



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO



TATIANE NUNES DA COSTA

**AVALIAÇÃO NUMÉRICA E COMPUTACIONAL DO EFEITO DE INCERTEZAS
INERENTES A SISTEMAS MECÂNICOS**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CATALÃO – GO

2016

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E
DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: ☒ **Dissertação** ☐ **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Nome completo do autor: Tatiane Nunes da Costa

Título do trabalho: Avaliação Numérica e Computacional do Efeito de Incertezas Inerentes a Sistemas Mecânicos

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento ☒ **SIM** ☐ **NÃO**¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.



Data: 25 /09 /2016

Assinatura do (a) autor (a) ²

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

²A assinatura deve ser escaneada.

TATIANE NUNES DA COSTA

AVALIAÇÃO NUMÉRICA E COMPUTACIONAL DO EFEITO DE INCERTEZAS
INERENTES A SISTEMAS MECÂNICOS

Dissertação apresentada como requisito parcial
para a obtenção do título de Mestre em
Modelagem e Otimização pela Universidade
Federal de Goiás – Regional Catalão.

Orientador:
Romes Antonio Borges

CATALÃO-GO

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Costa, Tatiane Nunes da
Avaliação Numérica e Computacional do Efeito de Incertezas
Inerentes a Sistemas Mecânicos [manuscrito] / Tatiane Nunes da
Costa. - 2016.
cxx, 120 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Romes Antonio Borges.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade
Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão,
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização, Catalão, 2016.
Bibliografia.
Inclui gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Incertezas. 2. Método Hipercubo Latino. 3. Sistema Dinâmico. 4.
Otimização Robusta. I. Borges, Romes Antonio, orient. II. Título.

CDU 621



Defesa Nº _____

Ata de Defesa Pública – Dissertação de Mestrado

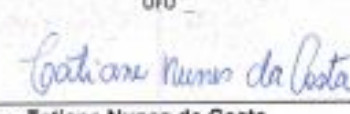
Aos vinte e cinco dias do mês de Agosto do ano de 2016, às 15h:00 min, reuniram-se os componentes da banca examinadora, professores(as) : Prof. Dr. **Romes Antonio Borges** - IMTec/UFV (presidente e orientador), Prof. Dr. **Marcos Napoleão Rabelo** - IMTec/UFV, Prof. Dr. **Aldemir Aparecido Cavallini Junior** – FEMEC/UFV para, em sessão pública realizada na sala 1 do Bloco J (Laboratório de Simulação de Mecanismos), da Regional Catalão (RC), da Universidade Federal de Goiás (UFV), procederem com a avaliação do trabalho intitulado: **Avaliação Numérica e Computacional do Efeito de Incertezas Inerentes a Sistemas Mecânicos**, em nível de Mestrado, área de concentração *Modelagem e Otimização*, de autoria de **Tatiane Nunes da Costa**, matrícula 20141696, discente do Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização (PPGMO) da UFV/RC. A sessão foi aberta pelo presidente da banca, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao discente que, dentro do tempo regulamentar, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o candidato, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação do trabalho. Os membros da banca consideraram o trabalho final: ☒ **Aprovado** (unanimidade) ou ☐ **Reprovado** (por maioria simples). Cumpridas as formalidades de pauta, às 17 h: 30 min a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu Romes Antonio Borges, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora, pelo discente e, posteriormente, será homologada pelo Colegiado do PPGMO.

Catalão-GO, 25 de Agosto de 2016.


Prof. Dr. **Romes Antonio Borges**
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e
Otimização, UFV/RC
(Presidente da Banca)


Prof. Dr. **Aldemir Aparecido Cavallini Junior**
Faculdade de Engenharia Mecânica
UFV


Prof. Dr. **Marcos Napoleão Rabelo**
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e
Otimização, UFV/RC.


Discente: **Tatiane Nunes da Costa**
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e
Otimização, UFV/RC.

Dedicatória

Aos meus pais, Romero e Ivonete, a minha irmã Fabiana, a meu esposo Irleson pelo apoio e incentivo e a Deus que sempre me guia.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Romero Nunes da Costa e Ivonete Ângelo da Silva, pelo exemplo de vida, carinho e apoio para a concretização desse trabalho, a minha irmã pela amizade e carinho. Ao meu espesso Irlson F. Fernandes da Silva, pelo amor, companheirismo, compreensão e incentivo.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Romes Antonio Borges, pela sua ajuda, amizade, conselhos e dedicação e aos participantes da banca examinadora pela contribuição ao trabalho.

A todos os meus colegas do mestrado, Alcione Purcina Borges, Lázaro Antônio da Fonseca Júnior, José Salviano Borges e Daniel Ferreira Gonçalves pela amizade, companheirismo e auxílio.

Ao meu colega Luiz Fernando Ferreira Rodovalho, que sempre me ajudou e não mediu esforços em me ajudar na conclusão deste trabalho, desejo muita alegria e grandes oportunidades a ele, pois é uma pessoa de enorme coração.

Aos professores do IMETc pelo enorme aprendizado.

A CAPES, à Universidade Federal de Goiás – RC e ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização pela bolsa de mestrado, oportunidade e confiança depositada para a realização desse trabalho.

RESUMO

COSTA, T. N. *Avaliação Numérica e Computacional do Efeito de Incertezas Inerentes a Sistemas Mecânicos*. 2016. 120 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem e Otimização) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

Problemas modernos de engenharia, na maioria das vezes são não lineares e, podem também estar sujeitos a certos tipos de incertezas que podem influenciar diretamente nas respostas de um dado sistema. Nesse sentido, os métodos estocásticos têm sido exaustivamente estudados com o intuito de se obter as melhores configurações para um dado projeto. Dentre as técnicas estocásticas, destacam-se o Método de Monte Carlo e, principalmente o Método Hipercubo Latino (HCL) que é uma versão mais simples do mesmo. Para este tipo de modelagem, é cada vez mais utilizado o Método dos Elementos Finitos Estocásticos (MEFE), sendo que uma importante ferramenta para a discretização dos campos estocásticos pode ser dada pela expansão de Karhunen-Loève (KL). Neste trabalho serão utilizados três estudos de casos, quais sejam: Um sistema discreto de 2 g.d.l., um sistema contínuo do tipo viga acoplada tanto em molas lineares quanto não lineares e um rotor composto por eixo, mancais e discos. Nesse sentido, será verificada a influência de incertezas nos sistemas estudados, utilizando para isto, o método HCL, MEFE e a expansão de KL. O estudo estocástico em questão será empregado na construção do projeto ótimo robusto para o problema do rotor já apresentado.

Palavras-chaves: Incertezas, Método Hipercubo Latino, Sistema Dinâmico, Otimização Robusta.

ABSTRACT

COSTA, T. N. *Numerical and Computational Evaluation of the Uncertainties Inherent Effect in Mechanical Systems*. 2016. 120 f. Thesis (Master in Modeling and Optimization) – Special Academic Unit of Mathematics and Technology, Federal University of Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

Most of the time, modern problems of engineering are nonlinear and, may also be subject to certain types of uncertainty that can directly influence in the answers of a particular system. In this sense, the stochastic methods have been thoroughly studied in order to get the best settings for a given project. Out of the stochastic techniques, the Method of Monte Carlo stands out and, especially the Latin Hypercube Sampling (LHS) which is a simpler version of the same. For this type of modeling, the Stochastic Finite Elements Method (SFEM) is becoming more frequently used, given that, an important tool for the discretization of stochastic fields can be given by the Karhunen-Loève (KL) expansion. In this work, the following three case studies will be used: A discrete system of 2 g.d.l., a continuous system of a coupled beam type both in linear and nonlinear springs and a rotor consisting of axis, bearings and disks. In this sense, the influence of uncertainties in the systems studied will be checked, using for this, the LHS, SFEM and the KL expansion. The stochastic study in question will be used in the construction of the great project for the rotor problem already presented.

Keywords: Uncertainty, Latin Hypercube Sampling, Dynamic System, Robust Optimization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Modelo do sistema de 2 g.d.l.	21
Figura 2.2 - (a) Resposta do sistema principal linear e sistema secundário linear e (b) plano de fase.....	23
Figura 2.3 - (a) Resposta do sistema principal linear e sistema secundário não linear e (b) plano de fase	23
Figura 2.4 - (a) Resposta do sistema principal não linear e sistema secundário não linear e (b) plano de fase	24
Figura 2. 5 - Pêndulo	25
Figura 2.6 - Não linearidade devido a forças restauradoras	26
Figura 2.7 - Viga de Euler-Bernoulli.....	28
Figura 2.8 - Discretização em dez elementos da viga com mola linear	32
Figura 2.9 - Função resposta em frequência.....	32
Figura 2.10 - Resposta no domínio do tempo com acoplamento de uma mola linear	32
Figura 2.11 - Discretização da viga com mola não linear	33
Figura 2.12 - Resposta no domínio do tempo com acoplamento de uma mola não linear.....	33
Figura 3. 1 – Sistema de eixos coordenados para elemento de disco.....	38
Figura 3. 2 - Sistema de coordenadas	38
Figura 3. 3 - Seção transversal do elemento de eixo	40
Figura 3. 4 - Modelo do mancal	46
Figura 3. 5 - Esquema de um rotor	48
Figura 3. 6 - Função resposta em frequência do rotor	49
Figura 3. 7 - Modelo completo versus modelo reduzido	53
Figura 4. 1 - Autovalores da função covariância.....	62
Figura 4. 2 - Gráfico das autofunções da função covariância	63
Figura 5. 1 - Exemplo de um envelope de solução.....	65
Figura 5. 2 - Efeito de 10% de incertezas (a) k_{11} , (b) k_{21} e (c) k_{11} e k_{21}	66
Figura 5.3 - Análise de convergência (a) k_{11} , (b) k_{21} e (c) k_{11} e k_{21}	67
Figura 5.4 - Efeito de 30% de incertezas (a) k_{21} , (b) k_{22} e k_{23} (c) k_{21} , k_{22} e k_{23}	68
Figura 5. 5 - Análise de convergência (a) k_{21} , (b) k_{22} e k_{23} e (c) k_{21} , k_{22} e k_{23}	69
Figura 5. 6 - Efeito de 10% de incertezas (a) k_{11} , k_{12} e k_{13} (b) k_{22} e k_{23} (c) k_{21} , k_{22} e k_{23}	70
Figura 5. 7 - Análise de convergência (a) k_{11} , k_{12} e k_{13} , (b) k_{22} e k_{23} e (c) k_{21} , k_{22} e k_{23}	71
Figura 5. 8 - Efeito de incertezas na largura para (a) 3%, (b) 9% e (c) 20%.....	72
Figura 5. 9 - Análise de convergência para a largura (a) 3%, (b) 9% e (c) 20%.....	73
Figura 5. 10 - Efeito de incertezas na espessura para (a) 1% e (b) 3%	74
Figura 5. 11 - Análise de convergência para a espessura (a) 1% e (b) 3%.....	74
Figura 5. 12 - Efeito de incerteza na largura para (a) 3% e (b) 5%.....	75
Figura 5. 13 - Análise de convergência para a largura (a) 3% e (b) 5%.....	76
Figura 5. 14- Efeito de incertezas na espessura para (a) 3% e (b) 5%	76
Figura 5. 15 - Análise de convergência para a espessura (a) 3% e (b) 5%.....	77
Figura 5. 16 - Efeito de incerteza na largura para (a) 3% e (b) 5%.....	78
Figura 5. 17 - Análise de convergência para a largura (a) 3% e (b) 5%.....	78

Figura 5. 18 - Efeito de incertezas na espessura para (a) 3%, (b) 5%	79
Figura 5. 19 - Análise de convergência para a espessura (a) 3% e (b) 5%.....	79
Figura 5. 20 - Autovalores da função covariância.....	80
Figura 5. 21 - Gráfico das autofunções da função covariância	81
Figura 5. 22 – Envelopes de solução para 3% de incertezas na largura (a) MEFÉ versus resposta determinística (b) MEFÉ versus EF	82
Figura 5. 23 – Comparação das frequências naturais (a) KL versus resposta determinística (b) KL versus HCL, (c) análise de convergência do MEFÉ.....	82
Figura 5. 24 - Envelope de solução para 9% de incertezas na largura (a) MEFÉ versus resposta determinística (b) MEFÉ versus EF	83
Figura 5. 25 - Comparação das frequências naturais (a) MEFÉ versus resposta determinística (b) MEFÉ versus EF, (c) análise de convergência do MEFÉ.....	83
Figura 5. 26 - Envelope de solução para 20% de incertezas na largura (a) MEFÉ versus resposta determinística (b) MEFÉ versus EF	84
Figura 5. 27 - Comparação das frequências naturais (a) MEFÉ versus resposta determinística (b) MEFÉ versus EF, (c) análise de convergência do MEFÉ.....	85
Figura 5. 28 - Envelope de solução para 1% de incertezas na espessura (a) MEFÉ versus resposta determinística (b) MEFÉ versus EF	85
Figura 5. 29 - Comparação das frequências naturais (a) MEFÉ versus resposta determinística (b) MEFÉ versus EF e (c) análise de convergência do MEFÉ.....	86
Figura 5. 30 - Envelope de solução para 3% de incertezas na espessura (a) MEFÉ versus resposta determinística (b) MEFÉ versus EF	87
Figura 5. 31 - Comparação das frequências naturais (a) MEFÉ versus resposta determinística (b) MEFÉ versus EF, (c) análise de convergência do MEFÉ.....	87
 Figura 6.1 - Efeito de 30% de incertezas na rigidez dos mancais para (a) modelo completo e (b) modelo reduzido.....	89
Figura 6. 2 - Gráfico da Distribuição Gama	92
Figura 6.3 – (a) Efeito de 10% de incertezas no diâmetro do 2º elemento de viga (b) Convergência.....	93
Figura 6.4 – (a) Efeito de 10% de incertezas no diâmetro do 3º elemento de viga (b) Convergência.....	94
Figura 6.5 – (a) Efeito de 10% de incertezas nos diâmetros do 3º e 9º elemento de viga (b) Convergência.....	95
Figura 6.6 – (a) Efeito de 10% de incertezas nos diâmetros do 7º e 13º elemento de viga (b) Convergência.....	96
 Figura 7. 1 – (a) Representação da função objetivo e sua vulnerabilidade e (b) solução robusta escolhida	105
Figura 7. 2 – Envelope de solução (a) valor inicial versus resposta determinística e (b) ótimo robusto versus resposta determinística	106
Figura 7. 3 – (a) Representação da função objetivo e sua vulnerabilidade e (b) solução robusta escolhida	107
Figura 7. 4 – Envelope de solução (a) valor inicial versus resposta determinística e (b) ótimo robusto versus resposta determinística	107
Figura 7. 5 – (a) Representação da função objetivo e sua vulnerabilidade e (b) solução robusta escolhida	108

Figura 7. 6 – Envelope de solução (a) valor inicial versus resposta determinística e (b) ótimo robusto versus resposta determinística	109
Figura 7. 7 – Representação da função objetivo e sua vulnerabilidade (a) NSGA, (b) solução robusta do NSGA escolhida, (c) CVM e (d) solução robusta do CVM escolhida	110
Figura 7. 8 – Envelope de solução (a) valor inicial versus resposta determinística, (b) ótimo robusto NSGA versus resposta determinística e (c) ótimo robusto CVM versus resposta determinística.....	111

LISTA DE TABELAS

Tabela 2. 1 - Valores dos parâmetros do sistema	22
Tabela 2.2 - Valores dos parâmetros da viga de Euler-Bernoulli.....	31
Tabela 3.1 Parâmetros do rotor.....	48
Tabela 5. 1 - Valores do desvio-padrão	68
Tabela 5. 2- Valores do desvio-padrão	69
Tabela 5. 3 - Valores do desvio-padrão	71
Tabela 5. 4 - Valores do desvio-padrão	73
Tabela 5. 5 - Valores do desvio-padrão	75
Tabela 5. 6 - Valores do desvio-padrão	76
Tabela 5. 7 - Valores do desvio-padrão	77
Tabela 5. 8 - Valores do desvio-padrão	78
Tabela 5. 9 - Valores do desvio-padrão	80
Tabela 6.3 - Valor do desvio-padrão	94
Tabela 6.4 - Valor do desvio-padrão	94
Tabela 6. 5 - Valor do desvio-padrão	95
Tabela 6.6 - Valores do desvio-padrão	96
Tabela 7. 1 - Definição dos parâmetros do método NSGA	104
Tabela 7. 2 - Definição da variável de projeto	105
Tabela 7. 3 - Valor inicial e Valor ótimo.....	106
Tabela 7. 4 - Definição das variáveis de projetos.....	106
Tabela 7. 5 - Valor inicial e Ótimo robusto.....	108
Tabela 7. 6 - Definição das variáveis de projetos.....	108
Tabela 7.7 - Valor inicial e Ótimo robusto.....	109
Tabela 7. 8 - Definição dos parâmetros dos métodos NSGA e do CVM.....	110
Tabela 7. 9 - Valores iniciais e Ótimo robusto	111

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	16
2. SISTEMAS MECÂNICOS LINEARES E NÃO LINEARES	20
2.1 Modelagem de um Sistema Discreto Não Linear	21
2.1.1 Introdução aos sistemas não lineares	24
2.2 Introdução ao Método dos Elementos Finitos (MEF)	27
2.2.1 Formulação de uma viga de Euler-Bernoulli.....	28
3. INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE MÁQUINAS ROTATIVAS	34
3.1 Modelagem de um Rotor Flexível	35
3.1.1 Formulação das matrizes elementares para o disco	37
3.1.2 Formulação das matrizes elementares para o eixo.....	39
3.1.2.1 Energia potencial do elemento de viga	39
3.1.2.2 Energia cinética para o elemento de viga.....	42
3.1.3 Trabalho virtual dos mancais	45
3.2 Equação Global do Rotor.....	47
3.3 Introdução às Técnicas de Redução de Modelo.....	49
4. SISTEMAS MECÂNICOS ESTOCÁSTICOS.....	54
4.1 Introdução às Incertezas em Sistemas Mecânicos	54
4.2 Introdução aos Métodos Estocásticos	55
4.2.1 Método de monte carlo (MC)	55
4.2.2 Método hipercubo latino (HCL)	56
4.3 Expansão de Karhunen-Loève	58
4.4 Métodos dos Elementos Finitos Estocásticos	63
5. ESTUDO DE INCERTEZAS EM SISTEMAS NÃO LINEARES	65
5.1 Influência de Incertezas no Sistema Discreto de 2 g.d.l.	66
5.2 Influência de Incertezas em uma Viga de Euler-Bernoulli.....	72
5.2.1 Aplicação do MEF para a Viga de Euler-Bernoulli.....	80
6. ESTUDO DE INCERTEZAS EM MÁQUINAS ROTATIVAS	89
6.1 Estudo do Efeito de Incertezas nos Mancais do Rotor	89
6.2 Construção do Modelo Probabilístico.....	90
6.2.1 Parâmetro diâmetro do elemento de viga (d).....	91

6.2.1.1 Efeito de incertezas nos diâmetros do elementos de viga.....	93
7. INTRODUÇÃO A OTIMIZAÇÃO.....	97
7.1 Otimização MultiObjetivo Determinístico	97
7.2 Otimização MultiObjetivo Robusta	99
7.2.1 Nondominated sorting genetic algorithm (NSGA)	100
7.2.1.1 Funcionamento do método.....	100
7.2.2 Algoritmo de otimização colônia de Vagalumes multiobjetivo (CVM).....	102
7.3 Projeto Ótimo Robusto de um Sistema Rotativo	104
8. CONCLUSÕES.....	112
REFERÊNCIAS	114

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Atualmente, com as modernizações obtidas devido ao desenvolvimento dos computadores, de materiais inovadores e um maior arcabouço de técnicas numéricas onde as técnicas lineares já difundidas e as não lineares parcialmente desenvolvidas, requerem que os sistemas mecânicos e as estruturas de engenharia trabalhem com desempenho ótimo, ou seja, alta confiabilidade, robustez a condições ambientais para se ter projetos eficientes e confiáveis. Para tal, é necessário também o desenvolvimento de modelos realistas que venham a considerar adequadamente as incertezas, uma vez que, desconsiderá-las pode levar o projeto à grandes perdas.

É notável o interesse de se estudar os efeitos de incertezas em problemas de engenharia, devido a estes problemas serem de uma elevada complexidade, necessitando de modelos computacionais sofisticados para retratar mais fielmente a física do problema. Também pelo fato de que, se alguma propriedade de uma dada estrutura é incerta, isto pode influenciar diretamente na resposta dinâmica.

Vários são os autores que vem estudando e considerando as incertezas em estruturas de engenharia, destaca-se: Hidalgo (2014), Guedri (2006), Koroishi et al. (2012), Ritto et al. (2011), Guedri; Bouhaddi; Majed (2006), Ghanem; Spanos (1991).

É de grande valia o estudo dos chamados métodos estocásticos, pois estes são uma importante ferramenta na consideração dos efeitos das incertezas com a intenção de se obter melhores configurações para os problemas de engenharia (RODOVALHO; COSTA, 2013).

Os métodos estocásticos também chamados de probabilísticos, são assim conhecidos por realizarem simulações por meio de amostragem. Dentre as várias técnicas conhecidas, destacam-se os métodos de Monte Carlo (MC) e o método Hipercubo Latino (HCL). O MC é uma técnica muito conhecida e é utilizada no estudo da influência de incertezas, porém, com a desvantagem de possuir um alto custo computacional. Uma alternativa foi o desenvolvimento de uma variante deste método, o chamado HCL que tem a vantagem de reduzir o custo computacional do problema.

São inúmeros os autores que vem utilizando o MC para resolver os mais variados tipos de problemas estocásticos, dentre eles podem se destacar: Castillo (2015), Ribeiro; Lima (2015), Zhang; Elfadel; Daniel (2013), Lima; Rade; Bouhaddi (2010).

Além disso, verifica-se a utilização do método HCL também na resolução de problemas estocásticos em: Lara-Molina; Koroishi; Steffen Jr. (2014), Martins; Ferreira (2013); Deutsch; Deutsch (2011); Maschio; Carvalho; Schiozer (2009), Pilger; Costa; Koppe (2005).

Além desses métodos, tem se mostrado como uma valiosa ferramenta para a análise de incertezas os chamados métodos dos elementos finitos estocásticos (MEFE). Esse método é dado pela combinação da teoria clássica dos elementos finitos em conjunto com a análise estatística que considera os parâmetros como sendo aleatórios (GUEDRI, 2006).

Ribeiro; Lima (2015) descreve que, no âmbito da mecânica computacional tem-se destacado o MEFE, pois cada vez mais torna-se necessário a introdução de incertezas nos problemas de engenharia, sendo o MEFE uma importante ferramenta na resolução de problemas estocásticos.

A análise de incertezas mostra ser uma metodologia dispendiosa e que tem um alto custo computacional, isto é, devido à utilização dos métodos estocásticos que necessitam de alto número de amostras para a obtenção da convergência. Assim, uma ferramenta que tem sido bastante citada na literatura é a utilização da expansão de Karhunen-Loève (KL) em conjunto com o MEFE. Este método possibilita a representação das incertezas nos parâmetros do sistema como campos estocásticos gaussianos homogêneos que são discretizados pelo método KL (RIBEIRO; LIMA, 2015).

Pimentel (2014) cita KL como uma forma de representar processos aleatórios que é baseada na expansão espectral proporcionando uma redução da dimensão do espaço aleatório.

No trabalho de Koroishi (2013) é abordado o comportamento de um rotor flexível quando incertezas foram consideradas em parâmetros relacionados com o eixo e/ou com o mancal, utilizando-se do MEFE para a análise de incertezas e do KL para a discretização dos campos aleatórios.

Durante muitos anos, a teoria linear foi considerada suficiente para descrever a dinâmica dos sistemas. Em razão da modernização das estruturas, do emprego de materiais inovadores e da utilização de técnicas numéricas, passou-se a ter uma maior consideração das não linearidades. A origem das não linearidades pode ser devido a geometria do sistema ou do tipo de material assim, ressalta-se que componentes das equações do movimento como, por exemplo, os termos de inércia ou os termos que descrevem forças restauradoras elásticas podem ser afetados por algum tipo de não linearidade (BORGES, 2008).

Dentre os inúmeros trabalhos sobre as não linearidades, destacam-se os trabalhos de: Purcina; Costa; Borges (2015), Melo (2015), Souza (2015), Borges (2008), Pai (2007), Savi (2004), Nayfeh, Pai (2004), Zienkiewicz; Taylor (2000), Oeini; Chin; Nayfeh (1999), Nayfeh; Mook (1979).

Neste trabalho tem-se como objetivo, estudar os efeitos de incertezas em sistemas mecânicos compostos por estruturas lineares e não lineares através da utilização de métodos estocásticos. Para tal estudo, considera-se, um sistema discreto de 2 g.d.l., um sistema contínuo do tipo viga e um rotor composto por eixo, mancais e discos. Para a análise do efeito de incertezas nestes sistemas utiliza-se do método estocástico Hipercubo Latino (HCL), e no caso da viga de Euler-Bernoulli ainda é utilizado o método dos elementos finitos estocásticos (MEFE) juntamente com a expansão de Karhunen-Loève (KL). Em relação ao estudo do rotor, serão aplicados métodos de otimização robusta com o intuito de obter o valor ótimo do diâmetro do elemento de viga onde tem-se como objetivo a minimização da amplitude de vibração e a minimização da vulnerabilidade da resposta.

Essa dissertação está dividida em oito capítulos conforme descrição a seguir:

Capítulo 2 – Neste capítulo será realizada uma introdução sobre os sistemas mecânicos com destaque para os sistemas não lineares, onde são exemplificados alguns tipos de não linearidades, a saber, geométrica e física. Também será abordado um sistema discreto de 2 g.d.l. e um sistema contínuo do tipo viga onde através de implementações computacionais, serão encontradas as respostas para estes sistemas.

Capítulo 3 – Neste, tem-se uma introdução sobre as máquinas rotativas. Além disso, é apresentada a técnica de redução de modelo chamada de *Iterative Improved Reduction System (IIRS)*. E, por fim é apresentada a modelagem do rotor utilizando a técnica numérica de elementos finitos.

Capítulo 4 – Este capítulo traz uma apresentação sobre a incertezas e sobre os métodos estocásticos, abordando o método de Monte Carlo (MC) e o Hipercubo Latino (HCL) que é uma versão mais simples do MC. Além desses métodos, tem-se uma introdução da teoria dos elementos finitos estocásticos e da utilização da expansão de Karhunen-Loève.

Capítulo 5 – Aqui será realizado o estudo sobre a influência de incertezas, ou seja, utilizando-se do método estocástico HCL são construídos os envelopes de solução (valor máximo, valor médio e valor mínimo) para o sistema discreto de 2 g.d.l. onde alguns dos parâmetros de rigidez serão considerados aleatórios e, para a viga de Euler-Bernoulli onde os parâmetros largura e espessura serão parâmetros incertos onde é realizado simulações primeiramente considerando o acoplamento na estrutura de uma mola com característica linear

e posteriormente, a mola terá característica não linear. Será ainda abordada a metodologia do MEFE utilizando em conjunto o KL.

Capítulo 6 – Aqui, tem-se a consideração de incertezas em parâmetros de um rotor onde, de início, são considerados os dois valores da rigidez dos mancais como aleatórios para 30% de incerteza e, posteriormente são realizados testes considerando alguns valores dos diâmetros dos elementos de viga como aleatórios, neste, também é obtido o número de amostras necessárias para a obtenção da convergência do método.

Capítulo 7 – Neste capítulo, é introduzido o conceito dos métodos de otimização multiobjetivo robusto. São introduzidas as técnicas Nondominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA) e o método de Otimização por Colônia de Vagalumes Multiobjetivo (CVM). Portanto, neste capítulo será construído o projeto ótimo robusto do rotor, para isso são considerados como variáveis de projeto alguns valores dos diâmetros dos elementos de viga com o objetivo de encontrar o valor ótimo robusto. Para tal, tem-se como objetivos a minimização da amplitude de vibração e simultaneamente a minimização da vulnerabilidade.

Capítulo 8– Neste capítulo, são apresentadas as conclusões.

No final, neste trabalho, são listadas as referências bibliográficas.

Capítulo 2

SISTEMAS MECÂNICOS LINEARES E NÃO LINEARES

Existe uma enorme gama de sistemas físicos, dentre eles destacam-se os sistemas mecânicos, elétricos, térmicos, hidráulicos, dentre outros e, esses sistemas podem ser classificados em sistemas estáticos ou dinâmicos, probabilísticos ou determinísticos, discretos ou contínuos, lineares ou não lineares, dentre outras classificações.

Sistemas discretos são aqueles cujos parâmetros físicos, de inércia, de rigidez e de amortecimento, estão concentrados em um número finito de pontos do espaço, já os sistemas contínuos são os sistemas cujos parâmetros físicos estão distribuídos em um número infinito de pontos (RODOVALHO; COSTA, 2013).

Sistemas estocásticos também ditos probabilísticos são assim definidos por considerar uma ou mais variáveis como aleatórias, diferentemente dos sistemas determinísticos onde as variáveis de entrada do problema são conhecidas (AGUIRRE, 2000).

Um sistema dinâmico é aquele cujo estado evolui com o tempo (t), este pode ter valores discretos ou contínuos. Uma evolução de tempo discreto é geralmente descrita por um sistema de equações algébricas, enquanto a evolução por tempo contínuo geralmente é descrita por um sistema de equações diferenciais (NAYFEH; BALACHANDRAN, 1995).

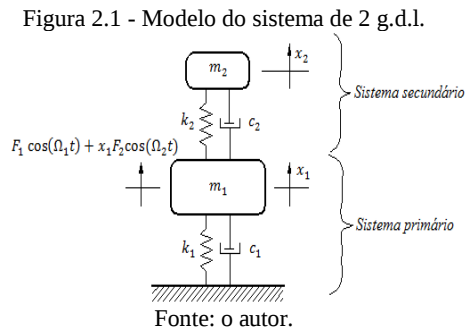
Os sistemas ainda podem ser classificados em lineares e não lineares. Quando os componentes atuam linearmente e prevalece o princípio da superposição o sistema é dito linear, ao contrário, no sistema não linear um ou mais componentes do sistema não se comportam linearmente, ou seja, tem-se relações quadráticas, cúbicas, exponenciais, senoidais, dentre outras (RODOVALHO; COSTA, 2013).

Dentre os vários tipos de sistemas na engenharia, neste trabalho o interesse é estudar várias características relacionadas aos sistemas mecânicos. Esses sistemas, na maioria das vezes, são compostos por: massa, rigidez e amortecimento. O estudo a respeito deste tipo de sistema mostra-se de grande importância por, geralmente, estarem sujeitos as vibrações.

2.1 Modelagem de um Sistema Discreto Não Linear

Considerando um sistema de 2 g.d.l., dado pela Fig. 2.1, composto pelo sistema principal (m_1, k_1, c_1) dado por massa, rigidez e amortecimento respectivamente, que está conectado ao sistema secundário (m_2, k_2, c_2) .

Neste sistema tem-se um exemplo de não linearidade física, pois o efeito da não linearidade é dado por polinômios que possuem deslocamentos quadráticos e cúbicos.



Aplicando a 2ª Lei de Newton nas duas massas separadamente, escreve-se as equações do movimento do sistema como sendo (Sayed; Hamed; Amer, 2011); (Costa; Purcina, Borges, 2015); (Purcina; Costa; Borges, 2015):

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_1 x_1^2 + c_3 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_{11} x_1 + k_{12} x_1^2 + k_{13} x_1^3 + k_{21} (x_1 - x_2) + k_{22} (x_1 - x_2)^2 \\ + k_{23} (x_1 - x_2)^3 = f_1 \cos(\Omega_1 t) + x_1 f_2 \cos(\Omega_2 t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_3 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_{21} (x_2 - x_1) + k_{22} (x_2 - x_1)^2 + k_{23} (x_2 - x_1)^3 = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

O efeito da não linearidade, neste caso, foi introduzido na rigidez do sistema que é dado pela soma das rigidezes da mola multiplicados pelos deslocamentos quadráticos e cúbicos, além de que, também aparece a não linearidade no amortecimento do sistema. Logo, reescreve-se a eq. (2.1) em função dos polinômios k_1 e k_2 :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_1 x_1^2 + c_3 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 + k_2 = f_1 \cos(\Omega_1 t) + x_1 f_2 \cos(\Omega_2 t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_3 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

onde:

$$\begin{cases} k_1 = k_{11} x_1 + k_{12} x_1^2 + k_{13} x_1^3 \\ k_2 = k_{21} x + k_{22} x^2 + k_{23} x^3 \end{cases} \quad (2.3)$$

Na eq. (2.3), x é o movimento relativo das massas m_1 e m_2 .

Na eq. (2.2) verifica-se que a massa principal está sujeita a uma força do tipo $F(t) = F_1 \cos(\Omega_1 t) + x_1 F_2 \cos(\Omega_2 t)$, onde Ω_j ($j = 1, 2$) são frequências de excitação, x_1 e x_2 são deslocamentos do sistema principal e secundário, respectivamente.

A partir de manipulações algébricas na eq. (2.3) e assumindo não linearidades fracas e pequeno amortecimento, chega-se a:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \varepsilon \alpha_1 x_1^2 + \varepsilon \alpha_2 x_1^3 + \varepsilon \xi_1 \dot{x}_1 + \varepsilon \xi_2 \dot{x}_1 x_1^2 + \varepsilon \xi_3 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \varepsilon \alpha_3 x_2 + \varepsilon \alpha_4 (x_1 - x_2)^2 \\ + \varepsilon \alpha_5 (x_1 - x_2)^3 = \varepsilon F_1 \cos(\Omega_1 t) + \varepsilon x_1 F_2 \cos(\Omega_2 t) \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 (x_2 - x_1) + \varepsilon \beta_1 (x_2 - x_1)^2 + \varepsilon \beta_2 (x_2 - x_1)^3 + \varepsilon \xi_4 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

onde:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{k_{11} + k_{21}}{m_1}, \omega_2^2 = \frac{k_{21}}{m_2}, \alpha_1 = \frac{k_{12}}{m_1}, \alpha_2 = \frac{k_{13}}{m_1}, \alpha_3 = \frac{k_{21}}{m_1}, \alpha_4 = \frac{k_{22}}{m_1}, \alpha_5 = \frac{k_{23}}{m_1} \\ , \xi_1 &= \frac{c_1}{m_1}, \xi_2 = \frac{c_2}{m_1}, \xi_3 = \frac{c_3}{m_1}, \xi_4 = \frac{c_3}{m_2}, \beta_1 = \frac{k_{22}}{m_2}, \beta_2 = \frac{k_{23}}{m_2}, F_i = \frac{f_i}{m_i}, i = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Os parâmetros do sistema principal estão listados na Tabela 2.1.

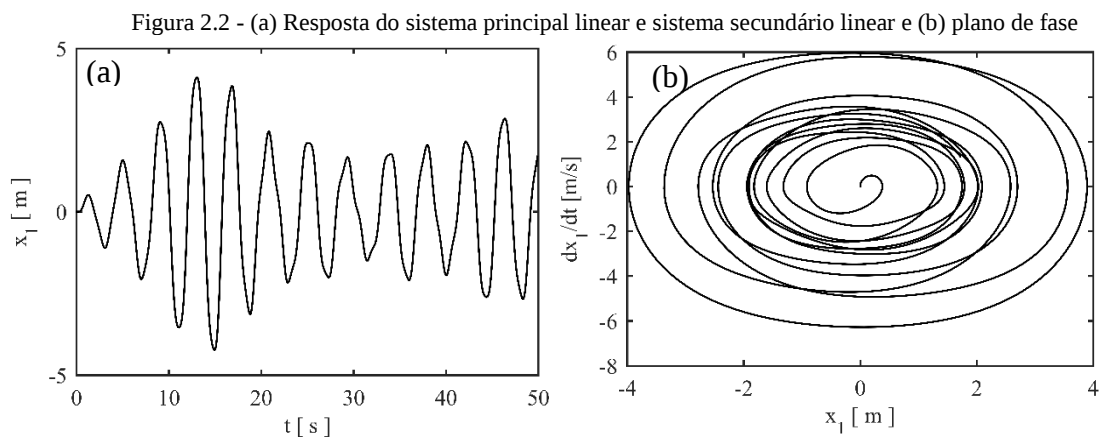
Tabela 2. 1 - Valores dos parâmetros do sistema

Símbolo	Parâmetro	Valores	Unidade
m_1	Massa do sistema principal	10	<i>Kg</i>
m_2	Massa do sistema secundário	0.8	<i>Kg</i>
k_{11}	Rigidez linear	30.35	<i>N/m</i>
k_{12}	Rigidez não linear	0.3	<i>N/m</i>
k_{13}	Rigidez não linear	0.4	<i>N/m</i>
k_{21}	Rigidez linear	2.048	<i>N/m</i>
k_{22}	Rigidez não linear	0.1	<i>N/m</i>
k_{23}	Rigidez não linear	0.2	<i>N/m</i>
c_1	Coeficiente do amortecimento do sistema principal	0.5	<i>Ns/m</i>
c_2	Coeficiente de amortecimento do sistema secundário	0.2	<i>Ns/m</i>
c_3	Coeficiente de amortecimento acoplado	0.1	<i>Ns/m</i>
f_1	Força de excitação	6	<i>N</i>
f_2	Força de excitação	3	<i>N</i>

Fonte: o autor.

Na eq. (2.5), ω_j ($j=1,2$) são frequências naturais, α e β são parâmetros de rigidez lineares e não lineares respectivamente, ζ coeficiente de amortecimento, F força de excitação e ε indica uma pequena grandeza assumida que tem a finalidade de balancear as não linearidades do sistema.

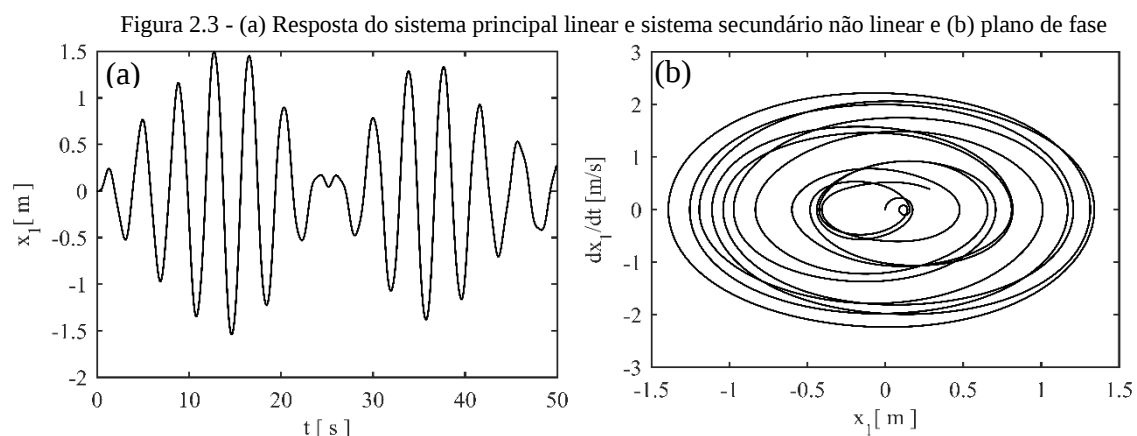
De início é obtido a resposta do sistema principal linear e sistema secundário linear utilizando-se dos dados da Tabela 2.1 que é ilustrado na Figura 2.2:



Fonte: o autor.

Na Figura 2.2, pode-se observar que o sistema apresenta oscilações irregulares, as quais são evidenciadas pelas trajetórias no plano de fase. Ressalta-se que o plano de fase tem como coordenadas o deslocamento e a velocidade onde dada uma condição inicial, a solução do sistema é representada geometricamente como uma trajetória.

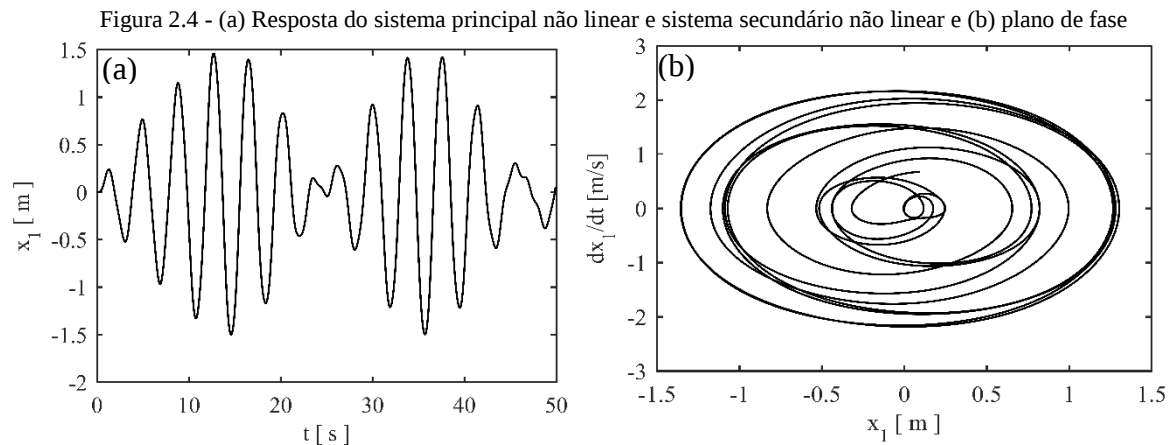
A seguir, considerou-se o sistema principal como sendo linear e o sistema secundário como sendo não linear, obtendo a resposta no domínio do tempo e o plano de fase mostradas na Figura 2.3:



Fonte: o autor.

Na Figura 2.3 (a) verifica-se pela resposta do sistema principal que houve uma atenuação na amplitude de vibração devido ao sistema secundário possuir características não lineares, porém, é possível notar que o plano de fase apresentado na Figura 2.3 (b) comparado ao da Figura 2.2 (b) sugere um relativo aumento na instabilidade do sistema.

Neste caso, considera-se tanto o sistema principal como o sistema secundário como sendo não linear, Figura 2.4:



Fonte: o autor.

Neste Figura, tem-se um resultado similar ao apresentado na Figura 2.3, isto é, percebe-se uma diminuição da amplitude de vibração, porém também é visto que, na Figura 2.4 (b) que é apresentado um aumento da instabilidade do mesmo.

2.1.1 Introdução aos sistemas não lineares

Durante muito tempo, a teoria linear foi considerada suficiente para a análise das estruturas de engenharia, porém, com a modernização dos computadores, o emprego de materiais inovadores e o desenvolvimento de novas técnicas, tornou-se possível a consideração de não linearidades presentes no sistema. A teoria dos sistemas dinâmicos não lineares tem sido impulsionada pela sua consideração em várias áreas de ciências e engenharias (PIQUEIRA, 1994).

Não linearidades em um sistema, podem ser inerentes e intencionais. As não linearidades inerentes são aquelas que existem naturalmente nos sistemas e, na grande maioria das vezes, causam efeitos indesejáveis como, por exemplo, saturação, histerese, folga e atrito.

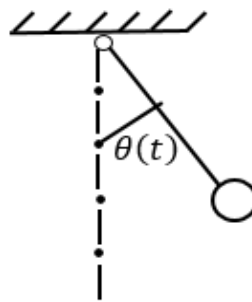
Já as não linearidades intencionais ou artificiais são aquelas que são introduzidas ao sistema com o intuito de melhorar seu desempenho (SLOTINE; LI, 1991).

As não linearidades podem ser consideradas nos modelos de várias formas como, por exemplo, devido à geometria do sistema ou do tipo de material, ou associada com a presença de forças não lineares ou com a configuração física do sistema (BORGES, 2008).

A não linearidade física pode ocorrer devido ao fato do material não apresentar uma relação tensão-deformação linear, ou seja, a lei de Hooke não é válida. Na geométrica, a estrutura pode apresentar um comportamento não linear, ainda que o material obedeça a Lei de Hooke e, é necessário considerar as relações tensão-deformação (SILVA, 2009).

Um exemplo de não linearidade geométrica devido a grandes oscilações é o pêndulo, mostrado na Figura 2.5.

Figura 2.5 - Pêndulo



Fonte: Adaptado de Thomsen (2003).

A equação que governa o seu movimento é (THOMSEN, 2003):

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0 \quad (2.6)$$

O termo não linear $\sin \theta$, pode ser expandido, utilizando a série de Taylor:

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 + \dots \quad (2.7)$$

Considerando apenas o primeiro termo da expansão dado pela eq. (2.7), chega-se a aproximação linear, eq. (2.8), onde esta aproximação mostra ser válida somente para pequenas oscilações de θ .

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad (2.8)$$

Uma mola é um tipo de ligação mecânica e pode ser definida como qualquer corpo ou elemento elástico ou deformável. A mola pode ser identificada na maioria das aplicações em engenharia como, por exemplo, uma barra, viga, placa, entre outras. A mola é dita ser linear, se o alongamento ou a redução do comprimento x está relacionado com a força F aplicada que é (RAO, 2010):

$$F(x) = kx \quad (2.9)$$

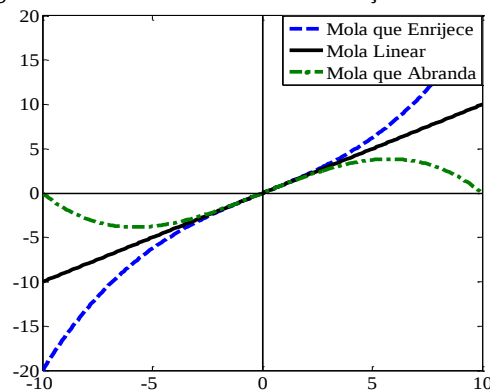
Devido a grandes deformações em sistemas práticos, a maioria das molas exibe uma relação força-deflexão não linear (BORGES, 2008). Logo, a não linearidade física pode ser descrita matematicamente, considerando a seguinte equação:

$$F = ax + bx^3, a > 0 \quad (2.10)$$

Na eq. (2.10), tem-se a constante associada com a parcela linear dada por a , e a constante associada a não linearidade cúbica b . Caso $b > 0$, diz-se que a não linearidade é do tipo que enrijece (hardening spring), quando $b < 0$, diz-se que a não linearidade é do tipo que abranda (softening spring) e quando $b = 0$, diz-se que a mola é linear (BORGES, 2008).

A Figura 2.6 ilustra três diferentes tipos de relações força-deslocamento, a saber, mola que enrijece (hard), mola linear e mola que abranda (soft):

Figura 2.6 - Não linearidade devido a forças restauradoras



Fonte: o autor.

2.2 Introdução ao Método dos Elementos Finitos (MEF)

Define-se o método dos elementos finitos (MEF) como sendo um método numérico utilizado na resolução por aproximação de equações diferenciais de vários tipos de problemas (KIM; SANKAR, 2011).

Segundo Souza (2003) o MEF é uma técnica numérica que permite a realização de análises de vários tipos de problemas físicos, onde utiliza-se de equações para descrever o problema.

A origem do método aconteceu no final do século XVIII, onde Gauss sugeriu para a resolução de problemas matemáticos o uso de funções de aproximação. No entanto, de fato deu-se o seu desenvolvimento na década de 50 com o advento da computação permitindo a sua aplicação em problemas de grande complexidade (LOTTI et al., 2006).

O método divide o domínio da estrutura em várias regiões interconectadas que são chamadas de elementos e, cada elemento dispõe de certo número de pontos ou nós. Ao se definir os elementos e seus pontos nodais, admitem-se soluções aproximadas para as variáveis, expressas como funções chamadas de funções de interpolação ou funções de forma (RADE, 2011).

As aplicações para o MEF são inúmeras como: na construção civil, automobilística, naval, metalúrgica, mineração, telecomunicações, saúde dentre outras (SOUZA, 2003).

O MEF também tem aplicação em diversas especialidades odontológicas, como na Ortodontia, para análise de cargas, tensões ou deslocamentos (LOTTI et al., 2006).

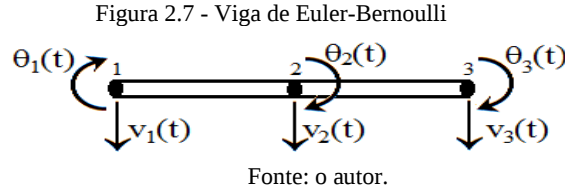
No trabalho de Marzo (2010) pode-se encontrar a aplicação do MEF na análise de tensões onde, existe uma conexão através de cabos entre as plataformas de petróleo e as bombas, estas estão submersas para a extração do petróleo. Os cabos têm enorme comprimento e estão em águas profundas e sofrem constante pressão e esforços mecânicos.

Quando um sistema é dito contínuo, os parâmetros físicos do mesmo estão distribuídos em um determinado volume do espaço. As grandezas do problema podem então, assumir valores independentes em cada ponto do domínio, logo, o problema tem um número infinito de incógnitas, sendo chamado de problema infinito-dimensional.

Uma vez que se queira trabalhar com um problema finito dimensional, ou seja, com um número finito de incógnitas é necessário realizar o processo de discretização, ou seja, transformar de contínuo para discreto, logo, pode-se utilizar o chamado método dos elementos finitos, o qual será abordado a seguir uma discretização de uma viga de Euler-Bernoulli.

2.2.1 Formulação de uma viga de Euler-Bernoulli

A viga de Euler-Bernoulli descrita a seguir, foi discretizada pelo MEF, Figura 2.7:



Nesta figura, observa-se um exemplo de uma viga que foi discretizada em dois elementos. Sendo que, v_1 , v_2 e v_3 são deslocamentos, θ_1 , θ_2 e θ_3 são rotações.

A seguir, tem-se a formulação da viga utilizando o Princípio Variacional de Hamilton onde se tem a consideração de algumas hipóteses (RADE, 2011; FERREIRA, 2007):

- Considera-se os efeitos da flexão transversal e desconsidera-se os efeitos associados ao deslocamento longitudinal;
- Os efeitos do cisalhamento transversal e de inércia de rotação das seções transversais são desprezados;
- Os deslocamentos e rotações são considerados pequenos;
- Os materiais apresentam comportamento linear elástico e isotrópico.

A equação matemática que descreve o comportamento da viga é:

$$[M^e]\{\ddot{u}^e(t)\} + [K^e]\{u^e(t)\} = \{F^e\} \quad (2.11)$$

Na eq. (2.11) tem-se que $[M]$ representa a matriz de massa, $[K]$ a matriz de rigidez, $\{\ddot{u}(t)\}$ é o vetor de aceleração, $\{u(t)\}$ vetor de deslocamento, $\{F(t)\}$ vetor de força e, o sobrescrito e indica elemento.

Para a formulação das equações do movimento em nível elementar, utiliza-se a expressão da energia cinética:

$$T_i = \frac{1}{2} \{\dot{u}_i(t)\}^T [M_i] \{\dot{u}_i(t)\} \quad (2.12)$$

onde:

$$[M_i]_{mn} = \int_0^{l_i} m_i(x) [\phi(x)]^T [\phi(x)] dx \quad (2.13)$$

$[M_i]_{mn}$ é a matriz de massa com $m, n=1,...,g.d.l.$

E, a energia potencial:

$$v_i = \frac{1}{2} \{\dot{u}_i(t)\}^T [K_i] \{\dot{u}_i(t)\} \quad (2.14)$$

onde:

$$[K_i]_{mn} = \int_0^{l_i} E(x) I(x) \ddot{\phi}^T \ddot{\phi} dx \quad (2.15)$$

$[K_i]_{mn}$ é a matriz de rigidez do elemento de viga com $m, n=1,...,g.d.l.$

Para que a viga seja discretizada em vários elementos finitos é necessário estabelecer para cada elemento, transformações lineares relacionando os graus de liberdade elementares com os graus de liberdades globais, ou seja:

$$\begin{cases} \{u_i(t)\}_{4 \times 1} \\ \{u_j(t)\}_{4 \times 1} \end{cases} = \begin{bmatrix} L_i \\ L_j \end{bmatrix}_{4 \times 6} \begin{cases} \{u^g(t)\}_{6 \times 1} \\ \{u^g(t)\}_{6 \times 1} \end{cases} \quad (2.16)$$

A seguir, tem-se as matrizes de transformação (matrizes booleanas) para os elementos i e j mostrando-se a relação entre os graus de liberdade elementares e os graus de liberdade globais:

$$\begin{Bmatrix} v_i^e(t) \\ \theta_i^e(t) \\ v_i^d(t) \\ \theta_i^d(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1(t) \\ \theta_1(t) \\ v_2(t) \\ \theta_2(t) \\ v_3(t) \\ \theta_3(t) \end{Bmatrix} \text{ e } \begin{Bmatrix} v_j^e(t) \\ \theta_j^e(t) \\ v_j^d(t) \\ \theta_j^d(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1(t) \\ \theta_1(t) \\ v_2(t) \\ \theta_2(t) \\ v_3(t) \\ \theta_3(t) \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

Em nível global, a energia cinética é dada pelo somatório da energia cinética de todos os n elementos considerados:

$$T_t = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \rightarrow T_t = \frac{1}{2} \{\dot{u}^g(t)\}^T [M^g] \{\dot{u}^g(t)\} \quad (2.18)$$

A matriz de massa global é calculada pelo seguinte somatório:

$$[M^g] = [L_i]^T [M_i] [L_i] + [L_j]^T [M_i] [L_j] \quad (2.19)$$

Logo, a matriz de massa é:

$$[M] = \frac{\rho A l_i}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_i & 54 & -13l_i & 0 & 0 \\ 22l_i & 4l_i^2 & 13l_i & -3l_i^2 & 0 & 0 \\ 54 & 13l_i^2 & 156 + 156 & -22l_i + 22l_i & 54 & -13l_i \\ -13l_i & -3l_i^2 & -22l_i + 22l_i & 4l_i^2 + 4l_i^2 & 13l_i & -3l_i^2 \\ 0 & 0 & 54 & 13l_i & 156 & -22l_i \\ 0 & 0 & -13l_i & -3l_i^2 & -22l_i & 4l_i^2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Para o cálculo da matriz de rigidez utiliza-se a formulação da energia potencial, no qual, calcula-se de forma semelhante a anterior:

$$V_t = \frac{1}{2} \{u^g(t)\}^T [K^g] \{u^g(t)\} \quad (2.21)$$

A matriz de rigidez global é formulada da seguinte forma:

$$[K^g] = [L_i]^T [K_i] [L_i] + [L_j]^T [K_i] [L_j] \quad (2.22)$$

Chegando a seguinte matriz de rigidez:

$$[K_i] = \frac{EI}{l_i^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_i & -12 & 6l_i & 0 & 0 \\ 6l_i & 4l_i^2 & -6l_i & 2l_i^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6l_i & 12 + 12 & -6l_i + 6l_i & -12 & 6l_i \\ 6l_i & 2l_i^2 & -6l_i + 6l_i & 4l_i^2 + 4l_i^2 & -6l_i & 2l_i^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l_i & 12 & -6l_i \\ 0 & 0 & 6l_i & 2l_i^2 & -6l_i & 4l_i^2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Para definir o vetor de força utiliza-se do mesmo princípio usado para a montagem das matrizes globais de massa e rigidez, veja um exemplo abaixo:

$$\begin{Bmatrix} F_j^{v^e}(t) \\ F_j^{\theta^e}(t) \\ F_j^{v^d}(t) \\ \theta_j^{\theta^d}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1(t) \\ \theta_1(t) \\ v_2(t) \\ \theta_2(t) \\ v_3(t) \\ \theta_3(t) \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

Uma alternativa usada para atenuar a amplitude de vibração é adicionar amortecimento estrutural, dada pela combinação linear das matrizes de massa e rigidez.

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (2.25)$$

A equação global do movimento considerando o amortecimento estrutural é dada por:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \quad (2.26)$$

Na eq. (2.25) os parâmetros α e β são as constantes reais da matriz de amortecimento de Rayleigh, assume-se que $\alpha=0$ e $\beta=0.0005$.

Na Tabela 2.2 é ilustrado os valores dos parâmetros da viga:

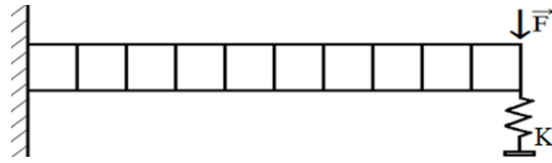
Tabela 2.2 - Valores dos parâmetros da viga de Euler-Bernoulli

Símbolo	Parâmetro	Valores	Unidade
L_T	Comprimento total da viga	0.5	m
L	Comprimento de cada elemento	0.05	m
b	Largura de cada elemento	0.01	m
h	Espessura de cada elemento	0.003	m
ρ	Densidade volumétrica	2710	kg/m^3
E	Módulo de Young	70×10^9	N/m
k_l	Rigidez da mola linear	250	N/m
k_{nl}	Rigidez da mola não linear	250	N/m

Fonte: o autor:

A Figura 2.8 ilustra uma viga engastada em uma das extremidades e livre na outra, também tem-se a discretização em 10 elementos. Nesta, observa-se a aplicação de uma força no último nó e, também no mesmo nó é considerada uma mola com característica linear.

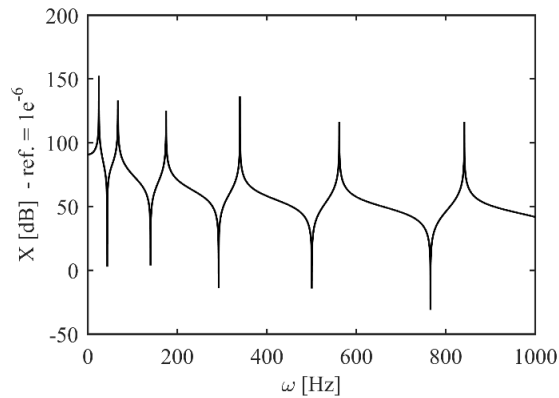
Figura 2.8 - Discretização em dez elementos da viga com mola linear



Fonte: o autor.

Considerando o esquema apresentado na Figura 2.8 e os dados da Tabela 2.2, é realizado implementações no software Matlab® onde é obtido a função resposta em frequência (FRF), Figura 2.9:

Figura 2.9 - Função resposta em frequência



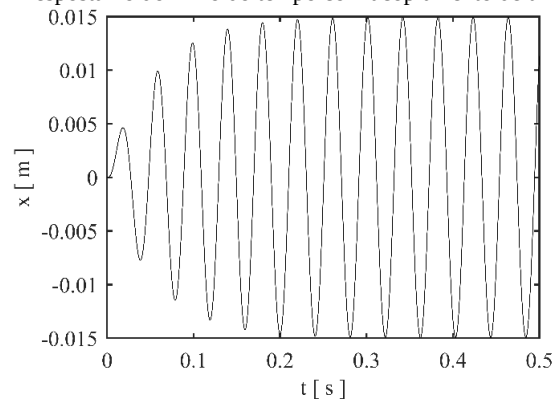
Fonte: o autor.

Na Figura 2.9 tem-se a ilustração da FRF para a viga em questão.

Uma vez que, deseja-se a resposta no domínio do tempo, utiliza-se de algum método para integração das equações do movimento. Dentre estes métodos tem-se o método de Newmark (NEWMARK, 1959).

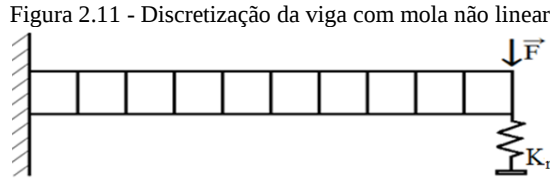
Portanto, tem-se a consideração da viga de Euler-Bernoulli onde foi obtida a resposta no domínio do tempo através do método de Newmark, chegando-se na figura a seguir:

Figura 2.10 - Resposta no domínio do tempo com acoplamento de uma mola linear



Fonte: o autor.

Visto que, a grande maioria dos problemas de engenharia apresentam algum tipo de não linearidade, tem-se a consideração da viga de Euler-Bernoulli descrita anteriormente, porém nesta é acoplada uma mola não linear em uma das extremidades, ilustrado na Figura 2.11:



Fonte: o autor.

Na Figura 2.11 tem-se a representação de uma viga engastada numa das extremidades sendo que na outra é aplicado uma força pontual e, também é acoplado uma mola com característica não linear.

A equação que governa o movimento desta viga para o caso não linear é da forma:

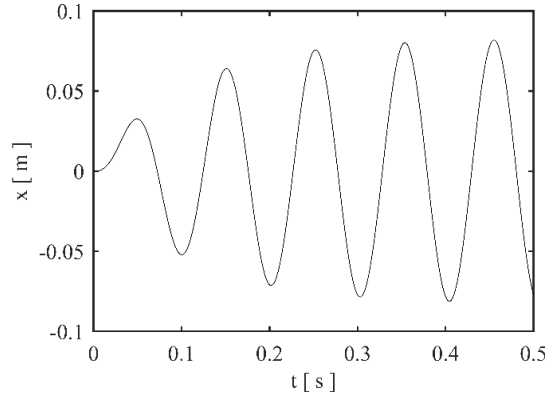
$$[M]\ddot{u}(t) + [C]\dot{u}(t) + [K]u(t) + [K_{nl}]u^3(t) = F(t) \quad (2.27)$$

Considerando como uma força não linear a matriz $[K_{nl}]$, escreve-se:

$$[M]\ddot{u}(t) + [C]\dot{u}(t) + [K]u(t) = F(t) - [K_{nl}]u^3(t) \quad (2.28)$$

Utiliza-se dos dados da Tabela 2.2 e ressalta que neste caso, tem-se a aplicação de uma força do tipo $f_0 \sin(2\pi\omega_0 t)$ onde $f_0 = 1N$ e ω_0 é a frequência natural do primeiro modo de vibração, logo, a resposta no domínio do tempo é mostrado na Figura 2.12:

Figura 2.12 - Resposta no domínio do tempo com acoplamento de uma mola não linear



Fonte: o autor.

Na Figura 2.12, observa-se a resposta no domínio do tempo para o caso onde considerou-se uma mola com característica não linear na extremidade da estrutura.

Capítulo 3

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE MÁQUINAS ROTATIVAS

É sabido que máquinas rotativas possuem uma grande diversidade de aplicações em indústrias. Essas máquinas também são definidas como sistemas mecânicos rotativos que podem ser um componente principal ou parte integrante de algum equipamento.

Segundo Moreira (2015) as máquinas rotativas têm vasta aplicação em vários ramos da engenharia, tais como: automotiva, aeroespacial, petroquímica e de geração de energia. Sendo possível citar como exemplos de rotores os compressores, máquinas centrífugas, turbinas de avião, turbinas para a produção de energia elétrica, dentre outros.

Neste sentido por definição todos os tipos de máquinas onde o eixo é rotacionado em torno de si mesmo são chamados de máquina rotativa, isto é, o rotor é um corpo suspenso por um conjunto de mancais, permitindo girar-se livremente em torno de um eixo fixo (BERTON JR; ROBERTO, 2013).

Diz-se que os principais componentes do rotor é o eixo, disco e mancal, sendo o rotor classificado com um sistema mecânico rotativo. O mancal é dito como elemento estacionário uma vez que, restringe o movimento do rotor, elemento cilíndrico, de rotacionar em torno do eixo (NOGUEIRÃO; WATANABE, 2012).

Os mancais são dispositivos de ligação entre a parte móvel e a estrutura fixa da máquina rotativa e, também são conhecidos por transmitirem os esforços estáticos e dinâmicos para a estrutura da máquina. Absorver energia, e restringir os graus de liberdade durante a movimentação do eixo são as funções mais importantes de um mancal (SILVEIRA, 2001).

O mancal pode ser descrito como um componente que possibilita ter uma livre movimentação entre duas partes de um mecanismo sendo que, este deve operar com baixos coeficientes de atrito (GRECO, 2011).

Segundo Hutchings (1992), existem inúmeras formas para os mancais, os mancais planos (estáticos e dinâmicos) e mancais de elementos girantes. Os mancais de elementos rolantes possuem esferas ou rolos, enquanto os mancais planos possuem um filme de óleo entre as superfícies móveis. Outro tipo de mancal de grande interesse são os mancais magnéticos.

Este mancal permite a rotação de uma peça girante sem nenhum contato mecânico com qualquer outra peça fixa ou móvel, assim tem-se a eliminação de atrito mecânico não necessita de lubrificação, possibilitando o rotor operar em altas velocidades de rotação (GOMES, 2007).

3.1 Modelagem de um Rotor Flexível

Rotores flexíveis são ditos sistemas dinâmicos compostos por eixos flexíveis, discos e mancais. Para a modelagem do rotor existem métodos analíticos e numéricos como o MEF, que é uma das técnicas mais utilizadas para a análise de problemas de engenharia.

Neste caso, o MEF foi o método escolhido tal análise onde se determina separadamente as equações do movimento de cada componente, considerando que os elementos acoplados ao eixo são discos rígidos, o eixo é um sistema elástico e os mancais são elementos de suporte e, a formulação é baseada na energia potencial, cinética, trabalho virtual e energia de deformação (KOROISHI, 2013; UJIHARA, 2011 apud LALANNE e FERRARIS, 1998).

Para a obtenção da equação do movimento do rotor deve-se seguir os seguintes passos

- Determinar a energia cinética e a energia de deformação do sistema rotativo e o trabalho virtual das forças externas;
- Aplica-se um método numérico (MEF);
- Aplica-se as equações de lagrange para determinar as equações do movimento:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Fq_i \quad (3.1)$$

onde:

$1 \leq i \leq N$, sendo N o número de g.d.l.;

q_i , coordenadas generalizadas independentes;

Fq_i , forças generalizadas associadas a q_i .

Considere que cada nó está associado a quatro graus de liberdade, onde o vetor de deslocamento nodal é expresso como $\delta u = (u_1, \psi_1, u_2, \psi_2)^T$ e $\delta w = (w_1, \theta_1, w_2, \theta_2)^T$.

O campo de deslocamento é então escrito por:

$$\begin{cases} u(y,t) = N_1(y)\delta u(t) \\ w(y,t) = N_2(y)\delta w(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

Pelas relações listadas na eq. (3.3), as inclinações estão relacionadas com os deslocamentos transversais:

$$\begin{cases} \theta(y,t) = \frac{\partial w(y,t)}{\partial y} = \frac{\partial N_2(y)}{\partial y} \delta w(t) \\ \psi(y,t) = \frac{\partial N_1(y)}{\partial y} \delta u(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

Considera-se o polinômio cúbico na eq. (3.4) e, as constantes de integração são $C_i(t)$:

$$u(y,t) = c_1(t)y^3 + c_2(t)y^2 + c_3(t)y + c_4(t) \quad (3.4)$$

Os graus de liberdade da viga (rotação e deslocamento) devem satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} u(0,t) = u_1(t) \\ u(L,t) = u_2(t) \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial y} = \theta_1(t) \\ \frac{\partial u(L,t)}{\partial y} = \theta_2(t) \end{cases} \quad (3.5)$$

As relações expressas na eq. (3.5) são substituídas na eq. (3.4) e resolvidas para as constantes C_i :

$$\begin{cases} c_1(t) = \frac{1}{L^3} [2(u_1(t) - u_2(t)) + L(\theta_1(t) + \theta_2(t))] \\ c_2(t) = \frac{1}{L^2} [2(u_2(t) - u_1(t)) - L(2\theta_1(t) + \theta_2(t))] \\ c_3(t) = \theta_1(t) \\ c_4(t) = u_1(t) \end{cases} \quad (3.6)$$

Substituindo a eq. (3.6) na eq. (3.4) encontra-se as funções de forma:

$$\begin{cases} N_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L} \right] \\ N_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L} \right] \end{cases} \quad (3.7)$$

Através das funções de forma escritas na Eq. (3.7), escreve-se o deslocamento $u(y,t)$ para o elemento de viga:

$$\begin{aligned} u(y,t) = & \left(1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} \right) u_1(t) + \left(-y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right) \psi_1(t) \\ & + \left(\frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} \right) u_2(t) + \left(\frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L} \right) \psi_2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

E, para $w(y,t)$:

$$\begin{aligned} w(y,t) = & \left(1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} \right) w_1(t) + \left(y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right) \theta_1(t) \\ & + \left(\frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} \right) w_2(t) + \left(-\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L} \right) \theta_2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.1.1 Formulação das matrizes elementares para o disco

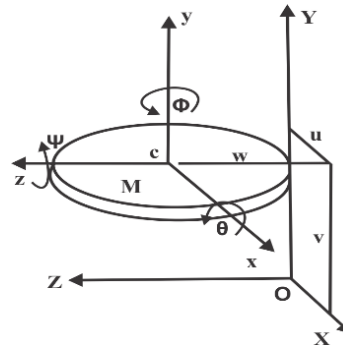
Considera-se que o elemento de disco está em um eixo flexível com rotação e as matrizes de massa e giroscopia são obtidas a partir da expressão da energia cinética. Para isto, faz-se uso de dois referenciais: $R_{(xyz)}$ e $R_0(XYZ)$, e fazendo uso das seguintes rotações: ψ em torno do eixo Z , θ em torno do eixo x que será chamado de α_1 e ϕ em torno do eixo y .

Logo, o vetor de velocidade angular instantânea do referencial xyz é:

$$\frac{\mathcal{G}_R}{R_0} = \dot{\psi} \hat{Z} + \dot{\theta} \hat{x}_1 + \dot{\phi} \hat{y} \quad (3.10)$$

onde, $\hat{z}$, $\hat{x}_1$ e $\hat{y}$ são definidos como vetores unitários nas direções dos eixos Z , x_1 e y .

Figura 3. 1 – Sistema de eixos coordenados para elemento de disco



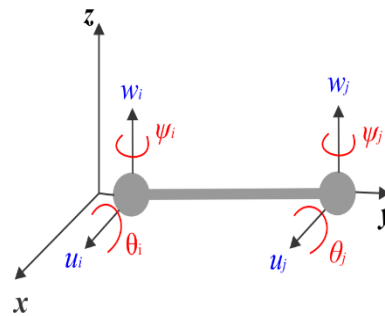
Fonte: Adaptado de Oliveira, 1999.

Obtém-se o vetor de velocidade angular:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \cos \phi - \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Cada nó do disco tem quatro graus de liberdade onde u e w são translações, θ e ψ são rotações, descritos na Figura 3.2:

Figura 3. 2 - Sistema de coordenadas



Fonte: o autor.

Na Figura 3.2 tem-se a ilustração de um elemento finito de eixo, onde o elemento tem 2 nós e cada nó possui 4 graus de liberdade.

A partir desta figura, pode-se escrever o vetor deslocamento nodal do disco:

$$\delta_D = [u \quad w \quad \theta \quad \psi] \quad (3.12)$$

A expressão da energia cinética do disco é dada por:

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx} \mathcal{G}_x^2 + I_{Dy} \mathcal{G}_y^2 + I_{Dz} \mathcal{G}_z^2) \quad (3.13)$$

Fazendo algumas considerações, a eq. (3.13) torna-se:

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\psi} \theta) \quad (3.14)$$

Na expressão da eq. (3.14), tem-se que u e w são deslocamentos transversais e as coordenadas generalizadas são θ e ψ , M_D é a massa do disco, I_{Dx} , I_{Dy} e I_{Dz} são momentos de inércia de massa do disco com relação ao sistema de coordenadas de referência.

Aplicando a equação de Lagrange expressa na eq. (3.1) na eq. (3.14) é possível expressar a equação do movimento do disco:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_D}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial \delta} = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Na eq. (3.15) pode ser identificada, a matriz de massa e no segundo termo a matriz giroscópica. A participação do disco nas matrizes de massa e giroscópica são consideradas na matriz global de forma coerente com o nó onde está o disco.

3.1.2 Formulação das matrizes elementares para o eixo

Para a formulação das matrizes de um elemento de eixo utiliza-se da energia cinética e energia potencial. Pelo método dos elementos finitos, o eixo é dividido em n elementos de comprimento L . O modelo é de uma viga Timoshenko, primeiramente é obtido as expressões para a energia potencial e, posteriormente para a energia cinética.

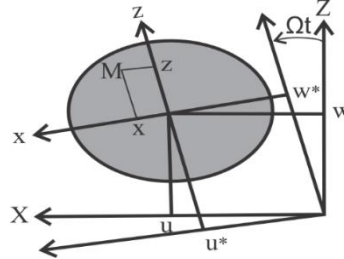
3.1.2.1 Energia potencial do elemento de viga

A energia potencial denotada por U_1 é calculada da seguinte maneira:

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon^T \sigma d\tau \quad (3.16)$$

onde, σ representa tensão; ε representa deformação; τ representa o volume.

Figura 3.3 - Seção transversal do elemento de eixo



Fonte: Adaptado de Oliveira, 1999.

A expressão da deformação é:

$$\varepsilon = \underbrace{-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}}_{\varepsilon_l} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2}_{\varepsilon_{nl}} \quad (3.17)$$

onde, ε_l e ε_{nl} são respectivamente, a parcela linear e a parcela não linear da expressão de deformação.

De acordo com a relação entre deformação e tensão, pode-se escrever:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.18)$$

Na eq. (3.18) E denota o módulo de Young.

Logo, considera-se a expressão dada pela eq. (3.16) e as relações das eqs. (3.17) e (3.18) escrevendo a fórmula da energia de deformação do elemento de viga como:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_{\tau} (\varepsilon_l^2 + 2\varepsilon_l \varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^2) d\tau \quad (3.19)$$

Fazendo algumas considerações, chega-se a:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left[x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] dS dy \quad (3.20)$$

Sendo que na eq. (3.20) o S representa a área da seção transversal e o L o comprimento do elemento de viga.

Define-se os momentos de inércia de área como sendo:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_S z^2 dS \\ I_z &= \int_S x^2 dS \end{aligned} \quad (3.21)$$

Introduzindo as relações exposta na eq. (3.21) na eq. (3.20), encontra-se:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.22)$$

Se existe um carregamento axial constante F_0 , então é considerada uma nova parcela de energia de deformação chamada de U_2 :

$$U_2 = \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (3.23)$$

Denotando por U_s a energia de deformação total que é obtida pelo somatório da eq. (3.22) com a eq. (3.23):

$$U_s = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (3.24)$$

Considerando as seguintes relações:

$$\begin{aligned} u^* &= u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \\ w^* &= u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \end{aligned} \quad (3.25)$$

A eq. (3.24) pode ser reescrita se considerar as relações descritas na eq. (3.25), chegando a:

$$U_s = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (3.26)$$

3.1.2.2 Energia cinética para o elemento de viga

O cálculo da energia cinética do elemento de viga é uma extensão do conceito de energia cinética para o elemento de disco.

$$T_s = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2 \rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \quad (3.27)$$

Uma vez obtido as expressões da energia potencial e cinética, encontra-se as matrizes de massa e rigidez. Se u e w são pequenos, as relações entre translação e rotação são:

$$\begin{cases} \theta = \frac{\partial w}{\partial y} \\ \psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad (3.28)$$

Introduzindo as relações descritas na eq. (3.28) na eq. (3.27) e realizando algumas simplificações, tem-se:

$$T = \frac{1}{2} \delta \dot{u}^T M_1 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^T M_2 \delta \dot{w} + \frac{1}{2} \delta \dot{u}^T M_3 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^T M_4 \delta \dot{w} + \Omega \delta \dot{u}^T M_5 \delta \dot{w} + \rho I L \Omega^2 \quad (3.29)$$

Sendo:

$$M_1 = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ -22L & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ 54 & -13L & 156 & 22L \\ 13L & -3L^2 & 22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$M_2 = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$M_3 = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -3L & -36 & -3L \\ -3L & 4L^2 & 3L & -L^2 \\ -36 & 3L & 36 & 3L \\ -3L & -L^2 & 3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$M_4 = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & 36 & -3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$M_5 = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Considerando a formulação da energia cinética, chega-se a eq. (3.35):

$$(M_c + M_s) \ddot{\delta} + G_c \dot{\delta} \quad (3.35)$$

Na eq. (3.35) tem-se que δ é o vetor de deslocamento do elemento.

A seguir, tem-se a matriz de inércia de translação devido a energia cinética, a matriz de massa devido ao efeito secundário de Rayleigh e, a matriz do efeito giroscópio do eixo devido a energia cinética, respectivamente:

$$M_c = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$M_s = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$G_c = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Para as matrizes de rigidez é realizado um procedimento análogo, obtendo:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\delta u^T \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta u + \delta w^T \frac{d^2 N_2^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w \right] dy \\ + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\delta u^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta u + \delta w^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta w \right] dy \quad (3.39)$$

Reescrevendo a eq. (3.39):

$$U = \frac{1}{2} \delta u^T k_1 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^T k_2 \delta w + \frac{1}{2} \delta u^T k_3 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^T k_4 \delta w \quad (3.40)$$

A eq. (3.40) não leva em consideração o efeito das tensões de cisalhamento, mais que pode ser incluído através da relação:

$$a = \frac{12EI}{GS_r L^2} \quad (3.41)$$

onde,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.42)$$

Na eq. (3.41) e na eq. (3.42) tem-se que, ν é o coeficiente de Poisson, G é o módulo de coulomb, S_r é a secção equivalente ao cisalhamento:

Considerando a equação de Lagrange, eq. (3.1), e a expressão da energia potencial, eq. (3.40), escreve-se:

$$\frac{\partial u}{\partial \delta} = K\delta \quad (3.43)$$

Sendo,

$$K = k_c + k_f \quad (3.44)$$

Na eq. (3.44), tem-se k_c devido a flexão e k_f devido a força axial. Ao se introduzir os efeitos das tensões de cisalhamento na energia potencial do eixo, obtém a seguinte matriz de rigidez:

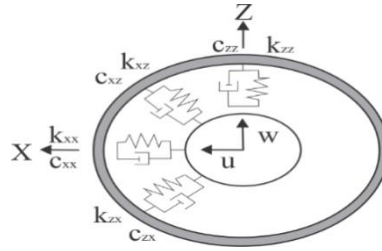
$$k_c = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$k_f = \frac{F}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

3.1.3 Trabalho virtual dos mancais

Os mancais são considerados como elementos de suporte, e representados por matrizes de rigidez e de amortecimento associados aos deslocamentos u e w . Na Figura 3.4, tem-se o esquema do mancal:

Figura 3. 4 - Modelo do mancal



Fonte: Adaptado de Ujihara, 2011.

Considere as seguintes relações:

- k_{xx}, k_{zz}, c_{xx} e c_{zz} são respectivamente rigidez e amortecimento nas direções X e Z do eixo;
- k_{xz}, c_{xz} são coeficientes de rigidez e amortecimento na direção do eixo X, porém com efeitos na direção Z.
- k_{zx}, c_{zx} são coeficientes de rigidez e amortecimento na direção do eixo Z, porém com efeitos na direção X.

Define-se por F_u e F_w como forças generalizadas exercidas pelo mancal sobre o eixo, logo o trabalho virtual δW destas forças é:

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w \quad (3.47)$$

ou,

$$\delta W = -k_{xx} u \delta u - k_{xz} w \delta u - k_{zz} w \delta w - k_{zx} u \delta w - c_{xx} \dot{u} \delta u - c_{xz} \dot{w} \delta u - c_{zz} \dot{w} \delta w - c_{zx} \dot{u} \delta w \quad (3.48)$$

Separando as componentes, chega-se a:

$$\begin{aligned} F_u &= -k_{xx} u - k_{xz} w - c_{xx} \dot{u} - c_{xz} \dot{w} \\ F_w &= -k_{zx} u - k_{zz} w - c_{zx} \dot{u} - c_{zz} \dot{w} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Tem-se que $F_\theta = F_\psi = 0$ pois, o mancal não provoca flexão sobre o eixo por ele ser, neste modelo, um elemento pontual. Logo, a expressão anterior pode ser escrita na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \\ F_\theta \\ F_\psi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} & 0 & 0 \\ k_{zx} & k_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} & 0 & 0 \\ c_{zx} & c_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Na eq. (3.50) a primeira matriz é referente a matriz de rigidez do mancal e a segunda, matriz de amortecimento.

3.2 Equação Global do Rotor

Uma vez, obtidas as matrizes elementares do eixo, disco e mancal, escreve-se o sistema de equações globais que governam a resposta dinâmica do rotor. Ressalta-se que é considerado o efeito giroscópico e para a modelagem dos mancais tem-se as matrizes de rigidez e amortecimento. Então, obtém-se a seguinte equação global do movimento:

$$M_G \ddot{\delta} + G_G \dot{\delta} + K_G \delta = F(t) \quad (3.51)$$

onde:

- F é o vetor das forças excitadoras do sistema;
- M_G é a matriz de massa global do sistema que é dada pela matriz de massa elementares do disco e do eixo;
- G_G é a matriz giroscópica global obtida através das matrizes giroscópica elementares do disco, do eixo e somada as matrizes de rigidez elementares de amortecimento dos mancais;
- K_G representa a matriz de rigidez global dada pelas matrizes de rigidez elementares do eixo e do mancal.
- $\ddot{\delta}, \dot{\delta}, \delta$ são respectivamente, vetores de aceleração nodal, velocidade nodal e deslocamento nodal.

Na Tabela 3.1 são listados os parâmetros para a modelagem de um rotor de aço, com os dados dos elementos de viga e dos elementos de disco:

Tabela 3.1 - Parâmetros do rotor

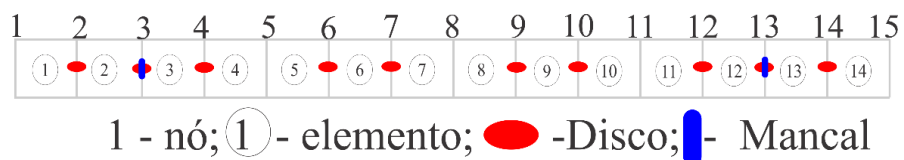
Elementos de Viga			Elementos de Disco				
NV	L	D	ND	NOD	L	D_i	D_e
1	32.6×10^{-3}	17×10^{-3}	1	2	30.4×10^{-3}	39.35×10^{-3}	74.25×10^{-3}
2	30.4×10^{-3}	39.35×10^{-3}	2	3	8.8×10^{-3}	39.35×10^{-3}	74.25×10^{-3}
3	8.8×10^{-3}	39.35×10^{-3}	3	4	8.8×10^{-3}	27.56×10^{-3}	52×10^{-3}
4	8.8×10^{-3}	27.56×10^{-3}	4	6	7×10^{-3}	55×10^{-3}	70×10^{-3}
5	28.9×10^{-3}	21.45×10^{-3}	5	7	37.75×10^{-3}	39.35×10^{-3}	74.25×10^{-3}
6	7×10^{-3}	21.45×10^{-3}	6	9	37.75×10^{-3}	39.35×10^{-3}	74.25×10^{-3}
7	37.75×10^{-3}	39.35×10^{-3}	7	10	9.9×10^{-3}	55×10^{-3}	70×10^{-3}
8	37.75×10^{-3}	39.35×10^{-3}	8	12	8.8×10^{-3}	27.56×10^{-3}	52×10^{-3}
9	9.9×10^{-3}	21.45×10^{-3}	9	13	8.8×10^{-3}	39.35×10^{-3}	74.25×10^{-3}
10	22.05×10^{-3}	21.45×10^{-3}	10	14	30.4×10^{-3}	39.35×10^{-3}	74.25×10^{-3}
11	8.8×10^{-3}	27.56×10^{-3}					
12	8.8×10^{-3}	39.35×10^{-3}					
13	30.4×10^{-3}	39.35×10^{-3}					
14	71.95×10^{-3}	17×10^{-3}					

Fonte: UJIHARA, 2011.

Nesta tabela, NV representa o número de elemento de viga, L é comprimento, ρ é densidade do material (kg/m^3) onde do elemento de viga é $7850 kg/m^3$ e do disco é $6770 kg/m^3$, E módulo de elasticidade que é 210 GPa, ND número de elementos de disco, NOD nó da aplicação de cada disco, D_i diâmetro interno (m) e D_e diâmetro externo (m). Lembrando que, nos nós 3 e 13 estão localizados os mancais.

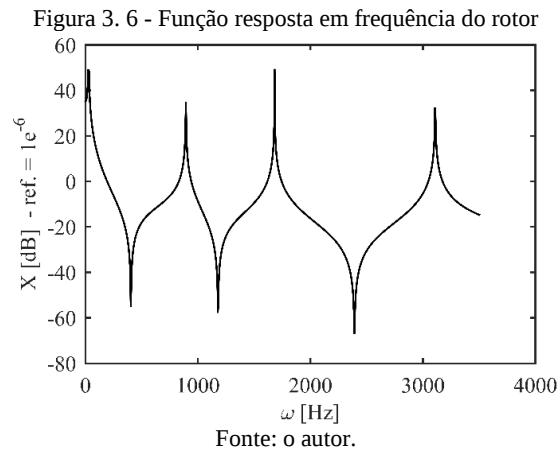
Na Figura (3.5) é ilustrada a representação do rotor:

Figura 3. 5 - Esquema de um rotor



Fonte: o autor.

Na Figura 3.5 tem-se a ilustração do rotor considerado neste trabalho, logo, utilizando os dados descritos na Tabela 3.1 e através de implementações no software Matlab® foi obtido a função resposta em frequência dada pela Figura 3.6:



Uma ferramenta que tem destaque ao se trabalhar com problemas com alto custo computacional são os chamados métodos de redução. O modelo original é reduzido através de uma das técnicas de redução com a finalidade de se obter bons resultados nas simulações, porém, com grande economia de tempo.

3.3 Introdução às Técnicas de Redução de Modelo

Para a discretização do rotor utilizou-se o método de elementos finitos e, é comum neste tipo de modelagem com problemas reais com grande número de graus de liberdade, se ter um alto custo computacional. Neste sentido, cada vez mais busca-se ferramentas computacionais visando solucionar este problema. Dentre essas ferramentas surgem os métodos de redução de modelos. Nesta redução é apresentado um menor número de graus de liberdade (g.d.ls.), porém com uma boa descrição do comportamento dinâmico do modelo original. Assim, com a redução dos g.d.ls., obtém-se uma diminuição do custo computacional do problema (GONÇALVES; 2016); (FONSECA Jr.; 2016).

Qu (2004) descreve o procedimento geral para a redução de modelos, para isto, considera-se a seguinte equação do movimento:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t) \quad (3.52)$$

Na eq. (3.52) M , C e K são respectivamente matrizes de massa, amortecimento e rigidez; $\ddot{x}$, $\dot{x}$ e x são vetores de aceleração, velocidade e deslocamento e F é o vetor de força de excitação, estas têm o número de graus de liberdade do modelo completo.

Para a redução de modelos é obtida uma matriz de transformação de coordenadas, onde determina-se um subespaço com $T \in [n, m]$, com $m \ll n$.

Logo, tem-se o vetor dos deslocamentos reduzidos que é denominado de $x_r(t)$:

$$x(t) \approx T x_r(t) \quad (3.53)$$

Realizando a diferenciação da eq. (3.53) em relação ao tempo, chega-se a:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = T \dot{x}_r(t) \\ \ddot{x}(t) = T \ddot{x}_r(t) \end{cases} \quad (3.54)$$

Introduzindo a eq. (3.53) e a eq. (3.54) na eq. (3.52) e pré-multiplicando as parcelas pela transposta da matriz de transformação T , um novo sistema reduzido é obtido:

$$M_r \ddot{x}_r(t) + C_r \dot{x}_r(t) + K x_r(t) = F_r(t) \quad (3.55)$$

onde:

$$M_r = T^T M T, \quad C_r = T^T C T, \quad K_r = T^T K T, \quad F_r = T^T F. \quad (3.56)$$

Na eq. (3.56) tem-se que M_r , C_r e K_r são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez reduzidas e F_r o vetor de forças excitadoras reduzido.

Na eq. (3.52) tem-se o tamanho n enquanto que, na eq. (3.55) que representa as equações de equilíbrio dinâmico reduzidas possui um tamanho menor chamado de m , logo, $m \ll n$.

3.3.1 Método *Iterative improved reduction system* (IIRS)

Dentre as técnicas de redução, cita-se o *Método de Guyan, Improved Reduction System* (IRS), *Iterative Improved Reduction System* (IIRS), Base Modal, dentre outros (QU, 2004); (GONÇALVES, 2016); (FONSECA Jr., 2016).

Neste trabalho, optou-se por utilizar o método chamado de *Iterative Improved Reduction System* (IIRS) que vem a ser uma variante do método de redução IRS.

Um dos métodos mais antigos de redução é o Guyan e, neste método, os termos de inércia não são considerados. Este é um método estático que aplicado a modelos dinâmicos não apresentava a precisão requerida. Assim, o método *Improved Reduction System* (IRS) se baseia no método de Guyan, porém neste, é considerado os termos de inércia como forças pseudo-estáticas (FRISWELL; GARVEY; PENNY, 1995).

No método de Guyan os vetores de estado x , força F e as matrizes de massa M e rigidez K , são divididos em sub vetores e matrizes relativas aos graus de liberdade principais que são mantidos pois, estes são geralmente os graus de liberdade relevantes do sistema e os graus de liberdade secundários, que são eliminados por terem pouca influência no sistema. Se não há aplicação de força aos graus de liberdade secundários e o amortecimento é negligenciável, a equação do movimento é dada por:

$$\begin{bmatrix} m_{mm} & m_{ms} \\ m_{ms}^T & m_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_m \\ \ddot{x}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{mm} & k_{ms} \\ k_{ms}^T & k_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_m \\ x_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.57)$$

Sendo que os subscritos m e s representam os graus de liberdade principal e secundário do sistema e o sobrescrito T representa a matriz transposta. Desconsiderando os termos inerciais no segundo conjunto de equações e os graus de liberdade secundários que podem ser eliminados tem-se:

$$x = \begin{Bmatrix} x_m \\ x_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -k_{ss}^{-1}k_{sm} \end{bmatrix} x_m = T x_m \quad (3.58)$$

Onde, T denota a transformação estática entre o vetor de estado completo e as coordenadas principais e I é matriz identidade. As matrizes de massa e rigidez reduzidas são, então, dadas por: $M_r = T^T M T$, $K_r = T^T K T$.

Para o método IRS tem-se a consideração dos termos de inércia:

$$\begin{cases} \ddot{x}_m = M_r^{-1} K_r x_m \\ \ddot{x}_s = -k_{ss}^{-1} k_{sm} M_r^{-1} K_r x_m \end{cases} \quad (3.59)$$

Considerando a relação descrita acima pode-se escrever uma relação entre os graus de liberdade principais e secundários incluindo os termos de inércia:

$$x_s = \left[-k_{ss}^{-1} k_{sm} + k_{ss}^{-1} (m_{sm} - m_{ss} - k_{ss}^{-1} k_{sm}) M_r^{-1} K_r \right] x_m \quad (3.60)$$

Escreve-se o vetor de estados do modelo completo em termos do vetor de estado do modelo reduzido:

$$x = T_{IRS} x_m \rightarrow \begin{Bmatrix} x_m \\ x_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -k_{ss}^{-1}k_{sm} + -k_{ss}^{-1}(m_{sm} - m_{ss} - k_{ss}^{-1}k_{sm})M_r^{-1}K_r \end{bmatrix} x_m \quad (3.61)$$

Sendo T_{IRS} a matriz de transformação de coordenadas e pode ser reescrito como:

$$T_{IRS} = T + SMTM_r^{-1}K_r \quad (3.62)$$

Onde, T é a matriz de transformação de Guyan e S é dado pela seguinte matriz:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{ss}^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Pode-se ainda obter uma transformação mais precisa utilizando o método iterativo denominado de *IIRS*.

O problema de autovalor generalizado é descrito na eq. (3.64):

$$k_{sm} \Phi_{mm} + k_{ss} \Phi_{sm} = m_{sm} \Phi_{mm} \lambda_{mm} + m_{ss} \Phi_{sm} \lambda_{mm} \quad (3.64)$$

Na eq. (3.64), tem-se que Φ e λ representam respectivamente os autovetores e autovalores, sendo Φ_{sm} expresso como:

$$\Phi_{sm} = t_0 \Phi_{mm} = -k_{ss}^{-1}k_{sm} \Phi_{mm} + \lambda_{mm} k_{ss}^{-1}(m_{sm} + m_{ss} t_0) \Phi_{mm} \quad (3.65)$$

onde, t_0 é :

$$t_0 = T_{Guyan} + k_{ss}^{-1}(m_{sm} + m_{ss} t_0) \Phi_{mm} \lambda_{mm} \Phi_{mm}^{-1} \quad (3.66)$$

Logo, pode-se escrever que:

$$\Phi = \begin{Bmatrix} \Phi_{mm} \\ \Phi_{sm} \end{Bmatrix} = T \Phi_{mm} = \begin{bmatrix} I_{m \times m} \\ t_0 \end{bmatrix} \Phi_{mm} \quad (3.67)$$

Considerando a eq. (3.67) e a eq. (3.64), obtêm-se um problema de autovalor reduzido, dado por:

$$K_r \Phi_{mm} = M_r \Phi_{mm} \lambda_{mm} \quad (3.68)$$

Rearranjando a eq. (3.68), tem-se:

$$\Phi_{mm} \lambda_{mm} \Phi_{mm}^{-1} = M_r^{-1} K_r \quad (3.69)$$

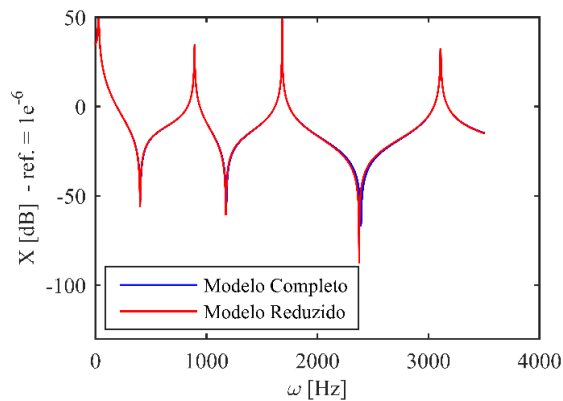
Então, chega-se a:

$$\left\{ \begin{array}{l} t^{(k)} = T_{Guyan} + k_{ss}^{-1} (m_{sm} + m_{ss} t^{(k-1)}) [M_r^{(k-1)}]^{-1} K_r^{(k-1)} \\ T^{(k)} = \begin{bmatrix} I_{m \times m} \\ t^{(k)} \end{bmatrix} \\ K_r^{(k)} = [T^{(k)}]^T K T^{(k)} \\ M_r^{(k)} = [T^{(k)}]^T M T^{(k)} \end{array} \right. \quad (3.70)$$

Onde, $(k \geq 2)$.

Para verificação do método de redução de modelos *IIRS* utilizado, mostra-se na Fig. 3.7 a função resposta em frequência, juntamente com a resposta do sistema completo.

Figura 3. 7 - Modelo completo versus modelo reduzido



Fonte: o autor.

Nesta figura, percebe-se que o modelo reduzido, ou seja, o gráfico obtido para o sistema com redução de modelo proporcionou curvas equivalentes ao modelo completo.

Capítulo 4

SISTEMAS MECÂNICOS ESTOCÁSTICOS

Sistemas mecânicos podem ser classificados em determinísticos ou estocásticos. Devido ao advento da computação científica, passou-se a buscar uma maior precisão na resposta dinâmica dos sistemas e, assim, passou-se a utilizar os métodos estocásticos. Logo, a consideração de aleatoriedades tem a finalidade de minimizar os efeitos que possam prejudicar o desempenho de máquinas ou outros equipamentos e auxiliar na obtenção de melhores resultados para problemas de engenharia ou de demais áreas.

4.1 Introdução às Incertezas em Sistemas Mecânicos

Existe uma enorme quantidade de conceitos para a palavra “incerteza” devido a existência de diferentes tipos, causas e fontes. Algumas definições são: dúvida, imprecisão, falta de garantia ou mesmo algo que não é conhecido (THUNNISSEN, 2005).

Na natureza ou nas atividades desempenhadas no cotidiano quase sempre há certa incerteza associada, devido ao fato de que, acontecem fenômenos que não são previstos de forma absoluta, surgindo o termo estocasticidade, palavra que vem do grego “stochos”, que significa “incerto” (KRÜGER, 2008).

Em Engenharia, os projetos possuem requisitos que devem ser seguidos como, por exemplo, segurança, custo e durabilidade. Portanto, ao se considerar as aleatoriedades dos dados de entrada, poderá ser obtida uma melhor configuração da estrutura que irá ser projetada. Para isto, os parâmetros são considerados como variáveis aleatórias e, estas são representadas por meio da estatística, assim possuindo algum grau de incerteza.

Russell; Norvig (2009) cita que a incerteza pode causar problemas como desempenho reduzido, avaria ou ainda falha de um sistema.

Segundo Krüger (2008) as incertezas em um sistema podem ter duas origens: quantitativa ou qualitativa. A incerteza quantitativa possui diversas fontes como dados insuficientes, fenômenos físicos e um modelo que não retrata adequadamente o fenômeno estudado. Já as qualitativas são devido a fatores que são de difícil quantificação, tais como a

definição de parâmetros que são de grande importância no desempenho do sistema, condições das estruturas, fatores humanos e impactos ambientais nos projetos.

4.2 Introdução aos Métodos Estocásticos

A simulação onde as gerações dos números são feitas através de sorteios são chamadas de geração aleatória ou randômica. Os métodos estocásticos são conhecidos por realizarem este tipo de geração (BOGONI, 2009).

Define-se por estocásticos os sistemas que possuem um ou mais componentes que estão sujeitos a efeitos aleatórios, ou seja, dificilmente tem-se uma descrição matemática exata destes, porém, pode-se descrevê-los através de meios probabilísticos (MULLER; VAZ; EBOLI, 2003).

Dentre os métodos estocásticos destaca-se o método de Monte Carlo (MC) e sua variante, o método Hipercubo Latino (HCL). Estes são ditos probabilísticos por realizarem simulações que geram amostras para uma ou mais variáveis consideradas aleatórias.

Os métodos, HCL e MC, realizam sorteios aleatórios, porém uma das diferenças entre eles consiste na forma em que estes são realizados. No MC, os sorteios são feitos de forma aleatória com base em uma distribuição de probabilidade, enquanto que no HCL os sorteios ocorrem dentro de faixas previamente divididas de acordo com a sua probabilidade (MASCHIO; CARVALHO; SCHIOZER, 2009).

A seguir, tem-se uma melhor descrição dos dois principais métodos estocásticos, a saber, MC e HCL.

4.2.1 Método de monte carlo (MC)

O método MC destaca-se como a principal técnica estocástica, e teve a sua origem no projeto Manhattan na metade da década de 40 por *John Von Neumann*² e *Stanislaw Ulam*³ com o intuito de resolver problemas de difusão de nêutrons (BORGES, 2008; CORRAR, 1993).

Segundo Bogoni (2009) o emprego do método de fato aconteceu com o advento da computação por se tratar de uma técnica numérica e que o primeiro trabalho sobre este método foi intitulado de “The Monte Carlo Method” escrito por Ulam e Metropolis em 1949.

² John Von Neumann (1903-1957). Matemático húngaro de etnia judaica.

³ Stanislaw Ulam (1909-1984). Matemático americano.

O MC busca a solução de um determinado problema que é obtido pela avaliação das amostras aleatórias. O método possui grande aplicabilidade em diversos tipos de problemas, porém apresenta a desvantagem de se ter um alto custo computacional devido à realização de várias simulações para obtenção da solução (BERNADÁ, 2011).

No processo de simulação pelo MC são selecionados valores aleatoriamente de forma independente de acordo com a distribuição de probabilidade definida. Sendo que um número aleatório utilizado em uma rodada não influencia nos próximos números aleatórios a serem utilizados (BURATTO, 2005).

As principais etapas do MC são (LIMA; SAMPAIO, 2012):

- Gerar amostras de uma variável ou vetor com uma determinada distribuição de probabilidade;
- Realizar cálculos determinísticos usando cada uma das amostras geradas;
- Agregar os resultados dos cálculos determinísticos no resultado final desejado;
- Análise da resposta.

Alguns autores citam as principais aplicações do MC em várias áreas do conhecimento como Kwaka; Ingall (2007) descrevem a utilização do método na gestão de projetos onde, ele auxilia na quantificação dos efeitos de risco e incertezas em projetos e orçamentos.

Maletta (2005) comenta sobre a utilização do MC no gerenciamento de risco com o intuito de apresentar e avaliar novas formas de cálculo do Value-at-Risk (VaR).

Lima; Sampaio (2012) apresenta uma discussão sobre o MC apresentando técnicas para a análise de vibrações estocásticas em sistemas mecânicos, considerando como exemplo, um sistema contínuo submetido a dois carregamentos caracterizados por processos estocásticos utilizando o MC para gerar amostras.

No trabalho de Hidalgo (2014) é realizado um estudo sobre a quantificação de incertezas onde considerou-se uma viga de Euler-Bernoulli repousando em fundação de Pasternak.

4.2.2 Método hipercubo latino (HCL)

O método HCL é uma versão mais simples do MC. A técnica foi desenvolvida por Mckay, Conover e Backman em 1979. O MC já era uma técnica consolidada, porém em alguns casos o tempo computacional era longo por depender de um grande número de simulações para

a obtenção do resultado surgindo então, o HCL que possuía a vantagem de ter um menor custo computacional, ou seja, redução do número de simulações.

No HCL, a seleção dos valores da amostra é controlada e, o número de sorteio é proporcional a probabilidade de cada faixa, portanto, é necessário menos amostras para uma representação adequada, além disso, essa técnica proporciona redução de variância (SALIBY, 1997).

Fonte (2011) explica que no HCL tem-se a divisão dos intervalos dos possíveis valores de cada variável em faixas, sorteando aleatoriamente um valor que é considerado somente uma vez no processo de simulação ou ainda pode-se dizer que o método consiste em uma técnica de amostragem, que estratifica a distribuição de probabilidade em n partes ou estratos, realizando sorteios aleatórios.

Uma característica importante da técnica HCL é que, independentemente do número de sorteios, o número de amostras irá representar de maneira adequada a distribuição de probabilidade devido os sorteios ocorrerem de forma uniforme dentro de cada faixa.

O funcionamento do HCL busca simular valores de uma função $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ onde f é uma função determinística e $x_1, x_2, \dots, x_k$ são variáveis aleatórias (THOM; SISQUINI; FREITAS, 2010). O método obedece a sequência:

- Divisão do intervalo de cada variável x_i em n_i intervalos;
- Para cada variável x_i e seus n_i intervalos, seleciona-se aleatoriamente um valor, existindo n_i valores para cada variável aleatória k ;
- Seleciona n_i combinações, sendo que, cada valor aparece uma única vez nas n_i combinações, ou seja, na primeira combinação é selecionado aleatoriamente um dos valores para uma das k variáveis aleatórias de entrada e para a segunda combinação será selecionado um dos n_{i-1} dos valores e assim sucessivamente.
- Avalia-se a função para cada n_i combinações, gerando n_i valores para a função.

São várias as aplicações do método HCL nos mais diversos tipos de problemas, por exemplo, XU; HE; HU (2005) utilizaram a técnica de HCL para modelagem espacial de incertezas em modelos de simulação na área florestal.

Pilger; Costa; Koppe (2005) faz uma abordagem sobre os métodos de simulação, a saber, MC e HCL.

Maschio; Carvalho; Schiozer (2009) apresenta a aplicação da técnica HCL na integração do ajuste de histórico de produção com a análise de incertezas, com intuito de obter modelos mais confiáveis para a previsão de produção de petróleo e gás.

4.3 Expansão de Karhunen-Loève

Muitas das vezes, existem incertezas inerentes aos sistemas e, estas, aparecem de diversas formas. Como propriedades geométricas, dos materiais, condições de contorno, etc. Estas incertezas podem ser consideradas nos modelos de acordo com as abordagens (GUEDRI, 2006):

- A abordagem não paramétrica é aquela onde as incertezas são introduzidas diretamente nas matrizes do modelo;
- A abordagem paramétrica utiliza-se do método dos elementos finitos estocásticos (MEFE) para tal consideração. O método MEFE é uma combinação do método de elementos finitos clássico com a análise estatística, onde tem-se a consideração de variáveis aleatórias.

Na abordagem paramétrica tem-se a divisão dos métodos em três categorias:

- O método de Monte Carlo (MC) ou sua variante chamada de Hipercubo Latino (HCL);
- Métodos de Perturbação: Baseados na série de Taylor ou na expansão da Série de Neumann.
- Métodos Espectrais: Usam funções do espaço de Hilbert combinados com problemas aleatórios. As funções são geralmente polinômios ortogonais ou um caos polinomial.

Um método de análise espectral é chamado de Decomposição de Karhunen-Loève (KL) também encontrado na literatura como expansão ou transformação de Karhunen-Loève. O desenvolvimento do método foi proposto por Ghanem; Spanos (1991).

O método KL pode ser definido como um método de representação de processos aleatórios ou de representação espectral, onde tem-se uma expansão em termos das autofunções e autovalores da função de covariância. Nesse método tem-se uma redução da dimensionalidade do espaço randômico, com um número infinito de variáveis randômicas não correlacionadas (CAMPOS, 2013).

Koroishi, 2013, descreve o método KL como uma representação contínua para campos aleatórios onde estes são expressos como superposição de variáveis aleatórias ponderadas por funções espaciais determinísticas. Os campos aleatórios são vistos como uma extensão espacial de uma variável aleatória que descreve a correlação espacial de um parâmetro estrutural que varia aleatoriamente.

Segundo a literatura inicialmente aplicou-se o KL no processamento de imagens, porém nos dias atuais, este método tem uma grande aplicabilidade em várias áreas como na dinâmica estrutural, em sistemas não lineares, dentre outras. Destacando-se que é possível descrever o fenômeno com uma dimensão reduzida mais com máximo de informações.

4.3.1 Discretização do campo aleatório

Uma dificuldade de incorporar processos aleatórios em análises de elementos finitos é lidar com variáveis aleatórias definidas em campos de eventos aleatórios. Uma abordagem é a utilização de funções em Série de Fourier como (GHANEM; SPANOS, 1991):

$$H(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \xi_n f_n(x) \quad (4.1)$$

Na eq. (4.1) tem-se um campo aleatório $H(x, \theta)$, λ_n é uma constante, ξ_n é um conjunto de variáveis aleatórias que devem ser determinadas e $f_n(x)$ é um conjunto de funções determinísticas.

Considere a função de covariância $C(x_1, x_2)$ conhecida e associada à $H(x, \theta)$, onde esta é por definição restrita, simétrica e definida positiva, define-se a decomposição espectral como sendo:

$$C(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(x_1) f_n(x_2) \quad (4.2)$$

Na eq. (4.2), λ_n e f_n representam respectivamente, autovalores e autofunções de $C(x_1, x_2)$. Logo, tem-se a discretização por KL de um campo aleatório gaussiano homogêneo é:

$$H(x, \theta) = \mu + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \xi_n(\theta) f_n(x) \quad (4.3)$$

Na eq. (4.3) tem-se que $H(x, \theta)$ é um processo aleatório função do vetor posição x definido ao longo do domínio D , com θ pertencente ao espaço de eventos aleatórios Ω , μ representa média e ξ_n são as variáveis aleatórias gaussianas com média zero e variância um.

Truncando nos n primeiros termos da série, a eq. (4.3) é escrita como segue:

$$H(x, \theta) = \mu + \sum_{n=1}^n \sqrt{\lambda_n} \xi_n(\theta) f_n(x) \quad (4.4)$$

Ribeiro; Lima (2015); Ghanen; Spanos (1991) descrevem algumas soluções analíticas para os autoproblemas para a decomposição de KL, sendo que a função de covariância exponencial é a mais usada para modelar processos randômicos.

Considere a equação abaixo:

$$C(x_1, x_2) = e^{-|x_1 - x_2|/b} \quad (4.5)$$

onde b é o comprimento de correlação, considerando o domínio $\Omega_x = (x_1, x_2) = [-a, a]$.

Para encontrar as autofunções e autovalores da eq. (4.5), utiliza-se a seguinte equação:

$$\int_{-a}^a e^{-c|x_1 - x_2|} f(x_2) dx_2 = \lambda f(x_1) \quad (4.6)$$

onde, $c=1/b$.

Reescrevendo a eq. (4.6), chega-se a:

$$\int_{-a}^x e^{-c|x_1 - x_2|} f(x_2) dx_2 + \int_a^x e^{c|x_1 - x_2|} f(x_2) dx_2 = \lambda f(x_1) \quad (4.7)$$

Diferenciando a eq. (4.7) em relação a x_1 :

$$-c \int_{-a}^x e^{-c|x_1 - x_2|} f(x_2) dx_2 + c \int_a^x e^{c|x_1 - x_2|} f(x_2) dx_2 = \lambda f'(x_1) \quad (4.8)$$

Diferenciando novamente em relação a x_1 :

$$\lambda f''(x) = (-2c + c^2 \lambda) f(x) \quad (4.9)$$

Isolando $f''(x)$ na eq. (4.9) tem-se:

$$f''(x) = \frac{(-2c + c^2 \lambda)}{\lambda} f(x) \quad (4.10)$$

Fazendo $\frac{(-2c + c^2\lambda)}{\lambda} = \omega^2$ na eq. (4.10), tem-se:

$$f''(x) + \omega^2 f(x) = 0 \quad (4.11)$$

com $-a \leq x \leq a$.

Para encontrar as condições de contorno associados a eq. (4.11), avalia-se em $x = -a$ e $x = a$, e considera a seguinte relação:

$$\begin{cases} cf(a) + f'(a) = 0 \\ cf(-a) - f'(-a) = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Considerando:

$$\begin{cases} f(x) = a_1 \cos(\omega x) + a_2 \sin(\omega x) \\ f'(x) = a_2 \omega \cos(\omega x) - a_1 \omega \sin(\omega x) \\ f''(x) = -a_1 \omega^2 \cos(\omega x) - a_2 \omega^2 \sin(\omega x) \end{cases} \quad (4.13)$$

Substituindo as relações expressas na eq. (4.13) na eq. (4.12) e realizando algumas manipulações matemáticas chega-se a:

$$\begin{cases} a_1(c - \omega \tan(\omega a)) + a_2(\omega + c \tan(\omega a)) = 0 \\ a_1(c - \omega \tan(\omega a)) - a_2(\omega + c \tan(\omega a)) = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Logo, pode-se escrever as seguintes equações transcendentais:

$$\begin{cases} c - \omega \tan(\omega_i a) = 0, \text{ se } i \text{ é ímpar} \\ \omega + c \tan(\omega_i a) = 0, \text{ se } i \text{ é par} \end{cases} \quad (4.15)$$

Considerando os autovalores como:

$$\lambda_i = \frac{2c}{\omega_i^2 + c^2} \quad (4.16)$$

E as autofunções correspondentes são:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_j \cos(\omega_i x), & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \alpha_k \sin(\omega_i x), & \text{se } i \text{ é par} \end{cases} \quad (4.17)$$

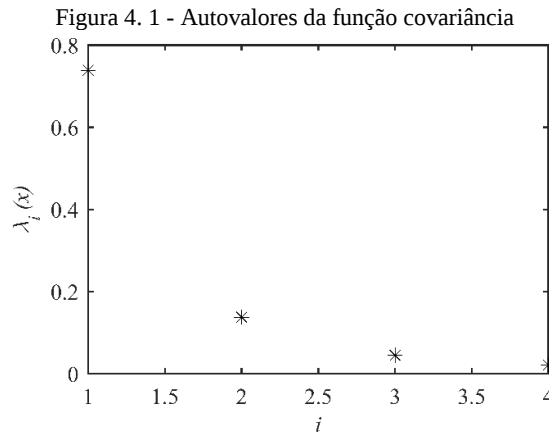
onde:

$$\begin{cases} \alpha_j = \frac{1}{\sqrt{\frac{a + \sin(2\omega_i a)}{2\omega_i}}} \\ \alpha_k = \frac{1}{\sqrt{\frac{a - \sin(2\omega_i a)}{2\omega_i}}} \end{cases} \quad (4.18)$$

Na eq. (4.16), eq. (4.17) e na eq. (4.18), tem-se que $c=1/b$, a raiz ω_i são soluções das equações transcendentais descritos na eq. (4.15).

Realizando implementações no software Matlab[®], considera-se como um exemplo, o comprimento de correlação $b=1$ e $a=0.5$.

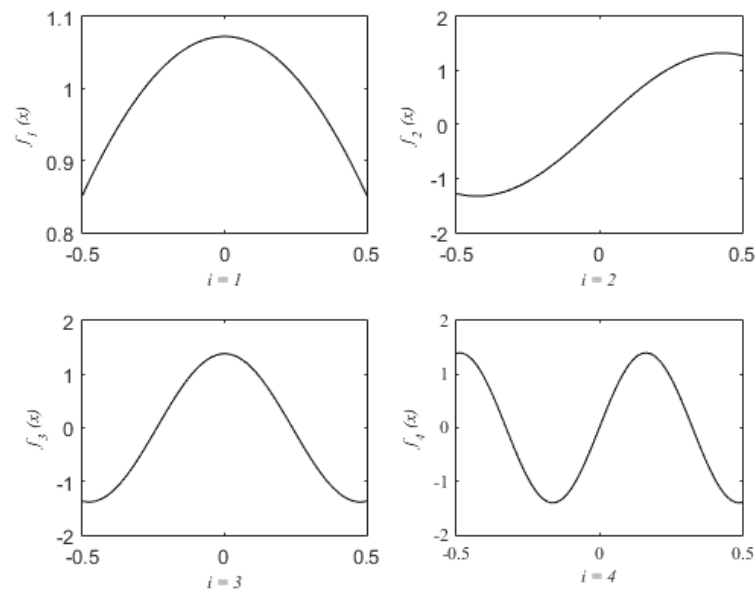
Utilizando a eq. (4.16) obtém-se os quatro autovalores da função covariância considerada:



Fonte: o autor.

Na Figura 4.2 tem-se a ilustração das quatro primeiras autofunções da função covariância.

Figura 4. 2 - Gráfico das autofunções da função covariância



Fonte: o autor.

Ressalta-se que o comprimento da correlação do campo aleatório tem grande influência nos valores da autofunção e dos autovalores. Sendo que uma característica importante da decomposição de KL é o decaimento dos autovalores em função do crescimento do índice i , onde quanto menor o autovalor menor é a sua influência na série de KL (CURSI, SAMPAIO, 2012).

4.4 Métodos dos Elementos Finitos Estocásticos

Muitos dos parâmetros incertos estão relacionados no modelo com propriedades geométricas (espessura, área da seção transversal, momento de inércia, etc.), ou com características do material (módulo de elasticidade, densidade do material, etc.) logo, estas variáveis podem ser modeladas como campos aleatórios ao invés de variáveis determinísticas (GUEDRI, BOUHADDI, MAJED, 2006).

Para a consideração das aleatoriedades nos sistemas, necessita-se utilizar de métodos numéricos que considerem as características estocásticas. Nesse sentido o método clássico de elementos finitos passou então, a ser utilizado juntamente com métodos de análise estatística dando origem ao método dos elementos finitos estocásticos (MEFE).

Já para a obtenção de redução de custo computacional, propôs-se acoplar o método dos elementos finitos estocásticos (MEFE) com o método de decomposição de Karhunen-Loève

(KL) (RIBEIRO, LIMA, 2015); (LIMA, RADE, BOUHADDI, 2010); (GUEDRI, BOUHADDI, MAJED, 2006).

Inicialmente, é realizado uma parametrização de alguns termos com o intuito de se alguns destes parâmetros como sendo as variáveis aleatórias. Assim, tem-se a seguinte expressão:

$$ef_m = \rho h b; ef_f = \frac{E b h^3}{12} \quad (4.19)$$

Onde na eq. (4.19) ρ , h , b e E representam densidade, espessura, largura e módulo de elasticidade respectivamente.

Tem-se que a matriz de massa elementar estocástica é dada pelo conjunto das matrizes elementares:

$$M^e(\theta) = M_0 + ef_m M_r \quad (4.20)$$

com:

$$M_0 = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T \left[\int_{\Omega_e} N^T N d\Omega_e \right] \{\dot{u}\}, M_r = \sum_{r=1}^n \xi_r \alpha \sqrt{\lambda} \int_{\Omega_e} f(x) N^T N d\Omega_e \quad (4.21)$$

Na eq. (4.21) M_0 é a matriz de massa elementar determinística e a matriz M_r é a matriz estocástica.

Para a matriz de rigidez obtêm-se de forma análoga, chegando na eq. (4.22):

$$K^e(\theta) = K_0 + ef_p K_r + K_l \quad (4.22)$$

com:

$$K_0 = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T \left[\int_{\Omega_e} B^T B d\Omega_e \right] \{\dot{u}\}, K_r = \sum_{r=1}^n \xi_r \alpha \sqrt{\lambda} \int_{\Omega_e} f(x) B^T B d\Omega_e \quad (4.23)$$

Na eq. (4.23), K_0 é a matriz de massa elementar determinística e a matriz K_r é a parte estocástica e B representa os operadores diferenciais. Ressalta-se que o domínio Ω_d expresso na eq. (4.21) e na eq. (4.23), depende da referência considerado no método dos elementos finitos.

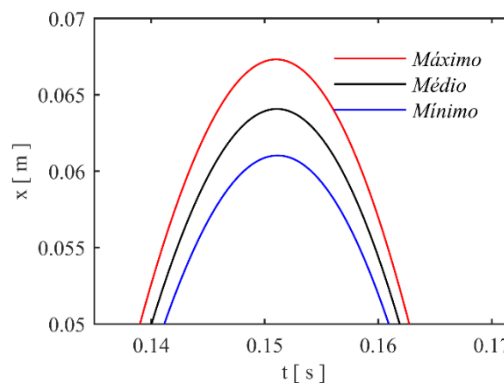
Capítulo 5

ESTUDO DE INCERTEZAS EM SISTEMAS NÃO LINEARES

Visto que, o método MC apresenta um maior custo computacional, optou-se neste trabalho, por utilizar a sua versão mais simples, o método HCL. Para tal estudo, são construídos os chamados envelopes de solução, estes representam o quanto as soluções oscilam, uma vez que são obtidas faixas de valores (máximo, médio e mínimo). A faixa média representa os valores nominais do sistema, enquanto que, a partir da consideração de incertezas, são obtidos os valores máximos e mínimos. Além desse método, destaca-se a utilização do método dos elementos finitos estocásticos (MEFE) juntamente com a expansão de Karhunen-Loève (KL) para a consideração de variáveis aleatórias.

A seguir, na Figura 5.1, é apresentado um exemplo que ilustra o envelope de solução:

Figura 5. 1 - Exemplo de um envelope de solução



Fonte: o autor.

Nesta figura tem-se a ilustração de um envelope de solução onde, a curva em preto (valor médio) representa a resposta do sistema e as curvas em vermelho (valor máximo) e azul (valor mínimo) são obtidas através de um determinado valor de incertezas, onde são geradas as amostras pelo método HCL.

A seguir, através do método estocástico HCL serão obtidos os envelopes de solução para o sistema discreto não linear e a viga de Euler-Bernoulli, abordados no capítulo 2. Além disso, para a viga de Euler-Bernoulli também será utilizado a modelagem por MEFE em conjunto com o KL e para a geração das amostras utiliza-se HCL.

Para a análise de convergência, foi utilizado o método dos mínimos quadrados:

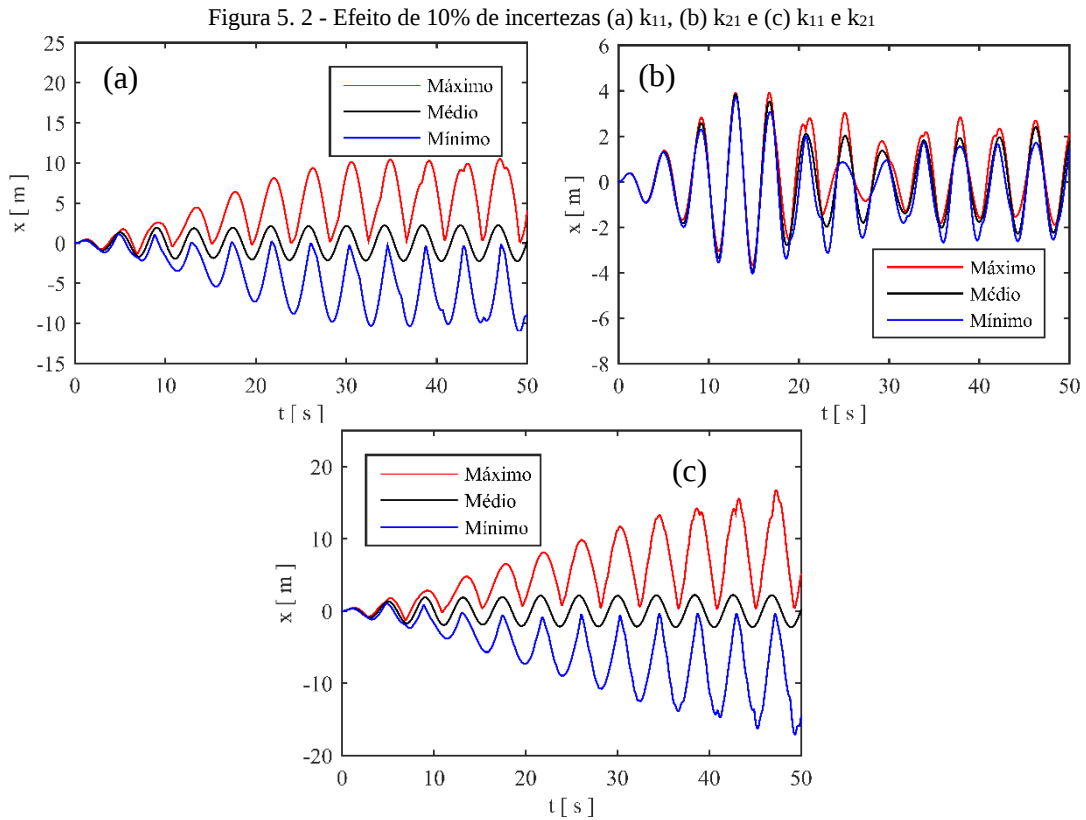
$$conv(n_s) = \frac{1}{n_s} \sum_{j=1}^n \|H_j(\theta) - H\|^2 \quad (5.1)$$

Na eq. (5.1) H é referente a resposta do sistema determinístico e $H(\theta)$ corresponde a resposta estocástica.

5.1 Influência de Incertezas no Sistema Discreto de 2 g.d.l.

Com o intuito de verificar os efeitos das incertezas nos parâmetros de rigidez do sistema discreto de 2 g.d.l., que possui não linearidades físicas, utilizou-se o método HCL implementado via software Matlab®. Assim, incertezas de 10% e 30% foram consideradas para três casos, a saber, sistema principal linear e sistema secundário linear, sistema principal linear e sistema secundário não linear e por fim, sistema principal não linear e sistema secundário não linear.

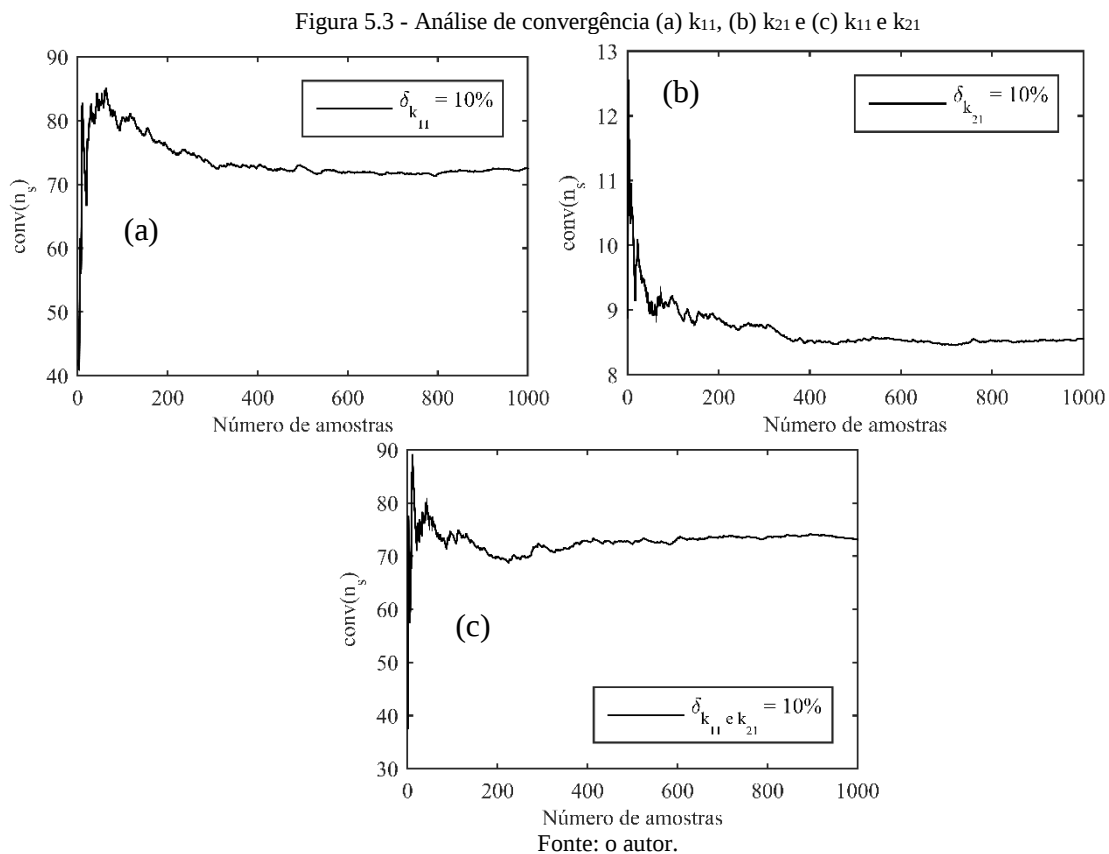
Na Figura 5.2 é ilustrado o efeito de 10% de incertezas nos parâmetros de rigidez lineares (a) k_{11} , (b) k_{21} e (c) k_{11} e k_{21} para sistema principal linear e sistema secundário linear:



Fonte: o autor.

Na Figura 5.2 (a) observa-se que mesmo com uma porcentagem relativamente pequena de incertezas (10%), as faixas de valores (máximo, médio e mínimo) se distanciam. Portanto, percebe-se que o parâmetro de rigidez linear do sistema principal é muito sensível à incertezas. Diferentemente a Figura 5.2 (b), considerando o mesmo valor (10%), percebe-se que as faixas de valores mostram-se mais próximas. Na Figura 5.2 (c), os envelopes demonstram que as faixas estão se distanciando com conforme o tempo passa, ou seja, é visivelmente possível observar certa distância entre as faixas de valores.

A seguir, é mostrado o cálculo do número mínimo de amostras necessárias para a obtenção da convergência para cada simulação, chegando-se na Figura 5.3:



Na Figura 5.3 é ilustrado para cada simulação o número mínimo de amostras necessárias para a obtenção da convergência, utilizou-se de 1000 amostras para esta análise onde, conclui-se a necessidade de pelo menos 500 amostras para a convergência.

A fim de, confirmar o resultado obtido pelas simulações encontradas pelo método estocástico HCL, Figura 5.2, foi calculado o desvio-padrão.

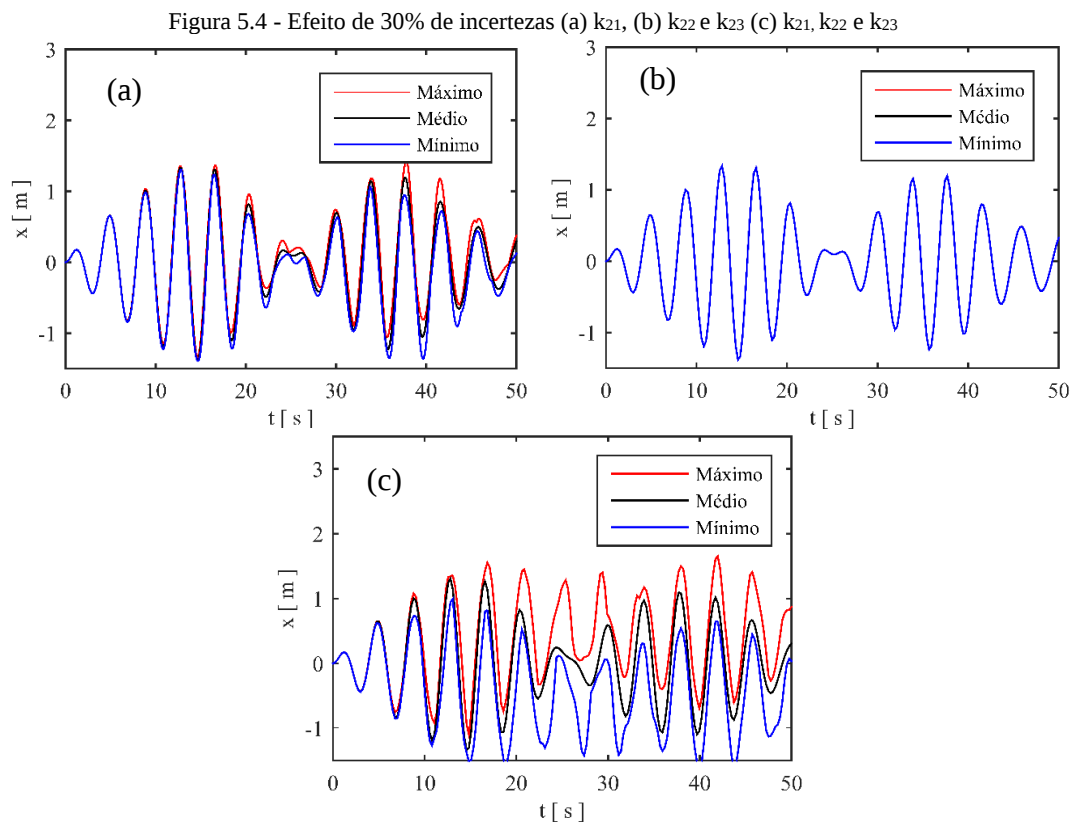
Os valores dos desvios são descritos na Tabela 5.1:

Tabela 5. 1 - Valores do desvio-padrão	
Figura	Desvio-Padrão
(a)	4.5518
(b)	0.5628
(c)	5.5603

Fonte: o autor.

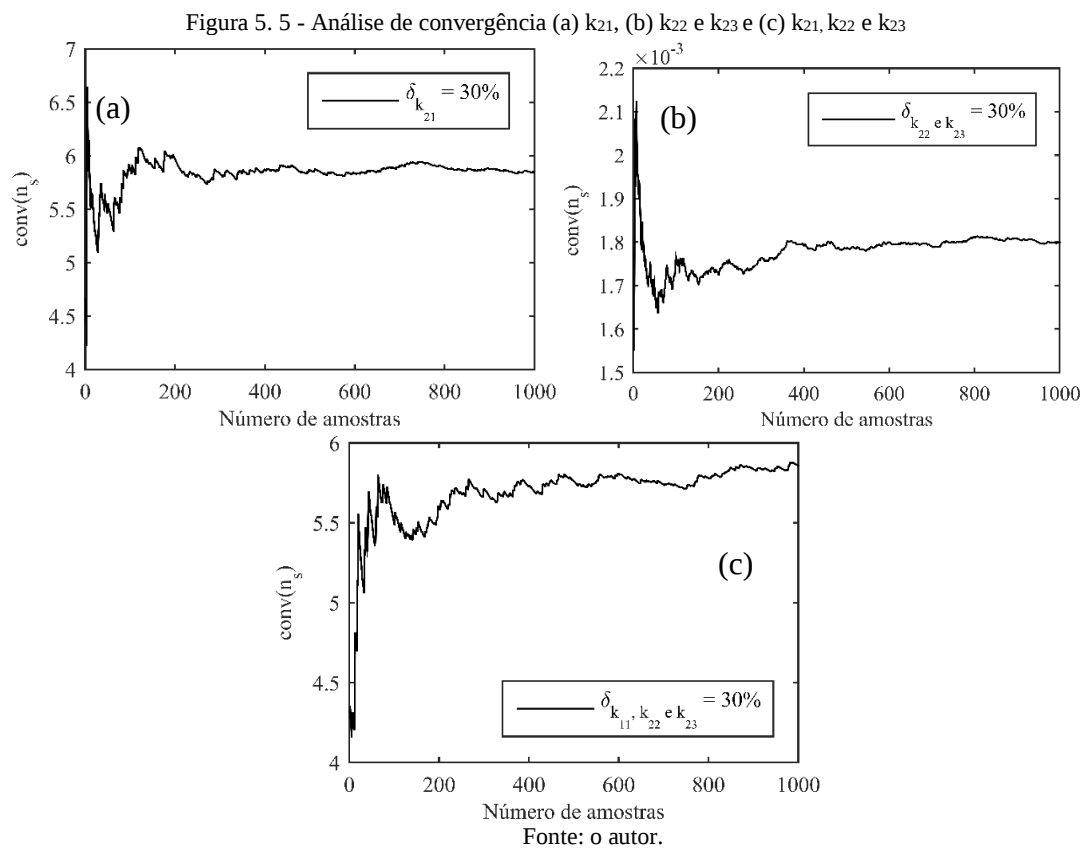
Na Tabela 5.1 é mostrado os valores do desvio-padrão para as 3 simulações realizadas anteriormente (Figura 5.2). Com estes valores confirma-se que os envelopes das Figuras 5.2 (a) e Figura 5.2 (c) estão se distanciando, pois apresentam valores altos de desvio-padrão já para a Figura 5.2 (b) percebe-se pelo valor do desvio-padrão de 0.5628 que as faixas de valores são mais próximas, ou seja, que a solução tem uma pequena oscilação.

Agora, considera-se o sistema principal linear e o sistema secundário não linear onde na Figura 5.4 é ilustrado o efeito de 30% de incertezas (a) no parâmetro de rigidez linear k_{21} , (b) nos parâmetros de rigidez não lineares k_{22} e k_{23} , (c) nos parâmetros de rigidez linear k_{21} e nos parâmetros de rigidez não lineares k_{22} e k_{23} . As simulações obtidas quando se considerou estes parâmetros como incertos são mostradas pela Figura 5.4:



Na Figura 5.4 (a) confirma-se a pouca sensibilidade do parâmetro de rigidez não linear à consideração de incertezas pois, percebe-se claramente a pouca distância entre as faixas de valores. Na Figura 5.4 (b), verifica-se que, os efeitos obtidos não são visíveis, ou seja, não é percebido distância entre as faixas de valores obtendo assim, uma resposta robusta. Na Figura 5.4 (c) há também uma pequena variação entre os valores máximo e mínimo.

Na Figura 5.5 tem-se a apresentação da análise de convergência para o caso em questão:



Neste caso, analisando-se os três gráficos é visto que, está em torno de 1000 tiragens para a obtenção da convergência do método.

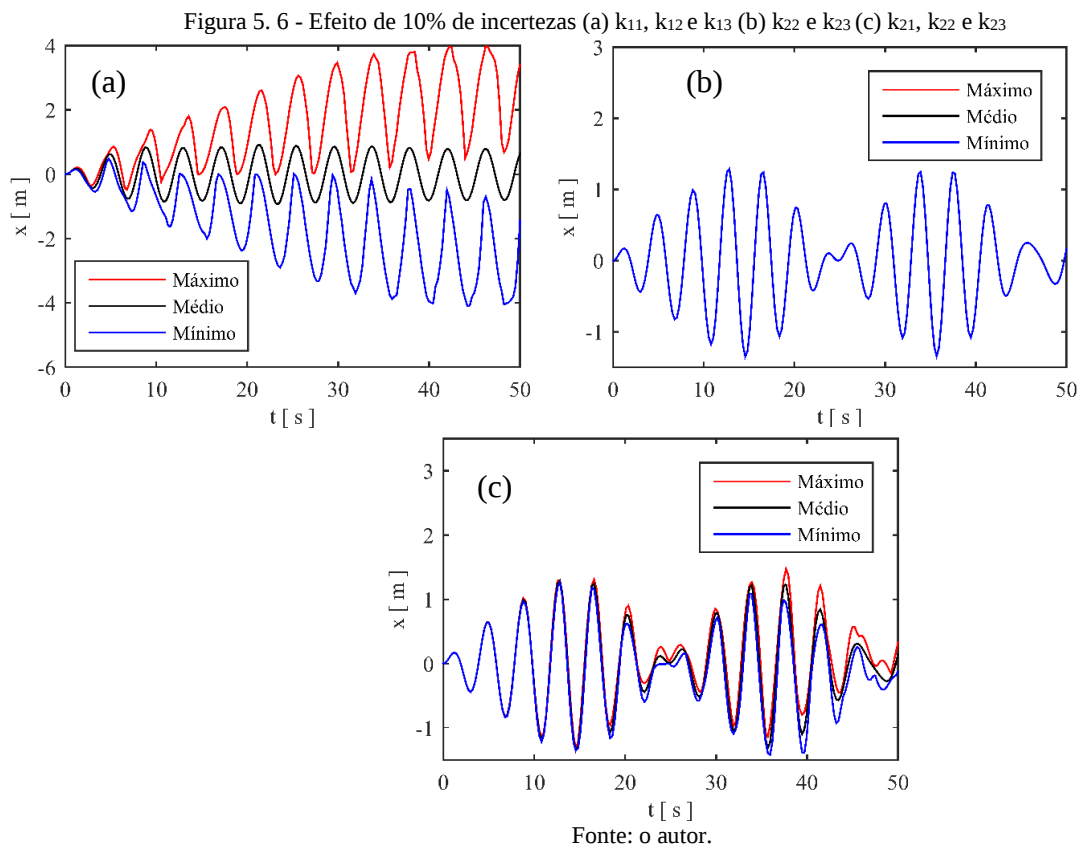
Na Tabela 5.2 é descrito os valores obtidos do desvio-padrão:

Tabela 5. 2- Valores do desvio-padrão	
Figura	Desvio-Padrão
(a)	0.1382
(b)	1.22×10^{-4}
(c)	0.4229

Fonte: o autor.

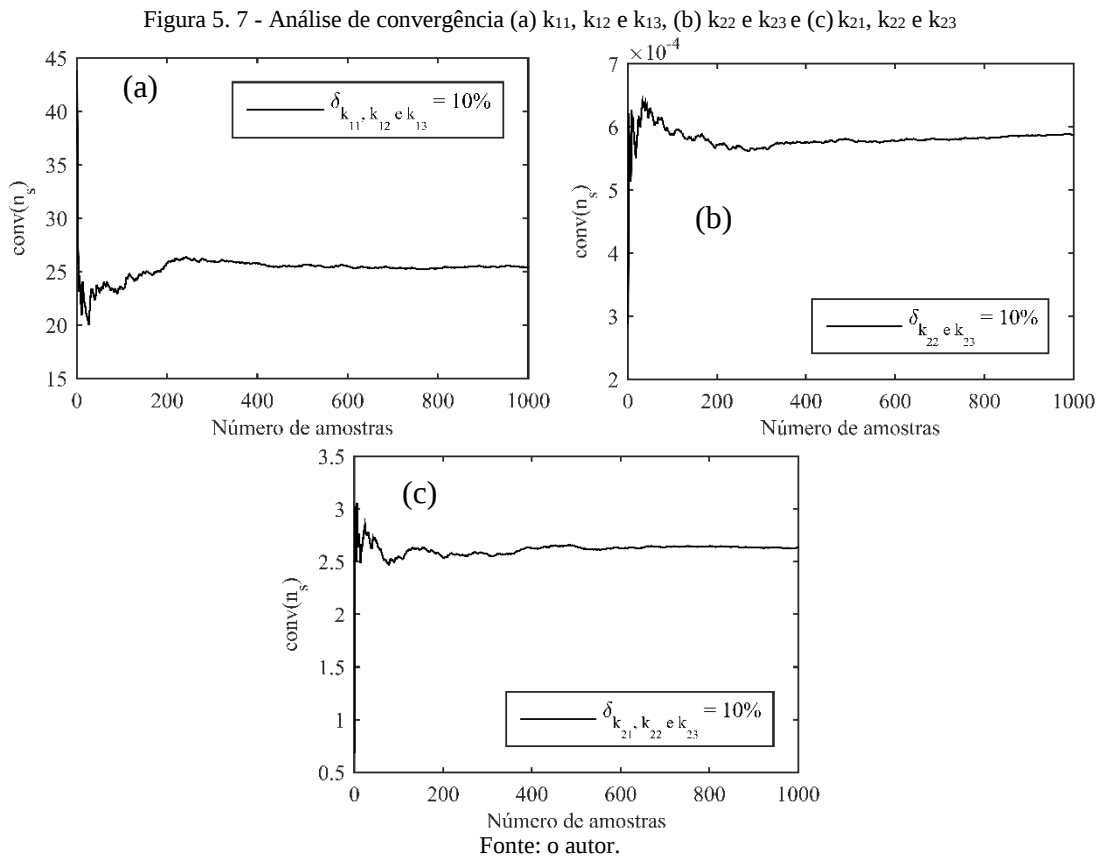
Percebe-se pela Tabela 5.2 que ao se considerar o efeito de 30% de incertezas em parâmetros com características não lineares a resposta mostra-se robusta visto que, os valores do desvio-padrão são bem menores dos valores obtidos anteriormente descritos na Tabela 5.1. Fica evidenciado esta afirmação tanto pela Figura 5.4 (b) que não é visualmente possível ver distância entre as faixas de valores quanto pelo valor do desvio-padrão que é pequeno.

No último caso, será considerado 10% de incertezas onde na Figura 5.6 (a) as variáveis aleatórias é o parâmetro de rigidez linear k_{11} e os parâmetros não lineares, k_{12} e k_{13} . Já na Figura 5.6 (b) os parâmetros de rigidez considerados são os não lineares, k_{22} e k_{23} , na Figura 5.6 (c) os parâmetros aleatórios são k_{11} e k_{22} e k_{23} .



Na Figura 5.6 (a) percebe-se a grande sensibilidade do sistema à fatores externos ao se considerar incertezas em um parâmetro de rigidez linear, neste caso, k_{11} . Já na Figura 5.6 (b) tem-se o resultado com valores muito próximos do sistema original, ou seja, nos envelopes de solução a distância entre as faixas de valores máximo e mínimo é muito pequena. Esta característica é observada na maioria das vezes em que se considera incertezas em termos não lineares. Na Figura 5.6 (c) os envelopes apresentaram uma pequena distância entre as faixas de valores.

Na Figura 5.7 é expresso a análise de convergência para cada simulação apresentada na Figura 5.6:



Na Figura 5.7 foi analisado a convergência para as simulações apresentadas na Figura 5.6, onde percebe-se que o número de tiragens está em torno 500 amostras em ambos os casos considerados.

Nesta Tabela 5.3, apresenta-se o valor do desvio-padrão também para as simulações descritas na Figura 5.6:

Tabela 5.3 - Valores do desvio-padrão	
Figura	Desvio-Padrão
(a)	1.7690
(b)	1.27×10^{-4}
(c)	0.1716

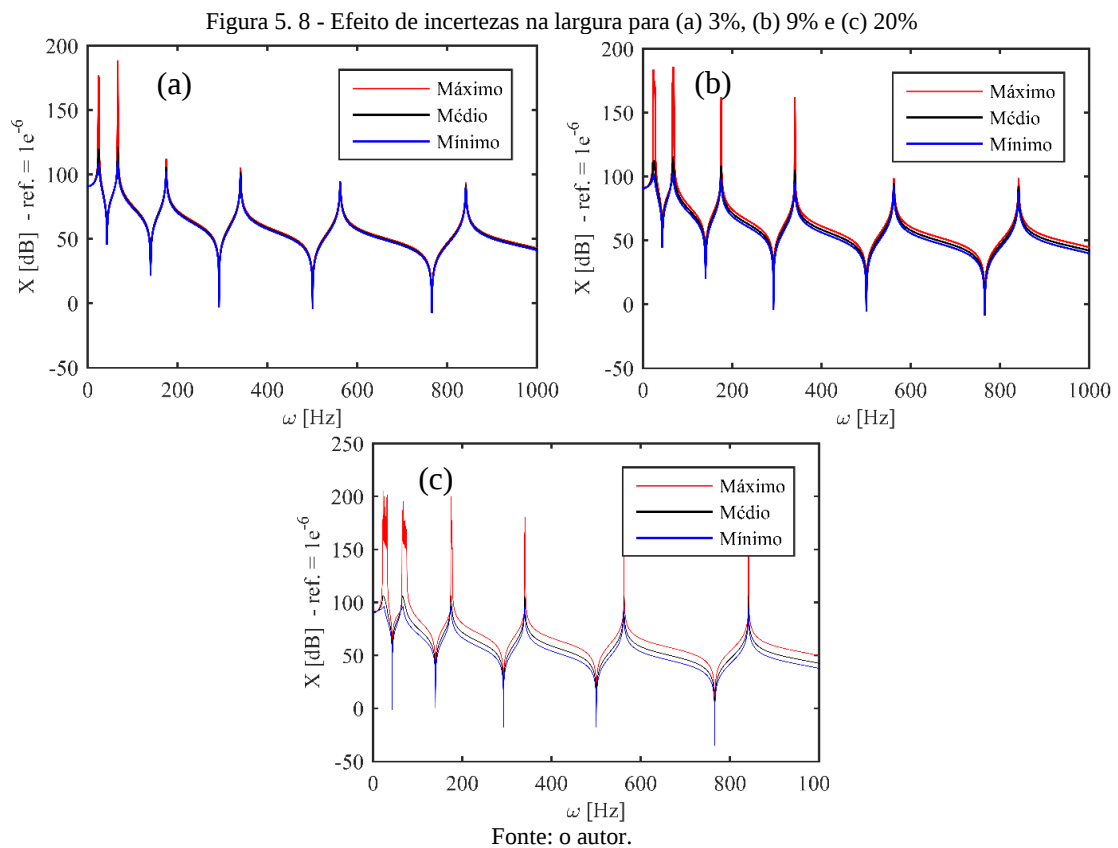
Fonte: o autor.

Nesta tabela observa-se maior sensibilidade ao efeito de incertezas quando consideradas em parâmetros lineares enquanto que, em parâmetros não lineares, as respostas mostram-se menos sensíveis, ou seja, os valores de mínimo e máximo são próximos.

5.2 Influência de Incertezas em uma Viga de Euler-Bernoulli

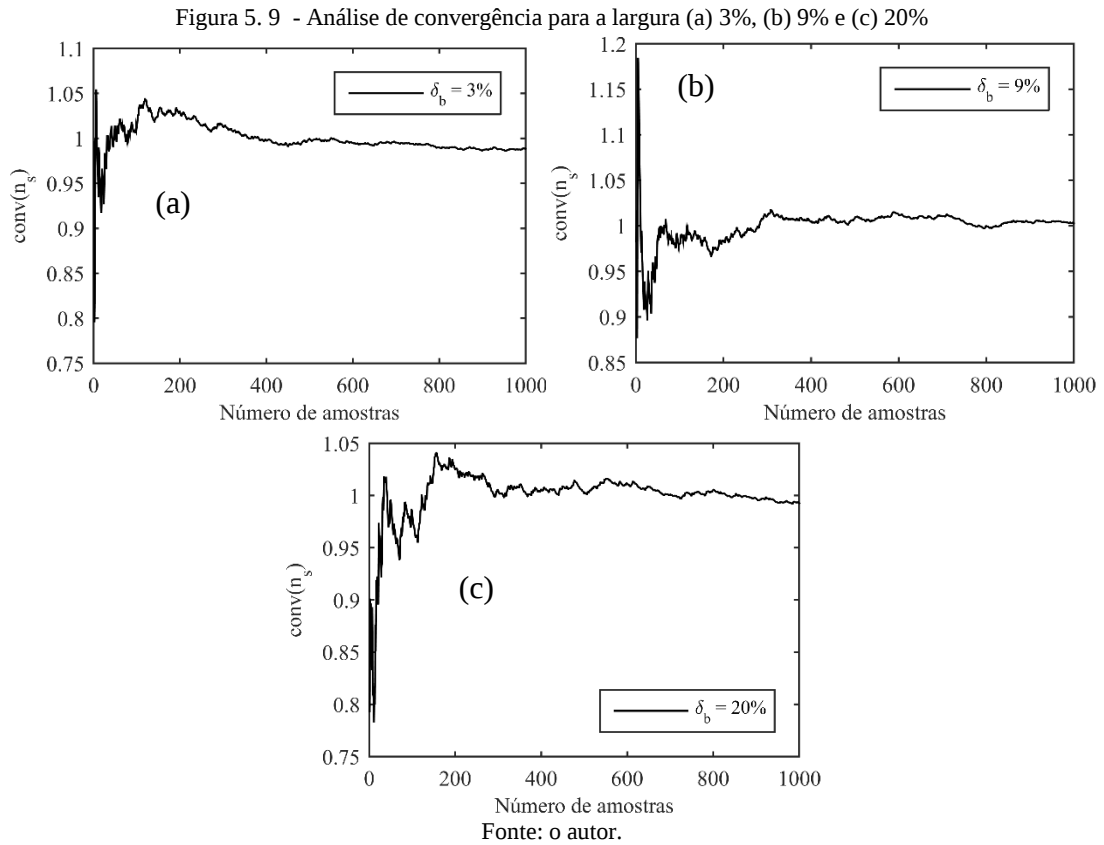
Considerando a função resposta em frequência calculada para a viga de Euler-Bernoulli abordada no capítulo 2, será utilizado o método estocástico HCL para o estudo do efeito de 3% e 5% de incertezas nos parâmetros largura e espessura para 1000 amostras.

Inicialmente, considera-se como parâmetro aleatório a largura, utilizando os seguintes valores de incertezas (3%, 9% e 20%), Figura 5.8:



Observa-se na Figura 5.8 (a) que as faixas de valores mostram-se próximas, na Figura 5.8 (b) tem-se um aumento da distância entre as faixas máximo e mínimo devido ao aumento do valor de incertezas, porém ainda verifica-se que elas estão próximas, isso é evidenciado na Figura 5.8 (c), onde considerando o efeito de 20% de incertezas, tem-se uma melhor percepção da distância entre as faixas.

Na Figura 5.9 é ilustrado os gráficos para a análise de convergência para a largura para as dispersões de 3%, 9% e 20%:



Na Figura 5.9 é mostrado a análise de convergência para o caso em questão, onde tem a consideração de 1000 amostras para a realização desta análise. Concluiu-se a necessidade de pelo menos 500 amostras no caso da Figura 5.9 (a), já para quando tem-se o aumento da dispersão, percebe-se que é necessário em torno de 1000 amostras para a obtenção da convergência, visto nas Figuras 5.9 (b) e (c).

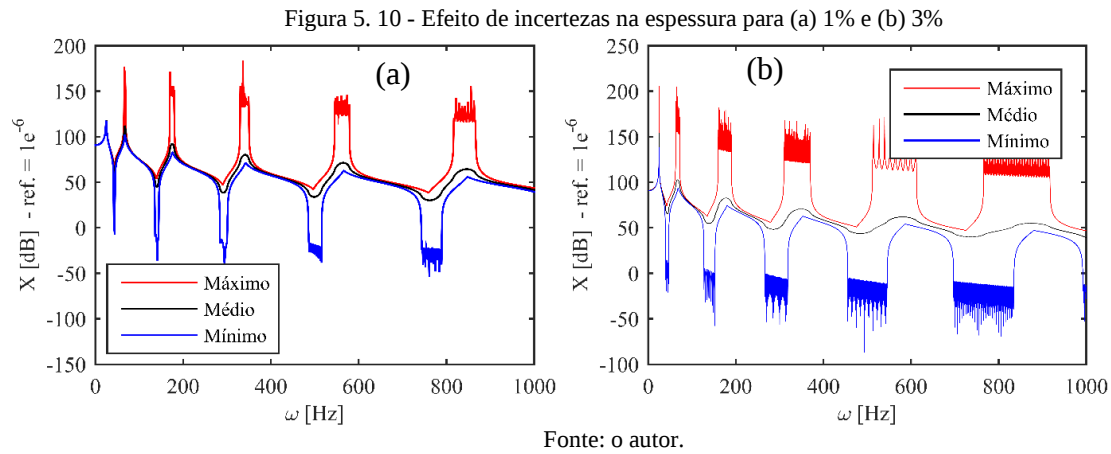
Na Tabela 5.4 são descritos os valores do desvio-padrão para as simulações ilustradas na Figura 5.8:

Tabela 5. 4 - Valores do desvio-padrão	
Figura	Desvio-Padrão
(a)	3.8552
(b)	7.0023
(c)	10.6804

Fonte: o autor.

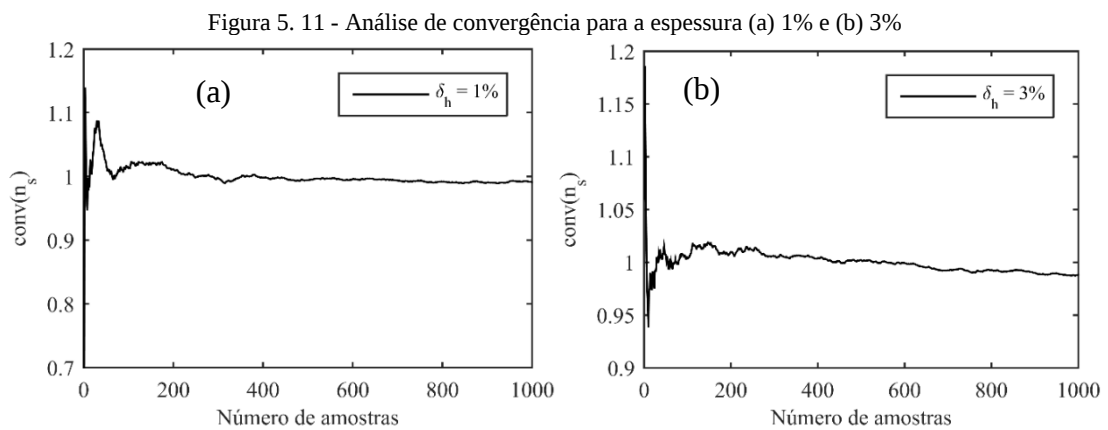
Conclui-se com as simulações descritas na Figura 5.8 e pelos valores do desvio-padrão, que a largura não foi sensível a consideração de incertezas, uma vez que as a distância entre as faixas de valores mostra-se pequena.

A seguir, é considerado 1% e 3% de incertezas, para a espessura sendo uma variável incerta:



Observa-se que, a espessura tem uma maior sensibilidade a consideração de incertezas visto que, na Figura 5.10 (a) considerou um valor pequeno de incertezas (1%) e, é possível verificar uma distância entre as faixas de valores e, essa sensibilidade pode ser confirmada na Figura 5.10 (b), pois com o aumento do valor para 3%, mostra claramente que as faixas máximo e mínimo se encontram distantes.

A seguir, é mostrado a análise de convergência para o caso em questão:



Na Figura 5.11 (a) é visto que, a convergência para este caso está em torno de 500 amostras e na Figura 5.11 (b) considerando o aumento da dispersão de 1% para 3% é verificado a necessidade de também aproximadamente 500 tiragens para a convergência.

Na tabela 5.5 é mostrado os valores do desvio-padrão para o caso ilustrado na Figura 5.10:

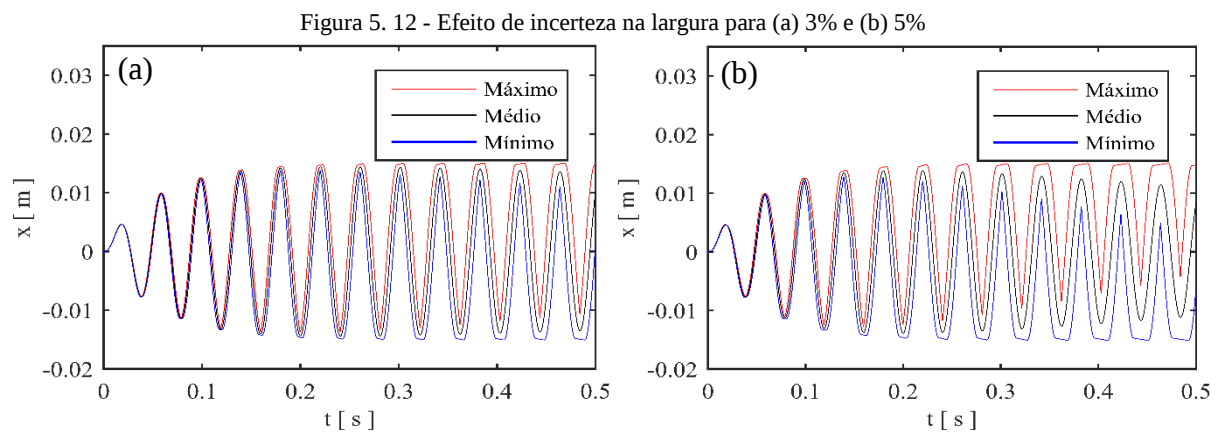
Figura	Desvio-Padrão
(a)	28.7724
(b)	43.8538

Fonte: o autor.

Na Tabela 5.5 é apresentado valores altos para o desvio-padrão, logo, é concluído que a espessura apresentou uma grande sensibilidade a perturbação. Dessa forma, pode-se confirmar que no caso da largura a solução mostrou-se robusta, no entanto para a espessura a uma grande oscilação da resposta, isto é, uma sensibilidade a incerteza.

A seguir, é considerado a resposta no domínio do tempo da viga com o acoplamento de uma mola com característica linear, sendo considerado novamente como parâmetros aleatórios a largura e a espessura, respectivamente.

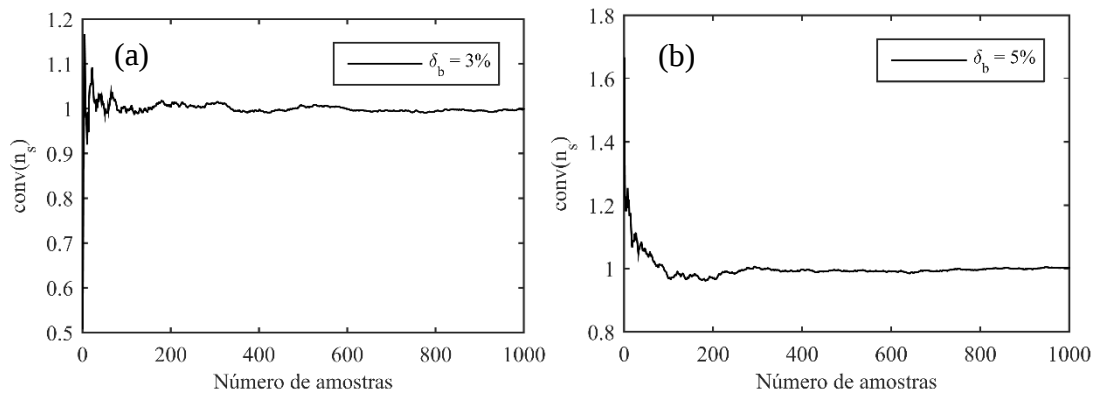
De início, o efeito de 3% e 5% de incerteza é na largura, Figura 5.12:



Na Figura 5.12 (a), verifica-se pelo envelope de solução obtido que, as faixas de valores mostram-se com um pequeno distanciamento enquanto, na Figura 5.12 (b) tem-se uma melhor percepção desta distância devido ao fato do aumento do valor da porcentagem de incertezas.

A seguir, tem-se a convergência para as simulações descritas na Figura 5.12:

Figura 5. 13 - Análise de convergência para a largura (a) 3% e (b) 5%



Fonte: o autor.

Neste caso, tem-se a análise de convergência para a variável largura para as duas dispersões consideradas, 3% e 5%, respectivamente. Aqui, tem-se que o número de tiragens está em torno de 500 amostras para a obtenção da convergência do método.

Na Tabela 5.6 tem-se os valores do desvio-padrão:

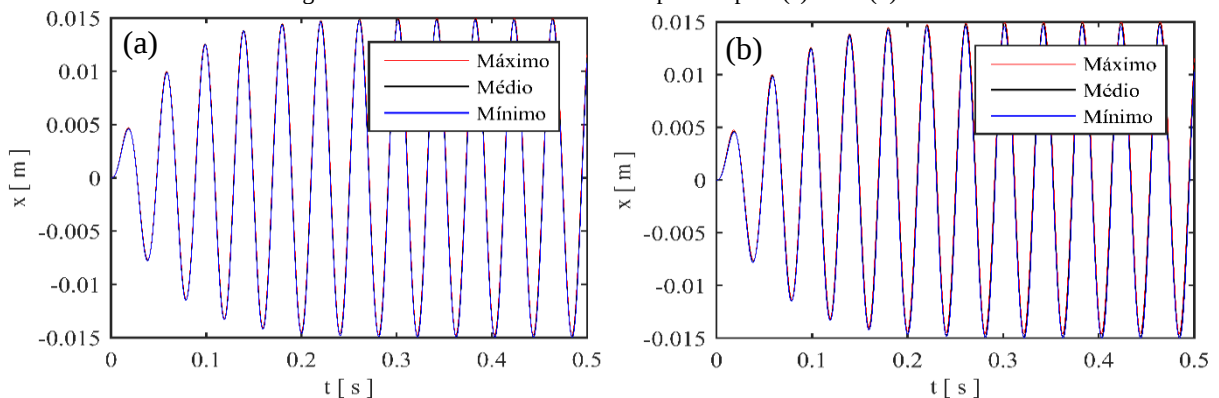
Tabela 5. 6 - Valores do desvio-padrão	
Figura	Desvio-Padrão
(a)	0.0056
(b)	0.0081

Fonte: o autor.

Na Tabela 5.6 pode ser percebido que foram obtidos valores relativamente baixos de desvio-padrão. Referente à Figura 5.12 (b) o valor do desvio é maior devido ao aumento de 3% para 5%.

A seguir, é considerado o parâmetro que representa a espessura como uma variável aleatória para os mesmos valores de incertezas, 3% e 5%:

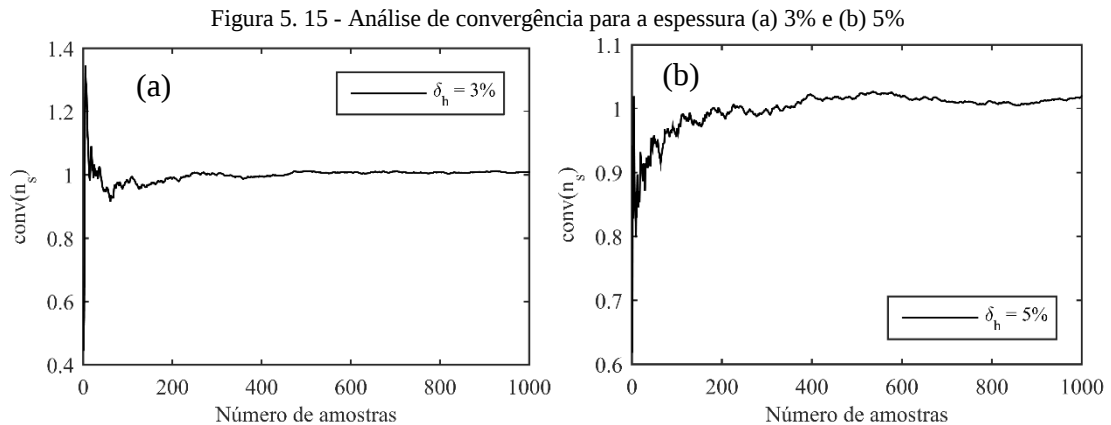
Figura 5. 14- Efeito de incertezas na espessura para (a) 3% e (b) 5%



Fonte: o autor.

Na Figura 5.14 (a) percebe-se que as faixas de valores estão próximas e também, observa-se que mesmo com o aumento de incertezas para 5% na Figura 5.14 (b) a distância entre as faixas máximo e mínimo continua pequena.

E a convergência é mostrada na Figura 5.15:



Na Figura 5.15 é mostrado o número de amostras necessárias para a convergência para cada dispersão em separado. Aqui, viu-se que o número necessário está perto de 500 amostras para a Figura 5.15 (a) e para a Figura 5.15 (b) percebe-se uma necessidade de aproximadamente 1000 amostras.

Considera-se as simulações descritas na Figura 5.14, é calculado o valor do desvio-padrão, Tabela 5.7

Tabela 5. 7 - Valores do desvio-padrão	
Figura	Desvio-Padrão
(a)	4.33×10^{-4}
(b)	6.72×10^{-4}

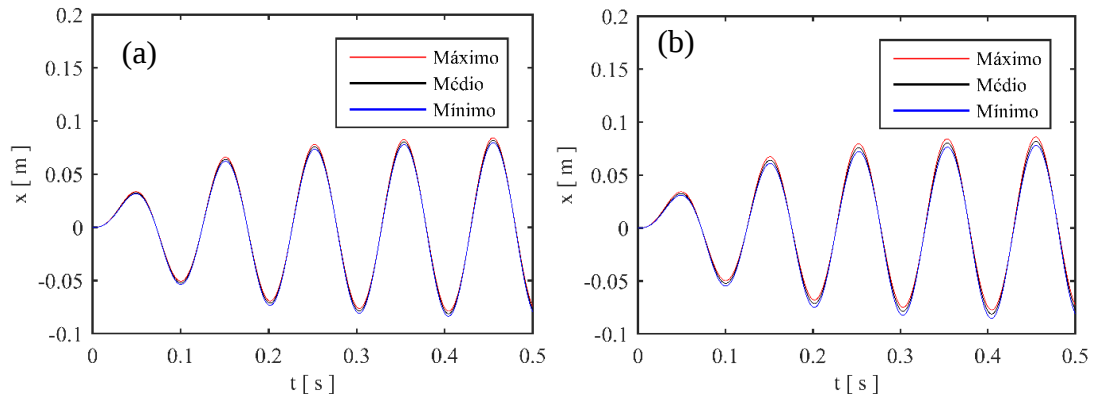
Fonte: o autor.

Na Tabela 5.7 é observado que os valores do desvio-padrão são pequenos, isto é, nota-se que há pouca variação entre as faixas máximo e mínimo.

Conclui-se que, neste caso, a largura foi mais sensível a consideração de incertezas. Considerando novamente a largura como parâmetro incerto, tem-se os envelopes de solução para a resposta no tempo obtidas para o caso onde se considerou o acoplamento de uma mola com característica não linear acoplada na viga de Euler-Bernoulli.

A seguir, na Figura 5.16, mostra-se os envelopes de solução para este caso:

Figura 5. 16 - Efeito de incerteza na largura para (a) 3% e (b) 5%

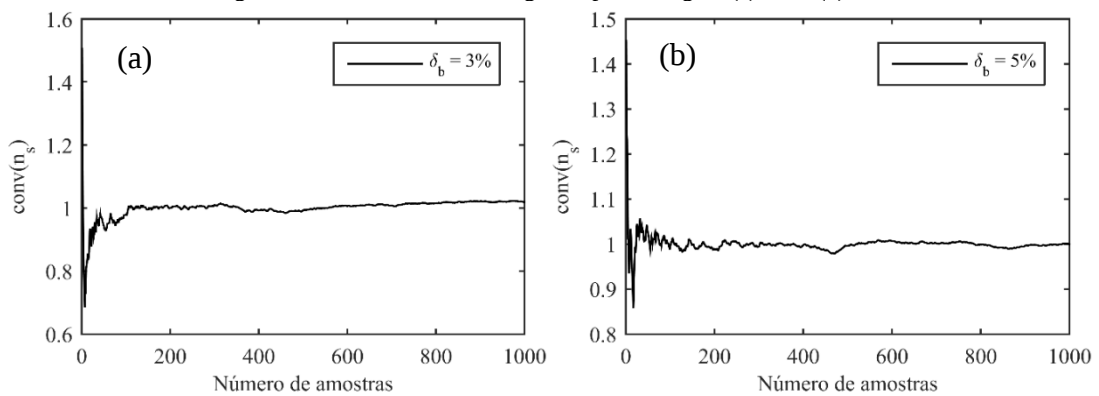


Fonte: o autor.

Na Figura 5.16, verifica-se que houve pequena diferença na variação das soluções mínima e máxima com relação à média.

A Figura 5.17 ilustra a convergência para este caso:

Figura 5. 17 - Análise de convergência para a largura (a) 3% e (b) 5%



Fonte: o autor.

Conclui-se com a Figura 5.17 que tem-se uma obtenção de convergência com aproximadamente 500 amostras.

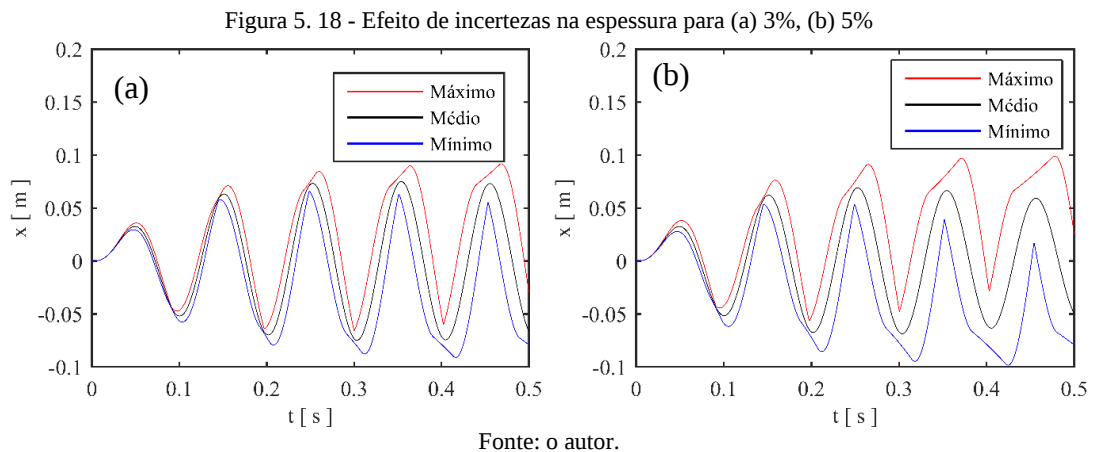
A medida de dispersão, desvio-padrão, é listada na Tabela 5.8:

Tabela 5. 8 - Valores do desvio-padrão	
Figura	Desvio-Padrão
(a)	0.0015
(b)	0.0025

Fonte: o autor.

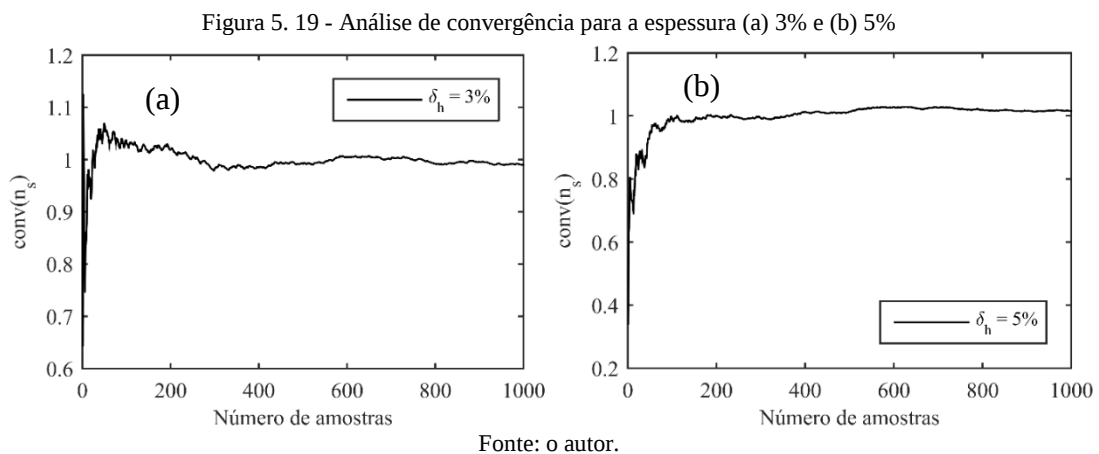
Na Tabela 5.8, tem-se que os valores do desvio-padrão são pequenos demonstrando a pequena diferença entre a resposta máxima e mínima para a simulações mostradas na Figura 5.16.

Para as simulações ilustradas na Figura 5.18, tem-se como variável aleatória a espessura considerando 3% e 5% de incertezas:



Na Figura 5.18 (a) observa-se que as faixas de valores (máximo, médio e mínimo) se distanciam, isto é, percebe-se uma grande sensibilidade em relação à consideração de incertezas e, na Figura 5.18 (b), é demonstrado que com 5% tem-se a resposta ainda mais dispersa.

A seguir, é apresentado a convergência para as simulações expressas na Figura 5.18:



Na Figura 5.19, tem-se que a convergência é obtida com aproximadamente 500 tiragens em ambos os casos.

A Tabela 5.9 apresenta os seguintes valores do desvio-padrão para as simulações apresentadas na Figura 5.18:

Tabela 5. 9 - Valores do desvio-padrão

Figura	Desvio-Padrão
(a)	0.0345
(b)	0.0487

Fonte: o autor.

Ao se atentar para os valores do desvio-padrão listados na Tabela 5.9, percebe-se que são maiores quando comparados aos valores obtidos para o caso da largura dado na Tabela 5.8.

Neste caso, concluiu-se pelos envelopes de solução e pelos valores do desvio-padrão que a espessura foi mais sensível a consideração de incertezas, Figura 5.18.

5.2.1 Aplicação do MEFÉ para a Viga de Euler-Bernoulli

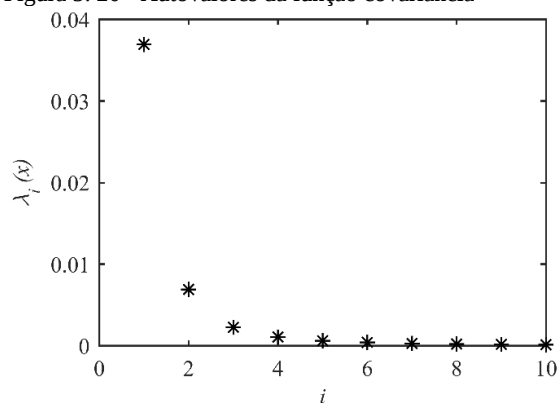
A seguir, aplica-se a metodologia do método dos elementos finitos estocásticos utilizando a expansão de Karhunen-Loève, para isso, tem-se a viga de Euler-Bernoulli engastada livre (capítulo 2) como estudo de caso. Para tal aplicação utiliza-se a resposta no domínio da frequência onde inicialmente considerou-se a largura e posteriormente a espessura como variáveis incertas.

A montagem das matrizes de massa e rigidez determinísticas e estocásticas foram descritas no capítulo 4.

Neste caso os limites do domínio considerado foi de $[0 \ l]$, onde l representa o comprimento do elemento de viga, ressalta-se a utilização de uma expansão de KL de 10 termos.

Na Figura 5.20 é ilustrado os autovalores para o problema em questão:

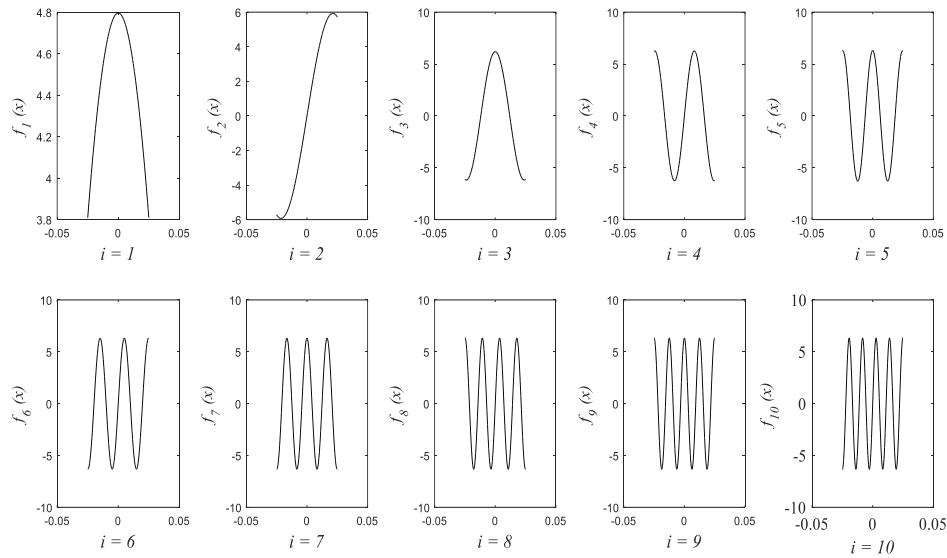
Figura 5. 20 - Autovalores da função covariância



Fonte: o autor.

E na Figura 5.21 é exposto as dez autofunções da função covariância para o caso considerado.

Figura 5. 21 - Gráfico das autofunções da função covariância



Fonte: o autor.

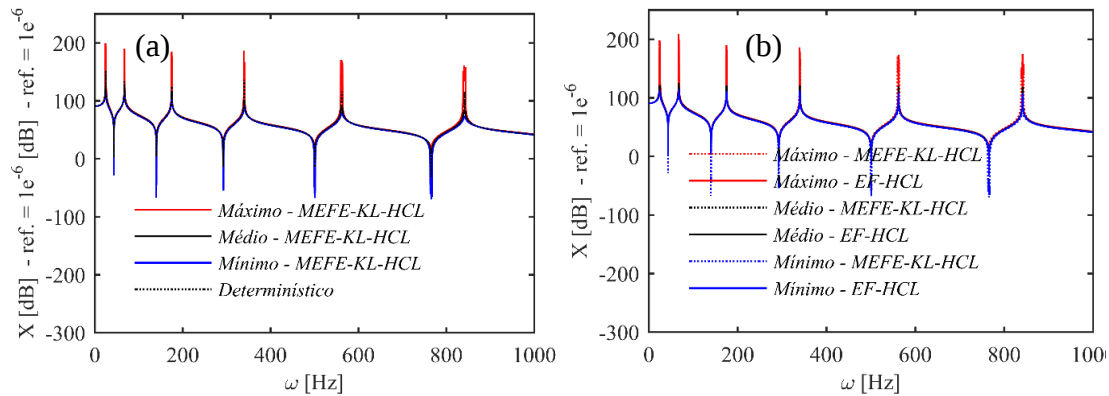
Inicialmente foi obtido o número mínimo de amostras necessários para a convergência da resposta. Para isto, utilizou-se a seguinte equação:

$$conv(n_s) = \frac{1}{n_s} \sum_{j=1}^n \|H_j(\omega, \theta) - H(\omega)\|^2 \quad (5.2)$$

Na eq. (5.2), $H(\omega)$ é referente a função resposta em frequência para o sistema determinístico da viga de Euler-Bernoulli e $H(\omega, \theta)$ corresponde a resposta estocástica. Posteriormente, utilizou-se 1000 amostras pelo método HCL para a construção dos envelopes de solução da função resposta em frequência

Inicialmente tem-se a consideração do parâmetro largura como aleatório, onde considera-se os envelopes das FRFs para 3% de incertezas mostrado na Figura 5.22:

Figura 5. 22 – Envelopes de solução para 3% de incertezas na largura (a) MEFE versus resposta determinística (b) MEFE versus EF

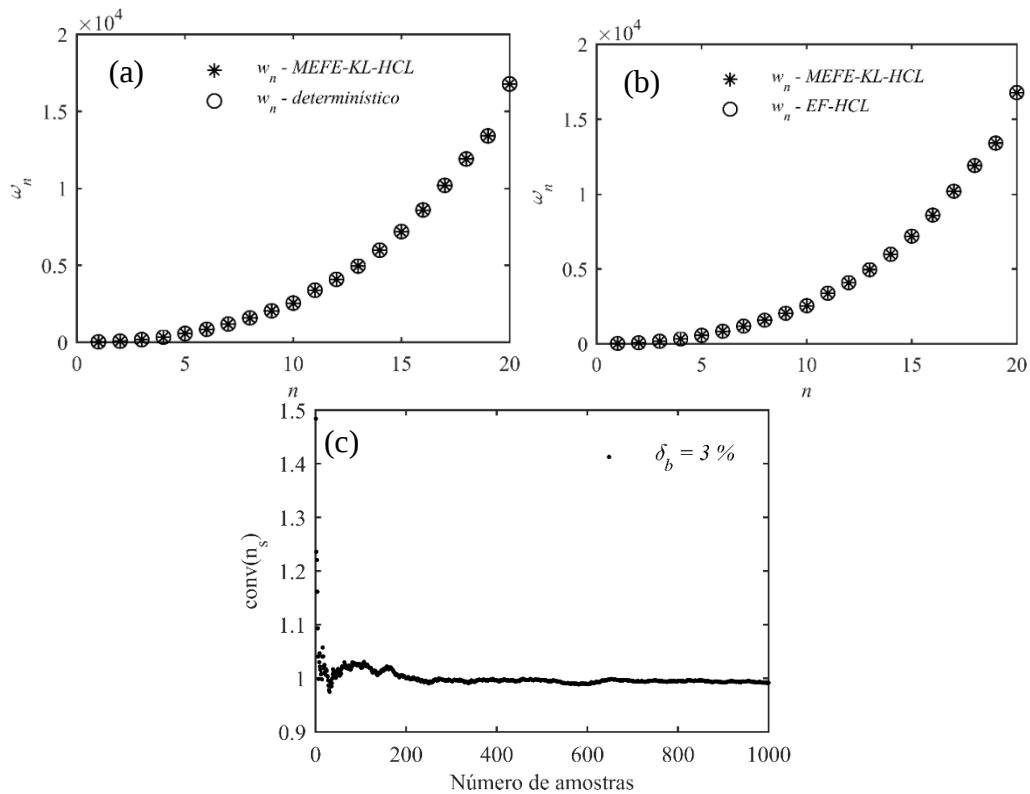


Fonte: o autor.

Na Figura 5.22 (a) nota-se que a resposta aleatória por MEFE mostra coerente ao se comparar com a resposta determinística, isto é, são próximas. Na Figura 5.22 (b) percebe-se que as respostas obtidas pelo MEFE mostram-se próximas as do elementos finitos clássico (EF).

Comparou-se as frequências naturais da resposta determinística com as frequências obtidas pelo MEFE, Figura 5.23 (a), do MEFE com o EF na Figura 5.23 (b) e na Figura 5.23 (c) tem a análise de convergência do MEFE:

Figura 5. 23 – Comparação das frequências naturais (a) KL versus resposta determinística (b) KL versus HCL, (c) análise de convergência do MEFE

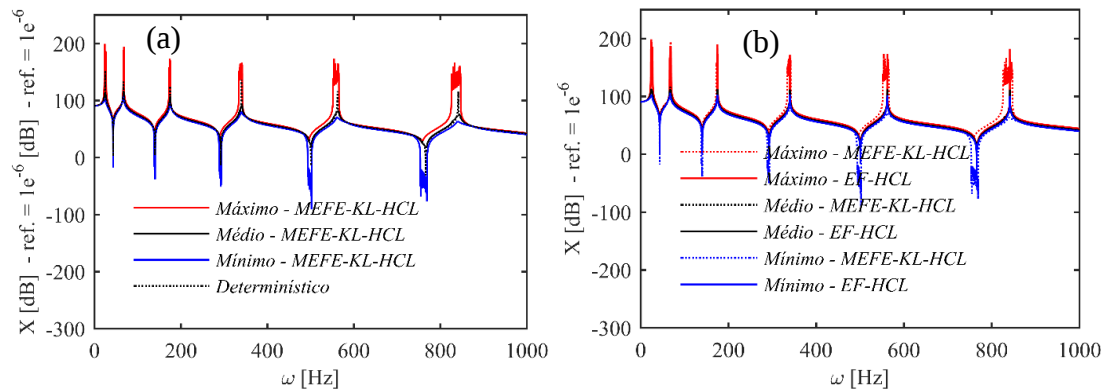


Fonte: o autor.

Conclui-se pelas Figuras 5.23, que nos dois casos considerados, as frequências naturais obtidas foram similares, ou seja, com o MEFE conseguiu obter os mesmos valores das frequências naturais tanto da resposta determinística como pelo EF, ressalta-se que para ambos os métodos utilizou-se do método estocástico para a geração das amostras. Em relação ao MEFE ainda foi analisado o número de amostras necessárias para a obtenção da convergência, onde verificou-se a necessidade de aproximadamente 500 amostras.

Considerando novamente a largura como variável incerta aumentou-se o valor de incertezas para 9%, na Figura 5.24 (a) tem-se os envelopes das FRFs por MEFE comparando com a resposta determinística e na Figura 5.24 (b) tem-se a comparação da resposta por MEFE com a obtida pelo EF:

Figura 5. 24 - Envelope de solução para 9% de incertezas na largura (a) MEFE versus resposta determinística (b) MEFE versus EF

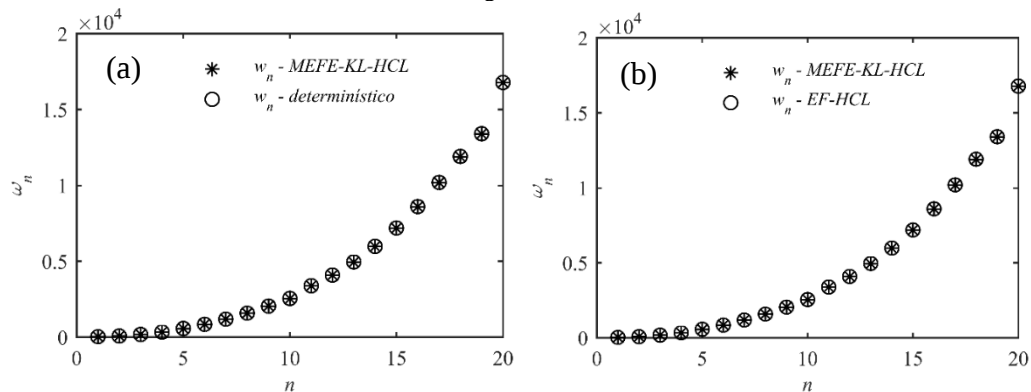


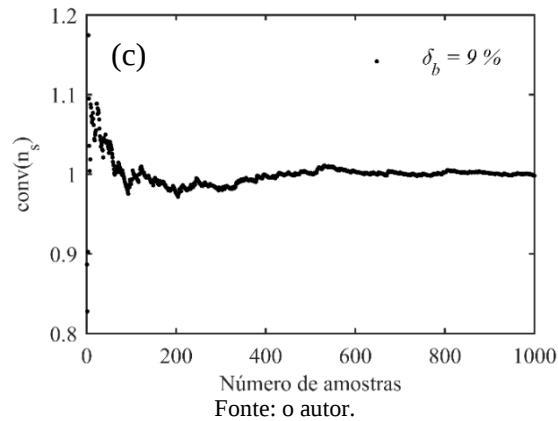
Fonte: o autor.

Na Figura 5.24 (a) verifica-se um aumento da distância entre as faixas de valores, porém, percebe-se que ainda foi obtido respostas semelhantes pelo MEFE com o EF.

A comparação das frequências naturais e a análise de convergência para este caso é mostrada na figura a seguir:

Figura 5. 25 - Comparação das frequências naturais (a) MEFE versus resposta determinística (b) MEFE versus EF, (c) análise de convergência do MEFE

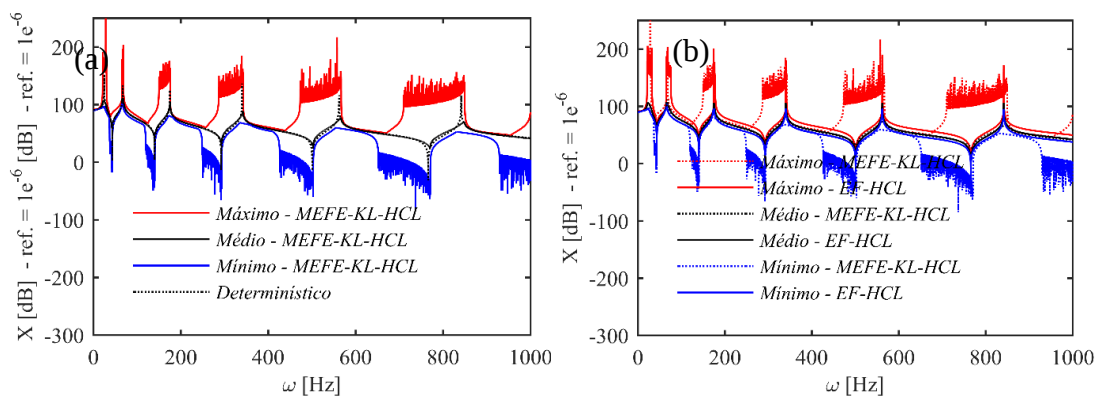




Percebe-se que as frequências naturais obtidas utilizando MEFE foram semelhantes as frequências da resposta determinística, Figura 5.25 (a), e também pela encontrada pelo EF, Figura 5.25 (b). E na Figura 5.25 (c) é ilustrado o número mínimo de amostras necessárias para obter a convergência do método, para esta simulação percebe-se a necessidade de 1000 tiragens.

Na Figura 5.26 será considerado 20% de incertezas:

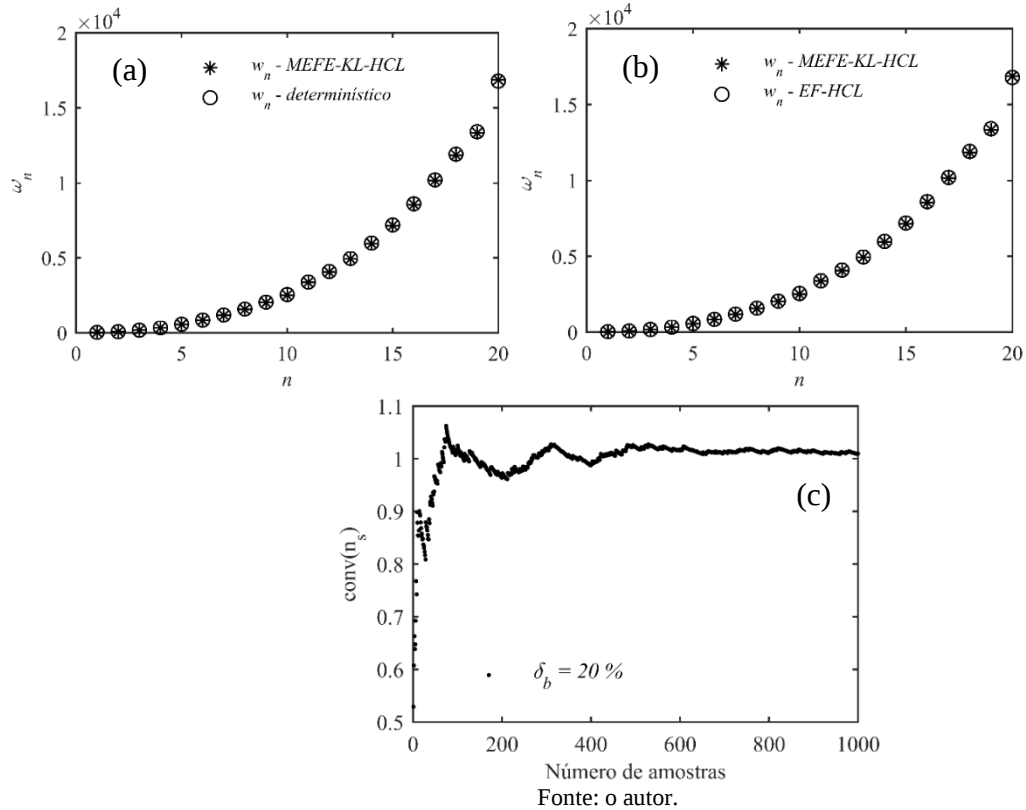
Figura 5. 26 - Envelope de solução para 20% de incertezas na largura (a) MEFE versus resposta determinística (b) MEFE versus EF



Na Figura 5.26, observa-se que com o aumento da porcentagem de incertezas foi obtido uma maior dispersão na resposta, ou seja, faixas de valores mais distantes.

A seguir, tem-se na Fig. 5.27 a comparação das frequências naturais e a análise de convergência:

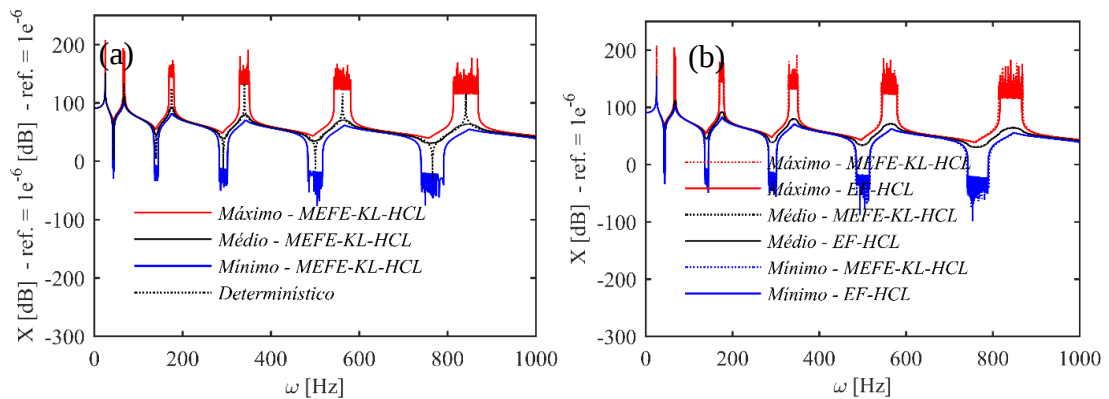
Figura 5. 27 - Comparação das frequências naturais (a) MEFÉ versus resposta determinística (b) MEFÉ versus EF, (c) análise de convergência do MEFÉ



Na Figura 5.27 (a) pode ser verificado uma equivalência das frequências determinísticas e as obtidas pelo MEFÉ, sendo que na Figura 5.27 (b) é verificado um caso semelhante, isto é, são obtidos pelo MEFÉ valores semelhantes aos valores obtidos pelo EF. Já na Figura 5.27 (c) verifica-se que são necessárias pelo menos 1000 amostras para a obter a convergência.

A seguir, tem-se um estudo de caso, onde se considera a espessura como sendo um parâmetro aleatório para 1% e 3% de incertezas. Para tal, tem-se a resposta determinística e a resposta pelo MEFÉ, Figura 5.28 (a) e a resposta por MEFÉ com o método EF, Figura 5.28 (b):

Figura 5. 28 - Envelope de solução para 1% de incertezas na espessura (a) MEFÉ versus resposta determinística (b) MEFÉ versus EF

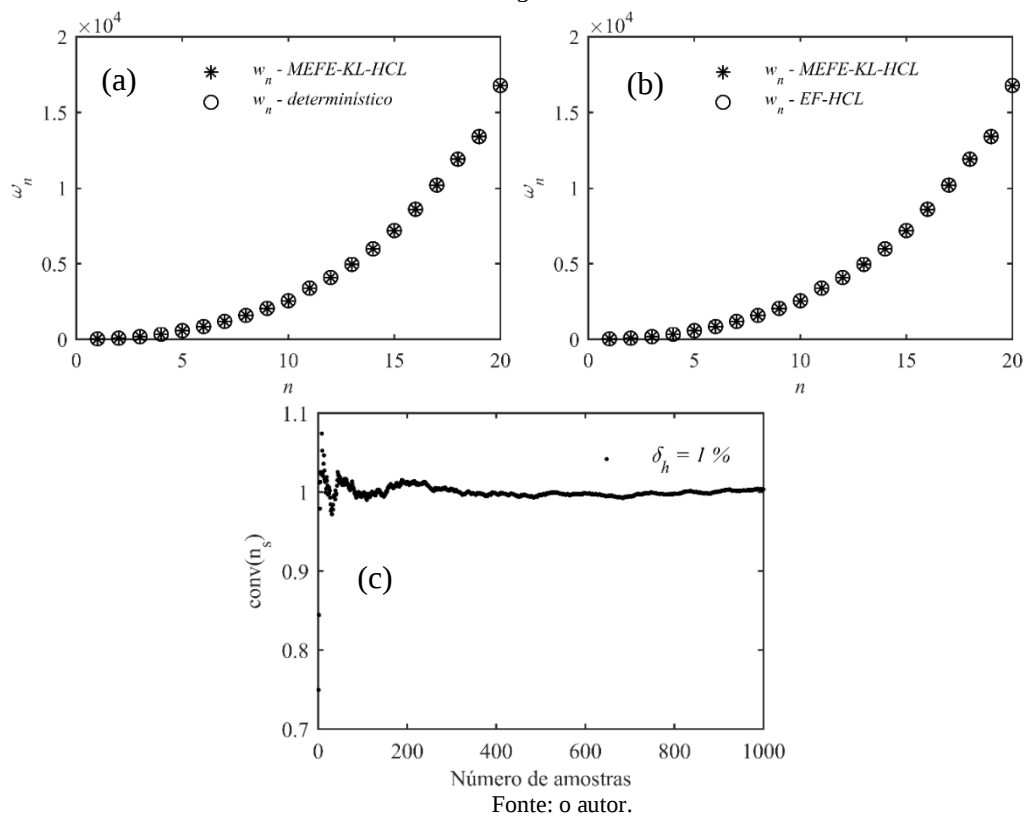


Fonte: o autor.

Na Figura 5.28 (a) é observado que a variável aleatória aqui considerada mostra-se mais sensível a fatores externos, uma vez que mesmo considerando uma incerteza pequena, 1%, as faixas estão se distanciando. Porém, em relação aos métodos utilizados tem-se uma grande proximidade nas respostas obtidas pelo MEFE e pelo EF.

Na Figura 5.29 (a) tem-se as frequências naturais obtidas pelos MEFE e a resposta determinística, na Figura 5.29 (b) MEFE comparados ao método EF e tem-se a convergência na Figura 5.29 (c):

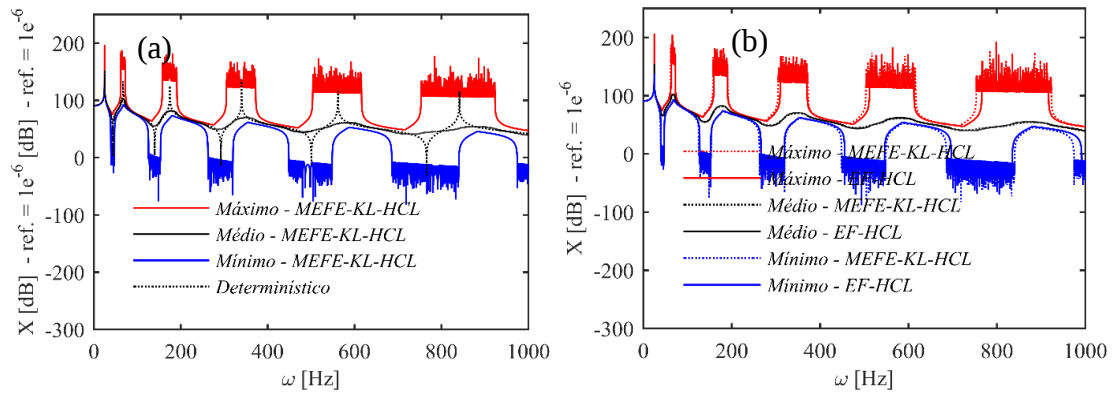
Figura 5. 29 - Comparação das frequências naturais (a) MEFE versus resposta determinística (b) MEFE versus EF e (c) análise de convergência do MEFE



Observa-se a proximidade das frequências naturais determinísticas com a obtida pelo MEFE, na Figura 5.29 (a), e pelo MEFE com o EF na Figura 5.29 (b), respectivamente.

A seguir, tem-se a consideração de 3% de incertezas, obtendo os seguintes envelopes de solução:

Figura 5. 30 - Envelope de solução para 3% de incertezas na espessura (a) MEFE versus resposta determinística (b) MEFE versus EF

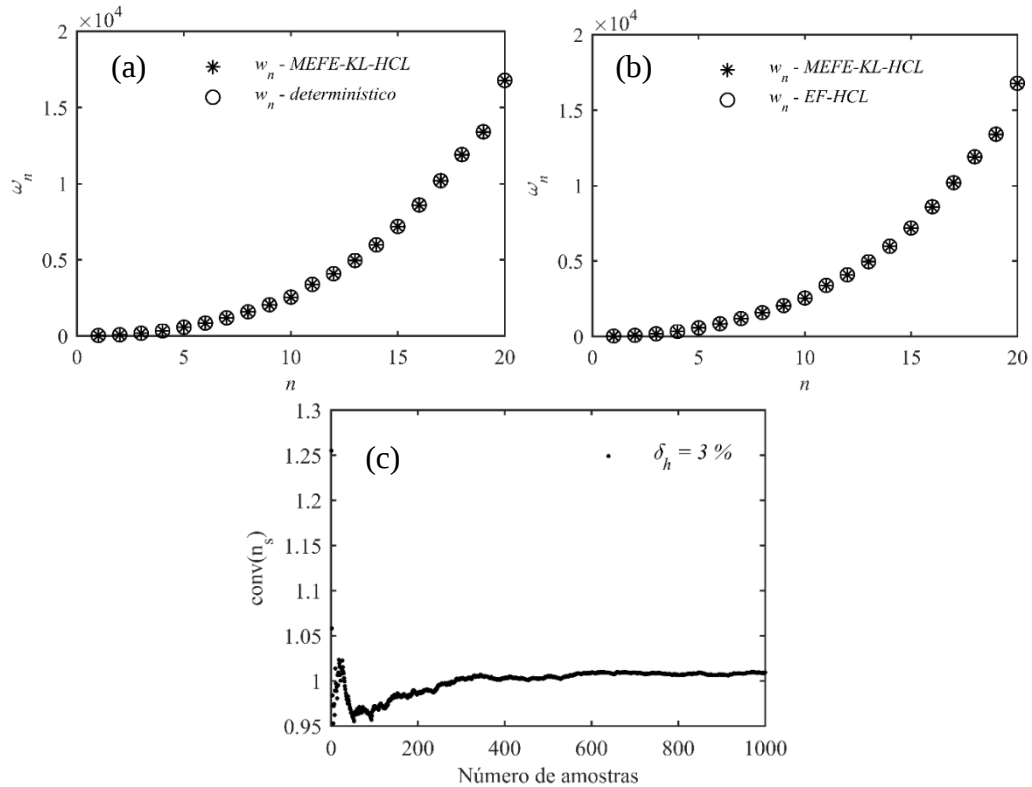


Fonte: o autor.

Na Figura 5.30, como esperado, tem-se que o aumento da incerteza ocasiona um aumento da dispersão da resposta (Figura 5.30 (a)) e, a resposta aleatória pelo MEFE com o EF também apresenta grande distanciamento entre as faixas de valores.

Na Figura 5.31 mostra-se o gráfico referente a análise da convergência e a comparação das frequências naturais:

Figura 5. 31 - Comparação das frequências naturais (a) MEFE versus resposta determinística (b) MEFE versus EF, (c) análise de convergência do MEFE



Fonte: o autor.

Conclui-se que, para a consideração de 3% de incertezas obteve-se frequências naturais muito próximas para ambos os métodos. Na Figura 5.31 (c) tem-se o número mínimo de amostras para a obtenção da convergência, sendo utilizado o mesmo número de amostras, isto é, 1000.

Conclui-se em relação aos métodos aqui considerados, que as respostas obtidas foram muito próximas, isto é, tanto pelo MEFE quanto o método EF apresentaram respostas similares a resposta determinística. Também, destaca-se a importância do cálculo do número de amostras para a obtenção da convergência onde em ambos os casos optou-se por utilizar 1000 amostras para a obtenção dos envelopes de solução. Além disso, a comparação entre as frequências naturais auxiliou nas conclusões obtidas dos métodos, mostrando que em ambos os casos descritos anteriormente as frequências foram muito próximas.

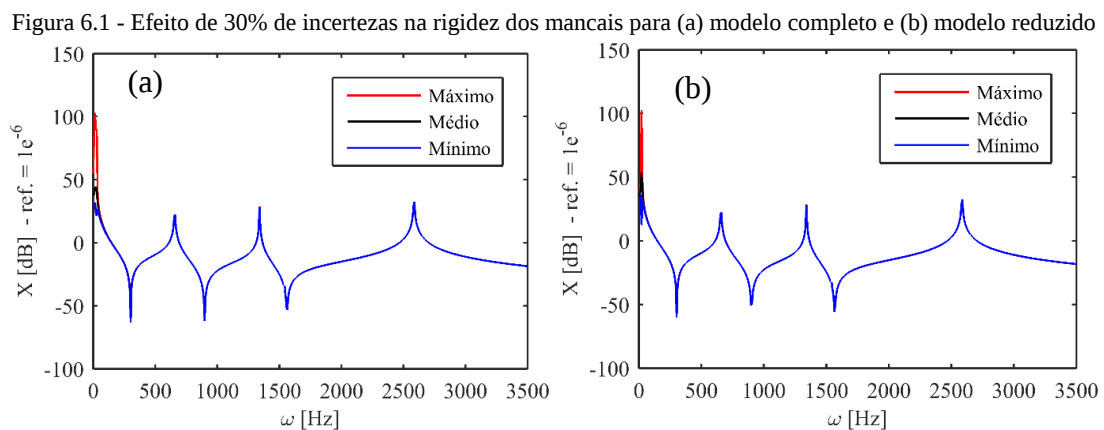
Capítulo 6

ESTUDO DE INCERTEZAS EM MÁQUINAS ROTATIVAS

O modelo determinístico nem sempre é o modelo ideal para descrever alguns sistemas mecânicos, neste caso faz-se necessário a utilização de um modelo estocástico para que se possa avaliar o efeito de incertezas no sistema. Neste sentido, será estudado o efeito de incertezas em parâmetros do rotor já visto no capítulo 3, através do método estocástico HCL. Visando uma economia no tempo computacional optou-se por utilizar o método de redução de modelos *IIRS*. Para tal, foi utilizado um notebook Windows 8.1 com processador Intel® Core™ i7-4510 CPU @ 2.00 GHz com uma memória RAM de 8 GB.

6.1 Estudo do Efeito de Incertezas nos Mancais do Rotor

O mancal tem a função de apoiar os rotores, absorver ou atenuar a energia vibratória e restringir os graus de liberdade durante a movimentação do eixo, sendo que este foi considerado como um parâmetro aleatório onde através do HCL são geradas 1000 amostras. Neste caso, tem-se dois mancais que estão aplicados nos nós 3 e 13, Figura 3.5, possuem os valores de rigidez de 49×10^3 N/m e 60×10^3 N/m. Considerando o efeito de 30% de incertezas obtêm-se os envelopes de solução dados pela Figura 6.1:



Na Figura 6.1 tem-se a ilustração do efeito de 30% de incertezas onde observou-se que mesmo com um valor alto de incertezas, os envelopes de solução mostraram-se próximos, também percebeu-se que o modelo reduzido demonstrou um comportamento semelhante ao do modelo completo. Na Tabela 6.1 é detalhado os valores do tempo computacional:

Tabela 6.1 - Valores do tempo do modelo completo e do reduzido		
Figuras	Tempo (s)	Porcentagem (%)
(a)	144660	100
(b)	72410	50

Fonte: o autor.

Nesta tabela, verifica-se que com a utilização do método de redução de modelo houve uma economia de 50% do tempo.

Com esta simulação, concluiu-se que os mancais, neste caso, não são sensíveis a consideração de incertezas uma vez que, mesmo considerando um valor relativamente alto de incertezas (30%), os valores extremos nos envelopes de solução mostraram-se próximos. Conclui-se que o método de redução utilizado mostrou-se de grande valia na redução do tempo computacional e será utilizado nas próximas simulações.

6.2 Construção do Modelo Probabilístico

O princípio da máxima entropia é uma técnica utilizada para a construção da função densidade de probabilidade, que consiste em maximizar a entropia, ou seja, a incerteza sujeita a restrições baseadas somente em informações disponíveis. A entropia representa a incerteza ou a falta de informação associada a uma possível distribuição de probabilidade de uma variável aleatória (SILVA, 2009).

De acordo com Shannon (1948), o princípio da máxima entropia estabelece que de todas as distribuições de probabilidade consistentes com as restrições impostas, escolhe-se aquela que tem incerteza (entropia) máxima.

Considerando uma variável aleatória k e a função densidade de probabilidade associada a esta variável $p_k(k)$, a medida de entropia é:

$$S(p_k) = - \int_{-\infty}^{\infty} p_k(k) \ln(p_k(k)) dk \quad (6.1)$$

Deseja-se respeitar as condições e maximizar a medida S , de acordo com o princípio deve-se usar apenas distribuições consistentes com as restrições especificadas podendo escolher apenas a que tem incerteza máxima (SAMPAIO; CATALDO, 2007).

As restrições mencionadas acima são informações adicionais sobre a variável aleatória, como a média e/ou a variância que podem ser calculadas por:

$$\int k^i p_k(k) dk = d_i \quad (6.2)$$

onde $i=0,1,2, \dots, n$, $d_0=1$, ou seja, é a própria distribuição de probabilidade e $d_i=1,2, \dots, n$ são os momentos estatísticos conhecidos.

$$\bar{S} = S + \sum_{i=0}^n \lambda_i \left[\int k^i p_k(k) dk - d_i \right] \quad (6.3)$$

Utiliza-se os multiplicadores de lagrange, eq. (6.3) para construir o funcional da densidade de probabilidade $p_k(k)$:

$$\delta \bar{S} = \int \left[-\ln(p_k(k)) - 1 + \sum_{i=0}^n \lambda_i k^i \right] \delta p_k(k) dk = 0 \quad (6.4)$$

A eq. (6.4) fornece a seguinte expressão para a mais provável função densidade de probabilidade da variável aleatória k :

$$p_k(k) = \exp \left[-1 + \sum_{i=0}^n \lambda_i k^i \right] \quad (6.5)$$

Na eq. (6.5), os multiplicadores de lagrange são obtidos através das equações das restrições impostas pelos momentos estatísticos.

6.2.1 Parâmetro diâmetro do elemento de viga (d)

Em todas as simulações que seguem, foi utilizado o método IIRS para a redução do modelo de elementos finitos. Na primeira simulação realizada, considerou-se a rigidez dos dois mancais como sendo valores aleatórios onde foram obtidos os envelopes de solução e, assim,

foi possível realizar uma análise sobre a influência de se considerar um valor de incerteza nestes parâmetros, percebendo que os mancais não são sensíveis a fatores externos. Logo, nas simulações seguintes será considerado o elemento de viga como sendo um parâmetro aleatório. Ressalta-se que o rotor em questão possui 14 elementos de viga (eixo) e 10 discos e, os valores desses parâmetros, a saber, diâmetro do elemento de viga e diâmetro do disco, foram descritos na Tabela 3.1, e estão representados na Fig. 3.5.

A priori, tem-se a obtenção do modelo probabilístico para o parâmetro diâmetro do elemento de viga, onde é imposto as seguintes restrições (VICENTE, 2014):

- i) Admite valores no intervalo $]0, +\infty[$;
- ii) a média é conhecida $E[D] = \bar{D}$.

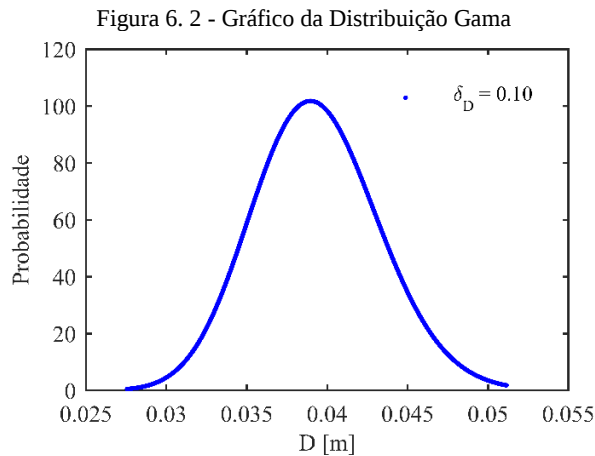
Resolvendo a eq. (6.5) e impondo as restrições descritas acima na forma da eq. (6.2) é obtido a função de probabilidade:

$$p_D(d) = 1_{]0, +\infty[(d)} \frac{1}{\bar{D}} \left(\frac{1}{\delta_D^2} \right)^{\frac{1}{\delta_D^2}} \frac{1}{\left(\frac{1}{\delta_D^2} \right) \Gamma} \left(\frac{d}{\bar{D}} \right)^{\frac{1}{\delta_D^2}-1} \exp \left[-\frac{d}{\delta_D^2 \bar{D}} \right] \quad (6.6)$$

Na eq. (6.6), o parâmetro δ_D consiste na dispersão do parâmetro d dado por $\delta_D = \sigma_D / \bar{D}$ e $\Gamma(Z)$ é a função Gama que é expressa por:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt \quad (6.7)$$

A função Gama possui parâmetros α e β onde $\alpha = 1/\delta_D^2$ e $\beta = \bar{D}\delta_D^2$. Logo, utilizou-se a função do Matlab® GAMPDF (α, β) para obter o gráfico da distribuição:



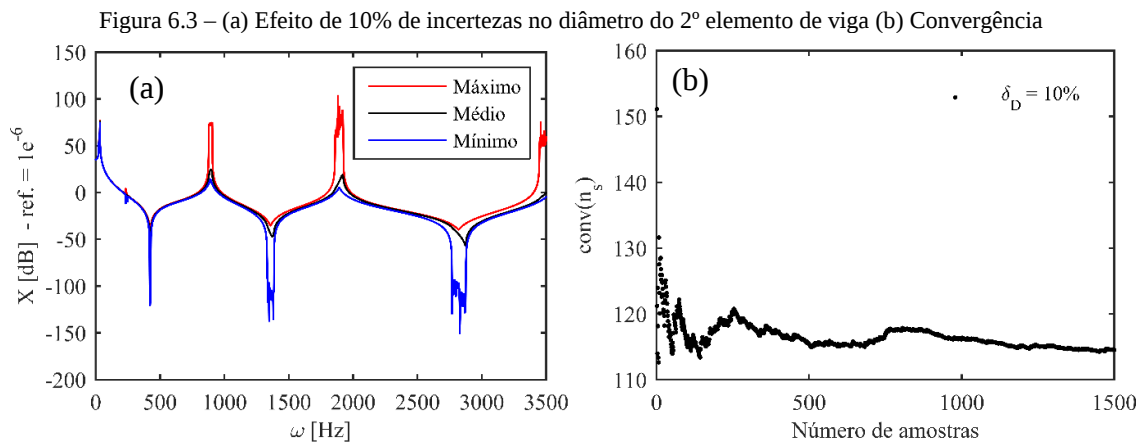
Uma vez, obtido o modelo probabilístico para o diâmetro do elemento de viga deve-se analisar o número mínimo de amostras necessário para a obtenção da convergência das respostas estocásticas. Para isto, é utilizado o método dos mínimos quadrados para obter a função:

$$conv(n_s) = \frac{1}{n_s} \sum_{j=1}^n \|H_j(\omega, \theta) - H(\omega)\|^2 \quad (6.8)$$

Na eq. (6.8), $H(\omega)$ é referente a função resposta em frequência para o sistema determinístico e $H(\omega, \theta)$ corresponde a resposta estocástica. Destaca-se que na função densidade de probabilidade gama, utilizou-se os parâmetros $\alpha=100$ e $\beta=3,93 \times 10^{-4}$, e para a avaliação da função de convergência ressalta-se a utilização de 1500 amostras.

6.2.1.1 Efeito de incertezas nos diâmetros do elementos de viga

Nesta primeira simulação será considerado o diâmetro do segundo elemento de viga como sendo um parâmetro aleatório. Para essas simulações foi utilizado o método de redução de modelos *IIRS* já que o mesmo se mostrou adequado na redução do tempo computacional. Com isso, serão utilizadas 1500 amostras pelo método HCL para obter os envelopes de solução, Figura 6.3 (a) e o número de amostras necessárias para a obtenção da convergência é mostrado na Figura 6.3 (b):



Observa-se que as faixas de valores se distanciam, Figura 6.3 (a), isto é, ao se considerar uma incerteza de 10% percebe-se que este foi um parâmetro sensível. Em relação a Figura 6.3

(b) tem-se a análise da convergência para essa simulação onde percebe-se que são necessárias pelo menos 1000 tiragens para se chegar a convergência.

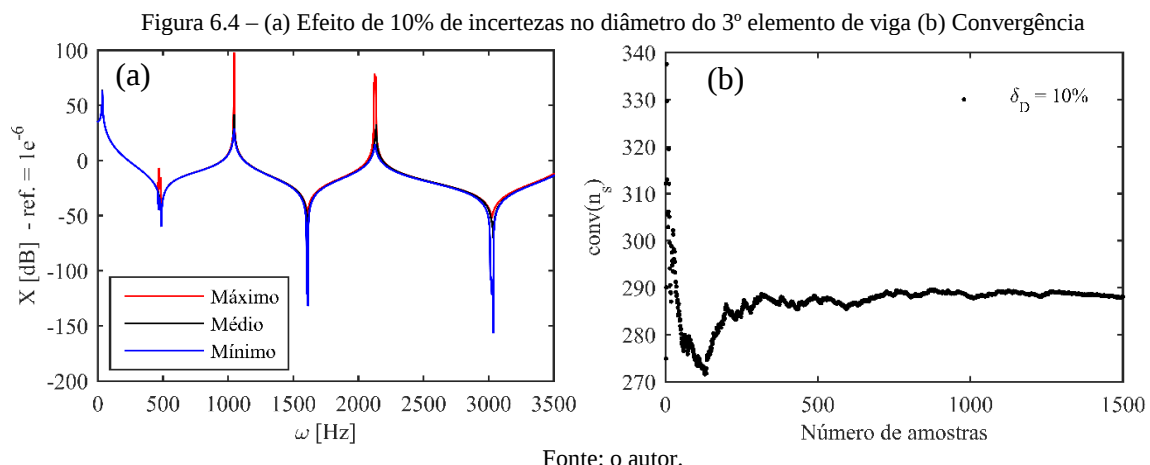
Na Tabela 6.2 é ilustrado o desvio-padrão:

Tabela 6.2 - Valor do desvio-padrão

Desvio-Padrão
19.6569
Fonte: o autor.

Analisa-se o valor do desvio-padrão descrito na Tabela 6.2, concluindo que tem-se um valor relativamente alto, confirmando o apresentado na Figura 6.3 (a).

A seguir, é considerado o diâmetro do terceiro elemento de viga como sendo um parâmetro aleatório, para tal, considera-se 10 % de incertezas, obtendo o seguinte envelope de solução:



Na Figura 6.4, as faixas de valores (máximo, médio e mínimo) mostram-se mais próximas que o caso descrito anteriormente (Figura 6.3). Em relação a análise de convergência notou-se que é necessário um número mínimo de 1000 amostras para a obtenção da convergência.

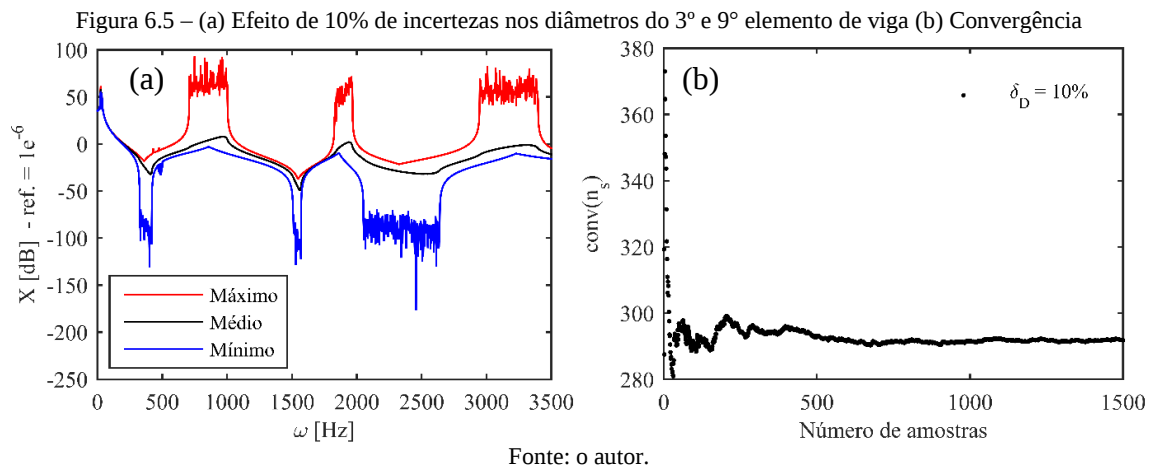
O valor calculado do desvio-padrão está descrito na Tabela 6.3:

Tabela 6.3 - Valor do desvio-padrão

Desvio-Padrão
9.2386
Fonte: o autor.

Para a simulação considerada, conclui-se pelo valor do desvio-padrão que as faixas de valores estão mais próximas em comparação ao resultado obtido no caso anterior, visto que, neste caso, tem-se uma menor dispersão.

Na Figura 6.5 tem-se o efeito de 10% de incertezas no diâmetro do terceiro e nono elemento de viga, obtendo o seguinte envelope de solução:



Na Figura 6.5 (a) é observado uma grande sensibilidade desses parâmetros aos fatores externos, isto é, a consideração de incertezas pois, é visivelmente verificado que as faixas de valores estão distantes e ainda há presença de ruídos. Já a Figura 6.5 (b) mostra a convergência obtida neste caso, logo, para este problema, são necessárias em torno de 1000 amostras para a obtenção da convergência.

Na Tabela 6.4 é ilustrado o valor do desvio-padrão:

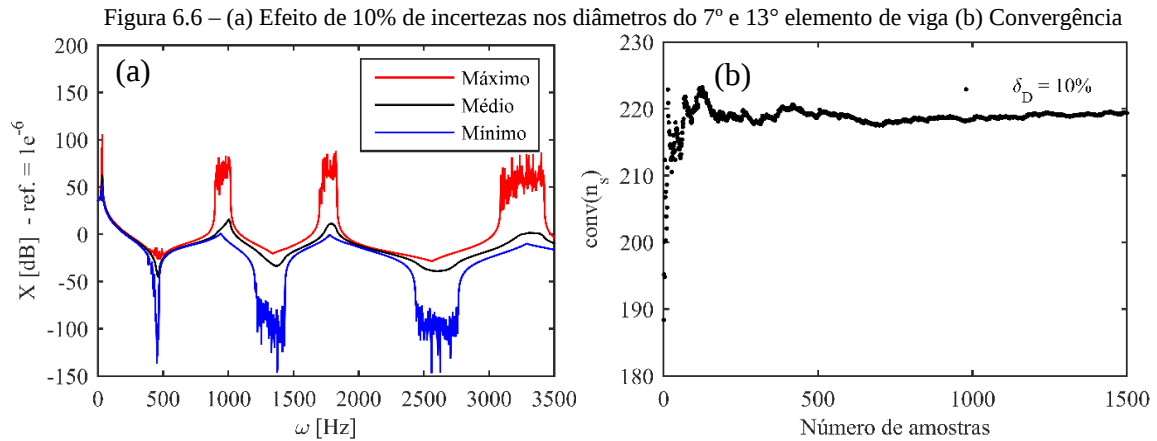
Tabela 6.4 - Valor do desvio-padrão

Desvio-Padrão
30.7819

Fonte: o autor.

A Tabela 6.4 mostra que neste caso foi obtido um valor alto para o desvio-padrão, ou seja, há uma grande sensibilidade aos fatores externos (incertezas).

E, por último tem-se o efeito de 10% de incertezas nos diâmetros do sétimo e no décimo terceiro elemento de viga, Figura 6.6:



Na Figura 6.6 (a) observa-se que as faixas de valores (máximo, médio e mínimo) mostram-se distantes, isto é, os parâmetros são sensíveis a consideração de incertezas. Na Figura 6.6 (b) é ilustrado a análise de convergência para o diâmetro de sétimo elemento de viga e do décimo terceiro elemento de viga. Percebe-se que o número de tiragens necessárias para a obtenção da convergência está próximo a 1000 amostras.

Na Tabela 6.5, é apresentado o valor do desvio-padrão.

Tabela 6.5 - Valores do desvio-padrão

Desvio-Padrão
29.9510

Fonte: o autor.

As simulações descritas apresentaram um estudo preliminar dedicado à análise das incertezas nos parâmetros de um rotor flexível. Empregou-se o método estocástico Hipercubo Latino, foi obtida a resposta no domínio da frequência com a presença de incertezas nos parâmetros do modelo. Em consonância, a utilização de modelos reduzidos proporcionou boa representatividade e custo computacional baixo e, consequentemente, grande economia de tempo, para isto, foi reduzido utilizando o método *IIRS*. Assim, as incertezas nas variáveis de projeto que caracterizam o rotor flexível foram inseridas para diferentes casos de estudo que mostram que os envelopes das respostas conduzem a importantes informações referentes à influência da variação desses parâmetros no comportamento dinâmico do rotor em questão.

Capítulo 7

INTRODUÇÃO A OTIMIZAÇÃO

A Otimização é definida pela busca da melhor solução associada a um referido processo, enquanto certas restrições são satisfeitas. Assim, a otimização pode ser caracterizada como a determinação da melhor configuração de um projeto de um dado sistema, sem precisar testar todas as possibilidades (VANDERPLAATS, 1998).

A Otimização ainda pode ser dividida em clássica que é baseada nos métodos do cálculo diferencial e integral e em Evolutiva (ou Heurística) onde as técnicas são fundamentadas em conceitos biológicos e processos naturais (RODOVALHO, COSTA, 2012).

Os métodos da Otimização Evolutiva estão dentro da computação bioinspirada, que é fundamentada em conceitos biológicos e conceitos computacionais evolutivos. Dentre as técnicas evolutivas destaca-se o método Algoritmo Genético, Simulated Annealing, Colônia de Abelhas, Colônia de Vagalumes, dentre outros.

7.1 Otimização MultiObjetivo Determinístico

Um problema de otimização é dito mono-objetivo se este possui um único objetivo, porém, na maioria dos problemas reais tem-se mais de um critério a ser otimizado, logo, tem-se duas ou mais funções objetivos, isto é, há um problema de otimização multiobjetivo.

Para a resolução dos problemas multiobjetivos pode-se utilizar algoritmos fundamentados em população, uma vez que, é obtido a Curva de Pareto em uma única execução, ao contrário dos métodos clássicos que necessitam de várias execuções (DEB, 2001).

Dentre as técnicas evolucionárias destaca-se a técnica intitulada de VEGA que foi a primeira técnica a ser implementada para a resolução de problemas multiobjetivos (SCHAFFER, 1984).

Há uma grande quantidade de métodos de otimização multiobjetivos que utiliza do conceito de dominância. Ao contrário dos problemas mono-objetivos onde pode-se determinar matematicamente a solução, no multiobjetivo não há uma definição da solução e sim um

entendimento (conceito) desta, este conceito é conhecido como Postulado de Pareto (MOREIRA, 2015).

Neste postulado, diz-se que no problema multiobjetivo um vetor é Ótimo de Pareto se não existe outro vetor viável que possa melhorar algum objetivo, sem causar uma piora em pelo menos um objetivo, isto é, diz-se que uma solução é ótima de Pareto se ela não é dominada por nenhuma outra solução possível, logo, o conjunto de soluções ótimas é chamado de Fronteira de Pareto (BIGOT, 2015).

Assim, as soluções de Pareto estão diretamente relacionadas com a noção de dominância, deste modo, as soluções de Pareto são também conhecidas como soluções admissíveis não dominadas e inferiores (BORGES, 2008).

Segundo Deb (2001) o espaço de objetivo é composto pelo conjunto de pontos dominados e pelos pontos não dominados, com algumas propriedades, qualquer ponto do conjunto deve ser dominado por pelo menos um ponto do conjunto de pontos não dominados e nenhum ponto do conjunto de pontos não dominados é dominado por outro ponto do conjunto de pontos não dominados.

Além da determinação do conjunto de soluções, tem-se a necessidade da escolha da solução ótima que é feita de pelo projetista, que deve ter pleno conhecimento do problema (BORGES, 2008).

Logo, faz-se necessário primeiramente definir o problema multiobjetivo determinístico que é definido por:

$$\begin{cases} \min F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \\ g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \\ x_L \leq x \leq x_U \end{cases} \quad (7.1)$$

Na eq. (7.1), as variáveis de projeto são expressas por $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $g_j(x)$ são as restrições de igualdade ou desigualdade, x_L e x_U representam as restrições laterais e, $F(x)$ representam as funções objetivos a serem minimizadas ou maximizadas.

Uma vez que, deseja-se considerar as possíveis incertezas inerentes aos sistemas é preciso definir o problema de otimização robusta.

7.2 Otimização MultiObjetivo Robusta

Os métodos de otimização multiobjetivo robusto consideram as incertezas sobre as variáveis de projeto e sobre as funções objetivo, ou seja, tem o mesmo princípio da otimização determinística, porém neste caso, tem-se a consideração das incertezas.

Uma vez que, os problemas mostrem uma sensibilidade à incerteza ou a fatores externos, ao se considerar a robustez são obtidas soluções que serão pouco sensíveis a essas variações que são chamadas de robustas e o procedimento para encontra-las é denominado de Otimização Robusta, isto é, no problema de otimização não somente é encontrado o ótimo mais sim o ótimo robusto (MOREIRA, 2015).

Uma metodologia para trabalhar com esse tipo de problema de Otimização foi proposta por Taguchi (1984) e, é encontrado no trabalho de Borges (2008). Essa metodologia descreve a utilização de uma função de robustez que é baseada na consideração da média e do desvio-padrão da função objetivo original, sendo considerada como uma função objetivo adicional que será otimizada juntamente com a função objetivo original.

A função de robustez (f_r) de uma função objetivo $f(x)$ é definida pela média (μ) e pelo desvio-padrão (σ) expressa por:

$$f_r = \left(\sigma_f / \mu_f \right)^{-1} \quad (7.2)$$

onde σ_f / μ_f é a medida de dispersão ou vulnerabilidade da função objetivo que é denominada por $f'(x)$.

Logo, tem-se um problema de otimização multiobjetivo robusto que é expresso por:

$$\begin{cases} \min F^*(x) = (f_1(x), f_1^v(x), f_2(x), f_2^v(x), \dots, f_n(x), f_n^v(x)) \\ g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \\ x_L \leq x \leq x_U \end{cases} \quad (7.3)$$

As soluções robustas são aquelas que permitem minimizar simultaneamente as funções objetivos e maximizar a sua robustez ou minimizar a vulnerabilidade.

Para a consideração das incertezas sobre as variáveis de projeto pode-se utilizar do

método estocástico chamado de Monte Carlo (MC) ou a sua variante chamada de Hipercubo Latino (HCL) descritos no capítulo 4.

7.2.1 Nondominated sorting genetic algorithm (NSGA)

Baseado na técnica original proposta por Goldberg (1989), o NSGA (Srinivas, Deb, 1993) é um baseado nos Algoritmos Genéticos que se distingue unicamente pela forma que o operador de seleção é empregado. O algoritmo é baseado no conceito de dominância de Pareto e utiliza-se de um método específico de seleção por ordenamento chamado *ranking* para classificar as soluções não dominadas e incorpora um procedimento direcionado a criação de nichos para assegurar a diversidade da população.

A utilização de uma função de nicho sobre o espaço de soluções apresenta a vantagem de manter uma grande diversidade na população, viabilizando uma partição mais eficaz das soluções sob o *front* de Pareto. Além disso, o método NSGA pode ser aplicado a problemas com um número qualquer de objetivos (Srinivas e Deb, 1993; Borges, 2008).

7.2.1.1 Funcionamento do método

Gerada aleatoriamente uma população inicial de potenciais soluções, antes da aplicação do operador de seleção, a população é ordenada de acordo com o nível de não dominância, de forma que todas as soluções não dominadas da população atual recebem altos valores de aptidão. Estes valores de aptidão são iguais para todos os indivíduos não dominados, garantindo um mesmo potencial reprodutivo. A diversidade é assegurada pelo compartilhamento, por parte das soluções não dominadas, de seus valores de aptidão em termos das distâncias euclidianas às soluções não dominadas. A coexistência de múltiplos pontos ótimos na população é viabilizada pela divisão do valor de aptidão de cada indivíduo pelo contador de nichos que é proporcional ao número de indivíduos na vizinhança.

Posterior a realização do compartilhamento e a modificação das aptidões, o pior valor de aptidão compartilhado é alocado para uso seguinte e os indivíduos não dominados são ignorados temporariamente para o processamento dos demais membros da população. Novas soluções não dominadas são então determinadas, estabelecendo-se agora, valores de aptidão menores que o pior valor de aptidão compartilhada no nível anterior. Uma vez mais o

compartilhamento é realizado entre as soluções não dominadas e novas aptidões são estimadas. Os procedimentos de compartilhamento entre as soluções não dominadas e o cálculo de novas aptidões são executados até que todos os membros da população tenham um valor de aptidão compartilhada, garantindo que todas as soluções se submetam ao processo evolutivo.

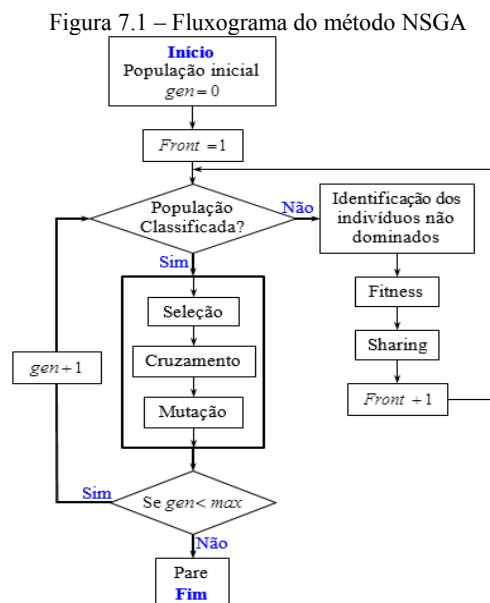
A reprodução da população é feita com base na aptidão compartilhada. Assim, como o primeiro nível de soluções não dominadas possui as maiores aptidões, assegura-se que um número maior de cópias destes indivíduos será realizado, conduzindo o processo de busca à fronteira ótima de Pareto. Além disso, com a introdução da técnica de formação de nichos (*niching*), os valores da função de adaptação são distribuídos segundo a seguinte função de nicho (*sharing*) (Borges, 2008; Lima, 2007):

$$\left\{ sh(d(x_i, x_j)) = \begin{cases} 1 - d(x_i, x_j)/\Theta & \text{se } d(x_i, x_j) < \Theta \\ 0 & \text{se } d(x_i, x_j) \geq \Theta \end{cases} \right. \quad (7.4)$$

onde:

- sh é a função de nicho;
- Θ é uma constante estabelecida a priori definindo o intervalo de nicho;
- $d(x_i, x_j)$ é a distância euclidiana entre os dois indivíduos x_i e x_j .

Na Figura 7.1 é ilustrado a estratégia de implementação do NSGA:



Fonte. o autor.

Neste fluxograma, pode ser verificado que após a definição da função fitness, utiliza-se

operações do Algoritmo Genético como a seleção, o cruzamento e a mutação.

7.2.2 Algoritmo de otimização colônia de Vagalumes multiobjetivo (CVM)

Os algoritmos para o tratamento de problemas de otimização são geralmente baseados no comportamento social dos animais dentre eles, destaca-se o algoritmo bioinspirado na característica de bioluminescência dos vagalumes, insetos coleópteros autoorganizáveis, luminosamente auto emissivos.

O método Colônia de Vagalume (CV) foi proposto por Xin-She Yang na Universidade de Cambridge em 2007 e vem sendo exaustivamente estudado e aplicado em problemas de otimização. Logo, para o tratamento de problemas multiobjetivos robustos é utilizado um algoritmo baseado no CV.

Para o vagalume a bioluminescência é uma ferramenta utilizada na sua comunicação, servindo como isca para eventuais presas, como uma ferramenta de defesa, pois é um sinal de alerta a possíveis predadores e para atrair parceiros na reprodução.

O CV é baseado principalmente na atração dos possíveis parceiros para reprodução, onde existem três regras simples para o funcionamento do algoritmo (MOREIRA, 2015): (1) os vagalumes não possuem sexo, assim qualquer vagalume pode atrair ou ser atraído; (2) a atratividade é proporcional ao brilho emitido e decai conforme a distância entre os vagalumes aumenta e (3) o brilho emitido por um vagalume é determinado pela sua avaliação frente à função objetivo, quanto melhor avaliado, mais brilhante.

Segundo Lobato, Moreira e Steffen Jr. (2013) no problema de otimização o brilho que é emitido pelos vagalumes pode ser interpretado como uma forma de relacionar a posição do vagalume com a localização do ótimo global, assim, o vagalume com maior intensidade de brilho tem mais chance de estar localizado no ponto ótimo.

Então, o CV é descrito por equações que modelam a atratividade, a luminosidade e a movimentação em relação à distância. A intensidade de emissão de luz de um vagalume é proporcional à função objetivo que decai em função da distância entre os vagalumes, devido à absorção de luz pelo meio, deste modo, a intensidade percebida por um vagalume é:

$$I(r) = I_0 e^{-\gamma r^2} \quad (7.5)$$

onde, r é a distância Euclidiana entre os vagalumes i e j , I_0 é a intensidade de luz emitida, γ é o coeficiente de absorção de luz no meio.

A Equação (7.6) é a atratividade sofrida por um vagalume, responsável pela aproximação dos vagalumes onde β_0 é a atratividade em $r=0$ e pode ser fixo em $\beta_0=1$;

$$\beta(r) = \beta_0 e^{-\gamma r^2} \quad (7.6)$$

Segundo Moreira (2015) para o ordenamento das soluções é preferível às soluções não dominadas em relação às dominadas onde é realizada a avaliação dos indivíduos e é realizado o ordenamento por rank.

Para um vagalume específico é calculado o coeficiente de atratividade que é função da aptidão, que neste caso é o brilho emitido, baseado no rank de cada vagalume observado.

O vagalume com maior coeficiente de atratividade é selecionado para o vagalume x_i se movimente em sua direção, ou seja, é a movimentação em um dado passo de tempo t do vagalume i em direção ao melhor vagalume j , em termos da função objetivo, que é definida por:

$$x_i^t = x_i^{t-1} + \beta(x_j^{t-1} - x_i^{t-1}) + \alpha \left(rand - \frac{1}{2} \right) \quad (7.7)$$

Na eq. (7.7) o segundo termo do lado direito da equação insere o fator de atratividade β enquanto no terceiro termo o parâmetro α insere certa aleatoriedade no caminho percorrido pelo vagalume e, $rand$ é um número aleatório entre 0 e 1.

Yang (2008) cita que um vagalume não necessariamente segue o vagalume mais brilhante mais sim aquele que é mais atrativo a ele, fazendo com que haja uma maior diversidade na população dos vagalumes.

Para a resolução de problemas de otimização multiobjetivo robustos utiliza-se um algoritmo baseado no CV. De maneira geral, na execução desse algoritmo aqui definido por Colônia de Vagalumes Multiobjetivo (CVM) emprega-se os seguintes operadores (MOREIRA, 2015):

- Definição da função robustez que é realizada de forma análoga ao do método NSGA, que utiliza-se da média e do desvio-padrão da função objetivo original;
- Geração da população inicial;
- Ordenamento:
 - As soluções não dominadas são preferíveis as dominadas, isto é, a classificação das soluções é baseada no critério de não dominância por meio do rank;

- Seleção e movimentação
 - Para cada vagalume da população, calcular o vagalume que lhe é mais atrativo com base no rank e na distância entre os vagalumes;
 - Gerar outros vagalumes que são adicionados a população;
- Perturbação:
 - O operador de perturbação do CVM tem a função de realizar pequenos deslocamentos nos vagalumes e explorar a vizinhança.

7.3 Projeto Ótimo Robusto de um Sistema Rotativo

Neste capítulo, será empregado o procedimento de otimização multiobjetivo robusto na busca do valor ótimo do sistema rotativo estudado no capítulo 3. O problema robusto é composto por duas funções objetivo, a primeira referente a amplitude da função resposta em frequência onde tem-se o interesse na minimização da mesma e, a segunda função consiste na minimização da função vulnerabilidade, resultando no seguinte problema de otimização:

$$\min \begin{cases} f_1 = \textit{Amplitude} \\ f_1^v = (\sigma_1/\mu_1) \end{cases} \quad (7.8)$$

Para o problema de otimização, considerou-se o diâmetro do elemento de viga como sendo uma variável de projeto, uma vez que, verificou-se a sensibilidade na consideração de incertezas nestes parâmetros, descritos no capítulo 6.

Os parâmetros do NSGA usados no processo de otimização estão dispostos na Tabela 7.1:

Tabela 7. 1– Definição dos parâmetros do método NSGA

NSGA	
Probabilidade de seleção	0,25
Probabilidade de cruzamento	0,25
Probabilidade de mutação	0,25
Número de gerações	50
Número de indivíduos	100
Coeficiente de Sharing	0.2

Fonte: o autor.

Ressalta-se que para a obtenção das soluções ótimas robustas utilizou-se o método de simulação Hipercubo Latino, onde são geradas 500 amostras para a variável de projeto que são

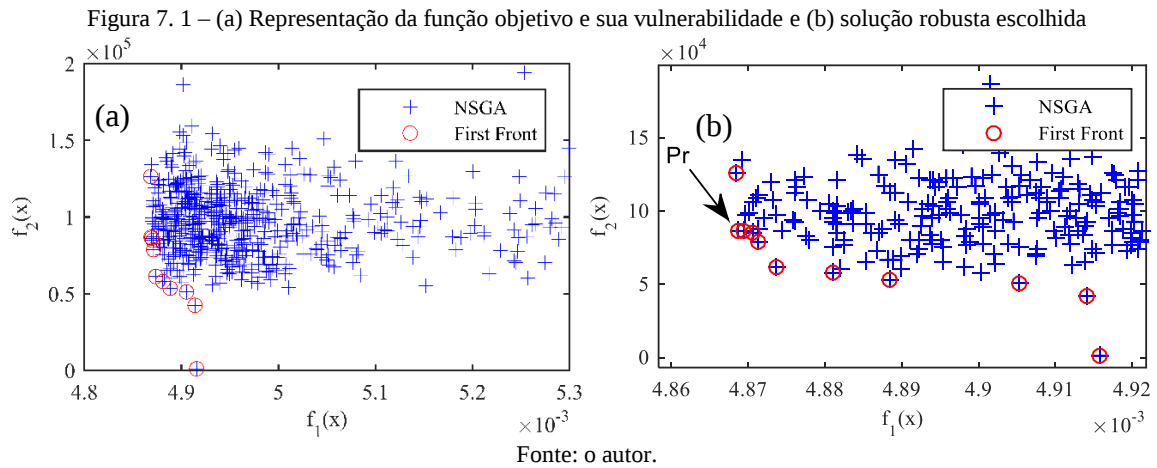
usadas para o cálculo das funções de vulnerabilidade, esta tem a finalidade de minimizar as dispersões ao redor de cada solução robusta encontrada.

Então, no primeiro problema de otimização considera-se o diâmetro do segundo elemento de viga chamado de (d_2), logo, a variável de projeto e seu valor nominal (inicial) estão dispostas na Tabela 7.2:

Tabela 7. 2 – Definição da variável de projeto		
Variável	Valor inicial	Variação
d_2	0.03935	10%

Fonte: o autor.

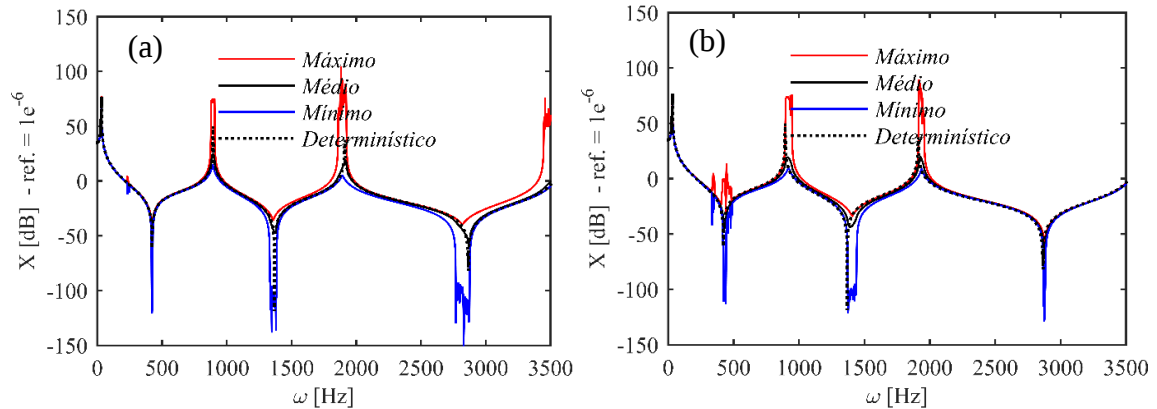
Na Figura 7.1 são apresentados os resultados provenientes da otimização robusta em termos da função objetivo e da função vulnerabilidade para o caso em questão.



Na Figura 7.1 é mostrado a Curva de Pareto para o problema multiobjetivo apresentado. O intuito dessa curva é fornecer a solução do problema levando em consideração as duas funções objetivo. Nesta solução, pode-se escolher a solução que satisfaça o projeto em questão. Assim, na Figura 7.1 (b) é ilustrado o ponto ótimo escolhido chamado de Pr.

Para verificar a robustez da solução ótima escolhida utiliza-se a geração de 1500 amostras pelo método HCL considerando a dispersão de 10% assim, é obtido o envelope de solução em termos da função resposta em frequência mostrado na Figura 7.2:

Figura 7. 2 – Envelope de solução (a) valor inicial versus resposta determinística e (b) ótimo robusto versus resposta determinística



Fonte: o autor.

Observa-se que ambos os casos considerados os envelopes obtidos considerando uma porcentagem de incerteza pelo método HCL, Figura 7.2 (a) e considerando o valor ótimo robusto, Figura 7.2 (b) estão próximas da resposta determinística.

A Tabela 7.3, mostra o valor inicial (nominal) da variável de projeto d_2 e valor ótimo e seus respectivos valores do desvio-padrão:

Tabela 7. 3 – Valor inicial e Valor ótimo		
Variável	Valor inicial	Ótimo robusto
d_2	0.03935	0.06
Desvio-Padrão	19.6569	16.6860

Fonte: o autor.

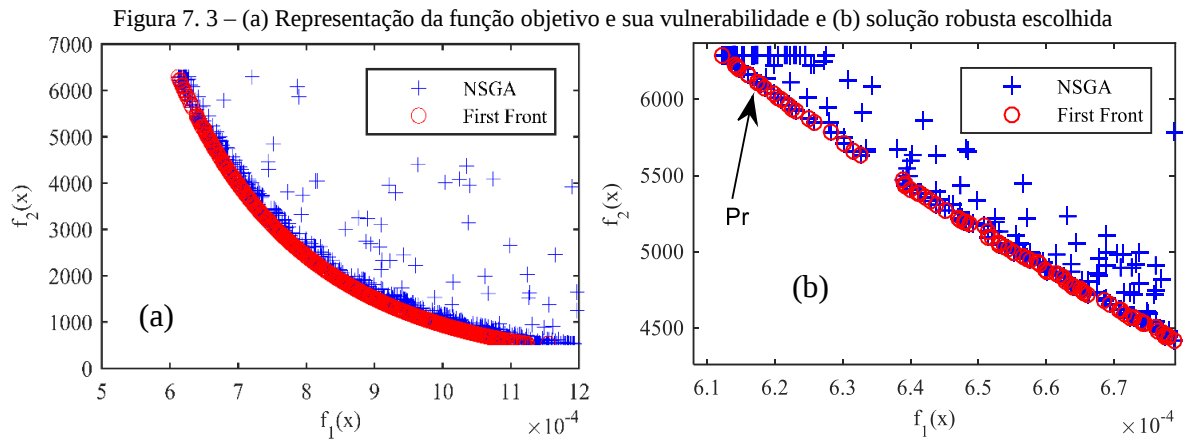
Percebe-se que neste caso houve uma sensibilidade a consideração de incertezas, uma vez que para ambos os casos considerou a mesma incerteza (10%) sendo que através dos valores do desvio-padrão, Tabela 4.3, observa-se que no caso robusto tem-se um desvio-padrão menor.

Considera-se agora duas variáveis de projeto, a saber, o diâmetro do terceiro e do nono elemento de viga, chamado de (d_3 e d_9), logo, as variáveis de projetos e seus valores iniciais estão dispostas na Tabela 7.4:

Tabela 7. 4 – Definição das variáveis de projetos		
Variável	Valor Nominal	Variação
d_3	0.03935	10%
d_9	0.0215	10%

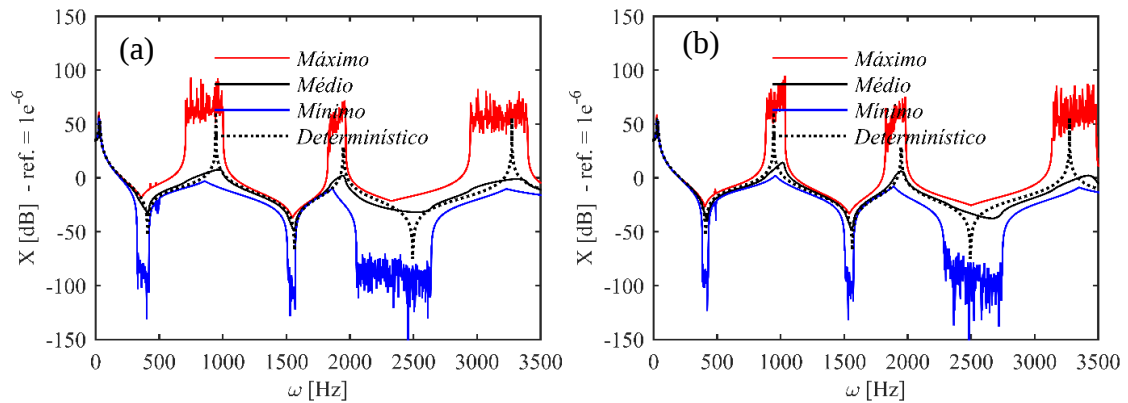
Fonte: o autor.

Na Figura 7.3 é mostrado a curva de Pareto para este caso:



Esta figura ilustra a Curva de Pareto para o problema de otimização em questão, Figura 7.3 (a) e a solução ótima escolhida, Figura 7.3 (b) assim, são obtidos os envelopes de solução para as FRFs da solução inicial e da solução robusta ilustrada na Figura 7.4:

Figura 7.4 – Envelope de solução (a) valor inicial versus resposta determinística e (b) ótimo robusto versus resposta determinística



Na Figura 7.4 (a) tem-se o valor inicial, isto é, sem otimização e na Figura 7.4 (b) tem-se o ótimo robusto. Percebe-se que nos dois casos considerados foi apresentada sensibilidade a consideração de incertezas.

A Tabela 7.5 descreve o valor escolhido do ponto ótimo para as duas variáveis de projeto e o valor do desvio-padrão para o valor inicial e para o valor do ótimo robusto.

Tabela 7. 5 – Valor inicial e Ótimo robusto

Variável	Valor inicial	Ótimo robusto
d_3	0.03935	0.0276
d_9	0.0215	0.0279
Desvio-Padrão	30.7819	28.3655

Fonte: o autor.

Utiliza-se a comparação dos valores do desvio-padrão dados na Tabela 7.5, estes valores mostram que no problema de otimização considerado, tem-se uma maior sensibilidade as perturbações introduzidas, ou seja, mesmo inserindo incertezas, a solução robusta apresentou uma menor dispersão que a solução inicial.

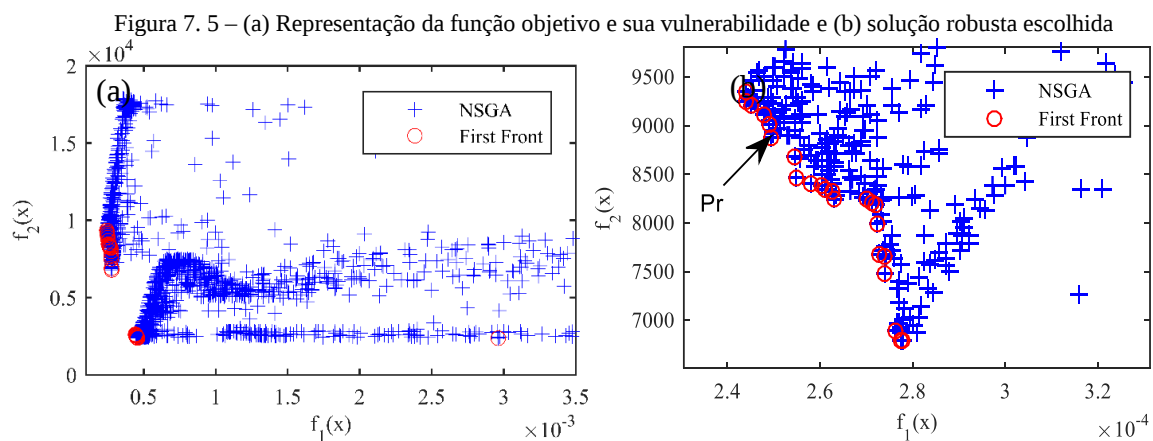
Em um próximo estudo de caso, as variáveis de projeto no problema de otimização são os diâmetros do sétimo e do décimo terceiro elemento de viga (d_7 e d_{13}), os valores iniciais para o caso em questão estão descritos na tabela a seguir:

Tabela 7. 6 – Definição das variáveis de projetos

Variável	Valor Nominal	Variação
d_7	0.03935	10%
d_{13}	0.0395	10%

Fonte: o autor.

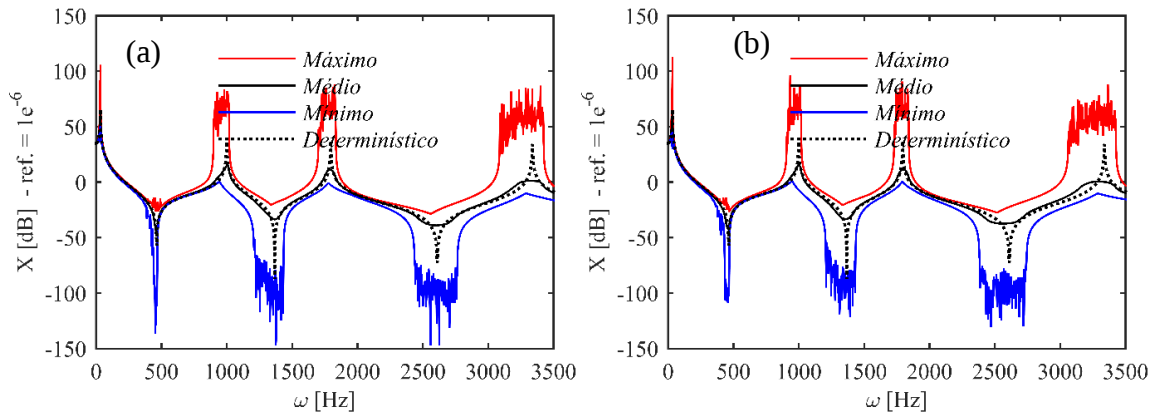
A Figura 7.5 mostra os resultados da otimização robusta pelo método NSGA onde é apresentada a função objetivo e sua vulnerabilidade:



Fonte: o autor.

Considerando a Curva de Pareto, Figura 7.5 (a) tem-se a escolha da solução, Figura 7.5 (b) onde é então obtidos os seguintes envelopes de solução:

Figura 7.6 – Envelope de solução (a) valor inicial versus resposta determinística e (b) ótimo robusto versus resposta determinística



Fonte: o autor.

A Figura 7.6 apresenta as FRFs para 10% de incertezas para as duas variáveis de projeto. Observa-se, pelos envelopes de solução obtidos através do método HCL utilizando o valor nominal, Figura 7.6 (a), e pelo envelope com o valor do ótimo robusto na Figura 7.6 (b) que as respostas obtidas foram semelhantes.

Os valores ótimos escolhidos e os valores iniciais estão dispostos na Tabela 7.7:

Tabela 7.7 – Valor inicial e Ótimo robusto		
Variável	Valor inicial	Ótimo robusto
d_7	0.03935	0.0410
d_{13}	0.03935	0.0430
Desvio-Padrão	29.9510	29.8186

Fonte: o autor.

Observa-se pelo valor do desvio-padrão disposto na Tabela 7.7, que a resposta apresenta uma menor sensibilidade às incertezas, pois, em ambos os casos foram obtidas dispersões similares.

Para os três casos considerados, conclui-se com essas simulações, que o último problema de otimização considerado (d_7 e d_{13}) foi menos sensível à incertezas, ou seja, apresentaram maior robustez.

A seguir, apresenta-se novas simulações, onde serão considerados os diâmetros do terceiro e do nono elemento de viga como variáveis de projeto onde os seus valores iniciais foram descritos na Tabela 7.4.

Os parâmetros do NSGA e os parâmetros do CVM usados no processo de otimização estão dispostos na Tabela 7.8:

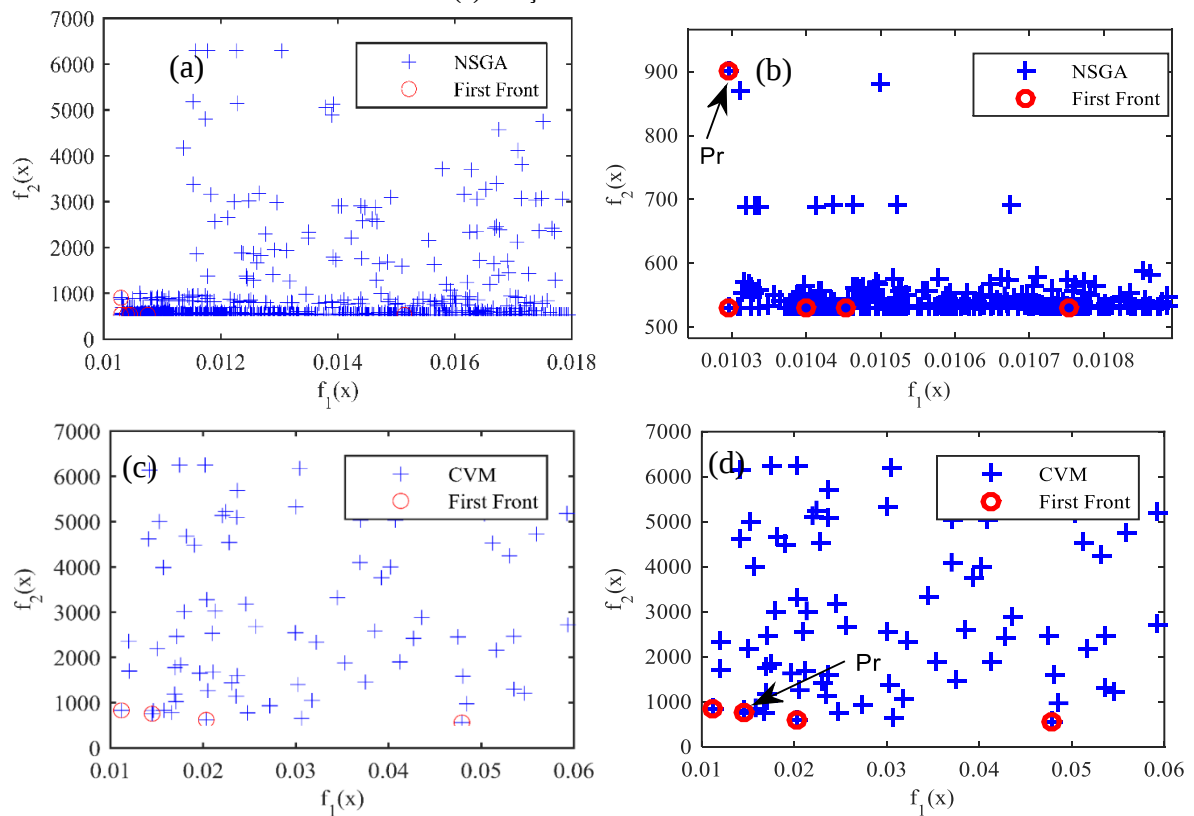
Tabela 7. 8 – Definição dos parâmetros dos métodos NSGA e do CVM

NSGA		CVM	
Probabilidade de seleção	0,25	Aleatoriedade (α)	0.5
Probabilidade de cruzamento	0,25	Coef. de absorção (γ)	1
Probabilidade de mutação	0,25	Coef. de atratividade (β_o)	0.2
Número de gerações	50	Número de gerações	50
Número de indivíduos	25	Número de vagalumes	100
Coeficiente de Sharing	0.2		

Fonte: o autor.

A curva de Pareto para o caso em questão, em termos da função objetivo e da função vulnerabilidade é apresentada na Figura 7.7:

Figura 7. 7 – Representação da função objetivo e sua vulnerabilidade (a) NSGA, (b) solução robusta do NSGA escolhida, (c) CVM e (d) solução robusta do CVM escolhida

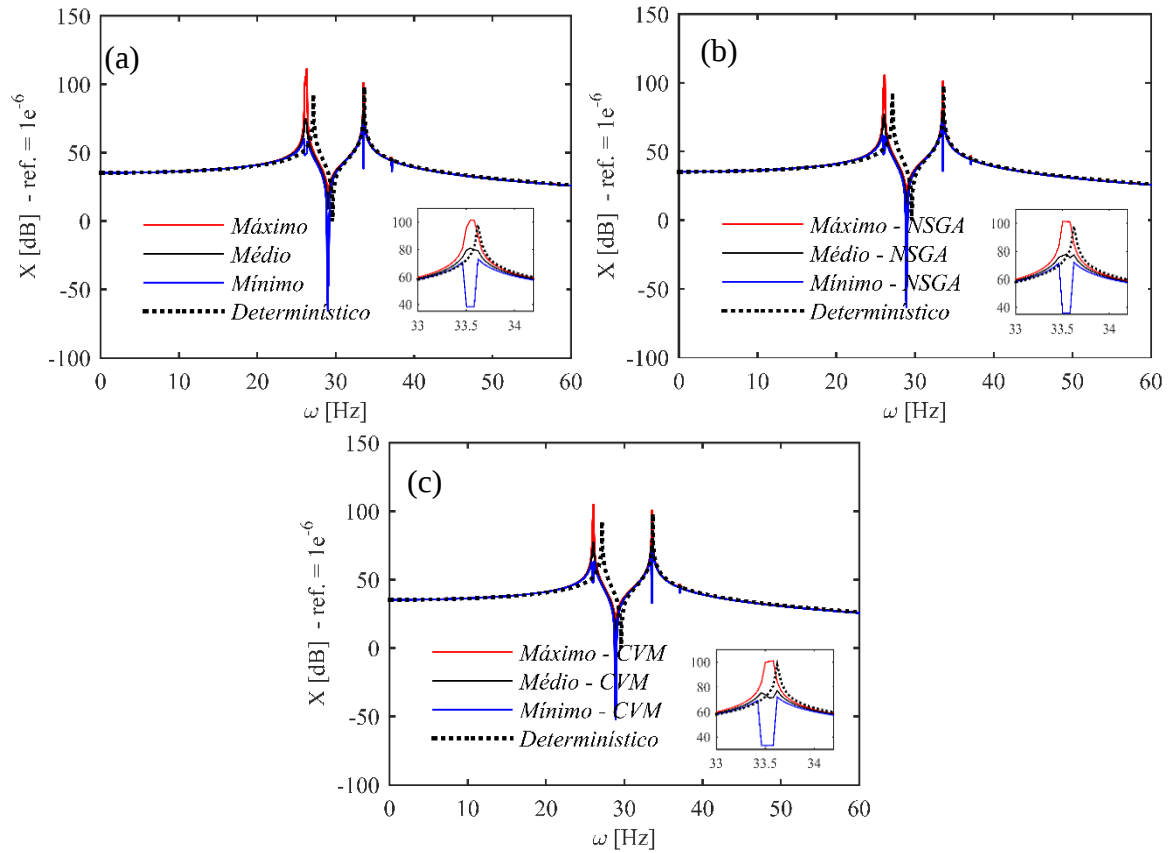


Fonte: o autor.

De acordo com a Figura 7.7, tem-se a ilustração das Curvas de Pareto dos métodos NSGA e CVM foi então, escolhida uma solução, com o intuito de se obter sempre o melhor compromisso entre as funções objetivo.

Uma vez escolhido a solução ótima, são apresentados os envelopes de solução para 10% de incertezas para comparar a dispersão nas soluções iniciais com as respostas ótimas robustas obtidas pelos métodos NSGA e CVM, sendo estas ilustradas na Figura 7.8:

Figura 7.8 – Envelope de solução (a) valor inicial versus resposta determinística, (b) ótimo robusto NSGA versus resposta determinística e (c) ótimo robusto CVM versus resposta determinística



Fonte: o autor.

Na Figura 7.8 (a) foi considerado os valores iniciais das variáveis de projeto, compara-se o envelope de solução obtido com a resposta determinística, na Figura 7.8 (b) considera-se o valor ótimo robusto obtido pelo método NSGA versus a resposta determinística e, na Figura 7.8 (c) o envelope pelo método CVM. Conclui-se que neste caso, houve uma sensibilidade a incertezas. Para tal conclusão, tem-se os valores das variáveis de projeto iniciais e os valores ótimos robustos, bem como os valores do desvio-padrão, Tabela 7.9:

Tabela 7.9 – Valores iniciais e Ótimo robusto			
Variável	Valores iniciais	NSGA	CVM
d_3	0.03935	0.0411	0.0409
d_9	0.0215	0.0172	0.0150
Desvio-Padrão	7.3971	6.4425	6.2754

Fonte: o autor.

Percebe-se pelo valor do desvio-padrão, Tabela 7.9, que a solução robusta apresentou uma menor dispersão, portanto conclui-se que este problema de otimização apresentou sensibilidade à incertezas.

Capítulo 8

CONCLUSÕES

Neste trabalho, utilizou-se inicialmente o HCL com a finalidade de se estudar as influências das incertezas em um sistema discreto de 2 g.d.l. não linear onde considerou-se três casos a saber, sistema principal linear e sistema secundário linear, sistema principal linear e sistema secundário não linear e por último, sistema principal não linear e sistema secundário não linear. Nos três casos citados foram considerados alguns parâmetros de rigidez lineares e/ou não lineares como incertos e, assim, verificar a sensibilidade destes a fatores externos.

Nessas simulações, mostrou-se que, nos três casos, quando as incertezas são consideradas em parâmetros de rigidez lineares obtém-se um afastamento significativo entre as faixas de valores, ou seja, quando o sistema possui somente características lineares, há uma maior sensibilidade a fatores externos (incertezas) enquanto que, quando se considera os parâmetros de rigidez como sendo não lineares que há um menor distanciamento entre faixas de valores, gerando um resultado muito próximo dos valores originais do sistema, mesmo considerando um valor de incertezas relativamente alto (30%), o que mostra uma maior robustez do sistema não linear, em comparação com linear.

Para o sistema contínuo do considerou-se tanto a resposta no domínio da frequência quanto no domínio do tempo. Foi acoplada uma mola à viga de Euler-Bernoulli, sendo que, esta mola foi considerada tanto com características lineares quanto não lineares. Para estes casos, foram considerados a largura e a espessura como parâmetros incertos via método HCL e também utilizando KL.

No caso em que se estudou a FRF considerando o efeito de 3%, 9% e 20% de incertezas para a largura e, 1% e 3% para a espessura gerando as amostras pelo método HCL, conclui-se pelos envelopes de solução obtidos tanto pelo MEFE quanto pelo EF que utilizou em conjunto a expansão de KL, que a espessura apresentou uma maior sensibilidade à consideração de incertezas em comparação com a largura. Ainda neste caso foi realizado o cálculo das frequências naturais, sendo que os valores mostraram ser próximos em ambos os casos, isto é, pela resposta determinística, pela resposta obtida pelo MEFE e por EF.

Considerando a resposta no domínio do tempo da viga de Euler-Bernoulli foram geradas 1000 amostras pelo método HCL com 3% e 5% de incertezas para a largura e para a espessura.

Verificou-se que considerando a viga com mola linear, a largura da mesma foi mais sensível a consideração de incertezas, ou seja, a solução obtida quando se tem parâmetros incertos na espessura mostrou-se menos sujeita à grandes modificações, já para a viga com acoplamento de uma mola com característica não linear observou-se que a espessura foi bastante sensível a consideração da incertezas.

Para estudar o comportamento do rotor foi obtida a FRF, neste caso, ressalta-se a utilização do método de redução chamado de *IIRS*.

Em um primeiro estudo foi considerado o efeito de incertezas (30%), nos valores da rigidez dos mancais então, foi obtido os envelopes para a resposta com o modelo completo e para o modelo reduzido, nestes foram obtidas curvas similares.

Em um próximo estudo, foi obtido os envelopes de solução para 10% de incertezas pelo método HCL com a geração de 1500 amostras, neste caso, o efeito de incertezas foi considerado nos diâmetros dos seguintes elementos de viga: segundo elemento de viga, terceiro, terceiro e nono e, sétimo e décimo terceiro, respectivamente. Conclui-se que nos casos considerados os envelopes de solução apresentaram uma significativa distância entre as faixas de valores, principalmente nos casos que se considerou dois parâmetros como aleatórios, a saber, terceiro e nono e, sétimo e décimo terceiro elemento de viga pois, observa-se nestes uma maior sensibilidade a consideração de incertezas devido ao fato de, terem apresentado uma grande dispersão.

Aborda-se a construção do projeto robusto multiobjetivo para o rotor em questão, buscou-se neste projeto a minimização da amplitude de vibração e, simultaneamente a minimização da vulnerabilidade sendo gerado as amostras pelo método HCL, que são utilizadas no cálculo da função vulnerabilidade. Nos problemas, foi considerado como variável de projeto em início, o diâmetro do segundo elemento de viga (d_2), já em um segundo problema de otimização tem-se o terceiro e nono elemento de viga (d_3 e d_9) e, em um último problema, tem-se o diâmetro do sétimo e décimo terceiro elemento de viga (d_7 e d_{13}). Assim, para resolver os problemas de otimização citados anteriormente, foi utilizado o método NSGA. Conclui-se com essas simulações, que o último problema de otimização considerado (d_7 e d_{13}) foi menos sensível à incertezas, uma vez que, apresentou maior robustez.

Por fim, utilizou-se o método NSGA e o método Colônia de Vagalume Multiobjetivo Robusto (CVM), para o problema de otimização onde considerou as variáveis de projeto (d_3 e d_9), neste também foi apresentado uma grande sensibilidade a consideração de incertezas.

REFERÊNCIAS

AGUIRRE, L. A., *Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não lineares aplicadas a sistemas reais*. Belo Horizonte, MG, Brasil. Editora UFMG, 2000.

BERNADÁ, G. M. G. *Quantificação de Incertezas em Problemas de Interação Fluido Estrutura via Método de Colocação Estocástica*. Tese (Doutorado). Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

BERTON Jr., J; ROBERTO, S. B. *Problemas relacionados a máquinas rotativas*. In: VII Fórum Científico, 2013, Apucarana. IIV Fórum Científico, 2013.

BIGOT, P. G. *Abordagem de pareto para a otimização multiobjetivo do desempenho de um controlador SDRE aplicado a um sistema não linear*. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2015.

BOGONI, P. E. *Modelo de Simulação Econômica em Pequenas Empresas Estudo de Caso*. Monografia. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2009.

BORGES, R. A. *Contribuição ao Estudo dos Absorvedores Dinâmicos de Vibrações não-lineares*. 154f. Dissertação (Doutorado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Uberlândia, 2008.

BURATTO, M. V. *Construção e Avaliação de um Modelo de Simulação de Monte Carlo para Analisar a Capacidade de Pagamento das Empresas em Financiamentos de Longo Prazo*. Dissertação (Mestrado). UFRGS. Porto Alegre, 142p, 2005.

CAMPOS, T. M. *Simulação sob incerteza de condução de calor em meios heterogêneos combinando transformação integral e caos polinomial*. Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, 2013.

CASTILLO, F. U. *Análisis probabilístico de estructuras usando elementos finitos estocásticos*. Dissertation (Master), Universidad Nacional de Colombia, Faculty of Engineering and Architecture, Department of Electrical, Electronic, Engineering and Computing, Manizales, Colombia, 2015.

CORRAR, J. L. *O Modelo Econômico da Empresa em Condições de Incerteza Aplicação do Método de Simulação de Monte Carlo*. Caderno de Estudos, 8: 1-11. 1993.

COSTA, T. N.; PURCINA, A. B. ; BORGES, R. A. *Stochastic analysis of nonlinear mechanical system*. In: International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2015, 2015, Rio de Janeiro - RJ. COBEM 2015, 2015.

CURSI, J. E. S.; SAMPAIO, R. *Modelagem Estocástica e Quantificação de Incertezas*. São Carlos, SP: SBMAC, 2012, 344 p., 21.5 cm - (Notas em Matemática Aplicada; v. 66).

DEB, K. *Multi-objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. First Edition. New York: John Wiley x Sons, 2001.

DEUTSCH, J. L.; DEUTSCH, C. V. *Latin hypercube sampling with multidimensional uniformity*. *Journal of Statistical Planning and Inference* 142(3), 763-772, 2011.

FERREIRA, A. J. M. *Finite Element in the Matlab®*. 2007.

FONSECA Jr., L. A. *Técnica de Redução de modelos “Improved Reduced System Enriched” Aplicada ao Estudo do Comportamento de Sistemas Mecânicos Não Lineares*. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização, Universidade Federal de Goiás/ Regional Catalão. 2016.

FONTE, P. D. P. C. R. *Aplicação do método de monte carlo em simulações hidrotérmicas de edifícios*. Dissertação (Mestrado). Engenharia Civil, Universidade do Porto, 2011.

FRISWELL, M.; GARVEY, S.; PENNY, J. *Model reduction using dynamic and iterated irs techniques*. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 186, n. 2, p. 311–323, 1995.

GOLDBERG, D. E. *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.

GOMES, R. R. *Motor mancal com controle implementado em um DSP*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE. 2007.

GONÇALVES, D. F. *Introdução aos métodos de redução de modelos adaptados a sistemas mecânicos com características não lineares*. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização, Universidade Federal de Goiás/ Regional Catalão. 2016.

GHANEM, R. G.; SPANOS P. D. *Stochastic finite elements: a spectral approach*. Springer, 1991.

GRECO, L. C. *Desenvolvimento de bancada de testes para mancais*. Trabalho Final de Curso em Engenharia Mecânica. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. 2011.

GUEDRI, M. *Synthèse modale /approches stochastiques en élastodynamique linéaire et non-linéaire*. Thèse (Doctorat), Faculté des sciences de Tunis de l’université El Manar, Nabeul, Tunisie, 2006.

_____; BOUHADDI, N.; MAJED, R. *Reduction of the stochastic finite element models using a robust dynamic condensation method*. *Journal of Sound and Vibration*, 297: 123-145, 2006.

HIDALGO, F. L. C. *Quantificação da incerteza do problema de flexão estocástica de uma viga de Euler-Bernoulli, apoiada em fundação de Pasternak, utilizando o método estocástico de Galerkin e o método dos elementos finitos estocásticos*. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 87p., 2014.

HUTCHINGS, I. M. *Tribology: Friction and wear of engineering materials*. Edward Arnold Publication Ltd. Grã Bretanha, 1992.

KIM, N.H.; SANKAR, B. V. *Introdução à Análise e ao Projeto em Elementos Finitos*. Tradução e revisão técnica Amir Elias Abdalla Kurban. – Rio de Janeiro: LTC, 2011.

KOROISHI, E. H. *Controle de vibrações em máquinas rotativas utilizando atuadores eletromagnéticos*. Tese (Doutorado). Programa de pós-graduação em engenharia mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, 225 f. 2013.

KOROISHI, E. H. et al. *Stochastics modeling of flexible rotors*. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 34(Special Issue): 597-603, 2012.

KRÜGER, C. M. *Análise de Confiabilidade Estrutural Aplicada às Barragens de Concreto*. Tese (Doutorado), Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.

KWAKA, Y. H.; INGALL, L. *Exploring Monte Carlo Simulation Applications for Project Risk Management*. Vol. 9, No. 1 (Feb., 2007), pp. 44-57. Palgrave Macmillan Journals. 2007.

LALANNE, M.; FERRARIS, G. *Rotordynamics prediction in engineering*. 2nd edition, Jhon Wiley and Sons, New York, 1997.

LARA-MOLINA, F. A.; KOROISHI, E. H.; STEFFEN Jr, V. *Análise Estrutural Considerando Incertezas Paramétricas Fuzzy*. Técnicas de Inteligência Computacional com Aplicações em Problemas Inversos de Engenharia. Omnipax, Vol. 1, pp. 133-144, 2014.

LIMA, A. M. G.; RADE, D.A.; BOUHADDI, N. *Stochastic modeling of surface viscoelastic treatments combined with model condensation procedures*. Shock and Vibration, Vol. 17, pp. 429-444, 2010.

_____. *Modelagem e otimização robusta de sistemas mecânicos em presença de amortecimento viscoelástico*. Tese (doutorado). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, 2007.

LIMA, R. Q.; SAMPAIO, R. *Análise de vibrações estocásticas em sistemas mecânicos*. Tese (Doutorado). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. PUC/Rio. 2012.

LOBATO, F. S., MOREIRA, F. R, STEFFEN Jr, V. *Otimização Multiobjetivo Robusta usando o Conceito de Media Efetiva e o Algoritmo de Colônia de Vagalumes*. XVI Encontro de Modelagem Computacional, IV Encontro de Ciencia e Tecnologia de Materiais, Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Ilheus/BA, Brasil, 2013.

LOTTI, R. S. et al. *Aplicabilidade Científica do Método dos Elementos Finitos*. Rev Dent Press Ortod Ortop Facial. 2006.

MALETTA, B. V. *Modelos baseados em Simulação de Monte Carlo: soluções para o cálculo do Value-at-Risk*. Dissertação (Mestrado em Administração) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto COPPEAD de Administração, 2005. Rio de Janeiro, 2005.

MARTINS, J. L. F.; FERREIRA, M. L. R. *Aplicabilidade de Simulação Utilizando os métodos de Monte Carlo e Hipercubo Latino na Estimativa de Produtividade do Processo de Soldagem Elétrica TIG*. In: 7 Congresso Brasileiro de Engenharia de Fabricação, Penedo, Itatiaia, RJ, Brasil. 7º COBEF, 2013.

MARZO, G. R. D. *Aplicação do Método dos Elementos Finitos na Análise de Tensões Induzidas em Cabos Umbilicais*. Dissertação (mestrado). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas. São Paulo. 2010.

MASCHIO, C.; CARVALHO, C. P. V.; SCHIOZER, D. J. *Aplicação da Técnica de Hipercubo Latino na Integração do Ajuste de Histórico com a Análise de Incertezas*. In: 5º Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo e Gás, Fortaleza, CE, Brasil, 2009.

MCKAY, M. D.; BECKMAN, R. J.; CONOVER, W. J. *A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code & Technometrics*. Vol. 21, n.2, p. 239-245, May 1979.

MELO, A. L. C. *Controle de Caos em uma Treliza de Mises com Memória de Forma*. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2015.

MOREIRA, F. R., *Otimização Robusta Multiobjetivo para o Projeto de Sistemas em Engenharia*. 230 f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, 2015.

MULLER, A. L.; VAZ, L. E.; EBOLI, C. R. *Análise de Estruturas Incorporando Incertezas*. In: Epusp, 2003, São Paulo. V simpósio epusp sobre estruturas de concreto, 2003.

NAYFEH, A. H.; BALACHANDRAN, B. *Applied nonlinear dynamics: analytical, computational and experimental methods*. New York: Wiley Petersen, K. Ergodic theory. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1995.

NAYFEH, A.H.; MOOK, D. T. *Nonlinear oscillations*. New York: Wiley & Sons, 1979.

NAYFEH, A. H.; PAI, P. F. *Linear and nonlinear structural mechanics*. Wiley: New York, 2004.

NEWMARK, N. M. *A Method of Computation for Structural Dynamics*, ASCE Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 85, 67-94, 1959.

NOGUEIRÃO, L. F.; WATANABE, F. Y. *Modelagem e simulação dinâmica de rotores flexíveis pelo método dos elementos finitos*. XIX Congresso Nacional de Estudantes de Engenharia Mecânica, São Carlos-SP. 2012.

OEINI, S. S.; CHIN, C. M.; NAYFEH, A. H. *Dynamics of cubic nonlinear vibration absorber, Nonlinear Dynamics*. Vol. 20, pp. 283-295, 1999.

OLIVEIRA, A. G. *Técnicas de caracterização de excitações em máquinas rotativas*. Tese (Doutorado). Programa de pós-graduação em engenharia mecânica pela Universidade Federal de Uberlândia. 162 f. 1999.

PAI, P. F. *Nonlinear vibration characterization by signal decomposition*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 307, pp. 527-544, 2007.

PILGER, G. G.; COSTA, J. F. C. L.; KOPPE, J. C. *Improving the efficiency of the sequential simulation algorithm using latin hypercube sampling*. Geostatistics Banff 2004, 14, Springer, pp. 989-998, 2005.

PIQUEIRA, J. R. C. *Não-Linearidades: Da Dinâmica do Simples à Dinâmica do Complexo*. Transformação - Revista de Filosofia – UNESP, pp 143-150, São Paulo SP, Brasil, 1994.

PIMENTEL, A. C. M. *Simulações sob incertezas em problemas de transferência de calor e massa*. Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. Rio de Janeiro, 2014.

PURCINA, A. B. ; COSTA, T. N. ; BORGES, R. A. *Study of bifurcations and chaotic dynamics in a nonlinear mechanical system*. In: XXXVI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE-2015, 2015, Rio de Janeiro - RJ. CILAMCE-2015, 2015.

_____. *Análise de estabilidade de um sistema mecânico*. In: WMIMO- I Workshop em Matemática Industrial, Modelagem e Otimização, 2015, Catalão - GO. WMIMO - 2015, 2015.

_____. *Estudo do efeito de incertezas em um sistema dinâmico não linear*. In: CNMAI 2015: Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria, 2015, Fortaleza - CE. CNMAI - 2015, 2015.

QU, Z.-Q. *Model order reduction techniques with applications in finite element analysis*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2004.

RADE D. A. *Introdução ao Método dos Elementos Finitos*. Notas de aula, 36 p, 2011.

RAO, S. S. *Mechanical Vibrations*. 5th. Prentice Hall. 2010.

RIBEIRO, L. P.; DE LIMA, A. M. G. *Stochastic modeling of composite structures coupled with piezoelectric shunted resistive circuits*. In: 23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering. Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2015.

RITTO, T. G. et al. *Robust optimization of a flexible rotor-bearing system using the campbell diagram*. Engineering Optimization 43(1): 77-97, 2011.

RODOVALHO, L. F. F.; COSTA, T. N. *Modelagem e Projeto Ótimo de Estruturas Dinâmicas: Abordagem Determinística e Estocástica*. Monografia (Graduação em Matemática Industrial), Universidade Federal de Goiás, UFG – RC, Catalão, GO, Brasil, 2013.

RUSSELL, S. J.; NORVIG, P. *Artificial intelligence: A modern approach*. Prentice Hall. 2009.

SALIBY, E. *Descriptive sampling: An improvement over latin hypercube sampling*. 1997.

SAVI, M. A. *Dinâmica Não-Linear e Caos*. Rio de Janeiro. 2004.

SAYED, M.; HAMED, Y. S.; AMER, Y. A. *Vibration Reduction and Stability of Non-Linear System Subjected to External and Parametric Excitation Forces under a Nonlinear Absorber*. Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 6, n. 22, p. 1051 – 1070, 2011.

SCHAFFER, J. D. *Multi Objective Optimization with Vector Evaluated Genetic Algorithms*. Tese (Doutorado). Vanderbilt University, 1984.

SILVA, A. R. D. *Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*. Tese apresentada ao programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, MG, Brasil, 2009.

SILVEIRA, M. E. *Análise do Comportamento Dinâmico de Rotores em Eixos Bobinados*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2001.

SOUZA, L. A. F. *Análise numérica de treliças planas considerando as não linearidades física e geométrica*. Revista de Engenharia e Tecnologia, Vol. 7, Nº 4, 2015.

SOUZA, R. M. *O Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema de Condução de Calor*. Notas de Aula, Núcleo de instrumentação e computação aplicada à engenharia (NiCAE), Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Pará, Belém, 2003.

SLOTINE, J. E.; LI, W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, New Jersey, 1991.

SRINIVAS, N; DEB, K. *Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms*. Evolutionary Computation. v.2. n.3, p.221-248, 1994.

UJIHARA, D. Y. *Obtenção de um modelo de rotor flexível sustentado por mancais magnéticos ativos através do método dos elementos finitos*. Dissertação (Mestrado). Programa de pós-graduação em engenharia mecânica da Universidade Federal Fluminense. 134f. 2011.

TAGUCHI, G. *Quality engineering through design optimization*. Kraus International Publications. New York-USA, 1984.

THOMSEN, J. J. *Vibration and Stability Advanced Theory, Analysis, and Tools*. Springer-Verlag, 2^o Edition, 2003.

THOM, F. C. M., SISQUINI, G. R., FREITAS, M. S. R. *Gerenciamento da Manutenção de Tubulações de Óleo e Gás Usando o Cálculo da Confiabilidade Baseado nos Dados de Detecção de Defeitos de Corrosão Obtidos pelo Vazamento de Fluxo Magnético (MFL)*. Asociación Argentina de Mecánica Computacional, 2010.

THUNNISSEN, D. P. *Propagating and Mitigating Uncertainty in the Design of Complex Multidisciplinary Systems*. PhD thesis, California Institute of Technology Pasadena, 2005.

VANDERPLAATS, G. *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design, with Applications*, McGraw-Hill, 1998.

XU, C.; HE, H. S.; HU, Y. *Latin hypercube sampling and geostatistical modeling of spatial uncertainty in a spatially explicit forest landscape model simulation*. Ecological Modelling 185, 255–269, 2005.

YANG, X.-S. *Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms*. Luniver Press, Cambridge, 2008.

ZHANG, Z.; ELFADEL, I. A. M.; DANIEL, L. *Uncertainty quantification for integrated circuits: stochastic spectral methods*. In: 2013 IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design (ICCAD), San Jose, CA, USA, 2013.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The finite element method*. Vol. 2, Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 5th edition, 2000.