

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

**UMA ABORDAGEM NÃO LINEAR AO ESTUDO DE  
MODELOS DE DEFORMAÇÃO VIA ELEMENTOS  
FINITOS PARA VIGA 2D DE CONCRETO  
PROTENDIDO COM CORDOALHA ADERENTE**

**WERLEY RAFAEL DA SILVA**

**Catalão – GO**  
**2020**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE ENGENHARIA

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES  
E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

**1. Identificação do material bibliográfico**

Dissertação     Tese

**2. Nome completo do autor**

WERLEY RAFAEL DA SILVA

**3. Título do trabalho**

UMA ABORDAGEM NÃO LINEAR AO ESTUDO DE MODELOS DE DEFORMAÇÃO VIA ELEMENTOS FINITOS PARA VIGA 2D DE CONCRETO PROTENDIDO COM CORDOALHA ADERENTE

**4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)**

Concorda com a liberação total do documento  SIM     NÃO<sup>1</sup>

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

- a) consulta ao(a) autor(a) e ao(a) orientador(a);
- b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

**Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.**



Documento assinado eletronicamente por **WERLEY RAFAEL DA SILVA, Discente**, em 12/01/2021, às 18:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcos Napoleão Rabelo, Professor do Magistério Superior**, em 13/01/2021, às 06:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **1799159** e o código CRC **9A502C64**.

# UMA ABORDAGEM NÃO LINEAR AO ESTUDO DE MODELOS DE DEFORMAÇÃO VIA ELEMENTOS FINITOS PARA VIGA 2D DE CONCRETO PROTENDIDO COM CORDOALHA ADERENTE

WERLEY RAFAEL DA SILVA

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**.

**Área de Concentração:** Engenharia de Operações e Processos Industriais.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Napoleão Rabelo

Catalão – GO

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

da Silva, Werley Rafael

Uma Abordagem Não Linear ao Estudo de Modelos de Deformação Via Elementos Finitos para Viga 2D de Concreto Protendido com Cordoalhas Aderente [manuscrito] / Werley Rafael da Silva. - 2020. CXXXIII, 133 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Napoleão Rabelo.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Engenharia e Administração, Catalão, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Catalão, 2020.

Bibliografia. Apêndice.

Inclui siglas, fotografias, abreviaturas, símbolos, gráfico, tabelas, algoritmos, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Método das Forças . 2. Elementos Finitos. 3. Concreto Protendido. 4. Análise Não Linear . I. Napoleão Rabelo, Marcos, orient. II. Título.

CDU 658.5



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE ENGENHARIA

## ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 20 da sessão de Defesa de Dissertação de **WERLEY RAFAEL DA SILVA**, que confere o título de Mestre em **Engenharia de Produção**, na área de concentração em **Engenharia de Operações e Processos Industriais**.

"Banca Examinadora de Qualificação/Defesa Pública de Dissertação/Tese realizada em conformidade com a Portaria da CAPES n. 36, de 19 de março de 2020, de acordo com seu segundo artigo:

Art. 2o A suspensão de que trata esta Portaria não afasta a possibilidade de defesas de tese utilizando tecnologias de comunicação à distância, quando admissíveis pelo programa de pós-graduação stricto sensu, nos termos da regulamentação do Ministério da Educação."

Ao/s **dezesesseis dias do mês de dezembro do ano de dois mil e vinte**, a partir das **14 horas**, na Sala Virtual (<https://meet.google.com/hao-zuhz-qqv?hs=122&authuser=1>), realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"ESTRUTURAS DE CONCRETO PROTENDIDO: UMA ABORDAGEM NÃO LINEAR AO ESTUDO DE MODELOS DE DEFORMAÇÃO VIA ELEMENTOS FINITOS"**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor **MARCOS NAPOLEÃO RABELO (PPGEP/ UFG)**, via vídeo conferência, com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **CARLOS ANTONIO RIBEIRO DUARTE (PPGEP/ UFG)**, via vídeo conferência, membro titular interno; Professor Doutor **WELLIGTON ANDRADE DA SILVA (PPGEC/ UFG)**, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **MARCOS NAPOLEÃO RABELO**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, dezesseis dias do mês de dezembro do ano de dois mil e vinte.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

UMA ABORDAGEM NÃO LINEAR AO ESTUDO DE MODELOS DE DEFORMAÇÃO VIA ELEMENTOS FINITOS  
PARA VIGA 2D DE CONCRETO PROTENDIDO COM CORDOALHA ADERENTE



Documento assinado eletronicamente por **Marcos Napoleão Rabelo, Professor do Magistério Superior**, em 13/01/2021, às 06:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Carlos Antonio Ribeiro Duarte, Professor do Magistério Superior**, em 13/01/2021, às 16:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Wellington Andrade Da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 14/01/2021, às 16:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, §1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0) informando o código verificador **1799156** e o código CRC **7050D305**.

*Dedico este trabalho a meus  
pais, minha irmã e a minha  
esposa com muito amor.*

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por me dar sabedoria, persistência, paciência e perseverança durante todo o programa.

A minha família, pelo apoio, preocupação, paciência, e incentivo desde o momento de minha participação na seleção do programa até a conclusão. Em especial à minha esposa Assuscena Pires Netto Silva pela confiança dedicada a mim. Aos meus pais João Lindolfo da Silva e Odorina Pereira da Silva pela educação a mim concedida e incentivo na busca do conhecimento. A minha irmã Ariany Pereira da Silva Gomes pelo apoio e incentivo para execução desse trabalho.

Ao meu Orientador, Professor Dr. Marcos Napoleão Rabelo, pela orientação decisiva e precisa para tornar este trabalho uma realidade. Seu apoio e motivação foram primordiais para a conclusão deste trabalho. Um imenso obrigado pelo companheirismo.

Ao Professor Dr. Wanderlei Malaquias Pereira Júnior pelo apoio e a disponibilização de material teórico referente a sistemas pretendidos.

Aos meus amigos e companheiros de jornada Iago Ferreira Lima e Karla Melissa dos Santos Leandro, pela união, força e motivação.

À UFG e ao Programa de Pós-Graduação de Mestrado Acadêmico em Engenharia de Produção da Regional de Catalão pela oportunidade oferecida em poder me proporcionar um crescimento profissional.

SILVA, W. R. **Uma Abordagem Não Linear ao Estudo de Modelos de Deformação Via Elementos Finitos para Viga 2d de Concreto Protendido com Cordoalha Aderente**. 133p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Goiás, Catalão, GO. 2020.

## RESUMO

O propósito nesse trabalho é desenvolver a análise não linear de vigas protendidas e obter suas curvas de carga/deslocamento, será apresentado a formulação de um elemento finito do tipo barra para análise não linear física e geométrica baseada no método das forças. A não linearidade geométrica é considerada utilizando a teoria de deformação em vigas de Euler-Bernoulli, com simplificação para rotações moderadas. Na não linearidade física admite-se relações tensão/deformação não lineares providas dos modelos constitutivos dos materiais. A contribuição para o concreto na compressão utiliza o modelo desenvolvido por Hognestad (1951), e quando submetido a tração o modelo desenvolvido por Bergan e Holand (1973), para o aço de armadura ativa considera-se o modelo desenvolvido por Menegotto e Pinto (1973) e para a armadura passiva considera-se o modelo bi linear com comportamento elastoplástico perfeito. No acoplamento entre os materiais constituintes da estrutura considera-se uma perfeita aderência entre seus elementos, ou seja, não existe movimento relativo entre elas. O problema é formulado através do equilíbrio de forças nodais. Para tanto, as forças e momentos são calculados em função da relação tensão/deformação. Para resolver as equações, o método dos elementos finitos é empregado. A metodologia aqui apresentada propõe em alcançar o equilíbrio de forças diretamente nos pontos nodais da estrutura usando equações diferenciais ao invés de equações integrais. O conceito de forças e momentos generalizados nos pontos nodais são introduzidos. Finalmente simulações numéricas são empregadas para comparar os resultados obtidos com resultados experimentais. A novidade no presente trabalho reside no fato que a modelagem é feita através do acoplamento entre três elementos, a saber: o deslocamento do concreto, da cordoalha de protensão e armadura passiva. Observa-se também que a protensão é responsável por aplicar forças axiais e cisalhantes; enquanto a armadura passiva contribui apenas no deslocamento axial. A incorporação de deslocamentos axiais é necessária, pois a força de protensão é considerada como externa, causando, além de forças axiais, reações de momento devido à excentricidade entre a

posição da cordoalha e a linha neutra da estrutura. Usando teorias apropriadas de deformação para, concreto, protensão e aço, a matriz de rigidez é obtida.

Palavras-chave: Método das Forças; Elementos Finitos, Concreto Protendido, Análise Não Linear.

SILVA, W. R. **A Nonlinear Approach to the Study of Strain Models through Finite Elements for 2D Beam of Prestressed Concrete with Grip Strand**. 133p. Masters Dissertation, Federal University of Goiás, Catalão, GO. 2020.

## ABSTRACT

The purpose of this work is to develop the nonlinear analysis of prestressed beams and obtain their load/displacement curves, the formulation of a finite element of the bar type will be presented for non-linear physical and geometric analysis based on the method of forces. Geometric nonlinearity is considered using the Euler-Bernoulli beam strain theory, with simplification for moderate rotations. In physical non-linearity, non-linear stress / strain relationships provided by the models constituting the materials are allowed. The contribution to concrete in compression uses the model developed by Hognestad (1951), and when subjected to traction the model developed by Bergan and Holand (1973), for the steel of active reinforcement, the model developed by Menegotto and Pinto (1973) and for the passive reinforcement the bi-linear model with perfect elastoplastic behavior is considered. In the coupling between the constituent materials of the structure, perfect adherence between its elements is considered, that is, there is no relative movement between them. The problem is formulated through the balance of nodal forces. For this, the forces and moments are calculated as a function of the stress/strain relationship. To solve the equations, the finite element method is employed. The methodology presented here proposes to achieve the balance of forces directly at the nodal points of the structure using differential equations instead of integral equations. The concept of generalized forces and moments at nodal points is introduced. Finally, numerical simulations are used to compare the results obtained with experimental results. The novelty in the present work resides in the fact that the modeling is done through the coupling between three elements, namely: the displacement of the concrete, the prestressing strand and passive reinforcement. It is also observed that prestressing is responsible for applying axial and shear forces; while the passive reinforcement only contributes to axial displacement. The incorporation of axial displacements is necessary, since the prestressing force is considered to be external, causing, in addition to axial forces, moment reactions due to the eccentricity between the position of the strand and the neutral line of the structure. Using appropriate theory of strain to, concrete, prestressing and reinforcement steel the stiffness matrix is obtained.

Keywords: Forces Method, Finite Elements, Prestressed Concrete, Nonlinear Analysis.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Seção Transversal de uma Viga Retangular de Concreto Armado .....	17
Figura 2 – Seção Transversal de uma Viga Retangular de Concreto Protendido .....	19
Figura 3 – Ponte do Galeão .....	20
Figura 4 – Ponte Presidente Dutra.....	21
Figura 5 – Tensões Normais em uma Viga Protendida.....	29
Figura 6 – Complexo industrial para Fabricação de Pré-moldado Protendido.....	32
Figura 7 – (A) Aplicação da Protensão nas Cordoalhas, (B) Moldagem do Concreto.....	32
Figura 8 – Viga Protendida Pré-Moldada.....	33
Figura 9 – Laje Alveolar Protendida Pré-Moldada .....	34
Figura 10 – (A) Detalhe da Laje Radier, (B) Distribuição das Cordoalhas Engraxadas, (C) Vista Interna Ancoragem Ativa e (D) Vista Externa da Ancoragem Ativa .....	35
Figura 11 – (A) Laje Nervurada Protendida, (B) Detalhe das cordoalhas engraxadas (C) Processo de Concretagem da Laje.....	36
Figura 12 – (A) Viga Protendida, (B) Vista Lateral da Viga, (C) Detalhe das Cordoalhas Engraxadas .....	37
Figura 13 – Diagrama Tensão/deformação do concreto .....	41
Figura 14 – Diagrama Tensão/deformação do Concreto Segundo o <i>Eurocode 2</i> .....	42
Figura 15 – Diagrama Tensão/deformação do concreto segundo Hognestad (1951). .....	43
Figura 16 – Diagrama Tensão/deformação do concreto. ....	45
Figura 17 – Diagrama Tensão/deformação do concreto. ....	46
Figura 18 – Diagrama Tensão/deformação do aço de protensão .....	48
Figura 19 – Diagrama tensão/deformação, segundo Menegotto e Pinto (1973) .....	50
Figura 20 – Diagrama Tensão/deformação para o aço de armadura passiva .....	51
Figura 21 – Exemplo de bainha metálica.....	53
Figura 22 – Exemplo de bainha plástica com cordoalha engraxada.....	53
Figura 23 – Dispositivo de Ancoragem .....	54
Figura 24 – Força de protensão/tempo para peça protendida pré-tensionada .....	55
Figura 25 – força de protensão/tempo para peça protendida pós-tensionada .....	56
Figura 26 – Ondulações parasitas da bainha .....	57
Figura 27 – Peça pré-moldada antes da liberação dos cabos .....	59
Figura 28 – Peça pré-moldada após a liberação dos cabos .....	60
Figura 29 – Tensões Atuantes na Viga.....	73
Figura 30 – Deformação na Seção Transversal da Viga.....	73
Figura 31 – Esforços Atuantes na Seção <i>A</i> .....	74
Figura 32 – Deslocamentos Devido à Teoria de Euler-Bernoulli.....	74
Figura 33 – Diagrama de Corpo Livre em um Elemento Infinitesimal de Viga.....	75
Figura 34 – Protótipo de Viga .....	78
Figura 35 – Modelo de Cabo (a) Configuração Deformada do Cabo e Campo de Deslocamento nas Direções $x - y$ , (b) Diagrama de Corpo Livre para o Elemento de Cabo.....	79
Figura 36 – Geometria do elemento e representação dos graus de liberdade .....	84
Figura 37 – (a) Seção transversal da barra. (b) Barra Fletida .....	88
Figura 38 – Representação do Elemento de Treliza .....	94

Figura 39 – Representação da viga ensaiada por Catoia (2007).....	102
Figura 40 – Seção transversal da viga ensaiada por Catoia (2007) .....	102
Figura 41 – Detalhamento da viga pré-moldada ensaiada por Catoia (2007) .....	103
Figura 42 – Diagrama Carga/Deslocamento Viga Bi-Apoiada .....	105
Figura 43 – Curva de Carga/Deformação na Região Tracionada da Viga Bi-Apoiada.....	105
Figura 44 – Curva de Carga/Deformação na Região Comprimida da Viga Bi-Apoiada .....	106
Figura 45 – Diagrama Carga/Deslocamento Viga Bi-Engastada .....	107
Figura 46 – Curva de Carga/Deformação na Região Tracionada da Viga Bi-Engastada.....	107
Figura 47 – Curva de Carga/Deformação na Região Comprimida da Viga Bi-Engastada .....	108

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Coeficiente $\alpha_E$ .....	40
Tabela 2 – Coeficiente de atrito para cada tipo de cabo, conforme NBR 6118 (2014). ..	59
Tabela 3 – Valores numéricos usuais para a determinação da fluência e retração ....	62
Tabela 4 – Valores da fluência e da retração em função da velocidade de endurecimento do cimento.....	66
Tabela 5 – Valores da fluência e da retração em função da velocidade de endurecimento do cimento .....	68
Tabela 6 – Valores de $\psi_{1000}$ , em porcentagem.....	69

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas;

CEB – Comité Euro-Internacional du Béton.

MEF – Método de Elementos Finitos

ELU – Estado Limite Ultimo

ELS – Estado Limite em Serviço

# SUMÁRIO

## CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO.....	16
1.1 MOTIVAÇÃO .....	23
1.2 JUSTIFICATIVA .....	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
1.3 OBJETIVOS.....	24

## CAPÍTULO 2

O SISTEMA DE PROTENSÃO.....	28
2.1 APLICAÇÕES DA PROTENSÃO EM ELEMENTOS PRÉ-MOLDADOS.....	30
2.2 APLICAÇÕES DA PROTENSÃO NA PÓS-TENSÃO.....	34
2.3 MATERIAIS DO SISTEMA DE PROTENSÃO .....	38
2.3.1 CONCRETO .....	38
2.3.2 AÇOS DE PROTENSÃO .....	47
2.3.3 AÇOS DE ARMADURA PASSIVA .....	51
2.3.4 BAINHAS.....	52
2.3.5 DISPOSITIVO DE ANCORAGEM.....	53
2.4 PERDAS DE PROTENSÃO .....	54
2.4.1 PERDA POR ATRITO CABO BAINHA .....	56
2.4.2 PERDA POR ACOMODAÇÃO DA ANCORAGEM .....	58
2.4.3 PERDA POR DEFORMAÇÃO IMEDIATA DO CONCRETO .....	59
2.4.5 INTERAÇÃO ENTRE AS PERDAS PROGRESSIVAS .....	68

## CAPÍTULO 3

MODELAGEM VIA ELEMENTOS FINITOS .....	72
3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA E METODOLOGIA .....	71
3.1.1 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA VIGA .....	72
3.1.2 FORÇAS GERADAS PELO AÇO DE PROTENSÃO .....	79
3.1.2 FORÇAS GERADAS PELA ARMADURA PASSIVA.....	83
3.2 CONSTRUÇÃO DA SOLUÇÃO .....	84
3.2 CONSTRUÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE .....	89
3.2.1 FORÇAS INTERNAS REFERENTES AO CONCRETO.....	89
3.2.2 TENSÃO DE PROTENSÃO .....	93
3.2.3 CONTRIBUIÇÃO DA ARMADURA PASSIVA .....	96
3.3 ANÁLISE DAS NÃO LINEARIDADES FÍSICAS.....	97
3.4 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO.....	98

## CAPÍTULO 4

RESULTADOS NUMÉRICOS .....	102
----------------------------	-----

<b>4.1 EXEMPLO DE VIGA PROTENDIDA ENSAIADA POR CATOIA (2007)</b> .....	<b>101</b>
<b>4.2 RESULTADOS</b> .....	<b>104</b>
4.2.1 MODELO DE VIGA BI-APOIADA.....	104
4.2.2 MODELO DE VIGA COM LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS.....	106
<b>CAPÍTULO 5</b>	
<b>CONCLUSÕES</b> .....	<b>110</b>
<b>5.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>110</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>112</b>
<b>APÊNDICE A</b>	
<b>MONTAGEM DA MATRIZ TANGENTE REFERENE AO CONCRETO</b> .....	<b>116</b>
<b>APÊNDICE B</b>	
<b>PROGRAMAÇÃO COMPUTACIONAL</b> .....	<b>123</b>

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

O concreto é um material bastante empregado na construção civil, ele pode ser considerado o material mais utilizado em obras na atualidade (HAJEK, 2017). Devido sua capacidade de ser moldável, ele pode ser usado em diversos tipos de arquiteturas. Apesar desse material possuir alta capacidade de suportar os esforços de compressão, não apresenta boa resistência no que se refere a esforços de tração, sendo essa a razão para fazer uso de barras de aço colocadas no interior das peças quando confeccionadas. Esse material constituído de concreto com barras de aço em seu interior recebe o nome de concreto armado. Na Figura (1) ilustra-se uma seção retangular de uma viga de concreto armado, nela são apresentados os principais parâmetros estabelecidos no dimensionamento estrutural desse material, onde  $c$  representa o cobrimento nominal da armadura com a função de garantir a proteção física e química do aço,  $h$  é a altura da viga,  $b_w$  define a largura,  $\phi_{Long.}$  é o diâmetro da barra de armadura longitudinal e  $\phi_{Trans.}$  é o diâmetro da barra de armadura transversal (estribo).

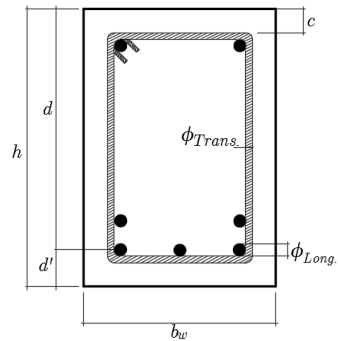


Figura 1 – Seção Transversal de uma Viga Retangular de Concreto Armado

Fonte: Adaptado de (PORTO e FERNANDES, 2015)

De acordo com Porto e Fernandes (2015), os indícios de produção do material cimento usado na confecção do concreto iniciaram no ano de 1824 com o empreiteiro escocês Josef Aspdin, na ocasião ele desenvolveu um processo de produção do cimento Portland oriundo das pedras calcárias da ilha de Portland na Inglaterra. Ainda segundo os autores, em 1849 o engenheiro francês Joseph-Louis Lambot desenvolve no sul da França, um barco, utilizando argamassa de cimento e fios de arames introduzidos nessa argamassa para moldagem do barco.

Nessa reta histórica o paisagista francês Joseph Monier em 1861 ao conhecer o produto de Lambot passou a fazer uso do material nas mais variadas formas. Entre seus artefatos estavam vasos de cimento, tubos e tanques, painéis decorativos para fachadas, passarelas, reservatórios e vigas de concreto armado, recebendo patente em 1867 (PORTO E FERNANDES, 2015). Assim Joseph Monier passou a divulgar o concreto na França e posteriormente em toda Europa.

Apesar da grande possibilidade de aplicações, pouco era o conhecimento científico sobre o concreto armado, foi então em 1877 com o americano Thaddeus Hyatt com uma série de ensaios com o concreto armado que se realizou a primeira publicação de resultados científicos desse material (PORTO E FERNANDES, 2015). Hyatt se tornou o grande precursor do concreto armado por compreender profundamente a eficiência dos materiais em serviço e o posicionamento das barras de aço.

Segundo Porto e Fernandes (2015), em 1904, surge na Alemanha a primeira norma sobre projeto e construção de estruturas em concreto armado, nesse período a técnica de usar concreto com barras de aço já se tornavam bastante usuais. No Brasil a

primeira norma relativa ao concreto teve origem em 1940, hoje ela é supervisionada pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) com a NBR 6118 (ABNT, 2014) intitulada Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimentos. Ela prescreve os procedimentos para dimensionamento de elementos de concreto.

Numa edificação os elementos de concreto mais comuns fabricados são as vigas, pilares e lajes. O conjunto desses elementos compõem o sistema estrutural e a estabilidade da estrutura é garantida manipulando a forma geométrica e a resistência dos materiais empregados.

De acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2014), vigas de concreto são consideradas elementos estruturais sujeitos preponderantemente a flexão. A norma detalha ainda os cinco domínios de deformação da seção transversal de uma viga sujeita a flexão simples como:

- Domínio 1 – Trata-se de tração não uniforme, ou seja, toda a seção encontra-se tracionada, mas de maneira não uniforme. A linha neutra encontra-se a uma distância fora da seção transversal.
- Domínio 2 – Neste domínio, a linha neutra divide a seção transversal em uma região tracionada e outra comprimida. O Estado Limite Ultimo (ELU) é atingido pelo alongamento do aço a 1%, e o encurtamento da fibra mais comprimida do concreto é inferior a 0,35%.
- Domínio 3 – Assim como no domínio 2, a linha neutra subdivide a seção em uma borda tracionada e outra comprimida, porém, o ELU é atingido com o alongamento do aço entre 1% e o valor de  $\varepsilon_{yd}$  (deformação de início de escoamento do aço).
- Domínio 4 – Este domínio subdivide-se no caso em que a armadura tracionada não está escoando, pois, sua deformação é menor que  $\varepsilon_{yd}$ . E no caso em que as armaduras se encontram totalmente comprimidas.
- Domínio 5 – Compressão não uniforme sem tração.

Em serviço, a situação desejável para o projeto é o dimensionamento perante aos domínios 2 e 3, pois, os materiais são aproveitados de maneira econômica e a ruína pode ser alarmada com o aparecimento de fissuras na região tracionada motivadas pelo escoamento do aço. Essa situação exige a obrigatoriedade de verificação do Estado limite de Serviço – ELS de abertura de fissuras, pois, situações fora desses padrões pode comprometer a finalidade da peça, reduzindo a inercia da mesma e aumentando

o risco de oxidação da armadura, esses problemas devem ser evitados pois, eles diminuem a resistência as tensões de tração e podem levar a estrutura ao colapso.

Perante a necessidade de construção de peças que demandem suportar grande concentração de esforços de flexão, um projeto com estruturas em concreto armado pode ser inviável, e seu dimensionamento dentro dos domínios considerados seguros pode acarretar em peças com grandes seções transversais, além da necessidade do emprego de grandes quantidades de aço. Uma maneira de tornar o projeto viável é o emprego do sistema de protensão. Na aplicação desse sistema são inseridas forças axiais ao longo da peça, por meio de cabos ou cordoalha colocados em seu interior, esses cabos são tracionados com equipamento específico, liberados e fixados na extremidade da peça. Quando liberados do equipamento, os cabos tendem a comprimi-la causando um efeito axial contrário ao exercido pelas forças de flexão. Essa aplicação recebe o nome de concreto protendido, na Figura (2) ilustra-se a seção transversal de uma viga de concreto protendido.

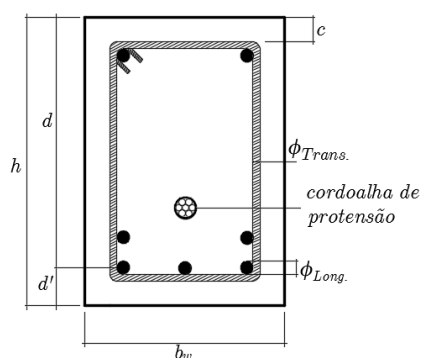


Figura 2 – Seção Transversal de uma Viga Retangular de Concreto Protendido

Fonte: Adaptado de (PORTO e FERNANDES, 2015)

Essa ideia de protender o concreto teve suas origens simultaneamente a do concreto armado (CARVALHO, 2017). Após a criação do cimento Portland em 1824, os franceses e os alemães começaram a produzir e a desenvolver técnicas para melhorar a capacidade das peças produzidas na construção civil. Em meados do século XIX, o concreto armado já era conhecido mundialmente (PORTO E FERNANDES, 2015).

Segundo Carvalho, (2017), no ano de 1886, o engenheiro P. H. Jackson, de São Francisco nos Estados Unidos utilizou esse método para protender arcos de concreto em uma de suas obras, porém o processo ainda não era estudado. A técnica então passou a ser apreciada e várias patentes começaram a surgir, porém sem sucesso devido ao pouco conhecimento dos fenômenos de fluência e retração do concreto.

Desse modo em 1928, o francês Eugène Freyssinet apresentou o primeiro trabalho coerente sobre concreto protendido. Ele estudou as perdas de tensão de protensão referentes aos fenômenos de retração e deformação lenta, complementando a importância da protensão utilizada quando cedida a elevadas tensões nos cabos, era possível então, garantir um efeito duradouro da protensão (PORTO E FERNANDES, 2015).

Nota-se na história que Eugène Freyssinet foi uma das figuras de maior destaque no desenvolvimento do método. Estudou e patenteou técnicas construtivas, aços especiais e concretos especiais, contribuindo significativamente para o desenvolvimento do concreto protendido, se espalhando por todo o mundo.

No Brasil relatos da primeira obra executada utilizando o sistema de Freyssinet foi a ponte do Galeão, como mostrado na Figura (3), construída no Rio de Janeiro em 1948. Para o projeto, todo material necessário para protensão das longarinas foi importado da França e o projeto contou com a autoria do próprio Freyssinet (MOREIRA, 2016).



Figura 3 – Ponte do Galeão

Fonte: <https://oglobo.globo.com/rio/bairros/>

Em 1954 a ponte Presidente Dutra tornou-se a segunda obra brasileira concluída com sistema de protensão, contudo o material para o desenvolvimento do projeto já estava sendo fabricado no Brasil. A mesma possui um vão central composto por vigas protendidas medindo 54 metros entre seus pilares. Na Figura (4) apresenta-se a ponte Presidente Dutra.



Figura 4 – Ponte Presidente Dutra

Fonte: <https://www.vivaosertao.com.br/index.php/experiencias/item/124-ponte-presidente-dutra>

Com a consolidação da empresa Belgo Mineira no Brasil, produzindo materiais e equipamentos para desenvolver a tecnologia de protensão, a possibilidade de expandir a aplicação de sistemas protendidos era considerada pelos profissionais. Em 1997, o desenvolvimento das cordoalhas engraxadas possibilitou aos engenheiros, arquitetos e projetistas um sistema construtivo mais econômico e vantajoso na confecção de elementos protendidos (MOREIRA, 2016), porém ainda existem grandes riscos de colapso estrutural decorrentes de manifestações patológicas no sistema.

Na confecção de peças tanto em concreto armado quanto protendido os materiais utilizados são: cimento, agregados graúdo e miúdo, água e aço de armadura

passiva. O que difere um do outro é o emprego da cordoalha de protensão no concreto protendido, essa cordoalha também é chamada de armadura ativa, pois ela recebe a aplicação de esforços para ser previamente alongada (CARVALHO, 2017).

Em sistemas protendidos com cabos ou cordoalhas aderentes, uma força inicial  $P_0$  é inserida na armadura ativa por meio de equipamentos hidráulicos. Os cabos ou cordoalhas já tracionadas são fixadas pelo sistema de ancoragem e liberados após o endurecimento da peça de concreto. Quando liberados a armadura ativa exerce uma força de compressão no concreto. Essa força axial aplicada na peça aumenta consideravelmente a sua resistência aos esforços de tração. Sendo assim, a possibilidade de construção de peças esbeltas capazes de suportar maiores carregamentos e vãos consideravelmente grandes é bastante apreciável.

O uso de peças protendidas sugere também algumas vantagens em relação ao concreto armado tradicional, algumas delas podem ser listadas a seguir:

- Permite estruturas com maior vão e menor área da seção transversal, afim de suportar maiores carregamentos;
- Possibilita a redução de flecha;
- Redução ou eliminação de abertura de fissuras, configurando em estruturas mais protegidas contra a corrosão e oxidação do aço;
- Redução do peso próprio devido a utilização de peças esbeltas;
- Possibilita uma maior variedade das peças nos projetos arquitetônicos;
- No caso de peças pré-moldadas, possibilita maior controle tecnológico durante a execução e reaproveitamento das formas.

Em contrapartida algumas desvantagens em utilizar o concreto protendido em relação ao concreto armado são listadas como:

- Maior risco de vibração gerada por cargas móveis em função da esbeltez das peças;
- Maior risco de instabilidade geométrica em vigas de grandes vãos sem contenção lateral contínua, por serem esbeltas;
- Risco de colapso progressivo no caso de sistemas estruturais com lajes lisas protendidas;
- Uso de mão de obra especializada e equipamentos adequados e calibrados para confecção;
- Requer uma supervisão perfeita em todas as etapas de construção.

Segundo Pedroso (2009), estima-se que 11 bilhões de toneladas de concreto são produzidas por ano em todo mundo, a estatística de consumo por habitante é inferior apenas ao consumo de água. Notando tamanha importância para a sociedade, o concreto requer uma pesquisa contínua de modo a fornecer uma melhor descrição do seu comportamento mecânico sob diferentes condições de carregamentos (WARDEH e TOUTANJI, 2016).

## 1.1 Motivação

A análise do comportamento de estruturas por elementos finitos não-lineares, em particular para estruturas de concreto protendido tem sido um tema abordado em vários trabalhos de pesquisa ao longo dos anos, alguns deles podem ser citados a seguir.

No decorrer do tempo várias metodologias têm sido aplicadas na análise de tensão/deformação de elementos estruturais. Para análise de modelos envolvendo não linearidades físicas e geométricas o trabalho de Batoz e Dhatt (1979) fornecem um algoritmo em elementos finitos não lineares, com implementação do método de Newton-Raphson para resolução de sistemas. Hernández-Montes *et al.* (2013) e Parente Jr *et al.* (2014) utilizam elementos finitos no estudo da não linearidade física e geométrica de estruturas de concreto armado, ambos trabalhos apresentam uma avaliação eficiente e positiva da influência da discretização em elementos finitos comparando com resultados experimentais. Zona *et al.* (2008), considera as não linearidades físicas e geométricas na análise de vigas com protensão externa, o objetivo dos autores foi avaliar as deflexões da viga sobre cargas de serviço.

No estudo de elementos de concreto protendido sem aderência o fator primordial é o acoplamento entre protensão e concreto armado, o método do balanço de carga, como é conhecido pode ser encontrado nos trabalhos de (BARBIERI *et al.*, 2006; HUSSIEN *et al.*, 2012; KIM e LEE, 2012; LYN e BURNS, 1981; VU *et al.*, 2010 e ZONA *et al.*, 2009).

Análise de estruturas pós-tensionadas podem ser encontradas em (AALAMI, 2000). Para modelos numéricos de estruturas pré-tensionadas com e sem aderência por meio de elementos finitos mistos pode ser visto em (BARBIERI *et al.*, 2006; ZONA *et al.*, 2008 e LOU e LOPES, 2016). Elementos finitos usados na modelagem de estruturas de concreto armado pré-tensionado com conexões deformáveis foram estudados por

(DALL'ASTA e ZONA, 2005). Problemas envolvendo efeitos de segunda ordem podem ser encontrados em (LOU e XIANG, 2010). Análise numérica para estruturas compostas por sólidos deformáveis estáticos podem ser encontradas em (SOUSA e CALDAS, 2005 e SOUSA e MUNIZ, 2007).

Lyn *et al.* (1981), apresenta como principal característica do modelo desenvolvido no seu trabalho, a consideração que a força de protensão produzida na armadura ativa é considerada como força externa nas equações de equilíbrio no concreto armado.

Problemas de deformação em estruturas de concreto protendido dependente do tempo são analisados em (LOU e LOPES, 2013 e 2014).

Percebe-se que, a principal característica nos modelos, apresentados recentemente na literatura técnica, é a hipótese de que as forças produzidas pela armadura ativa são consideradas como força externa no concreto armado. Desse modo nota-se que modelos baseados no método do balanço de cargas têm se mostrado eficientes quanto a realização do acoplamento entre cordoalha e concreto armado.

## **1.2 Justificativa**

Diferente de uma indústria automobilística, o produto final da construção civil consiste em uma variedade de edificações dos mais diversos modelos e finalidades, e essa diversidade de projetos pode dificultar a padronização do processo produtivo. No entanto a utilização de elementos pré-moldados tem contribuído para o desenvolvimento da engenharia civil em escala industrial; isso possibilita um aumento de produtividade, um controle de custos e maior controle de qualidade das peças.

Segundo a ABNT NBR 9062 (2017) que regulamenta o projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado, define-se pré-moldado como elemento moldado fora do local de utilização definitiva na estrutura que passa por um controle de qualidade antes de seu posicionamento final. Geralmente esses componentes são confeccionados em complexos industriais e transportados para o local onde serão utilizados. Analisando as perspectivas da produção em série, percebe-se a eficiência do sistema produtivo quando se trata da confecção de peças semelhantes, produzidas em grandes quantidades, essa técnica possibilita para a construção civil, uma redução considerável no tempo de execução da obra.

Objetivando o controle tecnológico, o concreto protendido tem sido reconhecido como uma excelente opção estrutural para construção de vigas, lajes e pilares, sendo ele, empregado em todo o mundo (MOREIRA *et al.*, 2018). Em projetos comerciais e industriais a viabilidade do uso de peças pré-moldadas protendidas com aderência pode ser percebida devido sua excelente relação custo/benefício pois, pode reduzir intervenções com manutenção corretiva constante; redução no custo operacional; maior agilidade de execução e disponibilidade de maior área útil. Tecnicamente, ele pode ser visto como uma boa alternativa de controlar ou evitar a fissuração na região tracionada de uma peça de concreto (HANAI, 2005).

No entanto a análise de vigas protendidas envolve várias dificuldades relacionadas ao acoplamento entre a deformação local dos aços de protensão e a deformação global da estrutura (ZONA *et al.*, 2008). A capacidade resistente final de vigas protendidas não pode ser avaliada por uma análise local das seções críticas sendo necessária uma análise não linear de todo o sistema estrutural, viga e cordoalha de protensão (ZONA e DALL'ASTA, 2009). Pensando nisso o principal objetivo da análise não linear de vigas protendidas é obter suas curvas de carga-deslocamento, o que permite avaliar as deflexões, capacidade de carga, ductilidade e outros importantes parâmetros usados no dimensionamento de peças protendidas (MOREIRA *et al.*, 2018).

Hanai (2005), afirma que o concreto protendido permite a construção de grandes estruturas, porém, a aplicação da técnica exige conhecimentos e recursos tecnológicos avançados. Neste contexto, a proposta de estudo para modelos de deformação dos materiais pode ser apreciada, pois, em peças de concreto protendido a armadura ativa incorpora deslocamentos axiais ao longo da viga tornando a análise não usual.

Nos elementos pré-moldados os esforços de protensão gerados em cada seção transversal sofrem perdas devido ao atrito entre a área externa da cordoalha e o concreto. Essa força dissipativa é proporcional ao coeficiente de atrito entre os cabos da cordoalha e o ângulo de inclinação dos mesmos. As perdas diferidas no tempo também devem ser consideradas nesses elementos, dessa forma, em uma situação de serviço é importante conhecer o comportamento dos materiais para estabelecer a melhor opção de projeto.

O aperfeiçoamento dessa proposta para o caso de protensão sem aderência, ao qual se despreza o atrito, está relacionado a manutenção das cargas de protensão, nesse contexto a relação carga/deslocamento quando analisada no decorrer do tempo, pode ajudar a prever o período necessário de re-protensão das cordoalhas.

### 1.3 Objetivos

Nessa abordagem, aplicações da protensão aderida ao concreto são exploradas, em particular, o processo de análise descrito representa elementos de viga de concreto protendido que podem ser fabricadas como peças pré-moldadas. De forma a contribuir cientificamente para melhor compreensão do comportamento dessas estruturas em serviço, esse modelo pode colaborar significativamente para melhorar os processos de produção/execução dessas estruturas devido a capacidade de otimização do fator carga/deslocamento.

O objetivo geral do presente trabalho é desenvolver um modelo numérico que possa verificar o fator carga/deslocamento, explanando as equações de equilíbrio de forças generalizadas para vigas de concreto protendido com aderência, via programação de elementos finitos não-lineares.

Como objetivos específicos, pretende-se:

- Estudar os conceitos gerais de sistemas de protensão e suas particularidades;
- Desenvolver uma abordagem normativa segundo a NBR 6118 (2014) a respeito do dimensionamento de peças protendidas, considerando as principais perdas de protensão;
- Apresentar os principais modelos constitutivos dos materiais utilizados na literatura para análise do comportamento de peças de concreto protendido;
- Utilizando a formulação por balanço de força nodal, deduzir e apresentar os elementos da matriz de rigidez tangente elementar para o concreto;
- Implementar a rotina em elementos finitos no software MATLAB R2015a que considere o comportamento de vigas de concreto protendido com aderência, para obtenção do campo de deslocamentos;
- Validar o modelo proposto comparado a sua resposta com resultados obtidos na literatura técnica.

## **CAPÍTULO 2**

### **O SISTEMA DE PROTENSÃO DO CONCRETO**

Proveniente da mistura da pasta com os agregados miúdo e graúdo, o concreto em seu estado fluido é largamente utilizado na construção civil. Em um sistema estrutural usa-se o concreto preparado seguindo os procedimentos de execução e obedecendo os cálculos das proporções de cada material na sua mistura. Em se tratando de resistência o concreto possui elevada capacidade de resistir a esforços que causam a compressão, porém, quando se refere ao efeito de tração sua resistência é relativamente baixa.

Dentre as possibilidades para melhorar a resistência do concreto na região tracionada, faz-se uso da composição do aço e concreto, esse conjunto recebe o nome de concreto armado onde o aço empregado no interior, recebe o nome de armadura passiva e então esse conjunto se torna um material monolítico após o processo de cura.

Em geral um problema que afeta a resistência de vigas de concreto armado é o aparecimento de fissuras na região tracionada uma alternativa para reduzi-las é o emprego da técnica de protensão no concreto, seu propósito é reduzir ou eliminar as tensões de tração na peça que podem causar a fissuração possibilitando assim a produção de peças esbeltas capazes de suportar maiores carregamentos. A protensão

do concreto ainda pode ser encarada como uma forma artificial de inserir reações permanentes as ações adversas ao uso da estrutura (HANAI, 2005).

A aplicação da técnica de protensão possibilita a construção de peças com menores seções transversais que atingem vãos consideravelmente grandes, esses projetos quando comparados ao concreto armado convencional, podem ser considerados em uma análise de custo, pois, em uma peça protendida o consumo dos materiais concreto e aço de armadura passiva pode ser reduzido significativamente.

Por serem soluções diferentes o concreto armado convencional e o concreto protendido possuem aplicações específicas. Em obras complexas e de grande porte que demandem grandes resistência ou expostas a ambientes agressivos o ideal é o emprego do concreto protendido. Para obras comuns de pequeno porte em geral residenciais, industriais ou comerciais a aplicação do concreto armado convencional se encontra consagrado pela engenharia atual.

Na aplicação da técnica de protensão, é inserido na peça um estado interno de tensões contrárias às tensões geradas pelo carregamento externo. Para sua execução são colocados no interior do concreto cabos em aço ou cordoalhas, esses são tracionados e liberados logo após seu endurecimento. Quando liberados as cordoalhas tendem a comprimir a estrutura anulando assim o efeito gerado pelas cargas externas. A armadura ativa quando submetida a deformação constante apresentam uma perda de tensão denominada  $\Delta\sigma_p$ , conhecida como relaxação do aço, elas são classificadas em aços com relaxação normal (RN), quando a variação de tensão pode atingir até 12% da tensão inicial e aços com relaxação baixa (RB), quando a variação de tensão é menor ou igual a 3,5% da tensão inicial.

De acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2014) em seu item 3.1.6, uma armadura ativa é aquela destinada à produção de força de protensão, isto é, na qual se aplica um pré-alongamento inicial. Ela é composta por barras, fios isolados ou cordoalhas.

Na Figura (5) ilustra-se uma viga bi apoiada com protensão total, nela  $P$  é a força de protensão aplicada na armadura ativa dimensionada para uma área de aço  $A_p$ . Os benefícios da protensão podem ser verificados para essa situação quando observados os diagramas de esforços normais causados pela força  $P$  somado ao diagrama causado pelo momento  $M$ . Nesse caso os termos  $\sigma_{t,p}$  é a tensão de tração

devido a força de protensão,  $\sigma_{c,p}$  é a tensão de compressão devido a força de protensão,  $\sigma_{c,M}$  é a tensão de compressão devido ao momento fletor gerado pelo carregamento e  $\sigma_{t,M}$  é a tensão de tração devido ao momento fletor gerado pelo carregamento. A soma dos diagramas resulta em uma protensão total restando apenas a tensão de compressão  $\sigma_c$  na borda superior.

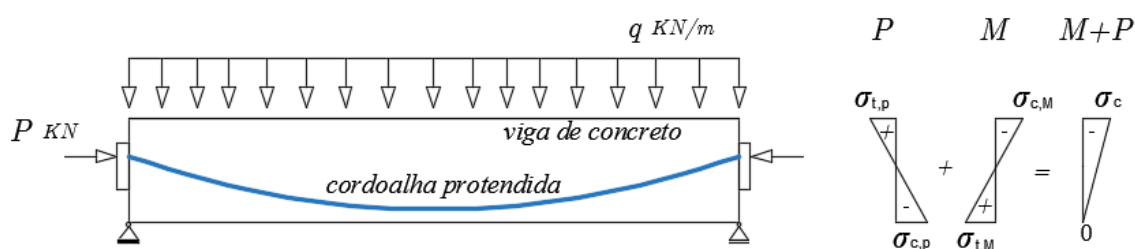


Figura 5 – Tensões Normais em uma Viga Protendida

Fonte: Adaptado de (BASTOS, 2019)

De acordo com o processo construtivo especificado na NBR 6118 (ABNT, 2014), o sistema de protensão pode ser dividido em concreto com armadura ativa pré-tracionada e concreto com armadura ativa pós-tracionado. No caso de pós-tração existem ainda a protensão com aderência posterior e a sem aderência quando se trata de cordoalhas engraxadas.

Na pré-tração, a aplicação da força de protensão é realizada antes do seu lançamento, geralmente ela é empregada em peças pré-moldadas, onde o processo construtivo ocorre em escala industrial. Para fabricação dessas peças, os equipamentos são montados na chamada pista de protensão, uma plataforma plana e reta. Em suas extremidades existem os chamados blocos de ancoragem onde são acomodados os cabos para serem tracionados. Os cabos são dispostos ao longo da pista e fixados de um lado na ancoragem passiva e do outro na ancoragem ativa onde são tracionados com um valor de tensão abaixo da tensão limite do regime de escoamento. Após o processo a armadura passiva é posicionada e então é feita a concretagem.

No caso de pós-tensão, a aplicação da força é realizada após o endurecimento do concreto, essa situação se subdivide em protensão com aderência e protensão sem aderência.

Na protensão com aderência os cabos são inseridos dentro da bainha e após o endurecimento do concreto os cabos são tensionados, esse ato resulta em espaços vazios deixados pelos cabos dentro da bainha, sendo assim para aderir a estrutura usa a nata de injeção aplicada dentro da bainha. Algumas vantagens no uso da protensão com aderência em relação ao uso da protensão sem aderência podem ser listadas a seguir.

- A introdução da nata de cimento oferece maior proteção da armadura contra a corrosão;
- A colocação das armaduras dentro da bainha pode ser realizada após o processo de concretagem, isso permite a união de elementos pré-fabricados;
- O sistema apresenta uma variada gama de ancoragens ativa, passiva, intermediária e de emenda possibilitando a confecção de diversos modelos de peças.

A protensão sem aderência faz uso de cabos ou cordoalhas já envolvidas por uma bainha plástica onde o contato entre o cabo e bainha é envolvido por graxa, nesse caso durante a aplicação da protensão a perda por atrito cabo bainha pode ser desconsiderada. Algumas vantagens no uso da protensão sem aderência em relação ao uso da protensão com aderência podem ser listadas a seguir.

- Os aços de protensão recebem tratamento anticorrosiva de fábrica e pode ser recomendada para uso em ambientes agressivos;
- Cabos engraxados possibilitam uma maior excentricidade em sua disposição;
- O coeficiente de atrito é consideravelmente nulo em relação ao sistema aderente.

## **2.1 Aplicações da Protensão em Elementos Pré-moldados**

Em relação ao sistema construtivo, os elementos pré-moldados podem ser agrupados de acordo com três filosofias: os sistemas de ciclo fechado, os de ciclo aberto e o flexibilizado.

No ciclo fechado todas as peças são adquiridas seguindo um único e específico processo de fabricação, isso resulta em uma incompatibilidade com outros tipos de elementos estruturais. Essa padronização possibilita a redução do custo de projeto e de produção, porém, esse sistema permite pouca flexibilidade arquitetônica.

Em sistemas de ciclo aberto os elementos são compatíveis com outros elementos estruturais independentes do processo de fabricação ou do fornecedor. São exemplos de elementos desenvolvidos com a filosofia de ciclo aberto os painéis alveolares protendidos, que podem ser utilizados na composição de pisos, lajes ou para elementos de fachada.

O ciclo flexibilizado é caracterizado por reunir características dos ciclos aberto e fechado, os elementos podem ser projetados exclusivamente para uma determinada obra, porém é importante considerar a padronização das soluções tecnológicas, como acontece com as ligações.

Segundo El Debs (2017), para que uma construção possa receber em sua estrutura elementos pré-moldados, ela deve ser projetada, já prevendo a aplicação desse método construtivo. Ainda segundo o autor os princípios gerais para o projeto de estruturas de concreto pré-moldado são:

- Conceber o projeto da obra visando a utilização do concreto pré-moldado;
- Resolver as interações da estrutura com as outras partes da construção;
- Minimizar o número de ligações;
- Minimizar o número de tipos de elementos;
- Utilizar elementos de mesma faixa de peso.

Para a execução de projetos com concreto pré-moldado o uso dos sistemas de protensão pode ser compreendido como uma solução duradoura e eficaz. Do ponto de vista econômico, o custo do pré-moldado protendido é proporcionalmente inferior à resistência que as peças alcançam em serviço. Do ponto de vista técnico pode-se destacar a maior facilidade de produção e maior controle de qualidade devido à padronização do processo, gerando maior confiabilidade das peças.

Geralmente o processo de fabricação de pré-moldados protendidos é realizado com o auxílio da pista de protensão. Na Figura (6) apresenta-se um complexo industrial para fabricação de concreto pré-moldado protendido.



Figura 6 – Complexo industrial para Fabricação de Pré-moldado Protendido

Fonte: <http://www.leonardi.com.br/galeria/fabrica>

Na pista de protensão os cabos ou cordoalhas são estirados em seu comprimento e fixados nos blocos de ancoragem delimitados na extremidade da mesma. O concreto é lançado e moldado nas formas com o auxílio da máquina moldadora, como mostrado na Figura (7).

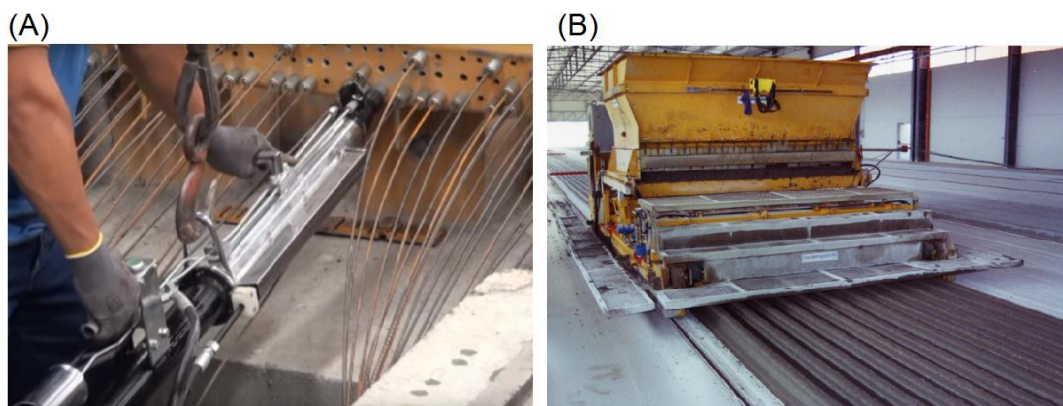


Figura 7 – (A) Aplicação da Protensão nas Cordoalhas, (B) Moldagem do Concreto

Fonte: (A) [www.ecivilnet.com](http://www.ecivilnet.com); (B) [www.nordimpianti.com](http://www.nordimpianti.com)

Das variedades de peças fabricadas podem ser citadas as vigas protendidas pré-moldadas, sua aplicação é vista com frequência em Obras de Arte Especiais (OAE's)

conhecidas também como pontes e viadutos, a viabilidade de projeto se destaca devido agilidade de execução e em alguns casos quando o canteiro de obras é instalado em locais de difícil acesso. Na Figura (8) mostra-se um modelo de viga protendida pré-moldada.



Figura 8 – Viga Protendida Pré-Moldada

Fonte: [www.fotos.habitissimo.com.br](http://www.fotos.habitissimo.com.br)

As lajes protendida pré-moldadas também são excelentes soluções estruturais, sua aplicação permite a redução no uso de vigas e pilares possibilitando favorecer a área útil da construção, além disso a redução no peso próprio é bastante considerável. Em particular as lajes alveolares protendidas são bastante utilizadas na construção de escolas, centros comerciais e hospitais. Dentre os elementos com aderência inicial, as lajes alveolares protendidas se destacam como o mais utilizado no mercado devido sua imensa variedade de aplicação. Como exemplo, na Figura (9) tem-se painéis de lajes alveolares protendidas ao lado da pista de protensão.



Figura 9 – Laje Alveolar Protendida Pré-Moldada

Fonte: [www.blogaecweb.com.br](http://www.blogaecweb.com.br)

## 2.2 Aplicações da Protensão na Pós-tensão

Para elementos pós-tensionados uso da protensão sem aderência no concreto se mostra como uma boa alternativa no desenvolvimento de projetos estruturais, ela é bastante empregada em obras de grande porte ou em situações onde seja necessária maior capacidade de resistência da peça. Nesta seção serão apresentadas algumas aplicações da protensão com cordoalhas engraxadas, geralmente essa aplicação é realizada com o concreto moldado *in-loco*.

Na Figura (10) apresenta-se uma construção de um radier, sendo uma laje de concreto armado ou protendido apoiada diretamente no solo. Ela é projetada para receber e distribuir toda carga provinda da estrutura sobre o solo. A protensão aplicada ao radier permite a construção de uma peça única e esbelta, quando comparada a uma laje somente de concreto armado, sua redução de altura pode chegar a 40% e a redução de armadura passiva atinge valores de até 80%. Quando concluída a obra, o radier também pode possuir a função de piso, geralmente utilizado na construção de indústrias com circulação de veículos pesados.

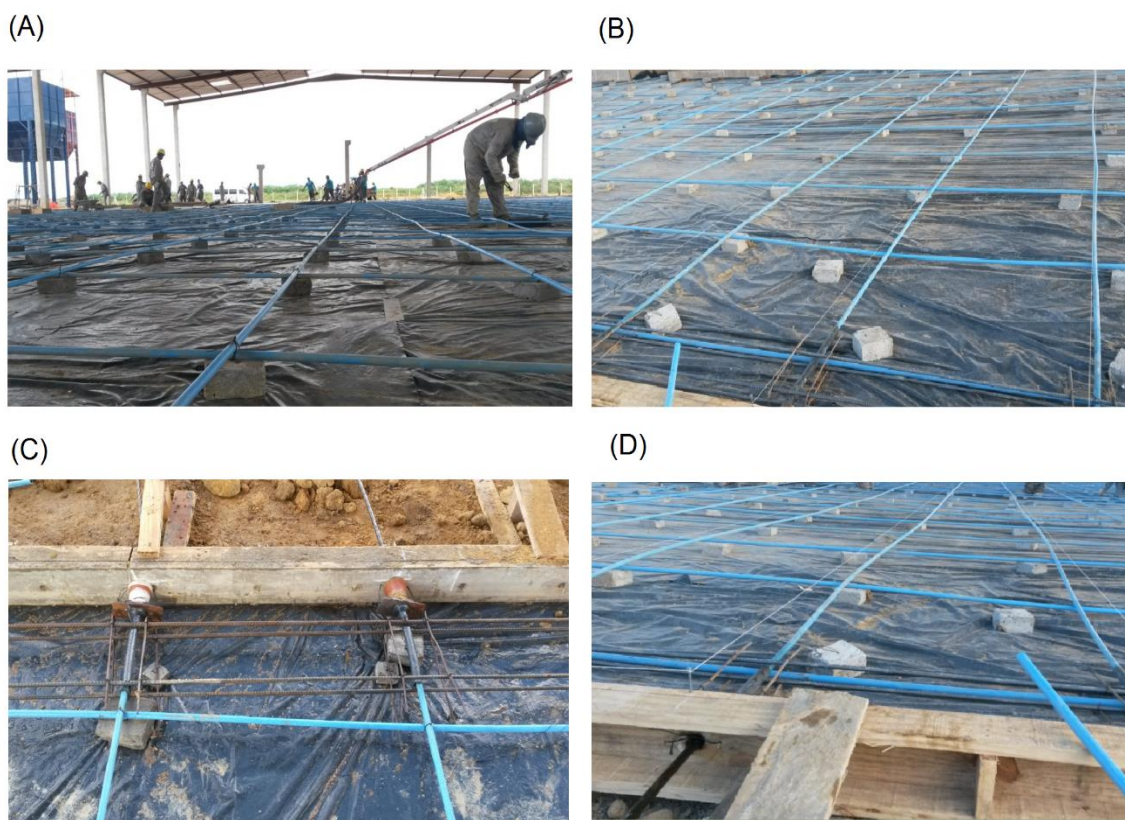


Figura 10 – (A) Detalhe da Laje Radier, (B) Distribuição das Cordoalhas Engraxadas, (C) Vista Interna Ancoragem Ativa e (D) Vista Externa da Ancoragem Ativa

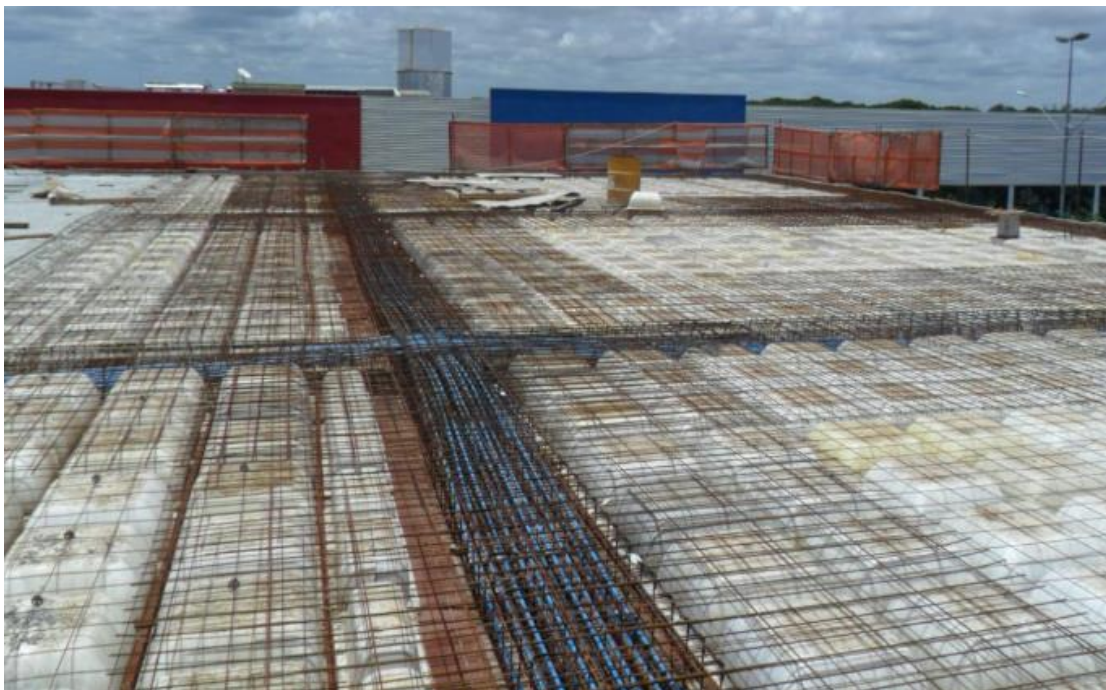
Fonte: Cortesia Eng. Civil Almir Pereira dos Santos

Na Figura (11) apresenta-se o processo de construção de uma edificação ao qual a solução estrutural adotada é composta por lajes nervuradas e vigas protendidas sem aderência, nesse projeto a altura da viga é igual a altura da laje e o emprego de cordoalhas engraxadas são boa alternativa para garantir a resistência e reduzir o peso próprio da edificação.

A grande vantagem construtiva desse sistema estrutural, quando comparada a uma laje lisa de concreto armado convencional, se deve a execução simplificada com a utilização de formas plásticas de fácil manuseio que podem ser reaproveitadas por várias vezes no mesmo procedimento.

Do ponto de vista econômico, ela possui menor consumo de materiais e menor tempo de execução, esses aspectos quando somados podem contribuir para menor custo total da obra.

(A)



(B)



(C)

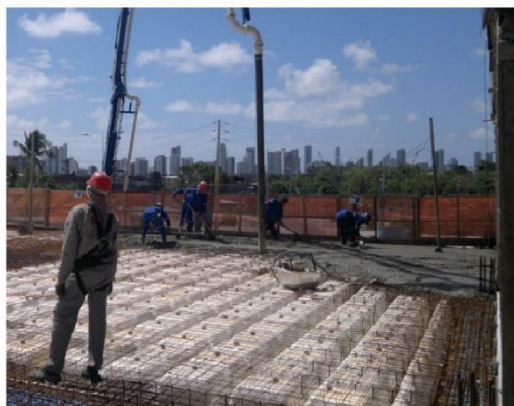


Figura 11 – (A) Laje Nervurada Protendida, (B) Detalhe das cordoalhas engraxadas (C) Processo de Concretagem da Laje

Fonte: Cortesia Eng. Civil Almir Pereira dos Santos

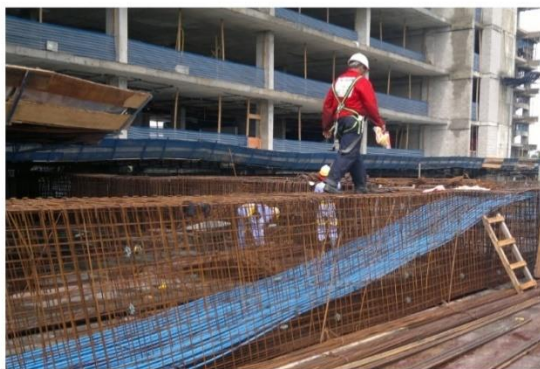
Em vigas com aplicações robustas, a protensão sem aderência pode ser considerada uma excelente solução estrutural. Na Figura (12) apresenta-se algumas

etapas do processo produtivo de uma viga pré-fabricada protendida por cordoalhas engraxadas.

(A)



(B)



(C)



Figura 12 – (A) Viga Protendida, (B) Vista Lateral da Viga, (C) Detalhe das Cordoalhas Engraxadas

Fonte: Cortesia Eng. Civil Almir Pereira dos Santos

## 2.3 Materiais do sistema

Em estruturas de concreto protendido, os materiais que compõem o sistema são os seguintes: concreto, aços de armadura passiva e aços de armadura ativa onde são aplicados a força de protensão sendo exigido materiais de alta resistência. Além desses, ainda são considerados outros tipos de elementos indispensáveis no processo construtivo, são eles: bainhas, dispositivos de ancoragens, macaco hidráulico além de outros que podem variar entre cada sistema de protensão.

### 2.3.1 Concreto

Segundo Carvalho e Filho (2016), o  $f_{ck}$  é o valor da resistência, de modo que 95% dos resultados dos ensaios estejam acima dele ou 5% abaixo, ou seja, na análise estatística dos ensaios a resistência deve apresentar 95% de confiabilidade.

As razões para o emprego de concretos com uma resistência elevada em sistemas de protensão podem ser anotados da seguinte forma:

- Os concretos com resistência inferior correm o risco de falhas próximo ao sistema de ancoragem durante a aplicação da protensão;
- Os equipamentos são dimensionados em geral para uso em concretos de alta resistência;
- O módulo de elasticidade dos concretos de alta resistência é consideravelmente superiores o que reduz as perdas diferidas no tempo.

Numa abordagem normativa são apresentados os modelos recomendados pela NBR 6118 (ABNT, 2014) e o prescrito pela norma Europeia *Eurocode 2* (2004). Ambos modelos apresentam o comportamento tensão/deformação bem semelhantes, porém, a norma Europeia apresenta um decaimento na curva devido ao amolecimento do concreto após o mesmo ter atingido sua resistência máxima. Esse efeito deve ser considerado em casos esperados para valores elevados de resistência.

O módulo de elasticidade  $E_{ci}$  pode ser considerado seguindo os critérios estabelecidos na NBR 6118 (ABNT, 2014) conforme o item 8.2.8. As Equações (2.1) e (2.2) apresentam as estratégias de cálculos

$$E_{ci} = \alpha_E 5600 \sqrt{f_{ck}} \text{ para } f_{ck} \text{ de 20 Mpa a 50 Mpa,} \quad (2.1)$$

$$E_{ci} = 21,5 \times 10^3 \alpha_E \left( \frac{f_{ck}}{10} + 1,25 \right)^{\frac{1}{3}}, \text{ para } f_{ck} \text{ de 55 Mpa a 90 Mpa,} \quad (2.2)$$

e o módulo de deformação secante  $E_{cs}$  pode ser obtido considerando a Equação (2.3) e (2.4)

$$E_{cs} = \alpha_i E_{ci}, \quad (2.3)$$

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0. \quad (2.4)$$

O fator  $\alpha_E$  corrige o módulo de elasticidade em função do tipo de agregado graúdo, conforme Tabela (1), e o  $\alpha_i$  é um coeficiente redutor do módulo de elasticidade tangente.

Tipos de Agregados	$\alpha_E$
Basalto e Diabásio	1,2
Granito e Gnaisse	1,0
Calcário	0,9
Arenito	0,7

Tabela 1 – Coeficiente  $\alpha_E$

Fonte: Adaptado de NBR 6118 (ABNT, 2014)

A norma NBR 6118 (ABNT, 2014) no item 8.2.10 ainda apresenta os critérios sobre o diagrama de tensão *versus* deformação do concreto, conforme a Figura (13).

Para análises no Estado Limite Último, pode ser empregado o diagrama idealizado pelas Equações (2.5) à (2.7)

$$\sigma_c = 0,85 f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right], \quad (2.5)$$

$$f_{ck} \leq 50MPa \rightarrow n = 2, \quad (2.6)$$

$$f_{ck} > 50MPa \rightarrow n = 1,4 + 23,4 \left[ \frac{90 - f_{ck}}{100} \right]^4, \quad (2.7)$$

Na Equação (2.5) o termo  $f_{cd}$  é conhecido como valor de cálculo, ele é o resultado da divisão,  $f_{ck}/1,4$ . O valor que representa a deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico  $\varepsilon_{c2}$ , e o valor para deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura  $\varepsilon_{cu}$  são definidos como:

a) Para concretos com  $f_{ck} \leq 50MPa$

$$\varepsilon_{c2} = 2,0\text{‰}, \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_{cu} = 3,5\text{‰}; \quad (2.9)$$

b) Para concretos com  $f_{ck} > 50MPa$

$$\varepsilon_{c2} = 2,0\text{‰} + 0,085\text{‰} (f_{ck} - 50)^{0,53}, \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_{cu} = 2,6\text{‰} + 35\text{‰} \left[ \frac{90 - f_{ck}}{100} \right]^4; \quad (2.11)$$

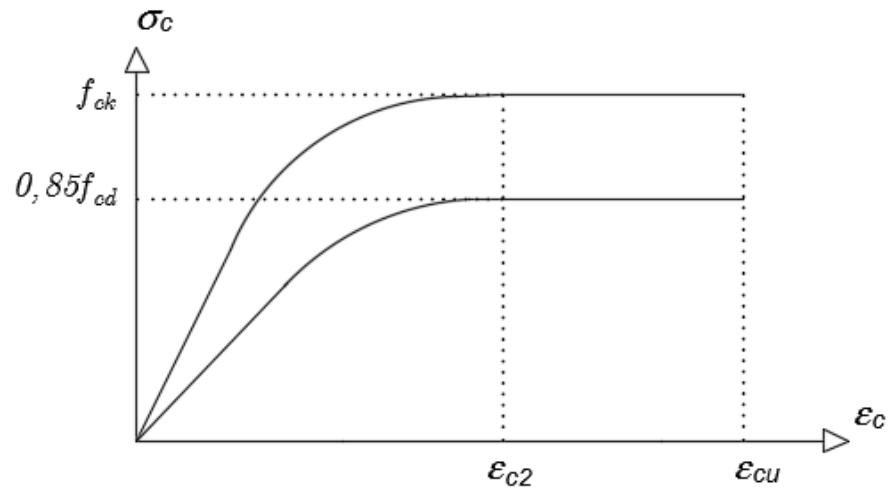


Figura 13 – Diagrama Tensão/deformação do concreto

Fonte: Adaptado de NBR 6118 (ABNT, 2014)

Embora o diagrama tensão-deformação apresentado na NBR 6118 (ABNT, 2014) seja o mais comumente utilizado para execução de projetos, outras normas apresentam modelos semelhantes de curva, no entanto elas são recomendadas para análise não linear.

Assim sendo, a norma Europeia *Eurocode 2* (2004) apresenta o seguinte modelo na Equação (2.12) quando se trata de análise não linear

$$\sigma_c = f_{cm} \left[ \frac{\kappa\eta - \eta^2}{1 + (\kappa - 2)\eta} \right], \quad (2.12)$$

$$f_{cm} = f_{ck} + 8(\text{MPa}), \quad (2.13)$$

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}}, \quad (2.14)$$

$$\kappa = 1,05 E_{cm} \frac{|\varepsilon_{c1}|}{f_{cm}}, \quad (2.15)$$

$$E_{cm} = 22 \left[ \frac{f_{cm}}{10} \right]^{0,3}. \quad (2.16)$$

Nas Equações (2.14) e (2.15) o termo  $\varepsilon_{c1}$  é a deformação de pico de tensão descrito como

$$\varepsilon_{c1} = 0,7 f_{cm}^{0,31}. \quad (2.17)$$

Na Figura (14) apresenta-se o perfil da curva do diagrama tensão *versus* deformação recomendado pela Norma Europeia supracitada.

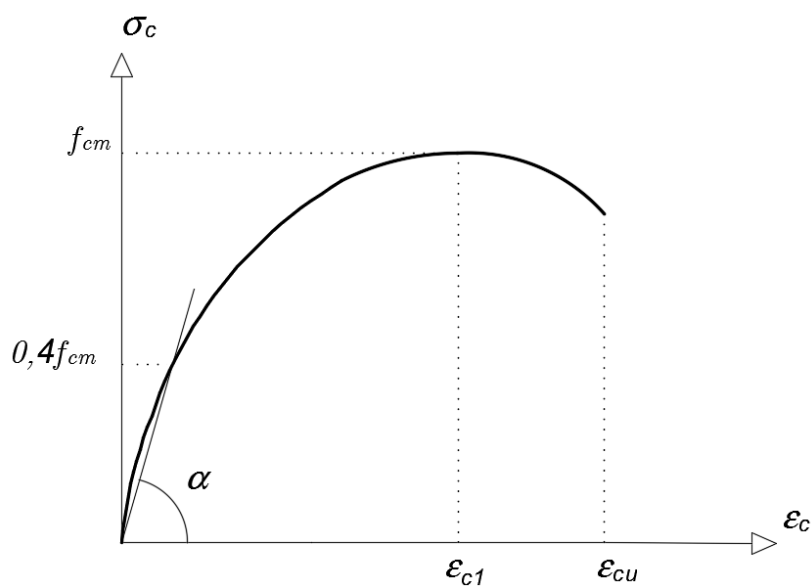


Figura 14 – Diagrama Tensão/deformação do Concreto Segundo o *Eurocode 2*

Fonte: Adaptado de (*EUROCODE 2*, 2004)

Outros modelos constitutivos para o concreto podem ser encontrados na literatura, como o apresentado por Carreira e Chu (1985), o proposto por Desayi e

Krishnan (1964) e o de Hognestad (1951), essas propostas são geralmente encontradas no que se refere a não linearidade física do material.

O modelo para o concreto na compressão de Hognestad (1951) apresenta um trecho ascendente e um descendente, suas equações são muito semelhantes ao modelo prescrito na NBR 6118 (ABNT, 2014).

O trecho ascendente da curva, está em um intervalo de 0 a  $\varepsilon_c$  com uma curva parabólica, para esse trecho Hognestad considera a Equação (2.18)

$$\sigma_c = f_{cm} \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right) - \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \rightarrow \varepsilon_c \leq \varepsilon_0. \quad (2.18)$$

O trecho descendente é dado por uma reta com inclinação negativa, conforme a Equação (2.19)

$$\sigma_c = f_{cm} \left[ 1 - 0,15 \left( \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_0}{\varepsilon_u - \varepsilon_0} \right) \right] \rightarrow \varepsilon_0 < \varepsilon_c \leq \varepsilon_u. \quad (2.19)$$

Na Figura (15) apresenta-se a curva do modelo de Hognestad (1951).

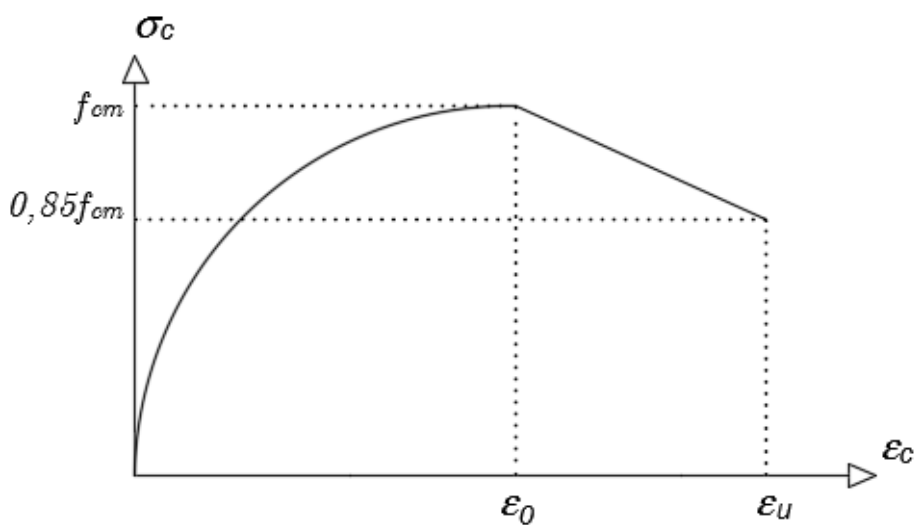


Figura 15 – Diagrama Tensão/deformação do concreto segundo Hognestad (1951).

Fonte: Adaptado de (LOU e XIANG, 2006)

No trabalho desenvolvido por Zupan e Saje (2005) eles consideram para o concreto quando submetido a compressão o modelo desenvolvido por Desayi e Krishnan (1964) e para o concreto submetido a tração o modelo de Bergan e Holand (1979).

As equações que descrevem esses modelos são apresentadas a seguir

$$\sigma_c = 0 \rightarrow \varepsilon_c \leq \varepsilon_u, \quad (2.20)$$

$$\sigma_c = 2fm|\varepsilon_1| \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon^2} \rightarrow \varepsilon_u < \varepsilon \leq \varepsilon_r, \quad (2.21)$$

$$\sigma_c = \frac{\sigma_r}{\varepsilon_r - \varepsilon_m} (\varepsilon - \varepsilon_m) \rightarrow \varepsilon_r < \varepsilon \leq \varepsilon_m, \quad (2.22)$$

$$\sigma_c = 0 \rightarrow \varepsilon_m \leq \varepsilon, \quad (2.23)$$

onde  $\sigma_r$  é a resistência do concreto à tração

$$\sigma_c = 2fm|\varepsilon_1| \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r^2 + \varepsilon^2}, \quad (2.24)$$

e  $f_m$  é a resistência do concreto à compressão ( $f_m = |\sigma_{\min}|$ ),  $\varepsilon_1$  é a deformação correspondente a  $f_m$ ,  $\varepsilon_u$  é a deformação última do concreto à compressão,  $\varepsilon_r$  é a deformação referente à resistência do concreto à tração e  $\varepsilon_m$  é a deformação última do concreto à tração. Alguns valores provados empiricamente para  $\varepsilon_r$  e  $\varepsilon_m$  são usualmente encontrados na literatura, esses valores são dados como:  $\varepsilon_r = 5,5 \cdot 10^{-5}$  e  $\varepsilon_m = 7,0 \cdot 10^{-4}$ .

Na Figura (16) apresenta-se a curva do modelo adotado por Zupan e Saje (2005).

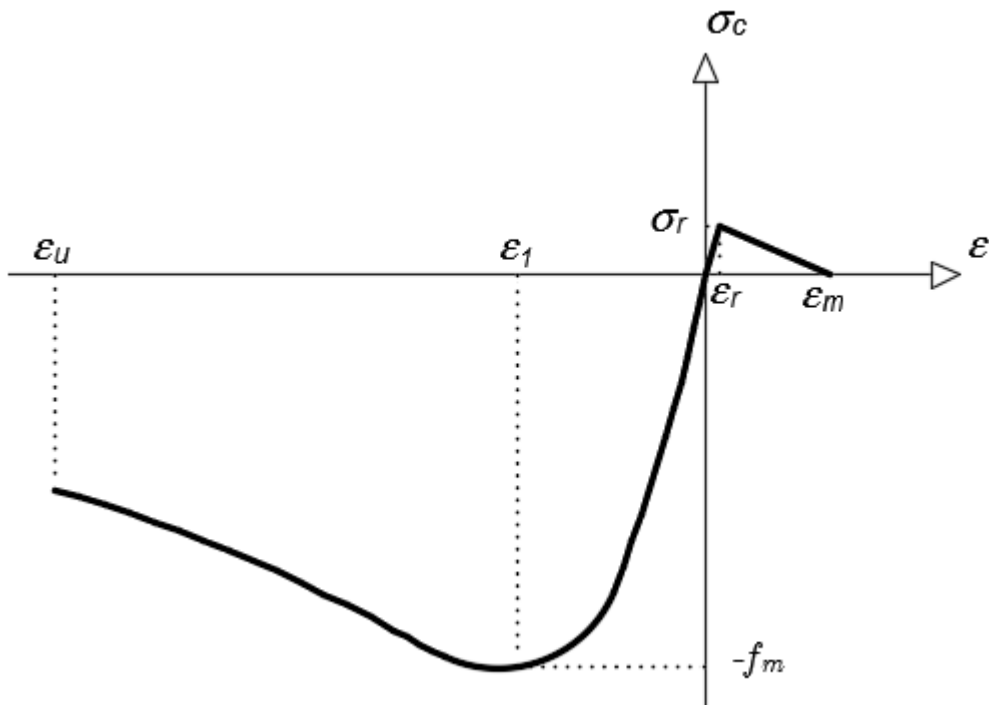


Figura 16 – Diagrama Tensão/deformação do concreto.

Fonte: Adaptado de (ZUPAN e SAJE, 2005).

Outro modelo que apresenta uma curva tensão/deformação, exibe uma deterioração exponencial para o concreto na pós-fissuração. Esse modelo foi proposto por Stramandinoli e La Rovere (2007) e discutido no trabalho de Hernández-Montes *et al.* (2013). De acordo com esse modelo, a relação tensão/deformação é linear até a tensão de tração do concreto  $f_{ct}$  ser atingida. Depois disso, a curva decai de maneira não-linear

$$\sigma_c = E_{ci} \epsilon_c \rightarrow 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cr}, \quad (2.25)$$

$$\sigma_c = -\frac{E_s \rho \epsilon_c}{2} + \sqrt{\left(\frac{E_s \rho \epsilon_c}{2}\right)^2 + f_{ct}^2 (n\rho + 1)} \rightarrow \epsilon_{cr} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{ctu}. \quad (2.26)$$

Na Equação (2.25) o módulo de elasticidade  $E_{ci}$  pode ser tomado de acordo com CEB-FIP *Model Code* (1990) como

$$E_{ci} = 2.15 \cdot 10^4 \cdot \sqrt[3]{\frac{f_c}{10}}, \quad (2.27)$$

e a tensão  $\varepsilon_{cr}$  é dado como

$$\varepsilon_{cr} = \frac{f_{ct}}{E_{ci}}. \quad (2.28)$$

Além disso o termo  $n = \frac{E_s}{E_{ci}}$  é a relação modular entre as restrições da curva e

$\rho = \frac{A_s}{A_c}$  é a relação entre as áreas de aço de armadura passiva e de concreto respectivamente.

Na Figura (17) apresenta-se a curva do modelo proposto por Stramandinoli e La Rovere (2007).

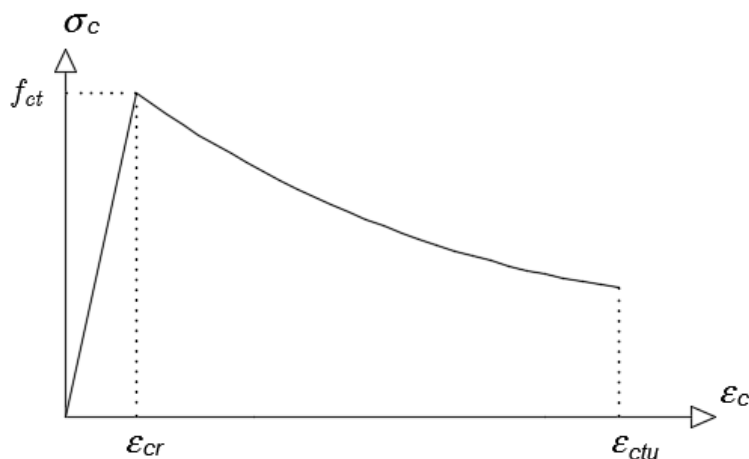


Figura 17 – Diagrama Tensão/deformação do concreto.

Fonte: Adaptado de (STRAMANDINOLI e LA ROVERE, 2007).

### 2.3.2 Aços de Protensão

Assim como o concreto, os aços para armadura ativa devem possuir elevadas resistência mecânicas para aplicação em sistemas protendidos, os aços de alta resistência são expressivamente utilizados para protensão de peças. Esses aços não possuem um patamar de escoamento bem definido, em geral a tensão de escoamento é definida pela tensão correspondente a um valor previamente determinado de deformação, usualmente 0,1%.

As normas que regulamentam o uso desses aços são a NBR 7482 (ABNT, 2020) Fios de aço para estruturas em concreto protendido – Especificação e a NBR 7483 (ABNT, 2020) Cordoalhas de aço para estruturas de concreto protendido – Especificação. Para valores de aços de alta resistência devem ser observados os efeitos da relaxação que possibilitam as perdas de cargas na protensão das armaduras.

Esses aços em especial, podem ser classificados como:

- Relaxação normal (RN), onde o processo de revestimento é feito sem a aplicação de tensão, sua relaxação máxima varia de 5 a 8,5% para valores de tensão iniciais entre 70 e 80% da tensão limite;
- Relaxação baixa (RB), ao contrário da relaxação normal o mesmo é aquecido perante a aplicação de tensão, sua relaxação máxima confirma 2 e 3% para valores de tensão iniciais de 70 e 80% da tensão limite.

O comportamento mecânico é determinado pela NBR 6118 (ABNT, 2014), em seu item 8.4.5 apresenta o diagrama tensão *versus* deformação do aço para armadura ativa. A representação da equação da curva é dada pelas Equações (2.29) e (2.30) apresentadas a seguir

$$\sigma_p = E_p \varepsilon_p ; \varepsilon_p \leq \varepsilon_{py} , \quad (2.29)$$

$$\sigma_p = f_{pyk} + \left[ \frac{f_{ptk} - f_{pyk}}{\varepsilon_u - \varepsilon_{py}} \right] (\varepsilon_p - \varepsilon_{py}) ; \varepsilon_p > \varepsilon_{py} , \quad (2.30)$$

onde  $\sigma_p$ ,  $\varepsilon_p$  são as tensões e deformações calculadas respectivamente,  $f_{pyk}$  é a tensão característica de escoamento do material,  $f_{ptk}$  é a tensão característica de ruptura do material, dada conforme catalogo do fornecedor,  $\varepsilon_u$  e  $\varepsilon_{py}$  são deformações, última e de escoamento respectivamente.

O valor de deformação última do aço é de 3,5%, enquanto o valor do escoamento poderá variar em função do tipo de cordoalha escolhida.

O termo  $E_p$  representa o módulo de elasticidade longitudinal do aço que é dado com um valor de 220 GPa podendo variar +/- 3% conforme informação do fabricante. Na Figura (18) apresenta-se o diagrama representado pelas Equações (2.29) e (2.30), sugerido pela NBR 6118 (ABNT, 2014).

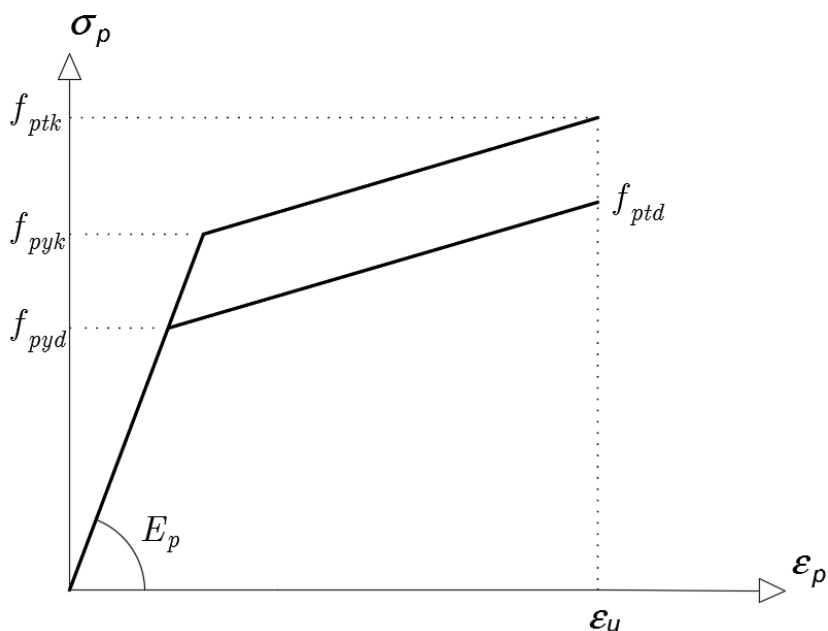


Figura 18 – Diagrama Tensão/deformação do aço de protensão

Fonte: Adaptado de NBR 6118 (ABNT,2014)

Durante a aplicação da força de protensão na armadura ativa, a NBR 6118 (2014) recomenda em seu item 9.6.1.2.1, os limites para valores de tensão a serem aplicados

nas peças em função do tipo de sistema construtivo utilizado, esses valores são mostrados a seguir:

- Na pré-tração, o valor da tensão na saída do equipamento deve permanecer entre  $0,77 f_{ptk}$  e  $0,90 f_{pyk}$ , para aços de relaxação normal e  $0,77 f_{ptk}$  e  $0,85 f_{pyk}$  para aços de relaxação baixa;
- Na pós-tração com aderência posterior o valor da tensão na saída do equipamento deve permanecer entre  $0,74 f_{ptk}$  e  $0,87 f_{pyk}$ , para aços de relaxação normal e  $0,74 f_{ptk}$  e  $0,82 f_{pyk}$  para aços de relaxação baixa;
- Na pós-tração sem aderência, diz respeito a cordoalhas engraxadas, o valor da tensão na saída do equipamento deve permanecer entre  $0,80 f_{ptk}$  e  $0,88 f_{pyk}$ , para aços de relaxação normal e  $0,72 f_{ptk}$  e  $0,88 f_{pyk}$  para aços CP 85/105.

Outro modelo de deformação referente ao aço de protensão bastante usado na literatura é o proposto por Menegotto e Pinto (1973) que representa bem o comportamento do aço. Nos trabalhos de Moreira *et al* (2018) e Lou e Karavasilis (2019) fazem uso desse modelo em um estudo considerando uma análise não linear.

A equação que descreve tal comportamento é evidenciada a seguir

$$\sigma_p = \varepsilon_p E_p \left\{ Q + \frac{1-Q}{\left[ 1 + \left( \frac{\varepsilon_p E_p}{K \sigma_{py}} \right)^R \right]^{\frac{1}{R}}} \right\} \leq \sigma_{pu}, \quad (2.31)$$

onde,  $\sigma_p$ ,  $\varepsilon_p$  são respectivamente a tensão e deformação do aço de protensão, o termo  $E_p$  representa o módulo de elasticidade do aço,  $\sigma_{py}$  é a tensão de escoamento do aço,  $\sigma_{pu}$  é a tensão última e por fim os coeficiente  $Q$ ,  $K$  e  $R$  são resultados adimensionais que tem a finalidade de aproximar a curva com resultado experimentais. Na Figura (19) tem-se o diagrama representado pela Equação (2.31).

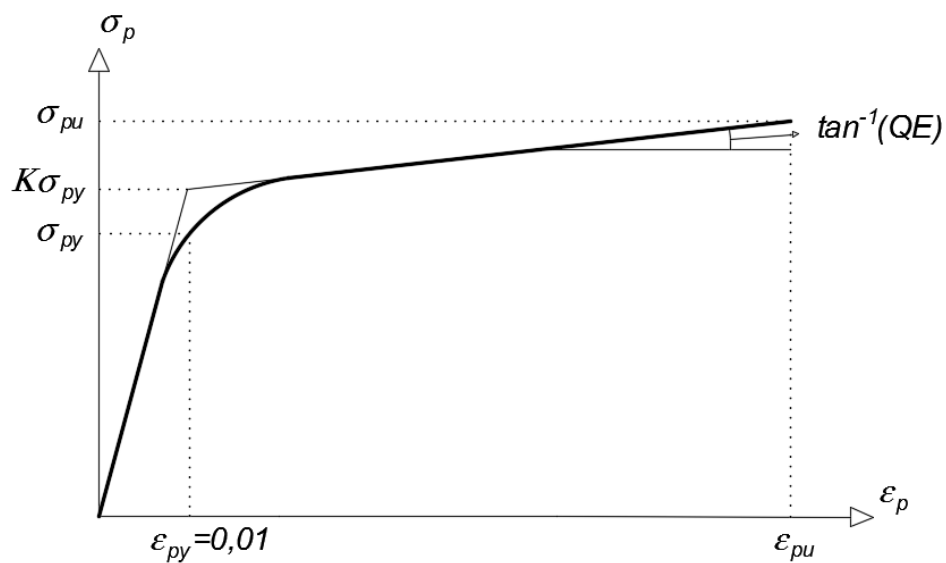


Figura 19 – Diagrama tensão/deformação, segundo Menegotto e Pinto (1973)

Fonte: Adaptado de (MOREIRA, 2016)

O coeficiente  $Q$  pode ser expresso por

$$Q = \frac{\sigma_{pu} - K\sigma_{py}}{\varepsilon_{pu} - K\varepsilon_{py}}. \quad (2.32)$$

A partir de um processo iterativo utilizando a Equação (2.31), o coeficiente  $R$  pode ser encontrado com a condição de que a tensão no aço de protensão seja igual a tensão de escoamento para deformação de 0,01, ou seja:

$$\sigma_p(\varepsilon_p = 0,01) = \sigma_{py}. \quad (2.33)$$

O coeficiente  $K$  é o coeficiente de encruamento, ele pode ser determinado caso tenha uma curva experimental do aço, a fim de aproximar a curva experimental a curva teórica.

### 2.3.3 Aços de armadura passiva

Os aços conhecidos por armaduras passivas são usados afim de estabelecer uma resistência ao concreto quando submetido a esforços de tração, visto que a resistência do concreto a esse tipo de esforços é consideravelmente baixa, diferente das armaduras ativas, as armaduras passivas não recebem nenhum tipo de pré-alongamento.

Em projetos estruturais a NBR 6118 (ABNT, 2014) recomenda em seu item 8.3 que os aços de armadura passiva devem seguir as classificações recomendadas pela NBR 7480 (ABNT, 2007), com valores característicos de resistência ao escoamento nas categorias CA-25, CA-50 e Ca-60, ela ainda estabelece o diâmetro das seções transversais nominais dos aços.

Quanto a resistência mecânica, o aço possui comportamento similar tanto na tração quanto na compressão, sua relação tensão deformação pode ser modelada como uma relação linear até atingir o patamar de escoamento. A NBR 6118 (ABNT, 2014) apresenta em seu item 8.3.6 o diagrama tensão deformação do aço como mostra-se na Figura (20).

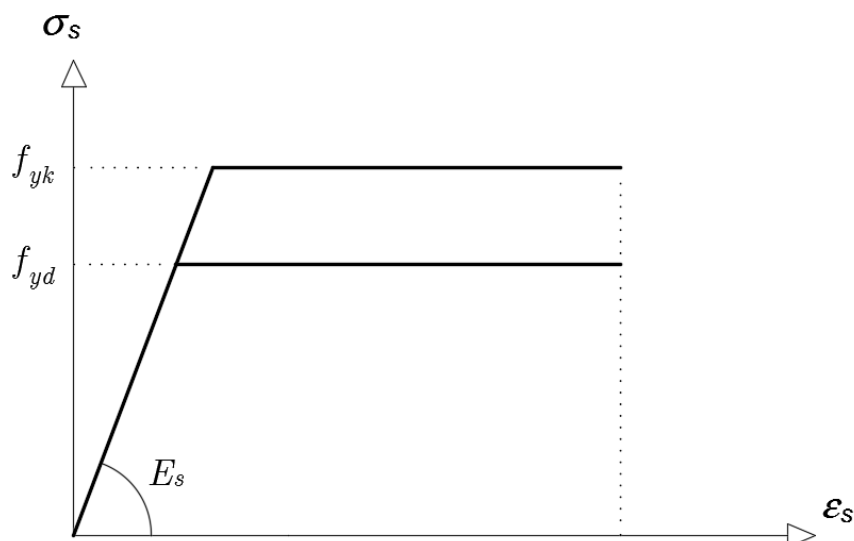


Figura 20 – Diagrama Tensão/deformação para o aço de armadura passiva

Fonte: Adaptado de NBR 6118 (ABNT, 2014)

O termo  $f_{yk}$  é o valor característico da resistência ao escoamento, para aços sem patamar de escoamento o valor de  $f_{yk}$  corresponde ao valor da tensão à deformação permanente de 0,2%.

A relação tensão/deformação do aço de armadura passiva pode ser considerada como elasto-plástico perfeito. Um modelo bilinear adotado por Moreira *et al.* (2018) para descrever o comportamento do aço pode ser representado pela seguinte Equação (2.34).

$$\sigma_s = \begin{cases} -f_y - E_{sh}(\varepsilon_s + \varepsilon_{sy}) \rightarrow -\varepsilon_{su} \leq \varepsilon_s \leq -\varepsilon_{sy} \\ E_s \varepsilon_s \rightarrow -\varepsilon_{sy} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sy} \\ f_y + E_{sh}(\varepsilon_s - \varepsilon_{sy}) \rightarrow \varepsilon_{sy} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su} \end{cases} \quad (2.34)$$

#### 2.3.4 Bainhas

As bainhas são instrumentos presentes apenas em estruturas protendidas com aderência posterior ou sem aderência, elas são tubos onde seu principal objetivo é acomodar o aço de protensão de modo que mesmo após a concretagem da peça o aço seja capaz de deslizar em seu interior. Para gerar a aderência com o concreto as bainhas podem ser preenchidas com calda de cimento, uma mistura de água, cimento e aditivos, esse material é injetado por um equipamento dentro da bainha e seu objetivo é preencher os espaços vazios deixados pelo aço de protensão, esse processo garante a aderência entre o cabo e a bainha e consequentemente garante a aderência entre o aço e o concreto uma vez que a bainha é aderida ao concreto. o processo neste caso é chamado de pós-tensão com aderência posterior, na Figura (21) ilustra-se uma bainha para tal aplicação.

Em aplicações de protensão sem aderência as bainhas podem ser de material plástico, logo o espaço entre cabo bainha é preenchido por graxa facilitando o movimento da cordoalha durante a aplicação da protensão. Na Figura (22) ilustra-se uma bainha com cordoalha engraxada.



Figura 21 – Exemplo de bainha metálica

Fonte: [www.dywidag.com.br/produtos](http://www.dywidag.com.br/produtos)

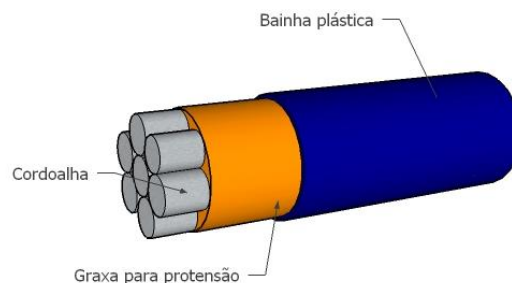


Figura 22 – Exemplo de bainha plástica com cordoalha engraxada

Fonte: Adaptado de [impactoprotensao.com.br](http://impactoprotensao.com.br)

### 2.3.5 Dispositivo de Ancoragem

As ancoragens são equipamentos fixados nas extremidades das peças onde sua principal finalidade é manter o cabo de protensão em seu estado de tensão após a aplicação da força, transmitindo assim, suas tensões para o elemento estrutural.

Elas podem ser classificadas como:

- Ancoragens ativas; são ancoragens nas quais são aplicadas as tensões no cabo através do macaco de protensão;
- Ancoragens passivas; estas por sua vez são peças embutidas no concreto determinadas a fixar a extremidade do cabo oposta a ancoragem ativa;

- Ancoragens de emenda; são combinações entre a ancoragem passiva e a ativa que permitem a continuação do cabo em um ponto central da peça;
- Ancoragens intermediárias; são posicionadas no meio dos cabos quando não é possível acessar suas extremidades.

O arranjo de ancoragens mais comum encontrado em serviço são; duas ativas sendo uma em cada extremidade ou uma ativa e outra passiva, essas combinações podem ser usadas tanto para protensão com aderência quanto sem.

Nas ancoragens o mecanismo fixador do cabo é chamado de cunha, o uso das cunhas é usualmente encontrado nesses sistemas, sendo sua patente atribuída ao francês Eugène Freyssinet. Na Figura (23) se ilustra o sistema de ancoragem ativa.



Figura 23 – Dispositivo de Ancoragem

Fonte: [www.impactoprotensao.com.br](http://www.impactoprotensao.com.br)

## 2.4 Perdas de Protensão

Em sistemas protendidos, a força de protensão varia ao longo do comprimento do cabo e do tempo. Essa variação de intensidade é chamada de perda de protensão. As perdas podem ser classificadas como perdas imediatas e perdas progressivas.

As perdas imediatas são consideradas no ato de aplicação da força ou logo após a liberação do equipamento de proteção. Geralmente os motivos que geram essas perdas são: Perda por atrito entre cabo bainha; perda por acomodação na ancoragem e perda por deformação imediata do concreto.

As perdas progressivas ocorrem ao longo do tempo e são causadas por efeitos de: Perda por retração do concreto; perda por a fluência do concreto e perda devido a relaxação do aço de proteção.

A Equação (2.35) apresenta o cálculo da força de protensão.

$$P(t) = P_i - \sum \Delta P_{ime} - \sum \Delta P_{pro}, \quad (2.35)$$

onde  $P_i$  representa a força inicialmente introduzida no aparelho de protensão,  $\Delta P_{ime}$  e  $\Delta P_{pro}$  representam o somatório das perdas de protensão imediatas e progressivas calculadas até uma etapa de tempo  $t$  especificado em dias.

Nas Figuras (24) e (25), apresentam-se as perdas da força de protensão que acontecem nos casos pré-tração e pós-tração respectivamente considerando seus efeitos ao longo do tempo de vida da peça.

Com exceção da perda por atrito, um efeito observado em peças pós-tensionadas, serão detalhadas as perdas especificadas para elementos pré-fabricados de concreto. Portanto nas subseções a seguir são apresentados um resumo com formulário das perdas imediatas e progressivas da armadura ativa.

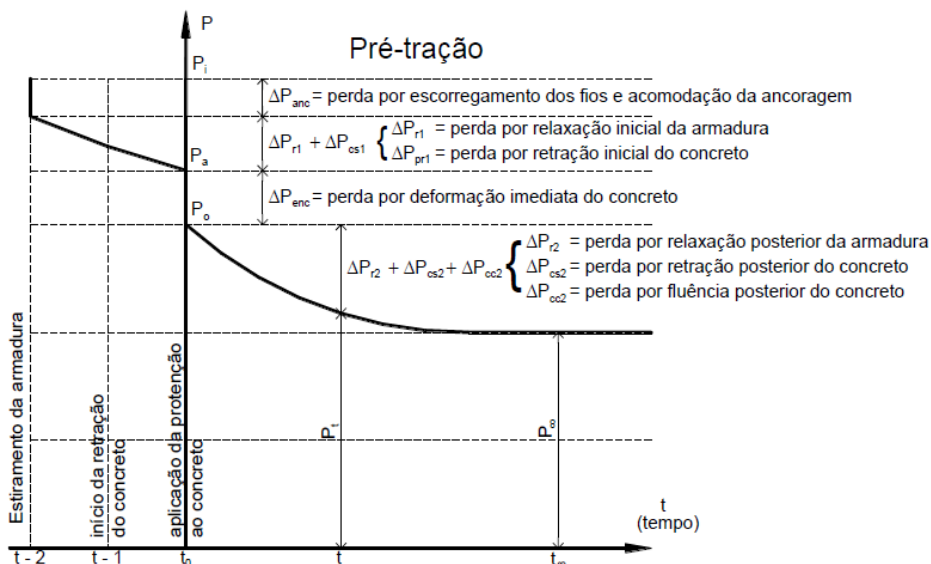


Figura 24 – Força de protensão/tempo para peça protendida pré-tensionada

Fonte: (BASTOS, 2019)

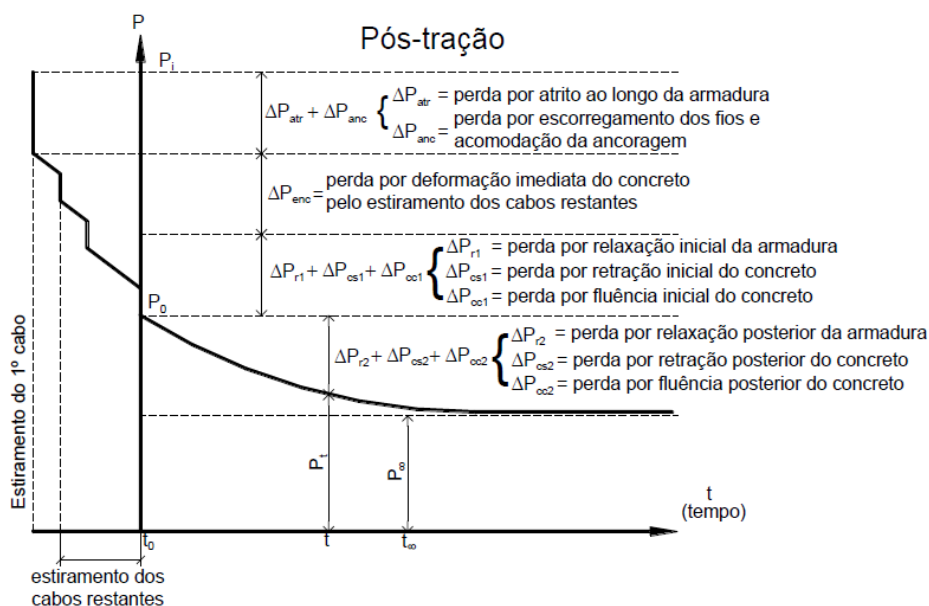


Figura 25 – força de protensão/tempo para peça protendida pós-tensionada

Fonte: (BASTOS, 2019)

#### 2.4.1 Perda por atrito cabo bainha

As perdas de protensão por atrito ocorrem usualmente apenas em peças com pós-tração, variando ao comprimento do cabo, esse efeito é causado devido ao fato da superfície externa dos cabos entrarem em contato com a parede interna da bainha durante a aplicação da força de protensão. Em cabos de grande comprimento essas perdas podem atingir valores elevados, nesse caso para reduzi-las é aconselhável que em ambos os lados sejam colocadas ancoragem ativa.

Em cabos com curvatura sinuosa, quando são protendidos, nos trechos curvos ao longo do seu comprimento existe a tendência do cabo em retificar, conseqüentemente ocorrerá uma ação do cabo no concreto com direção radial. Essas ações provocarão atrito na direção normal da peça (CARVALHO, 2017).

É importante ressaltar que mesmo no caso da força de protensão aplicado a um cabo reto pode existir a perda por atrito devido a chamada curvatura parasita. A curvatura parasita ocorre, pois, mesmo que o perfil do cabo seja reto existe um desvio

no seu perfil gerando ondulações entre um ponto de fixação e outro, geralmente esses pontos são avaliados de dois em dois metros. Na Figura (26) tem-se o efeito parasita da bainha.

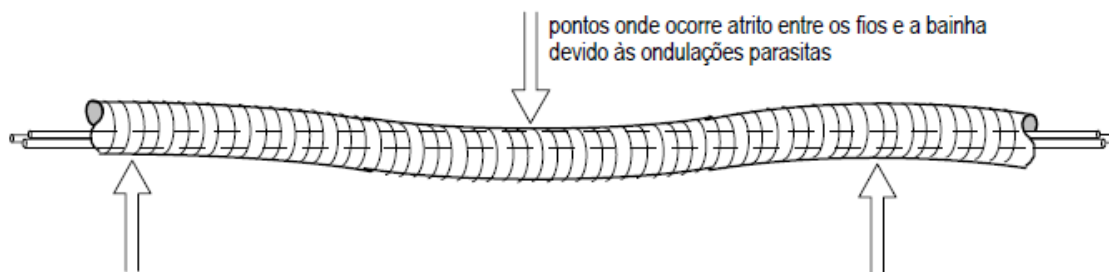


Figura 26 – Ondulações parasitas da bainha

Fonte: (VERÍSSIMO E JR, 1998)

A NBR 6118 (ABNT, 2014) apresenta a Equação (2.36) que considera bem as perdas por atrito.

$$\Delta P_{atr}(x) = P_i \left[ 1 - e^{-(\mu \Sigma \alpha + kx)} \right] \quad (2.36)$$

Onde:

- $P_i$  é a força máxima aplicada à armadura ativa pelo equipamento de protensão;
- $x$  é a abscissa do ponto onde se calcula  $\Delta P$ , medida a partir da ancoragem, expressa em metros;
- $\Sigma \alpha$  é a soma dos ângulos de desvio entre a ancoragem e o ponto de abscissa  $x$ , expressa em radianos;
- $k$  é o coeficiente de perdas por metro provocada por curvaturas não intencionais do cabo. Na falta de dados experimentais, pode ser adotado o valor  $0,001\mu$ ;

- $\mu$  é o coeficiente de atrito aparente entre o cabo e a bainha. Na falta de dados experimentais, podem ser estimados como ilustrado na Tabela (2).

Tipos de Fios e Bainhas	$\mu$
Cabo e concreto (sem bainha)	0,50
Barras ou fios com mossas ou saliências e bainha metálica	0,30
Fios lisos ou cordoalhas e bainha metálica	0,20
Fios lisos ou cordoalhas e bainha metálica lubrificada	0,10
Cordoalhas e bainha de polipropileno lubrificadas	0,05

Tabela 2 – Coeficiente de atrito para cada tipo de cabo

Fonte: Adaptado de NBR 6118 (ABNT, 2014)

#### 2.4.2 Perda por acomodação da ancoragem

No processo construtivo quando montada a ancoragem de um cabo, existe um pequeno deslizamento, gerando uma redução de tensão na armadura ativa. Essas perdas de tensão são decorrentes da acomodação das cunhas na ancoragem, e ocorrem tanto nas estruturas de pré-tração quanto de pós-tração e são classificadas como perdas imediatas (VASCONCELOS, 2014).

Através da Equação (2.37) obtêm-se o comprimento referente ao pré-alongamento  $\Delta L_p$  do aço protendido causado pela introdução de uma tensão  $\sigma_{pi}$  chamada aqui de tensão inicial de protensão. Já o valor da variação de deformação na armadura protendida é dada pela Equação (2.38)

$$\Delta L_p = L_0 \frac{\sigma_{pi}}{E_p}, \quad (2.37)$$

$$\Delta \varepsilon_p = \frac{\delta_{anc}}{L_0 + \Delta L_p}, \quad (2.38)$$

onde  $\delta_{anc}$  representa o valor do deslizamento dado pelo fabricante do equipamento podendo esse variar entre 4 e 6 mm dependendo do tipo de sistema de ancoragem escolhido. O valor  $L_0$  representa o comprimento do aço protendido, que no caso de peças pré-tracionadas é dado pelo comprimento total na pista de protensão. E o termo  $E_p$  é o módulo de elasticidade do aço.

As Equações (2.39) e (2.40) representam respectivamente a redução na tensão da armadura  $\Delta\sigma_{anc}$  e a perda de protensão  $\Delta P_{anc}$  por acomodação da ancoragem

$$\Delta\sigma_{anc} = E_p \Delta\varepsilon_p, \quad (2.39)$$

$$\Delta P_{anc} = A_p \Delta\sigma_{anc}. \quad (2.40)$$

#### 2.4.3 Perda por deformação imediata do concreto

A perda de proteção por deformação imediata do concreto ocorre devido ao fato do aço de protensão encurtar juntamente com o concreto durante a aplicação da força de protensão. No entanto essas perdas podem ser desprezadas nos cálculos quando muito pequenas. Para protensão com aderência inicial, no ato de liberação dos cabos fixados aos maciços na pista de proteção após a concretagem o efeito da força é transmitido para o concreto causando sua deformação imediata, como é ilustrado nas Figuras (27) e (28).

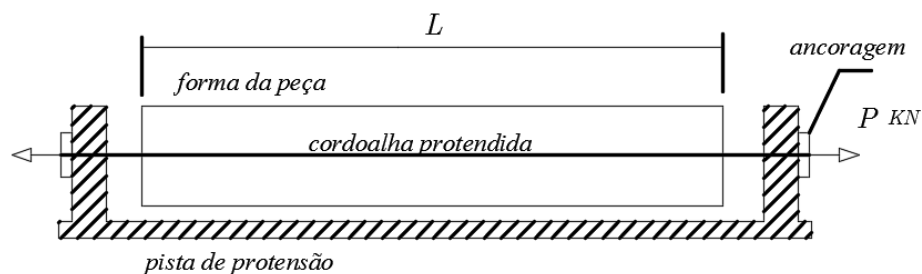


Figura 27 – Peça pré-moldada antes da liberação dos cabos

Fonte: Adaptado de (VERÍSSIMO e JR., 1998)

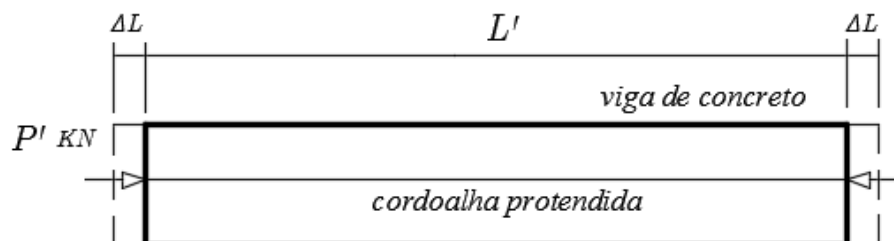


Figura 28 – Peça pré-moldada após a liberação dos cabos

Fonte: Adaptado de (VERÍSSIMO e JR., 1998)

Nesse caso, devido a um encurtamento  $\Delta L$  da peça a carga  $P_i$  induzida previamente sofrerá uma redução. O valor de perda de tensão devido a deformação imediata do concreto  $\Delta\sigma_{def}$  é representada pela Equação (2.41) e a perda de carga devido a deformação imediata  $\Delta P_{def}$  é dada pela Equação (2.42).

$$\Delta\sigma_{def} = \left( \frac{P_i}{A_c} + \frac{P_i e_p^2}{I_c} - \frac{M_{g1} e_p}{I_c} \right) \alpha_p, \quad (2.41)$$

$$\Delta P_{def} = A_p \cdot \Delta\sigma_{def}. \quad (2.42)$$

Nessa situação  $M_{g1}$  representa o momento fletor máximo gerado pela carga  $g_1$ , o termo  $\alpha_p$  é dado como a relação entre os módulos de elasticidade  $E_p$  da armadura ativa e o  $E_{cij}$ , módulo tangente do concreto na idade  $j$  em que é analisada a deformação imediata da peça. Os termos  $e_p$ ,  $A_c$ , e  $I_c$ , são a excentricidade do cabo, a área da seção considerada e a inercia da peça respectivamente.

#### 2.4.4 Perda devido as deformações de encurtamento do concreto

Os efeitos de fluência e retração devem ser considerados em sistemas protendidos. A retração do concreto ocorre devido a diminuição do volume de concreto ao longo do tempo, os motivos dessa redução são por perda de água e alteração química da mistura. O efeito de retração depende diretamente da umidade relativa do ambiente, da composição do traço para a consistência do concreto no seu lançamento e da forma da peça.

Semelhante ao efeito da perda por deformação imediata do concreto, a retração reduzirá o comprimento da peça e conseqüentemente implicará numa relaxação da armadura gerando assim uma perda de protensão.

Já o efeito de fluência, considera-se não apenas a tensão aplicada no concreto em um instante de tempo, mas sim o histórico de tensões aplicadas até aquele período. Quando submetido a uma tensão constante ocorre um aumento de deformação do material. Desse modo, assim como na retração, acontece um encurtamento da peça que deverá ser introduzido como uma perda de protensão.

Na Tabela (3) apresenta-se os valores numéricos para determinação da fluência e da retração.

A perda de proteção por retração do concreto pode ser dada pela seguinte equação:

$$\Delta\sigma_{ps} = \varepsilon_{cs}(t, t_0)E_p. \quad (2.43)$$

O termo  $\varepsilon_{cs}(t, t_0)$  é a deformação no concreto causada pelo efeito de retração, sendo  $t$  o tempo final e  $t_0$  o momento onde ocorre a aplicação da protensão.

Ambiente	Umidade U (%)	Fluência ( $\varphi_{1c}$ ) <sup>a, c</sup>			Retração $10^4 \varepsilon_{1s}$ <sup>b, c</sup>			$\gamma^d$
		Abatimento em cm de acordo com a ABNT NBR NM 67						
		0 – 4	5 – 9	10 – 15	0 – 4	5 – 9	10 – 15	
Na água	-	0,6	0,8	1,0	+1,0	+1,0	+1,0	30,0
Em ambiente muito úmido imediatamente acima da água	90	1,0	1,3	1,6	-1,0	-1,3	-1,6	5,0

Continua

Continuação

Ambiente	Umidade U (%)	Fluência ( $\phi_{1c}$ ) <sup>a,c</sup>			Retração $10^4 \epsilon_{1s}$ <sup>b,c</sup>			$\gamma$ <sup>d</sup>
		Abatimento em cm de acordo com a ABNT NBR NM 67						
		0 – 4	5 – 9	10 – 15	0 – 4	5 – 9	10 – 15	
Ao ar livre, em geral	70	1,5	2,0	2,5	-2,5	-3,2	-4,0	1,5
Em ambiente seco	40	2,3	3,0	3,8	-4,0	-5,2	-6,5	1,0

<sup>a</sup>  $\phi_{1c} = 4,45 - 0,035U$  para abatimento no intervalo de 5cm a 9 cm e  $U \leq 90\%$ .

<sup>b</sup>  $10^4 \epsilon_{1s} = -6,16 - (U/484) + (U^2/1590)$  para abatimento de 5 cm a 9 cm e  $U \leq 90\%$ .

<sup>c</sup> Os valores de  $\phi_{1c}$  e  $\epsilon_{1s}$  para  $U \leq 90\%$  e abatimento entre 0 cm e 4 cm são 25% menores e para abatimentos entre 10 cm e 15 cm são 25% maiores.

<sup>d</sup>  $\gamma = 1 + \exp(-7,8 + 0,1.U)$  para  $U \leq 90\%$ .

NOTA 1 Para efeito de cálculo, as mesmas expressões e os mesmos valores numéricos podem ser empregados no caso de tração.

NOTA 2 Para o cálculo dos valores de fluência e retração, a consistência do concreto é aquela correspondente a obtida com o mesmo traço sem adição de superplastificantes e superfluidificantes.

Tabela 3 – Valores numéricos usuais para a determinação da fluência e retração

Fonte: Adaptado de NBR 6118 (2014)

A NBR 6118 (2014) fornece a Equação (2.44) para o cálculo da retração do concreto entre os instantes  $t$  e  $t_0$

$$\epsilon_{cs}(t, t_0) = \epsilon_{cs^\infty} [\beta_s(t) - \beta_s(t_0)], \quad (2.44)$$

$$\epsilon_{cs^\infty} = \epsilon_{1s} \cdot \epsilon_{2s}, \quad (2.45)$$

onde  $\epsilon_{cs^\infty}$  representa a deformação final por retração mostrado na Equação(2.45);  $\beta_s$  representa o coeficiente relativo à retração no instante  $t$  ou  $t_0$ ;  $\epsilon_{1s}$  representa o coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente e da consistência do concreto, sendo seus valores representados na Tabela (3); O coeficiente  $\epsilon_{2s}$  representa a espessura fictícia do elemento, sendo definido pela Equação (2.46).

$$\varepsilon_{2s} = \frac{33 + 2h_{fic}}{20,8 + 3h_{fic}}. \quad (2.46)$$

O coeficiente  $\beta_s$  relativo à retração é dado pela Equação (2.47)

$$\beta_s = \frac{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + A\left(\frac{t}{100}\right)^2 + B\left(\frac{t}{100}\right)}{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + C\left(\frac{t}{100}\right)^2 + D\left(\frac{t}{100}\right) + E}, \quad (2.47)$$

onde os coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$  são descritos pelas Equações (2.48) à (2.52) respectivamente.

$$A = 40, \quad (2.48)$$

$$B = 116h_{fic}^3 - 282h_{fic}^2 - 4,8, \quad (2.49)$$

$$C = 2,5h_{fic}^3 - 8,8h_{fic} + 40,7, \quad (2.50)$$

$$D = -75h_{fic}^3 + 585h_{fic}^2 + 496h_{fic} - 6,8, \quad (2.51)$$

$$E = -169h_{fic}^4 + 88h_{fic}^3 + 584h_{fic}^2 - 39h_{fic} + 0,8. \quad (2.52)$$

Para a fluência a NBR 6118 (2014) recomenda a Equação (2.53) que descreve esse efeito.

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_a + \varphi_{f\infty} [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] + \varphi_{d\infty} \beta_d, \quad (2.53)$$

onde,  $t$  é a idade mínima do concreto no instante considerado, expressa em dias;  $t_0$  é a idade fictícia do concreto ao ser feito o carregamento único, expressa em dias;  $\varphi_a$  é o coeficiente de fluência rápida, determinado pelas Equações (2.54) e (2.55);  $\varphi_{d\infty}$  é valor final do coeficiente de deformação lenta reversível que é considerado igual a 0,4 e  $\varphi_{f\infty}$  é o valor final do coeficiente de deformação lenta irreversível conforme Equações (2.56) e (2.57).

$$\varphi_a = 0,8 \left[ 1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)} \right], \text{ para concretos com } f_{ck} \text{ de 20 MPa a 45 Mpa;} \quad (2.54)$$

$$\varphi_a = 1,40 \left[ 1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)} \right], \text{ para concretos com } f_{ck} \text{ de 50 MPa a 90 Mpa;} \quad (2.55)$$

$$\varphi_{f\infty} = \varphi_{1c} \cdot \varphi_{2c}, \text{ para concretos com } f_{ck} \text{ de 20 MPa a 45 Mpa;} \quad (2.56)$$

$$\varphi_{f\infty} = 0,45 \varphi_{1c} \cdot \varphi_{2c}, \text{ para concretos com } f_{ck} \text{ de 50 MPa a 90 Mpa.} \quad (2.57)$$

Nas Equações (2.56) e (2.57), o termo  $\varphi_{1c}$  é o coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente  $U$  expresso em porcentagem e da consistência do concreto, dados pela Tabela (3), já o coeficiente  $\varphi_{2c}$  dependente da espessura fictícia  $h_{fic}$ . As Equações (2.58) à (2.60) mostram o procedimento de cálculo.

$$\varphi_{2c} = \frac{42 + h_{fic}}{20 + h_{fic}}, \quad (2.58)$$

$$h_{fic} = \gamma \frac{2A_c}{u_{ar}}, \quad (2.59)$$

$$\gamma = 1 + \exp(-7,8 + 0,1U). \quad (2.60)$$

Na Equação (2.59), o termo  $A_c$  representa a seção transversal da peça. O valor de  $U$  na Equação (2.60) pode ser obtido da Tabela (3). E o termo  $u_{ar}$  é a parte do perímetro externo da seção transversal da peça em contato com o ar, dado na Tabela (4).

Etapa	Carregamento atuante	Descrição	A	$U_{ar}$
1 a 3	P + g1	Protensão + Peso próprio	A <sub>c</sub>	$2 \cdot h + 2 \cdot b + n_a \cdot (\pi \cdot D_a)$
4	g1+g2	1 a 3 + capa		$2b + n_a \cdot (\pi \cdot D_a)/2$
5	g1+g2+g3	4 + revestimento		$b + n_a \cdot (\pi \cdot D_a)/2$
6	q	5 + carga acidental		b

Tabela 4 – Valores da fluência e da retração em função da velocidade de endurecimento do cimento

Fonte: Adaptado de (GUSTANI, 2017)

Continuando na Equação (2.53), o termo  $\beta_f$  é um coeficiente relativo à deformação lenta irreversível dado pela Equação (2.61);  $\beta_d$  coeficiente relativo à deformação lenta reversível em função do tempo ( $t, t_0$ ) decorrido após o carregamento dado pela Equação (2.62)

$$\beta_f(t) = \frac{t^2 + At + B}{t^2 + Ct + D}, \quad (2.61)$$

$$\beta_d(t) = \frac{t - t_0 + 20}{t - t_0 + 70}, \quad (2.62)$$

onde, na Equação (2.61) os valores de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são:

$$A = 42h_{fic}^3 - 350h_{fic}^2 + 588h_{fic} + 113, \quad (2.63)$$

$$B = 768h_{fic}^3 - 3060h_{fic}^2 + 3234h_{fic} - 23, \quad (2.64)$$

$$C = -200h_{fic}^3 + 13h_{fic}^2 + 1090h_{fic} + 183, \quad (2.65)$$

$$D = 7579h_{fic}^3 - 3191h_{fic}^2 + 35343h_{fic} + 1931. \quad (2.66)$$

A idade fictícia em dias é determinada pela Equação (2.67) sendo que para situações de cura a vapor a idade deve ser corrigida em função de uma curva específica determinada em laboratório.

$$t = \alpha \sum_i \frac{T_{proj} + 10}{30} \Delta t_{ef,i}, \quad (2.67)$$

onde  $\Delta t_{ef,i}$  é o período, em dias, durante o qual a temperatura média diária do ambiente  $T_{proj}$ , pode ser admitida constante;  $\alpha$  é o coeficiente que dependente da velocidade de endurecimento do cimento utilizado no concreto. Na falta de dados experimentais permite-se o uso dos valores constantes na Tabela (5) da NBR 6118 (ABNT, 2014).

Cimento Portland (CP)	$\alpha$	
	Fluência	Retração
Endurecimento lento (CP III e CP IV, todas as classes de resistência)	1	1,00
Endurecimento normal (CP I e CP II, todas as classes de resistência)	2	
Endurecimento rápido (CP V-ARI)	3	

Tabela 5 – Valores da fluência e da retração em função da velocidade de endurecimento do cimento

Fonte: Adaptado de (NBR 6118, 2014)

Quando a armadura de proteção é tracionada e mantida com comprimento constante, ocorre um alívio da tensão ao longo do tempo. O fenômeno de relaxação no aço é dado por essa perda de tensão ao longo do tempo, a medida que a tensão inicial aumenta gera uma maior deformação do aço podendo aumentar a perda ao longo do tempo.

A intensidade da relaxação do aço é determinada na NBR 6118 (ABNT, 2014) pelo coeficiente  $\psi(t, t_0)$  definido na Equação (2.68)

$$\psi(t, t_0) = \frac{\Delta\sigma_{relax}(t, t_0)}{\sigma_{pi}}, \quad (2.68)$$

Na Equação (2.68),  $\Delta\sigma_{relax}(t, t_0)$  é a perda de tensão por relaxação pura (com comprimento constante) desde o instante  $t_0$  do estiramento da armadura até o instante  $t$  considerado.  $\sigma_{pi}$  é a tensão na armadura de protensão no instante do seu estiramento  $t_0$ . A norma ainda propõe um cálculo para o coeficiente  $\psi(t, t_0)$  em um tempo  $t$  qualquer através da Equação (2.69)

$$\psi(t, t_0) = \psi_{1000} \left( \frac{t - t_0}{41,67} \right). \quad (2.69)$$

O coeficiente  $\psi_{1000}$  representa o coeficiente de relaxação para uma temperatura média de 20°C e um tempo de protensão de 1000 h, esses valores são apresentados na Tabela (6). Portanto para utilização das Equações (2.68) e (2.69) é necessário aplicar um tempo fictício para correção da temperatura de projeto conforme Equação (2.70). A variável  $\Delta t$  representa o intervalo de tempo  $t$  e  $t_0$  entre as etapas consideradas.

$$\Delta t_{\text{corrigido}} = \frac{T_{\text{proj}} \cdot \Delta t}{20^{\circ}\text{C}}. \quad (2.70)$$

E por fim a perda por relaxação do aço é descrito pela Equação (2.71).

$$\Delta P_{\text{relax}} = A_p \cdot \Delta \sigma_{\text{relax}}(t, t_0). \quad (2.71)$$

Na Tabela (6), RN significa relaxação normal e RB é a relaxação baixa.

$\sigma_{pi}$	Cordoalhas		Fios		Barras
	RN	RB	RN	RB	
0,5.f <sub>ptk</sub>	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,6.f <sub>ptk</sub>	3,5	1,3	2,5	1,0	1,5
0,7.f <sub>ptk</sub>	7,0	2,5	5,0	2,0	4,0
0,8.f <sub>ptk</sub>	12,0	3,5	8,5	3,0	7,0

Tabela 6 – Valores de  $\psi_{1000}$ , em porcentagem

Fonte: Adaptado de NBR 6118 (ABNT, 2014)

#### 2.4.5 Interação entre as perdas progressivas

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), os valores das perdas de protensão, derivadas dos efeitos de retração e fluência do concreto e da relaxação do aço, devem ser determinados considerando a relação dessas causas. Nesse trabalho será apresentado o método simplificado para o caso de fases únicas de operação, ou seja, quando são satisfeitas as seguintes condições:

- A concretagem do elemento estrutural, bem como a protensão, sejam executadas, cada uma delas, em fases suficientemente próximas para que se desprezem os efeitos recíprocos de uma fase sobre a outra;
- Os cabos possuam entre si afastamentos suficientemente pequenos em relação à altura da seção do elemento estrutural, de modo que seus efeitos possam ser supostos equivalentes ao de um único cabo, com seção transversal de área igual à soma das áreas das seções dos cabos componentes, situado na posição da resultante dos esforços neles atuantes (cabo resultante).

A expressão que norteia o cálculo da variação de tensão no aço de protensão  $\Delta\sigma_p(t, t_0)$  recomendada pela norma pode ser observada na Equação (2.72)

$$\Delta\sigma_p(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cs}(t, t_0)E_p - \alpha_p \sigma_{c, p0g} \varphi(t, t_0) - \sigma_{p0}(t, t_0) \chi(t, t_0)}{\chi_p + \chi_c \alpha_p \eta \rho_p}, \quad (2.72)$$

onde,

$$\chi(t, t_0) = -\ln[1 - \psi(t, t_0)], \quad (2.73)$$

$$\chi_c = 1 + 0,5\varphi(t, t_0), \quad (2.74)$$

$$\chi_p = 1 + \chi(t, t_0), \quad (2.75)$$

$$\eta = 1 + e_p^2 \frac{A_c}{A_p}, \quad (2.76)$$

$$\rho_p = \frac{A_p}{I_c}, \quad (2.77)$$

$$\alpha_p = \frac{E_p}{E_{ci28}}, \quad (2.78)$$

$$P = P_0 + A_p \cdot \Delta\sigma_p. \quad (2.79)$$

Sendo  $\sigma_{c,p0g}$  a tensão no concreto adjacente ao cabo resultante, provocada pela protensão e pela carga permanente mobilizada no instante  $t_0$ , sendo positiva se de compressão;  $\sigma_{p0}(t, t_0)$  é a tensão na armadura ativa devido à protensão e à carga permanente mobilizada no instante  $t_0$ , positiva se de tração;  $\chi(t, t_0)$  representa o coeficiente correção de fluência do aço;  $\varphi(t, t_0)$  é o coeficiente de fluência do concreto no instante  $t$  para protensão e carga permanente, aplicadas no instante  $t_0$ ;  $\psi(t, t_0)$  é o coeficiente de relaxação do aço no instante  $t$  para protensão e carga permanente, mobilizada no instante  $t_0$ ;  $\rho_p$  é a taxa geométrica da armadura de protensão;  $e_p$  é a excentricidade do cabo resultante em relação ao baricentro da seção do concreto e  $A_p$  é a área da seção transversal do cabo resultante.

## CAPÍTULO 3

### MODELAGEM VIA ELEMENTOS FINITOS

O Método de Elementos Finitos (MEF) é um método numérico bastante aplicado para solução de problemas de engenharia envolvendo análise de tensão, transferência de calor, eletromagnetismo e fluxo de fluido (MOAVENI, 2007). Suas raízes estão diretamente ligadas em aplicações no âmbito da Mecânica Estrutural para descrever o comportamento de barras e placas (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2005).

A aplicação do MEF consiste em discretizar o meio contínuo em uma geometria com finitas partes de menor complexidade. Essas subdivisões, quando somadas representarão uma aproximação da geometria original do sistema.

A percepção de constituição de objetos por um número finito de elementos já havia sido estudada a mais de dois mil anos por filósofos gregos. Porém, a eficácia do MEF teve suas origens nos anos de 1940 no campo da Engenharia Estrutural (LOGAN, 2007). Em 1943, Richard Courant, um matemático de renome da época, aplicou o procedimento no estudo da torsão de Saint-Venant de seções vazadas (ASSAN, 2003). Logo, no ano de 1956 o método teve sua consolidação definitiva com os trabalhos de Turner, Slough, Martin e Topp (ASSAN, 2003).

#### 3.1 Modelagem Matemática e Metodologia

A forma mais usual de análise da estabilidade das estruturas é pelo critério de energia, para sistemas conservativos temos o teorema de Lagrange-Dirichlet e para

sistemas não conservativos temos os princípios da termodinâmica (BAZANT e CEDALIN, 2010). O primeiro afirma que assumindo continuidade da energia total do sistema no qual apresenta apenas forças conservativas e dissipativas é estável se o funcional energia potencial possui um mínimo global. Já a abordagem termodinâmica leva em consideração a superfície de equilíbrio separando o espaço de configuração em duas regiões, no interior da região delimitada pela superfície o sistema é estável e na região complementar o sistema é instável.

### 3.1.1 Equações de Equilíbrio para Viga

Problemas de flexão em vigas para sistemas de coordenadas curvilineares gerais é um problema de difícil solução e tem atraído esforços de pesquisadores na área de mecânica dos sólidos. Para alguns sistemas com coordenadas curvilineares específicas, a teoria da elasticidade tem sido usada de forma bem satisfatória para resolver problemas lineares envolvendo equações de equilíbrio de vigas isotrópicas. Por exemplo, para coordenadas cilíndricas, equações exatas podem ser combinadas por meio da teoria da elasticidade. Uma tal abordagem permite, por meio do estado plano de tensões, uma análise de frequências fundamentais para estruturas bi e tridimensionais com condições específicas, de fronteira e área de seção transversal. Assim, assumindo condições de linearidade do material (Lei de Hook), poucas imperfeições e poucas variações de área, a teoria de elasticidade pode ser aplicada, utilizando estado plano de tensões, juntamente com o princípio de Saint-Venant que garante a uniformidade de tensões para regiões que se encontram a uma distância maior do que a maior das dimensões da área no qual se aplica os esforços, para resolver problemas estáticos. Entretanto a maioria de problemas envolvendo deflexão de vigas não podem ser resolvidos usando apenas a teoria da elasticidade, como por exemplo vigas com área de seção transversal variável, materiais irregulares (heterogeneidade), vigas anisotrópicas com acoplamentos não lineares (condição de contorno) ou sujeitas a deslocamentos consideráveis. Assim o uso de teorias alternativas se faz necessário para que a análise, no que tange à confiabilidade, possa ser o mais próximo do real. Dessa forma as tensões atuantes na estrutura estão descritas na Figura (29) com suas respectivas deformações dadas na Figura (30).

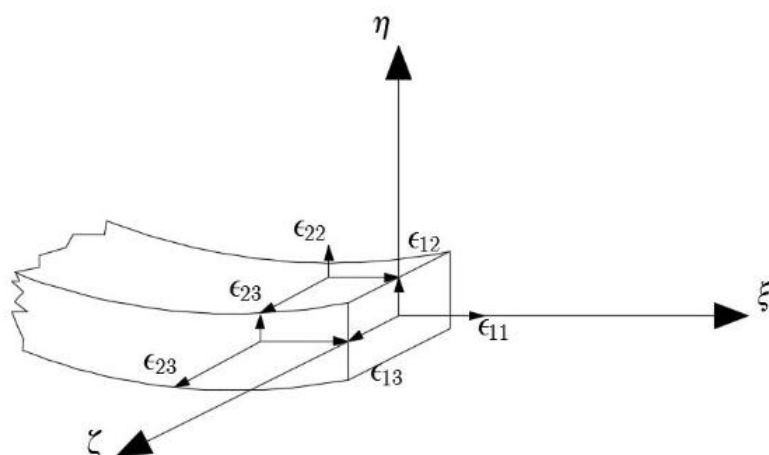


Figura 29 – Tensões Atuantes na Viga

Fonte: Adaptado de (NAYFEH e PAI, 2008)

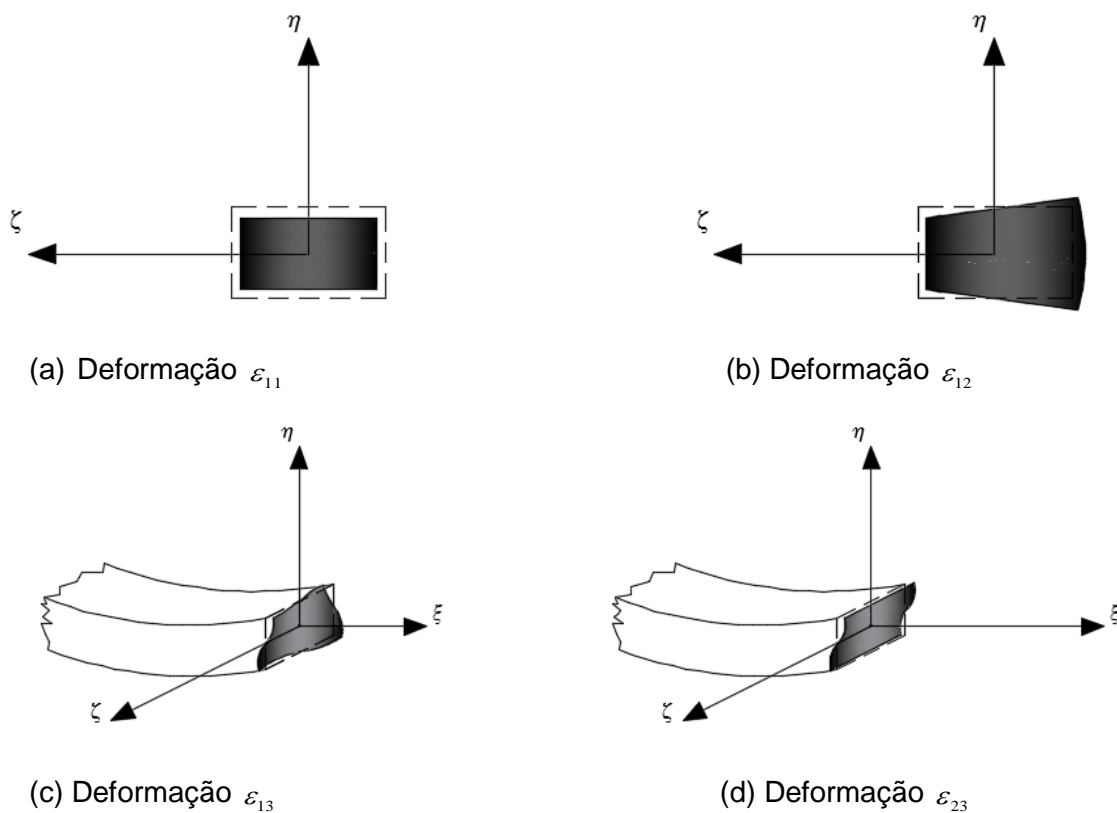


Figura 30 – Deformação na Seção Transversal da Viga

Fonte: Adaptado de (NAYFEH e PAI, 2008)

Na Figura (31) apresenta-se os esforços atuantes em uma seção arbitrária  $A$ . Para obter as equações de equilíbrio da viga admite-se a teoria de Euler-Bernoulli que considera apenas a deformação axial  $\varepsilon_{11}$ ; assume-se ainda que o plano que contém a seção transversal permanece perpendicular ao eixo na direção axial após a deformação. Assim, para efeito de modelagem considera-se apenas o momento  $M_3$  e o esforço  $F_2$ , como mostra-se na Figura (31), sendo essas ações responsáveis por gerar um deslocamento vertical  $v$  e uma rotação  $\theta_3$  como mostra a Figura (32).

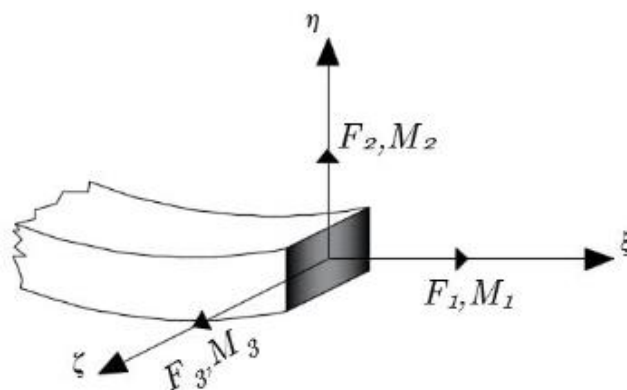


Figura 31 – Esforços Atuantes na Seção  $A$

Fonte: Adaptado de (NAYFEH e PAI, 2008)

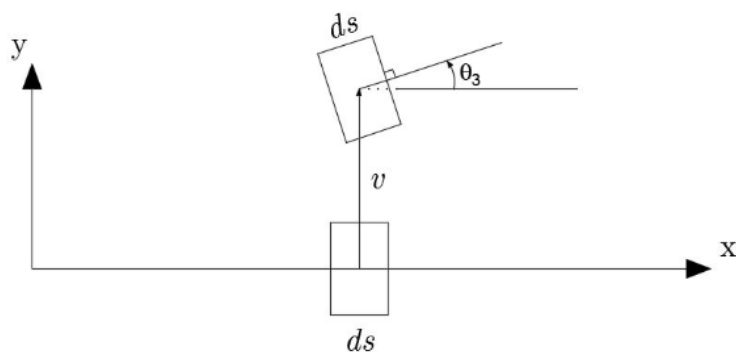


Figura 32 – Deslocamentos Devido à Teoria de Euler-Bernoulli

Fonte: Adaptado de (NAYFEH e PAI, 2008)

De acordo com a Figura (33), aplicando-se o diagrama de corpo livre em um elemento infinitesimal de viga, onde  $s$  denota o comprimento deformado da viga medido da ponto de referencia base até o ponto de comprimento  $ds$ , segue da segunda lei de Newton do movimento para o elemento de barra na Figura (33) na direção vertical  $y$  que

$$F_2' ds \sin(\theta_3) + q_2 ds = 0, \quad (3.1)$$

onde  $\theta_3$  é o ângulo de rotação transversal;  $q_2$  é o carregamento externo distribuído por unidade de comprimento ao longo da direção  $y$ ; o símbolo  $'$  representa a derivada com relação ao comprimento de arco  $s$ .

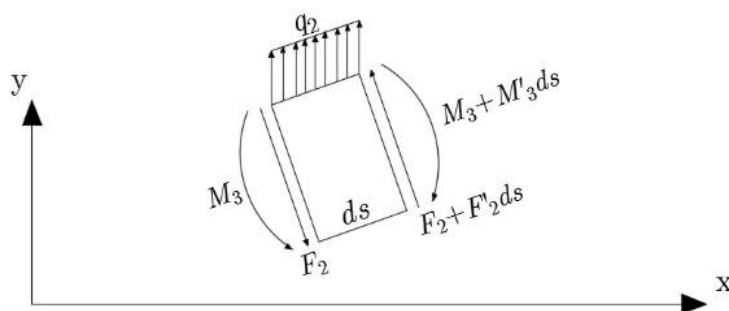


Figura 33 – Diagrama de Corpo Livre em um Elemento Infinitesimal de Viga

Fonte: Adaptado de (NAYFEH e PAI, 2008)

De forma similar, a condição de equilíbrio para o momento na direção do eixo  $z$  é

$$M_3' ds + \frac{1}{2} F_2' ds + \frac{1}{2} (F_2 + F_2' ds) ds = 0, \quad (3.2)$$

onde o momento  $M_3$  foi tomado com respeito ao ponto médio entre  $F_2$  e  $F_2' ds$ ,

$$M_3 = - \int_A y \sigma_{11} dA, \quad (3.3)$$

onde  $A$  é a área da seção transversal.

Para movimentos infinitesimais, considera-se  $\theta_3$  pequeno de forma que

$$\sin(\theta_3) = \theta_3, \quad \cos(\theta_3) = 1, \quad \theta_3 = v'. \quad (3.4)$$

Substituindo a Equação (3.4) nas Equações (3.1) e (3.3) obtém-se

$$F_2' + q_2 + f_{yp} + f_{ys} = 0, \quad (3.5)$$

$$M_3' + F_2 + (u_p - v'')f_{xp} + (u_s - v'')f_{xs} = 0, \quad (3.6)$$

onde  $f_{ip}, f_{is}, i = x, y$ , representam respectivamente as forças internas da armadura de protensão e armadura passiva;  $u_p - v''$  e  $u_s - v''$  representam a excentricidade, devido ao aço de protensão e armadura passiva, avaliada em cada ponto  $s \in [0, L]$  da viga.

Eliminando o termo  $F_2$  na Equação (3.6) a equação de momento para viga,

$$-M_3'' + q_2 + f_{yp} + f_{ys} - [(u_p - v'')f_{xp}]' - [(u_s - v'')f_{xs}]' = 0. \quad (3.7)$$

Em termos de deslocamento do concreto tem-se,

$$u_1 = -yv', \quad u_2 = v, \quad u_3 = 0, \quad (3.8)$$

onde  $u_i, i = 1, 2, 3$  representa o campo que descreve o deslocamento do concreto conforme (NAYFEH e PAI, 2008). Segue da Equação (3.8) que a deformação na direção axial,  $\varepsilon_{11}$  é

$$\varepsilon_{11} = u_1' = -yv''. \quad (3.9)$$

De acordo com Nayfeh e Pai (2008), devido ao efeito de Poisson, tem-se  $\varepsilon_{ii} = 0, i = 2, 3$ . Nesse trabalho será assumido o modelo de Hognestad (1951) tensão/deformação, ele satisfaz a seguinte relação

$$\sigma_{11} = \frac{f'_c \varepsilon_{11}}{\varepsilon_0} \left( 2 - \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_0} \right), \quad (3.10)$$

para  $\varepsilon_{11} \leq \varepsilon_0$  e para  $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_{11} \leq \varepsilon_u$  tem-se

$$\sigma_{11} = f'_c \left( 1 - 0.15 \left( \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_0}{\varepsilon_u - \varepsilon_0} \right) \right). \quad (3.11)$$

Nas Equações (3.10) e (3.11)  $f'_c$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_u$  representam respectivamente, a resistência a compressão do concreto, deformação de referência associada a  $f'_c$  e a deformação última. Substituindo a Equação (3.9) na Equação (3.11) tem-se

$$\sigma_{11} = \frac{f'_c}{\varepsilon_0} \left( -2yv'' - \frac{1}{\varepsilon_0} y^2 v''^2 \right). \quad (3.12)$$

Substituindo a Equação (3.12) na Equação (3.3) tem-se

$$M_3 = \frac{2f'_c}{\varepsilon_0} \int_A y^2 dAv'' - \frac{f'_c}{\varepsilon_0^2} \int_A y^3 dAv''^2. \quad (3.13)$$

Introduzindo as variáveis

$$I_1 = \int_A y^2 dA, \quad (3.14)$$

$$I_2 = \int_A y^3 dA, \quad (3.15)$$

o momento  $M_3$  pode ser escrito como

$$M_3 = \frac{2f'_c}{\varepsilon_0} I_1 v'' - \frac{f'_c}{\varepsilon_0^2} I_2 v''^2. \quad (3.16)$$

Substituindo a Equação (3.16) na Equação (7) tem-se a equação que descreve o deslocamento vertical da viga

$$-\frac{2\tilde{f}_c}{\varepsilon_0} v'''' \left[ I_1 - \frac{I_2}{\varepsilon_0} v'' \right] + \frac{2\tilde{f}_c}{\varepsilon_0^2} I_2 v''^2 + q_2 + f_{yp} + f_{ys} - [(u_p - v'')f_{xp}]' - [(u_s - v'')f_{xs}]' = 0, \quad (3.17)$$

onde

$$E = \frac{2f'_c}{\varepsilon_0}. \quad (3.18)$$

De acordo com a Figura (34), neste trabalho, a condição de contorno usada é  $v(0) = 0$ .

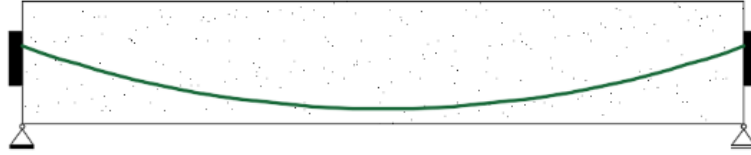


Figura 34 – Protótipo de Viga

Fonte:(AUTOR)

A partir da Equação (3.17) define-se a forma bi linear  $a: V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $V$  representa um espaço de funções apropriado com seu respectivo dual  $V^*$ ,

$$\begin{aligned} a(v, w) = & -EI_1 v'''' w|_0^L - EI_1 v'' w'|_0^L + EI_1 \int_0^L v'' w'' dx - \frac{E}{\varepsilon_0} I_2 \int_0^L [v'''' + v''] v'' w dx + \int_0^L [f_{yp} + f_{ys}] w dx \dots \\ & - (u_p - v'') f_{xp} w|_0^L + \int_0^L (u_p - v'') f_{xp} w' dx - (u_s - v'') f_{xs} w|_0^L + \int_0^L (u_s - v'') f_{xs} w' dx. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para todo  $(v, w) \in V \times V^*$ . Usando  $a(\cdot, \cdot)$ , a Equação (3.17) assume a forma

$$a(v, w) + a(q_2, w) = 0, \quad (v, w) \in V \times V^*. \quad (3.20)$$

### 3.1.2 Forças Geradas pelo Aço de Protensão

Na subseção anterior, a Equação (3.20) foi estabelecida a equação de equilíbrio para o deslocamento do concreto levando em consideração as forças  $f_{ij}$ ,  $i = x, y$ ,  $j = s, p$  referente aos cabos de protensão e armadura passiva. Na presente etapa, com base em Nayfeh e Pai (2008), será deduzida essas reações como funções dos seus respectivos deslocamentos  $u_p$  e  $u_s$ . Para isso, observa-se na Figura (35) a configuração deformada do cabo no sistema inercial  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ .

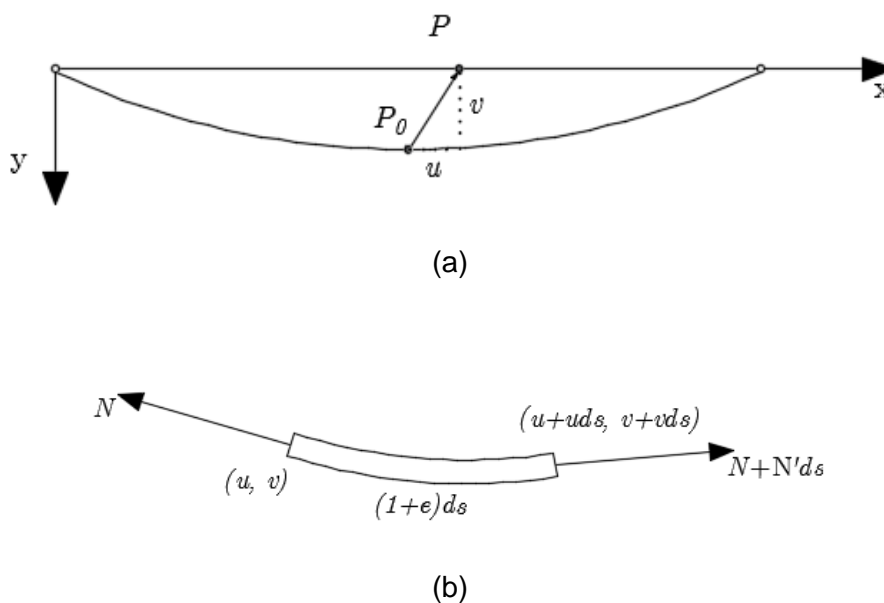


Figura 35 – Modelo de Cabo (a) Configuração Deformada do Cabo e Campo de Deslocamento nas Direções  $x - y$ , (b) Diagrama de Corpo Livre para o Elemento de Cabo

Fonte: Adaptado de (NAYFEH e PAI, 2008)

O ponto  $P_0$  indica a posição quando o cabo não está carregado; após a aplicação da carga tem-se o ponto  $P$  indicando a posição deformada de  $P_0$  de  $l$  a  $l = L + \Delta L$ .

Considerando  $P = (x_1, x_2)$  e o deslocamento  $P$  por  $u_p, v_p$  ao longo das direções  $x_1, x_2$  toma-se o diagrama de corpo livre expresso na Figura (35(b)) e obtém-se que a deformação axial é dada pela seguinte equação

$$\varepsilon_{11}^p = \sqrt{(1 + e_0 + u'_p)^2 + v_p'^2} - 1, \quad (3.21)$$

onde  $e_0$  representa a deformação inicial do cabo na direção  $x_1$ , conforme (NAYFEH e PAI, 2008). Segue de Nayfeh e Pai (2008) e Lou e Xiang (2006) que as forças de tração interna do cabo de protensão em equilíbrio são dadas por

$$N' + \tilde{f}_1 i_1 + \tilde{f}_2 i_2 = 0, \quad (3.22)$$

onde o frame  $i_j, j=1, \dots, 3$ , representa um sistema de coordenadas inerciais;  $\tilde{f}_i, i=1, 2$  representa o carregamento distribuído por unidade de comprimento não deformado,  $' = \frac{d}{ds}$ ,  $s$  denota o comprimento de arco, e  $N$  é dado por

$$N = \frac{N}{1 + \varepsilon_{11}} \left[ (1 + e_0 + u'_p) i_1 + v'_p i_2 \right], \quad (3.23)$$

onde  $N$  representa a tensão interna no cabo de protensão. Para o cálculo de  $N$  a seguinte hipótese será assumida

- a relação de tensão deformação de acordo com Menegotto e Pinto (1973) para o aço de protensão é expressa por

$$\sigma_{11} = E_p \varepsilon_{11} \left[ Q + (1 - Q) h(\varepsilon_{11}) \right], \quad (3.24)$$

onde

$$h(\varepsilon_{11}) = \left( 1 + g(K, f_{py}, E_p, R) \varepsilon_{11}^R \right)^{-\frac{1}{R}}, \quad (3.25)$$

$$g(K, f_{py}, E_p, R) = K^{-R} f_{py}^{-R} E_p^R. \quad (3.26)$$

Nas Equações (3.25) e (3.26), os símbolos  $K, Q, R$  são parâmetros utilizados no ajuste entre a curva experimental com o modelo na Equação (3.24),  $f_{py}$  é a tensão de escoamento do aço de protensão, e  $E_p$  é o módulo de elasticidade do aço de protensão, detalhes são apresentados em (LOU e XIANG, 2006) e (MENEGOTTO e PINTO, 1973).

Segue da Equação (3.24) que a força de tração/compressão interna do aço de protensão é

$$N(s) = A_p E_p \varepsilon_{11} [Q + (1-Q)h(\varepsilon_{11})]. \quad (3.27)$$

Na Equação (3.27),  $A_p$  denota a área da seção transversal do aço de protensão. Usando expansão em série de Taylor,  $h(\varepsilon_{11})$  pode ser aproximada por

$$h(\varepsilon_{11}) \approx 1 + \frac{g(K, f_{py}, E_p, R)}{2R} (2(e_0 + u'_p) + (e_0 + u'_p)^2 + v_p'^2). \quad (3.28)$$

Usando a notação

$$h_1(u_p, v_p) = 2(e_0 + u'_p) + (e_0 + u'_p)^2 + v_p'^2, \quad (3.29)$$

e substituindo a Equação (3.29) na Equação (3.28),  $h(\varepsilon_{11})$  pode ser reescrita como

$$h(\varepsilon_{11}) \approx 1 + \frac{g(K, f_{py}, E_p, R)}{2R} h_1(u_p, v_p), \quad (3.30)$$

e substituindo a Equação (3.30) na Equação (3.27) tem-se

$$N(s) = \frac{A_p E_p}{2} h_1(u_p, v_p) \left[ Q + (1-Q) \left( 1 + \frac{g(K, f_{py}, E_p, R)}{2R} h_1(u_p, v_p) \right) \right]. \quad (3.31)$$

Usando a aproximação de Taylor na Equação (3.23), a tração no aço de protensão é aproximado por

$$N(s) = N(s)(1 - \varepsilon_{11}) \left[ (1 + e_0 + u'_p) i_1 + v'_p i_2 \right]. \quad (3.32)$$

Fazendo a aproximação  $\mathcal{X} \approx \mathcal{S}$  e derivando a Equação (3.32) com relação a  $\mathcal{X}$ , onde  $' = \frac{d}{dx}$  e substituindo na Equação (3.23) tem-se as forças agindo nas direções  $x - y$ , geradas pelo cabo de protensão,

$$f_{xp} = N(s)'(1 - \varepsilon_{11})(1 + e_0 + u'_p) - N(s)\varepsilon'_{11}(1 + e_0 + u'_p) + N(s)(1 - \varepsilon_{11})u''_p \quad (3.33)$$

$$f_{yp} = N(s)'(1 - \varepsilon_{11})v'_p - N(s)\varepsilon'_{11}v'_p + N(s)(1 - \varepsilon_{11})v''_p, \quad (3.34)$$

onde

$$N(s)' \approx \left[ \frac{A_p E_p}{2} + (1 - Q)A_p E_e g(K, f_{py}, E_p, R)h_1(u_p, v_p) \right] h'_1(u_p, v_p), \quad (3.35)$$

$$\varepsilon'_{11} \approx 2 \left[ (1 + e_0 + u'_p)u''_p + 2v'_p v''_p \right], \quad (3.36)$$

$$h'_1(u_p, v_p) = 2 \left( (e_0 + u'_p)u''_p + v'^2_p v''_p \right). \quad (3.37)$$

Fazendo a aproximação do comprimento de arco  $s \approx x$  e simplificações algébricas, as forças geradas pela protensão assumem a seguinte configuração

$$f_{xp} = -c_1^2 u''_p + (c_1^2 - c_2^2) \left( \left( \frac{1}{2} - u'_p \right) v_p'^2 \right)', \quad (3.38)$$

$$f_{yp} = -c_2^2 v''_p + (c_1^2 - c_2^2) \left( v'_p \left( u'_p - u_p'^2 + \frac{1}{2} v_p'^2 \right) \right)', \quad (3.39)$$

onde as constantes  $c_i, i=1,2$  são dadas por

$$(3.40)$$

$$c_1 = \frac{EA_p \alpha^2}{m_0},$$

$$c_2 = \frac{EA_p \alpha (\alpha - 1)}{m_0}, \quad (3.41)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro de deformação associado com o estado de tensão do cabo, conforme (NAYFEH e PAI, 2008);  $m_0$  é a massa do cabo e  $A_p$  é a área da seção transversal;  $E$  representa o modulo de Young tangente dado por

$$E = \frac{d\sigma_{11}}{d\varepsilon_{11}} = E_p [Q + (1-Q)h(\varepsilon_{11})] + E_p (1-Q)h'(\varepsilon_{11})\varepsilon_{11}, \quad (3.42)$$

lembrando que  $\sigma_{11} = \sigma_{11}(\varepsilon_{11})$  é função de  $\varepsilon_{11}$  dada pela Equação (3.24).

### 3.1.2 Forças Geradas pela Armadura Passiva

A modelagem para a armadura passiva é feita de forma similar a protensão. Considera-se o campo de forças dado pela Equação (3.23) e assume-se a seguinte hipótese de caracterização do material

- a relação tensão deformação para a armadura passiva é expressa pela seguinte equação

$$\sigma_{11}^s = E_s \varepsilon_{11}^s, \quad (3.43)$$

Usando uma formulação similar à do aço de protensão e levando em consideração apenas as contribuições axiais da armadura passiva, juntamente com a aderência ao concreto temos que a deformação axial da armadura passiva é dada por

$$\varepsilon_{11}^s = \sqrt{(1+u_s')^2 + v_s'}, \quad (3.44)$$

onde  $u_s$  e  $v_s$  denotam respectivamente, o campo de deslocamento horizontal e vertical do aço. Substituindo a Equação (3.44) na Equação (3.43) e denotando por  $A_s$  a área da seção transversal da armadura passiva, temos que a força devido a  $\sigma_{11}^s$  é dada por,

$$N_s = EA_s \sqrt{(1+u_s')^2 + v_s'^2}, \quad (3.45)$$

### 3.2 Construção da Solução

A malha com elementos do tipo barra é adotada por representar bem o comportamento da estrutura em análise adequando-se a seu eixo baricêntrico. Por hipótese da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, as deformações por cisalhamento são desprezadas e as seções transversais continuam planas após a deformação. Nos elementos, são considerados dois nós e seis graus de liberdade, cada nó apresenta três deslocamentos: uma translação axial, uma translação transversal e uma rotação. Na Figura (36), a geometria da peça e seus respectivos deslocamentos são apresentados.

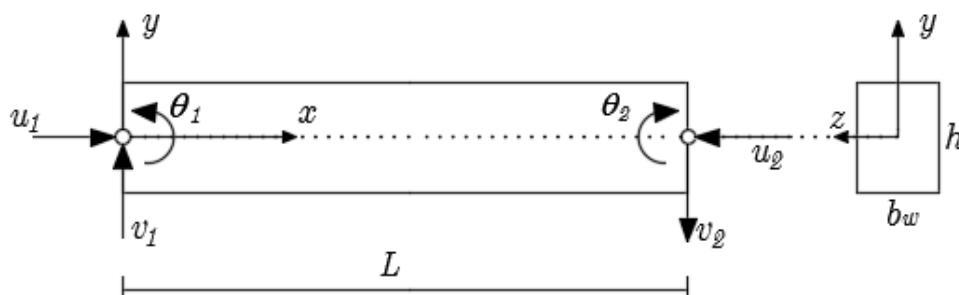


Figura 36 – Geometria do elemento e representação dos graus de liberdade

Fonte: (AUTOR)

Devido a força de protensão atuando na estrutura, será considerado três graus de liberdade por nó  $i$  em cada elemento  $\ell$  da malha. Assim as coordenadas generalizadas dos campos de deslocamento são

$$u = a_0 + a_1x, \quad (3.46)$$

$$v = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3, \quad (3.47)$$

onde  $u, v$  representam respectivamente os deslocamentos axial e vertical da estrutura.

Os coeficientes  $a_i, b_j, i=0,1; j=0,\dots,3$  são determinados usando as condições de contorno, ou seja, para o deslocamento axial,  $a_0, a_1$  devem satisfazer a seguinte condição

$$\begin{cases} a_0 + a_1x = u_i^e \\ a_0 + a_1x = u_j^e \end{cases} \quad (3.48)$$

onde no sistema da Equação (3.48),  $u_i^e, u_j^e$  representam os deslocamentos dos nós  $i, j$  acoplados ao elemento  $e$ . Resolvendo o sistema da Equação (3.48) obtemos a seguinte formula para o deslocamento axial do elemento  $e$

$$u^e(x) = \left(1 - \frac{x}{L^e}\right)u_i^e + \frac{x}{L^e}u_j^e. \quad (3.49)$$

Reescrevendo a Equação (3.49) tem-se

$$u^e(x) = N_1^e(x)u_i^e + N_4^e(x)u_j^e, \quad (3.50)$$

onde

$$N_1^e(x) = \left(1 - \frac{x}{L^e}\right), \quad (3.51)$$

$$N_4^e(x) = \left(\frac{x}{L^e}\right). \quad (3.52)$$

O termo  $L^e$  representa o comprimento do elemento  $\ell$  formado a partir dos nós  $i, j$ . Seguindo o mesmo raciocínio para o deslocamento vertical, ou seja,  $b_0, b_1, b_2, b_3$  devem satisfazer a seguinte condição

$$\begin{cases} b_0 + b_1x + b_2(x)^2 + b_3(x)^3 = v_i^e \\ b_0 + b_1x + b_2(x)^2 + b_3(x)^3 = v_j^e \end{cases} \quad (3.53)$$

Resolvendo o sistema representado na Equação (3.53) obtém-se as equações de compatibilidade para os nós  $i, j$

$$v_i^e = v(0) = b_0, \quad (3.54)$$

$$\theta_i^e = \frac{dv(0)}{dx} = b_1, \quad (3.55)$$

$$v_j^e = v(L^e) = b_3(L^e)^3 + b_2(L^e)^2 + b_1(L^e) + b_0, \quad (3.56)$$

$$\theta_j^e = \frac{dv(L^e)}{dx} = 3b_3(L^e)^2 + b_2(L^e) + b_1. \quad (3.57)$$

Resolvendo as Equações (3.54) a (3.57) em termos do deslocamento nodal e substituindo na Equação (3.53) pode-se escrever o deslocamento vertical/rotação do elemento  $\ell$

$$\begin{aligned} v^e(x) = v_i^e + \theta_i^e x + \left[ -\frac{3}{(L^e)^2}(v_i^e - v_j^e) - \frac{1}{L^e}(2\theta_i^e + \theta_j^e) \right] x^2 + \dots \\ \dots \left[ \frac{2}{(L^e)^3}(v_i^e - v_j^e) + \frac{1}{(L^e)^2}(\theta_i^e + \theta_j^e) \right] x^3. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Por manipulação matemática pode-se escrever a Equação (3.58) em forma matricial como

$$v^e(x) = [N^e] \{d_{i,j}^e\}, \quad (3.59)$$

onde  $\{d_{i,j}^e\} = \{v_i^e, \theta_i^e, v_j^e, \theta_j^e\}^T$  é o vetor deslocamento e  $[N^e] = [N_2^e \ N_3^e \ N_5^e \ N_6^e]$  são as funções de forma conhecidas como interpolação cúbica de Hermite. Elas possuem a seguinte configuração

$$N_2^e(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{(L^e)^2} + \frac{2x^3}{(L^e)^3}\right), \quad (3.60)$$

$$N_3^e(x) = \left(x - \frac{2x^2}{L^e} + \frac{x^3}{(L^e)^2}\right), \quad (3.61)$$

$$N_5^e(x) = \left(\frac{3x^2}{(L^e)^2} - \frac{2x^3}{(L^e)^3}\right), \quad (3.62)$$

$$N_6^e(x) = \left(\frac{x^3}{(L^e)^2} - \frac{x^2}{L^e}\right). \quad (3.63)$$

Agora pode-se escrever o capo de deslocamento total  $U_{i,j}^e$  levando em consideração o deslocamento axial na Equação (3.50) e vertical/rotacional na Equação (3.59) e como

$$U_{i,j}^e = \sum_{k=1}^6 N_k^e(x) d_{ij,k}^e. \quad (3.64)$$

O vetor  $d_{i,j}^e$  é expandido para  $\{d_{i,j}^e\} = \{u_i^e, v_i^e, \theta_i^e, u_j^e, v_j^e, \theta_j^e\}^T$ . Escrevendo a Equação (3.64) em forma matricial tem-se

$$U_{i,j}^e = \begin{bmatrix} u^e \\ v^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & 0 & N_4^e & 0 & 0 \\ 0 & N_2^e & N_3^e & 0 & N_5^e & N_6^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \theta_i^e \\ u_j^e \\ v_j^e \\ \theta_j^e \end{Bmatrix}. \quad (3.65)$$

Assumindo a teoria usual de deformação em vigas, a relação deformação/deslocamento é dada por

$$\varepsilon_x(x, y) = y \frac{du(x)}{dx}. \quad (3.66)$$

Em casos de elementos unidimensionais, considera-se a análise no eixo baricêntricos da seção da peça. No caso de estruturas de concreto protendido, as forças de protensão levam em consideração pontos que estão a uma determinada distância do centro de gravidade. Como a deformação axial depende do tensor curvatura, as forças em cada ponto de aplicação geram um novo perfil de curvatura da estrutura. Estas considerações devem ser feitas ao utilizar o método de elementos finitos na modelagem da estrutura. Assim deve-se exprimir a deformação axial em função da curvatura da barra conforme Figura (37).

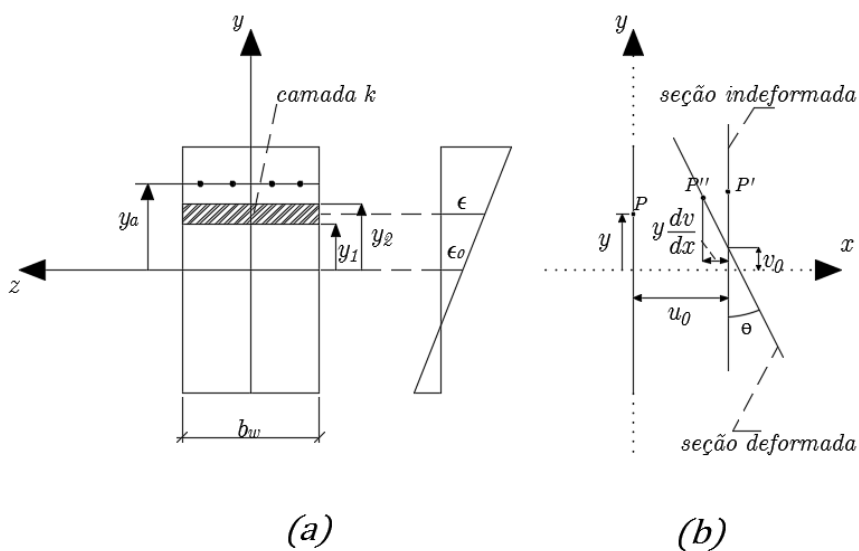


Figura 37 – (a) Seção transversal da barra. (b) Barra Fletida

Fonte: Adaptado de (ASSAN, 2003)

Analisando a Figura (37) considerando pequenas rotações, pode-se escrever o campo de deslocamentos axial para um ponto  $P \in k$  como

$$u = u_0(x) - y \frac{dv(x)}{dx}. \quad (3.67)$$

Substituindo o deslocamento da Equação (3.67) na Equação (3.66) tem-se

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx} - y \frac{d^2v(x)}{dx^2}, \quad (3.68)$$

como forma de aumentar a precisão da curva tensão/deslocamento o seguinte modelo de segunda ordem é proposto por (ZIENKIEWICZ E TAYLOR, 2013)

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx} - \frac{y}{2} \left( \frac{dv(x)}{dx} \right)^2 - y \frac{d^2v(x)}{dx^2}. \quad (3.69)$$

A Equação (3.69) motiva a definição do momento fletor  $m(x)$  e esforço cortante  $V(x)$  generalizados dados por

$$m(x) = \frac{EI}{2} \left( \frac{dv(x)}{dx} \right)^2 + EI \frac{d^2v(x)}{dx^2}, \quad (3.70)$$

$$V(x) = EI \frac{dv(x)}{dx} \frac{d^2v(x)}{dx^2} + EI \frac{d^3v(x)}{dx^3}, \quad (3.71)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade transversal e  $I$  é o momento de inércia da peça. Já a força axial  $F(x)$  é dada por

$$F(x) = AE \frac{du(x)}{dx}, \quad (3.72)$$

onde  $A$  é a área da seção.

### 3.2 Construção da Matriz de Rigidez Tangente

#### 3.2.1 Forças internas referentes ao concreto

Nesta seção será construída a matriz de rigidez elementar usando a abordagem de equilíbrio nodal. Tal metodologia será usada para obter a matriz de rigidez tangente. Assim precisamos calcular a linearização do momento fletor e esforço cortante generalizados apresentados na seção anterior. Primeiramente, usando a Equação (3.65), substituindo na Equação (3.70) e linearizando, tem-se

$$\delta m^e(x, d^e) = EI \sum_{l=1}^4 J^e(x, d_l^e) \partial_{d_l^e} J^e(x, d_l^e) \delta d_l^e + EI \sum_{l=1}^4 N_{l,xx}^e(x) \delta d_l^e, \quad (3.73)$$

onde  $J^e$  e  $\partial_{d_l^e} J^e(x, d_l^e)$  são dados respectivamente pelas Equações (3.74) e (3.75)

$$\text{com } \{d_{ij}^e\} = \{v_i^e, \theta_i^e, v_j^e, \theta_j^e\}^T \text{ e } [N^e] = [N_2^e \quad N_3^e \quad N_5^e \quad N_6^e],$$

$$J^e(x, d^e) = \sum_{l=1}^4 N_{l,x}^e(x) d_l^e, \quad (3.74)$$

$$\partial_{d_l^e} J^e(x, d_l^e) = N_{l,x}^e(x). \quad (3.75)$$

Substituindo as Equações (3.74) e (3.75) na Equação (3.73) tem-se

$$\delta m^e(x, d^e) = EI \sum_{l=1}^4 \left( \sum_{l_1=1}^4 N_{l_1,x}^e(x) d_{l_1}^e \right) N_{l,x}^e(x) \delta d_l^e + EI \sum_{l=1}^4 N_{l,xx}^e(x) \delta d_l^e. \quad (3.76)$$

A linearização de  $V(x)$  é um pouco mais complexa. Para isto precisamos introduzir algumas variáveis auxiliares,

$$J_1^e(x, d^e) = \sum_{l=1}^4 N_{l,x}^e(x) d_l^e, \quad (3.77)$$

$$J_2^e(x, d^e) = \sum_{l=1}^4 N_{l,xx}^e(x) d_l^e. \quad (3.78)$$

Calculando as variações  $\delta J_1^e(x, d^e)$  e  $\delta J_2^e(x, d^e)$  das Equações (3.77) e (3.78) tem-se

$$\delta J_1^e(x, d^e) = \sum_{l=1}^4 \partial_{d_l^e} J_1^e(x, d_l^e) \delta d_l^e = \sum_{l=1}^4 N_{l,x}^e \delta d_l^e, \quad (3.79)$$

$$\delta J_2^e(x, d^e) = \sum_{l=1}^4 \partial_{d_l^e} J_2^e(x, d_l^e) \delta d_l^e = \sum_{l=1}^4 N_{l,xx}^e \delta d_l^e. \quad (3.80)$$

Usando a Equação (3.65) substituindo na Equação (3.71) juntamente com as Equações (3.79) e (3.80) e fazendo a linearização tem-se

$$\begin{aligned} \delta V^e(x, d^e) = EI & \left[ \delta J_1^e(x, d^e) \cdot J_2^e(x, d^e) + J_1^e(x, d^e) \cdot \delta J_2^e(x, d^e) \right] \delta d_l^e \dots \\ & \dots + EI \sum_{l=1}^4 N_{l,xxx}^e(x) \delta d_l^e. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Substituindo as Equações (3.77), (3.78), (3.79) e (3.80) na Equação (3.81) tem-se

$$\begin{aligned} \delta V^e(x, d^e) = EI & \left[ \sum_{l=1}^4 N_{l,x}^e(x) \left( \sum_{l_1=1}^4 N_{l_1,xx}^e(x) d_{l_1}^e \right) + \sum_{l=1}^4 N_{l,xx}^e(x) \left( \sum_{l_1=1}^4 N_{l_1,x}^e(x) d_{l_1}^e \right) \right] \delta d_l^e \dots \\ & \dots + EI \sum_{l=1}^4 N_{l,xxx}^e(x) \delta d_l^e. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Com relação ao deslocamento axial, usando a Equação (3.65) substituindo na Equação (3.72) obtém-se a força,

$$F^e(x) = \frac{EA}{L^e} (\delta u_j^e - \delta u_i^e). \quad (3.83)$$

Usando o equilíbrio de forças nodais, o vetor de forças internas é calculado a partir da matriz de rigidez tangente. As formulas completas para os elementos da matriz  $K_c^e$  são dadas no Apêndice (A).

$$\begin{Bmatrix} F_i^e(0) \\ \delta V_i^e(0) \\ \delta m_i^e(0) \\ F_j^e(L^e) \\ \delta V_j^e(L^e) \\ \delta m_j^e(L^e) \end{Bmatrix} := \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & 0 & 0 & \tilde{k}_{14} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{k}_{22} & \tilde{k}_{23} & 0 & \tilde{k}_{25} & \tilde{k}_{26} \\ 0 & \tilde{k}_{32} & \tilde{k}_{33} & 0 & \tilde{k}_{35} & \tilde{k}_{36} \\ \tilde{k}_{41} & 0 & 0 & \tilde{k}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{k}_{52} & \tilde{k}_{53} & 0 & \tilde{k}_{55} & \tilde{k}_{56} \\ 0 & \tilde{k}_{62} & \tilde{k}_{63} & 0 & \tilde{k}_{65} & \tilde{k}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_i^e \\ \delta v_i^e \\ \delta \theta_i^e \\ \delta u_j^e \\ \delta v_j^e \\ \delta \theta_j^e \end{Bmatrix}, \quad (3.84)$$

onde, para  $[N^e] = [N_2^e \quad N_3^e \quad N_5^e \quad N_6^e]$  tem-se

$$\tilde{k}_{11} = -\frac{EA}{L^e}, \quad (3.85)$$

$$\tilde{k}_{14} = \frac{EA}{L^e}, \quad (3.86)$$

$$\tilde{k}_{22} = EI(N_{2,x}^e(x_i)) \left( \sum_{l=1}^4 N_{l,xx}^e d_l^e \right) + EI \left( \sum_{l=1}^4 N_{l,x}^e d_l^e \right) (N_{2,xx}^e(x_i)) + (N_{2,xxx}^e(x_i)), \quad (3.87)$$

$$\tilde{k}_{23} = EI(N_{3,x}^e(x_i)) \left( \sum_{l=1}^4 N_{l,xx}^e d_l^e \right) + EI \left( \sum_{l=1}^4 N_{l,x}^e d_l^e \right) (N_{3,xx}^e(x_i)) + (N_{3,xxx}^e(x_i)), \quad (3.88)$$

$$\tilde{k}_{25} = EI(N_{5,x}^e(x_i)) \left( \sum_{l=1}^4 N_{l,xx}^e d_l^e \right) + EI \left( \sum_{l=1}^4 N_{l,x}^e d_l^e \right) (N_{5,xx}^e(x_i)) + (N_{5,xxx}^e(x_i)), \quad (3.89)$$

$$\tilde{k}_{26} = EI(N_{6,x}^e(x_i)) \left( \sum_{l=1}^4 N_{l,xx}^e d_l^e \right) + EI \left( \sum_{l=1}^4 N_{l,x}^e d_l^e \right) (N_{6,xx}^e(x_i)) + (N_{6,xxx}^e(x_i)), \quad (3.90)$$

$$\tilde{k}_{32} = EI \left( \sum_{l=1}^4 N_{i,x}^e d_l^e \right) N_{2,x}^e(x_i) + EI(N_{2,xx}^e(x_i)), \quad (3.91)$$

$$\tilde{k}_{33} = EI \left( \sum_{l=1}^4 N_{i,x}^e d_l^e \right) N_{3,x}^e(x_i) + EI(N_{3,xx}^e(x_i)), \quad (3.92)$$

$$\tilde{k}_{35} = EI \left( \sum_{l=1}^4 N_{i,x}^e d_l^e \right) N_{5,x}^e(x_i) + EI(N_{5,xx}^e(x_i)), \quad (3.93)$$

$$\tilde{k}_{36} = EI \left( \sum_{l=1}^4 N_{i,x}^e d_l^e \right) N_{6,x}^e(x_i) + EI(N_{6,xx}^e(x_i)), \quad (3.94)$$

$$\tilde{k}_{41} = \frac{EA}{L^e}, \quad (3.95)$$

$$\tilde{k}_{44} = -\frac{EA}{L^e}, \quad (3.96)$$

$$\tilde{k}_{52} = EI \left( N_{2,x}^e(x_j) \right) \left( \sum_{l=1}^4 N_{l,xx}^e d_l^e \right) + EI \left( \sum_{l=1}^4 N_{l,x}^e d_l^e \right) \left( N_{2,xx}^e(x_j) \right) + \left( N_{2,xxx}^e(x_j) \right), \quad (3.97)$$

$$\tilde{k}_{53} = EI \left( N_{3,x}^e(x_j) \right) \left( \sum_{l=1}^4 N_{l,xx}^e d_l^e \right) + EI \left( \sum_{l=1}^4 N_{l,x}^e d_l^e \right) \left( N_{3,xx}^e(x_j) \right) + \left( N_{3,xxx}^e(x_j) \right), \quad (3.98)$$

$$\tilde{k}_{55} = EI \left( N_{5,x}^e(x_j) \right) \left( \sum_{l=1}^4 N_{l,xx}^e d_l^e \right) + EI \left( \sum_{l=1}^4 N_{l,x}^e d_l^e \right) \left( N_{5,xx}^e(x_j) \right) + \left( N_{5,xxx}^e(x_j) \right), \quad (3.99)$$

$$\tilde{k}_{56} = EI \left( N_{6,x}^e(x_j) \right) \left( \sum_{l=1}^4 N_{l,xx}^e d_l^e \right) + EI \left( \sum_{l=1}^4 N_{l,x}^e d_l^e \right) \left( N_{6,xx}^e(x_j) \right) + \left( N_{6,xxx}^e(x_j) \right), \quad (3.100)$$

$$\tilde{k}_{62} = EI \left( \sum_{l=1}^4 N_{i,x}^e d_l^e \right) N_{2,x}^e(x_j) + EI \left( N_{2,xx}^e(x_j) \right), \quad (3.101)$$

$$\tilde{k}_{63} = EI \left( \sum_{l=1}^4 N_{i,x}^e d_l^e \right) N_{3,x}^e(x_j) + EI \left( N_{3,xx}^e(x_j) \right), \quad (3.102)$$

$$\tilde{k}_{65} = EI \left( \sum_{l=1}^4 N_{i,x}^e d_l^e \right) N_{5,x}^e(x_j) + EI \left( N_{5,xx}^e(x_j) \right), \quad (3.103)$$

$$\tilde{k}_{66} = EI \left( \sum_{l=1}^4 N_{i,x}^e d_l^e \right) N_{6,x}^e(x_j) + EI \left( N_{6,xx}^e(x_j) \right), \quad (3.104)$$

### 3.2.2 Tensão de protensão

Em elementos pré-tensionados, o concreto armado e a cordoalha de protensão assumem perfeita aderência. Isto faz com que os deslocamentos ao longo da estrutura sejam influenciados pelos deslocamentos da armadura ativa. Trabalhos recentes têm adotado a metodologia de pré-determinar um comportamento para a cordoalha de protensão, via funções de forma e colocar essa informação como um carregamento externo ou como um elemento na composição da matriz de rigidez tangente fazendo com que a dinâmica da cordoalha contribua nas equações de equilíbrio do concreto armado (LOU, 2013 e MOREIRA, 2018).

Nessa seção será feita a modelagem da força de protensão que atua na seção transversal da estrutura. O elemento de treliça é adotado para modelar a cordoalha, nele o deslocamento longitudinal da cordoalha são funções dos deslocamentos vertical e horizontal da estrutura. A Figura (38) apresenta o elemento adotado.

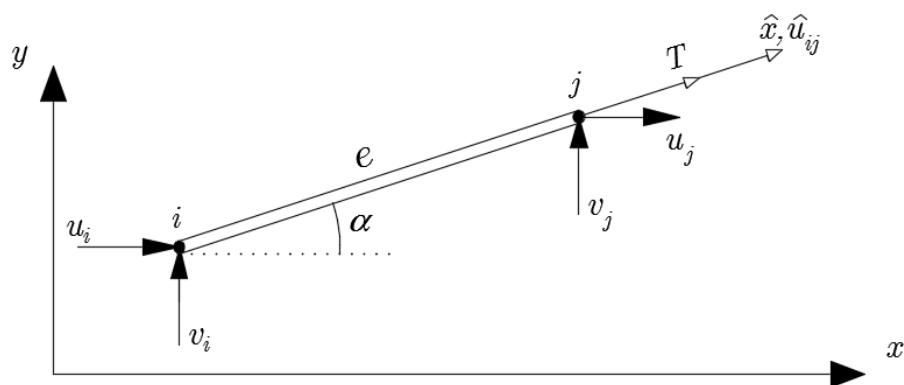


Figura 38 – Representação do Elemento de Treliça

Fonte: Adaptada de (LOGAN, 2007)

O primeiro passo é definir o campo de deslocamento. Aqui será considerado um campo de deslocamento linear dado por

$$\hat{u}_{ij}^e = N_1^e(\hat{x})d_i^e + N_2^e(\hat{x})d_j^e, \quad (3.105)$$

onde  $N_i$ ,  $i=1,2$ ; são as funções de forma dadas por

$$N_1 = \left(1 - \frac{\hat{x}}{L^e}\right), N_2 = \left(\frac{\hat{x}}{L^e}\right), \quad (3.106)$$

e  $d_i^e$ ,  $d_j^e$  são os deslocamentos na direção  $\hat{x}$  dos nós  $i, j$  do elemento  $e$ .

A partir do campo de deslocamento  $\hat{u}_{ij}^e$  a deformação da cordoalha é definida como

$$\varepsilon_{\hat{x}p}^e = \frac{d\hat{u}_{ij}^e}{d\hat{x}} = \frac{d_j^e - d_i^e}{L^e}. \quad (3.107)$$

Para calcular a deformação  $\varepsilon_{\hat{x}p}$  são necessários os deslocamentos  $d_{ij}^e$ . Já para o cálculo da tensão  $T$  é necessário calcular o módulo tangente de deformação do aço que é dado por

$$d\sigma_p = Ed\varepsilon_{\hat{x}p}. \quad (3.108)$$

A tensão na cordoalha de protensão é dada por:

$$T_p^e = AE \left( \frac{d_j^e - d_i^e}{L^e} \right) \quad (3.109)$$

Os deslocamentos nodais  $(d_i^e, d_j^e)$  no sistema de coordenadas local são dados por

$$\begin{bmatrix} d_i^e \\ d_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial u_i^e \\ \partial v_i^e \\ \partial u_j^e \\ \partial v_j^e \end{Bmatrix} \quad (3.110)$$

Na Equação (3.110) no vetor  $\{\partial u_i^e \ \partial v_i^e \ \partial u_j^e \ \partial v_j^e\}^T$ , a inclusão do delta representa os deslocamentos virtuais devido a linearização no sistema de coordenadas local. De posse dos deslocamentos da Equação (3.110) pode-se definir as forças atuantes devido a cordoalha

$$\begin{bmatrix} F_{ip}^e \\ V_{ip}^e \\ 0 \\ F_{jp}^e \\ V_{jp}^e \\ 0 \end{bmatrix} := \frac{A_p^e E_p}{L^e} \begin{bmatrix} \cos(\alpha)^2 & \cos(\alpha)\sin(\alpha) & 0 & -\cos(\alpha)^2 & -\cos(\alpha)\sin(\alpha) & 0 \\ \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin(\alpha)^2 & 0 & -\cos(\alpha)\sin(\alpha) & -\sin(\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\alpha)^2 & -\cos(\alpha)\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha)^2 & \cos(\alpha)\sin(\alpha) & 0 \\ -\cos(\alpha)\sin(\alpha) & -\sin(\alpha)^2 & 0 & \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin(\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ 0 \\ u_j^e \\ v_j^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.111)$$

Usando as Equações (3.84) e (3.111), considerando  $\ell_{ij}^e$  a excentricidade dos nós  $i, j$  do elemento  $\ell$ , pode-se determinar as forças resultantes, devido ao concreto e cordoalha de protensão, atuantes em cada seção transversal da viga como

$$\mathfrak{F}_{\text{interna}}^e = \begin{bmatrix} F_i^e + F_{ip}^e \\ \partial V_i^e + V_{ip}^e \\ \partial m_i^e + \ell_i T_p^e \\ F_j^e + F_{jp}^e \\ \partial V_j^e + V_{jp}^e \\ \partial m_j^e + \ell_j T_p^e \end{bmatrix}. \quad (3.112)$$

### 3.2.3 Contribuição da armadura passiva

Para fazer a análise da contribuição da armadura passiva na estabilidade da estrutura, será assumido que seu sistema local coincide com o do concreto por existir perfeita aderência entre os materiais. A tensão da armadura é dada por

$$T_s^e = A_s E_s \left( \frac{u_j^e - u_i^e}{L^e} \right). \quad (3.113)$$

Da Equação (3.113) segue que as forças nodais são

$$\begin{bmatrix} f_{is}^e \\ 0 \\ 0 \\ f_{js}^e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{A_s E_s}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \theta_i^e \\ u_j^e \\ v_j^e \\ \theta_j^e \end{Bmatrix}. \quad (3.114)$$

### 3.3 Análise das Não Linearidades Físicas

Para a análise das não linearidades físicas assumem-se as seguintes hipóteses:

- 1) A seção transversal permanece plana após a deformação por flexão;
- 2) Existe perfeito acoplamento, devido ao atrito, entre a armadura ativa, armadura passiva e concreto;
- 3) A relação tensão/deformação para o concreto em compressão adotada é dado por Hognestad (1951), já explanado na Capítulo 2 desse trabalho através das Equações (2.18) e (2.19) e escritas novamente na Equação (3.115)

$$\sigma_c^{\text{concreto}} = \begin{cases} f_{cm} \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right) - \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \rightarrow \varepsilon_c \leq \varepsilon_0 \\ f_{cm} \left[ 1 - 0.15 \left( \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_0}{\varepsilon_u - \varepsilon_0} \right) \right] \rightarrow \varepsilon_0 < \varepsilon_c \leq \varepsilon_u \end{cases} ; \quad (3.115)$$

- 4) A relação tensão/deformação para o concreto em regime de tração obedece ao seguinte modelo

$$\sigma_t^{\text{concreto}} = \begin{cases} E_c \varepsilon_t \rightarrow 0 \leq \varepsilon_t \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{ct} - \left( \frac{\varepsilon_t - \varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{tu} - \varepsilon_{cr}} \right) \rightarrow \varepsilon_{cr} < \varepsilon_t \leq \varepsilon_{tu} \end{cases} ; \quad (3.116)$$

onde  $E_c$  representa o módulo de elasticidade do concreto;  $f_{ct}$  representa a tensão de resistência a tração;  $\varepsilon_{cr}$  é a deformação associada a  $f_{ct}$ ;  $\varepsilon_{tu}$  é a deformação de tração crítica do concreto;

- 5) Para a armadura ativa, o modelo de tensão/deformação adotado é conforme Menegotto e Pinto (1973) também evidenciada no Capítulo 2 pela Equação (2.31);

- 6) Para a armadura passiva é assumido uma relação perfeitamente elástica para o diagrama tensão/deformação em ambas as direções, tração e compressão, as equações são dadas por

$$\sigma_s = \begin{cases} E_s \varepsilon_s \rightarrow \varepsilon_{rs} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su} \\ \sigma'_s, \text{ no regime de tração} \\ -\sigma'_s, \text{ no regime de compressão} \end{cases}, \quad (3.117)$$

onde  $\varepsilon_{rs}$  é a deformação associada a tensão de escoamento da armadura passiva e  $\varepsilon_{su} = 0.035$  é a deformação associada a tensão de ruptura.

### 3.4 Solução das Equações de Equilíbrio

Para obter a solução das equações de equilíbrio será usado o método de Newton-Raphson para solução de sistemas não lineares. O erro do problema é analisado utilizando o método de Galerkin, logo, os espaços interpoladores aos quais contém os deslocamentos são considerados iguais.

As equações de equilíbrio em cada elemento da estrutura são dadas por

$$F^e = K^e d^e, \quad (3.118)$$

onde  $d^e = \{u_i^e, v_i^e, \theta_i^e, u_j^e, v_j^e, \theta_j^e\}^T$  e a matriz do elemento  $\ell$ , representada por  $K^e$  é definida como

$$K^e = K_c^e + K_p^e + K_s^e, \quad (3.119)$$

onde  $K_c^e$ ,  $K_p^e$  e  $K_s^e$  são dadas respectivamente pelas Equações (3.84), (3.111) e (3.114).

Para calcular os módulos de elasticidade reescrevemos as tensões no concreto em regime de tração e compressão da seguinte forma

$$\sigma_c^{concreto} = f_{cm} \left( \frac{2\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right) \left( 1 - \hbar(\varepsilon_c - \varepsilon_0) \right) + f_{cm} \left( 1 - 0.15 \left( \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_0}{\varepsilon_u - \varepsilon_0} \right) \right) \left( \hbar(\varepsilon_c - \varepsilon_0) - \hbar(\varepsilon_c - \varepsilon_u) \right) \quad (3.120)$$

$$\sigma_t^{concreto} = E_c \varepsilon_t \left( 1 - \hbar(\varepsilon_t - \varepsilon_{cr}) \right) + \left( f_{ct} - \left( \frac{\varepsilon_t - \varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{tu} - \varepsilon_{cr}} \right) \right) \left( \hbar(\varepsilon_t - \varepsilon_{tr}) - \hbar(\varepsilon_t - \varepsilon_{tu}) \right). \quad (3.121)$$

Da mesma forma a tensão na armadura passiva é dada por

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \left( \hbar(\varepsilon_s - \varepsilon_{rs}) - \hbar(\varepsilon_s - \varepsilon_{su}) \right) + \sigma_s' \hbar(\varepsilon_s - \varepsilon_{su}) - \sigma_s' \left( 1 - \hbar(\varepsilon_s - \varepsilon_{rs}) \right), \quad (3.122)$$

onde  $\hbar(\cdot)$  é a função de Heaviside, definida por

$$\hbar(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (3.123)$$

Para a armadura ativa a tensão segue o mesmo modelo tanto para compressão quanto para tração, logo o modulo de elasticidade é calculado a partir da Equação (2.31).

Devido as não linearidades físicas e geométricas, as tensões que atuam na estrutura são da forma

$$\sigma_i^k = \sigma_i(u_k, \mu_n), \quad (3.124)$$

onde  $i = 1, \dots, 3$ ;  $n = 1, \dots, n_{\max}$  e  $k = 1, \dots, k_{\max}$  representam respectivamente, as tensões devido ao concreto, armadura passiva e armadura ativa; o parâmetro de carga aplicado na estrutura e a quantidade de deslocamentos totais. Após a aplicação das condições mecânicas de contorno na estrutura obtém-se o seguinte sistema de equações

$$K_{LL} u_L + K_{LP} u_P = f_L, \quad (3.125)$$

$$K_{PL}u_L + K_{PP}u_P = f_P. \quad (3.126)$$

No sistema de Equações (3.125) e (3.126),  $u_L$  são os graus de liberdade livres e  $u_P$  são os graus de liberdade prescritos. Uma vez que  $f_L$  e  $u_P$  são conhecidos, as incógnitas do sistema  $u_L$  e  $f_P$  são resolvidas por

$$u_L = K_{LL}^{-1}(f_L - K_{LP}u_P), \quad (3.127)$$

$$f_P = K_{PL}u_L + K_{PP}u_P. \quad (3.128)$$

Como a Equação (3.125) é não linear, pode-se escreve-la na forma:

$$\Psi(u_L) = f_L - K_{LL}(u_L)u_L - K_{LP}(u_L)u_P = 0, \quad (3.129)$$

em tal caso  $u_{L,n}^1 = u_n$  e o processo iterativo é definido como:

$$du_{L,n}^i = K_{LL,T}(u_{L,n}^i)^{-1}(f_L(\mu_n)) - K_{LP}(u_{L,n}^i)u_P, \quad (3.130)$$

$$\Delta u_{L,n}^i = \sum_{k=1}^i du_{L,n}^k, \quad (3.131)$$

$$u_n^{i+1} = u_n^i + \Delta u_{L,n}^i. \quad (3.132)$$

## CAPÍTULO 4

### RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados os resultados referentes a aplicação do Método de elementos finitos para análise não linear de vigas protendidas com aderência. Neste contexto são apresentadas as curvas de carga/deslocamento e carga/deformação para duas situações de contorno. O modelo é validado comparando com resultados experimentais (CATOIA, 2007).

#### 4.1 Exemplo de Viga Protendida ensaiada por Catoia (2007)

A viga ensaiada por Catoia (2007) corresponde a uma viga composta constituída por uma parte em concreto pré-moldado protendido e outra por concreto moldado no local. Suas dimensões e características no momento do ensaio são apresentadas nas Figuras (39) e (40).

A área da seção transversal de concreto considerada foi  $A_c = 0.24m^2$ , o momento de inércia da peça foi  $A_c = 0.0072m^4$ . Na viga foram inseridos quatro cabos protendidos com uma tensão de  $143,5KN$  por cabo, gerando uma força de protensão total na seção de  $574KN$  com excentricidade  $e_p = 25.5cm$ . A área de protensão referente aos quatro cabos totalizam  $A_p = 3.984cm^2$ , os cabos utilizados como armadura ativa são da classe

CP190-RB com tensão correspondente a  $f_{ptk} = 1900MPa$  e  $f_{pyk} = 1710MPa$ . Com relação a armadura passiva, foram utilizados aço da classe CA-50, correspondente a uma área de  $A_s = 1.6cm^2$ .

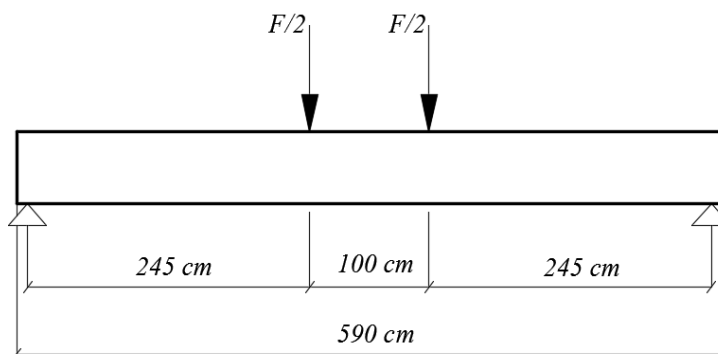


Figura 39 – Representação da viga ensaiada por Catoia (2007)

Fonte: Adaptado de (CATOIA, 2007)

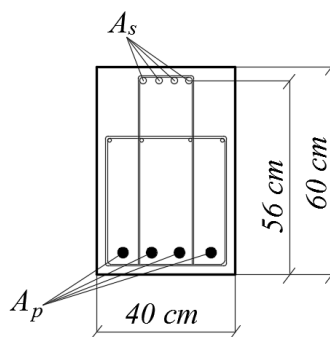


Figura 40 – Seção transversal da viga ensaiada por Catoia (2007)

Fonte: Adaptado de (CATOIA, 2007)

Segundo Catoia (2007), na realização do ensaio, a viga foi submetida a uma carga vertical de  $270KN$  divididos em dois pontos de aplicação como mostra a Figura (39), o peso próprio da viga foi considerado como um carregamento distribuído de  $6.0 KN/m$ . O detalhamento da armadura pode ser visto na Figura (41).

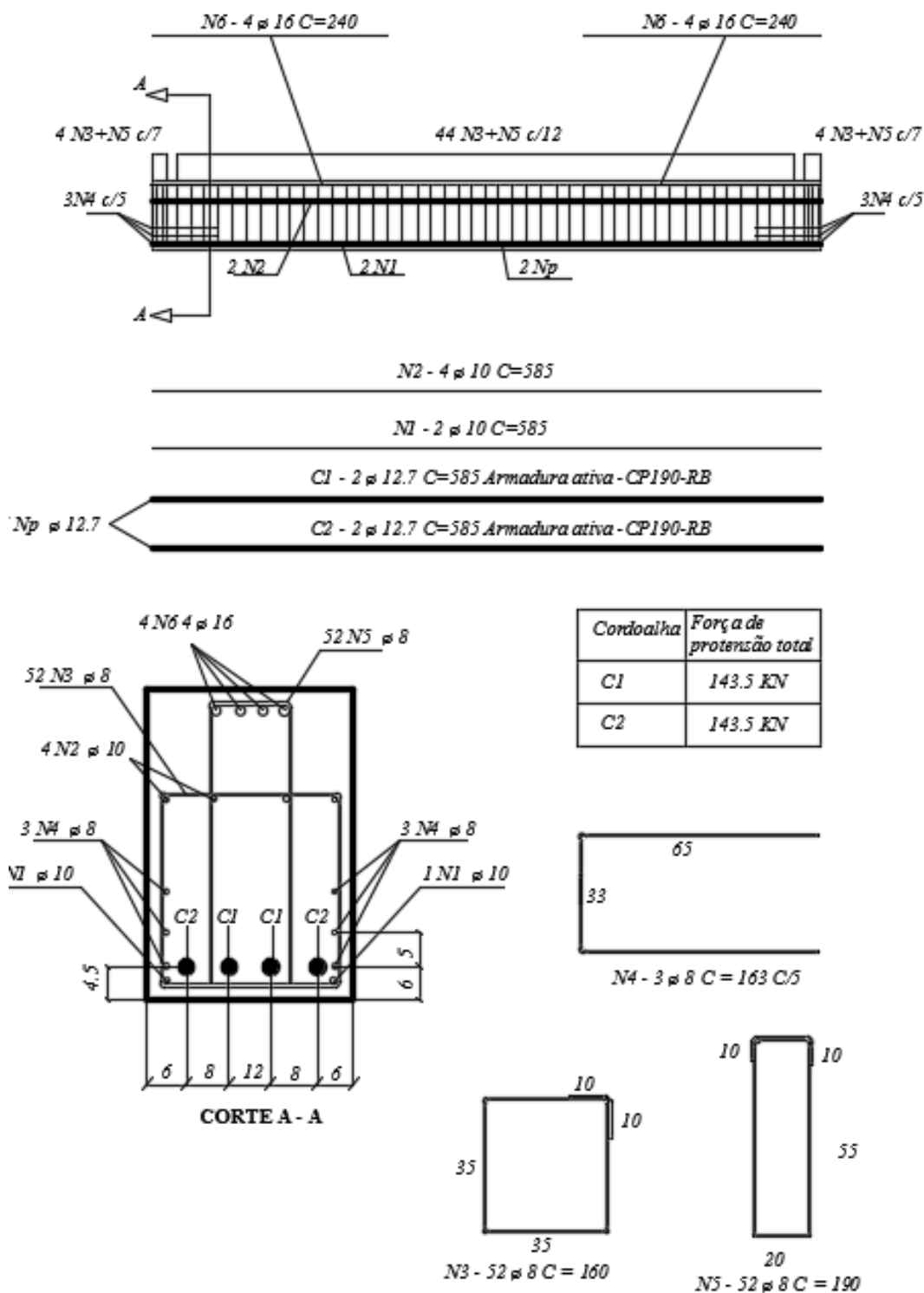


Figura 41 – Detalhamento da viga pré-moldada ensaiada por Catoia (2007)

Fonte: Adaptado de (CATOIA, 2007)

A metodologia experimental considera dois modelos de viga sendo o primeiro composto por uma viga bi-apoiada e o segundo definido como uma viga com ligações semirrígidas, ambos modelos foram ensaiados com duas cargas concentradas incrementais aplicadas ao vão central como mostra a Figura (39).

## 4.2 Resultados

### 4.2.1 Modelo de viga bi-apoiada

As vigas ensaiadas por Catoia (2007) foram modeladas por uma malha de elementos finitos constituída por seis elementos, sete nós e três graus de liberdade por nó. Na análise não linear, foi adotado o método incremental iterativo de controle de carga. A deformação de pico do concreto foi estimada segundo o Eurocode 2 (2004) igual a  $\varepsilon_0 = 2.246\%$  e a deformação última considerada foi  $\varepsilon_u = 3.1\%$ . Para o concreto no regime de tração, os valores adotados são  $\varepsilon_{cr} = 1.0 \times 10^{-5}$  e  $\varepsilon_{tu} = 4.0 \times 10^{-4}$ .

O aço de protensão desse exemplo apresenta tensão de escoamento  $f_{pyk} = 1710 MPa$  e tensão última  $f_{ptk} = 1900 MPa$ , deformação última de 6% e coeficientes de aproximação da curva definidos como  $K = 1.04$ ,  $Q = 0.012$  e  $R = 8.127$

A curva carga/deslocamento para o caso de viga bi engastada é apresentado na Figura (42), ela representa o deslocamento vertical no vão central. A modelagem convergiu com 45 passos incrementais de força e 25 iterações.

Apesar da malha considerada não ser refinada os resultados do modelo foram bem próximos quando comparado com o experimental de Catoia (2007), o perfil da curva se assemelha ao observado em laboratório. O pico de carga do modelo nesse caso foi 327.5 KN. Similar ao experimento (=350 KN).

As Figuras (43) e (44) correspondem as curvas de carga/deformação para a condição de viga bi-apoiada. A análise foi realizada tanto na região tracionada quanto na região comprimida do vão central, ambas situações convergiram com 45 passos incrementais de força e 10 iterações.

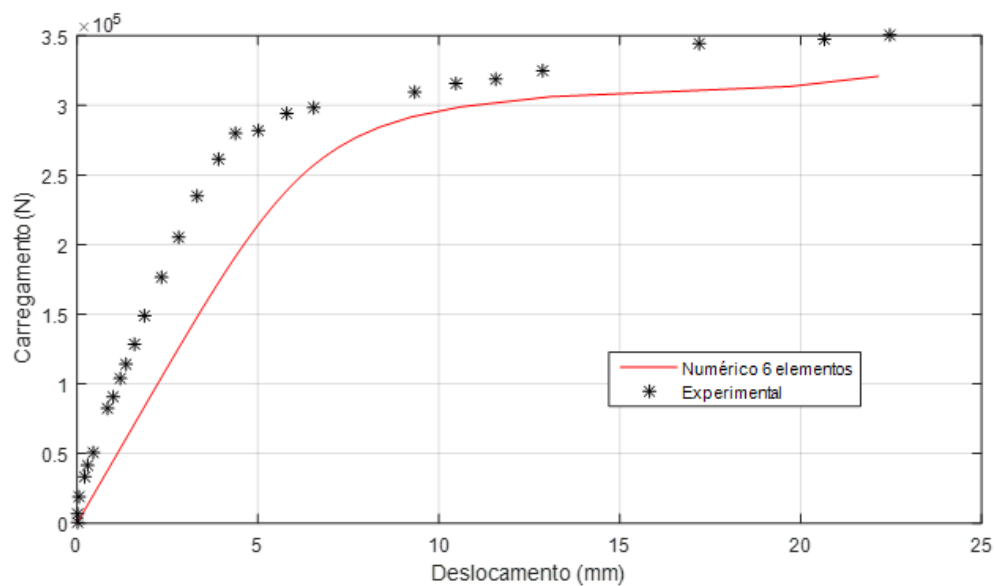


Figura 42 – Diagrama Carga/Deslocamento Viga Bi-Apoiada

Fonte: (AUTOR)

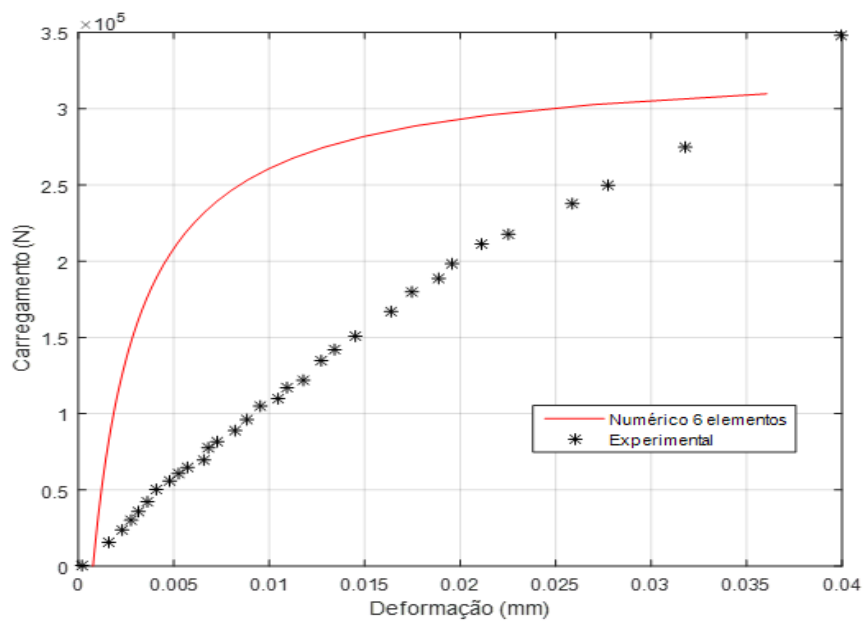


Figura 43 – Curva de Carga/Deformação na Região Tractionada da Viga Bi-Apoiada

Fonte: (AUTOR)

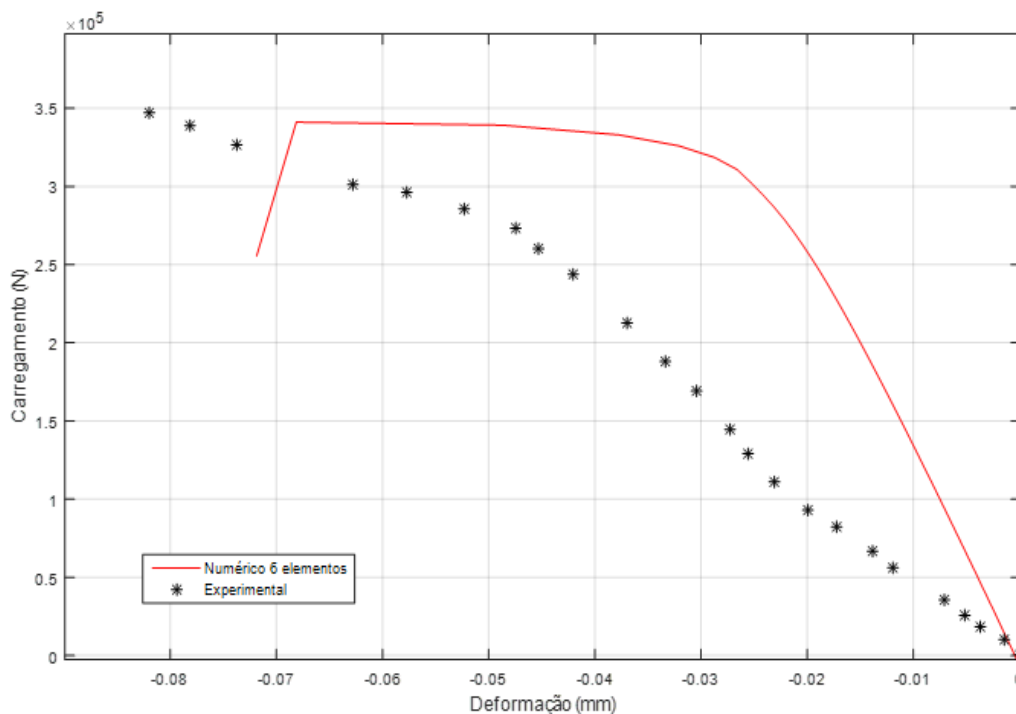


Figura 44 – Curva de Carga/Deformação na Região Comprimida da Viga Bi-Apoiada

Fonte: (AUTOR)

#### 4.2.2 Modelo de viga com ligações semirrígidas

O deslocamento do vão central do modelo de viga com ligações semirrígidas apresentou boa acurácia em relação ao observado em laboratório, a comparação dos resultados pode ser observada na Figura (45). Os parâmetros seguem como o modelo anterior, porém a convergência foi atingida na casa de 25 iterações. A carga máxima atingida foi 550 KN bem próxima do experimental (= 500 KN), nota-se a necessidade de refinamento da malha ao observar a variação de pico na curva numérica. Quanto a relação carga/deformação na região tracionada, os resultados foram praticamente idênticos, veja Figura (46), já para a região comprimida, o modelo numérico diferiu ligeiramente dos testes realizados experimentalmente, veja Figura (47).

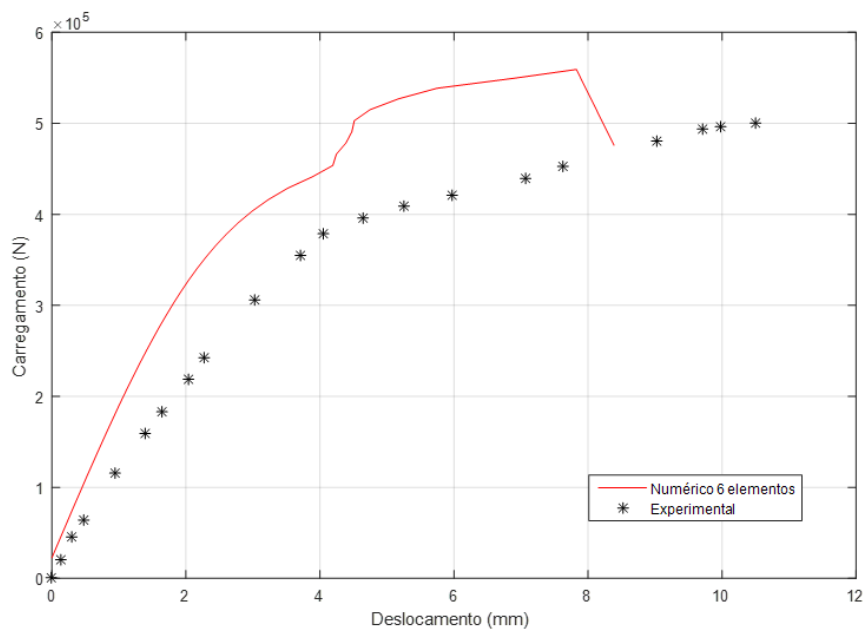


Figura 45 – Diagrama Carga/Deslocamento Viga Bi-Engastada

Fonte: (AUTOR)

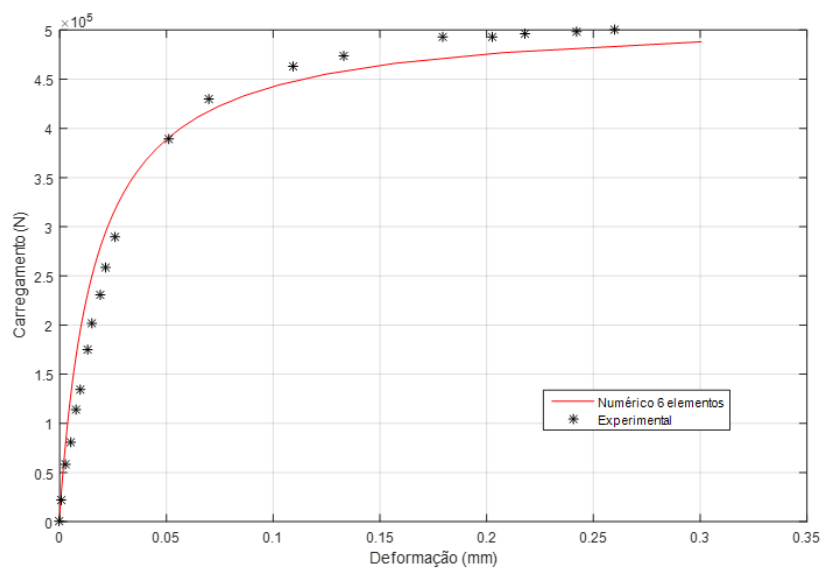


Figura 46 – Curva de Carga/Deformação na Região Tencionada da Viga Bi-Engastada

Fonte: (AUTOR)

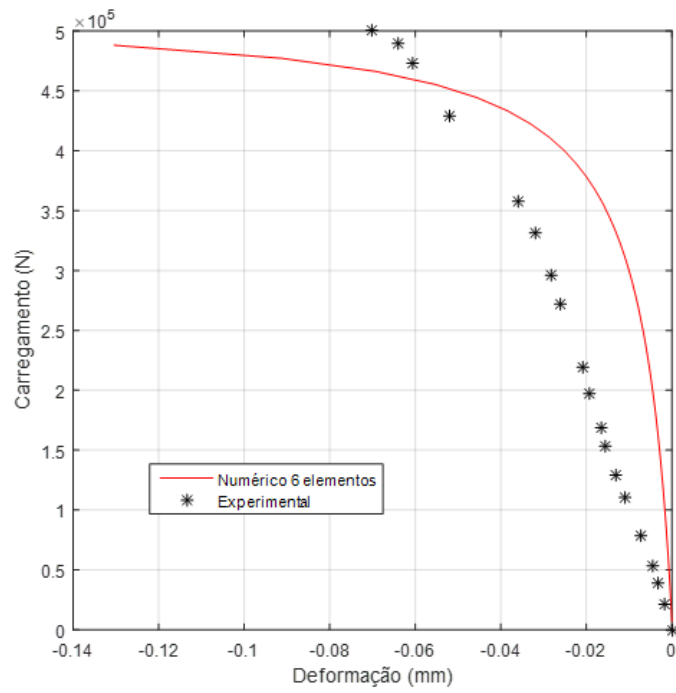


Figura 47 – Curva de Carga/Deformação na Região Comprimada da Viga Bi-Engastada

Fonte: (AUTOR)

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou um modelo de elementos finito baseado na formulação por equilíbrio de forças nodais para análise das não linearidades físicas e geométricas de vigas de concreto protendido com aderência. Apesar de utilizar uma malha com poucos elementos, a eficiência desse método foi comprovada devido a boa aproximação com os resultados experimentais, logo conclui-se que com o refinamento da malha pode-se conferir resultados bastante precisos.

Percebe-se a dificuldade dessa pesquisa quando se trata da montagem da matriz de rigidez tangente elementar, a representação de seus elementos de forma detalhada não é tarefa tão trivial, logo, entende-se como ganho científico a apresentação de forma clara a montagem de tais elementos.

Outro aspecto importante, porém, intangível, refere-se ao acoplamento concreto e aço de protensão, nesse caso ele é realizado quando informações sobre a força de protensão produzida na armadura ativa são consideradas como força externa nas equações de equilíbrio no concreto armado.

Nota-se a ausência da análise dos efeitos de segunda ordem, para isso é necessário atribuir a formulação por energia, considerada mais eficaz nessa situação, bem como para uma análise temporal considerando as perdas de protensão. Essas e outras situações demandam uma abordagem lagrangeana.

## 5.1 Considerações Finais

O modelo aqui apresentado pode ser ampliado considerando a possibilidade de protensão com aderência posterior e elementos protendidos sem aderência, ambas situações é aconselhável descrever a formulação segundo as equações de Lagrange.

As situações listadas acima, descrevem um problema estático-dinâmico, devendo em sua modelagem descrever as energias potencial e cinética atuantes no sistema.

A montagem das matrizes de rigidez nesses casos é tarefa de grande empenho, para tal, os elementos finitos devem ser considerados como elementos multicorpos.

Por fim a análise de vigas protendidas ao longo do tempo, incluindo um carregamento dinâmico pode ser considerado o ponto mais alto da pesquisa. O controle de carga/deslocamento para essa situação pode contribuir significativamente para o conhecimento do comportamento de tais estruturas.

## REFERÊNCIAS

- AALAMI B. Structural modeling of posttensioned members. *J Struct Eng New York, N.Y.* 2000;126(2):157-62.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, NBR 6120: **Ações para o cálculo de estruturas de edificações**. Rio de Janeiro, 1980.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, NBR 6118: **Projeto de Estruturas de Concreto — Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, NBR 9062: **Projeto e Execução de Estrutura de Concreto Pré-Moldado**. Rio de Janeiro, 2017.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, NBR 7482: Fios de aço para estruturas de concreto protendido - Especificação. Rio de Janeiro, 2020.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, NBR 7483: Cordoalhas de aço para estruturas de concreto protendido - Especificação. Rio de Janeiro, 2020.
- ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos: primeiros passos**. 2°. ed. Campinas: Ediora da Unicampi, v. I, 2003.
- AZEVEDO, Á. F. M. **MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**. 1°. ed. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003.
- BARBIERI, R. A.; GASTAL, F. D. P. S. L.; FILHO, A. C. Numerical Model for the Analysis of Unbonded Prestressed Members. **Journal of Structural Engineering**, v. 132, n. 1, p. 34-42, january 2006. ISSN 10.1061/(ASCE)0733-9445(2006)132:1(34).
- BASTOS, Paulo Sérgio dos Santos. **Concreto protendido**. 2019. Notas de aula. Disponível em: < [www.feb.unesp.br/pbastos](http://www.feb.unesp.br/pbastos) >. Acesso em: 11 ago. 2019.
- BATOZ J.L., DHATT G., Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *Int J Numer Meth Eng* 1979; 14(8):1262-7.
- BAZANT, Z. and CEDOLIN, L. *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fractures and Damage Theories*. World Scientific Publishing Company, 2010.
- BERGAN, P. G.; HOLLAND, I. Nonlinear finite element analysis of concrete structures. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*. v. 17/18, p. 443-467, 1979.
- CATOIA, B. **Comportamento de Vigas Protendidas Pré-moldadas com Ligações Semirrígidas**. São Carlos: Dissertação de Mestrado. Dep. de Engenharia Civil, UFSCar, 2007.

CARREIRA, D. J.; CHU, K. Stress-strain relationship for plain concrete in compression. **ACI Journal**, v. 82, p. 797–804, 1985.

CARVALHO, R. C. **Estruturas em Concreto Protendido: pré-tração, pós-tração, cálculo e detalhamento**. 1º. ed. São Paulo: Pini, v. I, 2017.

CARVALHO, R. C.; FILHO, J. R. D. F. **Calculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado**. 4º. ed. São Carlos: [s.n.], 2016.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. Design manual on cracking and deformations, Bulletin d'Informtion No. 185-E. Paris, France, 1985.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-FIP Model Code 1990. London, Thomas Telford, 1993.

DALL'ASTA, A., ZONA, A. Finite element model for externally prestressed composite beams with deformable connection. *Journal of Structural Engineering* v.131 p. 591-599, ASCE, 2005.

DESAYI, P.; KRISHNAN, S. Equation for the stress–strain curve of concrete. **ACI Journal Proceedings**, Farmington Hills, v. 61, p. 345-350, 1964.

EL DEBS, M. K., *Concreto pré-moldado : fundamentos e aplicações -- 2. ed. -- São Paulo : Oficina de Textos, 2017*

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). **Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings**. EN 1992-1-1. Brussels. 2004.

FILHO, A. A. **Elementos Finitos: A base da Tecnologia CAE**. 5º. ed. São Paulo: Érica, 2007.

GUSTANI, P. H. F., **Laje alveolar protendida: roteiro de dimensionamento e panorama de produção nas regiões sudoeste e centro-sul do paraná**, Monografia (Graduação em Engenharia Civil) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), 2017.

HAJEK, P. Concrete Structures for Sustainability in a Changing World, v. 171, p. 207-214, 2017. ISSN 10.1016/j.proeng.2017.01.328.

HANAI, J. B. **E-book Fundamentos do concreto protendido**. São Carlos, 2005.

HERNANDEZ-MONTES E., CESETTI A, GIL-MARTÍN L. M., Discussion of an efficient tensionstiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members, by Renata s.b. Stramandinoli, HenrietteL. La Rovere. *Eng Structures* 2013; 48:763-4.

HOGNESTAD, E., **A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members**, University of Illinois Engineering Experiment Station, Bulletin Series no. 399, Bulletin no. I, 1951.

HUSSIEN, O., ELAFANDY, T., ABDELRAHMAN, A., BAKY, S. A. e NASR, E. Behavior of bonded and unbonded prestressed normal and high strength concrete beams. *HBRC Journal*, v. 8 p. 239–251, 2012.

KIM, K. S., LEE, D. H. Nonlinear analysis method for continuous posttensioned concrete members with unbonded tendons. *Engineering Structures* v.40 p. 487-500, 2012.

- LOGAN, D. L. **A First Course in the Finite Element Method**. 6°. ed. Mason: Thomson, 2007.
- LOU T, LOPES S, LOPES A. Nonlinear and time-dependent analysis of continuous unbonded prestressed concrete beams. *Comp Struct* 2013; 119:166-76.
- LOU T, LOPES S, LOPES A. A finite element model to simulate long-term behavior of prestressed concrete girders. *Finite Elem Anal Des* 2014; 81:48-56.
- LOU, T., LOPES, M. R. S., LOPES, A.V. Numerical modeling of externally prestressed steel-concrete composite beams. *Journal of Constructional Steel Research* v.121 p. 229-236, Ed. Elsevier, 2016.
- LOU, T.; KARAVASILIS, T. L. Numerical assessment of the nonlinear behavior of continuous prestressed steel-concrete composite beams. **Engineering Structures**, v. 190, p. 116-127, july 2019. ISSN 10.1016/j.engstruct.2019.04.031.
- LOU, T.-J.; XIANG, Y.-Q. Finite element modeling of concrete beams prestressed with external tendons. **Engineering Structures**, v. 28, n. 14, p. 1919-1926, december 2006. ISSN 10.1016/j.engstruct.2006.03.020.
- LOU, T., XIANG Y. Numerical analysis of second-order effects of externally prestressed concrete beams. *Structures Engineering and Mechanics* v.35 p. 631-643, 2010.
- LYN, T. Y., BURNS, N. H. *Design of prestressed concrete structures*. Wiley, 1981.
- MENEGOTTO, M.; PINTO P. E. Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames, including changes in geometry and non-elastic behavior of elements under combined normal force and bending. **IABSE preliminary report for symposium on resistance and ultimate deformability of structures acted on well-defined repeated loads**, Lisbon. p 15–22, 1973.
- MOAVENI, S. **Finite element analysis: theory and application with ANSYS**. 3°. ed. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2007.
- MOREIRA, L. S.; SOUSA JR., J. B. M.; PARENTE JR., E. Nonlinear finite element simulation of unbonded prestressed concrete beams. **Engineering Structures**, v. 170, p. 167-177, may 2018. ISSN 10.1016/j.engstruct.2018.05.077.
- MOREIRA L. S. **Análise não linear de vigas de concreto com protensão não aderente via elementos finitos**. Fortaleza: Dissertação de Mestrado. Dep. de Engenharia Civil, UFC, 2016.
- NAYFEH, A. and PAI, P. *Linear and Nonlinear Structural Mechanics*. Wiley Series in Nonlinear Science, Wiley, 2008.
- PARENTE Jr., E., NOGUEIRA G. V., MEIRELES N. M, MOREIRA L. S., Material and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete frames. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais* 2014; 7:879-904.
- PEDROSO, F. L.. *Concreto: as origens e a evolução do material construtivo mais usado pelo homem*. *Concreto e Construções*, Mar. de 2009.
- PORTO, T. B.; FERNANDES, D. S. G. *Curso Básico de Concreto Armado Conforme NBR 6118/2014*. 1ª. ed. São Paulo: Oficina de Textos, v. 1, 2015. 208 p.

SOUSA Jr. J.B.M., CALDAS R. B. Numerical analysis of composite steelconcrete columns of arbitrary cross section. *J Struct Eng* 2005;131(11):1721-30.

SOUSA Jr. J. B. M., MUNIZ C .F. D. G. Analytical integration of cross section properties for numerical analysis of reinforced concrete, steel and composite frames. *Eng Struct* 2007; 29(4):618-25.

STRAMANDINOLI, R. S. B.. Modelos de Elementos Finitos para Análise não-linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Santa Catarina, 2007.

VASCONCELOS, R. F. **Otimização de elementos pré-moldados de concreto: lajes alveolares e vigas com cabo reto** Dissertação Mestrado em Estruturas, Geotécnica e Construção Civil – Universidade Federal de Goiás (UFG), Goiânia, GO, 2014.

VERÍSSIMO, G. S.; CÉSAR JR., K. M. L. **Concreto Protendido: Perdas de Protensão**. Viçosa: [s.n.], 1998.

VU, N., CASTEL, A., FRANÇOIS, R. Response of post-tensioned concrete beams with unbonded tendons including serviceability and ultimate state. *Engineering Structures* v.32 p. 556-569, 2010.

WARDEH, M. A.; TOUTANJI, H. A. Parameter estimation of an anisotropic damage model for concrete using genetic algorithms. **International Journal of Damage Mechanics**, p. 1-25, fevereiro 2016. ISSN 10.1177/1056789515622803.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics**. 6°. ed. Barcelona: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2013.

ZONA, A.; RAGNI, L.; DALL'ASTA, A. Finite element formulation for geometric and material nonlinear analysis of beams prestressed with external slipping tendons. **Finite element formulation for geometric and material nonlinear analysis of beams prestressed with external slipping tendons**, v. 44, n. 15, p. 910-919, november 2008. ISSN 10.1016/j.finel.2008.06.005.

ZONA, A.; RAGNI, L.; DALL'ASTA, A. Simplified method for the analysis of externally prestressed steel–concrete composite beams. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 65, n. 2, p. 308-313, february 2009. ISSN 10.1016/j.jcsr.2009.07.015.

ZUPAN, D. & SAJE, M. Analytical integration of stress field and tangent material moduli over concrete cross-sections. *Computers and Structures*, v. 83, p. 2368-2380, Mar. 2005.

## APÊNDICE A

### MONTAGEM DA MATRIZ TANGENTE REFERENTE AO CONCRETO

Aqui será apresentado o desenvolvimento completo para montagem da matriz de rigidez tangente para o elemento  $e$  de comprimento  $L$  acoplado ao nós  $i$  e  $j$  considerando o material concreto.

1. Definição dos polinômios interpoladores;

$$N_1(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (\text{A.1})$$

$$N_2(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) \quad (\text{A.2})$$

$$N_3(x) = \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \quad (\text{A.3})$$

$$N_4(x) = \left(\frac{x}{L}\right) \quad (\text{A.4})$$

$$N_5(x) = \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right) \quad (\text{A.5})$$

$$N_6(x) = \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}\right) \quad (\text{A.6})$$

2. Definição do campo de deslocamentos axial e vertical/rotação;

$$u_{ij}^e(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_i^e + \left(\frac{x}{L}\right) u_j^e \quad (\text{A.7})$$

$$v_{ij}^e(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) v_i^e + \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right) \theta_i^e + \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) v_j^e + \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}\right) \theta_j^e \quad (\text{A.8})$$

3. Definição do campo de deformação;

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -\frac{u_i^e}{L} + \frac{u_j^e}{L} \dots \\ &\dots - \frac{1}{2} y \left( \left( -\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3} \right) v_i^e + \left( 1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x}{L} \right) \theta_j^e \right)^2 \dots \quad (\text{A.9}) \\ &\dots - y \left( \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) v_i^e + \left( -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \theta_j^e \right) \end{aligned}$$

4. Definição das forças normal  $F(x)$ , cortante  $V(x)$  e momento fletor  $m(x)$

;

$$F(x) = AE \cdot \left( -\frac{u_i^e}{L} + \frac{u_j^e}{L} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} V(x) &= EI \cdot \left( \left( -\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3} \right) v_i^e + \left( 1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \\ &\dots \cdot \left( \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) v_i^e + \left( -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +EI \cdot \left( \frac{12}{L^3} v_i^e + \frac{6}{L^2} \theta_i^e - \frac{12}{L^3} v_j^e + \frac{6}{L^2} \theta_j^e \right) \\
m(x) &= \frac{EI}{2} \cdot \left( \left( -\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3} \right) v_i^e + \left( 1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x}{L} \right) \theta_j^e \right)^2 \dots \\
& +EI \cdot \left( \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) v_i^e + \left( -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \theta_j^e \right)
\end{aligned} \tag{A.12}$$

5. Montagem da matriz de rigidez tangente  $K_c^e$  ;

$$K_c^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{ij}^e}{\partial u_i} & \frac{\partial F_{ij}^e}{\partial v_i} & \frac{\partial F_{ij}^e}{\partial \theta_i} & \frac{\partial F_{ij}^e}{\partial u_j} & \frac{\partial F_{ij}^e}{\partial v_j} & \frac{\partial F_{ij}^e}{\partial \theta_j} \\ \frac{\partial V_{ij}^e}{\partial u_i} & \frac{\partial V_{ij}^e}{\partial v_i} & \frac{\partial V_{ij}^e}{\partial \theta_i} & \frac{\partial V_{ij}^e}{\partial u_j} & \frac{\partial V_{ij}^e}{\partial v_j} & \frac{\partial V_{ij}^e}{\partial \theta_j} \\ \frac{\partial m_{ij}^e}{\partial u_i} & \frac{\partial m_{ij}^e}{\partial v_i} & \frac{\partial m_{ij}^e}{\partial \theta_i} & \frac{\partial m_{ij}^e}{\partial u_j} & \frac{\partial m_{ij}^e}{\partial v_j} & \frac{\partial m_{ij}^e}{\partial \theta_j} \\ \frac{\partial F_{ij}^e}{\partial u_i} & \frac{\partial F_{ij}^e}{\partial v_i} & \frac{\partial F_{ij}^e}{\partial \theta_i} & \frac{\partial F_{ij}^e}{\partial u_j} & \frac{\partial F_{ij}^e}{\partial v_j} & \frac{\partial F_{ij}^e}{\partial \theta_j} \\ \frac{\partial V_{ij}^e}{\partial u_i} & \frac{\partial V_{ij}^e}{\partial v_i} & \frac{\partial V_{ij}^e}{\partial \theta_i} & \frac{\partial V_{ij}^e}{\partial u_j} & \frac{\partial V_{ij}^e}{\partial v_j} & \frac{\partial V_{ij}^e}{\partial \theta_j} \\ \frac{\partial m_{ij}^e}{\partial u_i} & \frac{\partial m_{ij}^e}{\partial v_i} & \frac{\partial m_{ij}^e}{\partial \theta_i} & \frac{\partial m_{ij}^e}{\partial u_j} & \frac{\partial m_{ij}^e}{\partial v_j} & \frac{\partial m_{ij}^e}{\partial \theta_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & 0 & 0 & \tilde{k}_{14} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{k}_{22} & \tilde{k}_{23} & 0 & \tilde{k}_{25} & \tilde{k}_{26} \\ 0 & \tilde{k}_{32} & \tilde{k}_{33} & 0 & \tilde{k}_{35} & \tilde{k}_{36} \\ \tilde{k}_{41} & 0 & 0 & \tilde{k}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{k}_{52} & \tilde{k}_{53} & 0 & \tilde{k}_{55} & \tilde{k}_{56} \\ 0 & \tilde{k}_{62} & \tilde{k}_{63} & 0 & \tilde{k}_{65} & \tilde{k}_{66} \end{bmatrix} \tag{A.13}$$

$$\tilde{k}_{11}(x_i) = -\frac{EA}{L^e} \tag{A.14}$$

$$\tilde{k}_{14}(x_i) = \frac{EA}{L^e} \tag{A.15}$$

$$\tilde{k}_{22}(x_i) = EI \left( -\frac{6x_i}{L^2} + \frac{6x_i^2}{L^3} \right) \left( \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x_i}{L^3} \right) v_i^e + \left( -\frac{4}{L} + \frac{6x_i}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x_i}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{6x_i}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
& \dots + EI \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x_i}{L^3} \right) \left( \left( -\frac{6x_i}{L^2} + \frac{6x_i^2}{L^3} \right) v_i^e + \left( 1 - \frac{4x_i}{L} + \frac{3x_i^2}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6x_i}{L^2} - \frac{6x_i^2}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{3x_i^2}{L^2} - \frac{2x_i}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \\
& \dots + \frac{12EI}{L^3} \\
\tilde{k}_{23}(x_i) &= EI \left( 1 - \frac{4x_i}{L} + \frac{3x_i^2}{L^2} \right) \left( \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x_i}{L^3} \right) v_i^e + \left( -\frac{4}{L} + \frac{6x_i}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x_i}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{6x_i}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \\
& \dots + EI \left( -\frac{4}{L} + \frac{6x_i}{L^2} \right) \left( \left( -\frac{6x_i}{L^2} + \frac{6x_i^2}{L^3} \right) v_i^e + \left( 1 - \frac{4x_i}{L} + \frac{3x_i^2}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6x_i}{L^2} - \frac{6x_i^2}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{3x_i^2}{L^2} - \frac{2x_i}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \quad (\text{A.17}) \\
& \dots + \frac{6EI}{L^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_{24}(x_i) &= EI \left( \frac{6x_i}{L^2} - \frac{6x_i^2}{L^3} \right) \left( \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x_i}{L^3} \right) v_i^e + \left( -\frac{4}{L} + \frac{6x_i}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x_i}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{6x_i}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \\
& \dots + EI \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x_i}{L^3} \right) \left( \left( -\frac{6x_i}{L^2} + \frac{6x_i^2}{L^3} \right) v_i^e + \left( 1 - \frac{4x_i}{L} + \frac{3x_i^2}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6x_i}{L^2} - \frac{6x_i^2}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{3x_i^2}{L^2} - \frac{2x_i}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \quad (\text{A.18}) \\
& \dots + \frac{12EI}{L^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_{25}(x_i) &= EI \left( \frac{3x_i^2}{L^2} - \frac{2x_i}{L} \right) \left( \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x_i}{L^3} \right) v_i^e + \left( -\frac{4}{L} + \frac{6x_i}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x_i}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{6x_i}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \\
& \dots + EI \left( \frac{6x_i}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \left( \left( -\frac{6x_i}{L^2} + \frac{6x_i^2}{L^3} \right) v_i^e + \left( 1 - \frac{4x_i}{L} + \frac{3x_i^2}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6x_i}{L^2} - \frac{6x_i^2}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{3x_i^2}{L^2} - \frac{2x_i}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \quad (\text{A.19}) \\
& \dots + \frac{6EI}{L^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_{32}(x_i) &= EI \cdot \left( \left( -\frac{6x_i}{L^2} + \frac{6x_i^2}{L^3} \right) v_i^e + \left( 1 - \frac{4x_i}{L} + \frac{3x_i^2}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6x_i}{L^2} - \frac{6x_i^2}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{3x_i^2}{L^2} - \frac{2x_i}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \\
& \dots \left( -\frac{6x_i}{L^2} + \frac{6x_i^2}{L^3} \right) + EI \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x_i}{L^3} \right) \quad (\text{A.20})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{33}(x_i) &= EI \cdot \left( \left( -\frac{6x_i}{L^2} + \frac{6x_i^2}{L^3} \right) v_i^e + \left( 1 - \frac{4x_i}{L} + \frac{3x_i^2}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6x_i}{L^2} - \frac{6x_i^2}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{3x_i^2}{L^2} - \frac{2x_i}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \\ &\dots \left( 1 - \frac{4x_i}{L} + \frac{3x_i^2}{L^2} \right) + EI \left( -\frac{4}{L} + \frac{6x_i}{L^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{35}(x_i) &= EI \cdot \left( \left( -\frac{6x_i}{L^2} + \frac{6x_i^2}{L^3} \right) v_i^e + \left( 1 - \frac{4x_i}{L} + \frac{3x_i^2}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6x_i}{L^2} - \frac{6x_i^2}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{3x_i^2}{L^2} - \frac{2x_i}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \\ &\dots \left( \frac{6x_i}{L^2} - \frac{6x_i^2}{L^3} \right) + EI \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x_i}{L^3} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{36}(x_i) &= EI \cdot \left( \left( -\frac{6x_i}{L^2} + \frac{6x_i^2}{L^3} \right) v_i^e + \left( 1 - \frac{4x_i}{L} + \frac{3x_i^2}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6x_i}{L^2} - \frac{6x_i^2}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{3x_i^2}{L^2} - \frac{2x_i}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \\ &\dots \left( \frac{3x_i^2}{L^2} - \frac{2x_i}{L} \right) + EI \left( \frac{6x_i}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\tilde{k}_{41}(x_j) = -\frac{EA}{L^e} \quad (\text{A.24})$$

$$\tilde{k}_{44}(x_j) = \frac{EA}{L^e} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{52}(x_j) &= EI \left( -\frac{6x_j}{L^2} + \frac{6x_j^2}{L^3} \right) \left( \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x_j}{L^3} \right) v_i^e + \left( -\frac{4}{L} + \frac{6x_j}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x_j}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{6x_j}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \\ &\dots + EI \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x_j}{L^3} \right) \left( \left( -\frac{6x_j}{L^2} + \frac{6x_j^2}{L^3} \right) v_i^e + \left( 1 - \frac{4x_j}{L} + \frac{3x_j^2}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6x_j}{L^2} - \frac{6x_j^2}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{3x_j^2}{L^2} - \frac{2x_j}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \\ &\dots + \frac{12EI}{L^3} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$\tilde{k}_{53}(x_j) = EI \left( 1 - \frac{4x_j}{L} + \frac{3x_j^2}{L^2} \right) \left( \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x_j}{L^3} \right) v_i^e + \left( -\frac{4}{L} + \frac{6x_j}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x_j}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{6x_j}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned}
& \dots + EI \left( -\frac{4}{L} + \frac{6x_j}{L^2} \right) \left( \left( -\frac{6x_j}{L^2} + \frac{6x_j^2}{L^3} \right) v_i^e + \left( 1 - \frac{4x_j}{L} + \frac{3x_j^2}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6x_j}{L^2} - \frac{6x_j^2}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{3x_j^2}{L^2} - \frac{2x_j}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \\
& \dots + \frac{6EI}{L^2} \\
\tilde{k}_{55}(x_j) &= EI \left( \frac{6x_j}{L^2} - \frac{6x_j^2}{L^3} \right) \left( \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x_j}{L^3} \right) v_i^e + \left( -\frac{4}{L} + \frac{6x_j}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x_j}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{6x_j}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \\
& \dots + EI \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x_j}{L^3} \right) \left( \left( -\frac{6x_j}{L^2} + \frac{6x_j^2}{L^3} \right) v_i^e + \left( 1 - \frac{4x_j}{L} + \frac{3x_j^2}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6x_j}{L^2} - \frac{6x_j^2}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{3x_j^2}{L^2} - \frac{2x_j}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \quad (\text{A.28}) \\
& \dots + \frac{12EI}{L^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_{56}(x_j) &= EI \left( \frac{3x_j^2}{L^2} - \frac{2x_j}{L} \right) \left( \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x_j}{L^3} \right) v_i^e + \left( -\frac{4}{L} + \frac{6x_j}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x_j}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{6x_j}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \\
& \dots + EI \left( \frac{6x_j}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \left( \left( -\frac{6x_j}{L^2} + \frac{6x_j^2}{L^3} \right) v_i^e + \left( 1 - \frac{4x_j}{L} + \frac{3x_j^2}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6x_j}{L^2} - \frac{6x_j^2}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{3x_j^2}{L^2} - \frac{2x_j}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \quad (\text{A.29}) \\
& \dots + \frac{6EI}{L^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_{62}(x_j) &= EI \cdot \left( \left( -\frac{6x_j}{L^2} + \frac{6x_j^2}{L^3} \right) v_i^e + \left( 1 - \frac{4x_j}{L} + \frac{3x_j^2}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6x_j}{L^2} - \frac{6x_j^2}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{3x_j^2}{L^2} - \frac{2x_j}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \\
& \dots \left( -\frac{6x_j}{L^2} + \frac{6x_j^2}{L^3} \right) + EI \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x_j}{L^3} \right) \quad (\text{A.30})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_{63}(x_j) &= EI \cdot \left( \left( -\frac{6x_j}{L^2} + \frac{6x_j^2}{L^3} \right) v_i^e + \left( 1 - \frac{4x_j}{L} + \frac{3x_j^2}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6x_j}{L^2} - \frac{6x_j^2}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{3x_j^2}{L^2} - \frac{2x_j}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \\
& \dots \left( 1 - \frac{4x_j}{L} + \frac{3x_j^2}{L^2} \right) + EI \left( -\frac{4}{L} + \frac{6x_j}{L^2} \right) \quad (\text{A.31})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_{65}(x_j) &= EI \cdot \left( \left( -\frac{6x_j}{L^2} + \frac{6x_j^2}{L^3} \right) v_i^e + \left( 1 - \frac{4x_j}{L} + \frac{3x_j^2}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6x_j}{L^2} - \frac{6x_j^2}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{3x_j^2}{L^2} - \frac{2x_j}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \\
&\dots \left( \frac{6x_j}{L^2} - \frac{6x_j^2}{L^3} \right) + EI \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x_j}{L^3} \right)
\end{aligned} \tag{A.32}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_{66}(x_j) &= EI \cdot \left( \left( -\frac{6x_j}{L^2} + \frac{6x_j^2}{L^3} \right) v_i^e + \left( 1 - \frac{4x_j}{L} + \frac{3x_j^2}{L^2} \right) \theta_i^e + \left( \frac{6x_j}{L^2} - \frac{6x_j^2}{L^3} \right) v_j^e + \left( \frac{3x_j^2}{L^2} - \frac{2x_j}{L} \right) \theta_j^e \right) \dots \\
&\dots \left( \frac{3x_j^2}{L^2} - \frac{2x_j}{L} \right) + EI \left( \frac{6x_j}{L^2} - \frac{2}{L} \right)
\end{aligned} \tag{A.33}$$

## APÊNDICE B

### PROGRAMAÇÃO COMPUTACIONAL

O programa computacional desenvolvido neste trabalho será apresentado a seguir em linguagem MatLab ®

```
% #####
% UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS - REGIONAL CATALÃO (UFG-RC)
% PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO (PPGEP)
% Nível: MESTRADO
% Código MEF Não-linear
% Cálculo das tensões e deformações em uma viga de concreto protendido
% Viga com elementos planos considerando 3 GDL
% Participantes:
% Werley Rafael da Silva      -> Discente [x] / Orientador [ ]
% Prof. Dr. Marcos Napoleão Rabelo  -> Discente [ ] / Orientador [x]
% Prof. Wanderlei Malaquias P. Junior -> Discente [ ] / Colaborador[x]
%#####
clear all
clc
format long
%leitura dos dados
e=6;%número de elementos
nnos=7;%número de nós total
nnoel=2;%número de nós por elemento
nseco=1;%número de seções transversais diferentes
napoi=2;%número de apoios na viga
glpno=3;%grau de liberdade por nó
glele = glpno*nnoel; %grau de liberdade do elemento
gltot = glpno*nnos; %grau de liberdade total
```

```

altura_h =60; %altura da viga
base_bw=40; %base da viga
%
%matriz de coordenadas do concreto
%linhas correspondem aos nós e colunas as coordenadas x e y %respectivamente
% matriz para região comprimida
Mcoord_c =[0 0.55;
           0.09 0.55;
           2.45 0.55;
           2.95 0.55;
           3.45 0.55;
           5.81 0.55;
           5.9 0.55];
% matriz para região tracionada
Mcoord_c =[0 0.045;
           0.09 0.045;
           2.45 0.045;
           2.95 0.045;
           3.45 0.045;
           5.81 0.045;
           5.9 0.045];
%matriz de coordenadas do aço de protensão
%linhas correspondem aos nós e colunas as coordenadas x e y %respectivamente
Mcoord_p =[0 0.045;
           0.09 0.045;
           2.45 0.045;
           2.95 0.045;
           3.45 0.045;
           5.81 0.045;
           5.9 0.045];
%matriz de conectividade
%linhas correspondem aos elementos e colunas aos nós conectados
% as colunas 3 e 4 correspondem ao material e ao número de seções %respectivamente
Mpele = [1 2 1 1;
         2 3 1 1;
         3 4 1 1;
         4 5 1 1;
         5 6 1 1;
         6 7 1 1];
%matriz com as restrições dos apoios, 1 é fixo e 0 é livre
%primeira coluna é o nó restrito e as demais são direções x, y e rotação
Mapoi = [1 1 1 1;
         7 1 1 1];
#####
% Inicio da rotina de cálculos

```

```

%montagem do vetor contador dos graus de liberdade total
[Glt,nGlt] = Grau_de_liberdade_total(nnos,glpno);
%leitura dentro do vetor contador, os GDL restritos
[GLimp] = Grau_de_liberdade_restrito(napoi,Mapoi,glpno);
%
%leitura dentro do vetor contador dos GDL livres
GLlivre = setdiff(Glt,GLimp);
%
%leitura das coordenadas do concreto
for i=1:nnos
    xx_c(i)=Mcoord_c(i,1);
    yy_c(i)=Mcoord_c(i,2);
end
%leitura das coordenadas da protensão
for i=1:nnos
    xx_p(i)=Mcoord_p(i,1);
    yy_p(i)=Mcoord_p(i,2);
end
u_global=zeros(gltot,1);
forca_g=zeros(gltot,1);
fglobal_ext=zeros(gltot,1);
fglobal_int=zeros(gltot,1);
rigidezglobal=zeros(gltot,gltot);
h=1000;
%
for i=1:e
    for j=1:2
        conect(i,j)=Mpele(i,j);
    end
end
for k=1:45%passo incremental da força
    fglobal_ext(8)=-15e+3+(k-1)*h;
    fglobal_ext(14)=-15e+3+(k-1)*h;
    for k1=1:10%passo iterativo
        for i=1:e
            indice=conect(i,:);
            contador_elem=funcao5(indice);
            [L_p,yy_p]=func_comprimento(xx_p,indice);
            L=func_L(xx_c,yy_c,indice);
            comp_p=func_comp_p(u_global,contador_elem,L);
            ex=func_exc(yy_c,yy_p,indice);
            tensao_c=func_defor(u_global,contador_elem,indice,L,xx_c,yy_c);
            defor_viga(i,k)=tensao_c.defor1;
            F_p=funcao2(comp_p);
            rigidez_local=rigidez1(xx_c,yy_c,u_global,indice,...

```

```

...contador_elem,L,tensao_c);
f1_c=funcao1(tensao_c,yy_c,indice);
forcap=func_forcap(xx_p,yy_p,indice,F_p,ex,L_p,...
...contador_elem,u_global);
fglobal_int=funcao7(fglobal_int,forcap,contador_elem);
carga(:,k)= fglobal_int;
rigidezglobal=funcao3(rigidezglobal,...
...contador_elem,rigidez_local);
gradiente=fglobal_ext-fglobal_int;
%
end

```

```

y=rigidezglobal(GLlivre',GLlivre')\gradiente(GLlivre');
u_global(GLlivre')= u_global(GLlivre')-y;
[xx_c,yy_c]=atual_coordc(xx_c,yy_c,u_global);
u_global=u_global/norm(u_global);
xx_p=func_xx_p(xx_p,u_global);
u_globalaux1(:,k)=u_global;
end
end

```

```
function [xx_c,yy_c]=atual_coordc(xx_c,yy_c,u_local)
```

```

xx_c(2)=xx_c(2)+u_local(4);
yy_c(2)=yy_c(2)+u_local(5);
xx_c(3)=xx_c(3)+u_local(7);
yy_c(3)=yy_c(3)+u_local(8);
xx_c(4)=xx_c(4)+u_local(10);
yy_c(4)=yy_c(4)+u_local(11);
xx_c(5)=xx_c(5)+u_local(13);
yy_c(5)=yy_c(5)+u_local(14);
xx_c(6)=xx_c(6)+u_local(16);
yy_c(6)=yy_c(6)+u_local(17);

```

```
end
```

```
function comp_p=func_comp_p(u_global,contador_elem,L)
```

```

u1=u_global(contador_elem(1));
u2=u_global(contador_elem(2));
u4=u_global(contador_elem(4));
u5=u_global(contador_elem(5));

```

```

comp_p.comp_x=(u4-u1)/L;
comp_p.comp_y=(u5-u2)/L;

end

function [L_p,yy_p]=func_comprimento(xx_p,indice)

x1=xx_p(indice(1));
x2=xx_p(indice(2));
y1=0.0011*x1^2-0.22*x1+15;
y2=0.0011*x2^2-0.22*x2+15;
L_p=((x2-x1)^2+(y2-y1)^2)^(0.5);
yy_p(indice(1))=y1;
yy_p(indice(2))=y2;

end

function tensao_c=func_defor(u_global,contador_elem,indice,L,xx_c,yy_c)

u1=u_global(contador_elem(1));
u2=u_global(contador_elem(2));
u3=u_global(contador_elem(3));
u4=u_global(contador_elem(4));
u5=u_global(contador_elem(5));
u6=u_global(contador_elem(6));
x1=xx_c(indice(1));
x2=xx_c(indice(2));
y1=yy_c(indice(1));
y2=yy_c(indice(2));

J11=-u1+u4;
J12=(6*x1^2-6*x1*L)*u2+(3*x1^2*L-4*x1*L^2+L^3)*u3+(-6*x1^2+6*x1*L)*u5+(3*x1^2*L-
2*x1*L^2)*u6;
J13=(12*x1-6*L)*u2+(6*x1*L-4*L^2)*u3+(-12*x1+6*L)*u5+(6*x1*L-4*L^2)*u6;

J21=-u1+u4;
J22=(6*x2^2-6*x2*L)*u2+(3*x2^2*L-4*x2*L^2+L^3)*u3+(-6*x2^2+6*x2*L)*u5+(3*x2^2*L-
2*x2*L^2)*u6;
J23=(12*x2-6*L)*u2+(6*x2*L-4*L^2)*u3+(-12*x2+6*L)*u5+(6*x2*L-4*L^2)*u6;

epsilon_c1=J11/L+J12^2/(2*L^6)+J13/(L^3);
epsilon_c2=J21/L+J22^2/(2*L^6)+J23/(L^3);

deforconcreto = epsilon_c2+epsilon_c1;

```

```

    tensao_c.defor1 = deforconcreto;
    tensao_c.defor2 = epsilon_c1;
    tensao_c.defor3 = epsilon_c2;

end

function ex=func_exc(yy_c,yy_p,indice)

    ex.e1=yy_c(indice(1))-yy_p(indice(2));
    ex.e2=yy_c(indice(2))-yy_p(indice(2));

end

function forcap=func_forcap(xx_p,yy_p,indice,F_p,ex,L_p,contador_elem,u_global)

    u1=u_global(contador_elem(1));
    u2=u_global(contador_elem(2));
    u4=u_global(contador_elem(4));
    u5=u_global(contador_elem(5));

    u=[u1;u2;u4;u5];

    x1=xx_p(indice(1));
    y1=yy_p(indice(1));
    x2=xx_p(indice(2));
    y2=yy_p(indice(2));

    s=(x2-x1)/L_p; %coseno e seno t
    c=(y2-y1)/L_p;

    mat=2*F_p.tensaop1/L_p*[c^2 c*s -c^2 -c*s;
        c*s s^2 -c*s -s^2;
        -c^2 -c*s c^2 c*s;
        -c*s -s^2 c*s s^2];

    f1aux=mat*u;
    forcap=[f1aux(1);
        f1aux(2);
        f1aux(1)*ex.e1;
        f1aux(3);
        f1aux(4);
        f1aux(3)*ex.e2];

end

```

```

function L=func_L(xx_c,yy_c,indice)

    x1=xx_c(indice(1));
    x2=xx_c(indice(2));
    y1=yy_c(indice(1));
    y2=yy_c(indice(2));
    L=((x2-x1)^2+(y2-y1)^2)^(0.5);

end

function xx_p=func_xx_p(xx_p,u_local)

    xx_p(2)=xx_p(2)+u_local(4);

end

function f1_c=funcao1(tensao_c,yy_c,indice)

y1=yy_c(indice(1));
y2=yy_c(indice(2));

defor=tensao_c.defor1;
epsilon_c1=tensao_c.defor2;
epsilon_c2=tensao_c.defor3;

if defor <=0.002
    V1=2e+3*(epsilon_c1/0.002-(epsilon_c1/0.002)^2);
    M1=2e+3*(epsilon_c1/0.002-(epsilon_c1/0.002)^2)*y1;
    V2=2e+3*(epsilon_c2/0.002-(epsilon_c2/0.002)^2);
    M2=2e+3*(epsilon_c2/0.002-(epsilon_c2/0.002)^2)*y2;
else
    V1=2e+3*(1-0.15*(epsilon_c1-0.002)/0.033);
    M1=2e+3*(1-0.15*(epsilon_c1-0.002)/0.033)*y1;
    V2=2e+3*(1-0.15*(epsilon_c2-0.002)/0.033);
    M2=2e+3*(1-0.15*(epsilon_c2-0.002)/0.033)*y2;
end
    f1_c=[0;
        V1;
        M1;
        0;
        V2;
        M2];
end

```

```

function F_p=funcao2(comp_p)

    F_p.tensaop1=10e+3*(0.01174+0.988/(1+0.675*abs(comp_p.comp_x)^7.344)^0.136)-...
        0.672e+3*abs(comp_p.comp_x)^7.433*(1+0.675*abs(comp_p.comp_x)^7.433)^(-1.136);

end

function rigidezglobal=funcao3(rigidezglobal,contador_elem,rigidez_local)

    for i1=1:6
        for i2=1:6
            rigidezglobal(contador_elem(i1),contador_elem(i2))=...
                rigidezglobal(contador_elem(i1),contador_elem(i2))+...
                rigidez_local(i1,i2);
        end
    end
end

function contador_elem=funcao5(indice)

    contador_elem(1)=indice(1)*3-2;
    contador_elem(2)=indice(1)*3-1;
    contador_elem(3)=indice(1)*3;
    contador_elem(4)=indice(2)*3-2;
    contador_elem(5)=indice(2)*3-1;
    contador_elem(6)=indice(2)*3;

end

function fgloba_int=funcao7(fgloba_int,forcap,contador_elem)

    for i1=1:6
        fgloba_int(contador_elem(i1))=fgloba_int(contador_elem(i1))+
            forcap(i1);
    end

end

function [GLimp]=Grau_de_liberdade_restrito(napoi,Mapoi,glpno)
k=1;
for i=1:napoi
    no_impedido = (Mapoi(i,1));
    for j=2:(glpno+1)

```

```

tipo_restr= Mapoi(i,j);

if tipo_restr==1
    GLimp(k)=((no_impedido*glpno)-glpno)+(j-1);
    k=k+1;

end

end

end
end
end

function[Glt,nGlt]=Grau_de_liberdade_total(nnos,glpno)
gl_total_da_estrutura=glpno*nnos;
for i=1:gl_total_da_estrutura
    Glt(i)=i;
end
nGlt=max(Glt(i));
end

function rigidez_local=rigidez1(xx_c,yy_c,u_global,indice,...
    contador_elem,L,tensao_c)
u1=u_global(contador_elem(1));
u2=u_global(contador_elem(2));
u3=u_global(contador_elem(3));
u4=u_global(contador_elem(4));
u5=u_global(contador_elem(5));
u6=u_global(contador_elem(6));

x1=xx_c(indice(1));
x2=xx_c(indice(2));

J11=1/L^3*(6*x1^2-6*x1*L)*u2+(3*x1^2-4*x1*L^2+L^3)*u3+...
...(-6*x1^2+6*x1*L)*u5+(3*x1^2*L-2*x1*L^2)*u6;
J12=1/L^3*(12*x1-6*L)*u2+(6*x1*L-4*L^2)*u3+(12*x1+6)*u5+...
...(6*x1*L-4*L)*u6;
J21=1/L^3*(6*x2^2-6*x2*L)*u2+(3*x2^2-4*x2*L^2+L^3)*u3+...
...(-6*x2^2+6*x2*L)*u5+(3*x2^2*L-2*x2*L^2)*u6;
J22=1/L^3*(12*x2-6*L)*u2+(6*x2*L-4*L^2)*u3+(12*x2+6)*u5+...
...(6*x2*L-4*L)*u6;
var11=J11*(6*x1^2-6*x1*L)+(12*x1-6*L);
var12=J11*(3*x1^2*L-4*x1*L^2+L^3)+(6*x1*L-4*L^2);
var13=J11*(-6*x1^2+6*x1*L)+(-12*x1+6*L);
var14=J11*(3*x1^2*L-2*x1*L^2)+(6*x1*L-2*L^2);
var21=J21*(6*x1^2-6*x1*L)+(12*x1-6*L);

```

```

var22=J21*(3*x1^2*L-4*x1*L^2+L^3)+(6*x1*L-4*L^2);
var23=J21*(-6*x1^2+6*x1*L)+(-12*x1+6*L);
var24=J21*(3*x1^2*L-2*x1*L^2)+(6*x1*L-2*L^2);
var15=J12*(6*x1^2-6*x1*L)+J11*(12*x1-6*L)+12;
var16=J12*(3*x1^2*L-4*x1*L+L^3)+J11*(6*x1*L-4*L);
var17=J12*(-6*x1^2+6*x1*L)+J11*(-12*x1+6*L)-12;
var18=J12*(3*x1^2*L-2*x1*L^2)+J11*(6*x1-2*L^2)+6;
var25=J22*(6*x2^2-6*x2*L)+J21*(12*x2-6*L)+12;
var26=J22*(3*x2^2*L-4*x2*L+L^3)+J21*(6*x2*L-4*L);
var27=J22*(-6*x2^2+6*x2*L)+J21*(-12*x2+6*L)-12;
var28=J22*(3*x2^2*L-2*x2*L^2)+J21*(6*x2-2*L^2)+6;

epsilon_c=tensao_c.defor1;
if epsilon_c<=0.002
    modulo=0.5e+8*(1-(epsilon_c-2e-3)/33e-3);

    rigidez_local=modulo*5e+2/L^3*[L^2 0 0 -L^2 0 0;
        0 var15 var16 0 var17 var18;
        0 -var11 -var12 0 -var13 -var14;
        -L^2 0 0 L^2 0 0;
        0 -var25 -var26 0 -var27 -var28;
        0 var21 var22 0 var23 var24];
else
    modulo=1e+8*(1-0.15*(epsilon_c-2e-3)/33e-3);
    rigidez_local=modulo*5e+2/L^3*[L^2 0 0 -L^2 0 0;
        0 var15 var16 0 var17 var18;
        0 -var11 -var12 0 -var13 -var14;
        -L^2 0 0 L^2 0 0;
        0 -var25 -var26 0 -var27 -var28;
        0 var21 var22 0 var23 var24];
end

```