeno, comparável ao de uma heurística, uma vez que deixou de resolver apenas 5 instâncias ao reduzir de 7.200 segundos para 600 segundos.

Por outro lado, para a versão sequencial, *Wei et al. (2015)* consegue solução viável para as 80 instâncias, ao passo que o modelo de dois índices não consegue resolver 40 delas. Por sua vez, o modelo conseguiu encontrar a solução ótima (GAP igual a zero) para apenas 24 instâncias. Como a versão sequencial do problema mostrou ter uma dificuldade computacional maior, diminuir o tempo de resolução do modelo impacta diretamente na quantidade de instâncias resolvidas na otimalidade ou com pelo menos uma solução viável reportada.



## Capítulo 5

---

# Conclusões e Perspectivas Futuras

---

Neste trabalho foi abordado o problema de roteamento de veículos capacitado com restrições de empacotamento bidimensional (2L-CVRP), o qual surge a partir da integração de dois outros problemas de otimização combinatória e que busca por um conjunto de rotas de custo total mínimo em que o empacotamento bidimensional dos itens dos clientes em cada rota deve ser feito de forma viável na base retangular dos veículos. Neste estudo foram apresentados três modelos para resolver o 2L-CVRP, os quais vieram como novas propostas frente aos modelos desenvolvidos na literatura.

O primeiro modelo consiste de um modelo completo, com variáveis de até três índices para as decisões que retratam o roteamento e com cinco índices para as variáveis de decisão que tratam do empacotamento. O segundo e o terceiro modelos consideram variáveis de decisão com até três e dois índices, respectivamente. Para esses dois últimos modelos foram desenvolvidas rotinas de separação para as restrições de capacidade e conectividade das rotas, bem como para lidar com viabilidade do empacotamento em cada rota. Para checar a viabilidade do empacotamento, consideraram-se algumas estratégias visando diminuir o esforço computacional, sendo eles: resolver uma relaxação simples do problema, denominada CBP, usar o recipiente discretizado em malha de pontos de Herz (1972) e usar um mecanismo *hash* para guardar as rotas já testadas. Além disso, apresentam-se as restrições necessárias para adequar os modelos citados conforme a versão sequencial do 2L-CVRP.

Os experimentos computacionais foram realizados sobre 80 instâncias da literatura, as quais estão divididas em cinco diferentes classes, além de considerar cinco casos. O primeiro e o segundo caso consideram a versão irrestrita do problema, com os custos de percorrer as arestas sendo inteiro e real, enquanto o terceiro e o quarto caso são para a versão sequencial, também para os dois tipos de custos nas arestas. Um último caso foi feito visando limitar o tempo do melhor modelo desenvolvido a fim de comparar o desempenho do algoritmo B&C com uma heurística da literatura. Os resultados foram comparados com os de Azevedo (2009), Wei *et al.* (2015), Hokama, Miyazawa e Xavier (2016) e Côté, Guastarofa e Speranza (2017). Azevedo (2009), Hokama, Miyazawa e Xavier (2016) e Côté, Guastarofa e

Speranza (2017) utilizaram métodos exatos do tipo B&C para resolver o 2L-CVRP, enquanto Wei *et al.* (2015) utilizaram uma heurística de busca em vizinhança variável.

Nos dois primeiros casos testados, para a versão irrestrita do 2L-CVRP, o modelo de dois índices foi superior aos demais modelos (maior número de soluções ótimas, menor GAP e menor tempo computacional). Esse resultado foi possível por ser um modelo que possui menos variáveis de decisão do que os demais modelos desenvolvidos, embora seja dependente de procedimentos de separação para as restrições de capacidade e empacotamento. Apesar disso, o modelo de três índices conseguiu apresentar uma solução viável para uma quantidade maior de instâncias. A dependência dessas rotinas pode ser um problema se comparado a um modelo completo, capaz de ser implementado e resolvido por qualquer pacote de otimização, embora consiga resolver bem menos instâncias na otimalidade quando se tem um tempo limite imposto. No terceiro e no quarto caso, em que se considera a versão sequencial do 2L-CVRP, usa-se apenas o modelo de dois índices para comparar com a literatura, já que ele mostra ser o mais eficiente. Porém, ao se acoplar a restrição de ordem, tal modelo torna-se mais difícil de ser resolvido, reportando um desempenho pior comparado com a versão irrestrita do problema. No último caso foi possível perceber que o impacto de limitar o tempo de resolução pelo B&C foi menor na versão irrestrita, mostrando novamente que a versão sequencial do problema é mais difícil.

De qualquer forma, entre os modelos desenvolvidos, o de dois índices é o que apresenta o menor esforço computacional sendo, em média, três vezes menor do que o do modelo completo, é o que consegue a resolução de um número maior de instâncias e que exige menos tempo computacional, embora naturalmente ela não consiga ser melhor do que a heurística da literatura. O modelo de três índices mostra que, entre usar um modelo completo ou um modelo com a inserção de muitos planos de corte, tem-se que a segunda opção é satisfatoriamente melhor, pois a medida que novos planos de corte foram sendo inseridos, melhores foram os resultados obtidos.

Trabalhos futuros devem investigar a inserção de novas restrições e cortes visando acelerar a convergência dos modelos. Uma alternativa direta é utilizar/adaptar as outras rotinas de separação presentes no pacote CVRPSEP para lidar com o 2L-CVRP. Outra linha de investigação consiste em propor métodos heurísticos capazes de resolver instâncias envolvendo mais clientes e itens. Uma possibilidade é partir da heurística de busca em vizinhança de Wei *et al.* (2015) e considerar novos operadores para a construção das rotas e outras formas de lidar com o empacotamento dos itens dos clientes na rota. Outros trabalhos também podem seguir com o acoplamento de restrições práticas dentro de cada um dos subproblemas do 2L-CVRP a fim de resolver um problema ainda mais próximo da realidade das empresas. Sabe-se que a inserção dessas restrições acarreta em maior dificuldade para modelar/resolver o problema, uma vez que pode exigir a inserção de novas variáveis de decisão, novas rotinas de separação e novas restrições. Entre as restrições práticas de interesse para o

2L-CVRP, tem-se janela de tempo, coleta e entrega, frota heterogênea, fragilidade dos itens, estabilidade do empacotamento e balanceamento da carga por eixo do veículo.



---

## REFERÊNCIAS

---

ABDAL-HAMMED, M. K.; HIFI, M.; WU, L. Large neighborhood search for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. In: *Control, Decision and Information Technologies (CoDIT), 2014 International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 054–059. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 34.

ARENALES, M. *et al.* *Pesquisa Operacional*. [S.l.]: Elsevier - Campus., 2007. Citado na página 39.

AZEVEDO, B. L. P. *Uma abordagem exata para o problema de roteamento de veículos capacitados com restrições bidimensionais de carregamento*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, Brasil, 2009. Citado 10 vezes nas páginas 17, 24, 32, 33, 55, 56, 57, 58, 59 e 81.

AZEVEDO, B. L. P. *et al.* A branch-and-cut approach for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. In: *Anais do XLI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 2491 – 2502. Citado na página 33.

BIN, W.; HONG, C.; ZHI-YONG, C. Artificial bee colony algorithm for two-dimensional loading capacitated vehicle routing problem. In: *Management Science and Engineering (ICMSE), 2013 International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 406–412. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 34.

BISCHOFF, E. E.; RATCLIFFE, M. S. W. Issues in the development of approaches to container loading. *Omega*, v. 23, n. 4, p. 377–390, 1995. Citado na página 25.

CORNUEJOLS, G.; HARCHE, F. Polyhedral study of the capacitated vehicle routing problem. *Mathematical Programming*, v. 60, n. 1, p. 21–52, 1993. Citado na página 48.

CÔTÉ, J. E.; GUASTAROFÀ, G.; SPERANZA, M. G. An exact algorithm for the two-dimensional orthogonal packing problem with unloading constraints. *Operations Research*, v. 62, p. 1126–1141, 2014. Citado na página 51.

\_\_\_\_\_. The value of integrating loading and routing. *European Journal of Operational Research*, v. 257, n. 1, p. 89 – 105, 2017. Citado 11 vezes nas páginas 23, 24, 32, 35, 51, 66, 67, 68, 69, 81 e 82.

Côté, J. E.; POTVIN, J. Y.; GENDREAU, M. *The vehicle routing problem with stochastic two-dimensional items*. [S.l.], 2013. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 36.

DOMINGUEZ, O. *et al.* Using biased randomization for solving the two-dimensional loading vehicle routing problem with heterogeneous fleet. *Annals of Operations Research*, v. 236, n. 2, p. 383–404, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 37.

DOMINGUEZ, O.; JUAN, A. A.; FAULIN, J. A biased-randomized algorithm for the two-dimensional vehicle routing problem with and without item rotations. *International Transactions in Operational Research*, v. 21, n. 3, p. 375–398, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 32, 35 e 37.

DOMINGUEZ, O. *et al.* An ils-biased randomization algorithm for the two-dimensional loading hfvpr with sequential loading and items rotation. *Journal of the Operational Research Society*, v. 67, n. 1, p. 37–53, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 37.

DUHAMEL, C. *et al.* A multi-start evolutionary local search for the two-dimensional loading capacitated vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, v. 38, n. 3, p. 617 – 640, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 24, 32, 33, 35 e 37.

FUELLERER, G. *et al.* Ant colony optimization for the two-dimensional loading vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, v. 36, n. 3, p. 655 – 673, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 24, 31, 32, 33 e 37.

GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. *Computers and Intractability: A guide to the theory of NP-completeness*. San Francisco: Freeman, 1979. Citado na página 23.

GENDREAU, M. *et al.* A tabu search heuristic for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *Networks*, v. 51, n. 1, p. 4–18, 2008. Citado 8 vezes nas páginas 24, 31, 32, 33, 34, 35, 36 e 38.

HAMDI-DHAOUI, K.; LABADIE, N.; YALAOUI, A. Problème de tournées de véhicules avec chargement bidimensionnel et contraintes de conflits partiels multi-objectif. In: *9th International Conference on Modeling, Optimization & SIMulation*. Bordeaux, France: [s.n.], 2012. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 36.

HERZ, J. C. Recursive computational procedure for two-dimensional stock cutting. *Journal of Research and Development*, v. 16, n. 5, p. 462–469, 1972. Citado 7 vezes nas páginas 15, 21, 27, 40, 41, 46 e 81.

HOKAMA, P.; MIYAZAWA, F. K.; XAVIER, E. C. A branch-and-cut approach for the vehicle routing problem with loading constraints. *Expert Systems with Applications*, v. 47, p. 1 – 13, 2016. Citado 11 vezes nas páginas 17, 24, 32, 35, 55, 56, 66, 67, 68, 69 e 81.

IORI, M. *Metaheuristic algorithms for combinatorial optimization problems*. Tese (Doutorado) — DEIS - University of Bologna, Bologna, Itália, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 31.

IORI, M.; MARTELLO, S. Routing problems with loading constraints. *TOP*, v. 18, n. 1, p. 4–27, 2010. Citado na página 31.

\_\_\_\_\_. Review an annotated bibliography of combined routing and loading problems. *Journal of Operations Research*, v. 23, n. 3, p. 311–326, 2013. Citado na página 31.

IORI, M.; SALAZAR-GONZÁLEZ, J.; VIGO, D. An exact approach for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *Transportation Science*, v. 41, n. 2, p. 253–264, 2007. Citado 8 vezes nas páginas 23, 24, 31, 32, 33, 34, 47 e 56.

- JUNQUEIRA, L. *et al.* An optimization model for the vehicle routing problem with practical three-dimensional loading constraints. *International Transactions in Operational Research*, v. 20, p. 645–666, 2013. Citado na página 43.
- KARA, I. Tightening bounding constraints of the miller-tucker-zemlin based formulation of the capacitated vehicle routing problems and some extensions. In: *Proceeding of the 2nd International Conference on Manufacturing Engineering, Quality and Production Systems*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 137–142. Citado na página 45.
- KHEBBACHE-HADJI, S. *et al.* Heuristics and memetic algorithm for the two-dimensional loading capacitated vehicle routing problem with time windows. *Central European Journal of Operations Research*, v. 21, n. 2, p. 307–336, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 36.
- KUMAR, S.; PANNEERSELVAM, R. A survey on the vehicle routing problem and its variants. *Intelligent Information Management*, v. 4, n. 3, p. 66–74, 2012. Citado na página 25.
- LAND, A. H.; DOIG, A. G. An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrica*, v. 28, n. 3, p. 497–520, 1960. Citado na página 39.
- LEUNG, S. C. H. *et al.* A meta-heuristic algorithm for heterogeneous fleet vehicle routing problems with two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, v. 225, n. 2, p. 199 – 210, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 37.
- \_\_\_\_\_. Simulated annealing for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *Flexible services and manufacturing journal*, v. 22, n. 1–2, p. 61–82, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 32, 33 e 37.
- \_\_\_\_\_. Extended guided tabu search and a new packing algorithm for the two-dimensional loading vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, v. 38, p. 205–215, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 32, 33 e 34.
- LYSGAARD, J.; LETCHFORD, A. N.; EGGLESE, R. W. A new branch-and-cut algorithm for the capacitated vehicle routing problem. *Mathematical Programming*, v. 100, n. 2, p. 423–445, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.
- MALAPERT, A. A. *et al.* Two-dimensional pickup and delivery routing problem with loading constraints. In: *Proceedings of the First CPAIOR Workshop on Bin Packing and Placement Constraints (BPPC'08)*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 1–46. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 35.
- MARTINEZ, L.; AMAYA, C. A. A vehicle routing problem with multi-trips and time windows for circular items. *Journal of the Operational Research Society*, v. 64, n. 11, p. 1630–1643, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 37.
- MILLER, C. E.; TUCKER, A. W.; ZEMLIN, R. A. Integer programming formulation of traveling salesman problems. *Journal of the ACM*, v. 7, n. 4, p. 326–329, 1960. Citado na página 45.
- MUÑOZ, A. L. *Solución al problema de ruteo de vehículos con restricciones de capacidad y reordenamiento de carga en los sitios de demanda*. Dissertação (Mestrado) — Escuela de Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 35.
- NADDEF, D.; RINALDI, G. Branch-and-cut algorithms for the capacitated vrp. In: TOTH, P.; VIGO, D. (Ed.). *The Vehicle Routing Problem*. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001. p. 53–84. Citado na página 48.

NEMHAUSER, G. L.; WOLSEY, L. A. *Integer and Combinatorial Optimization*. New York: John Wiley & Sons, 1988. Citado na página 39.

OPTIMIZATION, G. *Gurobi 7.0 Performance Benchmarks*. 2016. Acesso em: 08/12/2016. Disponível em: <<http://www.gurobi.com/pdfs/benchmarks.pdf>>. Citado na página 26.

PADBERG, M.; RINALDI, G. Optimization of a 532-city symmetric traveling salesman problem by branch and cut. *Operations Research Letters*, v. 6, n. 1, p. 1–7, 1987. Citado na página 40.

POLLARIS, H. *et al.* Vehicle routing problems with loading constraints: state-of-the-art and future directions. *OR Spectrum*, v. 37, n. 2, p. 297–330, 2015. Citado na página 31.

QUEIROZ, T. A. de; MIYAZAWA, F. K. Two-dimensional strip packing problem with load balancing, load bearing and multi-drop constraints. *International Journal of Production Economics*, v. 145, n. 2, p. 511 – 530, 2013. Citado na página 52.

REINELT, G. Tsplib—a traveling salesman problem library. *ORSA Journal on Computing*, v. 3, n. 4, p. 376–384, 1991. Citado na página 31.

RESENDE, P.; SOUSA, P. R. *Pesquisa de custos logísticos no Brasil*. Relatório de Pesquisa - Fundação Dom Cabral, Nova Lima - MG, Brasil, 2012. Acesso em: 08/12/2016. Disponível em: <<http://www.fdc.org.br/professoresepesquisa/publicacoes/Paginas/publicacao-detalhe.aspx?publicacao=18217>>. Citado na página 25.

SHEN, Y.; MURATA, T. Pick-up scheduling of two-dimensional loading in vehicle routing problem by using ga. In: *Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists (IMECS)*. Hong Kong: [s.n.], 2012. v. 2, p. 1532–1537. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 34.

SOUZA, V. A. A. d. *Algoritmos para o Problema de Roteamento de Veículos Capacitado com Restrições de Carregamento Bidimensional*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte-MG, Brasil, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 34.

STRODL, J. *et al.* On index structures in hybrid metaheuristics for routing problems with hard feasibility checks: An application to the 2-dimensional loading vehicle routing problem. In: \_\_\_\_\_. *Hybrid Metaheuristics: 7th International Workshop, HM 2010, Vienna, Austria, October 1-2, 2010. Proceedings*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010. p. 160–173. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.

TOTH, P.; VIGO, D. The vehicle routing problem. In: . Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001. cap. An Overview of Vehicle Routing Problems, p. 1–26. Citado na página 31.

WEI, L. *et al.* A variable neighborhood search for the capacitated vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, v. 243, n. 3, p. 798–814, 2015. Citado 22 vezes nas páginas 17, 18, 22, 24, 32, 35, 55, 56, 57, 60, 61, 62, 66, 67, 70, 71, 76, 77, 78, 79, 81 e 82.

WOLSEY, L. *Integer Programming*. New York: Wiley-Interscience, 1998. Citado na página 40.

ZACHARIADIS, E. E.; KIRANOUDIS, C. T.; TARANTILIS, C. D. A guided tabu search for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, v. 195, n. 3, p. 729–743, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 31, 32, 33, 34 e 37.

ZACHARIADIS, E. E.; TARANTILIS, C. D.; KIRANOUDIS, C. T. Integrated distribution and loading planning via a compact metaheuristic algorithm. *European Journal of Operational Research*, v. 228, n. 1, p. 56 – 71, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 34.

\_\_\_\_\_. The vehicle routing problem with simultaneous pick-ups and deliveries and two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, v. 251, n. 2, p. 369 – 386, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 37.