



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CATALÃO

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

FLÁVIA GONÇALVES FERNANDES

CONTRIBUIÇÕES À ANÁLISE NÃO LINEAR DE
MICROESTRUTURAS

CATALÃO (GO)

2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CATALÃO

INSTITUTO DE FÍSICA

Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, número 1120, - Bairro Setor Universitário, Catalão/GO, CEP 75704-020
Telefone: - - <https://www.ufcat.edu.br>

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA)

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DE TESES E DISSERTAÇÕES DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE CATALÃO (UFCAT)

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Catalão (UFCAT) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFCAT), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFCAT é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Tese

2. Nome completo do autor

Nome: FLAVIA GONCALVES FERNANDES

3. Título do trabalho

Título: CONTRIBUIÇÕES À ANÁLISE NÃO LINEAR DE MICROESTRUTURAS

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento: [X] SIM [] NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa.

Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor



Documento assinado eletronicamente por **ANDRE CARLOS SILVA, Coordenador(a) de Curso**, em 18/12/2023, às 12:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Flávia Gonçalves Fernandes, Usuário Externo**, em 18/12/2023, às 12:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufcat.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0021357** e o código CRC **BE26A7DA**.

FLÁVIA GONÇALVES FERNANDES

CONTRIBUIÇÕES À ANÁLISE NÃO LINEAR DE
MICROESTRUTURAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Exatas e Tecnológicas, do Instituto de Física, da Universidade Federal de Catalão (UFCAT), como requisito para obtenção do título de Doutora em Ciências Exatas e Tecnológicas. Área de concentração: Metodologia da Ciência e Engenharia de Materiais. Linha de pesquisa: Métodos Teórico-computacionais em Ciência de Materiais. Orientador: Professor Doutor Marcos Napoleão Rabelo

CATALÃO (GO)

2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFCAT.

Fernandes, Flávia Gonçalves
Contribuições à Análise Não Linear de Microestruturas / Flávia
Gonçalves Fernandes. - 2023.
160, CLX f.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Napoleão Rabelo.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Catalão, Instituto de
Física, Catalão, Programa de Pós-Graduação em Ciências Exatas e
Tecnológicas, Catalão, 2023.

Bibliografia. Apêndice.

Inclui símbolos, gráfico, tabelas, algoritmos, lista de figuras, lista de
tabelas.

1. Deformação gradiente. 2. Força eletrostática. 3. Microviga. I.
Rabelo, Marcos Napoleão, orient. II. Título.

CDU 669

ATA DE DEFESA DE TESE

Ata nº 8 da sessão de Defesa de Tese de Doutorado aluno FLAVIA GONCALVES FERNANDES , que confere o título de Doutora em CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS , na área de concentração Metodologia da Ciência e Engenharia de Materiais.

Ao **quinze dias do mês de dezembro de dois mil e vinte três**, a partir das **13:30 Hrs**, em sala na forma remota pelo Google Meet (endereço <https://meet.google.com/pqu-fxzi-oua>), realizou-se a sessão pública de Defesa de Tese intitulada “CONTRIBUIÇÕES À ANÁLISE NÃO LINEAR DE MICROESTRUTURAS”. Os trabalhos foram instalados pelo Professor Doutor **ANDRÉ CARLOS SILVA (UFCAT)** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **PETRUS HENRIQUE RIBEIRO DOS ANJOS (UFCAT)**, membro titular interno, Professor Doutor **CELSO VIEIRA ABUD (UFCAT)**, membro titular externo, Professor Doutor **MARCOS LUIZ HENRIQUE (UFPE)**, membro titular externo, Doutor **WELLINGTON ANDRADE DA SILVA (UFCAT)** , membro titular externo. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Tese, tendo sido a candidata **APROVADA** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **ANDRÉ CARLOS SILVA** , Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos **quinze dias do mês de dezembro de dois mil e vinte três**.



Documento assinado eletronicamente por **ANDRE CARLOS SILVA, Coordenador(a) de Curso**, em 16/12/2023, às 07:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **PETRUS HENRIQUE RIBEIRO DOS ANJOS, Professor(a) do Magistério Superior**, em 16/12/2023, às 07:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **MARCOS LUIZ HENRIQUE, Usuário Externo**, em 16/12/2023, às 08:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **WELLINGTON ANDRADE DA SILVA, Professor(a) do Magistério Superior**, em 16/12/2023, às 10:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **CELSO VIEIRA ABUD, Professor(a) do Magistério Superior**, em 18/12/2023, às 08:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufcat.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0018878** e o código CRC **65BD0250**.

Dedico este trabalho à minha ancestralidade.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela oportunidade de estar concluindo o curso de doutorado em Ciências Exatas e Tecnológicas, por guiar meus passos e permitir viver todos os meus dias, com saúde, dignidade e fé; também pelas bênçãos e graças recebidas ao longo de minha vida.

Aos meus pais Jusceli Fernandes de Pádua e Maria Aparecida Gonçalves Fernandes, pelo amor, carinho, educação, apoio, compreensão e paciência concedidos durante toda a minha vida e, principalmente, nessa jornada acadêmica.

À minha irmã Karen Gonçalves Fernandes, pelo companheirismo, amizade e incentivo.

Aos meus familiares, pelo apoio, incentivo e orações.

Ao meu orientador Prof. Dr. Marcos Napoleão Rabelo, por sua orientação e apoio inestimáveis ao longo deste processo de pesquisa. Suas contribuições foram fundamentais para o desenvolvimento desta tese. Quero expressar minha profunda gratidão pela oportunidade de aprender e evoluir como pessoa e pesquisadora. Agradeço por acreditar em mim e por me guiar nesta jornada acadêmica desafiadora.

Ao Prof. Dr. Marcos Luiz Henrique, pela disponibilidade e acompanhamento exercido durante a construção da tese e pelos esclarecimentos necessários para a obtenção de novos conhecimentos. Seus ensinamentos foram essenciais para a realização desse trabalho.

À banca examinadora, coordenação e todo o corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Ciências Exatas e Tecnológicas, pelo conhecimento adquirido e orientações fornecidas, contribuindo para a minha formação profissional e pessoal. Também aos funcionários da Universidade Federal de Catalão, pelo atendimento imediato, serviço eficiente e respeito para com os estudantes.

A todos os meus amigos e colegas dos Programa de Pós-Graduação em Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal de Catalão, pela amizade, apoio,

dedicação e companheirismo diante dos obstáculos e desafios enfrentados com muito otimismo e determinação durante o período de convivência.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização e conclusão deste trabalho.

"Gratidão queridos pais, avós e demais ancestrais por terem tecido o meu caminho, imensa gratidão pela imensidão dos seus sonhos que, de alguma forma, são hoje a minha realidade.

A partir deste ponto e com muito amor, dou luz à tristeza que houve nas gerações passadas, dou luz à raiva, às partidas prematuras, aos nomes não ditos, aos destinos trágicos.

Dou luz à flecha que cortou caminhos e tornou a calçada mais fácil para nós.

Dou luz à alegria, às histórias repetidas várias vezes.

Dou luz ao não dito e aos segredos de família.

Dou luz às histórias de violência e ruptura entre casais, pais e filhos e entre irmãos e que seja o tempo e o amor que volte a unir.

Dou luz a todas as memórias de limitação e pobreza, a todas as crenças desestruturantes e negativas que permeiem o meu sistema familiar.

Aqui e agora semeio uma nova esperança, alegria, união, prosperidade, entrega, equilíbrio, ousadia, fé, força, superação, amor, amor e amor.

Que todas as gerações passadas e futuras sejam agora, neste instante cobertas com um arco-íris de luzes que curem e restaurem o corpo, a alma e todos os relacionamentos.

Que a força e a bênção de cada geração alcancem sempre e inundem as gerações seguintes.

Assim seja. Assim é!"

Bert Hellinger

RESUMO

FERNANDES, F. G.. *CONTRIBUIÇÕES À ANÁLISE NÃO LINEAR DE MICROESTRUTURAS*. 2023. 160 f. Tese (Doutorado em Ciências Exatas e Tecnológicas) – Instituto de Física, Universidade Federal de Catalão, Catalão (GO).

Os transdutores desempenham um papel crucial no monitoramento de estruturas, uma vez que são responsáveis por converter a variável física estudada em sinais elétricos que podem ser processados, armazenados e analisados computacionalmente. A abordagem baseada em modelos oferece a vantagem de permitir generalizações com instrumentações numéricas, as quais podem ser confrontadas com documentos normativos para avaliar sua eficácia ou ineficácia em relação à melhoria dos padrões regulamentares. Nessa perspectiva, este trabalho apresenta a modelagem e o comportamento estático e dinâmico de microvigas engastadas de Euler-Bernoulli, baseadas na teoria da elasticidade para a deformação gradiente. Adicionalmente, incorporou-se um modelo não linear para representar as forças eletrostáticas geradas pelo deslocamento da microviga, introduzindo uma complexidade adicional ao problema. A obtenção da equação diferencial parcial da deformação e das condições de contorno foi realizada através do princípio variacional de Hamilton. Utilizando o método de separação de variáveis, foi calculada a derivada de uma equação diferencial ordinária de sexta ordem para os modos normais. A análise da equação característica resultou em uma categorização das raízes, proporcionando a determinação destas, assim como das autofrequências e autofunções normalizadas. Por meio do método de Galerkin e da Quadratura de Gauss-Legendre com quinze pontos para o cálculo das integrais, foi determinada uma equação diferencial de segunda ordem não linear para as coordenadas generalizadas devido à força eletrostática. A solução numérica foi abordada com o método de Runge-Kutta para sistemas não lineares, considerando cinco modos normais. A seção dedicada aos experimentos computacionais apresenta gráficos dos modos normais, das coordenadas generalizadas e da deformação para os casos clássico e gradiente. Por conseguinte, foram realizadas comparações entre os resultados obtidos com a metodologia proposta e os resultados provenientes da teoria clássica. Desta forma, observam-se as relações entre a rigidez e a escala da estrutura para ambos os casos. Assim, concluiu-se que o modelo gradiente satisfatoriamente representa os sistemas microeletromecânicos em comparação ao modelo clássico, corroborando com resultados experimentais disponíveis na literatura.

Palavras-chaves: Deformação gradiente, Força eletrostática, Microviga.

ABSTRACT

FERNANDES, F. G.. . 2023. 160 f. ANALYSIS OF THE NONLINEAR RESPONSE OF A TRANSDUCER IN A MICROELETROMECHANIC SYSTEM USING THE THEORY OF CLASSICAL ELASTICITY AND DEFORMATION GRADIENT. Tese (Doutorado em Ciências Exatas e Tecnológicas) – Instituto de Física, Universidade Federal de Catalão, Catalão (GO).

Transducers play a crucial role in monitoring structures, as they are responsible for converting the physical variable studied into electrical signals that can be processed, stored and analyzed computationally. The model-based approach offers the advantage of allowing generalizations with numerical instrumentation, which can be compared with normative documents to evaluate their effectiveness or ineffectiveness in relation to improving regulatory standards. From this perspective, this work presents the modeling and static and dynamic behavior of embedded Euler-Bernoulli microbeams, based on the theory of elasticity for gradient deformation. Additionally, a non-linear model was incorporated to represent the electrostatic forces generated by the displacement of the microbeam, introducing additional complexity to the problem. The partial differential equation for deformation and boundary conditions was obtained using Hamilton's variational principle. Using the variable separation method, the derivative of a sixth-order ordinary differential equation for normal modes was calculated. The analysis of the characteristic equation resulted in a categorization of the roots, providing the determination of these, as well as the normalized eigenfrequencies and eigenfunctions. Using the Galerkin method and the Gauss-Legendre Quadrature with fifteen points for the calculation of integrals, a non-linear second order differential equation was determined for the generalized coordinates due to the electrostatic force. The numerical solution was approached with the Runge-Kutta method for nonlinear systems, considering five normal modes. The section dedicated to computational experiments presents graphs of normal modes, generalized coordinates and deformation for the classical and gradient cases. Therefore, comparisons were made between the results obtained with the proposed methodology and the results from classical theory. In this way, the relationships between the stiffness and the scale of the structure are observed for both cases. Thus, it was concluded that the gradient model satisfactorily represents microelectromechanical systems in comparison to the classical model, corroborating experimental results available in the literature.

Keywords: Strain gradient, Electrostatic force, Microbeam.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 –Primeiro modo normal e plano de fase da microviga engastada para o caso clássico. Fonte: Autoria própria.	43
Figura 3.2 –Segundo modo normal e plano de fase da microviga engastada para o caso clássico. Fonte: Autoria própria.	44
Figura 3.3 –Terceiro modo normal e plano de fase da microviga engastada para o caso clássico. Fonte: Autoria própria.	44
Figura 3.4 –Quarto modo normal e plano de fase da microviga engastada para o caso clássico. Fonte: Autoria própria.	44
Figura 3.5 –Quinto modo normal e plano de fase da microviga engastada para o caso clássico. Fonte: Autoria própria.	45
Figura 3.6 –Comparação de valores de h para o caso clássico. Fonte: Autoria própria.	46
Figura 3.7 –Comparação de valores de L para o caso clássico. Fonte: Autoria própria.	47
Figura 6.1 –Esquema da microviga. Fonte: Autoria própria.	63
Figura 6.2 –Comparação do deslocamento entre as teorias clássica e gradiente adotando diferentes valores de h . Fonte: Autoria própria.	66
Figura 6.3 –Casos possíveis para a função cúbica. Fonte: Autoria própria.	67
Figura 6.4 –Valores críticos para os parâmetros considerados para a microviga. Fonte: Autoria própria.	70
Figura 6.5 –As quatro frequências naturais da microviga engastada usando as teorias clássica, da tensão acoplada e da deformação gradiente. Fonte: Autoria própria.	72
Figura 6.6 –Primeiro modo normal e plano de fase da microviga engastada para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria.	75
Figura 6.7 –Segundo modo normal e plano de fase da microviga engastada para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria.	76
Figura 6.8 –Terceiro modo normal e plano de fase da microviga engastada para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria.	76

Figura 6.9 –Quarto modo normal e plano de fase da microviga engastada para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria.	76
Figura 6.13 –Comparação dos modos normais para os casos clássico e gradiente. Fonte: Autoria própria.	76
Figura 6.10 –Quinto modo normal e plano de fase da microviga engastada para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria.	77
Figura 6.11 –Comparação de valores de h para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria.	78
Figura 6.12 –Comparação de valores de L para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria.	79
Figura 7.1 –Primeira coordenada generalizada da microviga engastada sujeita à força eletrostática para o caso clássico. Fonte: Autoria própria. . . .	88
Figura 7.2 –Segunda coordenada generalizada da microviga engastada sujeita à força eletrostática para o caso clássico. Fonte: Autoria própria. . .	88
Figura 7.3 –Terceira coordenada generalizada da microviga engastada sujeita à força eletrostática para o caso clássico. Fonte: Autoria própria. . . .	89
Figura 7.4 –Quarta coordenada generalizada da microviga engastada sujeita à força eletrostática para o caso clássico. Fonte: Autoria própria. . . .	89
Figura 7.5 –Quinta coordenada generalizada da microviga engastada sujeita à força eletrostática para o caso clássico. Fonte: Autoria própria. . . .	89
Figura 7.6 –Primeira coordenada generalizada da microviga engastada sujeito à força eletrostática para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria. . . .	90
Figura 7.7 –Segunda coordenada generalizada da microviga engastada sujeito à força eletrostática para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria. . .	90
Figura 7.8 –Terceira coordenada generalizada da microviga engastada sujeito à força eletrostática para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria. . . .	91
Figura 7.9 –Quarta coordenada generalizada da microviga engastada sujeito à força eletrostática para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria. . . .	91
Figura 7.10 –Quinta coordenada generalizada da microviga engastada sujeito à força eletrostática para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria. . . .	91
Figura 7.11 –Deslocamento da microviga com os cinco primeiros modos normais. Parâmetros: $d = 4\mu m$, $h = 20\mu m$, $b = 4h$, $L = 20h$, $V_b = 2V$ e $V_t = 2V$. Fonte: Autoria própria.	92
Figura 7.12 –Deslocamento na extremidade da microviga. Parâmetros: $d = 4\mu m$, $h = 20\mu m$, $b = 4h$, $L = 20h$, $V_b = 2V$ e $V_t = 2V$. Fonte: Autoria própria. . .	93
Figura 7.13 –Deslocamento em cinco pontos da microviga engastada. Parâmetros: $d = 4\mu m$, $h = 20\mu m$, $b = 4h$, $L = 20h$, $V_b = 2V$ e $V_t = 2V$. Fonte: Autoria própria.	93

Figura 7.14 – Deslocamento dos cinco primeiros modos normais da microviga engastada. Parâmetros: $d = 4\mu m$, $h = 20\mu m$, $b = 4h$, $L = 20h$, $V_b = 2V$ e $V_t = 2V$. Fonte: Autoria própria.	94
Figura 7.15 – Deslocamento no tempo. Parâmetros: $d = 4\mu m$, $h = 20\mu m$, $b = 4h$, $L = 20h$, $V_b = 2V$ e $V_t = 2V$. Fonte: Autoria própria.	95
Figura 7.16 – Comparação da primeira coordenada generalizada η_1 para os casos clássico e gradiente. Parâmetros: $d = 4\mu m$, $b = 4h$, $V_b = 2V$ e $V_t = 2V$. Fonte: Autoria própria.	96
Figura 7.17 – Comparação do deslocamento da extremidade da microviga para os casos clássico e gradiente. Parâmetros: $d = 4\mu m$, $b = 4h$, $V_b = 2V$ e $V_t = 2V$. Fonte: Autoria própria.	97
Figura 7.18 – Comparação dos casos clássico e gradiente para os parâmetros $h = 35\mu m$ e $L = 20h$. Fonte: Autoria própria.	97
Figura 7.19 – Primeira coordenada generalizada para diferentes valores de h . Parâmetros: $d = 4\mu m$, $b = 4h$, $L = 15h$, $V_b = 2V$ e $V_t = 2V$. Fonte: Autoria própria.	98
Figura 7.20 – Deslocamento na extremidade da microviga para diferentes valores de h . Parâmetros: $d = 4\mu m$, $b = 4h$, $L = 15h$, $V_b = 2V$ e $V_t = 2V$. Fonte: Autoria própria.	98
Figura 7.21 – Primeira coordenada generalizada para diferentes valores de L . Parâmetros: $d = 4\mu m$, $h = 20\mu m$, $b = 4h$, $V_b = 2V$ e $V_t = 2V$. Fonte: Autoria própria.	99
Figura 7.22 – Deslocamento para diferentes valores de L . Parâmetros: $d = 4\mu m$, $h = 20\mu m$, $b = 4h$, $V_b = 2V$ e $V_t = 2V$. Fonte: Autoria própria.	99
Figura 7.23 – Deformação da extremidade da microviga para diferentes variações de tensão. Fonte: Autoria própria.	101

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 –Tabela das frequências naturais da viga bi-apoiada, α_n em (3.57). Fonte: Autoria própria.	41
Tabela 3.2 –Caso clássico. Fonte: Autoria própria.	42
Tabela 3.3 –Valores de rigidez para a viga engastada baseada nos dez primeiros modos normais. Fonte: Autoria própria.	45
Tabela 6.1 –Valores de bifurcação $r = \pm\beta_1 i, r = \pm\beta_2, L = 20h$. Fonte: Autoria pró- pria.	68
Tabela 6.2 –Tabela das raízes características caso $r = \pm\beta_1 i, r = \pm\beta_2$ e $r = \pm\beta_3$, $L = 20h, h = 20\mu m$. Fonte: Autoria própria.	73
Tabela 6.3 –Raízes características do primeiro modo normal para o caso $r =$ $\pm\beta_1 i, r = \pm\beta_2$ e $r = \pm\beta_3$. Fonte: Autoria própria.	74
Tabela 6.4 –Raízes características do segundo modo normal para o caso $r =$ $\pm\beta_1 i, r = \pm\beta_2$ e $r = \pm\beta_3$. Fonte: Autoria própria.	74
Tabela 6.5 –Raízes características do terceiro modo normal para o caso $r =$ $\pm\beta_1 i, r = \pm\beta_2$ e $r = \pm\beta_3$. Fonte: Autoria própria.	74
Tabela 6.6 –Raízes características do quarto modo normal para o caso $r = \pm\beta_1 i, r =$ $\pm\beta_2$ e $r = \pm\beta_3, \beta_1 L = 1.8751$. Fonte: Autoria própria.	75
Tabela 6.7 –Raízes características do quinto modo normal para o caso $r = \pm\beta_1 i, r =$ $\pm\beta_2$ e $r = \pm\beta_3$. Fonte: Autoria própria.	75
Tabela 6.8 –Tabela das raízes características caso $r = \pm\beta_1 i, r = \pm(\beta_2 \pm \beta_3 i)$. Fonte: Autoria própria.	82
Tabela 7.1 –Pontos de Gauss para integração numérica. Fonte: Autoria própria.	87

LISTA DE SÍMBOLOS

- α — Coeficiente de rigidez
- β — Parâmetro de rigidez relacionado com o α
- ϵ — Constante dielétrica do meio
- A — Área entre os eletrodos
- H — Função Hamiltoniana
- W(t) — Energia externa (J)
- ω — Frequência de oscilação da viga da ponte (rad/s)
- ω_n — Frequência natural do sensor (rad/s)
- $\Pi(t)$ — Energia potencial elástica (J)
- ρ — Densidade ou massa específica (kg/m³)
- τ — Diferencial de tempo
- $\varphi(x)$ — Resposta dos modos normais (deformação da viga)
- ζ — Taxa de amortecimento (adimensional)
- A — Área da seção transversal da viga (m²)
- c — Coeficiente de dumping/dissipativo (adimensional)
- d — Distância entre as placas
- E — Módulo de elasticidade (MPa ou N/mm²)
- f(x,t) — carregamento externo (N)
- F₀ — Força (amplitude) (N)

$f_j(\tau)$ — Função f em relação ao tempo no contador j

$f_j(t)$ — Força em relação ao tempo no contador j

I — Momento de inércia ($kg.m^2$)

i — $\sqrt{-1}$

k — Constante de rigidez (N/m)

L — Comprimento da viga (m)

m — Massa (g)

r — Frequência (rad/s)

t — Tempo (s)

$T(t)$ — Energia cinética (J)

u_i — Resposta dos modos normais (tensão da viga)

u_{0j} — Resposta inicial dos modos normais (tensão da viga)

$V(t)$ — Tensão elétrica

$w(x,t)$ — Função deslocamento da viga

$w_0(x)$ — Posição inicial de $w(x, t)$

x_0 — Posição inicial (m)

SUMÁRIO

1	PUBLICAÇÕES	18
1.1	Artigos completos publicados em periódicos	18
1.2	Capítulo de livro	19
1.3	Trabalhos completos publicados em anais de congressos	19
1.4	Resumos publicados em anais de congressos	20
2	INTRODUÇÃO	22
2.1	Contextualização	22
2.2	Justificativa	23
2.3	Objetivos	26
2.3.1	Objetivo Geral	26
2.3.2	Objetivos Específicos	26
2.4	Organização da Tese	27
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	28
3.1	Teoria clássica de Euler-Bernoulli	28
3.2	Modelos de parâmetros distribuídos	37
3.3	Casos clássicos de vigas com condições de contorno	40
3.3.1	Vigas simplesmente apoiadas em ambos os extremos	41
3.3.2	Viga fixa em uma extremidade e livre na outra	42
3.4	Teoria da deformação gradiente	45
4	TRABALHOS RELACIONADOS	54
5	MATERIAIS E MÉTODOS	58
5.1	Princípio Variacional de Hamilton	58
5.2	Método de Galerkin	59
5.3	Método da Quadratura de Gauss-Legendre	59
5.4	Método de Runge-Kutta	60
5.5	Software Octave	61
5.6	Metodologia	61
6	DESENVOLVIMENTO	63

6.1	Cálculo das autofrequências	64
6.2	Análise da resposta no domínio do tempo no modo atuador . . .	83
7	RESULTADOS E DISCUSSÕES	86
8	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	102
	REFERÊNCIAS	105

Capítulo 1

PUBLICAÇÕES

Neste capítulo, são apresentados os trabalhos publicados durante a realização do curso de doutorado.

1.1 Artigos completos publicados em periódicos

1. FERNANDES, F. G.; PURCINA, A. B. ; RABELO, L. V. S. ; RABELO, M. N. . Perturbative Methods for Nonlinear Eigenvalue Problems. SCIENTIA PLENA, 2023. (Qualis A4)

2. FERNANDES, F. G.; RABELO, M. N. . Sistema para Controle de uma Antena Receptora de Satélite. Revista Sítio Novo, v. 4, p. 240, 2020. (Qualis B2)

3. FERNANDES, F. G.; RABELO, M. N. . Sistema para Controle de Posicionamento do Elevador. INTERCURSOS (ITUIUTABA), v. 19, p. 85-106, 2020. (Qualis B4)

4. FERNANDES, F. G.; RABELO, M. N. . Mapeamento Sistemático sobre o Uso de Tecnologias para o Aprendizado de Processos Químicos. REVISTA PROCESSOS QUÍMICOS, v. 1, p. 135-138, 2019. (Qualis B4)

5. FERNANDES, F. G.. Análise de Potencial de um Sólido Bidimensional utilizando o Método de Elementos de Contorno. REVISTA DE ENGENHARIA E TECNOLOGIA, v. 13, p. 68-79, 2021. (Qualis B4)

6. FERNANDES, F. G.. Aplicação do Método de Elementos de Contorno para Análise de Potencial de um Sólido Bidimensional. RCT: REVISTA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, v. 6, p. 1-16, 2020. (Qualis B1)

7. FERNANDES, F. G.; FERNANDES, G. R. ; PAULA, H. M. . MAPEAMENTO SISTEMÁTICO DE REFERÊNCIAS DA ANÁLISE DE PLACAS COMPOSTAS POR MATERIAIS HETEROGÊNEOS ATRAVÉS DE UMA ABORDAGEM EM MULTIESCALA

[Mapping study of references of the analysis of plates composed by heterogeneous materials through a multiscale modelling]. REEC - Revista Eletrônica de Engenharia Civil, v. 14, p. 179-188, 2018. (Qualis B3)

1.2 Capítulo de livro

1. FERNANDES, F. G.; RABELO, M. N. ; SILVA, S. F. . Tecnologias em Pesquisa: Engenharias - Capítulo 10: Mapeamento sistemático sobre técnicas de mineração de dados na análise de fraturas em sistemas mecânicos. 1. ed. Rio de Janeiro: Bonecker, 2020. v. III. 10p.

1.3 Trabalhos completos publicados em anais de congressos

1. FERNANDES, F. G.; PURCINA, A. B. ; RABELO, L. V. S. ; RABELO, M. N. . Métodos Perturbativos para Problemas de Autovalores não Lineares. In: XXV ENMC - Encontro Nacional de Modelagem Computacional / XIII ECTM - Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais / 9º MCSul - Conferência Sul em Modelagem Computacional / IX SEMENGO - Seminário e Workshop em Engenharia Oceânica, 2022, Online. Anais do XXV ENMC - Encontro Nacional de Modelagem Computacional. Catalão: Universidade Federal de Catalão, 2022. v. 1. p. 1-10.

2. SOUSA, M. F. J. S. ; FERNANDES, F. G. ; RABELO, L. V. S. ; RABELO, M. N. . Análise numérica dos efeitos de um controlador não linear em microvigas sujeitas à deformação gradiente. In: XXIV Encontro Nacional de Modelagem Computacional (ENMC) e XII Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais (ECTM), 2021, Online. Anais do XXIV Encontro Nacional de Modelagem Computacional (ENMC) e XII Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais (ECTM), 2021. v. 1.

3. RABELO, M. N. ; FERNANDES, F. G. ; MARTINEZ, L. F. E. ; SOUSA, M. F. J. S. ; BORGES, R. A. . Análise Numérica das Reações de Apoio de Estruturas Sujeitas à Condições de Fronteira Não-Linear. In: XXXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC, 2019, Uberlândia. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. Uberlândia: Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, 2019. v. 1. p. 1-10.

4. FERNANDES, F. G.; RABELO, M. N. ; SILVA, S. F. . Aplicação de Algoritmos Genéticos para Solução do Problema da Caixa Preta. In: XIV Encontro Anual de Computação - ENACOMP. ISSN: 2178-6992, 2018, Catalão - GO. XIV Encontro Anual de Computação - ENACOMP. ISSN: 2178-6992. Catalão: Universidade Federal de

Goiás - UFG, 2018. p. 25-32.

5. LEANDRO, K. M. ; FERNANDES, F. G. ; NERY, S. W. L. ; RABELO, M. N. ; GUIMARAES, M. P. . Refinamento de Malha com Base na Convergência do Método de Elementos Finitos. In: XIV Encontro Anual de Computação - ENACOMP. ISSN: 2178-6992, 2018, Catalão - GO. Anais do XIV Encontro Anual de Computação. Catalão: Universidade Federal de Goiás - UFG, 2018. p. 73-80.

6. FERNANDES, F. G.; RABELO, M. N. ; SILVA, S. F. . Mapeamento Sistemático sobre Técnicas de Mineração de Dados na Análise de Fraturas em Sistemas Mecânicos. In: VI SPPGI - Simpósio de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação da UFG - Regional Catalão, 2018, Catalão-GO. Anais do VI SPPGI - Simpósio de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação da UFG - Regional Catalão. Catalão: Universidade Federal de Goiás, 2018.

7. FERNANDES, F. G.; RABELO, M. N. ; SILVA, S. F. . O Uso de Técnicas de Mineração de Dados para Análise de Fraturas em Sistemas Mecânicos. In: IV CONPEEX - Congresso de Pesquisa, Ensino, Extensão e Cultura. ISSN: 2447-4134., 2018, Catalão-GO. Anais do IV CONPEEX. Catalão: Universidade Federal de Goiás - UFG, 2018.

8. FERNANDES, F. G.; RABELO, M. N. ; SILVA, S. F. . Aplicação do Algoritmo de Dijkstra para otimização da trajetória entre diversos municípios de Minas Gerais. In: VIII Simpósio de Matemática e Matemática Industrial - SIMMI, 2018, Catalão-GO. Anais do VIII Simpósio de Matemática e Matemática Industrial. Catalão: Universidade Federal de Goiás, 2018. p. 20-23.

1.4 Resumos publicados em anais de congressos

1. FERNANDES, F. G.; RABELO, M. N. . Predição de Fraturas em Estruturas de Concreto utilizando Redes Neurais Artificiais Auto-Regressivas com Entradas Exógenas. In: 17º CONPEEX - Congresso de Pesquisa, Ensino e Extensão da Universidade Federal de Goiás, 2020, Goiânia - GO. Anais do 17º CONPEEX - Congresso de Pesquisa, Ensino e Extensão da Universidade Federal de Goiás. Goiânia - GO: Universidade Federal de Goiás, 2020. v. 1. p. 1-1.

2. FERNANDES, F. G.; RABELO, M. N. . Computational Intelligence in Fracture Analysis. In: II Simpósio Multidisciplinar em Materiais do Centro-Oeste (SMMCO), 2019, Caldas Novas - GO. Anais do II Simpósio Multidisciplinar em Materiais do Centro-Oeste. Catalão - GO: Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, 2019. v. 1.

3. RABELO, M. N. ; FERNANDES, F. G. ; MARTINEZ, L. F. E. . Numerical Models to the Simulation of Transmission of Underground Signals (Modelos Numéricos

para a Simulação da Transmissão de Sinais Subterrâneos). In: I Simpósio Multidisciplinar em Materiais do Centro-Oeste - SMMCO, 2018, Caldas Novas - GO. Anais do I Simpósio Multidisciplinar em Materiais do Centro-Oeste. Catalão-GO: Universidade Federal de Goiás, 2018. v. 1. p. 43-43.

4. FERNANDES, F. G.; RABELO, M. N. . Systematic Mapping of References of the Application of Hopf Bifurcation in Science of Materials (Mapeamento Sistemático de Referências da Aplicação da Bifurcação de Hopf em Ciência dos Materiais). In: I Simpósio Multidisciplinar em Materiais do Centro-Oeste - SMMCO, 2018, Caldas Novas-GO. Anais do I Simpósio Multidisciplinar em Materiais do Centro-Oeste. Catalão-GO: Universidade Federal de Goiás, 2018. p. 62-62.

Capítulo 2

INTRODUÇÃO

2.1 Contextualização

Sistemas Microeletromecânicos (MEMS) referem-se a dispositivos ou sistemas que integram componentes mecânicos, eletrônicos e, em muitos casos, sistemas microeletroquímicos em uma escala microscópica. Esses dispositivos são caracterizados por suas dimensões diminutas, geralmente na faixa de micrômetros a poucos milímetros. Os MEMS são projetados para desempenhar funções específicas através da integração de tecnologias de microfabricação, permitindo a criação de sistemas complexos em uma escala muito pequena (STHUTHI *et al.*, 2023).

Os MEMS compreendem uma variedade de dispositivos e sensores, como acelerômetros, giroscópios, microválvulas, sensores de pressão, entre outros. Eles são construídos utilizando técnicas de fabricação de semicondutores e microfabricação, permitindo a criação de estruturas microscópicas precisas. A combinação de componentes mecânicos e elétricos nos MEMS possibilita a integração de funcionalidades diversas em espaços extremamente compactos (CHEN *et al.*, 2023).

Nessa perspectiva, os sistemas microeletromecânicos representam uma revolução tecnológica ao possibilitarem a integração de componentes mecânicos e eletrônicos em uma escala minúscula, na ordem de micrômetros a poucos milímetros. Nesse cenário de miniaturização, os transdutores emergem como elementos cruciais, desempenhando um papel fundamental na capacidade desses sistemas de interagir com o ambiente físico e converter informações fundamentais para seu funcionamento (CHENG *et al.*, 2023).

Transdutores, neste contexto, referem-se a dispositivos capazes de converter variáveis físicas, como pressão, temperatura, movimento ou força, em sinais elétricos. Essa capacidade de transdução é essencial para o monitoramento e controle preciso de variáveis, permitindo a operação eficiente de MEMS em uma variedade de

aplicações (TOCCI RONALD J.; WIDNER; MOSS, 2011).

Um dos setores mais impactados por essa tecnologia é a eletrônica de consumo, onde MEMS são integrados em dispositivos como smartphones e tablets. Nestes, transdutores como acelerômetros e giroscópios tornam-se indispensáveis, possibilitando funcionalidades como a rotação automática de tela e a detecção de movimentos. A saúde também se beneficia, com dispositivos médicos MEMS, incluindo sensores de pressão e sistemas de entrega de medicamentos microeletromecânicos, desempenhando um papel crucial em aplicações médicas avançadas (HOSSAIN *et al.*, 2023).

Na indústria automotiva, sistemas de segurança, como airbags e sistemas de controle de estabilidade, incorporam transdutores MEMS para garantir uma detecção precisa de movimentos e condições do veículo. Da mesma forma, a indústria aeroespacial faz uso extensivo de giroscópios MEMS para controle de orientação e navegação em satélites e veículos espaciais (CHEN *et al.*, 2023).

Além disso, na indústria de semicondutores, os MEMS desempenham um papel crucial em processos de fabricação, sendo utilizados na criação de componentes críticos, como cabeças de impressão em jato de tinta (STHUTHI *et al.*, 2023).

Diante dessa vasta gama de aplicações, torna-se evidente que o estudo e aprimoramento contínuo dos transdutores em sistemas microeletromecânicos são essenciais. A compreensão mais profunda desses dispositivos não apenas impulsiona a inovação tecnológica, mas também abre caminho para o desenvolvimento de soluções cada vez mais eficazes e adaptáveis às demandas de uma sociedade orientada pela miniaturização e eficiência. Neste contexto, esta pesquisa se propõe a explorar a modelagem e comportamento de microvigas com transdutores, contribuindo para o avanço do conhecimento e aprimoramento dessas tecnologias promissoras (CHEN *et al.*, 2023).

2.2 Justificativa

Os sistemas microeletromecânicos (MEMS) desempenham um papel de destaque devido à sua capacidade de integrar componentes eletrônicos e mecânicos em escalas microscópicas. Dentro desse contexto, a investigação das propriedades mecânicas das microestruturas, como microvigas, ganha relevância significativa, visto que o comportamento dessas estruturas é fundamental para o funcionamento adequado dos MEMS (STHUTHI *et al.*, 2023).

Os transdutores de deslocamento são dispositivos projetados para medir e/ou detectar deslocamentos ou movimentos de objetos. Eles convertem o deslocamento

físico em um sinal elétrico, por meio de sua função de transferência, permitindo a medição precisa de posições em diversas aplicações. Ao utilizar tecnologias microeletromecânicas, os transdutores de deslocamento tornaram-se mais eficientes, precisos e versáteis, proporcionando uma série de benefícios em diversas áreas da indústria e do cotidiano (CHEN *et al.*, 2023).

Na área de monitoramento estrutural, o transdutor de deslocamento pode ser usado em construções civis e infraestrutura, os transdutores de deslocamento são usados para monitorar movimentos e deformações de pontes, edifícios, barragens e outras estruturas, ajudando a identificar problemas e garantindo a segurança das mesmas (CHENG *et al.*, 2023).

O transdutor, após devidamente instalado e calibrado, começa a coletar dados em tempo real. Os sinais gerados pelo transdutor são adquiridos por um sistema de aquisição de dados, como um computador ou registrador. Os dados podem ser armazenados e analisados para obter informações sobre o comportamento da microviga, como tensões, deformações, ou qualquer outra grandeza monitorada (TOCCI RONALD J.; WIDNER; MOSS, 2011).

Com base nas informações coletadas, as decisões podem ser tomadas em tempo real ou posteriormente. Isso pode incluir a detecção de anomalias, avaliação da integridade estrutural, otimização de processos ou qualquer outra ação necessária com base nos dados obtidos. A manutenção regular do transdutor e a recalibração periódica são importantes para garantir que ele continue a fornecer medições precisas ao longo do tempo (HOSSAIN *et al.*, 2023).

Nessa linha de raciocínio, o transdutor de deslocamento pode ser usado como um atuador em um sistema de controle, convertendo um sinal elétrico em um movimento mecânico controlado. No contexto de uma microviga, por exemplo, o atuador é responsável por ajustar a posição da viga para atingir um objetivo específico, como manter a viga em uma posição desejada. Da mesma forma, para movimentos angulares, o transdutor recebe um sinal de controle, geralmente na forma de uma tensão elétrica, e converte esse sinal em um movimento angular, que pode ser usado para ajustar a posição da microviga. Isso é particularmente útil em aplicações onde o posicionamento preciso é essencial, como em sistemas de fabricação microeletrônica, dispositivos de posicionamento óptico e muitos outros (CHEN *et al.*, 2023).

Além de sua função como atuador, o transdutor de deslocamento também desempenha o papel de detector no sistema de controle. Ele é usado para medir o deslocamento da microviga ou do objeto controlado. O transdutor converte o movimento mecânico da viga em um sinal elétrico, geralmente uma tensão ou corrente proporcional ao deslocamento. Essa medida é fundamental para o controle preciso do sistema, pois permite que o controlador saiba se a posição da viga está de acordo com a posi-

ção desejada. Qualquer desvio pode ser corrigido pelo controlador, que ajusta a saída do atuador de acordo com a entrada de referência para manter a posição desejada (CHEN *et al.*, 2023).

Assim, o transdutor de deslocamento em um sistema de controle de microviga desempenha um papel importante, agindo como um atuador para ajustar a posição da viga e como um detector para medir essa posição. Essa combinação permite o controle preciso do sistema, garantindo que a microviga ou o objeto controlado permaneça em sua posição desejada, o que é fundamental em diversas aplicações que requerem alta precisão e estabilidade (HOSSAIN *et al.*, 2023).

Assim, o crescente interesse na eficiência e aprimoramento das estruturas, aliado à necessidade de monitoramento preciso, tem direcionado a atenção para o papel crucial desempenhado pelos transdutores. Esses dispositivos convertem variáveis físicas em sinais elétricos, fundamentais para a análise e compreensão do comportamento estrutural. Nesse contexto, a abordagem baseada em modelos surge como uma estratégia vantajosa, permitindo generalizações fundamentais com instrumentações numéricas, contribuindo para a avaliação da conformidade com padrões regulamentares e, assim, impulsionando a melhoria contínua (CHEN *et al.*, 2023).

A presente pesquisa propõe-se a avançar nesse cenário, focando na modelagem e comportamento estático e dinâmico de microvigas engastadas de Euler-Bernoulli. A utilização da teoria da elasticidade para a deformação gradiente visa aprimorar a compreensão desses sistemas. A adição de um modelo não linear, incorporando as forças eletroestáticas resultantes do deslocamento da microviga, amplia a complexidade do problema, oferecendo insights valiosos para a compreensão mais profunda dos fenômenos envolvidos.

Uma microviga de Euler-Bernoulli é um elemento estrutural utilizado em análises de engenharia para modelar o comportamento de vigas flexíveis. Ela é uma simplificação do modelo de viga de Euler-Bernoulli clássica, adaptada para descrever o comportamento de microvigas em escalas muito pequenas, como aquelas encontradas em estruturas microeletromecânicas (MEMS) e em sistemas nanotecnológicos (HOSSAIN *et al.*, 2023).

O modelo de viga de Euler-Bernoulli assume que as deformações ocorrem apenas no plano da seção transversal da viga, e não considera os efeitos tridimensionais. A equação diferencial que descreve o comportamento de uma microviga de Euler-Bernoulli é uma simplificação da equação para vigas maiores e é utilizada para analisar deflexões, momentos fletores e esforços cortantes em microescalas (HOSSAIN *et al.*, 2023).

Essas microvigas são frequentemente empregadas em estudos teóricos e simu-

lações computacionais para compreender o comportamento mecânico de estruturas em escalas diminutas, contribuindo para o desenvolvimento de dispositivos MEMS e outras aplicações em nanotecnologia (HOSSAIN *et al.*, 2023).

Além disso, o presente trabalho representa uma significativa contribuição para a área de Ciência dos Materiais, especificamente no contexto de sistemas microeletromecânicos (MEMS), através de uma abordagem avançada na modelagem e análise de microvigas. A importância dos transdutores na monitorização de estruturas é inegável, visto que são cruciais na conversão de variáveis físicas em sinais elétricos, possibilitando a análise computacional dessas informações.

2.3 Objetivos

2.3.1 Objetivo Geral

O objetivo principal deste trabalho é compreender a relação entre a resposta de deslocamento de uma microviga e a sua frequência natural em um sistema microeletromecânico. Para contextualizar nosso estudo, consideramos um cenário hipotético em que uma microviga, em forma de sensor, está posicionada em uma ponte. Essa microviga, vista como um transdutor, é especialmente projetada para atuar como sensor de deslocamento. Nosso interesse se concentra em como a frequência natural do transdutor influencia a resposta de deslocamento da microviga.

2.3.2 Objetivos Específicos

Com o propósito de alcançar o objetivo principal deste trabalho, foram estipulados os objetivos específicos listados a seguir:

Função de Transferência: Iniciamos estabelecendo a função de transferência que relaciona o deslocamento da microviga com o sinal gerado pelo transdutor. Para isso, derivamos equações que descrevem a dinâmica da microviga, levando em consideração sua geometria, material e interações com o transdutor.

Equação Característica: Em seguida, abordamos a equação característica do sistema. Identificamos os parâmetros cruciais que influenciam o comportamento vibratório da microviga. Essa equação é essencial para entender as frequências naturais e os modos de vibração do sistema.

Sistema Massa-Mola de Base Móvel: Formulamos a microviga como um sistema massa-mola de base móvel e derivamos a Equação Diferencial Ordinária (EDO) que descreve seu movimento. A EDO considera a influência da inércia da microviga, do transdutor e das interações mecânicas.

Determinação de Autovalores: Utilizamos os autovalores obtidos da equação característica para analisar as frequências naturais do sistema. Os autovalores são cruciais para compreender os modos de vibração da microviga.

Resposta em Frequência: Investigamos como a resposta de deslocamento da microviga varia em relação à frequência natural do transdutor. Analisamos como a resposta do sistema é afetada pela interação entre as características dinâmicas da microviga e do transdutor.

Integral de Convolução via Integral de Duhamel: Para lidar com situações de excitação externa, exploramos a técnica da integral de convolução usando a integral de Duhamel. Isso nos permite obter a resposta de deslocamento da microviga quando sujeita a diferentes tipos de forças externas.

Teoria da Deformação Gradiente: Além disso, introduzimos a teoria da deformação gradiente para compreender as respostas mecânicas dos materiais em escalas microscópicas. Isso nos fornece informações de como as microvigas se comportam quando estão sujeitas a forças aplicadas.

Por conseguinte, com os resultados obtidos nesta pesquisa, espera-se contribuir para o avanço da ciência dos materiais e para o desenvolvimento de sistemas microeletromecânicos mais eficientes e precisos, com foco no monitoramento de estruturas.

2.4 Organização da Tese

Por meio dessa abordagem sistemática, foi estudada a interação da microviga como um transdutor, fornecendo contribuições valiosas para a otimização do projeto de MEMS e para a exploração de aplicações futuras. Os próximos capítulos detalham essas etapas, envolvendo equações, cálculos e deduções que sustentam a investigação.

Capítulo 3

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, buscou-se estabelecer os alicerces conceituais essenciais que sustentam e enriquecem o estudo sobre a modelagem e comportamento dinâmico de transdutores. Assim, são abordados os fundamentos teóricos que norteiam a compreensão do problema não linear em questão, examinando em detalhes as autofrequências e modos normais como autovalores e autofunções do operador momento generalizado.

3.1 Teoria clássica de Euler-Bernoulli

A atuação de um transdutor como detector depende do tipo de transdutor e da grandeza física que ele está projetado para medir. Um transdutor é um dispositivo que converte uma forma de energia em outra. Como detector, ele é responsável por converter uma grandeza física, como temperatura, pressão, deslocamento, fluxo, luz, entre outras, em um sinal elétrico ou algum tipo de saída que possa ser facilmente processado ou interpretado (HOSSAIN *et al.*, 2023).

O transdutor de deslocamento detecta o deslocamento físico ou a posição de um objeto. Também converte o deslocamento em um sinal elétrico, como uma tensão ou corrente proporcional ao deslocamento medido. E o sinal elétrico pode ser usado para controlar posicionamento em máquinas industriais, monitorar a posição de componentes em sistemas de automação, ou realizar medições precisas em instrumentos de precisão (CHENG *et al.*, 2023).

Assim, a função de transferência de um transdutor de tensão x deslocamento descreve a relação entre a tensão de saída gerada pelo transdutor e o deslocamento físico ou posição do objeto sendo medido. Em outras palavras, ela mostra como a tensão de saída do transdutor varia em resposta a diferentes deslocamentos do objeto (NITHYA *et al.*, 2023).

A função de transferência de um transdutor de tensão x deslocamento pode ser representada matematicamente como (YOUNIS, 2011):

$$V(s) = T(s) * D(s), \quad (3.1)$$

onde: $V(s)$ é a transformada de Laplace da tensão de saída do transdutor; $T(s)$ é a função de transferência do transdutor; $D(s)$ é a transformada de Laplace do deslocamento físico do objeto.

A função de transferência " $T(s)$ " é específica para cada tipo de transdutor de tensão x deslocamento e depende do projeto, características físicas, eletrônicas e dos materiais utilizados. Geralmente, ela é determinada por meio de calibração experimental ou por meio de modelagem matemática do transdutor e suas características mecânicas e elétricas (YOUNIS, 2011).

A partir da função de transferência, é possível analisar a resposta em frequência do transdutor e sua sensibilidade. A sensibilidade é a relação entre a mudança no deslocamento e a mudança na tensão de saída do transdutor. Um transdutor com alta sensibilidade produz uma variação maior na tensão de saída para uma pequena variação no deslocamento, enquanto um transdutor com baixa sensibilidade produzirá uma variação menor na tensão de saída para a mesma variação no deslocamento (YOUNIS, 2011).

A função de transferência também permite entender o comportamento dinâmico do transdutor, ou seja, como ele responde a diferentes frequências de deslocamento. Isso é importante em aplicações onde a frequência do deslocamento é variável, como em medições de vibração ou oscilação (YOUNIS, 2011).

Assim, a função de transferência de um transdutor de tensão x deslocamento é uma ferramenta fundamental para entender como o transdutor converte o deslocamento físico em um sinal elétrico, possibilitando a medição e a quantificação de movimentos e deslocamentos em diversas aplicações, como sensores de posição, acelerômetros, extensômetros e outros dispositivos de medição de deformação (BOGUE, 2013).

A compreensão da função de transferência de um transdutor e sua relação com o deslocamento físico é de fundamental importância para interpretar o comportamento descrito pela equação diferencial. Enquanto a função de transferência explora a conversão de movimento em sinal elétrico, a equação diferencial modela as complexas interações físicas que ocorrem em sistemas vibratórios. Portanto, ao analisar a equação (3.2), pode-se observar como os princípios subjacentes à função de transferência se manifestam na dinâmica real da viga sob influência de uma força externa.

A equação diferencial ordinária linear de segunda ordem (3.2), também conhecida como a equação do equilíbrio de dinâmico de um sistema estrutural, relaciona

as coordenadas generalizadas do movimento, quer seja de estruturas contínuas ou discretas, com uma força externa $f(t)$, e é frequentemente usada em problemas de transdutores e sistemas mecânicos para modelar seu comportamento oscilatório,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t), \quad (3.2)$$

onde: m : é a massa da viga (em quilogramas, kg), que desempenha um papel na inércia do sistema; \ddot{x} : é a aceleração da viga (em m/s^2), que é a segunda derivada do deslocamento x em relação ao tempo; c : é o coeficiente de amortecimento ou dissipação (em Ns/m), que está relacionado com a quantidade de amortecimento no sistema. Um valor maior de c representa um sistema mais amortecido. \dot{x} : é a velocidade da viga (em m/s), que é a exponencial do deslocamento x em relação ao tempo; k : é a constante de rigidez da viga (em N/m), que quantifica a rigidez do sistema; x : é o deslocamento da viga (em metros), que representa a posição da viga em relação a uma posição de equilíbrio.

A parte $f(t)$ em (3.2) representa a força externa aplicada à viga no tempo t . A solução da equação depende da forma específica dessa força $f(t)$ e das condições iniciais do sistema, ou seja, as posições iniciais e velocidades iniciais da viga.

Resolver essa equação diferencial pode envolver várias técnicas, dependendo da natureza da força $f(t)$, das condições iniciais e das propriedades do sistema (RAO, 2010). Em muitos casos, técnicas de transformada de Laplace, métodos numéricos ou soluções analíticas específicas são aplicadas para encontrar a resposta do sistema ao longo do tempo.

É importante notar que a solução da equação pode levar a diferentes comportamentos, incluindo oscilações amortecidas, oscilações críticas e oscilações não amortecidas, dependendo dos valores de m , c e k , bem como da forma da força $f(t)$ (RAO, 2010).

Assim, a primeira derivada \dot{x} representa a velocidade de um ponto da viga em relação ao tempo t :

$$\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} \quad (3.3)$$

E a segunda derivada \ddot{x} representa a aceleração de um ponto da viga em relação ao tempo t :

$$\ddot{x} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (3.4)$$

A equação 3.2 descreve como a massa da viga interage com a força externa $f(t)$, a rigidez k e o amortecimento c para determinar o movimento da viga ao longo do tempo.

A equação 3.5 encontra uma aplicação significativa no contexto dos transdutores, desempenhando um papel importante na compreensão das respostas e compor-

tamentos desses dispositivos.

$$x = Ce^{st} \quad (3.5)$$

Nesse contexto, x representa o deslocamento físico de um transdutor, ou seja, a magnitude da alteração na posição de uma parte do dispositivo em relação à uma posição de referência. O deslocamento é uma medida fundamental em muitas aplicações de engenharia estrutural e industrial.

A constante C desempenha um papel relevante na interpretação da equação em termos de um transdutor. Ela representa o deslocamento inicial quando $t = 0$, oferecendo uma linha de base para as medições subsequentes. Assim, em um transdutor de deslocamento, c representa o deslocamento inicial antes de qualquer variação ocorrer, e a equação 3.5 captura a variação subsequente de deslocamento em relação a esse ponto de referência.

O parâmetro s , por sua vez, assume a função de transmitir as características de resposta do transdutor. Em termos práticos, s pode ser associado à sensibilidade do transdutor, a taxa na qual ele responde às variações da entrada. Assim, em um transdutor de tensão que converte deslocamento em sinal elétrico, s influencia a relação entre a magnitude do deslocamento e a magnitude do sinal de saída.

A equação 3.5 é especialmente útil na análise de transdutores em regimes dinâmicos, onde as respostas variam ao longo do tempo. Ela permite entender como as variações no deslocamento inicial c e no parâmetro s se traduzem em mudanças na saída do transdutor com o passar do tempo, o que é importante para projetar, calibrar e interpretar os resultados de transdutores em uma ampla gama de aplicações, desde dispositivos de detecção de movimento até sistemas de monitoramento industrial.

Em suma, a equação 3.5 desempenha um papel importante no entendimento de como os transdutores convertem deslocamentos físicos em respostas elétricas mensuráveis. Ela oferece uma estrutura matemática para analisar a relação entre deslocamento, parâmetros de sensibilidade e a evolução temporal das saídas do transdutor, permitindo que engenheiros e cientistas compreendam e otimizem o desempenho desses dispositivos em uma ampla variedade de cenários de aplicação.

As equações 3.6 e 3.7 descrevem a primeira e a segunda derivadas do deslocamento x em relação ao tempo t quando x é a função exponencial 3.5.

$$\dot{x} = Cs e^{st}, \quad (3.6)$$

$$\ddot{x} = Cs^2 e^{st} \quad (3.7)$$

Essas relações são importantes em análises de sistemas dinâmicos, na resolução de equações diferenciais lineares, incluindo a equação diferencial de segunda

ordem apresentada anteriormente (3.2). As soluções exponenciais são frequentemente encontradas em sistemas onde a resposta à uma perturbação é influenciada pelo valor de s , que está relacionado às propriedades do sistema subjacente.

Desse modo, a equação 3.8 surge como uma extensão da equação diferencial de segunda ordem homogênea associada à equação 3.2. Nessa equação, as derivadas de x foram substituídas por termos exponenciais Ce^{st} para resolver a equação diferencial por meio de uma abordagem de substituição. Os coeficientes m , c e k representam a massa, o coeficiente de amortecimento e a constante de rigidez, respectivamente.

$$mCs^2e^{st} + cCse^{st} + kCe^{st} = 0 \quad (3.8)$$

Dessa forma, a equação expressa uma solução exponencial que está sendo considerada como uma possível resposta à equação diferencial homogênea. A presença de Ce^{st} em todos os termos é uma característica da solução exponencial para esse tipo de equação. O valor s influencia a natureza da solução, determinando se o sistema é subamortecido, criticamente amortecido ou superamortecido.

Resolvendo essa equação, podemos determinar os valores possíveis de s , que, por sua vez, ajudarão a descrever o comportamento vibratório ou oscilatório do sistema descrito pela equação diferencial original. A solução para s pode fornecer informações sobre as frequências naturais de oscilação, bem como sobre a rapidez com que as oscilações são amortecidas ao longo do tempo.

A exponencial $x = Ce^{st}$ modela o deslocamento de um transdutor, com C representando o deslocamento inicial e s a sensibilidade, e ajuda a compreender a resposta temporal de transdutores. Substituindo x e suas derivadas no problema homogêneo associado à equação original (3.2), obtem-se a equação característica (3.9).

$$ms^2 + cs + k = 0. \quad (3.9)$$

A equação (3.9) exemplifica uma abordagem matemática comum para resolver problemas de sistemas mecânicos ou sistemas dinâmicos em geral. Ao encontrar os valores de s , podemos descobrir como as características do sistema (massa, amortecimento, rigidez) influenciam seu comportamento oscilatório.

As soluções para s em termos dos parâmetros m , c e k , que descrevem as propriedades do sistema são dadas por

$$s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (3.10)$$

O termo dentro da raiz quadrada $\sqrt{c^2 - 4mk}$ é conhecido como o discriminante da equação característica e determina o tipo de solução. A seguir, há uma descrição de como esse termo influencia na resposta do sistema em termos das raízes características (3.10).

Quando $c^2 - 4mk > 0$, os valores de s_1 e s_2 são reais e distintos, indicando dois modos de vibração naturais diferentes, exibindo as oscilações, indicando uma resposta que cresce ou diminui periodicamente com o tempo.

Quando $c^2 - 4mk = 0$, os valores de s_1 e s_2 são iguais, indicando um único modo de vibração natural, que pode ser amplificado ou atenuado ao longo do tempo.

Quando $c^2 - 4mk < 0$, os valores de s_1 e s_2 são complexos conjugados, indicando oscilações amortecidas, que possuem uma componente de amortecimento e uma componente oscilatória, e a resposta diminui ao longo do tempo.

Pode-se utilizar as taxas de amortecimento e frequências associadas

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (3.11)$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}, \quad (3.12)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad (3.13)$$

para descrever a resposta. Em particular, para o discriminante negativo, a solução s é apresentada nesta forma

$$s = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d \quad (3.14)$$

Assim, a resposta do sistema, para este caso, é dada por

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(x_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \text{sen}(\omega_d t) \right). \quad (3.15)$$

A equação (3.15) mostra a resposta do sistema em forma de variável de estado, utilizando apenas os parâmetros internos do sistema.

Quando o sistema recebe um sinal de entrada, a resposta do sistema é calculada utilizando a integral de convolução, ou integral de Duhamel (RAO, 2010). Neste caso, a equação (3.16) mostra como o sistema responde a oscilações forçadas sujeito a amortecimento. Ela descreve tanto a influência das oscilações naturais do sistema, também chamadas de efeitos transitórios, quanto a influência da força externa, neste caso, denotado pelo sinal de entrada $f(t)$, levando em consideração a atenuação devido ao amortecimento. Assim, (3.16) permite analisar a evolução temporal

do deslocamento da viga em resposta a uma carga externa, considerando tanto as características inerentes do sistema quanto as condições de excitação.

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(x_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right) + \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t f(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin(\omega_d(t-\tau)) d\tau \quad (3.16)$$

Desse modo, o transdutor pode ser visto como um sistema, cujo comportamento dinâmico é descrito por (3.16) e, neste contexto, percebe-se a necessidade de modelos matemáticos para quantificar as variáveis físicas envolvidas no processo. Sua performance é, geralmente, descrita através de equações diferenciais ordinárias. Quando se olha para todo o processo tendo em vista a montagem do hardware, outros componentes além do transdutor são necessários, como os codificadores analógicos/digitais e os sistemas computacionais podendo ser neste caso, os armazenadores e/ou processadores de sinais (TOCCI RONALD J.; WIDNER; MOSS, 2011).

Por outro lado, os dispositivos microeletromecânicos englobam sistemas mecânicos, hidráulicos e elétricos, e portanto e se baseiam em mecânica do contínuo, o que implica no uso de equações diferenciais parciais na descrição dos elementos estruturais (cabos, barras, vigas, placas, membranas), cuja metodologia de solução é transformar o problema espacial em ordinário.

A metodologia de análise envolve os autoestados do sistema, que, no caso discreto, possui um número finito de componentes. Este não é o caso do nosso trabalho, em que o sistema possui infinitos autoestados, por se tratar de sistemas contínuos descritos por equações diferenciais parciais, e as respostas (modos normais de vibrações) serem não lineares, devido a natureza das forças que atuam no sistema. Para obter a resposta no domínio do tempo, tanto para o caso discreto quanto para o contínuo, a abordagem adotada é a seguinte: obtêm-se os autovalores a partir da equação característica do sistema; de posse dos autovalores constrói-se as autofunções do sistema; utilizando a propriedade de ortonormalidade dos modos normais obtêm-se as equações de estado para cada uma das projeções representadas pelas autofunções. Também cumpre destacar que a modelagem será feita em duas partes: na primeira, considera-se as equações de estado já projetadas, o que significa dizer que a resposta do transdutor é obtida por meio da solução de equações diferenciais ordinárias; na segunda parte, o problema é analisado a partir do paradigma da mecânica do contínuo, isto quer dizer que a resposta do transdutor é obtida por meio de equações diferenciais parciais e a metodologia é a mesma que no caso de equações ordinárias - calcula-se os autovalores a partir da equação característica; obtêm-se as autofunções do sistema e usa a integral de convolução para calcular a resposta. Este procedimento foi realizado tanto para o caso clássico quanto para o modelo de deformação gradiente.

Para modelar o transdutor, foi usado um sistema com um grau de liberdade com rigidez interna para determinar as respostas de forças eletroestáticas. Para obter um bom entendimento de como o sistema funciona, é necessário analisar o esquema de resposta e o seu comportamento quando sujeito a carregamentos do tipo dissipativos e viscosos, bem como a acoplamentos piezoelétricos e eletromagnéticos.

O deslocamento estático da massa é δ_{st} . O equacionamento do modelo de transdutor passa pelo deslocamento relativo do dispositivo é denotado pelo deslocamento que a variável y sofre em relação a um deslocamento x . Ambos os deslocamentos x e y são relacionados a um sistema inercial. A relação entre estes dois deslocamentos é

$$q(t) = x(t) - y(t). \quad (3.17)$$

A massa m está sujeita às forças $f_0(t)$, $f(t)$ e $F_r(q, \dot{q}, \ddot{q})$, que descrevem as características do dispositivo. As forças $f_0(t)$ e $f(t)$ representam as entradas do sistema, enquanto $F_r(q, \dot{q}, \ddot{q})$ é inserida no modelo para contemplar as especificações de projeto, como, por exemplo, as forças de Van der Waals, ou campos de temperatura (YOUNIS, 2011). Se o recipiente denotado pela variável y estiver em repouso, pode-se considerar $y = 0$; neste caso, $q(t) = x(t)$.

Fazendo o equilíbrio de forças sobre a massa m na direção vertical $y(t)$, tem-se

$$m\ddot{x} + F_s(q, \dot{q}) + F_d(q, \dot{q}) + F_r(q, \dot{q}, \ddot{q}) = mg + f_0(t) + f(t). \quad (3.18)$$

A força constante $f_0(t)$ pode ser originada de diversas maneiras, tais como atrações eletroestáticas, gradientes de pressão entre as superfícies do recipiente ou a presença de forças magnéticas, caso o material da massa seja magnetizável, conforme destacado em referências anteriores (YOUNIS, 2011; MAGRAB, 2012). A força $F_s(q, \dot{q})$ representa a força da mola, cuja expressão é dada por $F_s(q, \dot{q}) = k(q + \delta_{st})$, e $F_d(q, \dot{q})$ denota a força de dissipação $F_d(q, \dot{q}) = c\dot{q}$.

Assim, considerando essas forças, o modelo do sistema assume a seguinte forma

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y + \delta_{st}) + F_r(x - y, \dot{x} - \dot{y}, \ddot{x} - \ddot{y}) = mg + f_0(t) + f(t) \quad (3.19)$$

Na escala de MEMS, o amortecimento viscoso é causado por vários fenômenos que são influenciados pela pressão e temperatura ambiente, pela amplitude e frequência da oscilação, pela viscosidade e pelas características geométricas (YOUNIS, 2011; MAGRAB, 2012).

A partir da equação (3.19), tem-se que

$$\delta_{st} = \frac{1}{k} \left(mg + f_0(t) \right). \quad (3.20)$$

Substituindo (3.20) em (3.19), tem-se

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + F_r(x - y, \dot{x} - \dot{y}, \ddot{x} - \ddot{y}) = f(t) + c\dot{y} + ky. \quad (3.21)$$

Quando $y(t) = 0$, tem-se

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + F_r(x, \dot{x}, \ddot{x}) = f(t) \quad (3.22)$$

No âmbito da teoria de automação e controle, forças eletrostáticas exercem um papel fundamental como parte integrante em sensores e atuadores (MAGRAB, 2012); (YOUNIS, 2011). A partir da equação (3.17), e utilizando a equação (3.20), a equação (3.18) pode ser escrita como

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq + F_r(q, \dot{q}, \ddot{q}) = f(t) - m\ddot{y} \quad (3.23)$$

Esta equação representa o movimento da massa em relação à posição de equilíbrio estática. Quando $y(t) = 0$, a equação (3.23) se torna

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + F_r(x, \dot{x}, \ddot{x}) = f(t). \quad (3.24)$$

E quando a força de reação não está presente, $F_r(q, \dot{q}) = 0$, a equação (3.24) pode ser simplificada para

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t). \quad (3.25)$$

Voltando à equação (3.23), definimos $F_r(q, \dot{q}) = 0$ para obter

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = f(t) - m\ddot{y}. \quad (3.26)$$

Agora, introduzimos as equações (3.11) e (3.12) em (3.25) para obter a seguinte equação governante do movimento em termos da frequência natural e fator de amortecimento,

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dq}{dt} + \omega_n^2 q = f(t) - \frac{d^2y}{dt^2}. \quad (3.27)$$

Um dos principais aspectos na análise de microestruturas envolve a aplicação da tensão eletrostática modelada de forma não linear em termos do deslocamento entre placas (YOUNIS, 2011; MAGRAB, 2012). Geralmente, estruturas que abrigam componentes de sensores são flexíveis, como vigas ou placas. Portanto, na condição de equilíbrio, quando se aplica uma força eletrostática, é necessário equilibrá-la com a força de restauração da estrutura, que geralmente é linear e depende do material. Conseqüentemente, o equilíbrio da estrutura depende da interação entre essas duas forças. Caso a força eletrostática seja maior do que a força de restauração, o sistema

entra em um estado de estabilidade conhecido como *pull-in* (YOUNIS, 2011). O valor do estresse no qual esse fenômeno ocorre é um parâmetro de projeto crucial no desenvolvimento de equipamentos eletrostáticos.

No presente trabalho, a função $f_r(z, \dot{z})$ assume a seguinte forma

$$f_r(q, \dot{q}) = \frac{-2d\epsilon l h V^2 q}{d^4 + 2d^2 q^2 + q^4}, \quad (3.28)$$

onde ϵ é a constante dielétrica do material responsável por suas propriedades condutoras; l, h e d são parâmetros geométricos da estrutura, conforme Figura (??) e (YOUNIS, 2011). E q é o deslocamento da placa. No modelo a ser analisado, não há elementos de dissipação. Considerando esta informação e substituindo (3.28) em (3.26), tem-se

$$m\ddot{q} + kq - \frac{-2\epsilon l t d V^2 q}{m(d^4 + 2d^2 q^2 + q^4)} = -\ddot{y}. \quad (3.29)$$

Usando a integral de Duhamel (RAO, 2010), a solução de (3.29) é dada por

$$q = \left[q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{\omega_n} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{sen} \left(\omega_n t + \tan^{-1} \left(\frac{q_0 \omega_n}{\dot{q}_0} \right) \right) + \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t \frac{2\epsilon t \tau d V^2 q(\tau)}{(d^4 + 2d^2 q(\tau)^2 + q(\tau)^4)} \text{sen}(\omega_n(t - \tau)) d\tau - \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t \ddot{y}(\tau) \text{sen}(\omega_n(t - \tau)) d\tau. \quad (3.30)$$

Sobre a expressão (3.30), é importante destacar que os parâmetros q_0 , \dot{q}_0 representam, respectivamente, a posição e velocidade iniciais da estrutura; l, b, d e h são parâmetros geométricos da estrutura; ω_n , a frequência natural da microestrutura, é necessária para avaliar a resposta q ; seu cálculo considera a modelagem de sistemas distribuídos e baseia-se em problemas de valor de contorno $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $y(t)$ representa a deflexão dinâmica da estrutura monitorada; a tensão, V , produzida depende das características do material (módulo de elasticidade E e parâmetros geométricos I), expressa pelas suas equações características (modelos constitutivos); assim, é razoável assumir que $V = V(q, y)$; é importante ressaltar que, no contexto de monitoramento, a resposta da microestrutura z é uma função do objeto monitorado, neste caso, y .

3.2 Modelos de parâmetros distribuídos

A equação (3.29) descreve o comportamento da microviga, constituindo um modelo de parâmetros concentrados. No entanto, para obter uma compreensão abrangente do comportamento da estrutura, essa abordagem se revela inadequada, visto que não oferece precisão nem capacidade para descrever minuciosamente toda a

dinâmica do sistema, ainda que seja um modelo mais simples e prático (YOUNIS, 2011). Uma informação crucial que se perde ao se adotar modelos concentrados é a maneira como a tensão gerada pelo material é calculada. Para responder a essa questão, é imperativo recorrer às equações constitutivas do material, e, para tal propósito, a abordagem mais apropriada é a utilização de parâmetros distribuídos (MAGRAB, 2012; YOUNIS, 2011). Nesta seção, essa perspectiva é abordada e demonstra-se como a tensão gerada está intrinsecamente relacionada aos parâmetros do modelo em questão.

Um primeiro ponto de extrema relevância a ser considerado é que a constante de rigidez depende das condições de contorno às quais a estrutura está sujeita.

Para obter as equações de equilíbrio da estrutura será utilizada a abordagem variacional, (RAO, 2007). O primeiro passo é considerar o campo de deslocamento (u, v, w) nas respectivas direções, x, y e z ,

$$u = -zw'(x), \quad v = 0, \quad w = w(x). \quad (3.31)$$

Na equação (3.31), a direção x denota o comprimento longitudinal da microviga; y e z encerram as informações da seção transversal (RAO, 2007). As componentes do tensor de deformação e tensão correspondente ao campo de deslocamento são

$$\epsilon_{xx} = -zw''(x), \quad \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \epsilon_{xy} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zx} = 0, \quad (3.32)$$

$$\sigma_{xx} = -zEw''(x), \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0. \quad (3.33)$$

Segue de (YOUNIS, 2011) que a seguinte relação para o sensor, é válida

$$\epsilon_{xx} = s_{11}\sigma_{xx} + d_{11}V. \quad (3.34)$$

De (3.34) e (3.33), tem-se

$$V(w) = \frac{(s_{11} - 1)}{d_{11}} zw''(x), \quad (3.35)$$

onde $s_{ij} \left(\frac{N}{m^2} \right)$, $i = 1:6$, $j = 1:6$ e $d_{ij} \left(\frac{C}{N} \right)$, $i = 1:3$, $j = 1:3$ são, respectivamente, as componentes de flexibilidade e piezoeletricidade do material (YOUNIS, 2011). O princípio de Hamilton (RAO, 2007) fornece as equações de equilíbrio da estrutura

$$EIw^{iv}(x, t) + \rho A\ddot{w}(x, t) = f_r(w(x, t), y(t)), \quad (3.36)$$

com as seguintes condições de contorno

$$\left(-EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_{t1} \frac{\partial w}{\partial x}\right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \Big|_{x=0} = 0, \quad (3.37)$$

$$\left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_{t1} \frac{\partial w}{\partial x}\right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \Big|_{x=l} = 0, \quad (3.38)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + k_1 w + m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) \delta w \Big|_{x=0} = 0, \quad (3.39)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + k_1 w + m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) \delta w \Big|_{x=l} = 0. \quad (3.40)$$

com termo forçante, $f_r(w, y)$ dada por

$$f_r(w(x, t), y(t)) = \frac{2\epsilon l d (s_{11} - 1)^2 z^2 w''(x, t)^2 w(x, t)}{d_{11} (d^4 + 2d^2 w(x, t)^2 + w(x, t)^4)} - \ddot{y}(t). \quad (3.41)$$

Assumindo a solução do tipo harmônica para (3.36), tem-se

$$w(x, t) = \varphi(x) e^{i\alpha t} \quad (3.42)$$

É possível mostrar que $\varphi(x)$ é dada por ((YOUNIS, 2011))

$$\varphi(x) = A_1 \cos(\beta x) + A_2 \sin(\beta x) + A_3 \cosh(\beta x) + A_4 \sinh(\beta x), \quad (3.43)$$

onde α e β satisfazem a seguinte relação

$$\alpha = \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \beta^2 l^2, \quad (3.44)$$

e

$$\varphi^{iv}(x) = \frac{\rho A \alpha^2}{EI} \varphi(x). \quad (3.45)$$

Usando as condições de contorno para (3.43), (YOUNIS, 2011), β , juntamente com os coeficientes $A_i, i = 1 : 4$, podem ser calculados.

A metodologia usada para o caso forçado, ou seja, em que $f(x, t) \neq 0$ é influenciada pelo parâmetro β em (3.43). Das condições de contorno (3.37)-(3.40), é possível mostrar a existência de uma sequência $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, conforme pode ser visto em (RAO, 2007), tal que a solução de (3.36) é dada por

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \varphi_i(x) \quad (3.46)$$

Substituindo (3.46) em (3.36), multiplicando por φ_j e usando a ortonormalidade das autofunções $\varphi_n(x)$

$$\ddot{q}_j + \alpha_j^2 q_j = F_j(q, y), \quad (3.47)$$

onde α_j é dado por (3.44) e $F_j(t)$ é dada por

$$F_j(t) = \frac{2\epsilon L d (s_{11} - 1)^2 z^2}{\rho A d_{11}} \int_0^L \frac{\left(\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i'' q_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i q_i\right)}{d^4 + 2d^2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i q_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i q_i\right)^4} \varphi_j(x) dx - \ddot{y}(t) \quad (3.48)$$

Com isso, obtém-se a resposta forçada do sistema

$$q_j(t) = q_{0j} \cos(\alpha_j t) + \frac{\dot{q}_{0j}}{\alpha_j} \sin(\alpha_j t) + \frac{1}{\alpha_j} \int_0^t F_j(\tau) \sin(\alpha_j(t - \tau)) d\tau, \quad (3.49)$$

onde $F_j(t)$ é dada em (3.48) e q_{0j}, \dot{q}_{0j} são dadas respectivamente por

$$q_{0j} = \int_0^l w_0(x) \phi_j(x) dx, \quad (3.50)$$

$$\dot{q}_{0j} = \int_0^l \dot{w}_0(x) \phi_j(x) dx, \quad (3.51)$$

em que $w_0(x)$ e $\dot{w}_0(x)$ são respectivamente a posição e velocidade inicial de $w(x, t)$.

Sobre a resposta $q = \left(q_j\right)_{j=1}^{\infty}$, alguns pontos são importantes destacar

- inspecionando diretamente (3.48), é de se esperar que F_j seja limitada em q ;
- a rigidez da estrutura $\alpha = \left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty}$ é definida por infinitas componentes α_j que, por sua vez, dependem das condições de contorno da estrutura para serem definidas.

3.3 Casos clássicos de vigas com condições de contorno

Na presente seção, são analisados alguns casos de ressonadores (sensores) importantes que são amplamente discutidos na literatura (VATANKHAH, 2015; VATANKHAH *et al.*, 2014; VATANKHAH; KARAMI; SALARIEH, 2015; VATANKHAH *et al.*, 2013; VATANKHAH *et al.*, 2013).

Anteriormente, foi apresentado que as componentes da rigidez dependem das condições de contorno (3.37)-(3.40) e das equações constitutivas do material (3.44). Em seguida, foram determinados explicitamente os valores de β_j , as autofunções φ_j e utilizando a equação (3.49) obtém-se a resposta do sistema

3.3.1 Vigas simplesmente apoiadas em ambos os extremos

O deslocamento transversal e o momento são nulos para vigas simplesmente apoiadas. Portanto, as condições de contorno são

$$\varphi(0) = 0, \quad (3.52)$$

$$EI \frac{d^2 \varphi(0)}{dx^2} = 0 \quad (3.53)$$

$$\varphi(L) = 0, \quad (3.54)$$

$$EI \frac{d^2 \varphi(L)}{dx^2} = 0. \quad (3.55)$$

Os valores de β_n são dados por

$$\beta_n = \frac{n\pi}{L}, n = 1, 2, \dots, \quad (3.56)$$

e α_n é dada por

$$\alpha_n = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho b h L^4}}, n = 1, 2, \dots \quad (3.57)$$

Na Tabela (3.1), são apresentados os valores para as cinco primeiras frequências de vibração da estrutura. As autofunções são definidas por

$$\varphi_j(x) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right). \quad (3.58)$$

Tabela 3.1 – Tabela das frequências naturais da viga bi-apoiada, α_n em (3.57). Fonte: Autoria própria.

n	α_n (MHz)
1	4.2242
2	16.897
3	38.018
4	67.587
5	105.60
6	152.07
7	206.98
8	270.35
9	342.16
10	422.42

3.3.2 Viga fixa em uma extremidade e livre na outra

Um outro modelo de viga bastante usado são as chamadas vigas engastadas, (YOUNIS, 2011), cujas condições de contorno são dadas por

$$\varphi(0) = 0 \quad (3.59)$$

$$\frac{d\varphi(0)}{dx} = 0 \quad (3.60)$$

$$\frac{d^2\varphi(L)}{dx^2} = 0 \quad (3.61)$$

$$\frac{d^3\varphi(L)}{dx^3} = 0. \quad (3.62)$$

Segue de (RAO, 2007) que as raízes características β satisfazem a equação

$$\cos(\beta L)\cosh(\beta L) + 1 = 0, \quad (3.63)$$

e a frequência natural de vibração é

$$\alpha_n = (\beta_n L)^2 \left(\frac{EI}{\rho AL^4} \right)^{1/2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.64)$$

As raízes características β_n de (3.63) e a frequência natural de vibração α_n , obtidas de (3.64), após substituir β_n , estão na Tabela (3.2).

n	$\beta L \cong \frac{(2n-1)\pi}{2}$	βL	$\alpha_n(\text{MHz})$
1	1.5708	1.8751	0.152
2	4.7124	4.6941	0.954
3	7.8540	7.8547	2.671
4	10.9956	10.9956	5.235
5	14.1372	14.1372	8.654
6	17.2788	17.2788	12.928
7	20.4204	20.4204	18.056
8	23.5619	23.5619	24.039
20	61.261	61.261	162.506
50	155.508	155.508	1047.154

Tabela 3.2 – Caso clássico. Fonte: Autoria própria.

Os modos normais de vibração normalizados são dados por

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left[\cos(\beta_n x) - \cosh(\beta_n x) - \frac{\cos(\beta_n L) - \cosh(\beta_n L)}{\sin(\beta_n L) - \sinh(\beta_n L)} (\sin(\beta_n x) - \sinh(\beta_n x)) \right], \quad (3.65)$$

pois

$$\int_0^L \left((\cos(\beta_n x) - \cosh(\beta_n x)) - \frac{(\cos(\beta_n L) + \cosh(\beta_n L))}{(\sin(\beta_n L) + \sinh(\beta_n L))} (\sin(\beta_n x) - \sinh(\beta_n x)) \right)^2 dx \approx L, \quad (3.66)$$

calculado numericamente utilizando a Quadratura de Gauss-Legendre com quinze pontos para diferentes valores de L .

Quando se trata de vibração, os modos normais são os padrões de movimento ou vibração que um sistema exibe em uma frequência natural específica.

No contexto de microvigas engastadas, ao considerar a dinâmica e a resposta a excitadores externos, os modos normais são as formas distintas de vibração da viga em diferentes frequências naturais. O primeiro modo normal é o padrão fundamental de vibração.

Entender os modos normais é crucial para análises modais, pois ajuda a compreender como um sistema complexo responde a diferentes condições de carga ou excitação. A análise modal é fundamental em engenharia estrutural, design de sistemas microeletromecânicos e em várias outras aplicações para garantir que as estruturas ou sistemas possam suportar as condições de operação esperadas.

Nas figuras seguintes, são apresentados os cinco primeiros modos normais clássicos para a microviga engastada e suas respectivas variações em função dos parâmetros h e L .

As Figuras (3.1a)-(3.5b) mostram os cinco primeiros modos normais e seus respectivos planos de fase para o caso clássico, com parâmetros $h = 20\mu m$ e $L = 20h$, com o intuito de analisar a intensidade da taxa de variação dos mesmos.

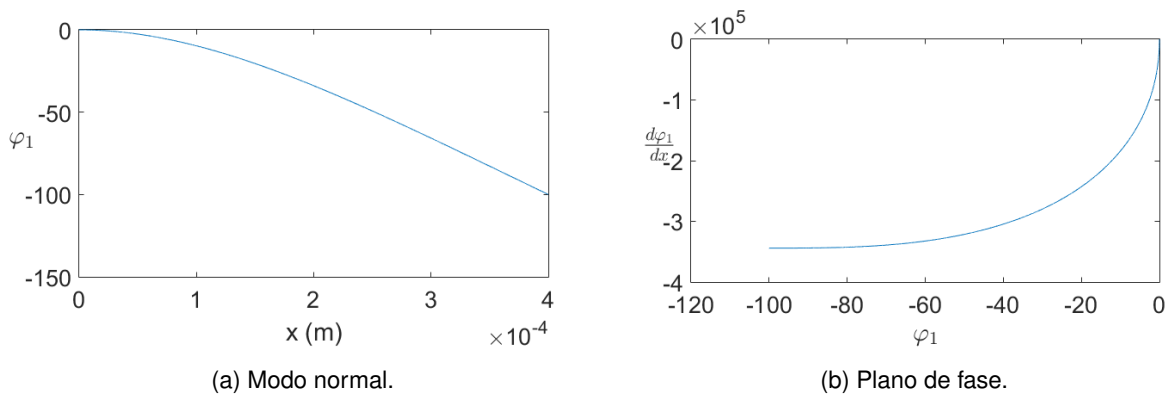


Figura 3.1 – Primeiro modo normal e plano de fase da microviga engastada para o caso clássico. Fonte: Autoria própria.

As Figuras (3.6a)-(3.6e) mostram os cinco primeiros modos normais para o caso clássico variando a espessura h , com parâmetro $L = 20h$. Observa-se que eles mantêm a mesma forma com uma leve variação de amplitude.

As Figuras (3.7a)-(3.7e) mostram os cinco primeiros modos normais para o caso clássico variando o comprimento L , com parâmetro $h = 20\mu m$. Percebe-se que eles mantêm a mesma forma com uma leve variação de amplitude.

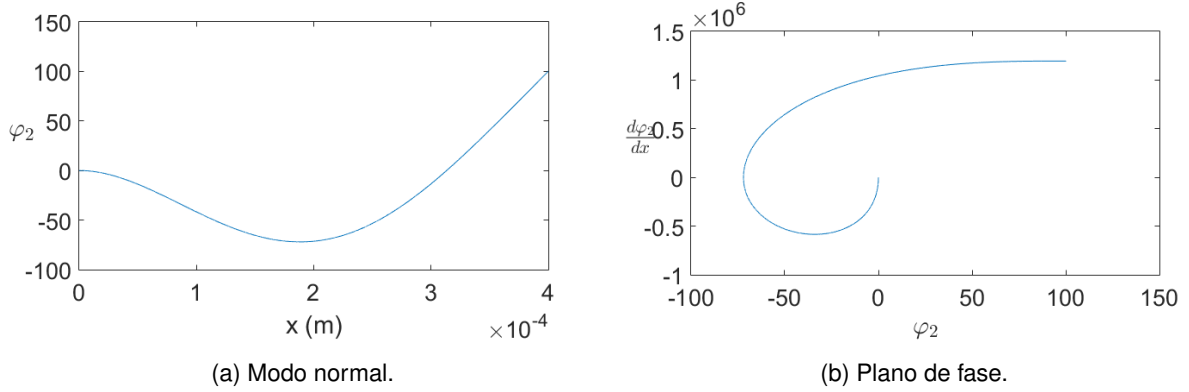


Figura 3.2 – Segundo modo normal e plano de fase da microviga engastada para o caso clássico. Fonte: Autoria própria.

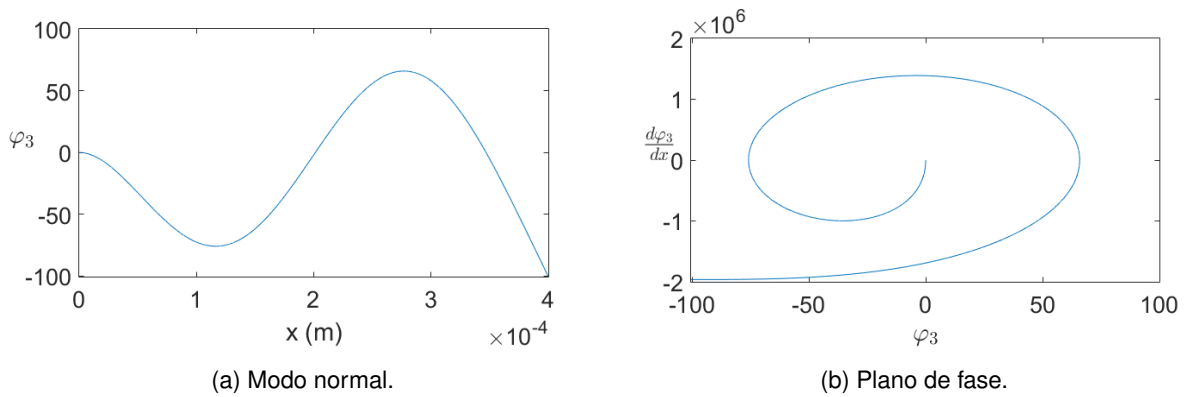


Figura 3.3 – Terceiro modo normal e plano de fase da microviga engastada para o caso clássico. Fonte: Autoria própria.

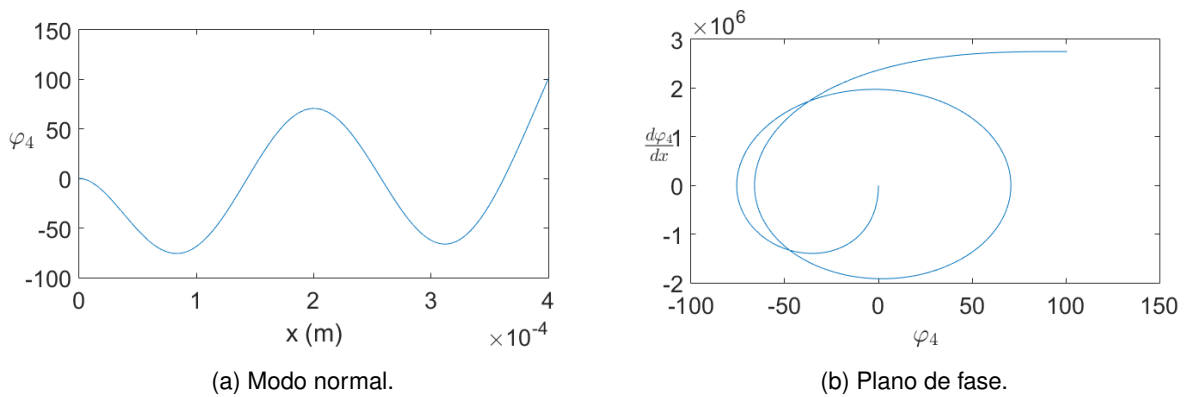


Figura 3.4 – Quarto modo normal e plano de fase da microviga engastada para o caso clássico. Fonte: Autoria própria.

Da mesma forma, a rigidez da viga engastada pode ser obtida da Tabela (3.2) e da equação (3.64).

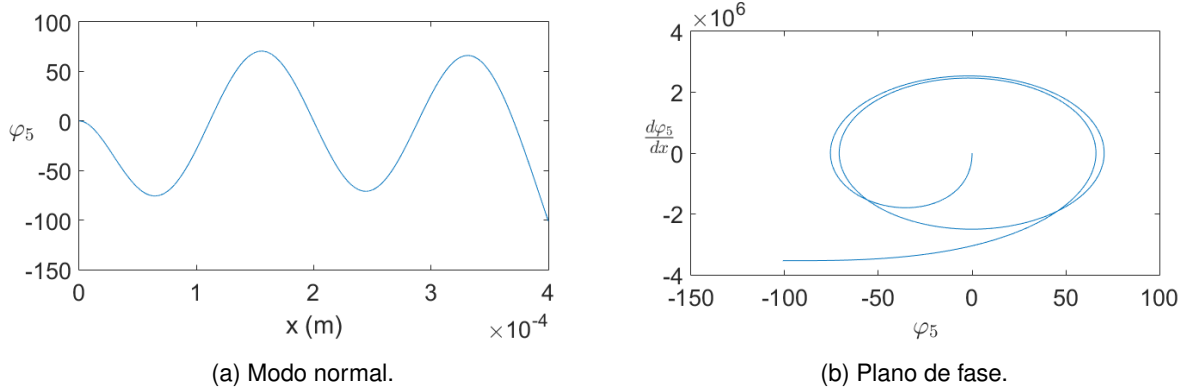


Figura 3.5 – Quinto modo normal e plano de fase da microviga engastada para o caso clássico. Fonte: Autoria própria.

Tabela 3.3 – Valores de rigidez para a viga engastada baseada nos dez primeiros modos normais. Fonte: Autoria própria.

n	k
1	3.3968e+02
2	1.3341e+04
3	1.0460e+05
4	4.0164e+05
5	1.0976e+06
6	2.4492e+06
7	8.4687e+06
8	1.3972e+07
9	2.1802e+07
10	3.2533e+07

A saída do transdutor é a tensão elétrica fornecida pela equação (3.35). Usando a fórmula (3.49) para as coordenadas generalizadas e (3.58) para os modos normais, considerando as condições de contorno, verifica-se que a expressão da tensão em função das coordenadas generalizadas é dada por

$$V_j(w) = \frac{(1 - s_{11})}{d_{11}} \sqrt{\frac{2}{l}} x^2 \sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right) q_j(t), \quad t \geq 0, \quad x \in [0, L], \quad \text{e } j = 1, 2, \dots \quad (3.67)$$

Assim, verifica-se que o comportamento da saída tensão elétrica levando em consideração as contribuições dos modos normais. Além disso, observa-se que a escala de operação de tensão elétrica está na faixa de 10^{-8} , sendo também importante lembrar que no contexto do presente trabalho, o dispositivo trabalha como detector.

3.4 Teoria da deformação gradiente

Na seção anterior, os sistemas de parâmetros concentrados e distribuídos foram discutidos na modelagem de transdutores. Viu-se que os modelos concentrados

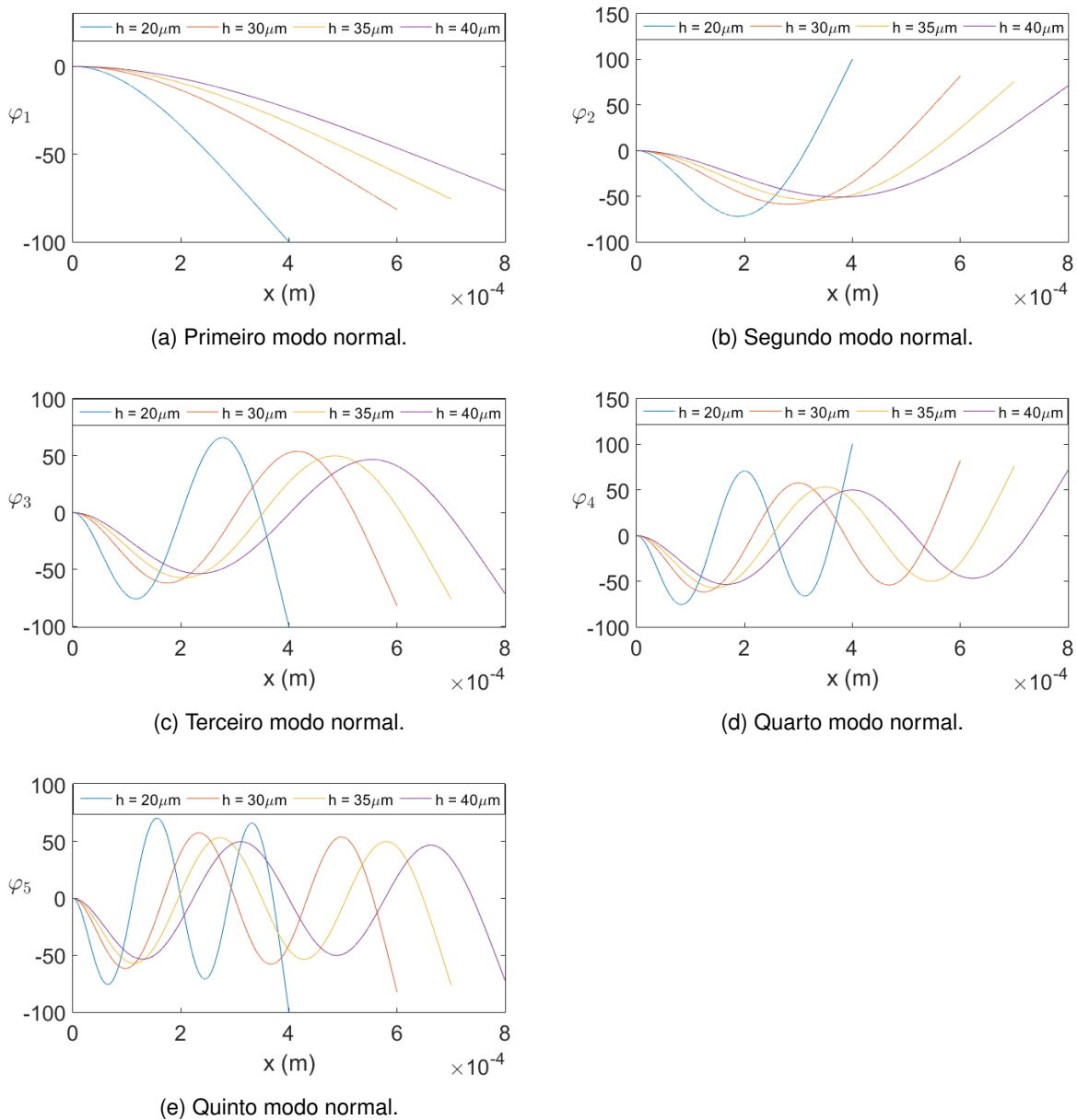


Figura 3.6 – Comparação de valores de h para o caso clássico. Fonte: Autoria própria.

são amplamente utilizados a respeito de sua simplicidade na manipulação numérica de dados, mas, quando o objetivo é ter informações mais detalhadas sobre o comportamento do dispositivo, os sistemas distribuídos são mais apropriados, mesmo tendo sua manipulação acrescida de maior complexidade. Destaca-se ainda a relação entre tensão elétrica e deslocamento mecânico fornecido pela equação (3.35). Foi ainda apresentado um modelo de resposta para sistemas microeletromecânicos baseado na relação deslocamento \times tensão elétrica; também foi mostrada a influência que a rigidez da estrutura exerce na resposta do sistema. Levando em consideração (3.44) percebe-se a importância que os parâmetros geométricos, largura e espessura de materiais, módulo de Young e condições de contorno, tem no comportamento da res-

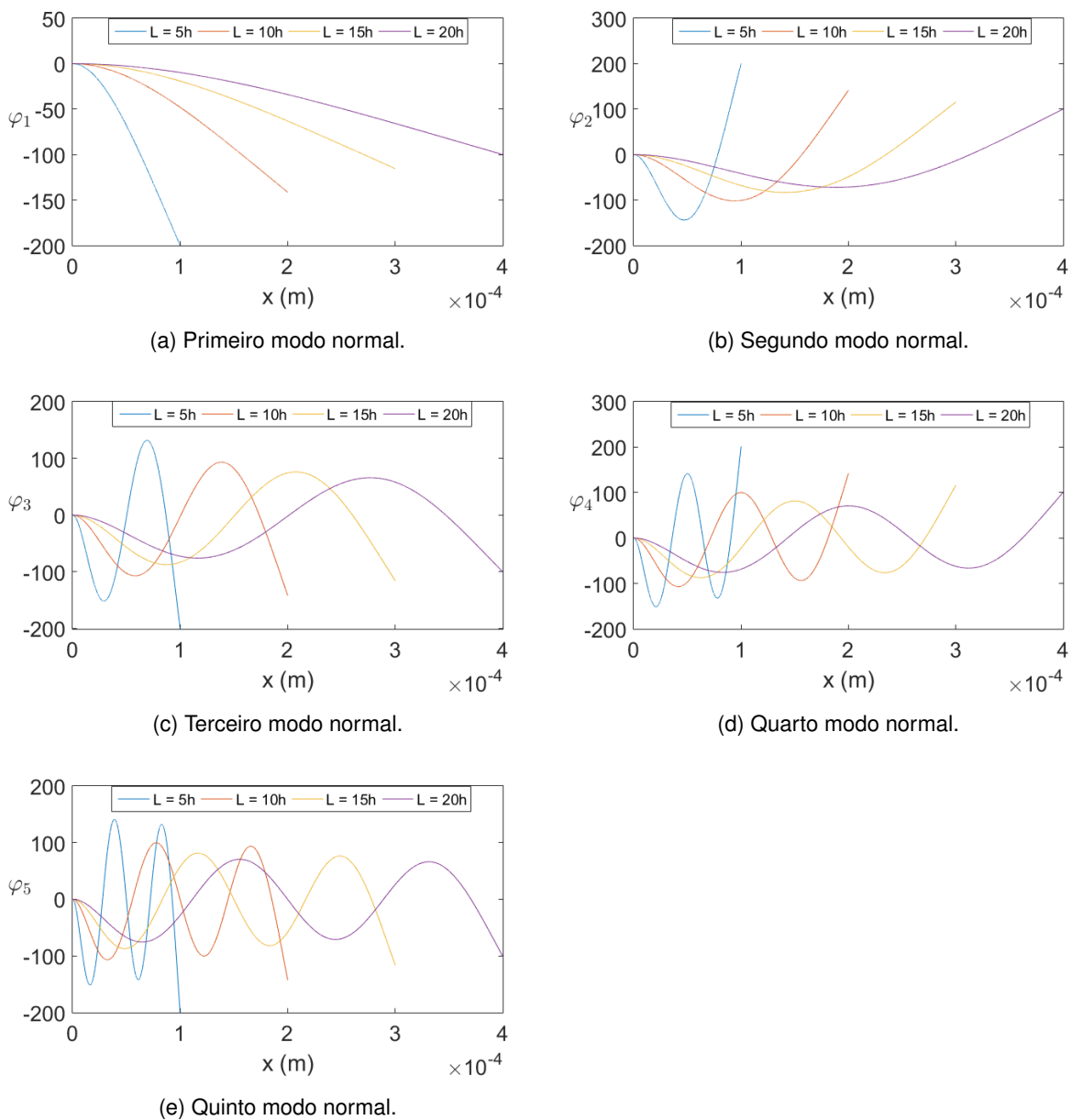


Figura 3.7 – Comparação de valores de L para o caso clássico. Fonte: Autoria própria.

posta do dispositivo, em particular a relação tensão elétrica com deformação mecânica (3.34).

Os estudos de (LAM *et al.*, 2003; KAHROBAIYAN *et al.*, 2011; KAHROBAIYAN *et al.*, 2012; KONG *et al.*, 2009; YOUNIS, 2011), baseados nos trabalhos pioneiros (ERINGEN; SUHUBI, 1965; MINDLIN; ESHEL, 1968), sugeriram que as propriedades dos chamados *materiais inteligentes* poderiam ser melhor percebidas se houvessem modificações na sua energia interna.

Mais especificamente a energia de deformação interna, conforme (KONG *et al.*,

2009), foi considerada como

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left(\sigma_{ij} \epsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk}^1 \eta_{ijk}^1 + m_{ij}^s \chi_{ij}^s \right) dV, \quad (3.68)$$

onde os tensores de deformações, ϵ_{ij} , γ_i , η_{ijk}^1 e χ_{ij}^s são dados por,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad i, j = 1, \dots, 3, \quad (3.69)$$

$$\gamma_i = \partial_i \epsilon_{mm}, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (3.70)$$

$$\eta_{ijk}^1 = \frac{1}{3} \left(\partial_i \epsilon_{jk} + \partial_j \epsilon_{ki} + \partial_k \epsilon_{ij} \right) - \frac{\delta_{ij}}{15} \left(\partial_k \epsilon_{mm} + 2\partial_m \epsilon_{mk} \right), \quad (3.71)$$

$$- \frac{1}{15} \left[\delta_{jk} (\partial_i \epsilon_{mm} + \partial_m \epsilon_{mi}) + \delta_{ki} (\partial_j \epsilon_{mm} + 2\partial_m \epsilon_{mj}) \right] \quad i, j, k = 1, \dots, 3 \quad (3.72)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} \left(e_{ipq} \partial_p \epsilon_{qj} + e_{jppq} \partial_p \epsilon_{qi} \right), \quad (3.73)$$

onde o índice repetido no tensor significa somatório dos componentes. Conforme definido em (LAM *et al.*, 2003; KONG *et al.*, 2009), γ_i é o gradiente de dilatação; η_{ijk}^1 é o tensor gradiente desviador resistente; χ_{ij}^s é o tensor gradiente de rotação simétrica; δ_{ij} é o delta de Kronecker e e_{ijk} é o tensor alternante. De forma dual, os tensores de tensão mecânica associados, respectivamente, a ϵ_{ij} , γ_i , η_{ijk}^1 , χ_{ij}^s são

$$\sigma_{ij} = \left(E + \frac{4\mu}{3} \right) \delta_{ij} \epsilon_{mm} + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad i, j, m = 1, \dots, 3, \quad (3.74)$$

$$p_i = 2\mu l_0^2 \gamma_i, \quad i = 1, \dots, 3, \quad (3.75)$$

$$\tau_{ijk}^1 = 2\mu l_1^2 \eta_{ijk}^1, \quad i, j, k = 1, \dots, 3, \quad (3.76)$$

$$m_{ij}^s = 2\mu l_2^2 \chi_{ij}^s, \quad i, j = 1, \dots, 3, \quad (3.77)$$

onde E é o módulo de elasticidade e μ é o coeficiente de Poisson. Levando em consideração que, o campo de deslocamento para vigas é dado em (3.31), e que, substituindo em (3.69) e (3.74) e levando em consideração a energia dada em (3.68) tem-se

$$U = \left[\left(2\mu l_0^2 + \frac{120}{225} \mu l_1^2 + \mu l_2^2 \right) bh + E \frac{bh^3}{12} \right] \int_0^L w''^2 dx + \left[\frac{180}{225} \mu l_1^2 + 2\mu l_0^2 \right] \frac{bh^3}{12} \int_0^L w'''^2 dx. \quad (3.78)$$

Usando as notações

$$K_1 = \left[\left(2\mu l_0^2 + \frac{120}{225} \mu l_1^2 + \mu l_2^2 \right) bh + E \frac{bh^3}{12} \right], \quad (3.79)$$

e

$$K_2 = \left[\frac{180}{225} \mu l_1^2 + 2\mu l_0^2 \right] \frac{bh^3}{12}. \quad (3.80)$$

e usando o Princípio de Hamilton (RAO, 2007), tem-se que a equação de movimento para a viga, usando a teoria da deformação gradiente é dada por

$$bh\rho\ddot{w} + K_1 \partial_x^4 w - K_2 \partial_x^6 w + q = 0, \quad (3.81)$$

onde q é usada para definir o trabalho externo, (KONG *et al.*, 2009)

$$\delta V = \int_0^L q \delta w dx + [V \delta w] \Big|_0^L + [M \delta w'] \Big|_0^L + [M^h \delta w''] \Big|_0^L, \quad (3.82)$$

e a expressão para a energia cinética é

$$\delta T = \delta \left(\frac{1}{2} \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} \rho b h (\dot{w})^2 dt dx \right) = \int_0^L \rho b h \dot{w} \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} dx - \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} \rho b h \ddot{w} \delta w dt dx, \quad (3.83)$$

onde ρ é a densidade do material.

Na expressão (3.82), o termo M^h é designado, na literatura, como momento duplo (KONG *et al.*, 2009). Novamente, pelo princípio variacional, tem-se as condições de contorno

$$[V(L) - K_1 \partial_x^3 w(L) + K_2 \partial_x^5 w(L)] \delta w(L) - [V(0) - K_1 \partial_x^3 w(0) + K_2 \partial_x^5 w(0)] \delta w(0) = 0, \quad (3.84)$$

$$[M(L) - K_1 \partial_x^2 w(L) + K_2 \partial_x^4 w(L)] \delta \partial_x w(L) - [M(0) - K_1 \partial_x^2 w(0) + K_2 \partial_x^4 w(0)] \delta \partial_x w(0) = 0, \quad (3.85)$$

$$[M^h(L) + K_1 \partial_x^3 w(L)] \delta \partial_x^2 w(L) - [M^h(0) + K_1 \partial_x^3 w(0)] \delta \partial_x^2 w(0) = 0, \quad (3.86)$$

$$\left(\rho A \dot{w} \delta w \right) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (3.87)$$

As condições de contorno (3.84)-(3.87) devem ser avaliadas no contexto de cada caso. Na situação de viga engastada em uma extremidade e livre na outra, vemos que $w(0)$ e $w'(0)$ são prescritos e, portanto, a variação de ambos deve ser zero, enquanto que $w''(L)$ e $w'''(L)$ são prescritos, o que faz com que a variação destes termos também se anule. Mais ainda, segue de (3.84) e (3.85) que os termos $w^{(i)}(L)$, $i = 3, 5$ também são prescritos, valendo também para $w^{(i)}(L)$, $i = 2, 4$. É importante lembrar que a análise anterior leva em consideração que não há carregamentos externos concentrados na fronteira da viga, $M^h(L)$, $V(L)$, $V(0)$, $M(L)$, $M(0)$ e $M^h(0)$.

As autofunções de (3.81) são calculadas considerando separação de variáveis

$$w(x, t) = \varphi(x) T(t), \quad (3.88)$$

o que leva ao conjunto de equações

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0, \quad (3.89)$$

$$-\frac{K_2}{bh\rho} \frac{d^6 \varphi}{dx^6} + \frac{K_1}{bh\rho} \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - \omega^2 \varphi = 0. \quad (3.90)$$

A equação (3.89) representa a dinâmica temporal da viga, sendo que a resposta é

$$T(t) = T_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{T}_0}{\omega} \sin(\omega t). \quad (3.91)$$

Para calcular T_0 e \dot{T}_0 , é necessário utilizar as condições de contorno (3.84)-(3.86) para construir autofrequências ω_n juntamente com as autofunções $\varphi_n(x)$. Assim, dada a posição, $w(x, t = 0) = w_0$ e a velocidade inicial $\dot{w}(x, t = 0) = \dot{w}_0(x)$ de (3.81), as condições para cada modo normal são obtidas por

$$\begin{aligned} T_{0n} &= \int_0^l w_0(x) \varphi_n(x) dx, \\ \dot{T}_{0n} &= \int_0^l \dot{w}_0(x) \varphi_n(x) dx. \end{aligned} \quad (3.92)$$

O cálculo das autofrequências leva em consideração a seguinte equação

$$-s^6 + \frac{K_1}{K_2} s^4 - \frac{bh\rho\omega^2}{K_2} = 0. \quad (3.93)$$

O procedimento detalhado sobre como obter as soluções de (3.93) é abordado posteriormente. O primeiro ponto importante a observar é a influência do coeficiente de Poisson na rigidez da estrutura. Este fato fica explícito ao se determinar as raízes de (3.93). O segundo ponto é que (3.93) é realmente uma generalização para a viga clássica de Euler-Bernoulli, uma vez que se $l_i = 0, i = 0, \dots, 2$ em (3.79) e (3.80) obtém-se a equação clássica da viga.

Devido à importância da frequência natural ω , uma questão fundamental que se coloca é como, a partir dos parâmetros geométricos da estrutura, estimar o valor da frequência natural. A literatura apresenta duas formas para se obter esta resposta (RAO, 2007). Uma diz respeito a equação característica (3.93), que funciona bem em duas situações: quando os parâmetros geométricos não dependem de x e quando a equação característica é relativamente simples (de baixa ordem).

Entretanto, quando a ordem da equação característica é elevada, caso do presente trabalho (ordem do polinômio de grau 6) ou quando os parâmetros geométricos são variáveis, o método da equação característica é inviável. A outra possibilidade é a abordagem de Rayleigh, bastante recomendada para sistemas onde massa e rigidez variam com x ou quando o grau do polinômio que define a equação característica é elevado (RAO, 2007). A abordagem de Rayleigh é aproximada, mas com excelentes resultados (RAO, 2007).

Usando um ou outro método, obtém-se as autofrequências ω_n e autofunções φ_n de forma que a equação (3.84) seja automaticamente satisfeita. Sem perda de generalidade, podemos assumir que φ_n sejam ortonormais.

Conforme dito anteriormente, é de se esperar que as autofrequências ω_n sejam influenciados pelos parâmetros K_1 e K_2 dados em (3.79) e (3.80). Para o caso da teoria clássica, (YOUNIS, 2011) apresenta a expressão

$$\omega_n = 3.52 \sqrt{\frac{Ebh^3}{12ml^3}}, \quad (3.94)$$

para a frequência natural. Levando em consideração que $b = O(10^{-6})$, $h = O(10^{-6})$ e $l = O(10^{-6})$, enquanto $E = O(10^9)$, pode-se observar de (3.94) que $\omega_n = O(10^{1.5})$. Ainda no caso da teoria clássica com seção transversal variável, (RAO, 2010) apresentou uma fórmula semelhante para (3.94),

$$\omega = 1.5811 \sqrt{\frac{Eh^2}{l^4}}, \quad (3.95)$$

onde as expressões para a área e o momento de inércia são

$$A(x) = \frac{hx}{l}, \quad I(x) = \frac{1}{12} \left(\frac{hx}{l} \right)^3. \quad (3.96)$$

Fazendo uma análise dimensional similar a anterior, vê-se que $\omega = O(10^3)$.

Uma vez de posse das autofrequências e autofunções para (3.81), a metodologia para analisar a resposta do problema completo é similar ao caso clássico, ou seja, utiliza-se a integral de convolução para determinar a solução e, por um procedimento numérico de ponto fixo, obtém-se um valor aproximada para a resposta.

A análise da resposta para deslocamentos de microestruturas, levando em consideração a teoria de deformação gradiente tem se desdobrado em várias vertentes, desde a análise puramente de modelos, (ANSARI; GHOLAMI; SAHMANI, 2011; ANSARI *et al.*, 2013; ARJMAND, 2008; FLECK *et al.*, 1994), até comportamentos qualitativos da resposta como caos (NAYFEH, 2008; ARJMAND *et al.*, 2008), passando por controladores do campo elétrico (VATANKHAH *et al.*, 2013; VATANKHAH *et al.*, 2013; VAGIA, 2012a).

Sobre este último tema, (VATANKHAH; KARAMI; SALARIEH, 2015) apresentou o modelo

$$\rho b h \ddot{w}(x, t) + K_1 \partial_x^4 w(x, t) - K_2 \partial_x^6 w(x, t) = \frac{4 \epsilon b V(t)^2 \psi(x) w(x, t)}{2(d^4 - 2d^2 w(x, t)^2 + w(x, t)^4)}, \quad (3.97)$$

onde ϵ representa características dielétricas do meio; $\psi(x)$ é uma função usada para calibrar a força eletrostática ao longo de toda a microviga, que pode aproximar o efeito do formato do eletrodo. Seu valor é L quando o eletrodo cobre todo o comprimento da microviga. Uma função degrau é usada como função de peso no caso de pequenos eletrodos. E b , h são parâmetros geométricos da estrutura. Como forma de validar o modelo, a equação apresenta soluções aproximadas por

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \varphi_i(x), \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.98)$$

onde as funções $u_i, i = 1, \dots, n$ foram aproximadas por filtros de Kalman para garantir o controle do sistema, de acordo com (VATANKHAH; KARAMI; SALARIEH, 2015).

Um tema importante é a estabilidade de oscilações, que pode ser feito por meio da inserção de controladores tanto na equação que define a dinâmica do sistema, quanto nas condições de contorno (VATANKHAH *et al.*, 2013). O problema pode ser especificado da seguinte forma: considera-se o problema sujeito às seguintes condições de contorno

$$\left(K_1 w''' - K_2 w^v + F \right) \Big|_{x=0,L} = 0, \quad (3.99)$$

$$\left(K_1 w'' - K_2 w^{iv} + M^c \right) \Big|_{x=0,L} = 0, \quad (3.100)$$

$$\left(K_2 w''' + M^{n.c} \right) \Big|_{x=0,L} = 0. \quad (3.101)$$

As condições (3.99) fazem com que os autovalores da resposta (3.81) ficam parametrizados pelos termos F , M^c e $M^{n.c}$ que representam respectivamente a resultante das forças transversais devido aos esforços da tensão generalizada e os momento generalizados na seção transversal viga.

Em (ABDEL-RAHMAN; YOUNIS; NAYFEH, 2002) é apresentado o modelo de microvigas,

$$E' w_{xxxx} + \rho A \ddot{w} = \left[\frac{E' A}{2l} \int_0^l w_x^2 dx + N \right] w_{xx} + \frac{\epsilon b (V_p + v(t))^2}{2 (d - w)^2}, \quad (3.102)$$

onde x representa o comprimento da viga, t tempo, E' é o módulo de elasticidade ((ABDEL-RAHMAN; YOUNIS; NAYFEH, 2002)); ρ é a densidade do material; N é a força aplicada na direção axial; l e b são o comprimento e largura da placa; d representa distância do eletrodo que aplica uma força elétrica composta por uma fonte alternada $v(t)$ e V_p representa a tensão gerada nos eletrodos; e ϵ é a constante dielétrica meio. O dispositivo descrito pela equação (3.102) é usado como um atuador excitado eletricamente. Uma das questões que se coloca é como a frequência de oscilação w varia com respeito a força axial N . Esta análise é apresentada em (ABDEL-RAHMAN; YOUNIS; NAYFEH, 2002) para condições específicas de contorno. Outros problemas envolvendo o cálculo da deflexão w em função da frequência e como os parâmetros geométricos do modelo influenciam seu comportamento foram estudados em vários trabalhos. Problemas de controle podem ser vistos em (ARJMAND, 2008; ARJMAND *et al.*, 2008; CUNNINGHAM *et al.*, 1995; VAGIA, 2012b; VAGIA; NIKOLAKOPOULOS; TZES, 2008; VAGIA, 2012a; VATANKHAH *et al.*, 2014; VATANKHAH *et al.*, 2013; VATANKHAH; KARAMI; SALARIEH, 2015; WANG; ZHAO; ZHOU, 2010; YEN; LAN; KRAMAR, 2005; ZHANG, 2006; ZHANG; MENG; LI, 2006); análise do comportamento não linear de microestruturas baseadas em métodos analíticos e perturbativos são encontradas em (QIAN, 2012; REZAZADEH; TAHMASEBI; ZIAEI-RAD, 2009; VATANKHAH *et al.*, 2013); problemas envolvendo definição, modelagem e resposta da

microestrutura no contexto de deformação gradiente são tratados em (FLECK *et al.*, 1994; KAHROBAIYAN *et al.*, 2011; KAHROBAIYAN *et al.*, 2012; KONG *et al.*, 2009; LAM *et al.*, 2003; VATANKHAH, 2015; VATANKHAH *et al.*, 2014; VATANKHAH *et al.*, 2013; VATANKHAH; KARAMI; SALARIEH, 2015; VATANKHAH *et al.*, 2013; ZHAO *et al.*, 2012); análise de bifurcação da resposta em função dos parâmetros geométricos da microviga, mais especificamente a espessura são estudados em (MA; CLARKE, 1995; MOJAHEDI, 2010; MOJAHEDI; ZAND; AHMADIAN, 2010).

A contribuição neste trabalho apresenta uma metodologia de análise para mensurar os efeitos da rigidez no comportamento da resposta $w(x, t)$ no contexto da deformação gradiente.

Capítulo 4

TRABALHOS RELACIONADOS

Neste capítulo, são apresentados trabalhos correlatos ao tema, com foco em estudos e pesquisas sobre o comportamento de microvigas em sistemas microeletromecânicos com o uso da deformação gradiente.

Para a revisão da literatura, a metodologia aplicada foi a realização de um mapeamento sistemático (*mapping study*), de acordo com o método proposto por BAILEY *et al.* (2007) e Petersen *et al.* (2008), que consiste em buscar publicações nas bases de dados, utilizando a combinação de palavras-chave com operadores lógicos para selecionar os artigos aderentes ao assunto pesquisado.

As fontes de pesquisa utilizadas foram as seguintes: *Science Direct*, *IEEE Xplore*, *Scopus* e Portal de Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

As palavras-chave usadas foram: "*strain gradient*"AND "*electrostatic force*"AND "*microbeam*". Foram escolhidas estas expressões lógicas para pesquisar trabalhos que utilizam deformação gradiente para análise do comportamento de microvigas em sistemas microeletromecânicos.

Após a inserção das palavras-chave nas bases de dados, foram adicionados alguns filtros na pesquisa: foram selecionados trabalhos com idioma em português e inglês, oriundos de periódicos com revisão por pares, a partir do ano de 2000 e considerando a data limite de 2023. Então, fez-se uma classificação dos artigos pelo ano de publicação e pelos títulos, excluindo as repetições encontradas.

Em seguida, foi realizada a leitura dos títulos e resumos dos artigos obtidos nas pesquisas, a fim de excluir os trabalhos que não tinham ligação direta com o assunto em estudo. Os critérios utilizados para seleção dos artigos nesta etapa foram: a presença das palavras-chaves e o emprego delas no contexto desejado que, neste caso, tem por finalidade procurar referências sobre estudos de microvigas em sistemas microeletromecânicos com o uso da deformação gradiente e, por conseguinte, analisar

o panorama desta temática no período almejado. Assim, após a exclusão dos artigos repetidos entre as bases de dados e a realização da leitura do título e do resumo dos artigos encontrados, foram selecionados 10 (dez) referências aderentes ao tema pesquisado, os quais são apresentados a seguir.

[Han et al. \(2020\)](#) publicaram "Contribuições da Modelagem Gradiente na Análise de Microvigas para Sistemas Microeletromecânicos". Este trabalho explora a aplicação da teoria da deformação gradiente na modelagem de microvigas, oferecendo uma análise mais precisa do comportamento mecânico em escalas microscópicas.

[Nikbin, Rahimi e Allahyari \(2017\)](#) apresentaram "Abordagens Não Lineares na Simulação de Forças Eletroestáticas em Microvigas". Este estudo complementa a pesquisa anterior introduzindo um modelo não linear para representar forças eletroestáticas em microvigas, ampliando a compreensão das interações eletromecânicas.

[Bui et al. \(2018\)](#) divulgaram "Comparação de Modelos na Representação de Microeletromecânicos: Estudo de Caso sobre Rigidez e Escala". Este trabalho realiza uma análise comparativa entre modelos clássicos e modelos gradiente na representação de sistemas microeletromecânicos, examinando suas relações fundamentais.

[Granrut, Simon e Dias \(2019\)](#) disseminaram "Análise Numérica de Microvigas por Meio do Método de Galerkin". Investigando a aplicação do método de Galerkin, este trabalho apresenta uma abordagem numérica avançada na análise de microvigas, contribuindo para a eficácia do Método de Galerkin em sistemas microeletromecânicos.

[Hoang \(2019\)](#) lançou "Validação Experimental de Modelos Gradiente em MEMS". Focando na validação prática, este estudo realiza experimentos para confirmar a eficácia do modelo gradiente em representar sistemas microeletromecânicos em comparação a modelos clássicos.

[Kamboozia, Ziari e Behbahani \(2018\)](#) veicularam "Método de Galerkin Aplicado à Análise de Forças Eletrostáticas em Microvigas". Explorando o Método de Galerkin, este trabalho destaca sua aplicação na análise específica das forças eletroestáticas em microvigas, fornecendo insights valiosos sobre a interação eletromecânica.

[Khashman e Akpinar \(2017\)](#) explanaram "Influência da Complexidade Adicional na Modelagem de Microvigas: Estudo de Caso em Forças Eletroestáticas". Este estudo investiga os efeitos da introdução de complexidade adicional na representação de forças eletroestáticas em microvigas, contribuindo para a compreensão da dinâmica do sistema.

[Kravchuk e Landis \(2018\)](#) demonstraram "Aplicações Práticas de Modelagem Gradiente em Dispositivos MEMS". Enfatizando aplicações práticas, este trabalho explora como a modelagem gradiente pode ser implementada em dispositivos MEMS

reais, destacando seu potencial para inovações tecnológicas.

[Schwarzer et al. \(2019\)](#) exporam "Análise de Sensibilidade nas Relações entre Rigidez e Escala em Microvigas". Este estudo realiza uma análise de sensibilidade para avaliar como as relações entre rigidez e escala variam em diferentes condições, aprofundando a compreensão desses parâmetros críticos.

[Zhou et al. \(2020\)](#) mostraram "Integração de Modelos Gradiente em Simulações de Dispositivos Microeletromecânicos Complexos". Este trabalho aborda a integração prática de modelos gradiente em simulações de dispositivos microeletromecânicos complexos, proporcionando uma visão abrangente sobre sua aplicabilidade em contextos desafiadores.

A análise comparativa dos dez trabalhos mencionados acima revela uma abordagem abrangente e diversificada no estudo de microvigas e sistemas microeletromecânicos (MEMS). Enquanto alguns estudos, como [Han et al. \(2020\)](#), enfatizaram a aplicação da teoria da deformação gradiente para uma modelagem mais precisa das microvigas, outros, como [Hoang \(2019\)](#), expandiu essa abordagem ao incorporar modelos não lineares para representar forças eletroestáticas, introduzindo uma complexidade adicional. [Bui et al. \(2018\)](#) destacaram a importância da análise numérica por meio do método de Galerkin, enquanto [Granrut, Simon e Dias \(2019\)](#) realizaram uma comparação detalhada entre modelos clássicos e gradientes, explorando as relações fundamentais entre rigidez e escala. Por outro lado, [Hoang \(2019\)](#) concentrou-se na validação experimental, evidenciando a eficácia prática dos modelos propostos. [Kamboozia, Ziari e Behbahani \(2018\)](#) destacaram a aplicação específica do Método de Galerkin na análise de forças eletroestáticas, enquanto [Khashman e Akpinar \(2017\)](#) investigaram os efeitos da introdução de complexidade adicional. [Kravchuk e Landis \(2018\)](#) e [Schwarzer et al. \(2019\)](#) exploraram aplicações práticas e análises de sensibilidade, respectivamente, fornecendo insights valiosos em contextos industriais e teóricos. Por fim, [Zhou et al. \(2020\)](#) destacaram a integração de modelos gradiente em simulações de dispositivos MEMS complexos, refletindo uma abordagem holística para desafios tecnológicos contemporâneos. Essa comparação ressalta a variedade de contribuições e a interconexão entre diferentes aspectos da pesquisa, consolidando um panorama rico e multidimensional no campo de microeletromecânica e ciência dos materiais.

O presente trabalho, centrado na modelagem e análise estática e dinâmica de microvigas de Euler-Bernoulli com base na teoria da elasticidade para a deformação gradiente, destaca-se em um panorama de pesquisas relacionadas. Em comparação com os estudos anteriores, como [Han et al. \(2020\)](#) e [Hoang \(2019\)](#), a abordagem do presente trabalho vai além ao incorporar não apenas a teoria gradiente, mas também um modelo não linear para representar forças eletroestáticas, introduzindo uma

complexidade adicional à análise. Em consonância com [Bui et al. \(2018\)](#) e [Schwarzer et al. \(2019\)](#), utilizou-se o método de Galerkin para análise numérica, mas este estudo é diferenciado ao empregar o Método de Galerkin, conforme explorado por [Kamboozia, Ziari e Behbahani \(2018\)](#), na análise específica das forças eletroestáticas. Além disso, enquanto [Khashman e Akpinar \(2017\)](#) investigaram os efeitos da complexidade adicional, a presente pesquisa vai além, integrando esse modelo em simulações computacionais com o método de Runge-Kutta para sistemas não lineares, como evidenciado na literatura por [Granrut, Simon e Dias \(2019\)](#) e [Zhou et al. \(2020\)](#). A seção dedicada aos experimentos computacionais, similar à abordagem de [Hoang \(2019\)](#), fornece gráficos detalhados dos modos normais, coordenadas generalizadas e deformações para os casos clássico e gradiente, permitindo comparações abrangentes, como proposto por [Kravchuk e Landis \(2018\)](#). Nesse contexto, a contribuição significativa do presente trabalho reside na integração de diversas metodologias e na aplicação inovadora da teoria gradiente, proporcionando uma visão abrangente e avançada do comportamento de microvigas em sistemas microeletromecânicos, com implicações práticas e teóricas para o avanço contínuo da área.

Logo, este capítulo mostrou a metodologia empregada para busca de trabalhos relacionados a este. Posteriormente, foi apresentado um conjunto de dez trabalhos e as respectivas características de cada um, permitindo a verificação da relevância do tema abordado e proposição da principal contribuição deste trabalho.

Capítulo 5

MATERIAIS E MÉTODOS

Neste capítulo, são apresentadas as bases fundamentais que norteiam a condução da pesquisa, delineando os materiais utilizados, os procedimentos computacionais, e as técnicas analíticas empregadas. Este capítulo é essencial para compreender a metodologia empregada na investigação, fornecendo um guia detalhado sobre como os dados foram coletados, processados e interpretados. A escolha criteriosa dos materiais e métodos é crucial para a validade e confiabilidade dos resultados obtidos, sendo, portanto, fundamental para o desenvolvimento e a robustez da pesquisa conduzida neste trabalho.

5.1 Princípio Variacional de Hamilton

O princípio variacional de Hamilton é uma formulação matemática importante na teoria das variações e é amplamente utilizado na física teórica, especialmente na mecânica analítica. Ele é uma extensão do princípio de Hamilton, que, por sua vez, é uma generalização do princípio de Fermat da ótica.

O princípio variacional de Hamilton afirma que, para um sistema dinâmico clássico, a trajetória seguida pelo sistema entre dois pontos no espaço-tempo é aquela para a qual a ação é estacionária. A ação é definida como a integral do Lagrangiano ao longo do tempo, e o princípio implica que a variação da ação deve ser nula para a trajetória real do sistema.

Em termos mais simples, o princípio variacional de Hamilton expressa que a trajetória real de um sistema dinâmico é aquela que torna a ação estacionária, e isso fornece equações de movimento para o sistema. Esse princípio é fundamental na formulação da mecânica quântica e em outras teorias físicas.

5.2 Método de Galerkin

O método de Galerkin é uma técnica numérica utilizada para resolver equações diferenciais parciais (EDPs) e sistemas de equações diferenciais parciais. Ele faz parte da classe mais ampla de métodos de elementos finitos. O método é chamado assim em homenagem ao matemático russo Boris Galerkin, que contribuiu significativamente para o desenvolvimento dessa abordagem.

A ideia fundamental do método de Galerkin é aproximar a solução de uma EDP por meio de uma combinação linear de funções de base escolhidas de um espaço funcional apropriado. Estas funções de base são selecionadas de modo a satisfazer as condições de contorno da EDP. A escolha adequada das funções de base é crucial para obter uma solução precisa.

Vamos considerar uma EDP genérica como exemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (5.1)$$

O método de Galerkin expressa a solução aproximada u como uma combinação linear das funções de base $\phi_i(x, t)$:

$$u(x, t) \approx \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x, t) \quad (5.2)$$

onde N é o número de funções de base, c_i são coeficientes desconhecidos, e $\phi_i(x, t)$ são as funções de base. Essas funções de base são escolhidas de tal forma que a solução aproximada satisfaça a equação diferencial e as condições de contorno, e o método procura determinar os coeficientes c_i que minimizam o resíduo da equação.

O método de Galerkin é amplamente utilizado na análise numérica e na simulação de fenômenos físicos que podem ser modelados por Equações Diferenciais Parciais (EDPs). Ele fornece soluções aproximadas eficientes e muitas vezes convergentes para uma variedade de problemas.

5.3 Método da Quadratura de Gauss-Legendre

O Método da Quadratura de Gauss-Legendre é uma técnica numérica utilizada para realizar a integração numérica de funções. A ideia principal é aproximar a integral definida de uma função por uma soma ponderada dos valores da função em pontos específicos, chamados de nós de integração, multiplicados por pesos associados a esses pontos.

A Quadratura de Gauss-Legendre é especialmente eficaz para integrar funções em intervalos finitos, sendo mais precisa do que métodos de integração numérica mais simples, como a regra do ponto médio ou a regra dos trapézios.

A escolha dos nós de integração e dos pesos é crucial para obter uma boa precisão na aproximação da integral. No método de Gauss-Legendre, os nós são escolhidos como as raízes dos polinômios de Legendre, e os pesos são determinados de maneira a otimizar a precisão da aproximação.

A fórmula de quadratura de Gauss-Legendre para aproximar a integral definida de uma função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ é dada por:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{b-a}{2} x_i + \frac{a+b}{2}\right) \quad (5.3)$$

onde x_i são os nós de integração e w_i são os pesos associados a esses nós.

O método de Quadratura de Gauss-Legendre é amplamente utilizado em diversas áreas, como física, engenharia e ciências computacionais, para realizar integrações numéricas com alta precisão.

5.4 Método de Runge-Kutta

O método de Runge-Kutta é uma família de métodos numéricos utilizados para resolver Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). As equações diferenciais ordinárias descrevem a relação entre uma função desconhecida e suas derivadas em relação a uma variável independente.

O método de Runge-Kutta é particularmente eficaz na aproximação numérica de soluções para EDOs, oferecendo uma maior precisão em comparação com alguns métodos mais simples, como o método de Euler. A classe geral de métodos de Runge-Kutta é bastante versátil e inclui diversas variantes.

O método de Runge-Kutta é particularmente popular devido à sua precisão relativamente alta e simplicidade de implementação. Ele é usado em uma variedade de contextos, incluindo simulações físicas, modelagem matemática, dinâmica de sistemas e em problemas práticos que envolvem a resolução de EDOs.

A ideia fundamental do método é dividir o intervalo de integração em pequenos passos e usar uma combinação ponderada de gradientes em diferentes pontos dentro de cada passo para aproximar a mudança na função. Isso permite uma melhor precisão em comparação com métodos mais simples que usam apenas um gradiente no início do intervalo.

Ao escolher o tamanho do passo h , é necessário considerar um compromisso entre precisão e eficiência computacional. Um passo muito pequeno pode aumentar a precisão, mas também pode aumentar o custo computacional. Por outro lado, um passo muito grande pode resultar em uma aproximação imprecisa.

O método de Runge-Kutta de quarta ordem é apenas uma variante da família de métodos de Runge-Kutta, e há outras variantes com diferentes ordens de precisão. A escolha do método depende das características específicas do problema a ser resolvido e dos requisitos de precisão.

Em resumo, o método de Runge-Kutta é uma ferramenta valiosa e amplamente utilizada para resolver numericamente equações diferenciais ordinárias, desempenhando um papel essencial em diversas disciplinas científicas e de engenharia.

5.5 Software Octave

O Octave é um software de código aberto projetado para realizar cálculos numéricos e científicos. Ele fornece uma linguagem de programação de alto nível, semelhante ao MATLAB (Matrix Laboratory), e é especialmente útil para a análise numérica, processamento de sinais, álgebra linear e tarefas relacionadas à matemática computacional. O Octave suporta a manipulação de matrizes, a implementação de algoritmos e a criação de gráficos, tornando-o uma ferramenta valiosa para cientistas, engenheiros e pesquisadores que precisam realizar cálculos complexos e análises de dados.

Os códigos-fonte fundamentais para a realização desta tese foram meticulosamente elaborados utilizando o software Octave, conforme podem ser visualizados nos Apêndices. Como uma poderosa plataforma de computação numérica de código aberto, o Octave proporcionou um ambiente flexível e eficiente para a implementação de algoritmos, análise de dados e realização de simulações computacionais.

A escolha pelo Octave foi motivada pela sua semelhança com o MATLAB, facilitando a transição de códigos entre essas plataformas, além de sua vasta gama de funcionalidades matemáticas e estatísticas. A linguagem interpretada e dinamicamente tipada do Octave permitiu a expressão clara e concisa dos procedimentos implementados, enquanto sua interface interativa e a capacidade de criação de scripts foram essenciais para a condução eficiente das análises.

A comunidade ativa de desenvolvedores do Octave, aliada à sua licença de código aberto, contribuíram significativamente para a confiabilidade e flexibilidade dos códigos desenvolvidos, demonstrando a robustez dessa ferramenta no contexto da pesquisa científica.

5.6 Metodologia

Nesta linha de raciocínio, a tese adota uma abordagem metodológica focada na modelagem e análise do comportamento estático e dinâmico de microvigas en-

gastadas, considerando a teoria da elasticidade para a deformação gradiente. Além disso, introduz-se um modelo não linear para capturar as forças eletroestáticas resultantes do deslocamento da microviga, acrescentando uma camada de complexidade ao problema em questão. O trabalho busca assim aprofundar a compreensão desses sistemas, explorando a interação entre a teoria da elasticidade e as forças eletroestáticas em microestruturas, contribuindo para avanços significativos no entendimento desses fenômenos específicos.

A escolha da abordagem teórica, fundamentada no princípio variacional de Hamilton, proporciona uma estrutura sólida para a obtenção da equação diferencial parcial da deformação e das condições de contorno. A aplicação do método de separação de variáveis resulta em uma equação diferencial ordinária de sexta ordem para os modos normais, cuja análise da equação característica categoriza as raízes, determinando autofrequências e autofunções normalizadas.

O emprego do método de Galerkin e da Quadratura de Gauss-Legendre, em conjunto com quinze pontos para integração, permite a derivação de uma equação diferencial de segunda ordem não linear para as coordenadas generalizadas, considerando a influência da força eletrostática. A abordagem numérica, utilizando o método de Runge-Kutta para sistemas não lineares com cinco modos normais, visa fornecer uma solução robusta para o problema em questão.

A seção dedicada aos experimentos computacionais, apresentando gráficos detalhados dos modos normais, das coordenadas generalizadas e da deformação, fornece uma visualização clara e precisa dos resultados obtidos. As comparações realizadas entre a metodologia proposta e a teoria clássica evidenciam as relações entre a rigidez e a escala da estrutura para ambos os casos, contribuindo significativamente para o entendimento desses sistemas.

Dessa forma, verificou-se que o modelo gradiente, ao ser comparado ao modelo clássico, oferece uma representação satisfatória de sistemas microeletromecânicos, como respaldado por resultados experimentais disponíveis na literatura. Essa contribuição não apenas expande o conhecimento teórico, mas também tem implicações práticas na melhoria e otimização de estruturas microeletromecânicas.

Capítulo 6

DESENVOLVIMENTO

Neste capítulo, foi realizado o cálculo detalhado das autofrequências. Na seção (6.1), uma série de manipulações algébricas são conduzidas para obter uma expressão analítica de ω . Simulações numéricas são conduzidas para quantificar valores e, ao mesmo tempo, comparar os resultados com outros valores da literatura e com resultados da teoria clássica.

Desse modo, o problema da microviga pode ser modelado como um problema de valor de contorno. O sistema considerado é uma microviga engastada em uma extremidade e livre na outra com os seguintes parâmetros: área da seção transversal constante, denotada por A , densidade ρ , comprimento L espessura h , conforme pode ser visto na Figura 6.1. A equação diferencial parcial que modela o deslocamento da viga, bem como as condições de contorno são obtidas usando o princípio de Hamilton juntamente com a teoria de deformação gradiente.

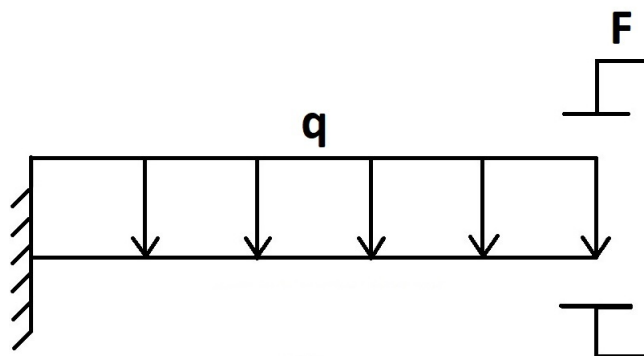


Figura 6.1 – Esquema da microviga. Fonte: Autoria própria.

6.1 Cálculo das autofrequências

A análise se inicia pela função da energia potencial elástica (3.78)

$$U = K_1 \int_0^L w'^2 dx + K_2 \int_0^L w''^2 dx, \quad (6.1)$$

onde $K_i, i = 1, 2$ dadas por

$$K_1 = \left(2l_0^2 + \frac{120}{225} l_1^2 + l_2^2 \right) bh\mu + E \frac{bh^3}{12}, \quad (6.2)$$

$$K_2 = \left(\frac{180}{225} l_1^2 + 2l_0^2 \right) \mu \frac{bh^3}{12} \quad (6.3)$$

Assume-se a solução harmônica, com frequência $\omega = \alpha$, ou seja,

$$w(x, t) = \varphi(x) e^{i\alpha t}. \quad (6.4)$$

Substituindo (6.4) em (3.81), com $q = 0$ obtém-se

$$K_1 \varphi(x)^{(4)} - K_2 \varphi(x)^{(6)} - \rho bh\alpha^2 \varphi(x) = 0; \quad (6.5)$$

Como pode ser visto em (6.5), a separação de variáveis levou a um problema de autovalores. No presente caso, em que os parâmetros que caracterizam o material são todos concentrados, é possível mostrar que

$$H(\varphi) = K_1 \frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} - K_2 \frac{d^6 \varphi(x)}{dx^6}, \quad (6.6)$$

é um operador autoadjunto se as seguintes condições de contorno forem assumidas (RAO, 2007)^{1,2}

$$w(0, t) = 0, \quad (6.7)$$

$$w'(0, t) = 0, \quad (6.8)$$

$$w''(L, t) = 0, \quad (6.9)$$

$$w'''(0, t) = 0, \quad (6.10)$$

$$w^{iv}(L, t) = 0, \quad (6.11)$$

$$K_1 w'''(L, t) - K_2 w^v(L) = 0, \quad (6.12)$$

As condições de contorno dadas em (6.7)-(6.12) representam a viga do tipo engastada. A solução de (6.5) é da forma

$$\varphi(x) = e^{rx}, \quad (6.13)$$

¹ O problema de autovalores (6.5) é autoadjunto se $\int_0^L u_1 H u_2 dx = \int_0^L H u_1 u_2 dx$

² Todos os problemas usuais de condições de contorno em engenharia de estruturas levam a operadores autoadjuntos

onde r são as raízes de

$$K_2 r^6 - K_1 r^4 + \rho A \alpha^2 = 0, \quad (6.14)$$

Para determinar as faixas de valores para β e as respectivas características das soluções para (6.14), primeiramente, analisou-se o problema estático, em que a energia cinética é nula em (3.81). Assim, a equação da deformação se reduz a

$$K_1 \partial_x^4 w - K_2 \partial_x^6 w + q = 0, \quad (6.15)$$

Para $q = 0$, a equação característica para o problema é da forma

$$K_2 r^6 - K_1 r^4 = 0, \quad (6.16)$$

cujas raízes para o caso clássico, onde $K_2 = 0$, é $r = 0$ com multiplicidade quatro, e para o caso gradiente, onde $K_2 \neq 0$, tem-se mais duas raízes $r = \pm \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}$. Assim, o deslocamento $w(x)$ para os casos clássico e gradiente são da forma

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 \quad (6.17)$$

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{-\sqrt{\frac{K_1}{K_2}} x} + C_6 e^{\sqrt{\frac{K_1}{K_2}} x}. \quad (6.18)$$

Considerando uma viga engastada de comprimento L sujeito a uma força estática p concentrada na extremidade da viga, tem-se as condições de contorno

$$w(0, t) = 0, \quad (6.19)$$

$$w'(0, t) = 0, \quad (6.20)$$

$$w''(L, t) = 0, \quad (6.21)$$

$$EI w'''(L, t) = -P \quad (6.22)$$

para o caso clássico e

$$w(0, t) = 0, \quad (6.23)$$

$$w'(0, t) = 0, \quad (6.24)$$

$$w''(L, t) = 0, \quad (6.25)$$

$$w'''(0, t) = 0, \quad (6.26)$$

$$w^{iv}(L, t) = 0, \quad (6.27)$$

$$K_1 w'''(L, t) - K_2 w^v(L) = -P \quad (6.28)$$

para o caso gradiente.

Usando as condições de contorno (6.19)-(6.22) na equação (6.17) e (6.23)-(6.28) na equação (6.18), determinamos as constantes C_i para os casos clássico e gradiente, respectivamente, cuja deformação fica na forma

$$w(x) = \frac{PLx^2}{2EI} - \frac{Px^3}{6EI} \quad (6.29)$$

para o caso clássico com $0 \leq x \leq L$. Para o caso gradiente, obtém-se (6.18) com

$$C_1 = (e^{-2rL} - 1)C_5, \quad C_2 = r(e^{-2rL} + 1)C_5, \quad C_3 = -\frac{r^3L}{2}(e^{-2rL} + 1)C_5$$

$$C_4 = \frac{r^3}{6}(e^{-2rL} + 1)C_5, \quad C_6 = -e^{-2rL}C_5$$

$$C_5 \left(K_1 r^3 (1 + e^{-2rL} - 2e^{-rL}) + 2K_2 r^5 e^{-rL} \right) = -P$$

As Figuras (6.2a)-(6.2d) mostram o comportamento do deslocamento para o caso estático da microviga engastada, adotando $L = 20h$, $l = 17.6\mu\text{m}$ e variações da espessura h . Observa-se que o caso gradiente obtém uma deformação maior que o caso clássico para valores menores de h , e coincide para valores maiores, como previsto nos estudos experimentais citados na literatura.

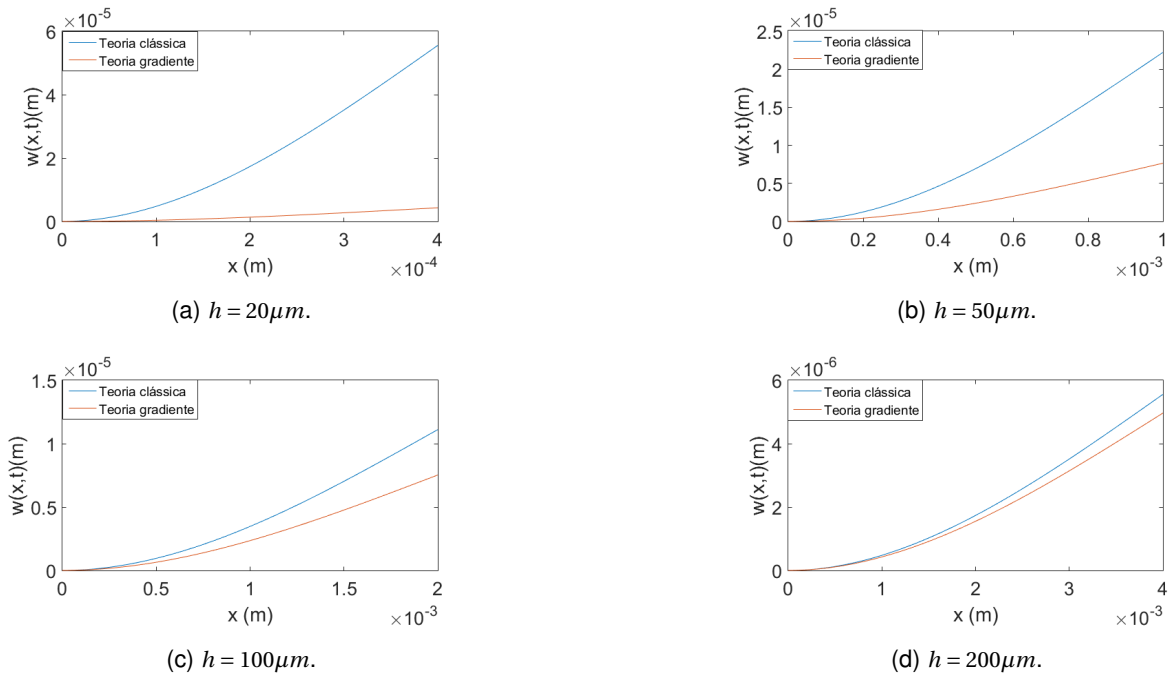


Figura 6.2 – Comparação do deslocamento entre as teorias clássica e gradiente adotando diferentes valores de h . Fonte: Autoria própria.

Supondo α real positivo, e fazendo $r^2 = \beta$, obtém-se um polinômio de grau ímpar (3), que sempre possui raiz real³

$$K_2\beta^3 - K_1\beta^2 + \rho A\alpha^2 = 0, \quad (6.30)$$

³ Um resultado de análise funcional (RAO, 2007).

Em (6.30), tem-se $\rho A\alpha^2 > 0$, conseqüentemente, possui uma raiz negativa, digamos $\beta = -\beta_1^2$, com $\beta_1 \in \mathbb{R}$, positivo. Assim, $r = \pm i\beta_1$ são raízes de (6.14) e β_1 satisfaz a equação

$$K_2\beta_1^6 + K_1\beta_1^4 = \rho A\alpha^2 \quad (6.31)$$

Seja $f(\beta) = K_2\beta^3 - K_1\beta^2 + \rho A\alpha^2$, derivando, obtém-se $f'(\beta) = 3K_2\beta^2 - 2K_1\beta$. Assim, os pontos críticos de f são $\beta_c = 0$ e $\beta_c = \frac{2K_1}{3K_2}$, com valores críticos (Figura 6.4)

$$f(0) = \rho A\alpha^2 \quad (6.32)$$

$$f\left(\frac{2K_1}{3K_2}\right) = -\frac{4K_1^3}{27K_2^2} + K_2\beta_1^6 + K_1\beta_1^4 \quad (6.33)$$

Desta forma, para determinar as características das outras soluções de (6.14), estudou-se o valor crítico (6.33) em função de β_1 , conforme pode ser visto na Figura (6.3).

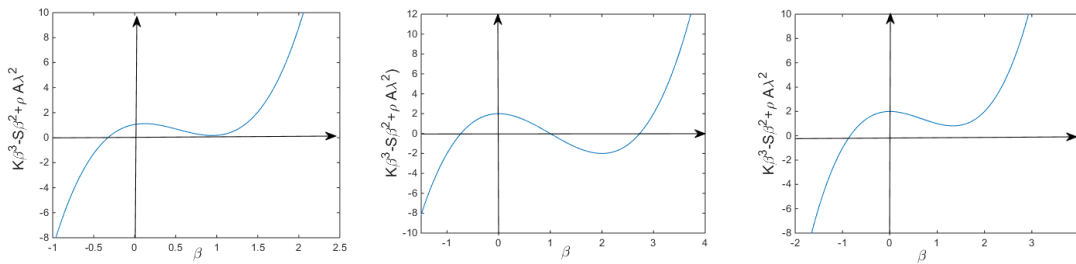


Figura 6.3 – Casos possíveis para a função cúbica. Fonte: Autoria própria.

Para o caso de valor crítico nulo, tem-se a condição para β_1

$$-\frac{4K_1^3}{27K_2^2} + K_2\beta_1^6 + K_1\beta_1^4 = 0. \quad (6.34)$$

Fatorando a equação (6.30) por $(\beta + \beta_1^2)$, obtém-se

$$(\beta + \beta_1^2)(K_2\beta^2 - (K_2\beta_1^2 + K_1)\beta + (K_2\beta_1^4 + K_1\beta_1^2)) = 0. \quad (6.35)$$

Assim, as outras raízes satisfazem a equação abaixo

$$K_2\beta^2 - (K_2\beta_1^2 + K_1)\beta + (K_2\beta_1^4 + K_1\beta_1^2) = 0. \quad (6.36)$$

Para que as raízes de (6.36) tenha multiplicidade dois, ou seja,

$$\beta_2^2 = \beta_3^2 = \frac{2K_1}{3K_2}, \quad (6.37)$$

é necessário e suficiente que o delta seja nulo, isto é,

$$(K_2\beta_1^2 + K_1)^2 - 4K_2(K_2\beta_1^4 + K_1\beta_1^2) = 0.$$

Simplificando, tem-se

$$(K_2\beta_1^2 + K_1)(K_1 - 3K_2\beta_1^2) = 0. \quad (6.38)$$

Consequentemente, $\beta_1^2 = \frac{K_1}{3K_2}$, o que torna o valor crítico nulo. Segue de (6.31) que

$$\alpha^2 = \frac{4K_1^3}{27K_2^2\rho bh}. \quad (6.39)$$

De acordo com as definições K_1 e K_2 em (6.2) e (6.3), a razão $\frac{K_1}{K_2}$ não depende de b , mas depende de h , conforme pode ser visto na Tabela (6.1).

Tabela 6.1 – Valores de bifurcação $r = \pm\beta_1 i, r = \pm\beta_2$, $L = 20h$. Fonte: Autoria própria.

$h(\mu m)$	$\beta_1 = \sqrt{\frac{K_1}{3K_2}}$	$\beta_2 = \sqrt{\frac{2K_1}{3K_2}}$	$\beta_1 L$	$\alpha(MHz)$
20	116960	165407	46.784	393.001
50	55496	78483	55.496	104.955
100	39567	55956	79.134	76.076
150	35849	50698	107.546	84.871
200	34452	48723	137.811	100.449
300	33419	47262	200.519	137.524

Portanto, as soluções de (6.14) são as raízes duplas $r = \pm\beta_2$ e $r = \pm i\beta_1$. Assim, o modo normal $\varphi(x)$ para este caso é da forma

$$\varphi(x) = C_1 \sin(\beta_1 x) + C_2 \cos(\beta_1 x) + C_3 \sinh(\beta_2 x) + C_4 \cosh(\beta_2 x) + C_5 x \sinh(\beta_2 x) + C_6 x \cosh(\beta_2 x), \quad (6.40)$$

onde as constantes $C_i, i = 1, \dots, 6$ são incógnitas a serem determinadas para os parâmetros β_1, β_2 e β_3 calculados acima.

Este modo normal $\varphi(x)$ é nulo para estes valores de β . De fato, obtém-se, das condições de contorno (6.7)-(6.12), o sistema de equações que deve ser resolvido para as constantes C_i

$$\Lambda(\beta_1)C = 0 \quad (6.41)$$

A matriz $\Lambda = (\Lambda_{ij}), i = 1 : 6, j = 1 : 6$, é dada por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & 0 & 1 \\ -\beta_1^2 \sin \beta_1 L & -\beta_1^2 \cos \beta_1 L & \beta_2^2 \sinh \beta_2 L & \beta_2^2 \cosh \beta_2 L & \Lambda_{35} & \Lambda_{36} \\ -\beta_1^3 & 0 & \beta_2^3 & 0 & 0 & 3\beta_2^2 \\ \beta_1^4 \sin \beta_1 L & \beta_1^4 \cos \beta_1 L & \beta_2^4 \sinh \beta_2 L & \beta_2^4 \cosh \beta_2 L & \Lambda_{55} & \Lambda_{56} \\ -\beta_4 \cos \beta_1 L & \beta_4 \sin \beta_1 L & \beta_5 \cosh \beta_2 L & \beta_5 \sinh \beta_2 L & \Lambda_{65} & \Lambda_{66} \end{bmatrix}. \quad (6.42)$$

onde

$$\Lambda_{35} = 2\beta_2 \cosh \beta_2 L + L\beta_2^2 \sinh \beta_2 L, \quad \Lambda_{36} = 2\beta_2 \sinh \beta_2 L + L\beta_2^2 \cosh \beta_2 L$$

$$\Lambda_{55} = 4\beta_2^3 \cosh \beta_2 L + L\beta_2^4 \sinh \beta_2 L, \quad \Lambda_{56} = 4\beta_2^3 \sinh \beta_2 L + L\beta_2^4 \cosh \beta_2 L$$

$$\Lambda_{65} = \beta_{65} \sinh \beta_2 L + \beta_5 \cosh \beta_2 L, \quad \Lambda_{66} = \beta_{65} \cosh \beta_2 L + \beta_5 \sinh \beta_2 L$$

$$\beta_4 = (K_1\beta_1^3 + K_2\beta_1^5), \quad \beta_5 = (K_1\beta_2^3 - K_2\beta_2^5), \quad \beta_{65} = (3K_1\beta_2^2 - 5K_2\beta_2^4)$$

com

$$\det(\Lambda(\beta_1)) = -5.147382250910790e + 124.$$

Agora vamos estudar as raízes da equação cúbica quando o valor crítico é negativo. tem-se que

$$f\left(\frac{2K_1}{3K_2}\right) = -\frac{4K_1^3}{27K_2^2} + K_2\beta_1^6 + K_1\beta_1^4 < 0, \quad (6.43)$$

o que implica que $\beta_1^2 < \frac{K_1}{3K_2}$; neste caso, tem-se duas raízes positivas e distintas

$$\beta_2^2 = \frac{\left(\frac{K_1}{K_2} + \beta_1^2\right) - \sqrt{\left(\frac{K_1}{K_2} + \beta_1^2\right)\left(\frac{K_1}{K_2} - 3\beta_1^2\right)}}{2} \quad (6.44)$$

e

$$\beta_3^2 = \frac{\left(\frac{K_1}{K_2} + \beta_1^2\right) + \sqrt{\left(\frac{K_1}{K_2} + \beta_1^2\right)\left(\frac{K_1}{K_2} - 3\beta_1^2\right)}}{2} \quad (6.45)$$

para (6.30), que satisfazem a equação

$$K_2\beta^2 - (K_2\beta_1^2 + K_1)\beta + (K_2\beta_1^4 + K_1\beta_1^2) = 0. \quad (6.46)$$

Consequentemente, $r = \pm\beta_2$ e $r = \pm\beta_3$ são as demais soluções de (6.14). Assim, a solução geral de (6.5) é dada por

$$\varphi(x) = C_1 \sin(\beta_1 x) + C_2 \cos(\beta_1 x) + C_3 \sinh(\beta_2 x) + C_4 \cosh(\beta_2 x) + C_5 \sinh(\beta_3 x) + C_6 \cosh(\beta_3 x), \quad (6.47)$$

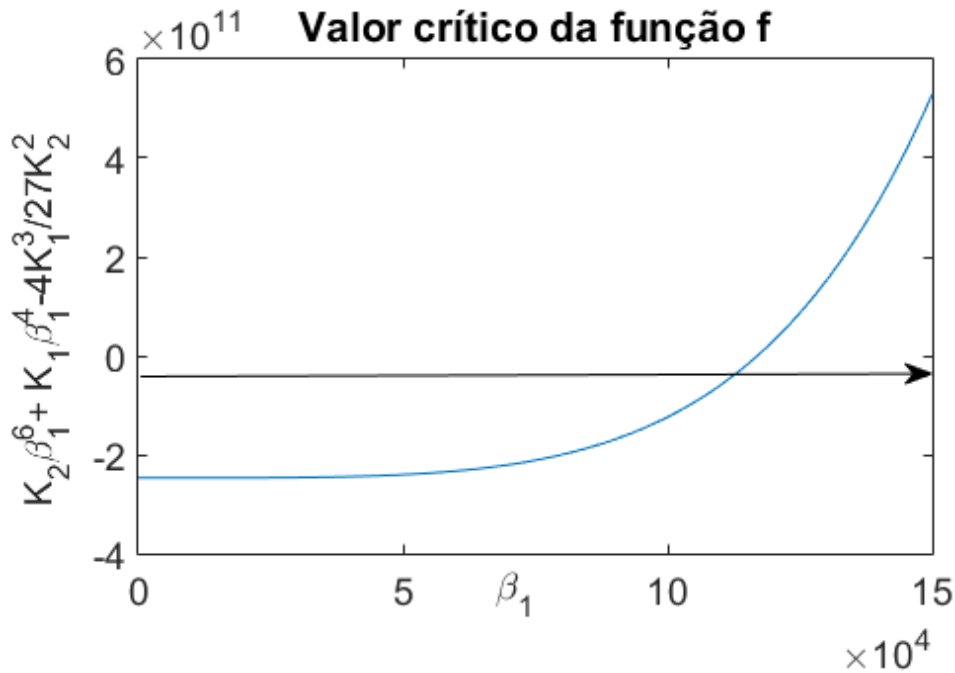


Figura 6.4 – Valores críticos para os parâmetros considerados para a microviga. Fonte: Autoria própria.

onde as constantes $C_i, i = 1, \dots, 6$ e os parâmetros β_1, β_2 e β_3 são incógnitas a serem determinadas que se relacionam da seguinte forma

$$K_1\beta_1^4 + K_2\beta_1^6 = \rho A\lambda^2 \quad (6.48)$$

$$K_1\beta_2^4 - K_2\beta_2^6 = \rho A\lambda^2 \quad (6.49)$$

$$K_1\beta_3^4 - K_2\beta_3^6 = \rho A\lambda^2 \quad (6.50)$$

Obtem-se, das condições de contorno (6.7)-(6.12), o sistema de equações que deve ser resolvido para as constantes C_i

$$\Lambda(\beta_1)C = 0 \quad (6.51)$$

A matriz $\Lambda = (\Lambda_{ij}), i = 1 : 6, j = 1 : 6$, é dada por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0 \\ -\beta_1^2 \sin \beta_1 L & -\beta_1^2 \cos \beta_1 L & \beta_2^2 \sinh \beta_2 L & \beta_2^2 \cosh \beta_2 L & \beta_3^2 \sinh \beta_3 L & \beta_3^2 \cosh \beta_3 L \\ -\beta_1^3 & 0 & \beta_2^3 & 0 & \beta_3^3 & 0 \\ \beta_1^4 \sin \beta_1 L & \beta_1^4 \cos \beta_1 L & \beta_2^4 \sinh \beta_2 L & \beta_2^4 \cosh \beta_2 L & \beta_3^4 \sinh \beta_3 L & \beta_3^4 \cosh \beta_3 L \\ -\beta_4 \cos \beta_1 L & \beta_4 \sin \beta_1 L & \beta_5 \cosh \beta_2 L & \beta_5 \sinh \beta_2 L & \beta_6 \cosh \beta_3 L & \beta_6 \sinh \beta_3 L \end{bmatrix}. \quad (6.52)$$

onde

$$\beta_4 = (K_1\beta_1^3 + K_2\beta_1^5), \beta_5 = (K_1\beta_2^3 - K_2\beta_2^5), \beta_6 = (K_1\beta_3^3 - K_2\beta_3^5)$$

Segue-se de (6.48) – (6.50) que

$$\beta_4\beta_1 = \beta_5\beta_2 = \beta_6\beta_3 = \rho A\lambda^2.$$

Observando (6.44) – (6.45) concluímos que a solução da equação $\det(\Lambda) = 0$ e consequentemente a solução não nula de (6.5) depende da razão $\frac{K_1}{K_2}$.

Ao usar as condições de contorno (6.7), (6.8) e (6.10) na solução da equação (6.47), obtém-se

$$C_6 = -C_2 - C_4, \quad (6.53)$$

$$C_3 = \beta_7 C_1, \quad (6.54)$$

$$C_5 = \beta_8 C_1. \quad (6.55)$$

onde

$$\beta_7 = \frac{\beta_1^3 + \beta_1 \beta_3^2}{\beta_2^3 - \beta_2 \beta_3^2}, \quad \beta_8 = \frac{\beta_1^3 + \beta_1 \beta_2^2}{\beta_3^3 - \beta_3 \beta_2^2} \quad (6.56)$$

De modo que a solução fica na forma

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & C_1 (\sin(\beta_1 x) + \beta_7 \sinh(\beta_2 x) + \beta_8 \sinh(\beta_3 x)) \\ & + C_2 (\cos(\beta_1 x) - \cosh(\beta_3 x)) + C_4 (\cosh(\beta_2 x) - \cosh(\beta_3 x)). \end{aligned} \quad (6.57)$$

Em seguida, ao usar as condições de contorno (6.9), (6.11) e (6.12) na equação (6.57), resultam em

$$C_1 (-\beta_1^2 W_1 + \beta_7 \beta_2^2 W_3 + \beta_8 \beta_3^2 W_5) + C_2 (-\beta_1^2 W_2 - \beta_3^2 W_6) + C_4 (\beta_2^2 W_4 - \beta_3^2 W_6) = 0, \quad (6.58)$$

$$C_1 (\beta_1^4 W_1 + \beta_7 \beta_2^4 W_3 + \beta_8 \beta_3^4 W_5) + C_2 (\beta_1^4 W_2 - \beta_3^4 W_6) + C_4 (\beta_2^4 W_4 - \beta_3^4 W_6) = 0, \quad (6.59)$$

$$C_1 (-\beta_4 W_2 + \beta_7 \beta_5 W_4 + \beta_8 \beta_6 W_6) + C_2 (\beta_4 W_1 - \beta_6 W_5) + C_4 (\beta_5 W_3 - \beta_6 W_5) = 0, \quad (6.60)$$

onde

$$W_1 = \sin(\beta_1 L), \quad W_2 = \cos(\beta_1 L), \quad W_3 = \sinh(\beta_2 L), \quad (6.61)$$

$$W_4 = \cosh(\beta_2 L), \quad W_5 = \sinh(\beta_3 L), \quad W_6 = \cosh(\beta_3 L), \quad (6.62)$$

$$\beta_4 = (K_1 \beta_1^3 + K_2 \beta_1^5), \quad \beta_5 = (K_1 \beta_2^3 - K_2 \beta_2^5), \quad \beta_6 = (K_1 \beta_3^3 - K_2 \beta_3^5). \quad (6.63)$$

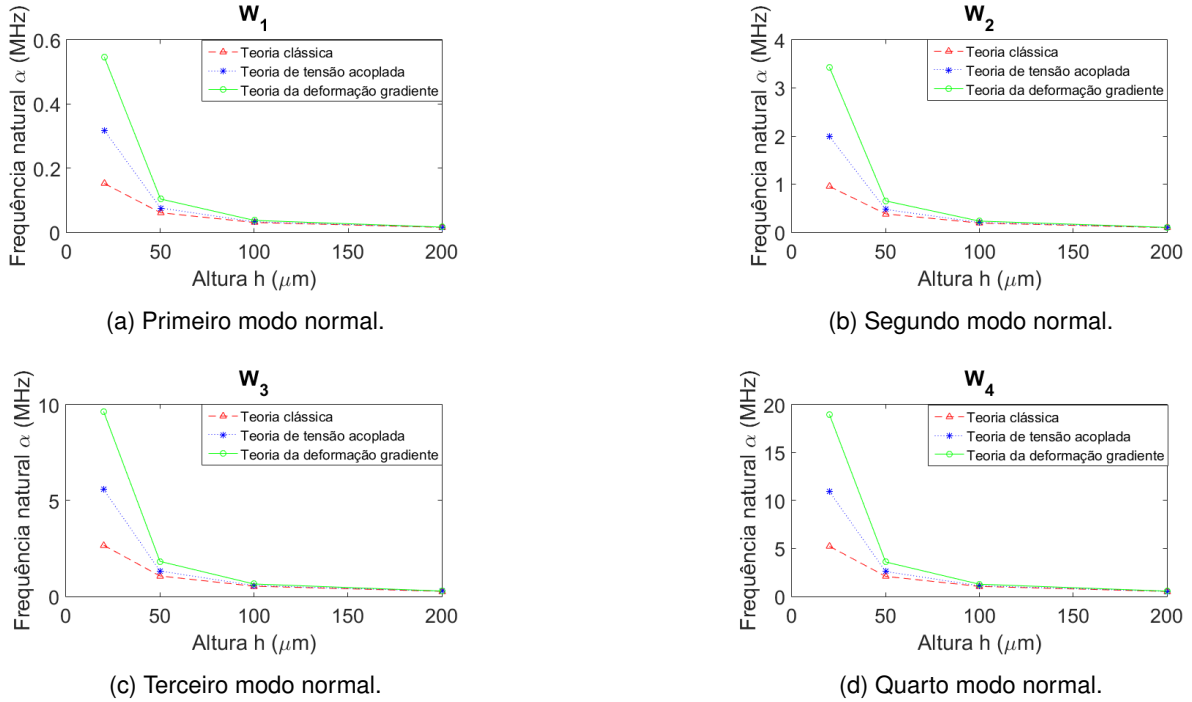


Figura 6.5 – As quatro frequências naturais da microviga engastada usando as teorias clássica, da tensão acoplada e da deformação gradiente. Fonte: Autoria própria.

Usando as equações (6.58)-(6.59), podemos obter C_1 e C_2 em função de C_4 ,

$$C_1(-\beta_1^2 W_1 + \beta_7 \beta_2^2 W_3 + \beta_8 \beta_3^2 W_5) + C_2(-\beta_1^2 W_2 - \beta_3^2 W_6) = C_4(\beta_3^2 W_6 - \beta_2^2 W_4) \quad (6.64)$$

$$C_1(\beta_1^4 W_1 + \beta_7 \beta_2^4 W_3 + \beta_8 \beta_3^4 W_5) + C_2(\beta_1^4 W_2 - \beta_3^4 W_6) = C_4(\beta_3^4 W_6 - \beta_2^4 W_4) \quad (6.65)$$

Pela regra de Cramer

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} C_4, \quad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} C_4 \quad (6.66)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta &= (\beta_1^4 \beta_3^2 + \beta_2^2 \beta_3^4) \sin(\beta_1 L) \cosh(\beta_3 L) + \beta_7 (\beta_1^4 \beta_2^2 + \beta_1^2 \beta_2^4) \cos(\beta_1 L) \sinh(\beta_2 L) \\ &+ \beta_7 (\beta_2^4 \beta_3^2 - \beta_2^2 \beta_3^4) \sinh(\beta_2 L) \cosh(\beta_3 L) + \beta_8 (\beta_1^4 \beta_3^2 + \beta_1^2 \beta_3^4) \cos(\beta_1 L) \sinh(\beta_3 L) \end{aligned} \quad (6.67)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (\beta_1^4 \beta_3^2 + \beta_1^2 \beta_3^4) \cos(\beta_1 L) \cosh(\beta_3 L) - (\beta_1^4 \beta_2^2 + \beta_1^2 \beta_2^4) \cos(\beta_1 L) \cosh(\beta_2 L) \\ &- (\beta_2^4 \beta_3^2 - \beta_2^2 \beta_3^4) \cosh(\beta_2 L) \cosh(\beta_3 L), \end{aligned} \quad (6.68)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \beta_1^4 \beta_2^2 + \beta_1^2 \beta_2^4) \sin(\beta_1 L) \cosh(\beta_2 L) - (\beta_1^4 \beta_3^2 + \beta_1^2 \beta_3^4) \sin(\beta_1 L) \cosh(\beta_3 L) \\ &- \beta_7 (\beta_2^4 \beta_3^2 - \beta_2^2 \beta_3^4) \sinh(\beta_2 L) \cosh(\beta_3 L) - \beta_8 (\beta_2^4 \beta_3^2 - \beta_2^2 \beta_3^4) \cosh(\beta_2 L) \sinh(\beta_3 L) \end{aligned} \quad (6.69)$$

Substituindo C_1 e C_2 na equação (6.60), obtém-se

$$C_4 \left(\frac{\Delta_1}{\Delta} (-\beta_4 W_2 + \beta_7 \beta_5 W_4 + \beta_8 \beta_6 W_6) + \frac{\Delta_2}{\Delta} (\beta_4 W_1 - \beta_6 W_5) + (\beta_5 W_3 - \beta_6 W_5) \right) = 0 \quad (6.70)$$

Impondo a condição de existência de soluções não triviais, os valores positivos β_j , $j = 1, 2, 3$ devem satisfazer a condição

$$\frac{\Delta_1}{\Delta}(-\beta_4 W_2 + \beta_7 \beta_5 W_4 + \beta_8 \beta_6 W_6) + \frac{\Delta_2}{\Delta}(\beta_4 W_1 - \beta_6 W_5) + (\beta_5 W_3 - \beta_6 W_5) = 0 \quad (6.71)$$

A equação (6.71) gera as raízes β_{1n} , que são aproximadamente

$$\beta_{1n} L = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad (6.72)$$

e os autovalores $\rho A \alpha_n^2$ com

$$\alpha_n^2 = \frac{K_2}{\rho A} \beta_{1n}^6 + \frac{K_1}{\rho A} \beta_{1n}^4, \quad n = 1, \dots, \infty, \quad (6.73)$$

apresentados na Tabela (6.2).

Tabela 6.2 – Tabela das raízes características caso $r = \pm\beta_1 i$, $r = \pm\beta_2$ e $r = \pm\beta_3$, $L = 20h$, $h = 20\mu m$.
Fonte: Autoria própria.

n	$\frac{(2n-1)\pi}{2}$	β_1	$\beta_3 L$	$\beta_2 L$	$\beta_1 L$	$\alpha(MHz)$	$\alpha_c(MHz)$
1	1.5708	4687	81.0328	1.8753	1.8748	0.5467	0.152
2	4.7124	11739	81.032	4.703	4.6956	3.434	0.954
3	7.8540	19646	81.029	7.8956	7.858	9.647	2.671
4	10.995	27505	81.0188	11.104	11.0020	18.994	5.235
5	14.137	35368	80.994	14.368	14.1472	31.592	8.654
6	17.278	43231	80.944	17.701	17.292	47.544	12.928
7	20.420	51094	80.856	21.1235	20.4376	66.984	18.056
8	23.561	58957	80.711	24.658	23.582	90.064	24.039
9	26.703	66819	80.484	28.335	26.727	116.968	30.877
10	29.845	74681	80.139	32.192	29.872	147.888	38.569
11	32.986	82541	79.624	36.282	33.016	183.034	47.117
12	36.128	90400	78.855	40.690	36.160	222.644	56.519
13	39.269	98259	77.684	45.565	39.303	266.972	66.776
14	42.411	106116	75.780	51.238	42.446	316.267	77.887
15	45.553	113973	71.891	58.960	45.589	370.817	89.853

É importante observar a relação das raízes características e o ponto de bifurcação $\sqrt{\frac{K_1}{3K_2}}$ para diferentes modos normais em função do parâmetros h e L

Assim, os primeiros modos normais φ_n normalizados são da forma

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) = & \frac{1}{N} \left(\frac{\Delta_1}{\Delta} (\sin(\beta_{1n}x) + \beta_7 \sinh(\beta_{2n}x) + \beta_8 \sinh(\beta_{3n}x)) \right. \\ & \left. + \frac{\Delta_2}{\Delta} (\cos(\beta_{1n}x) - \cosh(\beta_{3n}x)) + (\cosh(\beta_{2n}x) - \cosh(\beta_{3n}x)) \right), \quad (6.74) \end{aligned}$$

onde

$$N^2 = \int_0^L \left(\frac{\Delta_1}{\Delta} (\sin(\beta_{1n}x) + \beta_7 \sinh(\beta_{2n}x) + \beta_8 \sinh(\beta_{3n}x)) + \frac{\Delta_2}{\Delta} (\cos(\beta_{1n}x) - \cosh(\beta_{3n}x)) + (\cosh(\beta_{2n}x) - \cosh(\beta_{3n}x)) \right)^2 dx$$

Tabela 6.3 – Raízes características do primeiro modo normal para o caso $r = \pm\beta_1 i, r = \pm\beta_2$ e $r = \pm\beta_3$.
Fonte: Autoria própria.

$h(\mu m)$	$\sqrt{\frac{K_1}{3K_2}}$	$\beta_1 L$	β_1					
			20h	30h	40h	50h	100h	150h
20	116960	1.8753742250594647604654	4689	3126	2344	1875	937	625
30	81665	1.8753525165777077504153913	3125	2083	1562	1250	625	416
40	64927	1.875327471775443366752008	2344	1562	1172	9376	468	312
50	55496	1.8753019295502123326045	1875	1250	937	750	375	250
100	39567	1.875206029988	937	625	468	375	187	125
150	35848	1.87519106904	625	416	312	250	125	83

Tabela 6.4 – Raízes características do segundo modo normal para o caso $r = \pm\beta_1 i, r = \pm\beta_2$ e $r = \pm\beta_3$.
Fonte: Autoria própria.

$h(\mu m)$	$\sqrt{\frac{K_1}{3K_2}}$	$\beta_1 L$	β_1					
			20h	30h	40h	50h	100h	150h
20	116960	4.69997482928478177746655	11780	7853	5890	4712	2356	1570
30	81665	4.69951501178290898275653	7832	5221	3916	3133	1566	1044
40	64927	4.6989822873744906499420	5873	3915	2936	2349	1174	783
50	55496	4.6984363964354983766551	4698	3132	2349	1879	939	626
100	39567	4.69636066081	4701	2350	1567	1175	940	470
150	35848	4.69603256064	1566	1044	783	626	313	208

Tabela 6.5 – Raízes características do terceiro modo normal para o caso $r = \pm\beta_1 i, r = \pm\beta_2$ e $r = \pm\beta_3$.
Fonte: Autoria própria.

$h(\mu m)$	$\sqrt{\frac{K_1}{3K_2}}$	$\beta_1 L$	β_1					
			20h	30h	40h	50h	100h	150h
20	116960	7.866767191763025512900166	19707	13138	9853	7883	3941	262
30	81665	7.86594982340614123510287	13109	8739	6554	5243	2621	174
40	64927	7.86498119183364343707568	9831	6554	4915	3932	1966	131
50	55496	7.863963731693208785845	7863	5242	3931	3145	1572	104
100	39567	7.859844988313	3935	2623	1967	1574	787	524
150	35848	7.8591538572	2621	1747	1310	1048	524	349

Numericamente, utilizando o método da Quadratura de Gauss-Legendre com quinze pontos, para os cinco primeiros modos normais com os parâmetros utilizados, obtém-se $N^2 \approx L$, coincidindo com o caso clássico.

No caso clássico, βL não varia com L . Os modos normais dependem de β , no entanto, $N^2 \approx L$, independente de L .

As Figuras (6.6a)-(6.12d) mostram os cinco primeiros modos normais e seus respectivos planos de fase para o caso gradiente, adotando como parâmetro a espessura $h = 20\mu m$ e comprimento $L = 20h$.

Tabela 6.6 – Raízes características do quarto modo normal para o caso $r = \pm\beta_1i, r = \pm\beta_2$ e $r = \pm\beta_3$, $\beta_1L = 1.8751$. Fonte: Autoria própria.

$h(\mu m)$	$\sqrt{\frac{K_1}{3K_2}}$	β_1L	β_1				
			20h	30h	40h	50h	100h
20	116960	11.014963334671265037611482	27578	18385	13789	11031	5515
30	81665	11.01383538215177155063698	18356	12237	9178	7342	3671
40	64927	11.0124640463743212625152	13765	9177	6882	5506	2753
50	55496	11.010983117139264649375	11010	7340	5505	4404	2202
100	39567	11.00455826038	5509	3673	2754	2203	1101
150	35848	11.0034102756	3670	2447	1835	1468	734

Tabela 6.7 – Raízes características do quinto modo normal para o caso $r = \pm\beta_1i, r = \pm\beta_2$ e $r = \pm\beta_3$. Fonte: Autoria própria.

$h(\mu m)$	$\sqrt{\frac{K_1}{3K_2}}$	β_1L	β_1				
			20h	30h	40h	50h	100h
20	116960	14.163089790661875038364342	35436	23624	17718	14174	7087
30	55496	14.161864132091717958187323	23603	15735	11801	9441	4720
40	64927	14.1603241429693853146704	17700	11800	8850	7080	3540
50	55496	14.15860175061285420596	14158	9439	7079	5663	2831
100	39567	14.15045589938013	7083	4722	3541	2833	1416
150	35848	14.14888887384	4719	3146	2359	1887	943

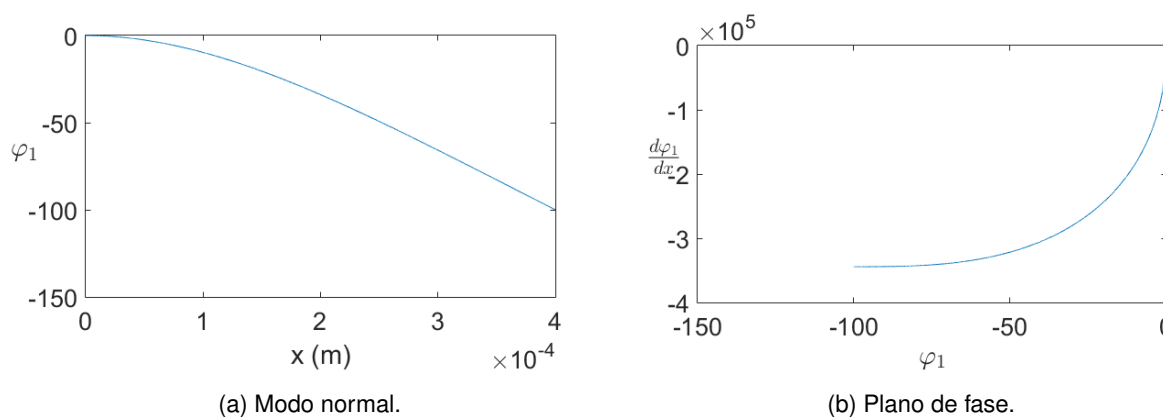


Figura 6.6 – Primeiro modo normal e plano de fase da microviga engastada para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria.

As Figuras (6.11a)-(6.11e) mostram os cinco primeiros modos normais para o caso gradiente variando a espessura h , com parâmetro $L = 20h$. Observa-se que eles mantêm a mesma forma com uma leve variação de amplitude.

As Figuras (3.7a)-(3.7e) mostram os cinco primeiros modos normais para o caso gradiente variando o comprimento L , com parâmetro $h = 20\mu m$. Percebe-se que eles mantêm a mesma forma com uma leve variação de amplitude.

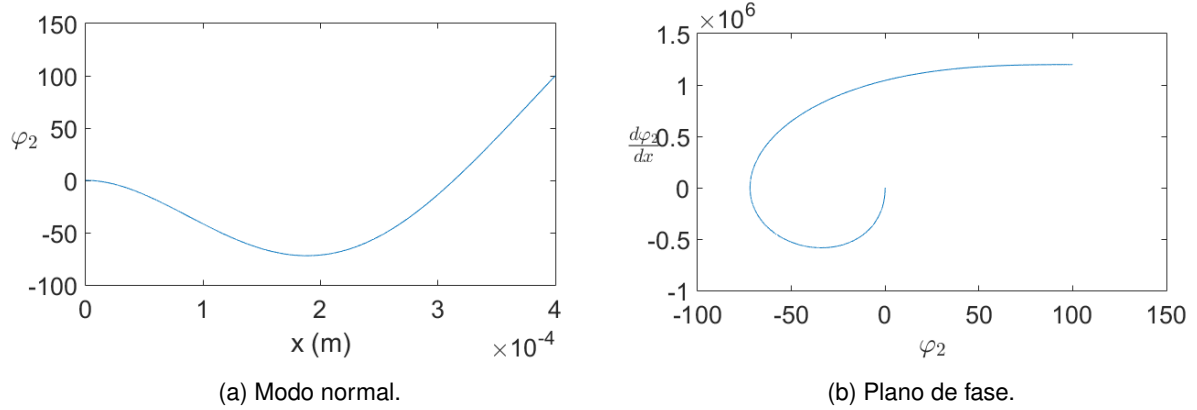


Figura 6.7 – Segundo modo normal e plano de fase da microviga engastada para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria.

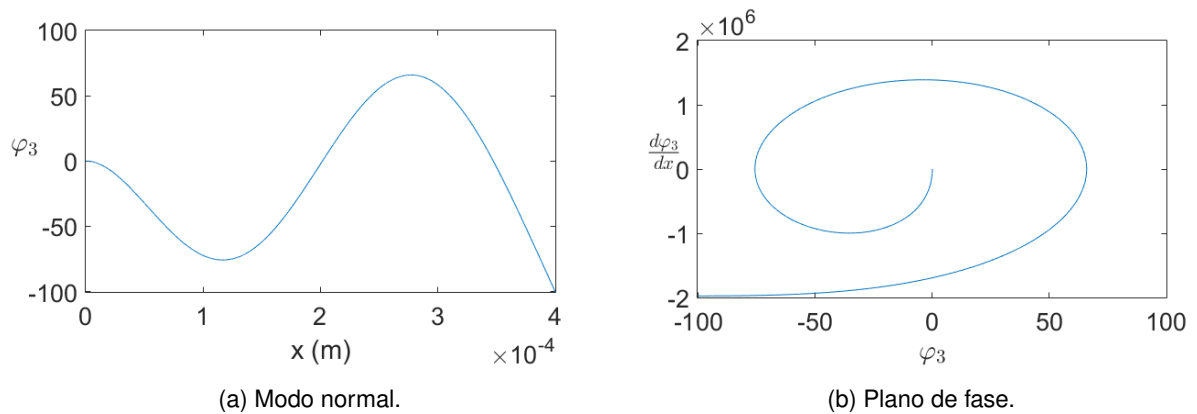


Figura 6.8 – Terceiro modo normal e plano de fase da microviga engastada para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria.

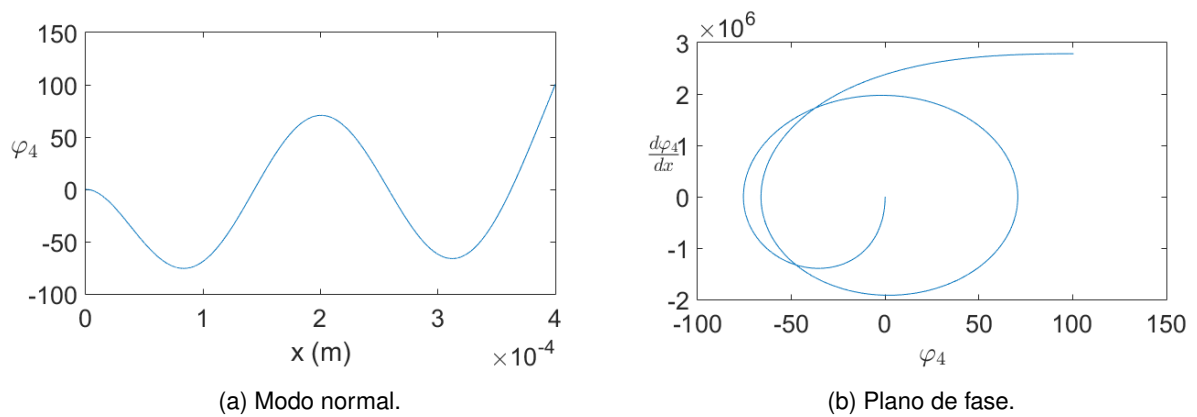
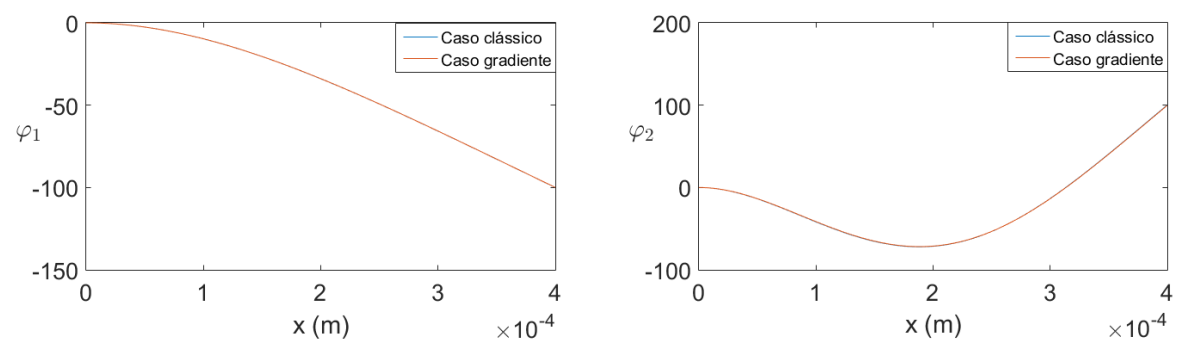


Figura 6.9 – Quarto modo normal e plano de fase da microviga engastada para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria.



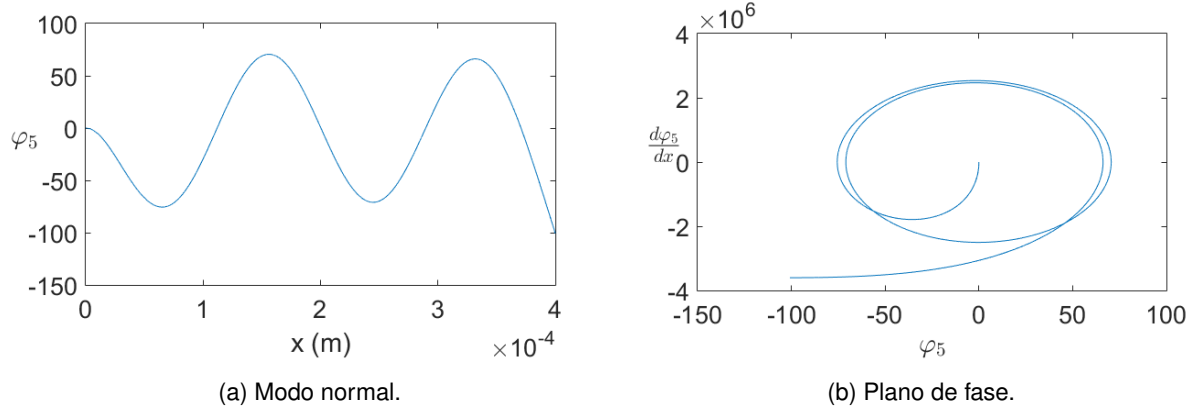


Figura 6.10 – Quinto modo normal e plano de fase da microviga engastada para o caso gradiente.
Fonte: Autoria própria.

Finalmente, vamos estudar as raízes da equação cúbica quando o valor crítico é positivo. Tem-se que

$$f\left(\frac{2K_1}{3K_2}\right) = -\frac{4K_1^3}{27K_2^2} + K_2\beta_1^6 + K_1\beta_1^4 > 0 \quad (6.75)$$

tem-se duas raízes complexa para (6.30) que satisfazem a equação

$$K_2\beta^2 - (K_2\beta_1^2 + K_1)\beta + (K_2\beta_1^4 + K_1\beta_1^2) = 0 \quad (6.76)$$

$$\beta = (\beta_2 \pm i\beta_3)^2 = \frac{\left(\frac{K_1}{K_2} + \beta_1^2\right) \pm i\sqrt{\left(\frac{K_1}{K_2} + \beta_1^2\right)\left(3\beta_1^2 - \frac{K_1}{K_2}\right)}}{2} \quad (6.77)$$

De forma que

$$\begin{cases} 4\beta_2^2 - 4\beta_3^2 = 2\left(\frac{K_1}{K_2} + \beta_1^2\right) \\ -16\beta_2^2\beta_3^2 = -3\beta_1^4 - 2\beta_1^2\frac{K_1}{K_2} + \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^2 \end{cases} \quad (6.78)$$

e, portanto

$$\beta_2^2 = \frac{\left(\frac{K_1}{K_2} + \beta_1^2\right) + 2\beta_1\sqrt{\left(\frac{K_1}{K_2} + \beta_1^2\right)}}{4} \quad (6.79)$$

$$\beta_3^2 = \frac{-\left(\frac{K_1}{K_2} + \beta_1^2\right) + 2\beta_1\sqrt{\left(\frac{K_1}{K_2} + \beta_1^2\right)}}{4} \quad (6.80)$$

Consequentemente, $r = \pm(\beta_2 \pm i\beta_3)$ são as demais soluções de (6.14). Assim, a solução geral de (6.14) é dada por

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & C_1 \sin(\beta_1 x) + C_2 \cos(\beta_1 x) + C_3 \sinh(\beta_2 x) \cos(\beta_3 x) + C_4 \cosh(\beta_2 x) \cos(\beta_3 x) \\ & + C_5 \sinh(\beta_2 x) \sin(\beta_3 x) + C_6 \cosh(\beta_2 x) \sin(\beta_3 x), \end{aligned} \quad (6.81)$$

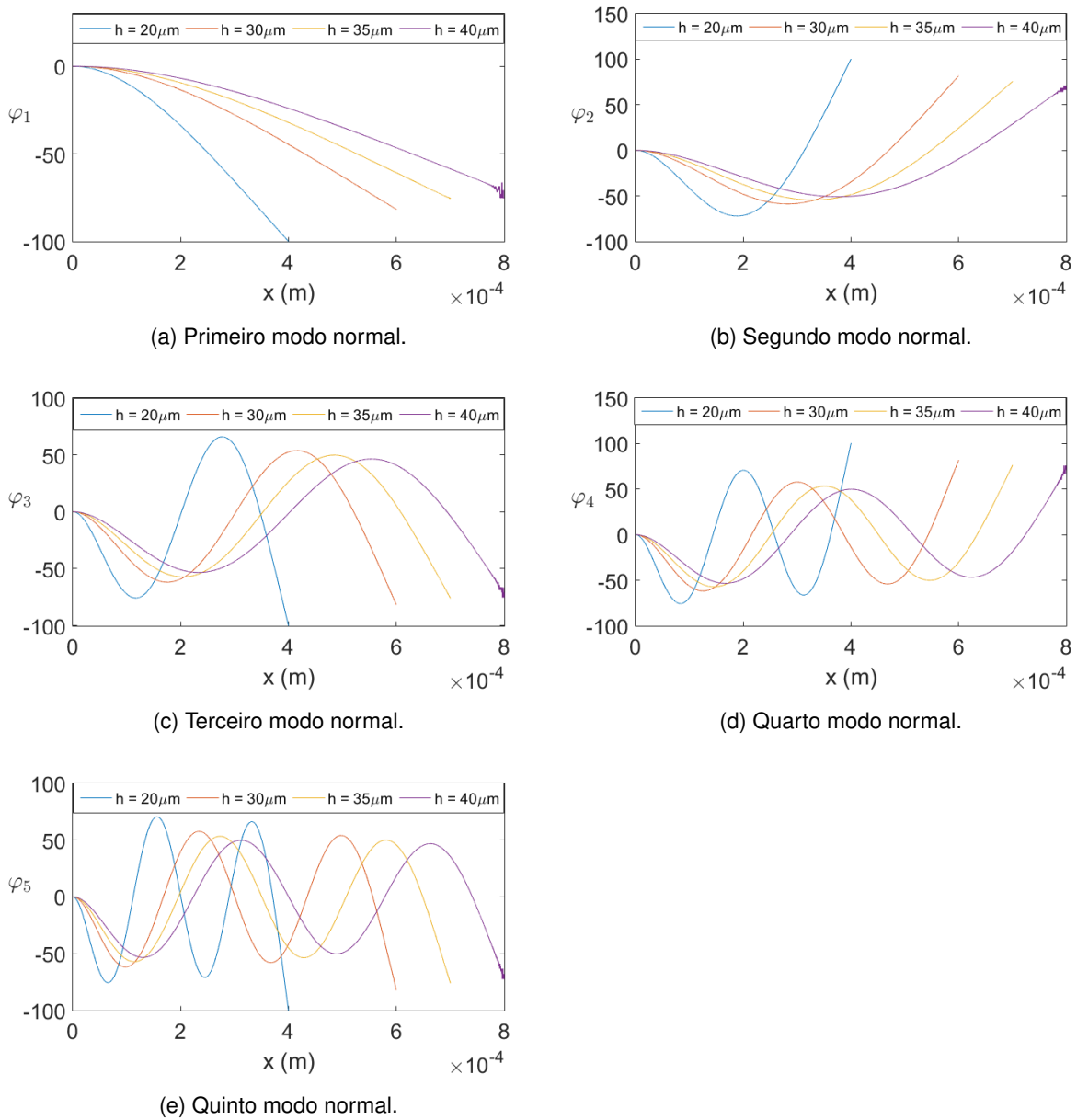


Figura 6.11 – Comparação de valores de h para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria.

onde $C_i, i = 1, \dots, 6$ são constantes com

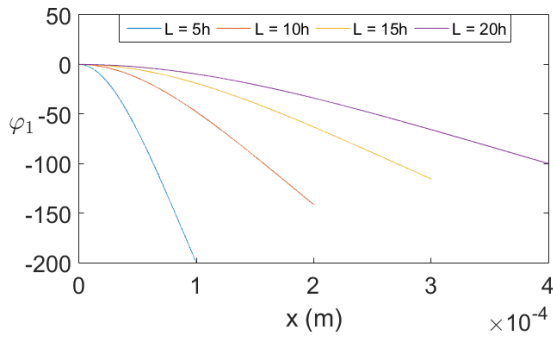
$$\frac{K_2}{K_1} \beta_1^6 + \beta_1^4 = \frac{\rho A \lambda^2}{K_1} \quad (6.82)$$

$$16\beta_2^4 - 8\left(\frac{K_1}{K_2} + \beta_1^2\right)\beta_2^2 - 3\beta_1^4 - 2\beta_1^2\frac{K_1}{K_2} + \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^2 = 0 \quad (6.83)$$

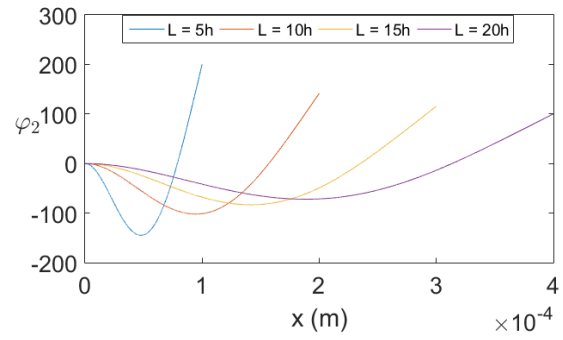
$$16\beta_3^4 + 8\left(\frac{K_1}{K_2} + \beta_1^2\right)\beta_3^2 - 3\beta_1^4 - 2\beta_1^2\frac{K_1}{K_2} + \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^2 = 0. \quad (6.84)$$

Obtém-se das condições de contorno (6.7)-(6.12) o sistema de equações para ser resolvido para as constantes C_i

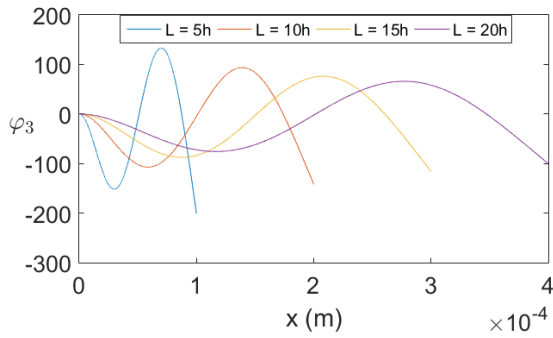
$$\Lambda(\beta_1)C = 0 \quad (6.85)$$



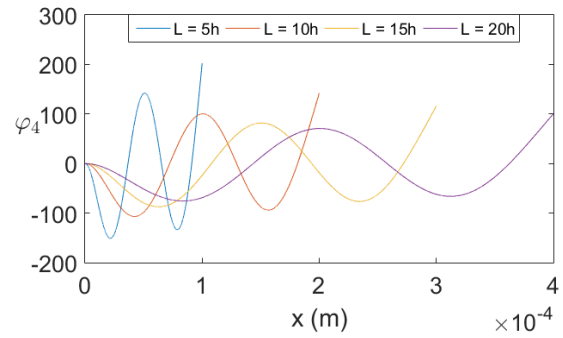
(a) Primeiro modo normal.



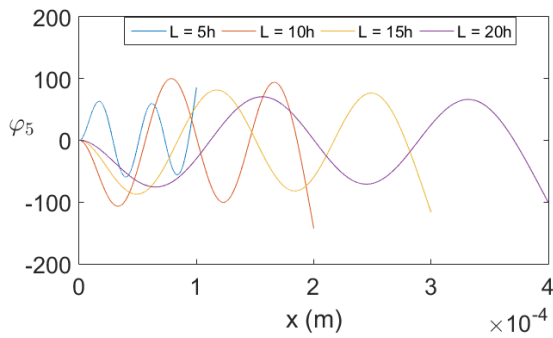
(b) Segundo modo normal.



(c) Terceiro modo normal.



(d) Quarto modo normal.



(e) Quinto modo normal.

Figura 6.12 – Comparação de valores de L para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria.

A matriz $\Lambda = (\Lambda_{ij})$, $i = 1 : 6$, $j = 1 : 6$, é dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & 0 & \beta_3 \\ -\beta_1^2 \sin \beta_1 L & -\beta_1^2 \cos \beta_1 L & \Lambda_{33} & \Lambda_{34} & \Lambda_{35} & \Lambda_{36} \\ -\beta_1^3 & 0 & \beta_{43} & 0 & 0 & -\beta_{46} \\ \beta_1^4 \sin \beta_1 L & \beta_1^4 \cos \beta_1 L & \Lambda_{53} & \Lambda_{54} & \Lambda_{55} & \Lambda_{56} \\ -\beta_4 \cos \beta_1 L & \beta_4 \sin \beta_1 L & \Lambda_{63} & \Lambda_{64} & \Lambda_{65} & \Lambda_{66} \end{bmatrix}. \quad (6.86)$$

$$W_3(x) = \sinh(\beta_2 x) \cos(\beta_3 x), \quad W_4(x) = \cosh(\beta_2 x) \cos(\beta_3 x) \quad (6.87)$$

$$W_5(x) = \sinh(\beta_2 x) \sin(\beta_3 x), \quad W_6(x) = \cosh(\beta_2 x) \sin(\beta_3 x), \quad (6.88)$$

$$\Lambda_{33} = \beta_6 W_3(L) - \beta_7 W_6(L), \quad \Lambda_{34} = \beta_6 W_4(L) - \beta_7 W_5(L) \quad (6.89)$$

$$\Lambda_{35} = \beta_7 W_4(L) + \beta_6 W_5(L), \quad \Lambda_{36} = \beta_7 W_3(L) + \beta_6 W_6(L), \quad (6.90)$$

$$\Lambda_{53} = \beta_8 W_3(L) - \beta_9 W_6(L), \quad \Lambda_{54} = \beta_8 W_4(L) - \beta_9 W_5(L), \quad (6.91)$$

$$\Lambda_{55} = \beta_9 W_4(L) + \beta_8 W_5(L), \quad \Lambda_{56} = \beta_9 W_3(L) + \beta_8 W_6(L), \quad (6.92)$$

$$\Lambda_{63} = \beta_{12} W_4(L) + \beta_{13} W_5(L), \quad \Lambda_{64} = \beta_{12} W_3(L) + \beta_{13} W_6(L), \quad (6.93)$$

$$\Lambda_{65} = -\beta_{13} W_3(L) + \beta_{12} W_6(L), \quad \Lambda_{66} = -\beta_{13} W_4(L) + \beta_{12} W_5(L). \quad (6.94)$$

$$\beta_{43} = \beta_2^3 - 3\beta_2\beta_3^2, \quad \beta_{46} = \beta_3^3 - 3\beta_2^2\beta_3 \quad (6.95)$$

$$\beta_6 = \beta_2^2 - \beta_3^2, \quad \beta_7 = 2\beta_2\beta_3, \quad \beta_8 = \beta_2^4 + \beta_3^4 - 6\beta_2^2\beta_3^2, \quad \beta_9 = 4\beta_2^3\beta_3 - 4\beta_2\beta_3^3 \quad (6.96)$$

$$\beta_{10} = \beta_2^5 - 10\beta_2^3\beta_3^2 + 5\beta_2\beta_3^4, \quad \beta_{11} = \beta_3^5 - 10\beta_2^2\beta_3^3 + 5\beta_2^4\beta_3 \quad (6.97)$$

$$\beta_{12} = K_1\beta_{43} - K_2\beta_{10}, \quad \beta_{13} = K_1\beta_{46} + K_2\beta_{11} \quad (6.98)$$

Ao usar as condições de contorno (6.7), (6.8) e (6.10) na solução (6.81), obtém-se

$$C_2 + C_4 = 0, \quad C_1\beta_1 + C_3\beta_2 + C_6\beta_3 = 0, \quad -C_1\beta_1^3 + C_3\beta_{43} - C_6\beta_{46} = 0 \quad (6.99)$$

Resolvendo, obtém-se

$$C_4 = -C_2, \quad C_3 = \Lambda_7 C_1, \quad C_6 = \Lambda_8 C_1 \quad (6.100)$$

onde

$$\Lambda_7 = \frac{\beta_1(\beta_3^2 - 3\beta_2^2 - \beta_1^2)}{2\beta_2(\beta_2^2 + \beta_3^2)}, \quad \Lambda_8 = \frac{\beta_1(\beta_2^2 - 3\beta_3^2 + \beta_1^2)}{2\beta_3(\beta_2^2 + \beta_3^2)}$$

De modo que a solução fica na forma

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & C_1(\sin(\beta_1 x) + \Lambda_7 \sinh(\beta_2 x) \cos(\beta_3 x) + \Lambda_8 \cosh(\beta_2 x) \sin(\beta_3 x)) \\ & + C_2(\cos(\beta_1 x) - \cosh(\beta_2 x) \cos(\beta_3 x)) + C_5 \sinh(\beta_2 x) \sin(\beta_3 x), \end{aligned} \quad (6.101)$$

Em seguida, ao usar as condições de contorno (6.9), (6.11) e (6.12) na equação (6.101), resultam em

$$C_1(-\beta_1^2 \sin(\beta_1 L) + \Lambda_7 \Lambda_{33} + \Lambda_8 \Lambda_{36}) - C_2(\beta_1^2 \cos(\beta_1 L) + \Lambda_{34}) + C_5 \Lambda_{35} = 0, \quad (6.102)$$

$$C_1(\beta_1^4 \sin(\beta_1 L) + \Lambda_7 \Lambda_{53} + \Lambda_8 \Lambda_{56}) + C_2(\beta_1^4 \cos(\beta_1 L) - \Lambda_{54}) + C_5 \Lambda_{55} = 0, \quad (6.103)$$

$$C_1(-\beta_4 \cos(\beta_1 L) + \Lambda_7 \Lambda_{63} + \Lambda_8 \Lambda_{66}) + C_2(\beta_4 \sin(\beta_1 L) - \Lambda_{64}) + C_5 \Lambda_{65} = 0, \quad (6.104)$$

Usando as equações (6.102)-(6.103), pode-se obter C_1 e C_2 em função de C_5 ,

$$C_1(-\beta_1^2 \sin(\beta_1 L) + \Lambda_7 \Lambda_{33} + \Lambda_8 \Lambda_{36}) - C_2(\beta_1^2 \cos(\beta_1 L) + \Lambda_{34}) = -C_5 \Lambda_{35}, \quad (6.105)$$

$$C_1(\beta_1^4 \sin(\beta_1 L) + \Lambda_7 \Lambda_{53} + \Lambda_8 \Lambda_{56}) + C_2(\beta_1^4 \cos(\beta_1 L) - \Lambda_{54}) = -C_5 \Lambda_{55}, \quad (6.106)$$

Pela regra de Cramer

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} C_5, \quad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} C_5 \quad (6.107)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta &= \left((\beta_1^4 \beta_6 + \beta_1^2 \beta_8) W_4 - (\beta_1^4 \beta_7 + \beta_1^2 \beta_9) W_5 \right) \sin(\beta_1 L) \\ &+ (\beta_6 \beta_9 - \beta_7 \beta_8) \left(\Lambda_8 (W_3 W_4 + W_5 W_6) - \Lambda_7 (W_4 W_6 - W_3 W_5) \right) \\ &+ \left((\beta_1^4 \beta_7 + \beta_1^2 \beta_9) (\Lambda_8 W_3 - \Lambda_7 W_6) + (\beta_1^4 \beta_6 + \beta_1^2 \beta_8) (\Lambda_7 W_3 + \Lambda_8 W_6) \right) \cos(\beta_1 L) \\ \Delta_1 &= (\beta_1^4 \beta_7 + \beta_1^2 \beta_9) W_4 + (\beta_1^4 \beta_6 + \beta_1^2 \beta_8) W_5 + (\beta_6 \beta_9 - \beta_7 \beta_8) (W_4^2 + W_5^2) \\ \Delta_2 &= - \left((\beta_1^4 \beta_7 + \beta_1^2 \beta_9) W_4 + (\beta_1^4 \beta_6 + \beta_1^2 \beta_8) W_5 \right) \sin(\beta_1 L) \\ &+ (\beta_6 \beta_9 - \beta_7 \beta_8) \left(\Lambda_7 (W_3 W_4 + W_5 W_6) + \Lambda_8 (W_4 W_6 - W_3 W_5) \right) \end{aligned}$$

Substituindo C_1 e C_2 na equação (6.106), obtém-se

$$C_5 \left(\frac{\Delta_1}{\Delta} (-\beta_4 \cos(\beta_1 L) + \Lambda_7 \Lambda_{63} + \Lambda_8 \Lambda_{66}) + \frac{\Delta_2}{\Delta} (\beta_4 \sin(\beta_1 L) - \Lambda_{64}) + \Lambda_{65} \right) = 0 \quad (6.108)$$

Impondo a condição de existência de soluções não triviais, o valor positivo β_1 deve satisfazer a condição

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} (-\beta_4 \cos(\beta_1 L) + \Lambda_7 \Lambda_{63} + \Lambda_8 \Lambda_{66}) + \frac{\Delta_2}{\Delta} (\beta_4 \sin(\beta_1 L) - \Lambda_{64}) + \Lambda_{65} = 0 \quad (6.109)$$

A equação (6.109) gera as raízes β_{1n} , que são, aproximadamente

$$\beta_{1n} L = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad (6.110)$$

e os autovalores

$$\alpha_n^2 = \frac{K_2}{\rho A} \beta_{1n}^6 + \frac{K_1}{\rho A} \beta_{1n}^4, \quad n = 1, \dots, \infty, \quad (6.111)$$

apresentados na Tabela (6.8).

Tabela 6.8 – Tabela das raízes características caso $r = \pm\beta_1 i, r = \pm(\beta_2 \pm \beta_3 i)$. Fonte: Autoria própria.

n	$\frac{(2n-1)\pi}{2}$	β_1	$\beta_3 L$	$\beta_2 L$	$\beta_1 L$	$\alpha(MHz)$	$\alpha_c(MHz)$
16	48.694	119573	6.0634	66.811	47.280	413.063	102.6748
17	51.836	127086	11.9893	68.694	50.834	474.349	116.3506
18	54.977	134504	15.8535	70.581	53.801	540.280	130.8811
19	58.119	141804	18.955	72.464	56.721	610.673	146.2663
20	61.261	148985	21.627	74.341	59.593	685.502	162.5058
21	64.402	156094	24.029	76.222	62.437	765.277	179.6005
22	67.544	163227	26.265	78.131	65.290	851.263	197.5499
23	70.685	170463	28.401	80.090	68.185	944.826	216.3540
24	73.827	177829	30.468	82.105	71.131	1046.893	236.0129
25	76.969	185309	32.480	84.174	74.123	1157.869	256.5265
26	80.110	192876	34.444	86.288	77.150	1277.951	277.8949
27	83.252	200507	36.364	88.440	80.202	1407.318	300.1180
38	86.393	208184	38.245	90.626	83.273	1546.166	323.1959
29	89.535	215895	40.092	92.840	86.357	1694.740	347.1284
30	92.676	223631	41.908	95.080	89.452	1853.302	371.9157

n	$\frac{(2n-1)\pi}{2}$	β_1	$\beta_3 L$	$\beta_2 L$	$\beta_1 L$	$\alpha(MHz)$	$\alpha_c(MHz)$
31	95.8186	231386	43.699	97.344	92.554	2022.148	397.5578
32	98.9602	239156	45.466	99.629	95.662	2201.595	424.0546
33	102.1018	246937	47.2130	101.933	98.774	2391.944	451.4061
34	105.2434	254728	48.941	104.256	101.89	2593.558	479.6124
35	108.3849	262526	50.655	106.595	105.01	2806.741	508.6724
36	111.5265	270331	52.354	108.951	108.13	3031.873	538.5881
37	114.6681	278141	54.041	111.322	111.25	3269.271	569.3586
38	117.8097	285956	55.717	113.707	114.38	3519.309	600.9838
39	120.9513	293775	57.384	116.105	117.51	3782.328	633.4637
40	124.0900	309421	60.693	120.938	123.76	4348.643	666.7983
41	127.2345	317249	62.336	123.372	126.89	4652.712	700.9877
42	130.3761	325078	63.973	125.816	130.031	4971.120	736.0318
43	133.5177	332909	65.605	128.271	133.16	5304.270	771.9307
44	136.6593	340742	67.232	130.735	136.296	5652.527	808.6843
45	139.8009	348577	68.855	133.209	139.43	6016.257	846.2926
46	142.9425	356413	70.473	135.69	142.56	6395.778	884.7557
47	146.0841	364251	72.088	138.181	145.70	6791.502	924.0735
48	149.2257	372089	73.699	140.679	148.83	7203.689	964.2461
49	152.3600	379929	75.307	143.185	151.97	7632.808	1005.2726
50	155.5000	387769	76.913	145.698	155.10	8079.110	1047.1545

Assim, os primeiros modos normais φ_n normalizados são da forma

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \frac{1}{N} \left(\frac{\Delta_1}{\Delta} (\sin(\beta_1 x) + \Lambda_7 \sinh(\beta_2 x) \cos(\beta_3 x) + \Lambda_8 \cosh(\beta_2 x) \sin(\beta_3 x)) \right. \\ & \left. + \frac{\Delta_2}{\Delta} (\cos(\beta_1 x) - \cosh(\beta_2 x) \cos(\beta_3 x)) + \sinh(\beta_2 x) \sin(\beta_3 x) \right), \end{aligned} \quad (6.112)$$

onde

$$\begin{aligned} N^2 = & \int_0^L \left(\frac{\Delta_1}{\Delta} (\sin(\beta_1 x) + \Lambda_7 \sinh(\beta_2 x) \cos(\beta_3 x) + \Lambda_8 \cosh(\beta_2 x) \sin(\beta_3 x)) \right. \\ & \left. + \frac{\Delta_2}{\Delta} (\cos(\beta_1 x) - \cosh(\beta_2 x) \cos(\beta_3 x)) + \sinh(\beta_2 x) \sin(\beta_3 x) \right)^2 dx \end{aligned} \quad (6.113)$$

Cabe observar ainda que, a análise feita até o presente momento é válida para qualquer que seja as condições de contorno, uma vez que o polinômio reduzido é de grau ímpar (3) e, neste caso, sempre existe uma raiz real. Este fato é mostrado numericamente pela Figura (6.4).

A análise feita nos parágrafos anteriores permite obter uma forma analítica para a resposta de deslocamento da viga no contexto da deformação gradiente.

6.2 Análise da resposta no domínio do tempo no modo atuador

Nas seções anteriores, foram apresentadas as condições para construir as respostas a uma entrada no sistema (6.114), ou seja, foram apresentadas as estimativas para os autovalores α^2 . Então, foram realizadas simulações para obtenção do comportamento das raízes da equação característica (6.14), o que possibilitou analisar o desempenho dos modos normais. Além de todos estes fatores, destacamos também o cálculo do *setpoint* de operação do transdutor, mostrando que seu desempenho garante a não existência de instabilidade do tipo *pull-in*. Agora, para a quantificação dos efeitos paramétricos que o modelo de deformação gradiente exerce sobre o transdutor, analisaremos o comportamento da saída $w(x, t)$ de (6.114) por uma perspectiva quantitativa.

$$\rho A \ddot{w}(x, t) + K_1 \partial_x^4 w(x, t) - K_2 \partial_x^6 w(x, t) = \frac{\epsilon b}{2} \left(\frac{(V_b(t))^2 \psi(x)}{(d - w(x, t))^2} - \frac{(V_t(t))^2 \psi(x)}{(d + w(x, t))^2} \right) \quad (6.114)$$

Assim, assumimos que a resposta $w(x, t)$ de (6.114) pode ser dada por

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(t) \varphi_i(x), \quad t \geq 0, x \in [0, L]. \quad (6.115)$$

Substituindo (6.115) em (6.114), tem-se

$$K_1 \eta_i(t) \varphi_i^{(4)}(x) - K_2 \eta_i(t) \varphi_i^{(6)}(x) + \rho A \ddot{\eta}_i(t) \varphi_i(x) = \frac{\epsilon b}{2} \left(\frac{(V_b(t))^2 \psi(x)}{(d - w(x, t))^2} - \frac{(V_t(t))^2 \psi(x)}{(d + w(x, t))^2} \right). \quad (6.116)$$

$$\eta_i(t) \left(K_1 \varphi_i^{(4)}(x) - K_2 \varphi_i^{(6)}(x) \right) + \rho A \ddot{\eta}_i(t) \varphi_i(x) = \frac{\epsilon b}{2} \left(\frac{(V_b(t))^2 \psi(x)}{(d-w(x,t))^2} - \frac{(V_t(t))^2 \psi(x)}{(d+w(x,t))^2} \right). \quad (6.117)$$

$$\rho A \alpha^2 \eta_i(t) \varphi_i(x) + \rho A \ddot{\eta}_i(t) \varphi_i(x) = \frac{\epsilon b}{2} \left(\frac{(V_b(t))^2 \psi(x)}{(d-w(x,t))^2} - \frac{(V_t(t))^2 \psi(x)}{(d+w(x,t))^2} \right). \quad (6.118)$$

Multiplicando por $\varphi_j(x)$, integrando em x e levando em consideração que os modos normais são ortonormais, obtém-se para $j = 1 : \infty$

$$\rho A \alpha_j^2 \eta_j(t) \int_0^L \varphi_j(x)^2 dx + \rho A \ddot{\eta}_j(t) \int_0^L \varphi_j(x)^2 dx = \frac{\epsilon b}{2} \int_0^L \left(\frac{(V_b(t))^2 \psi(x) \varphi_j(x)}{(d-w(x,t))^2} - \frac{(V_t(t))^2 \psi(x) \varphi_j(x)}{(d+w(x,t))^2} \right) dx \quad (6.119)$$

$$\rho A \ddot{\eta}_j(t) + \rho A \alpha_j^2 \eta_j(t) = \frac{\epsilon b}{2} \int_0^L \left(\frac{(V_b(t))^2 \psi(x) \varphi_j(x)}{(d-w(x,t))^2} - \frac{(V_t(t))^2 \psi(x) \varphi_j(x)}{(d+w(x,t))^2} \right) dx \quad (6.120)$$

$$\ddot{\eta}_j(t) + \alpha_j^2 \eta_j(t) = \frac{\epsilon}{2\rho h} \int_0^L \left(\frac{(V_b(t))^2 \psi(x) \varphi_j(x)}{(d-w(x,t))^2} - \frac{(V_t(t))^2 \psi(x) \varphi_j(x)}{(d+w(x,t))^2} \right) dx \quad (6.121)$$

Assim, obtém-se um equação diferencial de segunda ordem não linear

$$\ddot{\eta}_j(t) + \alpha_j^2 \eta_j(t) = \epsilon f_j(t, \eta), \quad (6.122)$$

onde

$$\epsilon = \frac{\epsilon}{2\rho h} \quad \text{e} \quad f(t, \eta) = \int_0^L \left(\frac{(V_b(t))^2 \psi(x) \varphi_j(x)}{(d-w(x,t))^2} - \frac{(V_t(t))^2 \psi(x) \varphi_j(x)}{(d+w(x,t))^2} \right) dx \quad (6.123)$$

Como trabalhos futuros, sugere-se a obtenção da equação de monitoramento com vistas a aplicações na inspeção de estruturas. Para isto, é necessário relembrar a relação tensão elétrica/momento dada pela equação

$$V(w'') = \frac{(s_{11} - 1)z w''(x, t)}{d_{11}}. \quad (6.124)$$

Substituindo (6.124) em (6.121), tem-se

$$\ddot{\eta}_j(t) + \alpha_j^2 \eta_j(t) = \frac{0.3L\epsilon (s_{11} - 1)z}{2\rho h d_{11}} \int_{0.7L}^L \frac{\left(\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(t) \varphi_i''(x) \right)^2 \varphi_j(x)}{\left(d - \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(t) \varphi_i(x) \right)^2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(t) \varphi_i''(x) \right)^2 \varphi_j(x)}{\left(d + \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(t) \varphi_i(x) \right)^2} dx \quad (6.125)$$

A fim de ter uma melhor compreensão do comportamento dinâmico do sistema, faz-se uma aproximação discreta de (6.125); assim, decompõe-se seu integrando em um conjunto de funções

$$f_1(t, x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \varphi_n''(x) \right)^2, \quad f_2(t, x) = f_1(t, x) \varphi_j(x),$$

$$f_3(t, x) = \frac{1}{\left(d - \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(t) \varphi_i(x) \right)^2} - \frac{1}{\left(d + \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(t) \varphi_i(x) \right)^2}, \quad f_4(t, x) = \frac{f_2(t, x)}{f_3(t, x)}. \quad (6.126)$$

Utilizando as funções definidas em (6.126), o integrando do lado direito de (6.125) pode ser definido como

$$G_j(t) = \frac{0.3L\epsilon (s_{11} - 1)z}{2\rho h d_{11}} \int_{0.7L}^L f_4(t, x) dx. \quad (6.127)$$

Para usar a aproximação por quadratura de Gauss, (7.5), é necessário transformar o intervalo $[0, L]$ em $[-1, 1]$. Assim, a função $G(t)$ assume a forma

$$\begin{aligned} G_j(t) &= \frac{0.3L\epsilon (s_{11} - 1)z}{2\rho h d_{11}} \frac{0.3L}{2} \int_{-1}^1 f_4\left(t, \frac{L}{2}(0.3r + 1.7)\right) dr \\ &= \frac{0.3L\epsilon (s_{11} - 1)z}{2\rho h d_{11}} \frac{0.3L}{2} \sum_{i=1}^{15} c_i f_4\left(t, \frac{L}{2}(0.3r_i + 1.7)\right), \end{aligned} \quad (6.128)$$

sendo que as funções $f_l(t, x)$, $l = 1 \dots, 4$, agora assumem a forma

$$f_1(t, r_i) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \varphi_n''\left(\frac{L}{2}(0.3r_i + 1.7)\right) \right)^2, \quad (6.129)$$

$$f_2(t, r_i) = f_1(t, r_i) \varphi_j\left(\frac{L}{2}(0.3r_i + 1.7)\right), \quad (6.130)$$

$$f_3(t, r_i) = \frac{1}{\left(d - \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(t) \varphi_i\left(\frac{L}{2}(0.3r_i + 1.7)\right)\right)^2} - \frac{1}{\left(d + \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(t) \varphi_i\left(\frac{L}{2}(0.3r_i + 1.7)\right)\right)^2} \quad (6.131)$$

$$f_4(t, r_i) = \frac{f_2(t, r_i)}{f_3(t, r_i)}. \quad (6.132)$$

Utilizando a expressão (6.129), pode-se escrever a equação (6.125) da forma

$$\ddot{\eta}_j(t) + \alpha_j^2 \eta_j(t) = G_j(t). \quad (6.133)$$

Capítulo 7

RESULTADOS E DISCUSSÕES

No presente capítulo, as simulações numéricas foram aprofundadas para abordar o sistema de equações diferenciais de segunda ordem não linear que descrevem as coordenadas generalizadas do problema, influenciadas pela presença de força eletrostática. A obtenção das soluções η_i e a subsequente determinação da deformação $w = \sum \varphi \eta_i$ requerem uma abordagem baseada no cálculo numérico. Neste contexto, o foco se volta para a análise do problema com força eletrostática entre duas placas, tanto no cenário clássico quanto no contexto da teoria de deformação gradiente. Este capítulo visa explorar as implicações e comportamentos resultantes dessa abordagem numérica, fornecendo *insights* valiosos sobre o sistema em estudo.

Nessa perspectiva, obtém-se um sistema de equações diferenciais de segunda ordem não linear para as coordenadas generalizadas do problema com força eletrostática. Para encontrar as soluções η_i da mesma e determinar a deformação $w = \sum \varphi \eta_i$, foi adotado cálculo numérico.

Foi considerado o problema com força eletrostática com duas placas para o caso clássico e para o caso gradiente, com a distância $d = 4\mu m$, coeficiente de permissividade $\epsilon = 1800 \times 8.85 \times 10^{-12}$, com área $b\psi(x)$, onde ψ é uma função de calibre dado em 7.2 .

As propriedades dos materiais usados na viga têm $E = 1.44GPa$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.38$. Assumiu-se que os três parâmetros geométricos da escala de comprimento do material são $l_0 = l_1 = l_2 = l$; $l = 17.6\mu m$.

Primeiramente, foi calculada a Quadratura Gaussiana para a integral. Em seguida, o sistema de segunda ordem foi transformado em um sistema de primeira ordem para aplicar o método de Runge-Kutta de ordem quatro.

$$\ddot{\eta}_j(t) + \alpha_j^2 \eta_j(t) = \frac{\epsilon}{2\rho h} \int_0^L \left(\frac{(V_b(t))^2 \psi(x) \varphi_j(x)}{(d - w(x, t))^2} - \frac{(V_t(t))^2 \psi(x) \varphi_j(x)}{(d + w(x, t))^2} \right) dx \quad (7.1)$$

Então, usou-se a função de calibre $\psi(x)$

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 0.7L \\ 0.3L & \text{se } 0.7L \leq x \leq L \end{cases}, \quad (7.2)$$

$$\psi(x) = 0.3L(u_{0.7L}(x) - u_L(x)) \quad (7.3)$$

Desta forma, tem-se

$$\ddot{\eta}_j(t) + \alpha_j^2 \eta_j(t) = \frac{0.3\epsilon L}{2\rho h} \int_{0.7L}^L \left(\frac{(V_b(t))^2 \varphi_j(x)}{(d - w(x, t))^2} - \frac{(V_t(t))^2 \varphi_j(x)}{(d + w(x, t))^2} \right) dx \quad (7.4)$$

Então, foram calculadas as integrais aproximadas com $n = 5$ modos normais usando o método da quadratura Gauss-Legendre com quinze pontos. Fazendo a mudança de variável

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)r + (b+a)}{2}\right) \frac{(b-a)}{2} dr \quad (7.5)$$

e usando a tabela para as raízes e os coeficientes da quadratura.

Tabela 7.1 – Pontos de Gauss para integração numérica. Fonte: Autoria própria.

i	Raiz r_i	coeficiente c_i
i=0, i=14	± 0.987992518020485	0.030753241996117
i=1, i=13	± 0.937273392400706	0.070366047488108
i=2, i=12	± 0.848206583410427	0.107159220467172
i=3, i=11	± 0.724417731360170	0.139570677926154
i=4, i=10	± 0.570972172608539	0.166269205816994
i=5, i=9	± 0.394151347077563	0.186161000115562
i=6, i=8	± 0.201194093997435	0.198431485327111
i=7	0.000000000000000	0.202578241925561

Assim, obtem-se de 7.4 a equação

$$\ddot{\eta}_j(t) + \alpha_j^2 \eta_j(t) = \frac{0.3\epsilon L}{2\rho h} \frac{0.3L}{2} \int_{-1}^1 \frac{(V_b(t))^2 \varphi_j(1/2(0.3Lr + 1.7L))}{\left(d - \sum_{k=1}^n \varphi_k(1/2(0.1Lr + 1.9L))\eta_k\right)^2} - \frac{(V_t(t))^2 \varphi_j(1/2(0.3Lr + 1.7L))}{\left(d + \sum_{k=1}^n \varphi_k(1/2(0.3Lr + 1.7L))\eta_k\right)^2} dr, \quad (7.6)$$

cujas j-ésimas integrais

$$f_j = \int_{-1}^1 \frac{(V_b(t))^2 \varphi_j(1/2 * (0.3Lr + 1.7L))}{\left(d - \sum_{k=1}^n \varphi_k(1/2(0.3Lr + 1.7L))\eta_k\right)^2} - \frac{(V_t(t))^2 \varphi_j(1/2 * (0.3Lr + 1.7L))}{\left(d + \sum_{k=1}^n \varphi_k(1/2(0.3Lr + 1.7L))\eta_k\right)^2} dr$$

são calculados da forma

$$f_j = \sum_{i=1}^{15} c_i F_i(t, \eta_1, \dots, \eta_n)$$

onde

$$F_i(t, \eta_1, \dots, \eta_n) = \frac{(V_b(t))^2 \varphi_j(1/2(0.3Lr_i + 1.9L))}{\left(d - \sum_{k=1}^n \varphi_k(1/2(0.3Lr_i + 1.7L))\eta_k\right)^2} - \frac{(V_t(t))^2 \varphi_j(1/2(0.3Lr_i + 1.7L))}{\left(d + \sum_{k=1}^n \varphi_k\left(\frac{L}{2}(0.3r_i + 1.7)\right)\eta_k\right)^2}$$

Transformando o sistema de segunda ordem (7.6) em um sistema de primeira ordem

$$u_{2j-1} = \eta_j \tag{7.7}$$

$$u_{2j} = \dot{\eta}_j, \tag{7.8}$$

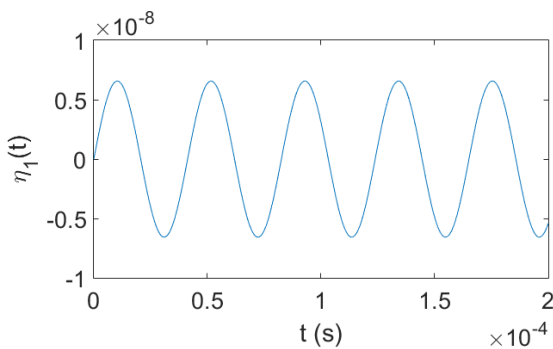
obtem-se

$$\dot{u}_{2j-1} = u_{2j} \tag{7.9}$$

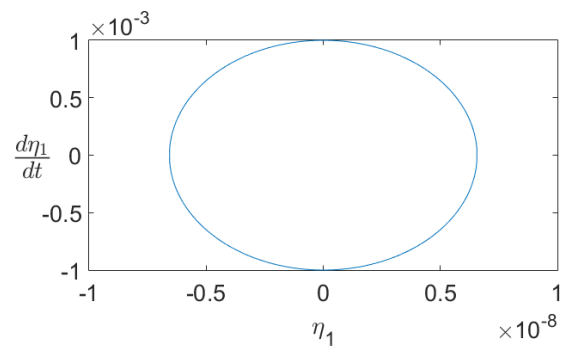
$$\dot{u}_{2j} = -\alpha^2 u_{2j-1} + \varepsilon f_j, \tag{7.10}$$

onde $\varepsilon = \frac{0.3\epsilon L}{2\rho h} \frac{0.3L}{2}$.

Assim, foram obtidas as cinco primeiras coordenadas generalizadas e seus respectivos planos de fase para o caso clássico nas Figuras (7.1a)-(7.5b) e para o caso gradiente nas Figuras (7.6a)-(7.10b), em que foram adotados os parâmetros $h = 20\mu m$, $d = 4\mu m$, $L = 20h$, $b = 4h$, $V_b = 2V$, $V_t = 2V$ e função de calibre $\psi(x) = 0.3L(u_{0.7L}(x) - u_L(x))$.

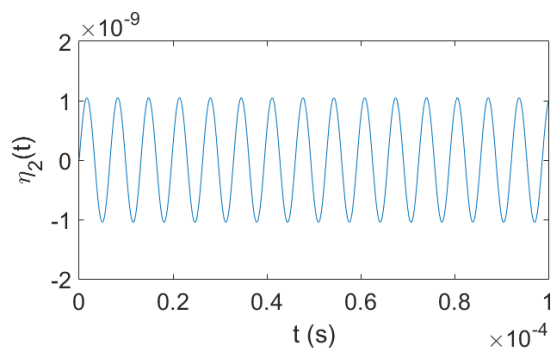


(a) Coordenada generalizada.

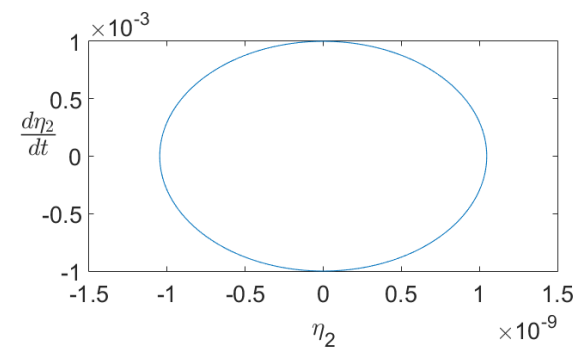


(b) Plano de fase.

Figura 7.1 – Primeira coordenada generalizada da microviga engastada sujeita à força eletrostática para o caso clássico. Fonte: Autoria própria.



(a) Coordenada generalizada.



(b) Plano de fase.

Figura 7.2 – Segunda coordenada generalizada da microviga engastada sujeita à força eletrostática para o caso clássico. Fonte: Autoria própria.

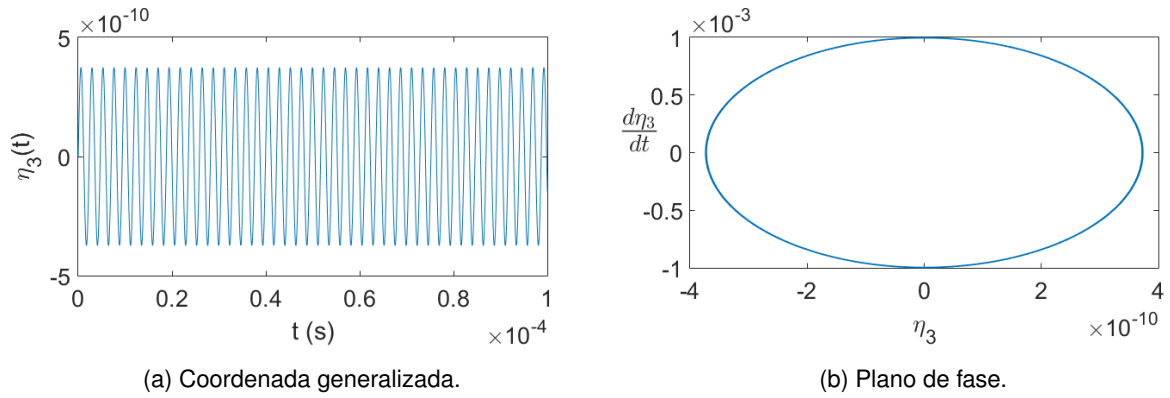


Figura 7.3 – Terceira coordenada generalizada da microviga engastada sujeita à força eletrostática para o caso clássico. Fonte: Autoria própria.

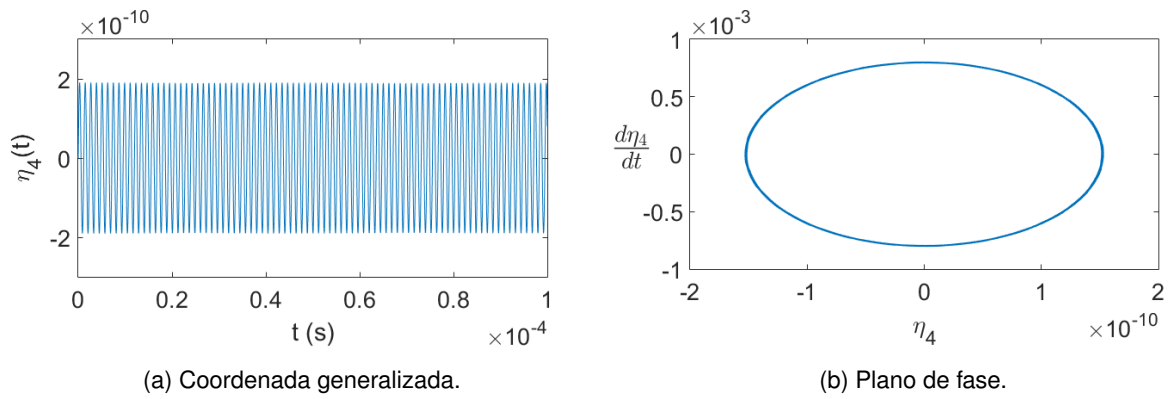


Figura 7.4 – Quarta coordenada generalizada da microviga engastada sujeita à força eletrostática para o caso clássico. Fonte: Autoria própria.

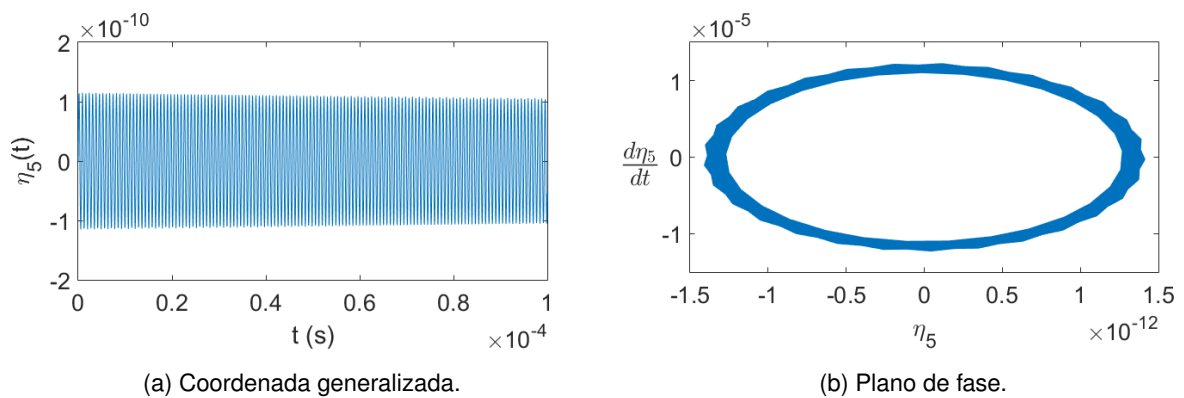


Figura 7.5 – Quinta coordenada generalizada da microviga engastada sujeita à força eletrostática para o caso clássico. Fonte: Autoria própria.

Percebe-se que a primeira coordenada generalizada predomina em amplitude em relação às demais em ambos os casos, e estão dentro da escala das microestruturas, com amplitude da ordem 10^{-8} , pois os modos normais são da ordem de 10^2 .

No caso clássico, observando o plano de fase, verifica-se que a amplitude é estável, enquanto no caso gradiente, a quarta e a quinta coordenadas generalizadas apresentam-se amortecidas.

Conforme já observado, no caso gradiente, a frequência é maior do que no caso clássico, a amplitude é um pouco menor, e a taxa de variação é dez vezes maior.

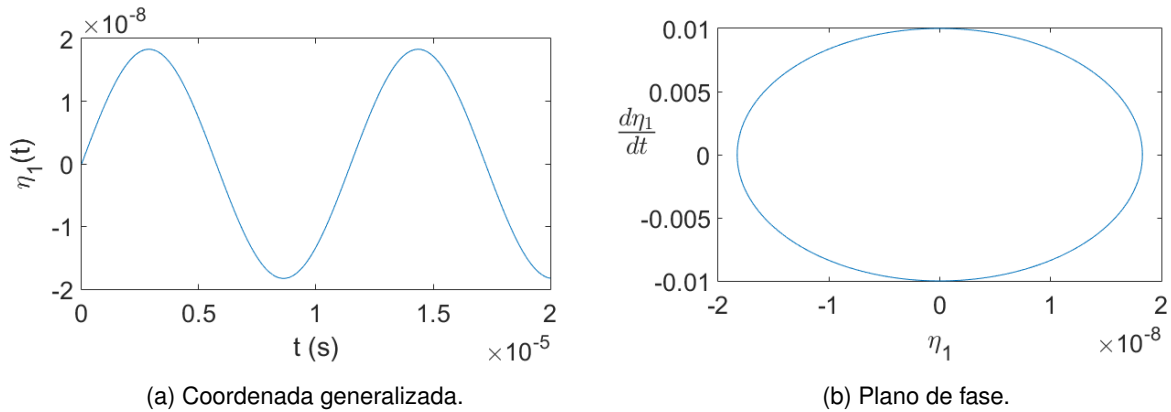


Figura 7.6 – Primeira coordenada generalizada da microviga engastada sujeito à força eletrostática para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria.

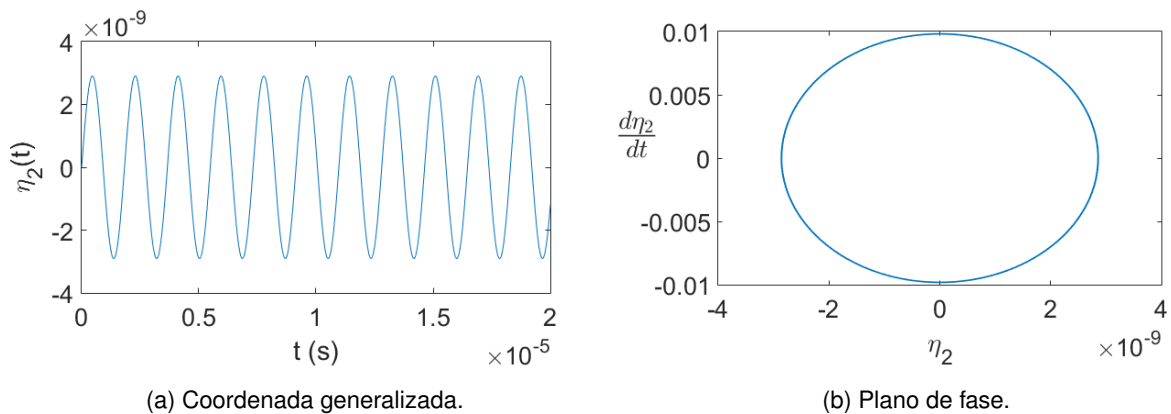


Figura 7.7 – Segunda coordenada generalizada da microviga engastada sujeito à força eletrostática para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria.

Na Figura (7.11a), é representado o deslocamento da microviga engastada com os cinco primeiros modos normais para o caso clássico, onde os modos normais correspondem aos diferentes padrões de deformação da viga sob uma carga dada. Para o primeiro modo normal, refere-se à forma básica de flexão da viga.

Já na Figura (7.11b), observa-se o deslocamento da microviga engastada com os cinco primeiros modos normais para o caso gradiente. Neste caso, considerando gradientes de deformação, os modos normais incluem variações adicionais na deformação ao longo da espessura da viga. Os modos normais para a deformação gradiente refletem padrões mais complexos de variação da deformação. Percebe-se que a deformação no caso gradiente é o dobro do que a deformação no caso clássico.

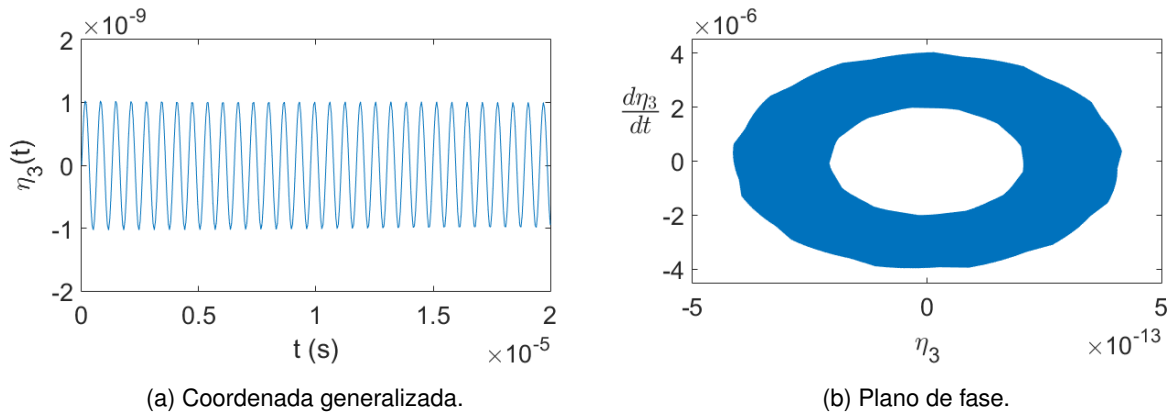


Figura 7.8 – Terceira coordenada generalizada da microviga engastada sujeito à força eletrostática para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria.

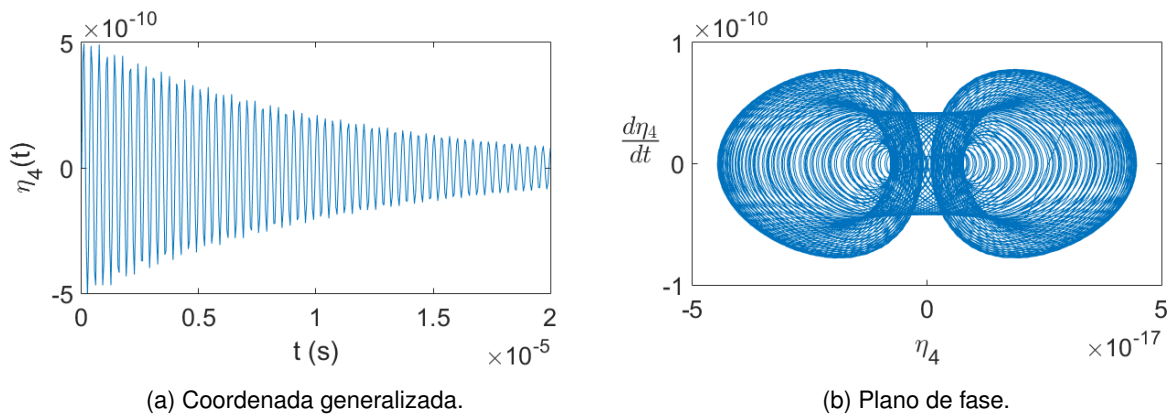


Figura 7.9 – Quarta coordenada generalizada da microviga engastada sujeito à força eletrostática para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria.

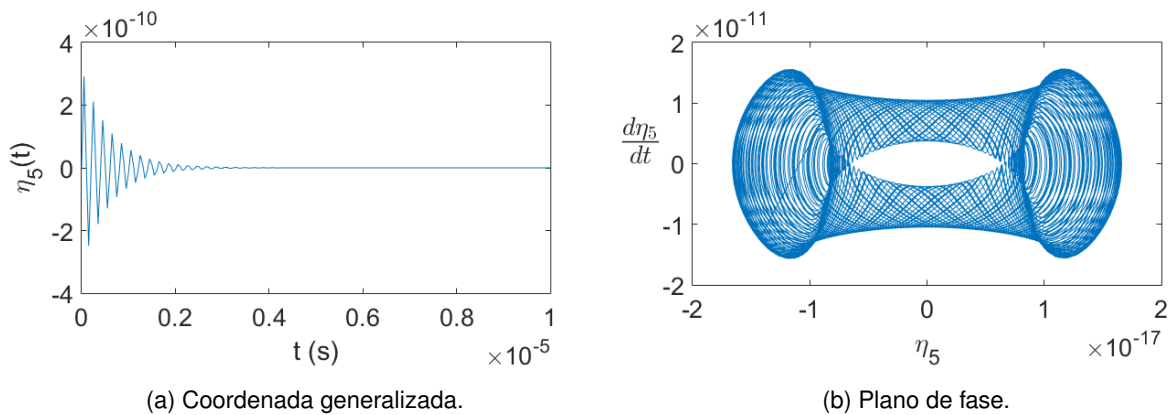


Figura 7.10 – Quinta coordenada generalizada da microviga engastada sujeito à força eletrostática para o caso gradiente. Fonte: Autoria própria.

A teoria da deformação gradiente considera variações locais na deformação ao longo da espessura da viga, o que é especialmente relevante em estruturas de pequena escala, como microvigas.

Nas Figuras (7.12a) e (7.12b), são evidenciados os deslocamentos na extremi-

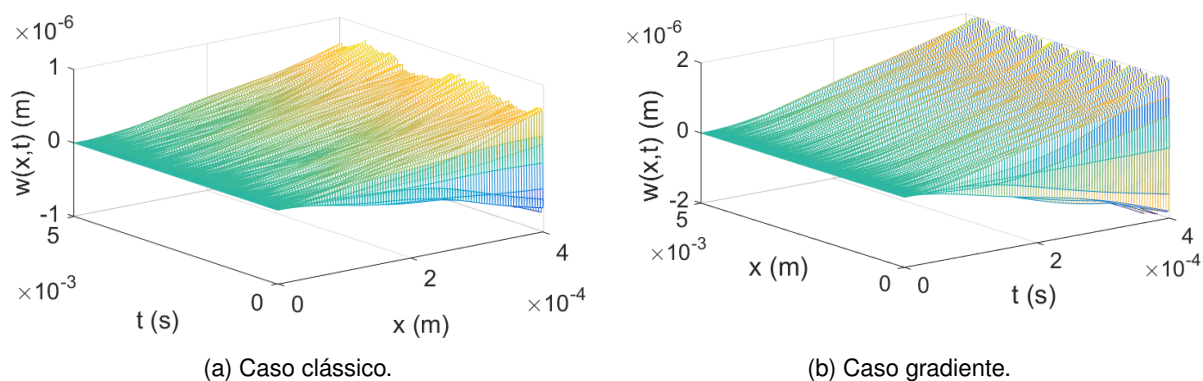


Figura 7.11 – Deslocamento da microviga com os cinco primeiros modos normais. Parâmetros: $d = 4\mu\text{m}$, $h = 20\mu\text{m}$, $b = 4h$, $L = 20h$, $V_b = 2V$ e $V_t = 2V$. Fonte: Autoria própria.

dade da microviga nos cenários clássico e gradiente. O caso gradiente, como já observado anteriormente, apresenta o quádruplo da frequência e o dobro da amplitude em relação ao caso clássico. Quanto maior a frequência, mais sensível, mostrando assim que o caso gradiente representa melhor a sensibilidade na microviga. Notavelmente, o caso gradiente demonstra uma frequência quádrupla e uma amplitude dobrada em comparação ao caso clássico, como previamente observado. Essa relação sugere que, à medida que a frequência aumenta, a sensibilidade também se intensifica, indicando que o caso gradiente é mais representativo da sensibilidade na microviga, de acordo com os resultados experimentais citados na literatura.

É importante ressaltar que a microviga engastada estudada neste trabalho é um elemento estrutural usado em muitas aplicações microeletromecânicas e em experimentos em nanotecnologia. Geralmente, é uma estrutura fina que se projeta de uma superfície de suporte e é livre para se deformar na extremidade não suportada.

Já a Figura (7.12b) refere-se à deformação da extremidade da microviga para o caso gradiente, em que há variações locais na deformação ao longo do comprimento da viga. Isso pode ocorrer quando há uma variação não uniforme nas propriedades do material ou nas condições de carga.

A análise clássica de uma microviga engastada assume que a deformação é uniforme ao longo do comprimento da viga e que as propriedades do material são constantes. No entanto, em situações da vida real, podem ocorrer gradientes de deformação devido a diferentes propriedades do material, variações de temperatura, ou outras condições não homogêneas.

As Figuras (7.13a) e (7.13b) mostram o deslocamento em cinco pontos da microviga engastada para os casos clássico e gradiente, respectivamente.

Na teoria clássica, a deformação é a mesma em todos os pontos da seção transversal. Na teoria da deformação gradiente, a deformação pode variar consi-

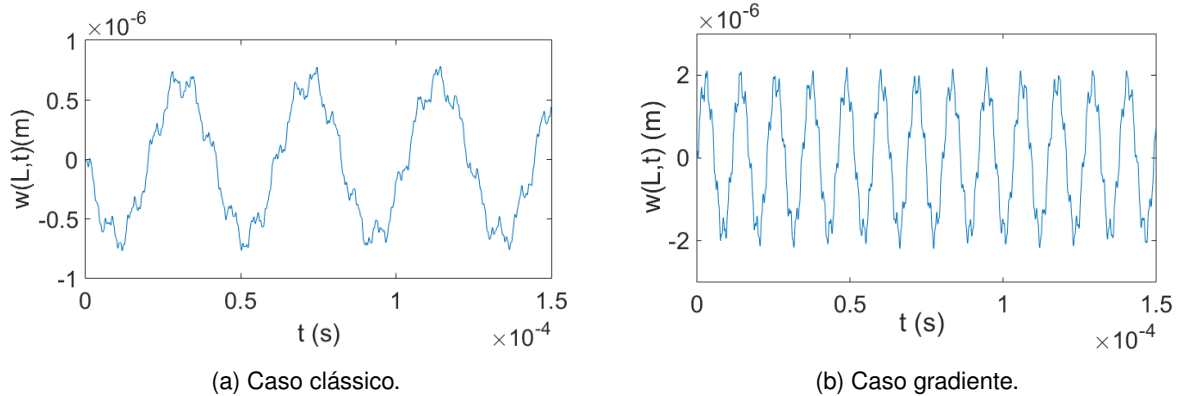


Figura 7.12 – Deslocamento na extremidade da microviga. Parâmetros: $d = 4\mu\text{m}$, $h = 20\mu\text{m}$, $b = 4h$, $L = 20h$, $V_b = 2V$ e $V_t = 2V$. Fonte: Autoria própria.

deravelmente através da espessura. Pode haver gradientes significativos, refletindo variações nas propriedades do material ou outras condições não homogêneas.

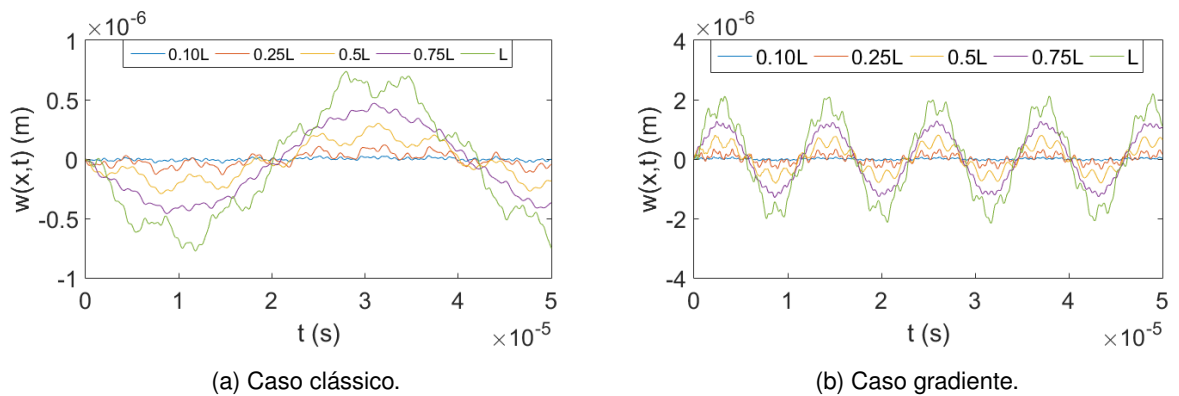


Figura 7.13 – Deslocamento em cinco pontos da microviga engastada. Parâmetros: $d = 4\mu\text{m}$, $h = 20\mu\text{m}$, $b = 4h$, $L = 20h$, $V_b = 2V$ e $V_t = 2V$. Fonte: Autoria própria.

As Figuras (7.14a) e (7.14b) apresentam as cinco primeiras componentes da decomposição do deslocamento da microviga engastada para os casos clássico e gradiente, respectivamente. Observa-se que a primeira componente da decomposição se destaca em relação às demais, em ambos os casos.

Aqui estão descrições simplificadas dos cinco primeiros modos normais para uma microviga engastada observadas a partir desses gráficos:

Primeiro Modo Normal (Modo Fundamental): A viga se deforma principalmente por flexão; a forma de onda de deformação é semelhante a uma função senoidal; a extremidade livre da viga tem um nó de deslocamento.

Segundo Modo Normal: Além da flexão, há uma variação adicional no padrão de deformação; o número de nós de deslocamento ao longo da viga aumenta para dois; a forma de onda se torna mais complexa.

Terceiro Modo Normal: O padrão de deformação se torna ainda mais complexo; Há mais nós de deslocamento ao longo da viga; cada modo normal subsequente adiciona mais nós e complexidade ao padrão de deformação.

Quarto Modo Normal: A complexidade do padrão de deformação continua a aumentar; mais nós de deslocamento aparecem.

Quinto Modo Normal: O padrão de deformação atinge um nível ainda maior de complexidade; o número de nós de deslocamento continua a aumentar.

A análise modal é conduzida numericamente e também usando software de simulação para calcular os modos normais e as formas associadas de deformação para a microviga engastada específica apresentada neste trabalho.

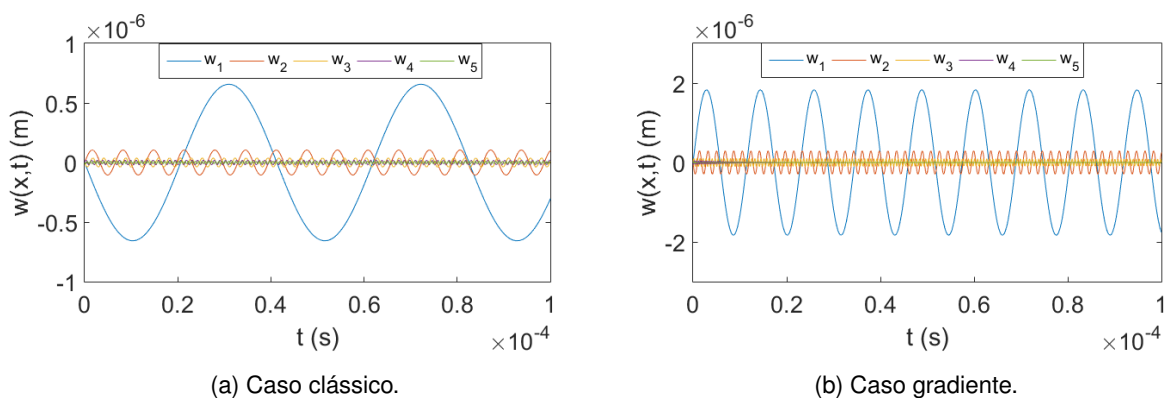


Figura 7.14 – Deslocamento dos cinco primeiros modos normais da microviga engastada. Parâmetros: $d = 4\mu m$, $h = 20\mu m$, $b = 4h$, $L = 20h$, $V_b = 2V$ e $V_t = 2V$. Fonte: Autoria própria.

As Figuras (7.15a) e (7.15b) apresentam o deslocamento da microviga em três tempos distintos para os casos clássico e gradiente, respectivamente, denotando as características de deformação da microviga engastada. Devido à consideração dos gradientes de deformação, os padrões de deformação ao longo da espessura da viga podem ser mais complexos do que os previstos pela teoria clássica.

A vibração da microviga engastada segue os modos normais de vibração associados ao sistema. O primeiro modo é o mais predominante. Para o primeiro modo normal, a deformação da viga ao longo do tempo segue um padrão senoidal, característico de uma oscilação harmônica simples. A frequência natural da vibração depende das propriedades da viga, como comprimento, material e momento de inércia da seção transversal.

Em condições ideais (sem amortecimento), a amplitude da oscilação pode permanecer constante ao longo do tempo, já que não há dissipação de energia. Se o sistema for sujeito a algum nível de amortecimento (por exemplo, devido a atrito interno ou dissipação de energia), a amplitude da oscilação diminui ao longo do tempo. Em situações mais complexas, onde múltiplos modos normais estão envolvidos, a

deformação da viga é uma sobreposição desses modos.

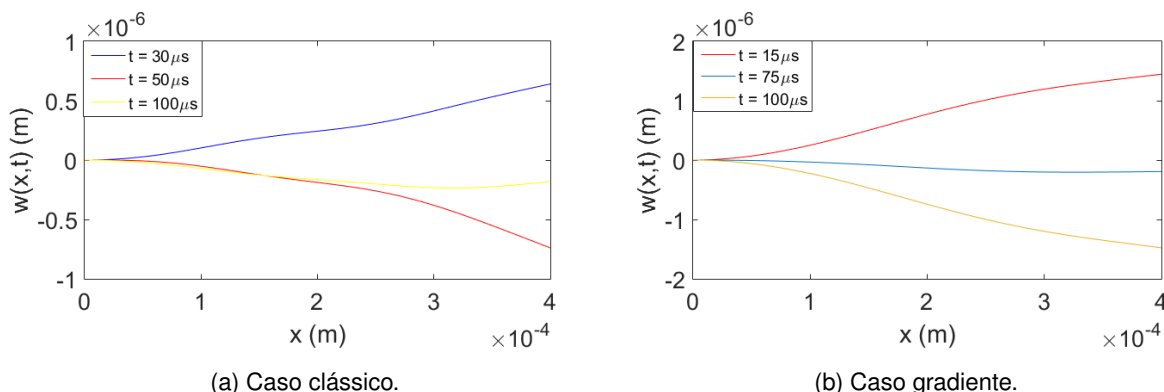


Figura 7.15 – Deslocamento no tempo. Parâmetros: $d = 4\mu\text{m}$, $h = 20\mu\text{m}$, $b = 4h$, $L = 20h$, $V_b = 2V$ e $V_t = 2V$. Fonte: Autoria própria.

Nesse contexto, percebe-se que comportamento ao longo do tempo é influenciado pelos modos normais de vibração, que são os padrões fundamentais de deformação. A resposta vibratória é caracterizada por uma combinação dos modos normais, e a variação temporal dependerá das frequências naturais associadas a esses modos.

Além disso, a amplitude das vibrações geralmente diminui ao longo do tempo devido à dissipação de energia, especialmente em escalas micro e nano, onde os efeitos de amortecimento podem ser significativos. A resposta dinâmica também depende das forças externas aplicadas ou perturbações que possam afetar a viga. A forma como a viga responde a essas forças ao longo do tempo é influenciada pela consideração dos gradientes de deformação.

As Figuras (7.16a)-(7.16d) mostram os gráficos da primeira coordenada generalizada e as Figuras (7.17a)-(7.17d) exibem os gráficos do deslocamento da extremidade da microviga engastada para os casos clássico e gradiente, adotando diferentes valores da espessura h , com o objetivo de verificar a relação da rigidez entre o caso clássico e o gradiente em função de h .

As Figuras (7.18a)-(7.18b) mostram os gráficos da primeira coordenada generalizada e do deslocamento na extremidade da microviga para os casos clássico e gradiente, adotando os parâmetros $h = 35\mu\text{m}$ e $L = 20h$, com parâmetros de força eletrostática $d = 4\mu\text{m}$, $b = 4h$, $V_b = 2V$ e $V_t = 2$. Observa-se que ocorreu *pull-in* para o caso gradiente.

A teoria clássica assume uma espessura constante ao longo da viga. A coordenada generalizada neste caso está associada a um único modo de vibração, como o primeiro modo normal de flexão. Se a viga for submetida a uma perturbação inicial (como uma deflexão inicial), a primeira coordenada generalizada varia ao longo do tempo seguindo uma função senoidal ou cossenoidal, dependendo das condições

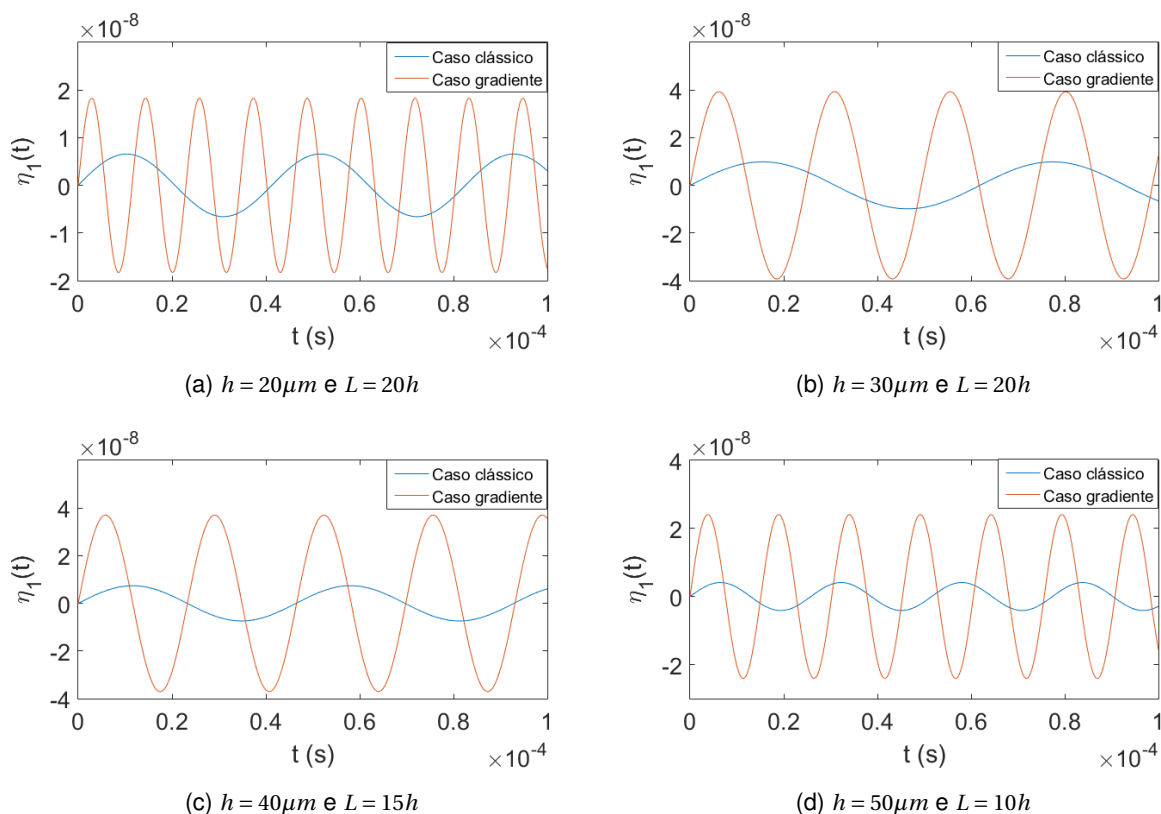


Figura 7.16 – Comparação da primeira coordenada generalizada η_1 para os casos clássico e gradiente. Parâmetros: $d = 4\mu m$, $b = 4h$, $V_b = 2V$ e $V_t = 2V$. Fonte: Autoria própria.

iniciais.

No caso gradiente, a teoria leva em conta variações nas deformações ao longo da espessura da viga. A coordenada generalizada, neste caso, pode levar em consideração não apenas a deformação média ao longo da espessura, mas também gradientes de deformação. O gráfico da primeira coordenada generalizada para o caso gradiente pode exibir variações mais complexas ao longo do tempo devido à consideração dos gradientes de deformação. A resposta dinâmica depende das características específicas da variação na espessura e das condições iniciais do sistema.

Assim, se houver variação na espessura da microviga, isso pode ser levado em conta na formulação do problema, especialmente na teoria da deformação gradiente, onde as variações na espessura podem afetar as deformações ao longo da viga.

As Figuras (7.19a) e (7.19b) mostram os gráficos da primeira coordenada generalizada e as Figuras (7.20a) e (7.20b) exibem o deslocamento na extremidade da microviga engastada comparando diferentes valores da espessura h para os casos clássico e gradiente, respectivamente, com o objetivo de observar a relação entre rigidez e a espessura.

No caso clássico, a deformação varia principalmente ao longo do comprimento da viga, seguindo os padrões de flexão associados aos modos normais de vibração.

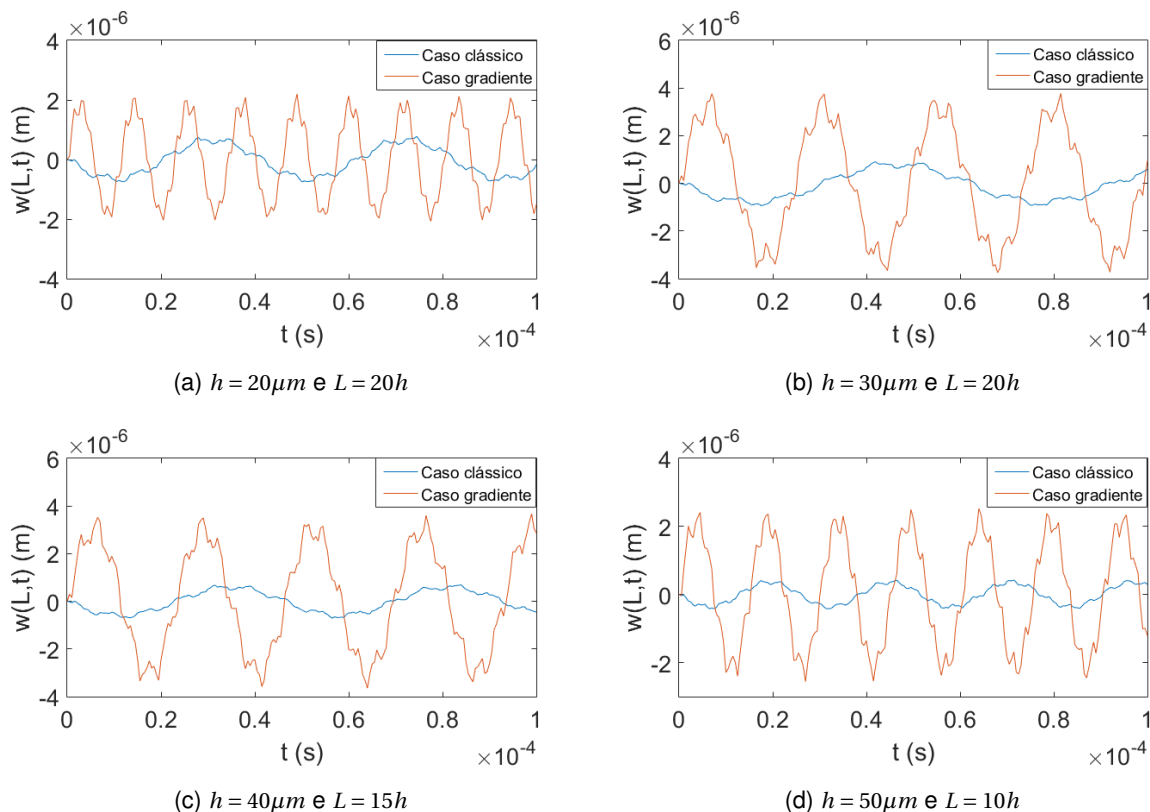


Figura 7.17 – Comparação do deslocamento da extremidade da microviga para os casos clássico e gradiente. Parâmetros: $d = 4\mu\text{m}$, $b = 4h$, $V_b = 2\text{V}$ e $V_t = 2\text{V}$. Fonte: Autoria própria.

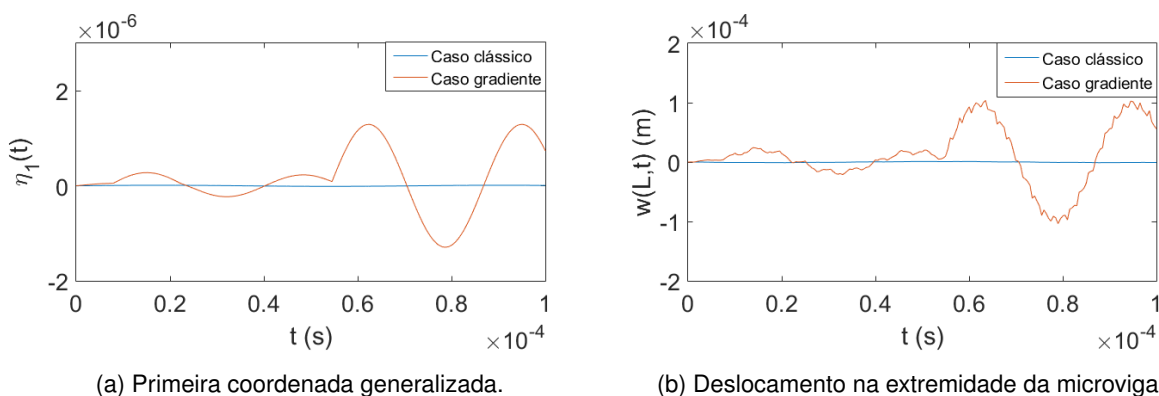


Figura 7.18 – Comparação dos casos clássico e gradiente para os parâmetros $h = 35\mu\text{m}$ e $L = 20h$. Fonte: Autoria própria.

No caso gradiente, com variação na espessura, pode haver uma distribuição não uniforme da deformação através da espessura da viga. Desse modo, a variação na espessura pode influenciar diretamente a distribuição de deformação ao longo da espessura, especialmente em uma análise que incorpora a teoria da deformação gradiente.

As Figuras (7.21a) e (7.21b) mostram os gráficos da primeira coordenada generalizada e as Figuras (7.22a) e (7.22b) exibem o deslocamento na extremidade da microviga engastada comparando diferentes valores do comprimento L para os ca-

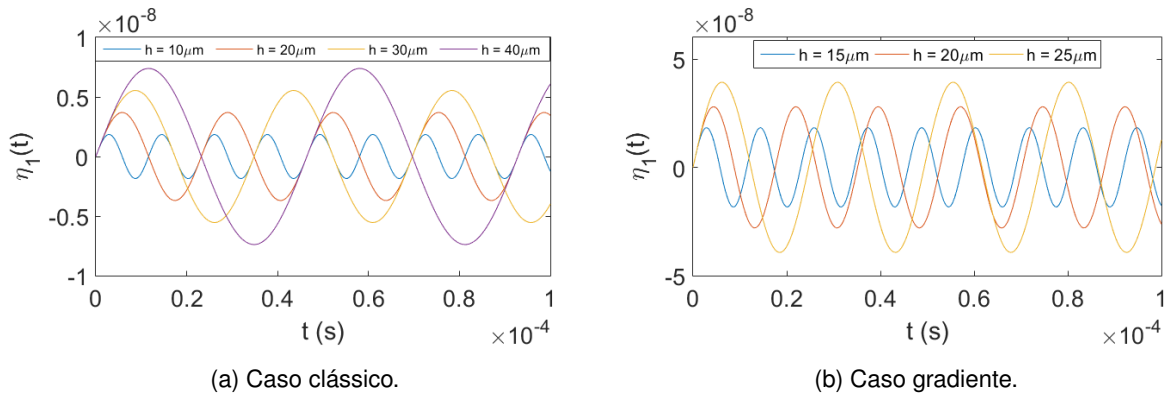


Figura 7.19 – Primeira coordenada generalizada para diferentes valores de h . Parâmetros: $d = 4\mu\text{m}$, $b = 4h$, $L = 15h$, $V_b = 2V$ e $V_t = 2V$. Fonte: Autoria própria.

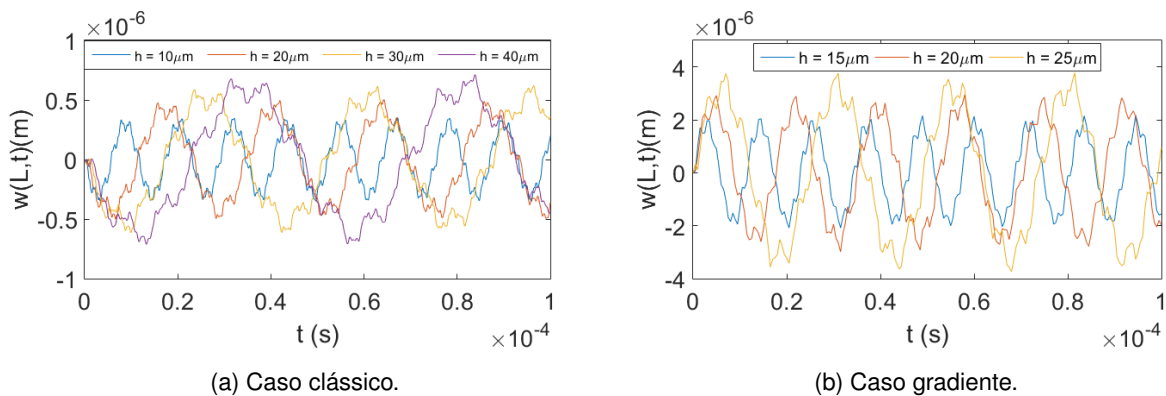


Figura 7.20 – Deslocamento na extremidade da microviga para diferentes valores de h . Parâmetros: $d = 4\mu\text{m}$, $b = 4h$, $L = 15h$, $V_b = 2V$ e $V_t = 2V$. Fonte: Autoria própria.

dos clássico e gradiente, respectivamente, com o intuito de confirmar a dependência inversamente proporcional da rigidez em relação ao quadrado do comprimento L .

A Figura (7.21a) mostra o comportamento da primeira coordenada generalizada e a Figura (7.21b) mostra o comportamento da deformação para diferentes valores de L utilizando a teoria clássica. A coordenada generalizada, neste caso, pode estar associada a modos de vibração específicos ou a padrões de deformação ao longo da viga. A deformação ao longo do comprimento segue os padrões associados aos modos normais de vibração. A teoria clássica considera que a deformação é uniforme através da espessura.

As Figuras (7.22a) e (7.22b) representam a primeira coordenada generalizada para diferentes valores de L utilizando a teoria clássica. A coordenada generalizada neste caso pode incluir informações sobre gradientes de deformação e variações ao longo do comprimento.

A teoria clássica de vigas de Euler-Bernoulli é válida para vigas longas e finas, assumindo que o comprimento da viga é muito maior que sua largura e espessura. Va-

riações no comprimento podem ser tratadas, mas é importante garantir que a relação L /dimensões transversais seja grande o suficiente.

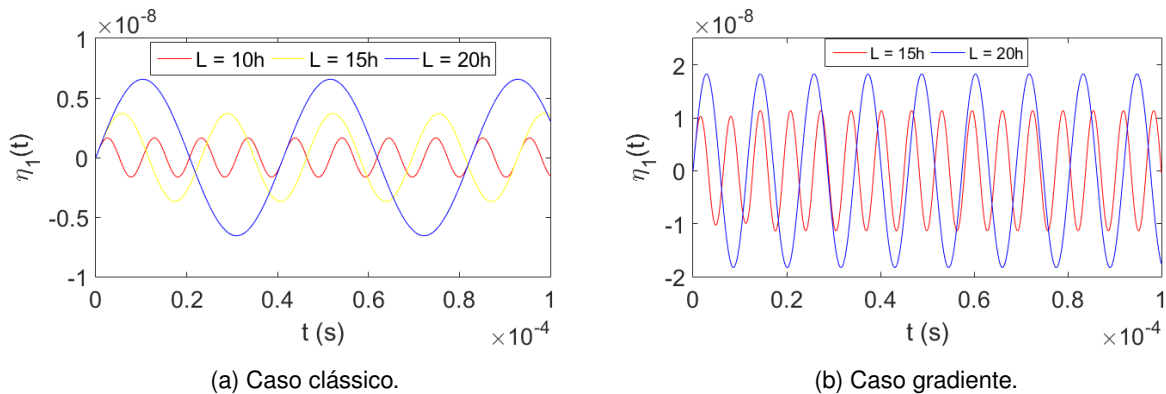


Figura 7.21 – Primeira coordenada generalizada para diferentes valores de L . Parâmetros: $d = 4\mu\text{m}$, $h = 20\mu\text{m}$, $b = 4h$, $V_b = 2V$ e $V_t = 2V$. Fonte: Autoria própria.

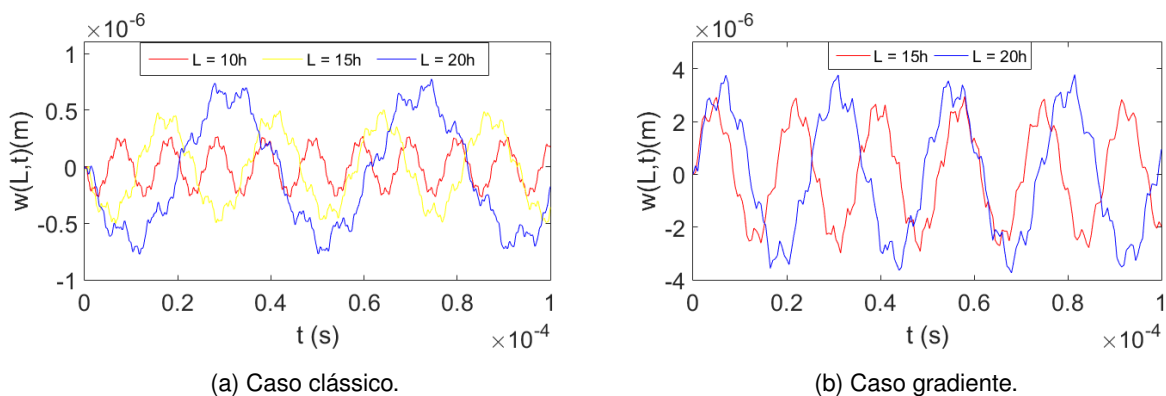


Figura 7.22 – Deslocamento para diferentes valores de L . Parâmetros: $d = 4\mu\text{m}$, $h = 20\mu\text{m}$, $b = 4h$, $V_b = 2V$ e $V_t = 2V$. Fonte: Autoria própria.

No contexto de microvigas e estruturas microeletromecânicas (MEMS), o termo *pull-in* refere-se a um fenômeno no qual a estrutura alcança uma condição crítica em que as forças eletrostáticas aplicadas são tão grandes que a estrutura colapsa ou entra em contato com uma superfície subjacente. Este fenômeno é particularmente relevante em dispositivos MEMS onde são aplicadas forças eletrostáticas para movimentar ou deformar a estrutura.

A diferença no comportamento da coordenada generalizada no método gradiente com *pull-in* e sem *pull-in* pode ser entendida considerando a influência dos gradientes de deformação e as forças eletrostáticas aplicadas.

Antes do *pull-in*, a estrutura responde de maneira elástica às forças aplicadas. A teoria gradiente leva em consideração gradientes na deformação ao longo da espessura da viga. O comportamento da coordenada generalizada reflete esses gradientes e como eles influenciam a deformação global. Pode haver uma resposta mais

complexa ao longo do tempo ou sob diferentes condições, devido à inclusão dos gradientes de deformação. O entendimento desse comportamento é crucial para o projeto e a operação segura de dispositivos MEMS.

Com o *pull-in*, a estrutura atinge uma condição crítica em que as forças eletrostáticas superam a rigidez da estrutura, levando ao colapso ou ao contato com a superfície subjacente. A coordenada generalizada pode indicar a perda de estabilidade da configuração elástica anterior, pois a estrutura entra em um regime de comportamento não linear. A deformação na região do *pull-in* pode ser significativa, e a coordenada generalizada refletirá essa deformação extrema. A análise do comportamento da coordenada generalizada em condições de *pull-in* é crucial para entender a estabilidade da estrutura, os limites de operação do dispositivo MEMS e evitar falhas catastróficas. As simulações numéricas e análises teóricas são frequentemente usadas para prever e entender o *pull-in*, considerando fatores como as forças eletrostáticas, características materiais e geometria da estrutura.

Assim, a principal diferença no comportamento da coordenada generalizada entre os casos com e sem *pull-in* está associada à transição de uma resposta elástica para uma resposta não linear, onde a estrutura colapsa ou entra em contato com a superfície subjacente.

As Figuras (7.23a)-(7.23d) apresentam o comportamento da deformação para diferentes valores de tensão entre as duas placas da microviga engastada para as teorias clássica e gradiente, detectando algumas faixas de tensão que provocam *pull-in*, mostrando, assim, que o nosso estudo analítico-numérico-computacional do modelo possibilita estimar faixas de parâmetros para projetos MEMS.

A variação da tensão em uma microviga pode ter efeitos significativos no comportamento da coordenada generalizada e da deformação.

Na teoria clássica de Euler-Bernoulli, presume-se uma distribuição de tensão uniforme através da seção transversal da viga. A coordenada generalizada pode estar associada a modos normais de vibração ou a padrões de deformação, dependendo da natureza da carga aplicada. A deformação ao longo da viga será uniforme se a tensão for uniforme. Os gráficos da coordenada generalizada e da deformação podem seguir padrões harmônicos ou modos normais de vibração, dependendo das condições e carregamento.

Na teoria da deformação gradiente, a variação da tensão através da espessura da viga é explicitamente considerada. Pode haver gradientes significativos na distribuição da tensão. A coordenada generalizada pode refletir variações nos gradientes de deformação e na distribuição da tensão através da espessura. A deformação ao longo da espessura pode ser não uniforme, especialmente se houver variação na ten-

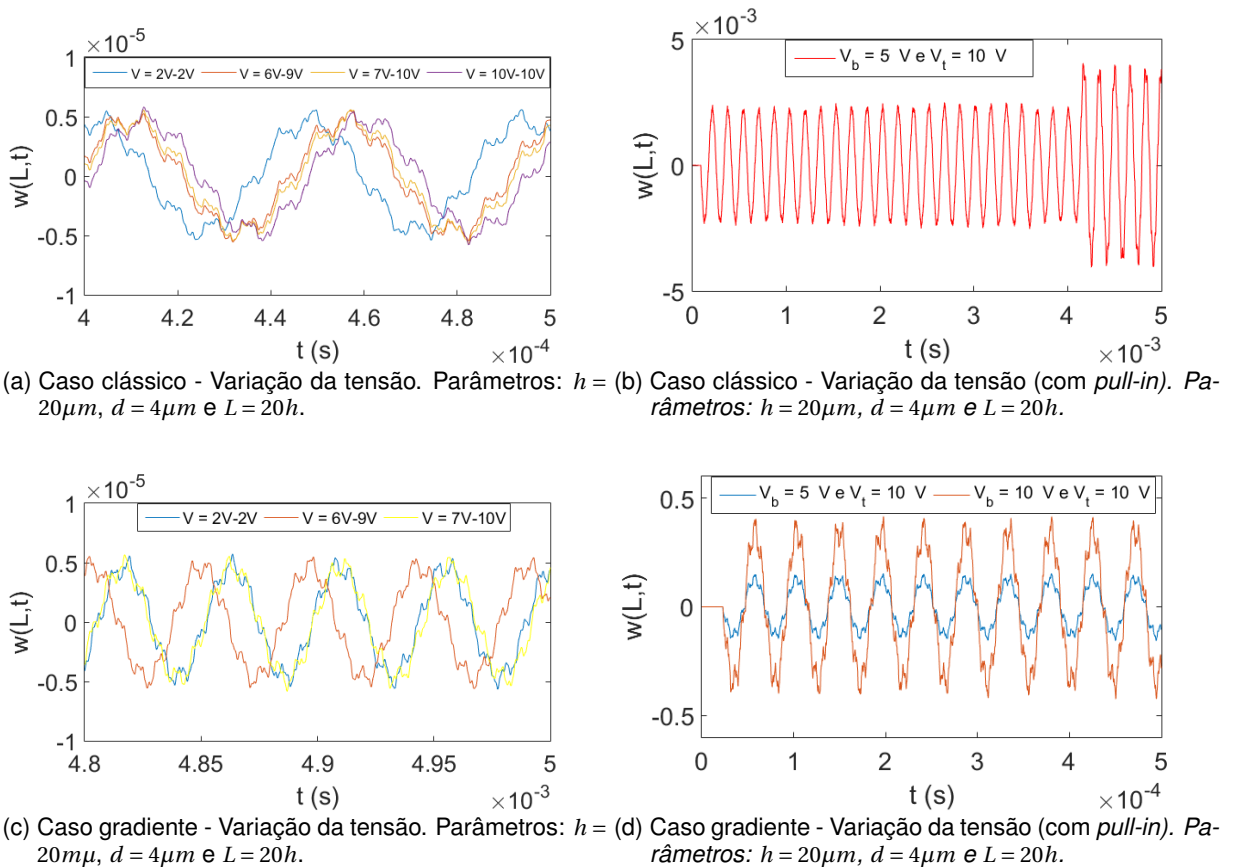


Figura 7.23 – Deformação da extremidade da microviga para diferentes variações de tensão. Fonte: Autoria própria.

são. Isso pode levar a padrões de deformação mais complexos. A teoria gradiente é especialmente útil quando há variações importantes nas condições de carregamento e distribuição de tensão.

Assim, a distribuição da tensão tem um impacto direto na resposta mecânica da microviga. A teoria clássica é uma boa aproximação em muitos casos, mas a teoria gradiente pode ser necessária para situações em que as variações locais na tensão são significativas.

É importante ressaltar que o comportamento específico da deformação depende das condições exatas do problema, das propriedades do material e das cargas aplicadas. A teoria da deformação gradiente é particularmente útil para capturar o fenômeno da dependência da microescala.

Capítulo 8

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O estudo de microvigas utilizando a teoria da deformação gradiente é, sem dúvida, relevante e importante para a Ciência dos Materiais. A deformação gradiente é uma abordagem que considera as variações locais na deformação, tornando-se particularmente crucial quando lidamos com estruturas em escalas microscópicas, como é o caso das microvigas. A importância desse estudo pode ser destacada pelos seguintes pontos:

Compreensão Detalhada do Comportamento Mecânico: A teoria da deformação gradiente permite uma compreensão mais detalhada do comportamento mecânico de materiais em escalas reduzidas. Em estruturas microscópicas, os efeitos da deformação gradiente podem desempenhar um papel significativo, influenciando propriedades mecânicas e comportamentos estruturais.

Modelagem Precisa de Microestruturas: Em sistemas microeletromecânicos (MEMS) e em outros dispositivos em escala micro, as microvigas frequentemente exibem características particulares que não podem ser totalmente representadas pela teoria clássica. A introdução da deformação gradiente permite uma modelagem mais precisa dessas microestruturas, considerando as variações locais.

Aplicações em Tecnologias Emergentes: Com o avanço da nanotecnologia e o desenvolvimento de dispositivos em escala micro e nano, a compreensão e modelagem precisa do comportamento das microvigas tornam-se essenciais. Isso é particularmente relevante em aplicações como sensores, atuadores e sistemas microeletromecânicos.

Inovação em Materiais e Tecnologias: O estudo das microvigas utilizando a teoria da deformação gradiente contribui para a inovação em materiais e tecnologias. Essa abordagem possibilita a concepção de materiais mais eficientes e dispositivos

mais precisos, atendendo às demandas crescentes por avanços em diversas áreas.

Portanto, a análise de microvigas utilizando a teoria da deformação gradiente não apenas aprimora a compreensão fundamental do comportamento mecânico em escalas microscópicas, mas também tem implicações práticas em aplicações tecnológicas, consolidando sua importância na Ciência dos Materiais.

Em virtude do que foi mencionado, este estudo proporcionou uma compreensão aprofundada do comportamento dinâmico de transdutores, focando na influência das não linearidades devido ao acoplamento entre as variáveis físicas do processo, especificamente, deslocamento e força elétrica. A abordagem por meio das projeções, feitas ao longo dos modos normais levou a algumas conclusões importantes. Primeiro, permitiu constatar que a aplicação da teoria de deformação gradiente resulta em uma modelagem mais precisa, destacando-se pela capacidade de capturar fenômenos característicos de sistemas não lineares, como bifurcações, e aumento da frequência. Segundo é que, as equações de controle assumiram um formato igual aquele usado para controle clássico, ou seja, mesmo sendo problemas modelados no âmbito de sistemas distribuídos, o processo foi descrito por equações diferenciais ordinárias no tempo.

Destaca-se também que a solução apresentada neste trabalho, por meio dos autovalores do operador rigidez, não apresentou nenhum paralelo com a literatura pesquisada, o que mostra o caráter inovador da metodologia usada no trabalho. Salienta-se ainda alguns importantes resultados extraídos da análise numérica conduzida no capítulo (7), principalmente o comportamento das coordenadas generalizadas apresentadas nas Figuras (7.9b) que mostram o comportamento dissipativo, características presentes apenas em sistemas não lineares, haja vista a ausência de parâmetros dissipativos na equação de equilíbrio original (7.1). Pontuam-se as características apresentadas nas Figuras (7.16a)-(7.17d), que corroboram as informações feitas no início deste capítulo, sobre maior precisão dos modelos baseados em deformação gradiente.

O estudo aprofundado sobre transdutores e microvigas apresentado nesta tese de doutorado fornece uma significativa contribuição para o campo de sistemas microeletromecânicos (MEMS) e ciência dos materiais. A compreensão do papel crucial desempenhado pelos transdutores no monitoramento de estruturas, convertendo variáveis físicas em sinais elétricos processáveis, foi a base para uma abordagem inovadora e aprofundada.

A escolha da teoria da elasticidade para a deformação gradiente na modelagem das microvigas engastadas de Euler-Bernoulli demonstrou um comprometimento com a precisão e a adaptação a contextos em escala microscópica. A introdução de um modelo não linear para representar as forças eletrostáticas acrescentou uma ca-

mada de complexidade ao problema, refletindo uma abordagem realista para simular o comportamento dessas estruturas em condições práticas.

A obtenção da equação diferencial parcial da deformação e a aplicação do princípio variacional de Hamilton ressaltam a rigorosa fundamentação teórica do trabalho. A análise subsequente da equação característica, juntamente com a categorização das raízes, proporcionou uma base sólida para a determinação das autofrequências e autofunções normalizadas. A utilização do método de Galerkin e da Quadratura de Gauss-Legendre com quinze pontos na resolução das equações diferenciais não lineares demonstra uma abordagem metodológica avançada e precisa.

Os experimentos computacionais, documentados com detalhes na seção dedicada, apresentam de forma visual os modos normais, as coordenadas generalizadas e a deformação para os casos clássico e gradiente. As comparações sistemáticas entre os resultados obtidos com a metodologia proposta e os resultados da teoria clássica revelaram insights valiosos sobre as relações fundamentais entre rigidez e escala da estrutura, proporcionando uma validação robusta para o modelo gradiente.

Em síntese, os resultados alcançados nesta pesquisa reforçam a tese de que o modelo gradiente oferece uma representação mais satisfatória de sistemas microeletromecânicos em comparação ao modelo clássico. Esse entendimento, apoiado por resultados experimentais disponíveis na literatura, não apenas avança o conhecimento fundamental na área, mas também sugere aplicações práticas em tecnologias emergentes.

Perspectivas futuras podem incluir a expansão desses modelos para contextos específicos de aplicações industriais, bem como a consideração de fatores adicionais que possam influenciar o comportamento das microvigas. A interseção entre teoria e experimentação continuará a ser um campo fértil para pesquisas subsequentes, visando contribuir para o desenvolvimento contínuo de tecnologias microeletromecânicas inovadoras e eficientes.

REFERÊNCIAS

- ABDEL-RAHMAN, E. M.; YOUNIS, M. I.; NAYFEH, A. H. Characterization of the mechanical behavior of an electrically actuated microbeam. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, IOP Publishing, v. 12, n. 6, p. 759, 2002. Citado na página 52.
- ANSARI, R.; GHOLAMI, R.; SAHMANI, S. Free vibration analysis of size-dependent functionally graded microbeams based on the strain gradient timoshenko beam theory. *Composite Structures*, Elsevier, v. 94, n. 1, p. 221–228, 2011. Citado na página 51.
- ANSARI, R. *et al.* Size-dependent bending, buckling and free vibration of functionally graded timoshenko microbeams based on the most general strain gradient theory. *Composite Structures*, Elsevier, v. 100, p. 385–397, 2013. Citado na página 51.
- ARJMAND, M. Chaos control in afm systems using nonlinear delayed feedback via sliding mode control. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, v. 2, p. 993–1001, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 52.
- ARJMAND, M. T. *et al.* Chaos control in afm systems using nonlinear delayed feedback via sliding mode control. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, Elsevier, v. 2, n. 3, p. 993–1001, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 52.
- BAILEY, J. *et al.* Evidence relating to object-oriented software design: A survey. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON EMPIRICAL SOFTWARE ENGINEERING AND MEASUREMENT, 1. , Computer Society, 2007. Citado na página 54.
- BOGUE, R. Recent developments in mems sensors: a review of applications, markets and technologies. *Sensor Review*, v. 33, n. 4, p. 300–304, 2013. Citado na página 29.
- BUI, D.-K. *et al.* A modified firefly algorithm-artificial neural network expert system for predicting compressive and tensile strength of high-performance concrete. *Construction and Building Materials*, Elsevier, v. 180, p. 320–333, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 55, 56 e 57.
- CHEN, G. *et al.* Disclosing the annihilation effect of ion-implantation induced defects in single-crystal diamond by resonant mems. *Diamond and Related Materials*, v. 138, 2023. Citado 4 vezes nas páginas 22, 23, 24 e 25.
- CHENG, J. *et al.* Failure analysis from microcracks to a dominant crack in mems thin films using combined damage and fracture mechanics. *Engineering Failure Analysis*, v. 152, 2023. Citado 3 vezes nas páginas 22, 24 e 28.

- CUNNINGHAM, M. *et al.* Active vibration control and actuation of a small cantilever for applications in scanning probe instruments. *Sensors and Actuators A: Physical*, Elsevier, v. 50, n. 1-2, p. 147–150, 1995. Citado na página 52.
- ERINGEN, A.; SUHUBI, E. Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, v. 1, p. 417–438, 1965. Citado na página 47.
- FLECK, N. *et al.* Strain gradient plasticity: theory and experiment. *Acta Metallurgica et materialia*, Elsevier, v. 42, n. 2, p. 475–487, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 53.
- GRANRUT, M. D.; SIMON, A.; DIAS, D. Artificial neural networks for the interpretation of piezometric levels at the rock-concrete interface of arch dams. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 178, p. 616–634, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 55, 56 e 57.
- HAN, T. *et al.* An ensemble machine learning approach for prediction and optimization of modulus of elasticity of recycled aggregate concrete. *Construction and Building Materials*, v. 244, p. 158–271, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 56.
- HOANG, N. D. Estimating punching shear capacity of steel fibre reinforced concrete slabs using sequential piecewise multiple linear regression and artificial neural network. *Measurement*, Elsevier, v. 137, p. 58–70, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 55, 56 e 57.
- HOSSAIN, M. I. *et al.* Mems-based energy harvesting devices for low-power applications – a review. *Results in Engineering*, v. 19, 2023. Citado 5 vezes nas páginas 23, 24, 25, 26 e 28.
- KAHROBAIYAN, M. *et al.* A nonlinear strain gradient beam formulation. *International Journal of Engineering Science*, Elsevier, v. 49, n. 11, p. 1256–1267, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 53.
- _____. A strain gradient functionally graded euler–bernoulli beam formulation. *International Journal of Engineering Science*, Elsevier, v. 52, p. 65–76, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 53.
- KAMBOOZIA, N.; ZIARI, H.; BEHBAHANI, H. Artificial neural networks approach to predicting rut depth of asphalt concrete by using of visco-elastic parameters. *Construction and Building Materials*, Elsevier, v. 158, p. 873–882, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 55, 56 e 57.
- KHASHMAN, A.; AKPINAR, P. Non-destructive prediction of concrete compressive strength using neural networks. *Procedia Computer Science*, Elsevier, v. 108, p. 2358–2362, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 55, 56 e 57.
- KONG, S. *et al.* Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory. *International Journal of Engineering Science*, Elsevier, v. 47, n. 4, p. 487–498, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 47, 48, 49 e 53.
- KRAVCHUK, R.; LANDIS, E. N. Acoustic emission-based classification of energy dissipation mechanisms during fracture of fiber-reinforced ultra-high-performance concrete. *Construction and Building Materials*, Elsevier, v. 176, p. 531–538, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 55, 56 e 57.

- LAM, D. C. *et al.* Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Elsevier, v. 51, n. 8, p. 1477–1508, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 47, 48 e 53.
- MA, Q.; CLARKE, D. R. Size dependent hardness of silver single crystals. *Journal of Materials Research*, Springer, v. 10, n. 4, p. 853–863, 1995. Citado na página 53.
- MAGRAB, E. B. *Vibrations of elastic systems: With applications to MEMS and NEMS*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 184. Citado 3 vezes nas páginas 35, 36 e 38.
- MINDLIN, R.; ESHEL, N. On first strain-gradient theories in linear elasticity. *International journal of solids and structures*. *International Journal of Solids and Structures*, v. 4, p. 109–124, 1968. Citado na página 47.
- MOJAHEDI, M. Static pull-in analysis of electrostatically actuated microbeams using homotopy perturbation method. *Applied Mathematical Modelling*, v. 34, p. 1032–1041, 2010. Citado na página 53.
- MOJAHEDI, M.; ZAND, M. M.; AHMADIAN, M. Static pull-in analysis of electrostatically actuated microbeams using homotopy perturbation method. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 34, n. 4, p. 1032–1041, 2010. Citado na página 53.
- NAYFEH, A. H. *Perturbation methods*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. Citado na página 51.
- NIKBIN, I. M.; RAHIMI, S.; ALLAHYARI, H. A new empirical formula for prediction of fracture energy of concrete based on the artificial neural network. *Engineering Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 186, p. 466–482, 2017. Citado na página 55.
- NITHYA, G. *et al.* Study and simulation of mems electrostatic actuators. *Materials Today: Proceedings*, 2023. Citado na página 28.
- PETERSEN, K. *et al.* Systematic mapping studies in software engineering. In: 12TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON EVALUATION AND ASSESSMENT IN SOFTWARE ENGINEERING (EASE), 12. [S.l.], 2008. p. 1–10. Citado na página 54.
- QIAN, Y. Analytical approximations to nonlinear vibration of an electrostatically actuated microbeam. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, v. 17, p. 1947–1955, 2012. Citado na página 52.
- RAO, S. S. *Vibration of Continuous Systems*. [S.l.]: Wiley, 2007. Citado 7 vezes nas páginas 38, 39, 42, 48, 50, 64 e 66.
- _____. *Mechanical Vibrations*. [S.l.]: Prentice Hall, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 30, 33, 37 e 51.
- REZAZADEH, G.; TAHMASEBI, A.; ZIAEI-RAD, S. Nonlinear electrostatic behavior for two elastic parallel fixed–fixed and cantilever microbeams. *Mechatronics*, Elsevier, v. 19, n. 6, p. 840–846, 2009. Citado na página 52.
- SCHWARZER, M. *et al.* Learning to fail: Predicting fracture evolution in brittle material models using recurrent graph convolutional neural networks. *Computational Materials Science*, Elsevier, v. 162, p. 322–332, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 57.

- STHUTHI, A. *et al.* Design and simulation of dual-axis mems accelerometer. *Materials Today: Proceedings*, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- TOCCI RONALD J.; WIDNER, N. S.; MOSS, G. L. *Sistemas Digitais: Princípios e Aplicações*. [S.l.]: Pearson, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 23, 24 e 34.
- VAGIA, M. A frequency independent approximation and a sliding mode control scheme for a system of a micro-cantilever beam. *ISA transactions*, Elsevier, v. 51, n. 2, p. 325–332, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 52.
- _____. _____. *ISA Transactions*, v. 51, p. 325–332, 2012. Citado na página 52.
- VAGIA, M.; NIKOLAKOPOULOS, G.; TZES, A. Design of a robust pid-control switching scheme for an electrostatic micro-actuator. *Control Engineering Practice*, Elsevier, v. 16, n. 11, p. 1321–1328, 2008. Citado na página 52.
- VATANKHAH, R. Observer-based vibration control of non-classical microcantilevers using extended kalman filters. *Applied Mathematical Modelling*, v. 39, p. 5986–5996, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 53.
- VATANKHAH, R. *et al.* Nonlinear forced vibration of strain gradient microbeams. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 37, n. 18-19, p. 8363–8382, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 40, 51, 52 e 53.
- VATANKHAH, R.; KARAMI, F.; SALARIEH, H. Observer-based vibration control of non-classical microcantilevers using extended kalman filters. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 39, n. 19, p. 5986–5996, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 40, 51, 52 e 53.
- VATANKHAH, R. *et al.* Boundary stabilization of non-classical micro-scale beams. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 37, n. 20-21, p. 8709–8724, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 40, 51, 52 e 53.
- _____. Exact boundary controllability of vibrating non-classical euler–bernoulli micro-scale beams. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 418, n. 2, p. 985–997, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 40, 52 e 53.
- WANG, B.; ZHAO, J.; ZHOU, S. A micro scale timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Elsevier, v. 29, n. 4, p. 591–599, 2010. Citado na página 52.
- YEN, J.-Y.; LAN, K.-J.; KRAMAR, J. A. Active vibration isolation of a large stroke scanning probe microscope by using discrete sliding mode control. *Sensors and Actuators A: Physical*, Elsevier, v. 121, n. 1, p. 243–250, 2005. Citado na página 52.
- YOUNIS, M. I. *MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011. Citado 9 vezes nas páginas 29, 35, 36, 37, 38, 39, 42, 47 e 50.
- ZHANG, W. Adaptive vibration control of micro-cantilever beam with piezoelectric actuator in mems. *Int J Adv Manuf Technol*, v. 28, p. 321–327, 2006. Citado na página 52.

- ZHANG, W.; MENG, G.; LI, H. Adaptive vibration control of micro-cantilever beam with piezoelectric actuator in mems. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Springer, v. 28, n. 3-4, p. 321–327, 2006. Citado na página [52](#).
- ZHAO, J. *et al.* Nonlinear microbeam model based on strain gradient theory. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 36, n. 6, p. 2674–2686, 2012. Citado na página [53](#).
- ZHOU, Y. *et al.* Explicit neural network model for predicting frp-concrete interfacial bond strength based on a large database. *Composite Structures*, Elsevier, v. 240, p. 981–998, 2020. Citado 2 vezes nas páginas [56](#) e [57](#).

APÊNDICES

APÊNDICE A

Implementação numérica para encontrar soluções para um problema de autovalores relacionado à teoria da elasticidade em uma microviga usando a teoria de Euler-Bernoulli.

```
clear all;          % Limpa todas as variáveis da área de trabalho
format long e;     % Configura a exibição de números em notação científica
clc;               % Limpa a janela de comando

% Parâmetros da micro viga
E = 1.44e9;        % Módulo de elasticidade (GPa)
nu = 0.38;         % Coeficiente de Poisson
mu = 0.5217e9;    % Parâmetro calculado (GPa)
l = 17.6e-6;       % Comprimento inicial (m)
L0 = l; L1 = l; L2 = l; % Outros comprimentos (m)
d = 40e-6;         % Dimensão (m)
h = 20e-6;         % Altura (m)
b = 4 * h;         % Largura (m)
I = (b * h^3) / 12; % Momento de inércia (m^4)
A = b * h;         % Área da seção transversal (m^2)
Vb = 2;           % Parâmetro Vb
Vt = 2;           % Parâmetro Vt
L = 20 * h;       % Comprimento L (m)

S = vpa(E * I + 2 * mu * A * L0^2 + (8/15) * mu * A * L1^2 + mu * A * L2^2, 160);
K = vpa(2 * mu * I * L0^2 + (4/5) * mu * I * L1^2, 160);
ro = 1000;        % Densidade (kg/m^3)
m = ro * A;
```

```

a1 = 0.7 * L;
a2 = L;

% Cálculos dos coeficientes beta1, beta2, ..., beta8
beta1 = input('entre com o valor de beta1 inicial: \n');
beta2 = vpa(sqrt(((S/K + beta1^2) - sqrt((S/K + beta1^2) * (S/K - 3 * beta1^2)))/2),
160));
beta3 = vpa(sqrt(((S/K + beta1^2) + sqrt((S/K + beta1^2) * (S/K - 3 * beta1^2)))/2),
160));
beta4 = vpa((S * beta1^3 + K * beta1^5), 160);
beta5 = vpa((S * beta2^3 - K * beta2^5), 160);
beta6 = vpa((S * beta3^3 - K * beta3^5), 160);
beta7 = vpa((beta1^3 + beta1 * beta3^2) / (beta2^3 - beta2 * beta3^2), 160);
beta8 = vpa((beta1^3 + beta1 * beta2^2) / (beta3^3 - beta3 * beta2^2), 160);
beta1L = vpa(beta1 * L, 160);

% Cálculos dos coeficientes W1, W2, ..., W6
W1 = vpa(sin(beta1 * L), 160);
W2 = vpa(cos(beta1 * L), 160);
W3 = vpa(sinh(beta2 * L), 160);
W4 = vpa(cosh(beta2 * L), 160);
W5 = vpa(sinh(beta3 * L), 160);
W6 = vpa(cosh(beta3 * L), 160);

% Cálculos dos determinantes Delta, Delta1, Delta2
Delta = vpa((beta1^4 * beta3^2 + beta1^2 * beta3^4) * W1 * W6 + ...
beta7 * (beta1^4 * beta2^2 + beta1^2 * beta2^4) * W2 * W3 + ...
beta7 * (beta2^4 * beta3^2 - beta2^2 * beta3^4) * W3 * W6 + ...
beta8 * ((beta1^4) * (beta3^2) + (beta1^2) * (beta3^4)) * W2 * W5, 160);

Delta1 = vpa((beta1^4 * beta3^2 + beta1^2 * beta3^4) * W2 * W6 - ...

```

```

(beta1^4 * beta2^2 + beta1^2 * beta2^4) * W2 * W4 - ...
(beta2^4 * beta3^2 - beta2^2 * beta3^4) * W4 * W6, 160);

Delta2 = vpa((beta1^2 * beta2^4 + beta1^4 * beta2^2) * W1 * W4 - ...
(beta1^2 * beta3^4 + beta1^4 * beta3^2) * W1 * W6 - ...
beta7 * (beta2^4 * beta3^2 - beta2^2 * beta3^4) * W3 * W6 - ...
beta8 * (beta2^4 * beta3^2 - beta2^2 * beta3^4) * W4 * W5, 160);

% Cálculos dos coeficientes C1, C2
C1 = vpa(Delta1 / Delta, 160);
C2 = vpa(Delta2 / Delta, 160);

% Cálculo do coeficiente alpha
alpha = ((K * (beta1^6)) + (S * (beta1^4))) / (ro * A);

% Inicialização de variáveis
sinal = 1;
s = 1;
k = 1;
ii = 0;

% Loop para encontrar beta1 satisfazendo a condição
while k <= 10 || ii == 10^400
    beta1 = vpa(beta1 + 10^(s), 50);
    ii = ii + 1;

    % Atualização dos coeficientes beta2, ..., beta8
    beta2 = vpa(sqrt(((S/K + beta1^2) - sqrt((S/K + beta1^2) * (S/K - 3 *
beta1^2)))/2), 160));
    beta3 = vpa(sqrt(((S/K + beta1^2) + sqrt((S/K + beta1^2) * (S/K - 3 *
beta1^2)))/2), 160));

```

```

beta4 = vpa((S * beta1^3 + K * beta1^5), 160);
beta5 = vpa((S * beta2^3 - K * beta2^5), 160);
beta6 = vpa((S * beta3^3 - K * beta3^5), 160);
beta7 = vpa((beta1^3 + beta1 * beta3^2) / (beta2^3 - beta2 * beta3^2), 160);
beta8 = vpa((beta1^3 + beta1 * beta2^2) / (beta3^3 - beta3 * beta2^2), 160);
beta1L = vpa(beta1 * L, 160);

```

```

% Atualização dos coeficientes W1, W2, ..., W6

```

```

W1 = vpa(sin(beta1 * L), 160);
W2 = vpa(cos(beta1 * L), 160);
W3 = vpa(sinh(beta2 * L), 160);
W4 = vpa(cosh(beta2 * L), 160);
W5 = vpa(sinh(beta3 * L), 160);
W6 = vpa(cosh(beta3 * L), 160);

```

```

% Atualização dos determinantes Delta, Delta1, Delta2

```

```

Delta = vpa((beta1^4 * beta3^2 + beta1^2 * beta3^4) * W1 * W6 + ...
    beta7 * (beta1^4 * beta2^2 + beta1^2 * beta2^4) * W2 * W3 + ...
    beta7 * (beta2^4 * beta3^2 - beta2^2 * beta3^4) * W3 * W6 + ...
    beta8 * ((beta1^4) * (beta3^2) + (beta1^2) * (beta3^4)) * W2 * W5, 160);

```

```

Delta1 = vpa((beta1^4 * beta3^2 + beta1^2 * beta3^4) * W2 * W6 - ...
    (beta1^4 * beta2^2 + beta1^2 * beta2^4) * W2 * W4 - ...
    (beta2^4 * beta3^2 - beta2^2 * beta3^4) * W4 * W6, 160);

```

```

Delta2 = vpa((beta1^2 * beta2^4 + beta1^4 * beta2^2) * W1 * W4 - ...
    (beta1^2 * beta3^4 + beta1^4 * beta3^2) * W1 * W6 - ...
    beta7 * (beta2^4 * beta3^2 - beta2^2 * beta3^4) * W3 * W6 - ...
    beta8 * (beta2^4 * beta3^2 - beta2^2 * beta3^4) * W4 * W5, 160);

```

```
% Atualização dos coeficientes C1, C2
```

```
C1 = vpa(Delta1 / Delta, 160);
```

```
C2 = vpa(Delta2 / Delta, 160);
```

```
% Cálculo da função zero
```

```
zero = vpa(((1/beta2) * W3 - (1/beta3) * W5) + ...
```

```
    (C1 * (-1/beta1) * W2 + beta7 * (1/beta2) * W4 + beta8 * (1/beta3) * W6) +
```

```
...
```

```
    C2 * ((1/beta1) * W1 - (1/beta3) * W5)), 160);
```

```
% Condição de saída do loop
```

```
if zero > 0
```

```
    sinal = 1;
```

```
else
```

```
    sinal = 2;
```

```
end
```

```
% Condição de convergência
```

```
if abs(zero) < 1e-150
```

```
    beta1
```

```
    beta1L
```

```
    beta2L
```

```
    beta3L
```

```
    sqrt(alpha)
```

```
    break
```

```
end
```

```
% Atualização de beta1 com critérios de convergência
```

```
if (-1)^sinal * zero > 0
```

```
    beta1 = vpa(beta1 - 10^(s), 50);
```

```
    s = s - 1;
```

```
    k = 1;  
    zero  
else  
    beta1  
    k = k + 1;  
    zero  
end  
end
```

APÊNDICE B

Código-fonte para encontrar raízes de uma equação não linear associada a um problema de placas microvibrantes.

```
%%%%%%%%% Gradiente duas placas G15 %%%%%%%%%%
clear all;
format long e;
clc

%%%%%%%%%% Parâmetros da microviga %%%%%%%%%%%
E = 1.44 * 10^9; % GPa
nu = 0.38;
mu = 0.5217 * 10^9; % Gpa
% 2mu = E / (1 + nu)
I = 17.6 * 10^(-6);
L0 = I; L1 = I; L2 = I; % \mu m
d = 40 * 10^(-6);
h = 20 * 10^(-6);
b = 2 * h;
I = (b * h^3) / 12; % \mu m
A = b * h;
Vb = 2;
Vt = 2;
L = 20 * h;

S = vpa(E * I + 2 * mu * A * L0^2 + (8/15) * mu * A * L1^2 + mu * A * L2^2, 60);
K = vpa(2 * mu * I * L0^2 + (4/5) * mu * I * L1^2, 60);
ro = 1000; % kg/m^3
m = ro * A;
```

```

a1 = 0.7 * L;
a2 = L;

%%%%%%%%epsilon=1800*8.85e-12; % meio é o ar
%c=(4*S^3)/(27*K^2);
% Intervalo de integração
% Função calibre

% beta1L = input('entre com o valor de beta1L inicial \n');
% beta1 = input('entre com o valor de beta1 inicial \n');
% ...

ii = 0;
k = 11701; % Valor inicial para beta1
N = 116000; % Limite máximo de iterações
TOL = 10^(-50); % Tolerância

while k < N
    ii = ii + 1;
    beta1 = k; % beta*L varia de 0 a pi/2
    betaa(ii) = k;
    beta2 = vpa(sqrt(((S/K + beta1.^2) - sqrt((S/K + beta1.^2) .* (S/K - 3 *
beta1.^2)))/2), 60);
    beta3 = vpa(sqrt(((S/K + beta1.^2) + sqrt((S/K + beta1.^2) .* (S/K - 3 *
beta1.^2)))/2), 60);
    beta4 = vpa((S * beta1.^3 + K * beta1.^5), 60);
    % ...

    % Cálculo do valor da função
    zeroo = (C1 .* (-beta4 .* W2 + beta7 .* beta5 .* W4 + beta8 .* beta6 .* W6) +
...
    C2 .* (beta4 .* W1 - beta6 .* W5)) + (beta5 .* W3 - beta6 .* W5);

```

```

zero(ii) = (beta5 .* W3 - beta6 .* W5) + ...
    (C1 .* (-beta4 .* W2 + beta7 .* beta5 .* W4 + beta8 .* beta6 .* W6) + ...
    C2 .* (beta4 .* W1 - beta6 .* W5));

A = -(C1 .* (-beta4 .* W2 + beta7 .* beta5 .* W4 + beta8 .* beta6 .* W6) + ...
    C2 .* (beta4 .* W1 - beta6 .* W5));
B = (beta5 .* W3 - beta6 .* W5);

r = vpa(A / B, 60);

if abs(1 - (A / B)) < TOL || abs(zero) < TOL
    r = vpa(A / B);
    A
    B
    C41 = C4(ii)
    betaa1 = betaa(ii)
    zero1 = zero(ii)
    break
else
    k = k + 10;
end
end
end

```

APÊNDICE C

Código-fonte que calcula e compara as soluções teóricas clássicas e de gradiente para um problema de flexão de uma microviga para o caso estático, mostrando os resultados em um gráfico.

```
% Limpar todas as variáveis, formatar para long double e limpar a tela
clear all;
format long e;
clc;

% Definição dos parâmetros da microviga
E = 1.44 * 10^9; % Módulo de elasticidade em GPa
nu = 0.38;
mu = 0.5217 * 10^9; % Constante de Lamé
l = 17.6 * 10^(-6); % Comprimento inicial
L0 = l; L1 = l; L2 = l; % Comprimentos adicionais
h = 20 * 10^(-6); % Altura
b = 2 * h; % Largura
I = (b * h^3) / 12; % Momento de inércia
A = b * h; % Área
L = 20 * h; % Comprimento total
S = vpa(E * I + 2 * mu * A * L0^2 + (8/15) * mu * A * L1^2 + mu * A * L2^2, 180);
K = vpa(2 * mu * I * L0^2 + (4/5) * mu * I * L1^2, 180);
ro = 1000; % Densidade em kg/m^3
m = ro * A;
P = 100 * 10^(-6); % Carga
r = S / K; % Razão S/K

% Cálculo dos coeficientes
```

```

C5 = vpa(-P / (S * r^3 * (1 + exp(-2 * r * L) - 2 * exp(-r * L)) + 2 * K * r^5 * exp(-r *
L)), 180);
C1 = vpa((exp(-2 * r * L) - 1) * C5, 180);
C2 = vpa(r * (exp(-2 * r * L) + 1) * C5, 180);
C3 = vpa(-((r^3 * L) / 2) * (exp(-2 * r * L) + 1) * C5, 180);
C4 = vpa((r^3 / 6) * (exp(-2 * r * L) + 1) * C5, 180);
C6 = vpa(-exp(-2 * r * L) * C5, 180);

% Geração de valores de x
for i = 1:1001
    x(i) = (L / 1000) * (i - 1);
end

% Teoria clássica
wc = ((P * L * x.^2) / (2 * E * I)) - ((P * x.^3) / (6 * E * I));

% Teoria gradiente
wg = C1 + C2 * x + C3 * x.^2 + C4 * x.^3 + C5 * exp(-sqrt(r) * x) + C6 * exp(sqrt(r)
* x);

% Plotagem dos resultados
figure(1)
plot(x, wc, x, wg)
legend('Teoria clássica', 'Teoria gradiente', 'Location', 'Best')
xlabel('x (m)'), set(gca, 'FontSize', 12)
ylabel('w(x,t) (m)'), set(gca, 'FontSize', 12)

```

APÊNDICE D

Simulação numérico-computacional para um problema dinâmico de flexão de uma microviga para o Caso Clássico, que calcula os modos normais, as coordenadas generalizadas, os planos de fase, deslocamentos em pontos específicos, mostrando os resultados em diversos gráficos.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Determinante %%%%%%%%%%%%%%
clear all; % Limpa todas as variáveis no workspace
format long e; % Configura a precisão para 'long' com notação exponencial
clc % Limpa a janela de comando
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Parâmetros da microviga %%%%%%%%%%%%%%
E=1.44*10^9; % Módulo de elasticidade (GPa)
nu=0.38; mu=0.5217*10^9; % Coeficiente de Poisson e módulo de cisalhamento (GPa)
l=17.6*10^(-6); % Comprimento inicial da microviga (µm)
L0=l; L1=l; L2=l; % Comprimentos adicionais
h=20*10^(-6); % Altura da viga (µm)
d=4*10^(-6); % Distância entre as placas superior e inferior (µm)
b=4*h; % Largura da viga (µm)
I=(b*h^3)/12; % Momento de inércia (µm^4)
A=b*h; % Área da seção transversal (µm^2)
L=20*h; % Comprimento total da viga (µm)
S=vpa(E*I + 2*mu*A*L0^2 + (8/15)*mu*A*L1^2 + mu*A*L2^2,60); % Rigidez da viga
K=vpa(2*mu*I*L0^2 + (4/5)*mu*I*L1^2,60); % Rigidez rotacional
ro=1000; % Densidade linear (kg/m^3)
m=ro*A; % Massa linear da viga por unidade de comprimento (kg/m)
epsilon=1800*8.85e-12; % Permissividade elétrica (F/m)
a1 = 0.7*L;
a2 = L;
Vb=2;
```

```

Vt=2;

varepsilon = ((epsilon*(a2-a1))/(2*ro*h));

beta = [1.875104068711962/L;
        4.694091133019009/L;
        7.854757438244329/L;
        10.995540734882288/L;
        14.137168391046540/L;];

% Autovalor ao quadrado
alpha = (E*I*beta.^4)/(ro*A);

% Raízes da Quadratura Gaussiana
r=[0.987992518020485    0.937273392400706    0.848206583410427
0.724417731360170 ...
    0.570972172608539    0.394151347077563    0.201194093997435
0.000000000000000...
   -0.201194093997435   -0.394151347077563   -0.570972172608539   -
0.724417731360170...
   -0.848206583410427 -0.937273392400706 -0.987992518020485];

% Coeficientes da Quadratura Gaussiana
c = [0.2369268850    0.4786286705    0.5688888889    0.4786286705
0.2369268850];
c=[ 0.030753241996117    0.070366047488108    0.107159220467172
0.139570677926154...
    0.166269205816994    0.186161000115562    0.198431485327111
0.202578241925561...
    0.198431485327111    0.186161000115562    0.166269205816994
0.139570677926154...
    0.107159220467172  0.070366047488108  0.030753241996117];

```

```

x = 1/2*((a2-a1)*r + (a2+a1));

N = [1/sqrt(L) ;
     1/sqrt(L) ;
     1/sqrt(L) ;
     1/sqrt(L) ;
     1/sqrt(L) ];

C1=(cos(beta*L)+cosh(beta*L))./(sin(beta*L)+sinh(beta*L));
[ X15 CC1]=meshgrid(r,C1');
[ X15 NN]=meshgrid(r,N');

pphi=NN.*((cos(beta*x)-cosh(beta*x))-....
          CC1.*(sin(beta*x)-sinh(beta*x)));

% MÉTODO DE RUNGE-KUTTA
% Número de passos
M = 10^5;
T = 0.005;
% Passo do tempo
H = T/M;
% Condições iniciais
u1(1) = 0; u3(1) = 0; u5(1) = 0; u7(1) = 0; u9(1) = 0;
u2(1) = 0.001; u4(1) = 0.001; u6(1) = 0.001; u8(1) = 0.001; u10(1) = 0.001;

for j = 1:M
% Cálculo de k1
% Integrando
u = [u1(j) u3(j) u5(j) u7(j) u9(j)];
w=u*pphi;

```

```

for ii=1:15

II(:,ii) = ((Vb^2)*pphi(:,ii))/((d-w(ii)).^2) - ((Vt^2)*pphi(:,ii))/((d+w(ii)).^2);
end

% Integral Gaussiana
f = ((a2-a1)/2)*II*c';
k11 = H*u2(j);
k12 = H*(-alpha(1)*u1(j) + varepsilon*f(1));
k13 = H*u4(j);
k14 = H*(-alpha(2)*u3(j) + varepsilon*f(2));
k15 = H*u6(j);
k16 = H*(-alpha(3)*u5(j) + varepsilon*f(3));
k17 = H*u8(j);
k18 = H*(-alpha(4)*u7(j) + varepsilon*f(4));
k19 = H*u10(j);
k110 = H*(-alpha(5)*u9(j) + varepsilon*f(5));

% Cálculo de k2
% Integrando
u = [u1(j)+k11/2  u3(j)+k13/2  u5(j)+k15/2  u7(j)+k17/2  u9(j)+k19/2];
w=u*pphi;
for ii=1:15
II(:,ii) = ((Vb^2)*pphi(:,ii))/((d-w(ii)).^2) - ((Vt^2)*pphi(:,ii))/((d+w(ii)).^2);
end

% Integral Gaussiana
f = ((a2-a1)/(2))*II*c';

k21 = H*(u2(j) + k12/2);
k22 = H*(-alpha(1)*(u1(j)+ k11/2) + varepsilon*f(1));

```

```

k23 = H*(u4(j) + k14/2);
k24 = H*(-alpha(2)*(u3(j)+ k13/2) + varepsilon*f(2));
k25 = H*(u6(j) + k16/2);
k26 = H*(-alpha(3)*(u5(j)+ k15/2) + varepsilon*f(3));
k27 = H*(u8(j) + k18/2);
k28 = H*(-alpha(4)*(u7(j)+ k17/2) + varepsilon*f(4));
k29 = H*(u10(j) + k110/2);
k210 = H*(-alpha(5)*(u9(j)+ k19/2) + varepsilon*f(5));

% Cálculo de k3
% Integrando
u = [u1(j)+k21/2  u3(j)+k23/2  u5(j)+k25/2  u7(j)+k27/2  u9(j)+k29/2];
w=u*pphi;
for ii=1:15
ll(:,ii) = ((Vb^2)*pphi(:,ii))/((d-w(ii)).^2) - ((Vt^2)*pphi(:,ii))/((d+w(ii)).^2);
end

% Integral Gaussiana
f = ((a2-a1)/(2))*ll*c';

k31 = H*(u2(j) + k22/2);
k32 = H*(-alpha(1)*(u1(j)+ k21/2) + varepsilon*f(1));
k33 = H*(u4(j) + k24/2);
k34 = H*(-alpha(2)*(u3(j)+ k23/2) + varepsilon*f(2));
k35 = H*(u6(j) + k26/2);
k36 = H*(-alpha(3)*(u5(j)+ k25/2) + varepsilon*f(3));
k37 = H*(u8(j) + k28/2);
k38 = H*(-alpha(4)*(u7(j)+ k27/2) + varepsilon*f(4));
k39 = H*(u10(j) + k210/2);
k310 = H*(-alpha(5)*(u9(j)+ k29/2) + varepsilon*f(5));

```

```

% Cálculo de k4
% Integrando
u = [u1(j)+k31 u3(j)+k33 u5(j)+k35 u7(j)+k37 u9(j)+k39];

w=u*pphi;
for ii=1:15
II(:,ii) = ((Vb^2)*pphi(:,ii))/((d-w(ii)).^2) - ((Vt^2)*pphi(:,ii))/((d+w(ii)).^2);
end

% Integral Gaussiana
f= ((a2-a1)/2)*II*c';

k41 = H*(u2(j) + k32);
k42 = H*(-alpha(1)*(u1(j)+ k31) + varepsilon*f(1));
k43 = H*(u4(j) + k34);
k44 = H*(-alpha(2)*(u3(j)+ k33) + varepsilon*f(2));
k45 = H*(u6(j) + k36);
k46 = H*(-alpha(3)*(u5(j)+ k35) + varepsilon*f(3));
k47 = H*(u8(j) + k38);
k48 = H*(-alpha(4)*(u7(j)+ k37) + varepsilon*f(4));
k49 = H*(u10(j) + k310);
k410 = H*(-alpha(5)*(u9(j)+ k39) + varepsilon*f(5));

% Cálculo das iterações
u1(j+1) = u1(j) + (1/6)*(k11 + 2*k21 + 2*k31 + k41);
u2(j+1) = u2(j) + (1/6)*(k12 + 2*k22 + 2*k32 + k42);
u3(j+1) = u3(j) + (1/6)*(k13 + 2*k23 + 2*k33 + k43);
u4(j+1) = u4(j) + (1/6)*(k14 + 2*k24 + 2*k34 + k44);
u5(j+1) = u5(j) + (1/6)*(k15 + 2*k25 + 2*k35 + k45);

```

```

u6(j+1) = u6(j) + (1/6)*(k16 + 2*k26 + 2*k36 + k46);
u7(j+1) = u7(j) + (1/6)*(k17 + 2*k27 + 2*k37 + k47);
u8(j+1) = u8(j) + (1/6)*(k18 + 2*k28 + 2*k38 + k48);
u9(j+1) = u9(j) + (1/6)*(k19 + 2*k29 + 2*k39 + k49);
u10(j+1) = u10(j) + (1/6)*(k110 + 2*k210 + 2*k310 + k410);
end

for j = 1:M+1
t(j) = (j-1)*H;
end

% Coordenadas Generalizadas
figure(1)
plot(t,u1)
title('Primeira Coordenada Generalizada')
xlabel('t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\eta_1(t)'), set(gca,'FontSize', 20)

figure(2)
plot(t,u3)
title('Segunda Coordenada Generalizada')
xlabel('t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\eta_2(t)'), set(gca,'FontSize', 20)

figure(3)
plot(t,u5)
title('Terceira Coordenada Generalizada')
xlabel('t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\eta_3(t)'), set(gca,'FontSize', 20)

```

```

figure(4)
plot(t,u7)
title('Quarta Coordenada Generalizada')
xlabel('t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\eta_4(t)'), set(gca,'FontSize', 20)

figure(5)
plot(t,u9)
title('Quinta Coordenada Generalizada')
xlabel('t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\eta_5(t)'), set(gca,'FontSize', 20)

% Plano de fase para os 5 primeiros modos normais
figure(6)
plot(u1, u2)
xlabel('\eta_1'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\frac{d\eta_1}{dt}', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
set(get(gca,'ylabel'),'rotation',0, 'FontSize', 30)
figure(7)
plot(u3,u4)
xlabel('\eta_2'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\frac{d\eta_2}{dt}', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
set(get(gca,'ylabel'),'rotation',0, 'FontSize', 30)
figure(8)
plot(u5,u6)
xlabel('\eta_3'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\frac{d\eta_3}{dt}', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
set(get(gca,'ylabel'),'rotation',0, 'FontSize', 30)
figure(9)

```

```

plot(u7,u8)
xlabel('\eta_4'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\frac{d\eta_4}{dt}', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
set(get(gca,'ylabel'),'rotation',0, 'FontSize', 30)
figure(10)
plot(u9,u10)
xlabel('\eta_5'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\frac{d\eta_5}{dt}', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
set(get(gca,'ylabel'),'rotation',0, 'FontSize', 30)

for i=1:ceil(0.10*T/H)
    bb=ceil(0.9*T/H)-1;
    u1p(i)=u1(i+bb);
    u2p(i)=u2(i+bb);
    u3p(i)=u3(i+bb);
    u4p(i)=u4(i+bb);
    u5p(i)=u5(i+bb);
    u6p(i)=u6(i+bb);
    u7p(i)=u7(i+bb);
    u8p(i)=u8(i+bb);

end

for i=1:0.02*T/H+1
    u9p(i)=u9(i+ceil(0.98*T/H));
    u10p(i)=u10(i+ceil(0.98*T/H));
end

figure(11)

```

```

plot(u1p, u2p)
xlabel('\eta_1'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\frac{d\eta_1}{dt}$', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
set(get(gca,'ylabel'),'rotation',0, 'FontSize', 30)
figure(12)
plot(u3p, u4p)
xlabel('\eta_2'), set(gca,'FontSize', 15)
ylabel('\dot{\eta_2}$', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 15)
figure(13)
plot(u5p, u6p)
xlabel('\eta_3'), set(gca,'FontSize', 15)
ylabel('\dot{\eta_3}$', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 15)
figure(14)
plot(u7p, u8p)
xlabel('\eta_4'), set(gca,'FontSize', 15)
ylabel('\dot{\eta_4}$', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 15)
figure(15)
plot(u9p, u10p)
xlabel('\eta_5'), set(gca,'FontSize', 15)
ylabel('\dot{\eta_5}$', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 15)

figure(16)
subplot(2,3,1)
plot(t,u1)
subplot(2,3,2)
plot(t,u3)
subplot(2,3,3)
plot(t,u5)
subplot(2,3,4)
plot(t,u7)

```

```

subplot(2,3,5)
plot(t,u9)

for i = 1:101
x(i) = (L/100)*(i-1);
end

for j = 1:M+1
y(j) = j;
end

for j = 1:M/100
yy(j) = j*100;
end

[X,Y] = meshgrid(x,y);
[XX,YY] = meshgrid(x,yy);
phi1=N(1)*((cos(beta(1)*X)-cosh(beta(1)*X))-....

((cos(beta(1)*L)+cosh(beta(1)*L))./(sin(beta(1)*L)+sinh(beta(1)*L))).*(sin(beta(1)
*X)-sinh(beta(1)*X)));
phi11=N(1)*((cos(beta(1)*XX)-cosh(beta(1)*XX))-....

((cos(beta(1)*L)+cosh(beta(1)*L))./(sin(beta(1)*L)+sinh(beta(1)*L))).*(sin(beta(1)
*XX)-sinh(beta(1)*XX)));
U1 = u1(Y);
UU1 = u1(YY);
z1 = phi1.*U1;
zz1 = phi11.*UU1;
figure(17)
mesh(X,(Y-1)*H,z1)
title('Meshgrid u1')

```

figure(18)

```
mesh(XX,(YY-1)*H,zz1)
```

```
phi2=N(2)*((cos(beta(2)*X)-cosh(beta(2)*X))-....
```

```
((cos(beta(2)*L)+cosh(beta(2)*L))./(sin(beta(2)*L)+sinh(beta(2)*L))).*(sin(beta(2)*X)-sinh(beta(2)*X));
```

```
phi22=N(2)*((cos(beta(2)*XX)-cosh(beta(2)*XX))-....
```

```
((cos(beta(2)*L)+cosh(beta(2)*L))./(sin(beta(2)*L)+sinh(beta(2)*L))).*(sin(beta(2)*XX)-sinh(beta(2)*XX));
```

```
U3 = u3(Y);
```

```
UU3 = u3(YY);
```

```
z2 = phi2.*U3;
```

```
zz2 = phi22.*UU3;
```

figure(19)

```
mesh(XX,(YY-1)*H,zz2)
```

figure(20)

```
mesh(X,(Y-1)*H,z2)
```

```
title('Meshgrid u3')
```

```
phi3=N(3)*((cos(beta(3)*X)-cosh(beta(3)*X))-....
```

```
((cos(beta(3)*L)+cosh(beta(3)*L))./(sin(beta(3)*L)+sinh(beta(3)*L))).*(sin(beta(3)*X)-sinh(beta(3)*X));
```

```
phi33=N(3)*((cos(beta(3)*XX)-cosh(beta(3)*XX))-....
```

```
((cos(beta(3)*L)+cosh(beta(3)*L))./(sin(beta(3)*L)+sinh(beta(3)*L))).*(sin(beta(3)*XX)-sinh(beta(3)*XX));
```

```
U5 = u5(Y);
```

```
UU5 = u5(YY);
```

```
z3 = phi3.*U5;
```

```
zz3 = phi33.*UU5;
```

figure(21)

```
mesh(XX,(YY-1)*H,zz3)
```

figure(22)

```
mesh(X,(Y-1)*H,z3)
```

```
title('Meshgrid u5')
```

```
phi4=N(4).*((cos(beta(4)*X)-cosh(beta(4)*X))-....
```

```
((cos(beta(4)*L)+cosh(beta(4)*L))./(sin(beta(4)*L)+sinh(beta(4)*L))).*(sin(beta(4)  
*X)-sinh(beta(4)*X)));
```

```
phi44=N(4).*((cos(beta(4)*XX)-cosh(beta(4)*XX))-....
```

```
((cos(beta(4)*L)+cosh(beta(4)*L))./(sin(beta(4)*L)+sinh(beta(4)*L))).*(sin(beta(4)  
*XX)-sinh(beta(4)*XX)));
```

```
U7 = u7(Y);
```

```
UU7 = u7(YY);
```

```
z4 = phi4.*U7;
```

```
zz4 = phi44.*UU7;
```

figure(23)

```
mesh(XX,(YY-1)*H,zz4)
```

figure(24)

```
mesh(X,(Y-1)*H,z4)
```

```
title('Meshgrid u7')
```

```
phi5=N(5).*((cos(beta(5)*X)-cosh(beta(5)*X))-....
```

```
((cos(beta(5)*L)+cosh(beta(5)*L))./(sin(beta(5)*L)+sinh(beta(5)*L))).*(sin(beta(5)  
*X)-sinh(beta(5)*X)));
```

```
phi55=N(5).*((cos(beta(5)*XX)-cosh(beta(5)*XX))-....
```

```
((cos(beta(5)*L)+cosh(beta(5)*L))./(sin(beta(5)*L)+sinh(beta(5)*L))).*(sin(beta(5)*XX)-sinh(beta(5)*XX));
```

```
U9 = u9(Y);
```

```
UU9 = u9(YY);
```

```
z5 = phi5.*U9;
```

```
zz5 = phi55.*UU9;
```

```
figure(25)
```

```
mesh(XX,(YY-1)*H,zz5)
```

```
figure(26)
```

```
mesh(X,(Y-1)*H,z5)
```

```
title('Meshgrid u9')
```

```
Z = z1 + z2 + z3 + z4 + z5;
```

```
ZZ = zz1 + zz2 + zz3 + zz4 + zz5;
```

```
for j = 1:10:M+1
```

```
yy(j) = j;
```

```
end
```

```
[X,YY] = meshgrid(x,yy);
```

```
Z = z1 + z2 + z3 + z4 + z5;
```

```
figure(27)
```

```
mesh(XX,(YY-1)*H,ZZ)
```

```
title('Deformação dos cinco primeiros modos normais')
```

```
xlabel('x (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
ylabel('t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
zlabel('w(x,t) (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
% Deformação da extremidade da viga
```

```
figure(28)
```

```

plot((Y(:,1)-1)*H, Z(:,101))
xlabel('t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('w(L,t)(m)'), set(gca,'FontSize', 20)

% Deformação para os cinco primeiros modos normais
figure(29)
plot((Y(:,1)-1)*H, z1(:,101), (Y(:,1)-1)*H, z2(:,101), (Y(:,1)-1)*H, z3(:,101), (Y(:,1)-1)*H, z4(:,101), (Y(:,1)-1)*H, z5(:,101))
legend('w_1', 'w_2', 'w_3', 'w_4', 'w_5'), set(gca,'FontSize', 12)
xlabel('t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('w(x,t) (m)'), set(gca,'FontSize', 20)

%Deformação da viga em 10%L, 25%L, 50%L, 75%L e 100%L
figure(30)
plot((Y(:,1)-1)*H, Z(:,10), (Y(:,1)-1)*H, Z(:,25), (Y(:,1)-1)*H, Z(:,50), (Y(:,1)-1)*H, Z(:,75), (Y(:,1)-1)*H, Z(:,101))
legend('0.10L', '0.25L', '0.5L', '0.75L', 'L'), set(gca,'FontSize', 12)
xlabel('t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('w(x,t) (m)'), set(gca,'FontSize', 20)

figure(31)
plot(X(1,:), Z(2000,:), X(1,:), Z(4000,:), X(1,:), Z(8000,:))
legend('t = 2000s', 't = 4000s', 't = 8000s'), set(gca,'FontSize', 12)
xlabel('t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('x (m)'), set(gca,'FontSize', 20)

figure(32)
plot(X(1,:), Z(1000,:), X(1,:), Z(2000,:), X(1,:), Z(3000,:), X(1,:), Z(4000,:), ...
X(1,:), Z(5000,:), X(1,:), Z(6000,:), X(1,:), Z(7000,:), X(1,:), Z(8000,:),...
X(1,:), Z(9000,:), X(1,:), Z(10000,:))
legend('Z = 1000', 'Z = 2000', 'Z = 3000', 'Z = 4000', 'Z = 5000', 'Z = 6000',...

```

```

'Z = 7000', 'Z = 8000', 'Z = 9000', 'Z = 10000')
xlabel('Tempo t (s)'), set(gca,'FontSize', 16)
ylabel('Deformação (m)'), set(gca,'FontSize', 16)

figure(33)
plot(X(1,:), Z(500,:), X(1,:), Z(1000,:), X(1,:), Z(1500,:),...
X(1,:), Z(2000,:), X(1,:), Z(2500,:), X(1,:), Z(3000,:), X(1,:), Z(3500,:),...
X(1,:), Z(4000,:), X(1,:), Z(4500,:), X(1,:), Z(5000,:), X(1,:), Z(5500,:),...
X(1,:), Z(6000,:), X(1,:), Z(6500,:), X(1,:), Z(7000,:), X(1,:), Z(7500,:),...
X(1,:), Z(8000,:), X(1,:), Z(8500,:), X(1,:), Z(9000,:), X(1,:), Z(9500,:),...
X(1,:), Z(10000,:))
legend('Z = 500', 'Z = 1000', 'Z = 1500', 'Z = 2000', 'Z = 2500', 'Z = 3000',...
'Z = 3500', 'Z = 4000', 'Z = 4500', 'Z = 5000', 'Z = 5500', 'Z = 6000',...
'Z = 6500', 'Z = 7000', 'Z = 7500', 'Z = 8000', 'Z = 8500', 'Z = 9000',...
'Z = 9500', 'Z = 10000')
xlabel('Tempo t (s)'), set(gca,'FontSize', 16)
ylabel('Deformação (m)'), set(gca,'FontSize', 16)

figure(34)
plot((Y(:,1)-1)*H, Z(:,51))
title('50% da viga')

figure(35)
plot((Y(:,1)-1)*H, Z(:,25))
title('25% da viga')

figure(36)
plot((Y(:,1)-1)*H, Z(:,10))
title('10% da viga')
phi1=N(1)*(C1(1)*(sin(beta1(1)*x)+ beta7(1).*sinh(beta2(1)*x)+...

```

```
beta8(1).*sinh(beta3(1)*x))+C2(1).*(cos(beta1(1)*x)-...  
cosh(beta3(1)*x))+cosh(beta2(1)*x)-cosh(beta3(1)*x));
```

```
% Gráficos dos Modos Normais
```

```
figure(37)
```

```
phi1=N(1)*((cos(beta(1)*x)-cosh(beta(1)*x))-....
```

```
((cos(beta(1)*L)+cosh(beta(1)*L))./(sin(beta(1)*L)+sinh(beta(1)*L))).*(sin(beta(1)  
*x)-sinh(beta(1)*x));
```

```
plot(x, phi1)
```

```
xlabel('x (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
ylabel('$\varphi$', 'rotation', 0, 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
figure(38)
```

```
dphi1=beta(1)*N(1)*((-sin(beta(1)*x)-sinh(beta(1)*x))-....
```

```
((cos(beta(1)*L)+cosh(beta(1)*L))./(sin(beta(1)*L)+sinh(beta(1)*L))).*(cos(beta(1)  
*x)-cosh(beta(1)*x));
```

```
plot(phi1, dphi1)
```

```
xlabel('$\varphi$', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
ylabel('$\frac{d\varphi}{dx}$', 'rotation', 0, 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize',  
20)
```

```
figure(39)
```

```
phi2=N(2)*((cos(beta(2)*x)-cosh(beta(2)*x))-....
```

```
((cos(beta(2)*L)+cosh(beta(2)*L))./(sin(beta(2)*L)+sinh(beta(2)*L))).*(sin(beta(2)  
*x)-sinh(beta(2)*x));
```

```
plot(x, phi2)
```

```
xlabel('x (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
ylabel('$\varphi$', 'rotation', 0, 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
figure(40)
```

```

dphi2=beta(2)*N(2)*((-sin(beta(2)*x)-sinh(beta(2)*x))-....

((cos(beta(2)*L)+cosh(beta(2)*L))./(sin(beta(2)*L)+sinh(beta(2)*L))).*(cos(beta(2)
)*x)-cosh(beta(2)*x));
plot(phi2, dphi2)
xlabel('\varphi$', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\frac{d\varphi}{dx}$', 'rotation', 0, 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize',
20)

figure(41)
phi3=N(3)*((cos(beta(3)*x)-cosh(beta(3)*x))-....

((cos(beta(3)*L)+cosh(beta(3)*L))./(sin(beta(3)*L)+sinh(beta(3)*L))).*(sin(beta(3)
*x)-sinh(beta(3)*x));
plot(x, phi3)
xlabel('x (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\varphi$', 'rotation', 0, 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)

figure(42)
dphi3=beta(3)*N(3)*((-sin(beta(3)*x)-sinh(beta(3)*x))-....

((cos(beta(3)*L)+cosh(beta(3)*L))./(sin(beta(3)*L)+sinh(beta(3)*L))).*(cos(beta(3)
)*x)-cosh(beta(3)*x));
plot(phi3, dphi3)
xlabel('\varphi$', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\frac{d\varphi}{dx}$', 'rotation', 0, 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize',
20)

figure(43)
phi4=N(4)*((cos(beta(4)*x)-cosh(beta(4)*x))-....

((cos(beta(4)*L)+cosh(beta(4)*L))./(sin(beta(4)*L)+sinh(beta(4)*L))).*(sin(beta(4)
*x)-sinh(beta(4)*x));
plot(x, phi4)

```

```

xlabel('x (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('$\varphi$', 'rotation', 0, 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)

figure(44)
dphi4=beta(4)*N(4)*((-sin(beta(4)*x)-sinh(beta(4)*x))-....

((cos(beta(4)*L)+cosh(beta(4)*L))./(sin(beta(4)*L)+sinh(beta(4)*L))).*(cos(beta(4)
)*x)-cosh(beta(4)*x));
plot(phi4, dphi4)
xlabel('$\varphi$', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('$\frac{d\varphi}{dx}$', 'rotation', 0, 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize',
20)

figure(45)
phi5=N(5)*((cos(beta(5)*x)-cosh(beta(5)*x))-....

((cos(beta(5)*L)+cosh(beta(5)*L))./(sin(beta(5)*L)+sinh(beta(5)*L))).*(sin(beta(5)
)*x)-sinh(beta(5)*x));
plot(x, phi5)
xlabel('x (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('$\varphi$', 'rotation', 0, 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)

figure(46)
dphi5=beta(5)*N(5)*((-sin(beta(5)*x)-sinh(beta(5)*x))-....

((cos(beta(5)*L)+cosh(beta(5)*L))./(sin(beta(5)*L)+sinh(beta(5)*L))).*(cos(beta(5)
)*x)-cosh(beta(5)*x));
plot(phi5, dphi5)
xlabel('$\varphi$', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('$\frac{d\varphi}{dx}$', 'rotation', 0, 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize',
20)

```

APÊNDICE E

Simulação numérico-computacional para um problema dinâmico de flexão de uma microviga para o Caso Gradiente, que calcula os modos normais, as coordenadas generalizadas, os planos de fase, deslocamentos em pontos específicos, mostrando os resultados em diversos gráficos.

```
%%%%%%%%%%%% Gradiente duas placas G15 %%%%%%%%%%%%%%
clear all;
format long e;
clc
%%%%%%%%%%%% Parâmetros da micro viga%%%%%%%%%%%%%
E=1.44*10^9; %% GPa
nu=0.38; mu=0.5217*10^9;
l=17.6*10^(-6);
L0=l;L1=l; L2=l;
d=40*10^(-6);
h=20*10^(-6);
b=4*h; I=(b*h^3)/12;
A=b*h;
Vb=2;
Vt=2;
%%L=5*h;
L=20*h;
S=E*I + 2*mu*A*L0^2 + (8/15)*mu*A*L1^2 + mu*A*L2^2;
K=2*mu*I*L0^2 + (4/5)*mu*I*L1^2;
ro=1000; %%%kg/m^3
m=ro*A;
epsilon=1800*8.85e-12;
```

```

% Intervalo de integração
% Função calibre
a1 = 0.7*L;
a2 = L;
varepsilon = ((epsilon*(a2-a1))/(2*ro*h)) ;
beta1 = [1.875104068711962/L;
         4.694091133019009/L;
         7.854757438244329/L;
         10.995540734882288/L;
         14.137168391046540/L;];
beta2=sqrt(((S/K+beta1.^2)- sqrt((S/K+beta1.^2).*( S/K-3*beta1.^2)))/2);
beta3=sqrt(((S/K+beta1.^2)+ sqrt((S/K+beta1.^2).*( S/K-3*beta1.^2)))/2);
beta4=(S*beta1.^3+K*beta1.^5);
beta5=(S*beta2.^3-K*beta2.^5);
beta6=(S*beta3.^3-K*beta3.^5);
beta7=(beta1.^3+beta1.*beta3.^2)./(beta2.^3-beta2.*beta3.^2);
beta8=(beta1.^3+beta1.*beta2.^2)./(beta3.^3-beta3.*beta2.^2);
beta1L=beta1*L ;
%%%%%%%%%%%%%%
W1=sin(beta1L);
W2=cos(beta1L);
W3=sinh(beta2*L);
W4=cosh(beta2*L);
W5=sinh(beta3*L);
W6=cosh(beta3*L);
Delta=(beta1.^4.*beta3.^2+beta1.^2.*beta3.^4).*W1.*W6+...
      beta7.*(beta1.^4.*beta2.^2+beta1.^2.*beta2.^4).*W2.*W3+...
      beta7.*(beta2.^4.*beta3.^2-beta2.^2.*beta3.^4).*W3.*W6+...
      beta8.*((beta1.^4).*(beta3.^2)+(beta1.^2).*(beta3.^4)).*W2.*W5;

```

```
Delta1=(beta1.^4.*beta3.^2+beta1.^2.*beta3.^4).*W2.*W6-...
(beta1.^4.*beta2.^2+beta1.^2.*beta2.^4).*W2.*W4-...
(beta2.^4.*beta3.^2-beta2.^2.*beta3.^4).*W4.*W6;
```

```
Delta2= (beta1.^2.*beta2.^4 + beta1.^4.*beta2.^2).*W1.*W4 -...
(beta1.^2.*beta3.^4 + beta1.^4.*beta3.^2).*W1.*W6 -...
beta7.*(beta2.^4.*beta3.^2-beta2.^2.*beta3.^4).*W3.*W6-...
beta8.*( beta2.^4.*beta3.^2-beta2.^2.*beta3.^4).*W4.*W5;
```

```
C1=Delta1./Delta;
```

```
C2=Delta2./Delta;
```

```
alpha = ((K*(beta1.^6))+(S*(beta1.^4)))/(ro*A);
```

```
% Raízes da Quadratura Gaussiana
```

```
r=[0.987992518020485    0.937273392400706    0.848206583410427
0.724417731360170 ...
0.570972172608539    0.394151347077563    0.201194093997435
0.000000000000000...
-0.201194093997435   -0.394151347077563   -0.570972172608539   -
0.724417731360170...
-0.848206583410427 -0.937273392400706 -0.987992518020485];
```

```
% Coeficientes da Quadratura Gaussiana
```

```
c=[ 0.030753241996117    0.070366047488108    0.107159220467172
0.139570677926154...
0.166269205816994    0.186161000115562    0.198431485327111
0.202578241925561...
0.198431485327111    0.186161000115562    0.166269205816994
0.139570677926154...
0.107159220467172  0.070366047488108  0.030753241996117];
```

```
ng=15;
```

```
% Raízes da Quadratura Gaussiana
```

```

x = (1/2)*((a2-a1)*r + (a2+a1));
[ X CC1]=meshgrid(r,C1');
[ X CC2]=meshgrid(r,C2');
[ X bbeta7]=meshgrid(r,beta7');
[ X bbeta8]=meshgrid(r,beta8');
%%%%%%Cálculo da norma com partição %%%%%%%
nn=10;
hh=L/nn;
for i=1:nn+1
    a(i)=0+(i-1)*hh;
end
for i=1:nn
xo = (1/2)*((a(i+1)-a(i))*r + (a(i+1)+a(i)));
    pphio=CC1.*(sin(beta1*xo)+ bbeta7.*sinh(beta2*xo)+...
        bbeta8.*sinh(beta3*xo))+CC2.*(cos(beta1*xo)-...
        cosh(beta3*xo))+cosh(beta2*xo)-cosh(beta3*xo));
    lo=pphio.^2;
    no(:,i)= ((a(i+1)-a(i))/2)* lo*c';

end
for i=1:5
    No(i,1)=sum(no(i,:));
end
N = [1/sqrt(No(1)) ;
    1/sqrt(No(2)) ;
    1/sqrt(No(3)) ;
    1/sqrt(No(4)) ;
    1/sqrt(No(5)) ];

[ X NN]=meshgrid(r,N');

```

```

pphi=NN.*(CC1.*(sin(beta1*x)+ bbeta7.*sinh(beta2*x)+...
    bbeta8.*sinh(beta3*x))+CC2.*(cos(beta1*x)-...
    cosh(beta3*x))+cosh(beta2*x)-cosh(beta3*x));

% MÉTODO DE RUNGE-KUTTA
% Número de passos
M = 10^5;
T = 0.005;
% Passo do tempo
H = T/M;
% Condições iniciais
u1(1) = 0; u3(1) = 0; u5(1) = 0; u7(1) = 0; u9(1) = 0;
u2(1) = 0.01; u4(1) = 0.01; u6(1) = 0.01; u8(1) = 0.01; u10(1) = 0.01;

for j = 1:M
    j
    % Cálculo de k1
    % Integrando
    u = [u1(j) u3(j) u5(j) u7(j) u9(j)];
    w=u*pphi;
    for ii=1:ng
        ll(:,ii) = ((Vb^2)*pphi(:,ii))/((d-w(ii)).^2) - ((Vt^2)*pphi(:,ii))/((d+w(ii)).^2);
    end

    % Integral Gaussiana
    f= ((a2-a1)/2)*ll*c';
    k11 = H*u2(j);
    k12 = H*(-alpha(1)*u1(j) + varepsilon*f(1));
    k13 = H*u4(j);
    k14 = H*(-alpha(2)*u3(j) + varepsilon*f(2));

```

```

k15 = H*u6(j);
k16 = H*(-alpha(3)*u5(j) + varepsilon*f(3));
k17 = H*u8(j);
k18 = H*(-alpha(4)*u7(j) + varepsilon*f(4));
k19 = H*u10(j);
k110 = H*(-alpha(5)*u9(j) + varepsilon*f(5));

% Cálculo de k2
% Integrando
u = [u1(j)+k11/2  u3(j)+k13/2  u5(j)+k15/2  u7(j)+k17/2  u9(j)+k19/2];
w=u*pphi;
for ii=1:ng
    ll(:,ii) = (((Vb^2)*pphi(:,ii))/((d-w(ii)).^2)) - (((Vt^2)*pphi(:,ii))/((d+w(ii)).^2));
end
% Integral Gaussiana
f = ((a2-a1)/2)*ll*c';
k21 = H*(u2(j) + k12/2);
k22 = H*(-alpha(1)*(u1(j)+ k11/2) + varepsilon*f(1));
k23 = H*(u4(j) + k14/2);
k24 = H*(-alpha(2)*(u3(j)+ k13/2) + varepsilon*f(2));
k25 = H*(u6(j) + k16/2);
k26 = H*(-alpha(3)*(u5(j)+ k15/2) + varepsilon*f(3));
k27 = H*(u8(j) + k18/2);
k28 = H*(-alpha(4)*(u7(j)+ k17/2) + varepsilon*f(4));
k29 = H*(u10(j) + k110/2);
k210 = H*(-alpha(5)*(u9(j)+ k19/2) + varepsilon*f(5));

% Cálculo de k3
% Integrando
u = [u1(j)+k21/2  u3(j)+k23/2  u5(j)+k25/2  u7(j)+k27/2  u9(j)+k29/2];

```

```

w=u*pphi;
for ii=1:ng
II(:,ii) =(((Vb^2)*pphi(:,ii))/((d-w(ii)).^2)) - (((Vt^2)*pphi(:,ii))/((d+w(ii)).^2));
end
% Integral Gaussiana
f= ((a2-a1)/2)*II*c';
k31 = H*(u2(j) + k22/2);
k32 = H*(-alpha(1)*(u1(j)+ k21/2) + varepsilon*f(1));
k33 = H*(u4(j) + k24/2);
k34 = H*(-alpha(2)*(u3(j)+ k23/2) + varepsilon*f(2));
k35 = H*(u6(j) + k26/2);
k36 = H*(-alpha(3)*(u5(j)+ k25/2) + varepsilon*f(3));
k37 = H*(u8(j) + k28/2);
k38 = H*(-alpha(4)*(u7(j)+ k27/2) + varepsilon*f(4));
k39 = H*(u10(j) + k210/2);
k310 = H*(-alpha(5)*(u9(j)+ k29/2) + varepsilon*f(5));

% Cálculo de k4
% Integrando
u = [u1(j)+k31  u3(j)+k33  u5(j)+k35  u7(j)+k37  u9(j)+k39];
w=u*pphi;
for ii=1:ng
II(:,ii) =(((Vb^2)*pphi(:,ii))/((d-w(ii)).^2)) - (((Vt^2)*pphi(:,ii))/((d+w(ii)).^2));
end
% Integral Gaussiana
f = ((a2-a1)/2)*II*c';
k41 = H*(u2(j) + k32);
k42 = H*(-alpha(1)*(u1(j)+ k31) + varepsilon*f(1));
k43 = H*(u4(j) + k34);
k44 = H*(-alpha(2)*(u3(j)+ k33) + varepsilon*f(2));

```

```

k45 = H*(u6(j) + k36);
k46 = H*(-alpha(3)*(u5(j)+ k35) + varepsilon*f(3));
k47 = H*(u8(j) + k38);
k48 = H*(-alpha(4)*(u7(j)+ k37) + varepsilon*f(4));
k49 = H*(u10(j) + k310);
k410 = H*(-alpha(5)*(u9(j)+ k39) + varepsilon*f(5));

% Cálculo das iterações
u1(j+1) = u1(j) + (1/6)*(k11 + 2*k21 + 2*k31 + k41);
u2(j+1) = u2(j) + (1/6)*(k12 + 2*k22 + 2*k32 + k42);
u3(j+1) = u3(j) + (1/6)*(k13 + 2*k23 + 2*k33 + k43);
u4(j+1) = u4(j) + (1/6)*(k14 + 2*k24 + 2*k34 + k44);
u5(j+1) = u5(j) + (1/6)*(k15 + 2*k25 + 2*k35 + k45);
u6(j+1) = u6(j) + (1/6)*(k16 + 2*k26 + 2*k36 + k46);
u7(j+1) = u7(j) + (1/6)*(k17 + 2*k27 + 2*k37 + k47);
u8(j+1) = u8(j) + (1/6)*(k18 + 2*k28 + 2*k38 + k48);
u9(j+1) = u9(j) + (1/6)*(k19 + 2*k29 + 2*k39 + k49);
u10(j+1) = u10(j) + (1/6)*(k110 + 2*k210 + 2*k310 + k410);
end

for j = 1:M+1
t(j) = (j-1)*H;
end

% Coordenadas Generalizadas
figure(1)
plot(t,u1)
title('Primeira Coordenada Generalizada'), set(gca,'FontSize', 20)
xlabel('Tempo t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('Primeira Coordenada Generalizada \eta_1(t)'), set(gca,'FontSize', 20)

```

```

figure(2)
plot(t,u3)
title('Segunda Coordenada Generalizada'), set(gca,'FontSize', 20)
xlabel('Tempo t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('Segunda Coordenada Generalizada \eta_2(t)'), set(gca,'FontSize', 20)
figure(3)
plot(t,u5)
title('Terceira Coordenada Generalizada'), set(gca,'FontSize', 20)
xlabel('Tempo t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('Terceira Coordenada Generalizada \eta_3(t)'), set(gca,'FontSize', 20)
figure(4)
plot(t,u7)
title('Quarta Coordenada Generalizada'), set(gca,'FontSize', 20)
xlabel('Tempo t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('Quarta Coordenada Generalizada \eta_4(t)'), set(gca,'FontSize', 20)
figure(5)
plot(t,u9)
title('Quinta Coordenada Generalizada'), set(gca,'FontSize', 20)
xlabel('Tempo t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('Quinta Coordenada Generalizada \eta_5(t)'), set(gca,'FontSize', 20)

% Plano de fase para os 5 primeiros modos normais
figure(6)
plot(u1, u2)
xlabel('\eta_1'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('$\frac{d\eta_1}{dt}$', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
set(get(gca,'ylabel'),'rotation',0, 'FontSize', 30)
figure(7)
plot(u3,u4)
xlabel('\eta_2'), set(gca,'FontSize', 20)

```

```

ylabel('\frac{d\eta_2}{dt}', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
set(get(gca,'ylabel'),'rotation',0, 'FontSize', 30)
figure(8)
plot(u5,u6)
xlabel('\eta_3'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\frac{d\eta_3}{dt}', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
set(get(gca,'ylabel'),'rotation',0, 'FontSize', 30)
figure(9)
plot(u7,u8)
xlabel('\eta_4'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\frac{d\eta_4}{dt}', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
set(get(gca,'ylabel'),'rotation',0, 'FontSize', 30)
figure(10)
plot(u9,u10)
xlabel('\eta_5'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\frac{d\eta_5}{dt}', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
set(get(gca,'ylabel'),'rotation',0, 'FontSize', 30)

for i=1:ceil(0.10*T/H)
bb=ceil(0.9*T/H)-1;
u1p(i)=u1(i+bb);
u2p(i)=u2(i+bb);
u3p(i)=u3(i+bb);
u4p(i)=u4(i+bb);
u5p(i)=u5(i+bb);
u6p(i)=u6(i+bb);
u7p(i)=u7(i+bb);
u8p(i)=u8(i+bb);
u9p(i)=u9(i+bb);
u10p(i)=u10(i+bb);

```

```

end

% Plano de fase para os 5 primeiros modos normais (10% final)
figure(11)
plot(u1p, u2p)
xlabel('\eta_1'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\frac{d\eta_1}{dt}', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
set(get(gca,'ylabel'),'rotation',0, 'FontSize', 30)
figure(12)
plot(u3p,u4p)
xlabel('\eta_2'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\frac{d\eta_2}{dt}', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
set(get(gca,'ylabel'),'rotation',0, 'FontSize', 30)
figure(13)
plot(u5p,u6p)
xlabel('\eta_3'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\frac{d\eta_3}{dt}', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
set(get(gca,'ylabel'),'rotation',0, 'FontSize', 30)
figure(14)
plot(u7p,u8p)
xlabel('\eta_4'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\frac{d\eta_4}{dt}', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
set(get(gca,'ylabel'),'rotation',0, 'FontSize', 30)
figure(15)
plot(u9p,u10p)
xlabel('\eta_5'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\frac{d\eta_5}{dt}', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
set(get(gca,'ylabel'),'rotation',0, 'FontSize', 30)

for i = 1:101

```

```

x(i) = (L/100)*(i-1);
end

for j = 1:M+1
y(j) = j;
end

[X,Y] = meshgrid(x,y);
phi1=N(1)*(C1(1)*(sin(beta1(1)*X)+ beta7(1).*sinh(beta2(1)*X)+...
    beta8(1).*sinh(beta3(1)*X))+C2(1).*(cos(beta1(1)*X)-...
    cosh(beta3(1)*X))+(cosh(beta2(1)*X)-cosh(beta3(1)*X)));
U1 = u1(Y);
z1 = phi1.*U1;
figure(16)
plot((Y(:,1)-1)*H, z1(:,101))
mesh(X,(Y-1)*H,z1)
title('Meshgrid u1')

phi2=N(2)*(C1(2)*(sin(beta1(2)*X)+ beta7(2).*sinh(beta2(2)*X)+...
    beta8(2).*sinh(beta3(2)*X))+C2(2).*(cos(beta1(2)*X)-...
    cosh(beta3(2)*X))+(cosh(beta2(2)*X)-cosh(beta3(2)*X)));
U3 = u3(Y);
z2 = phi2.*U3;
figure(17)
mesh(X,(Y-1)*H,z2)
title('Meshgrid u3')

phi3=N(3)*(C1(3)*(sin(beta1(3)*X)+ beta7(3).*sinh(beta2(3)*X)+...
    beta8(3).*sinh(beta3(3)*X))+C2(3).*(cos(beta1(3)*X)-...
    cosh(beta3(3)*X))+(cosh(beta2(3)*X)-cosh(beta3(3)*X)));

```

```

U5 = u5(Y);
z3 = phi3.*U5;
figure(18)
mesh(X,(Y-1)*H,z3)
title('Meshgrid u5')

phi4=N(4)*(C1(4)*(sin(beta1(4)*X)+ beta7(4).*sinh(beta2(4)*X)+...
    beta8(4).*sinh(beta3(4)*X))+C2(4).*(cos(beta1(4)*X)-...
    cosh(beta3(4)*X))+(cosh(beta2(4)*X)-cosh(beta3(4)*X)));
U7 = u7(Y);
z4 = phi4.*U7;
figure(19)
mesh(X,(Y-1)*H,z4)
title('Meshgrid u7')

phi5=N(5)*(C1(5)*(sin(beta1(5)*X)+ beta7(5).*sinh(beta2(5)*X)+...
    beta8(5).*sinh(beta3(5)*X))+C2(5).*(cos(beta1(5)*X)-...
    cosh(beta3(5)*X))+(cosh(beta2(5)*X)-cosh(beta3(5)*X)));
U9 = u9(Y);
z5 = phi5.*U9;
figure(20)
mesh(X,(Y-1)*H,z5)
title('Meshgrid u9')

Z = z1 + z2 + z3 + z4 + z5;
figure(21)
plot((Y(:,1)-1)*H, Z(:,101))
xlabel('t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('w(L,t) (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
figure(22)

```

```

mesh(X,(Y-1)*H,Z)
for i = 1:1001
x(i) = (L/1000)*(i-1);
end

for j = 1:M/10
yy(j) = j*10;
end

[XX,YY] = meshgrid(x,yy);
phi11=N(1)*(C1(1)*(sin(beta1(1)*XX)+ beta7(1).*sinh(beta2(1)*XX)+...
    beta8(1).*sinh(beta3(1)*XX))+C2(1).*(cos(beta1(1)*XX)-...
    cosh(beta3(1)*XX))+cosh(beta2(1)*XX)-cosh(beta3(1)*XX));
UU1 = u1(YY);
zz1 = phi11.*UU1;
figure(23)
mesh(XX,(YY-1)*H,zz1)
xlabel('x (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
zlabel('w_1(x,t) (m)'), set(gca,'FontSize', 20)

phi22=N(2)*(C1(2)*(sin(beta1(2)*XX)+ beta7(2).*sinh(beta2(2)*XX)+...
    beta8(2).*sinh(beta3(2)*XX))+C2(2).*(cos(beta1(2)*XX)-...
    cosh(beta3(2)*XX))+cosh(beta2(2)*XX)-cosh(beta3(2)*XX));
UU3 = u3(YY);
zz2 = phi22.*UU3;
figure(24)
mesh(XX,(YY-1)*H,zz2)
xlabel('x (m)'), set(gca,'FontSize', 20)

```

```

ylabel('t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
xlabel('w_2(x,t) (m)'), set(gca,'FontSize', 20)

phi33=N(3)*(C1(3)*(sin(beta1(3)*XX)+ beta7(3).*sinh(beta2(3)*XX)+...
    beta8(3).*sinh(beta3(3)*XX))+C2(3).*(cos(beta1(3)*XX)-...
    cosh(beta3(3)*XX)+(cosh(beta2(3)*XX)-cosh(beta3(3)*XX)));
UU5 = u5(YY);
zz3 = phi33.*UU5;
figure(25)
mesh(XX,(YY-1)*H,zz3)
xlabel('x (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
xlabel('w_3(x,t) (m)'), set(gca,'FontSize', 20)

phi44=N(4)*(C1(4)*(sin(beta1(4)*XX)+ beta7(4).*sinh(beta2(4)*XX)+...
    beta8(4).*sinh(beta3(4)*XX))+C2(4).*(cos(beta1(4)*XX)-...
    cosh(beta3(4)*XX)+(cosh(beta2(4)*XX)-cosh(beta3(4)*XX)));
UU7 = u7(YY);
zz4 = phi44.*UU7;
figure(26)
mesh(XX,(YY-1)*H,zz4)
xlabel('x (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
xlabel('w_4(x,t) (m)'), set(gca,'FontSize', 20)

phi55=N(5)*(C1(5)*(sin(beta1(5)*XX)+ beta7(5).*sinh(beta2(5)*XX)+...
    beta8(5).*sinh(beta3(5)*XX))+C2(5).*(cos(beta1(5)*XX)-...
    cosh(beta3(5)*XX)+(cosh(beta2(5)*XX)-cosh(beta3(5)*XX)));
UU9 = u9(YY);
zz5 = phi55.*UU9;

```

```
ZZ = zz1 + zz2 + zz3 + zz4 + zz5;
```

```
% TRECHOS DA VIGA
```

```
figure(27)
```

```
plot(X(1,:), Z(3000,:), X(1,:), Z(6000,:), X(1,:), Z(9000,:))
```

```
legend('t = 6ms', 't = 12ms', 't = 18ms'), set(gca,'FontSize', 12)
```

```
xlabel('x (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
ylabel('w(x,t) (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
figure(28)
```

```
plot(XX(1,:), ZZ(3000,:), XX(1,:), ZZ(6000,:), XX(1,:), ZZ(9000,:))
```

```
legend('t = 6ms', 't = 12ms', 't = 18ms'), set(gca,'FontSize', 12)
```

```
xlabel('x (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
ylabel('w(x,t) (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
figure(29)
```

```
mesh(XX,(YY-1)*H,zz5)
```

```
xlabel('x (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
ylabel('t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
zlabel('w_5(x,t) (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
figure(30)
```

```
mesh(XX,(YY-1)*H,ZZ)
```

```
xlabel('x (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
ylabel('t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
zlabel('w(x,t) (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
title('Soma dos 5 primeiros modos normais')
```

```
xlabel('x (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
ylabel('t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
zlabel('w(x,t) (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
%Deformação da viga em 10%L, 25%L, 50%L, 75%L e 100%L
```

```
figure(31)
```

```
plot((Y(:,1)-1)*H, Z(:,10), (Y(:,1)-1)*H, Z(:,25), (Y(:,1)-1)*H, Z(:,50), (Y(:,1)-1)*H,  
Z(:,75), (Y(:,1)-1)*H, Z(:,101))
```

```
legend('0.10L', '0.25L', '0.5L', '0.75L', 'L'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
xlabel('t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
ylabel('w(L,t) (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
figure(32)
```

```
plot((Y(:,1)-1)*H, Z(:,70), (Y(:,1)-1)*H, Z(:,80), (Y(:,1)-1)*H, Z(:,90), (Y(:,1)-1)*H,  
Z(:,101))
```

```
legend('0.7L', '0.8L', '0.9L', 'L'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
xlabel('t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
ylabel('w(L,t) (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
figure(33)
```

```
plot((Y(:,1)-1)*H, Z(:,97), (Y(:,1)-1)*H, Z(:,98), (Y(:,1)-1)*H, Z(:,99), (Y(:,1)-1)*H,  
Z(:,101))
```

```
legend('0.97L', '0.98L', '0.99L', 'L'), set(gca,'FontSize', 14)
```

```
xlabel('t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
ylabel('w(x,t) (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
%Deformação para os cinco primeiros modos normais
```

```
figure(34)
```

```
plot((Y(:,1)-1)*H, z1(:,101), (Y(:,1)-1)*H, z2(:,101), (Y(:,1)-1)*H, z3(:,101), (Y(:,1)-  
1)*H, z4(:,101), (Y(:,1)-1)*H, z5(:,101))
```

```
legend('w_1', 'w_2', 'w_3', 'w_4', 'w_5'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
xlabel('t (s)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
ylabel('w(L,t) (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```

figure(35)
plot(X(1,:), Z(3000,:), X(1,:), Z(6000,:), X(1,:), Z(9000,:))
legend('t = 3000s', 't = 6000s', 't = 9000s'), set(gca,'FontSize', 12)
xlabel('x (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('W (m)'), set(gca,'FontSize', 20)

% Gráficos dos Modos Normais
figure(36)
phi1=N(1)*(C1(1)*(sin(beta1(1)*x)+ beta7(1).*sinh(beta2(1)*x)+...
    beta8(1).*sinh(beta3(1)*x))+C2(1).*(cos(beta1(1)*x)-...
    cosh(beta3(1)*x)+(cosh(beta2(1)*x)-cosh(beta3(1)*x)));
plot(x, phi1)
xlabel('x (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('$\varphi_1$', 'rotation', 0, 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)

figure(37)
dphi1=N(1)*((C1(1)*(beta1(1)*cos(beta1(1)*x))+ ...
    (beta2(1)*beta7(1).*cosh(beta2(1)*x))+...
    (beta3(1)*beta8(1).*cosh(beta3(1)*x))+...
    C2(1).*((beta1(1)*(-sin(beta1(1)*x)))-...
    (beta3(1)*sinh(beta3(1)*x)))+...
    (beta2(1)*sinh(beta2(1)*x)-beta3(1)*sinh(beta3(1)*x)));
plot(phi1, dphi1)
xlabel('$\varphi_1$', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('$\frac{d\varphi_1}{dx}$', 'rotation', 0, 'interpreter', 'latex'),
set(gca,'FontSize', 20)

figure(38)
phi2=N(2).*(C1(2).*(sin(beta1(2)*x)+ beta7(2).*sinh(beta2(2)*x)+...
    beta8(2).*sinh(beta3(2)*x))+C2(2).*(cos(beta1(2)*x)-...
    cosh(beta3(2)*x)+(cosh(beta2(2)*x)-cosh(beta3(2)*x)));

```

```

plot(x, phi2)
xlabel('x (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('$\varphi_2$', 'rotation', 0, 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)

figure(39)
dphi2=N(2)*((C1(2)*(beta1(2)*cos(beta1(2)*x))+ ...
(beta2(2)*beta7(2).*cosh(beta2(2)*x))+...
(beta3(2)*beta8(2).*cosh(beta3(2)*x))+...
C2(2).*((beta1(2)*(-sin(beta1(2)*x)))-...
(beta3(2)*sinh(beta3(2)*x)))+...
(beta2(2)*sinh(beta2(2)*x)-beta3(2)*sinh(beta3(2)*x)));
plot(phi2, dphi2)
xlabel('$\varphi_2$', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('$\frac{d\varphi_2}{dx}$', 'rotation', 0, 'interpreter', 'latex'),
set(gca,'FontSize', 20)

figure(40)
phi3=N(3)*(C1(3)*(sin(beta1(3)*x)+ beta7(3).*sinh(beta2(3)*x)+...
beta8(3).*sinh(beta3(3)*x))+C2(3).*(cos(beta1(3)*x)-...
cosh(beta3(3)*x)+(cosh(beta2(3)*x)-cosh(beta3(3)*x)));
plot(x, phi3)
xlabel('x (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('$\varphi_3$', 'rotation', 0, 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)

figure(41)
dphi3=N(3)*((C1(3)*(beta1(3)*cos(beta1(3)*x))+ ...
(beta2(3)*beta7(3).*cosh(beta2(3)*x))+...
(beta3(3)*beta8(3).*cosh(beta3(3)*x))+...
C2(3).*((beta1(3)*(-sin(beta1(3)*x)))-...
(beta3(3)*sinh(beta3(3)*x)))+...
(beta2(3)*sinh(beta2(3)*x)-beta3(3)*sinh(beta3(3)*x)));

```

```

plot(phi3, dphi3)
xlabel('\varphi_3$', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\frac{d\varphi_3}{dx}$', 'rotation', 0, 'interpreter', 'latex'),
set(gca,'FontSize', 20)

```

```
figure(42)
```

```

phi4=N(4)*(C1(4)*(sin(beta1(4)*x)+ beta7(4).*sinh(beta2(4)*x)+...
    beta8(4).*sinh(beta3(4)*x))+C2(4).*(cos(beta1(4)*x)-...
    cosh(beta3(4)*x)+(cosh(beta2(4)*x)-cosh(beta3(4)*x)));

```

```
plot(x, phi4)
```

```
xlabel('x (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
ylabel('\varphi_4$', 'rotation', 0, 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
figure(43)
```

```

dphi4=N(4)*((C1(4)*(beta1(4)*cos(beta1(4)*x))+ ...
    (beta2(4)*beta7(4).*cosh(beta2(4)*x))+...
    (beta3(4)*beta8(4).*cosh(beta3(4)*x))+...
    C2(4).*((beta1(4)*(-sin(beta1(4)*x)))-...
    (beta3(4)*sinh(beta3(4)*x)))+...
    (beta2(4)*sinh(beta2(4)*x)-beta3(4)*sinh(beta3(4)*x)));

```

```
plot(phi4, dphi4)
```

```
xlabel('\varphi_4$', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```
ylabel('\frac{d\varphi_4}{dx}$', 'rotation', 0, 'interpreter', 'latex'),
set(gca,'FontSize', 20)
```

```
figure(44)
```

```

phi5=N(5)*(C1(5)*(sin(beta1(5)*x)+ beta7(5).*sinh(beta2(5)*x)+...
    beta8(5).*sinh(beta3(5)*x))+C2(5).*(cos(beta1(5)*x)-...
    cosh(beta3(5)*x)+(cosh(beta2(5)*x)-cosh(beta3(5)*x)));

```

```
plot(x, phi5)
```

```
xlabel('x (m)'), set(gca,'FontSize', 20)
```

```

ylabel('\varphi_5$', 'rotation', 0, 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)

figure(45)
dphi5=N(5)*((C1(5)*(beta1(5)*cos(beta1(5)*x))+ ...
(beta2(5)*beta7(5).*cosh(beta2(5)*x))+...
(beta3(5)*beta8(5).*cosh(beta3(5)*x))+...
C2(5).*((beta1(5)*(-sin(beta1(5)*x)))-...
(beta3(5)*sinh(beta3(5)*x)))+...
(beta2(5)*sinh(beta2(5)*x)-beta3(5)*sinh(beta3(5)*x)));
plot(phi5, dphi5)
xlabel('\varphi_5$', 'interpreter', 'latex'), set(gca,'FontSize', 20)
ylabel('\frac{d\varphi_5}{dx}$', 'rotation', 0, 'interpreter', 'latex'),
set(gca,'FontSize', 20)

```