

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

**ANÁLISE NUMÉRICA NO CONTROLE DE VIBRAÇÕES**

**Karla Melissa dos Santos Leandro**

**CATALÃO, GO**  
**2019**

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR  
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES  
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico:       Dissertação       Tese

**2. Identificação da Tese ou Dissertação:**

Nome completo do autor:

Karla Melissa dos Santos Leandro

Título do trabalho:

**Análise numérica no controle de vibrações**

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento  SIM       NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Karla melissa dos Santos Leandro  
Assinatura do(a) autor(a)<sup>2</sup>

Ciente e de acordo:

Raissa Napoleão Rabelo  
Assinatura do(a) orientador(a)<sup>2</sup>

Data: 14 / 05 / 2019

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

<sup>2</sup> A assinatura deve ser escaneada.

# **ANÁLISE NUMÉRICA NO CONTROLE DE VIBRAÇÕES**

**KARLA MELISSA DOS SANTOS LEANDRO**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**.

Área de Concentração: Engenharia de Operações e Processos Industriais

**Orientador:** Marcos Napoleão Rabelo

**Coorientador:** Marco Paulo Guimarães

**CATALÃO, GO**

**2019**

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Santos Leandro, Karla Melissa dos  
Análise Numérica no Controle de Vibrações [manuscrito] / Karla  
Melissa dos Santos Leandro. - .  
lxxx, 80 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Napoleão Rabelo ; co-orientador Dr.  
Marco Paulo Guimarães .

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, , Catalão,  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Cidade de  
Goiás, .

Bibliografia. Anexos.

Inclui siglas, gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Vibrações . 2. Elementos Finitos . 3. Mecânica dos sólidos . 4.  
Engenharia de Produção . 5. Materiais . I. Napoleão Rabelo , Marcos ,  
orient. II. Título.

CDU 658.5

ATA DA SESSÃO DE JULGAMENTO DA DEFESA PÚBLICA DE DISSERTAÇÃO DE  
**KARLA MELISSA DOS SANTOS LEANDRO**

Aos quinze dias do mês de abril do ano de dois mil e dezenove (15/04/2019), às 15h00mim (quize horas), na Sala do Mestrado em Engenharia de Produção, no Bloco “O” da Regional Catalão/UFG, teve lugar a 7ª Sessão Pública de Julgamento da Dissertação de Mestrado de Karla Melissa dos Santos Leandro, matrícula nº 2017101618, CPF nº 018.556.991-92, intitulada “ANÁLISE NUMÉRICA NO CONTROLE DE VIBRAÇÕES”. A Banca Examinadora foi composta, conforme Portaria nº 24/2019 da FENG – RC/UFG, pelos **Prof. Dr. Marcos Napoleão Rabelo** (Orientador) CPF 040.406.346-24, **Prof. Dr. André Alves de Resende** (Membro Interno), CPF 989.108.841-34 e pelo **Prof. Dr. Romes Antônio Borges** (Membro Externo ao Programa), CPF nº 534.067.371-53. Os examinadores arguíram na ordem citada, tendo o mestrando respondido livremente conforme seus entendimentos acerca do assunto. Às 18 horas e 00 minutos a Banca Examinadora passou ao julgamento, em Sessão Secreta, tendo o mestrando obtido os seguintes resultados:

**Prof. Dr. Marcos Napoleão Rabelo –**  
Aprovado (X) Reprovado ( )

Ass.  Marcos N. Rabelo

**Prof. Dr. André Alves de Resende –**  
Aprovado (X) Reprovado ( )

Ass.  A Resende

**Prof. Dr. Romes Antônio Borges –**  
Aprovado (X) Reprovado ( )

Ass.  Romes A. Borges

Obs.:  Possível revisão do trabalho

**Presidente da Banca – Prof. Dr. Marcos Napoleão Rabelo –** Ass.  Marcos N. Rabelo

**Resultado final:** APROVADO (X) REPROVADO ( )

Reaberta a Sessão Pública, o Presidente da Banca Examinadora proclamou o resultado e encerrou a Sessão, da qual foi lavrada a presente Ata que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora, pelo Mestrando examinado e pela Secretária do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção – RC/UFG.

Assinatura do Mestrando  Karla melissa dos S. leandro

Secretaria do PPGEPC-RC/UFG  Thais Cajun G. Almeida

Obs: O(a) aluno(a) deverá encaminhar, no prazo de até 30 (trinta) dias, a contar da data da Defesa Pública, os exemplares definitivos da Dissertação, para arquivamento e devidos encaminhamentos, conforme as normas definidas pelo PPGEPC-RC/UFG.

## **Agradecimentos**

Quando eu era criança, gostava de observar a grandeza de tudo. Tinha hábitos muitas vezes, peculiares para pessoas próximas a mim. Um deles, era o gosto de observar pedras. Ficava por horas olhando o aspecto da cor, a temperatura e principalmente a geometria. Eu me perguntava, como ela adquiriu esse corte? naquele instante, eu imaginava todas as possíveis quedas, influências sofridas, pressões, e caminhos... sim, quais foram os caminhos percorridos para que ela chegasse até mim? Acredito que comigo, em minha carreira acadêmica, foi da mesma forma. Pessoas maravilhosas vieram ao meu encontro e me influenciaram de alguma forma. Eu continuo com o mesmo hábito, mas hoje adulta, vejo como essas influências me moldaram e me fizeram ser o que sou hoje.

Desta forma, nesta tão sonhada e esperada finalização do mestrado, venho agradecer primeiramente ao Departamento de Engenharia de Produção por me aceitarem de maneira tão afetiva.

Agradeço ao Professor Marcos Napoleão Rabelo pela amizade adquirida, pelos vários direcionamentos dele sendo meu guia.

Agradeço ao Professor Marco Paulo Guimarães, por ser um professor e coorientador tão dedicado. Ao professor José Waldo Spinosa pelos vários conselhos referente ao mestrado dirigidos a mim.

Agradeço a minha família por me encorajarem nos momentos mais conturbados. Ao Samuel Wamberg pelo companherismo e pelos cuidados comigo. Por fim, agradeço a Fapeg pela bolsa confiada a mim, fazendo a realização do meu sonho.

*"Intenção sem ação é ilusão. Ouse fazer, e o poder lhe será dado." (Lair Ribeiro)*

LEANDRO, K.M.S. **Análise Numérica no Controle de Vibrações**. 78p. Dissertação de Mestrado , Universidade Federal de Catalão, Catalão, GO. 2019.

## RESUMO

Na teoria de micro-estruturas, as equações de movimento possuem seus fundamentos na relação tensão/deformação. A análise de microestrutura esta focada na ciência de preparar, interpretar e estudar microestruturas em materiais de engenharia, para compreender o comportamento e o desempenho dos materiais. Existe a necessidade de avaliar os métodos de fabricação de materiais metálicos para uso na indústria de metais, incluindo a indústria aeroespacial, a indústria automotiva e partes da indústria da construção. Do ponto de vista de projetos, o controle de vibrações em micro-estruturas exerce um papel fundamental. Neste trabalho será analisado uma barra do tipo Euler-Bernoulli com condições de contorno do tipo engaste-livre. Pretende-se analisar os efeitos de vibrações nas reações de apoio na extremidade engastada da estrutura. Para efeito de controle sera considerado um campo magnético na extremidade livre e a distância da fonte de campo magnético até a estrutura como parâmetro de controle. Mostra-se que este projeto de controle introduz condições de contorno não linear na formulação das equações de movimento da estrutura. O campo de deformações, por sua vez, descreve a curvatura, que pode ser obtida através do campo de deslocamento numa relação não linear de primeira e segunda ordem. Assumindo pequenos deslocamentos no ângulo de deflexão, a relação momento/curvatura pode ser descrita por meio da derivada de segunda ordem do campo de deslocamentos. Este modelo permite a análise dos termos de forças de cisalhamento e momento que estão presentes na teoria. Assim usando o princípio variacional as equações de movimento são obtidas o que permite determinar o campo de deslocamento. O método de elementos finitos é empregado para discretizar as equações de movimento. Devido a complexidade das equações envolvidas o método de diferenças finitas é empregado para modelar o problema não-linear

Palavras-chaves: Vibração, Método dos Elementos Finitos, Deslocamentos, Euler-Bernoulli.

## **ABSTRACT**

In micro-structure theory, the equations of motion have their foundations in the relation tension / deformation. Microstructure analysis is focused on the science of preparing, interpreting and studying microstructures in engineering materials to understand the behavior and performance of materials. There is a need to evaluate the methods of manufacturing metallic materials for use in the metal industry, including the aerospace industry, the automotive industry, and parts of the construction industry. From a project point of view, the control of vibrations in micro-structures plays a key role. In this work, a bar of the Euler-Bernoulli type with conditions of the crimping-free type. The aim is to analyze the effects of vibrations in in the crimped end of the frame. For control purposes, a field magnetic field at the free end and the distance from the magnetic field source to the control parameter. It is shown that this control design introduces boundary conditions not linear in the formulation of the equations of motion of the structure. The deformation field, in turn, describes the curvature, which can be obtained through the displacement field in a first and second order nonlinear relationship. Assuming small displacements in the deflection angle, the moment / curvature relationship can be described by means of the second-order derivative of the displacement field. This model allows the analysis of the terms of shear forces and momentum that are present in the theory. Like this using the variational principle, the equations of motion are obtained, which allows to determine the field of displacement. The finite element method is used to discretize the equations of motion. Due to the complexity of equations involved the finite difference method is employed to model the nonlinear problem

**Keywords:** Vibration, Finite Element Method, Galerkin Method, Euler-Bernoulli.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Hierarquia de pacotes . . . . .	17
Figura 1.2 – Micrografia do micro acelerômetro . . . . .	19
Figura 1.3 – Micro atuador . . . . .	19
Figura 1.4 – Parafuso usado como exemplo de microcomponentes . . . . .	20
Figura 1.5 – Imagem de um microssensor de campo magnético baseado em MEMS . . . . .	20
Figura 1.6 – Gráficos de contorno das distribuições de tensão de tração atômica e microestruturas próximas à ponta da trinca do lado direito no tempo de carregamento de $t = 360$ ps e diferentes temperaturas: (a) $T = 5$ K; (b) $T = 100$ K; (c) $T = 300$ K; (d) $T = 500$ K. . . . .	21
Figura 1.7 – Microestrutura . . . . .	22
Figura 1.8 – Esquema de uma microviga . . . . .	23
Figura 2.1 – Modelo de Viga do Tipo Euler-Bernoulli . . . . .	27
Figura 2.2 – Relação momento curvatura em uma viga do tipo Euler-Bernoulli . . . . .	28
Figura 2.3 – Campos de forças atuantes na estrutura . . . . .	29
Figura 2.4 – Elementos Bidimensionais . . . . .	35
Figura 2.5 – Elementos Tridimensionais . . . . .	35
Figura 4.1 – Aceleração utilizado . . . . .	46
Figura 4.2 – Princípio de funcionamento . . . . .	48
Figura 4.3 – Diagrama Esquemático . . . . .	49
Figura 4.4 – Painel de controle interativo . . . . .	49
Figura 4.5 – Programação em Blocos utilizada . . . . .	51
Figura 4.6 – Vista da Bancada Experimental . . . . .	51
Figura 5.1 – Dinâmica Nodal $N_1$ e $N_2$ . . . . .	54
Figura 5.2 – Dinâmica Nodal $N_3$ e $N_4$ . . . . .	54
Figura 5.3 – Dinâmica Nodal $N_5$ e $N_6$ . . . . .	55
Figura 5.4 – Dinâmica Nodal $N_9$ e $N_{10}$ . . . . .	55
Figura 5.5 – Dinâmica Nodal $N_{11}$ e $N_{12}$ . . . . .	56
Figura 5.6 – Dinâmica Nodal $N_{13}$ e $N_{14}$ . . . . .	56
Figura 5.7 – Dinâmica Nodal $N_{15}$ e $N_{16}$ . . . . .	57
Figura 5.8 – Malha criada . . . . .	57
Figura 5.9 – Resultado da simulação computacional . . . . .	58
Figura 5.10 – Sinal Bruto . . . . .	58
Figura 5.11 – Simulação com Filtro de Kalman . . . . .	59

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 4.1 – Características do sensor . . . . .	47
--	----

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

DAQ — Data acquisition

EMC — Electromagnetic Compatibility

EMI — Electromagnetic Interference

ESD — Electrostatic Discharge

EWMA — Exponential Weighted Moving Average

FMG — Functionally graded materials

ICs — Integrated circuit packaging

MEMS — Micro-Electro-Mechanical Systems

# SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	13
1.1	<b>Objetivos</b> . . . . .	16
1.2	<b>Objetivos específicos</b> . . . . .	16
1.3	<b>Sistemas micromecânicos</b> . . . . .	17
1.3.1	<b>Microestruturas</b> . . . . .	18
1.3.2	<b>Aplicações em Microestruturas</b> . . . . .	20
1.4	<b>Revisão da literatura</b> . . . . .	22
1.5	<b>Estrutura do trabalho</b> . . . . .	23
2	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA</b> . . . . .	25
2.1	<b>Teoria da deformação gradiente</b> . . . . .	25
2.2	<b>Modelo não Linear de estruturas</b> . . . . .	27
2.2.1	<b>Energia Cinética</b> . . . . .	29
2.3	<b>Sistemas dissipativos</b> . . . . .	31
2.4	<b>Formulação do método de elementos finitos</b> . . . . .	34
2.5	<b>Filtro de Kalman</b> . . . . .	36
2.6	<b>Método das diferenças finitas para sistemas contínuos</b> . . . . .	37
3	<b>CÁLCULOS DA MODELAGEM DO SISTEMA</b> . . . . .	40
3.1	<b>Método de solução</b> . . . . .	40
3.2	<b>Modelo numérico</b> . . . . .	43
4	<b>MATERIAIS E MÉTODOS</b> . . . . .	45
4.1	<b>Materiais utilizados</b> . . . . .	45
4.1.1	<b>O Sensor Utilizado</b> . . . . .	46
4.2	<b>Princípio de funcionamento</b> . . . . .	47
4.2.1	<b>Aquisição de Sinais</b> . . . . .	48
5	<b>RESULTADOS</b> . . . . .	52
5.1	<b>Resultado do método de elementos finitos</b> . . . . .	52
5.2	<b>Simulação Numérica</b> . . . . .	53
5.2.1	<b>Resultados da simulação computacional</b> . . . . .	57
5.3	<b>Resultados filtro de Kalman</b> . . . . .	58
6	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	60
7	<b>ANEXO</b> . . . . .	63

<b>7.1</b>	<b>Código utilizado</b> . . . . .	<b>63</b>
------------	-----------------------------------	-----------

	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>73</b>
--	------------------------------	-----------

## CAPITULO 1

### INTRODUÇÃO

Este capítulo expõe a introdução sobre o estudo realizado. Nessa perspectiva, este trabalho, tem por objetivo realizar uma análise numérica sobre a vibração em microestruturas, expressando o deslocamento obtido por meio de gráficos.

Os materiais estão evoluindo hoje mais rápido do que em qualquer outro momento da história. As evoluções industriais consideram, o desenvolvimento de materiais como uma “tecnologia subjacente” que pode estimular a inovação em todos os ramos da engenharia. Assim possibilitará, novos projetos para estruturas, aparelhos, motores, dispositivos elétricos e eletrônicos, equipamentos de processamento e conservação de energia (JONES; ASHBY, 2005).

Esta iniciativa esta sendo sentida em todos os ramos da engenharia e estimulam o design de uma nova e inovadora linha de produtos de consumo. Portanto, o gestor deve estar mais atento aos materiais e ao seu potencial. A inovação, muitas vezes, assume a forma de substituir um componente feito de um material um metal, por exemplo por um feito de outro material e depois, redesenha-se o produto para explorar, ao máximo, o potencial oferecido para industria. O gestor deve comparar as propriedades dos materiais concorrentes com precisão, este equilíbrio, muitas vezes, é delicado (JONES; ASHBY, 2005).

Com a necessidade de melhorias constantes nos processos de fabricação e com o desenvolvimento de produtos e processos industriais, as industrias tem promovido avanços consideráveis no campo de sistemas micromecânicos (MEMS). Devido às característica microscópicas dessas nanoestruturas, o processo de fabricação é feito por meio de tecnologias oriundas da microeletrônica, com auxilio de máquinas de fabricação minúsculas com funções diversas.

De particular interesse para os dispositivos MEMS, o amortecimento estrutural tornou-se

uma questão importante que afeta o desempenho dinâmico devido aos vários mecanismos de dissipação de energia envolvidos. Esses mecanismos de amortecimento foram examinados em Lin e Wang (2006), juntamente com os métodos desenvolvidos para modelá-los. Finalmente, conclusões são feitas sobre o que foi alcançado até hoje e as perspectivas futuras da dinâmica estrutural dos microsistemas. Elas são identificadas com a intenção de estimular pesquisas mais assertivas nesta importante área.

Microestruturas podem ser modeladas por meio da teoria clássica de mecânica dos sólidos, vigas de Euler-Bernoulli, vigas de Timoshenko, e possuem aplicações em placas, cascas cilíndricas etc. Em todos estes modelos a hamiltoniana pode ser empregada para descrever as forças internas que agem na estrutura (MAGRAB, 2012). Por outro lado, as excitações externas em microestruturas ainda possuem um vasto campo de pesquisa (VATANKHAH; KARAMI; SALARIEH, 2015a).

Tanto os modelos de estrutura, quanto as forças eletrostáticas que agem na microestrutura ainda são um campo aberto dentro da mecânica dos sólidos. Assim, questões de modelagem também tem tido contribuições ao longo dos anos. Isto devido o desempenho dinâmico dos mecanismos de dissipação de energia envolvidos. As características do comportamento mecânico de microestruturas sujeitas à forças eletrostáticas não lineares podem ser encontrados nos seguintes trabalhos Abdel-Rahman, Younis e Nayfeh (2002), Seok e Scarton (2006), Qian *et al.* (2012), Hassanpour, Nieva e Khajepour (2011), Rezazadeh, Tahmasebi e Ziaei-rad (2009), Hassanpour *et al.* (2010).

As características mecânicas da modelagem de placas, levam em consideração sua espessura (DYM; SHAMES, 2013). Por sua vez, microbarras possui suas medidas dadas em micrômetros ou décimos de micrômetros. Dimensões reduzidas podem influenciar no desempenho de microestruturas. Em Ma e Clarke (1995a), Stölken e Evans (1998), Lam *et al.* (2003a) foram conduzidos experimentos e os resultados comparados com simulações baseadas na teoria clássica de tensão/deformação. As conclusões obtidas foram que os efeitos causados pelas dimensões da estrutura não poderiam ser negligenciados. Para mensurar estes efeitos é necessário incorporar ao modelo tensão/deformação, informações envolvendo a curvatura da estrutura, é dada pelo tensor de segunda ordem (LAM *et al.*, 2003a).

Microbarras são microestruturas utilizadas na construção de relés de chaveamento, filtros de frequência, sensores para a medição de fluxos de massas, acelerômetros, ressonadores, entre outros equipamentos micromecânicos. O sistema de funcionamento leva em consideração a ação de um atuador que deflete a estrutura por meio de uma força eletrostática. Quando a tensão no atuador atinge o valor crítico, a deflexão na microbarra assume valores além do permitido gerando tensões de contato em outros componentes do equipamento. Quando este fenômeno acontece, dizemos que o componente sofre instabilidade *pull-in*. Os efeitos de estabilidade *pull-in* no processo de montagem de microsistemas pode interferir em questões de sensibilidade, instabilidade do desempenho dinâmico de equipamentos. Estudos dos efeitos da instabilidade *pull-in* no comportamento de microbarras podem ser encontrado nos trabalhos Mojahedi, Zand e Ahmadian (2010), Lakrad e Belhaq (2010).

Para medir os efeitos que dimensões reduzidas podem causar no sistema, visando aplicações em engenharia, os projetistas tem se baseado na teoria de materiais elásticos com deformações do tipo gradiente. A principal característica dessa teoria se baseia em incorporar, no modelo clássico de elasticidade, termos de terceira ordem. A justificativa para o uso de termos de terceira ordem é que eles são capazes de descrever e prever fenômenos reais no processo de manufatura de micro estruturas tais como: localização de deformações, efeitos dispersivos em propagação de ondas; tensões e deformações singulares em processos de fissura (POLIZZOTTO, 2017).

Dentro de um contexto mais geral, a teoria de materiais elásticos com deformação gradiente, pode ser vista como teorias de elasticidade. Sua principal característica é tentar incorporar em seus modelos, informações sobre parâmetros como escalas de comprimento, um dos principais desafios da atualidade no que diz respeito a processos de manufatura em micro escala. Tais informações são extraídas a partir de termos de ordem superior na relação deformação/campo de deslocamento. Esta metodologia permite capturar fenômenos, devido a pequenas escalas de comprimento, que na teoria clássica não seria permitido. Existe uma extensa literatura sobre deformações gradientes, veja por exemplo nos trabalhos Germain (1973), Askes e Aifantis (2011), Vardoulakis e Sulem (1995), Fleck *et al.* (1994a), Lam *et al.* (2003b), Dell'Isola, Sciarra e Vidoli (2009), Javili, dell'Isola e Steinmann (2013), Auffray G. Le Quang (2013). Entretanto a teoria de deformação gradiente apresenta alguns obstáculos. O principal deles se refere ao comportamento dos materiais. Microestruturas possuem propriedades que podem ser detectadas por meio dos tensores gradientes, porém, a relação tensão/deformação para estes materiais ainda não é totalmente conhecido. Várias metodologias experimentais tem sido proposto na literatura para se obter modelos aproximados, veja por exemplo os trabalhos Fleck *et al.* (1994b), Ma e Clarke (1995b), Nix (1989), Stölken e Evans (1998), Poole, Ashby e Fleck (1996), Lam *et al.* (2003a), Tang e Alici (2011).

Na análise de projetos envolvendo estruturas, um tema essencial a ser examinado são as condições de contorno. No presente trabalho a microbarra será modelada como uma viga engastada em uma extremidade e livre na outra. Na extremidade livre uma força não linear simulando o campo eletrostático será considerado. Esta força não linear basicamente depende do deslocamento vertical da estrutura; de um parâmetro de referência; da permissividade; uma função para modelagem a força eletrostática e a intensidade de campo elétrico gerado pela força magnética. Esta força aplicada na extremidade livre da microestrutura irá compor as condições de contorno quando da modelagem por meio de equações diferenciais parciais. Isto significa que as condições de contorno do nosso problema são não lineares. A modelagem do problema descreve o campo de deslocamento da estrutura. Uma vez que a estrutura é engastada em uma das extremidades, estamos interessados em analisar os esforços nas condições de contorno engastada. Para resolver o problema o princípio variacional será usado. As equações serão integradas usando o método dos elementos finitos. Uma vez obtido o campo de deslocamento as equações da elasticidade serão usadas para obter as reações no contorno engastado.

É desejável que o comportamento do sistema seja dissipativo, pois dissipação leva a estabilidade, veja Luo, Guo e Morgül (2012), Robinson (2001), isto significa que a taxa de variação da energia

total deve ser negativa. A metodologia usada para medir dissipatividade leva em consideração a energia cinética e potencial do sistema. A energia potencial é calculada por meio da deformação da viga. Assim para calcular a energia de deformação, a estrutura será modelada como uma viga de Euler-Bernoulli, significando que a deformação será calculada pelo momento fletor aplicado na estrutura. Neste trabalho será feita uma aproximação para o tensor curvatura, veja (MAGRAB, 2012).

## 1.1 Objetivos

No presente trabalho o principal objetivo é modelar uma microbarra em balanço, nesta análise de projetos envolvendo estruturas, um tema essencial a ser examinado são as condições de contorno. Na extremidade livre uma força não linear simulando o campo eletrostático será considerado. Esta força não linear basicamente depende do deslocamento vertical da estrutura; de um parâmetro de referência; da permissividade; uma função para medir a força eletrostática e a intensidade de campo elétrico gerado pela força magnética.

Com a obtenção dos valores referentes ao deslocamento da viga, será discutido os resultados referente a cada nó do sistema composto pela estrutura, bem como, as condições de contorno expressos por meio de equações diferenciais parciais.

## 1.2 Objetivos específicos

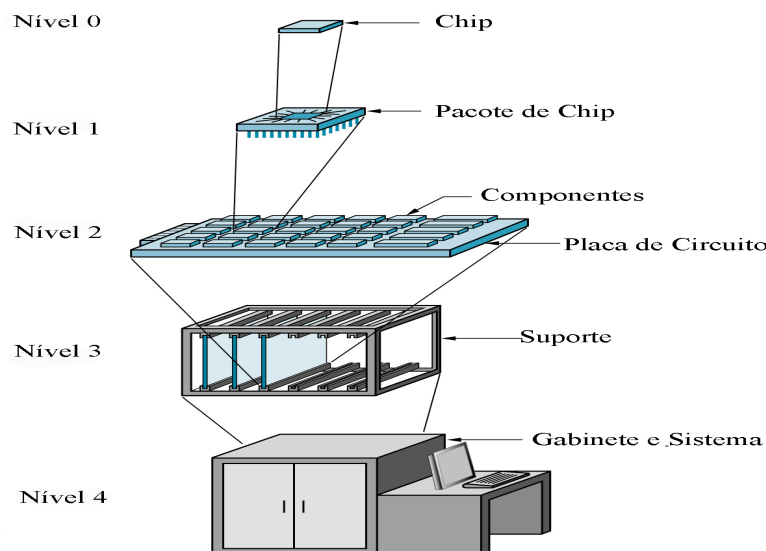
- Definir a formulação matemática do problema, com base na teoria de Euler-Benoulli. Esta formulação será composta pela modelagem que descreve o campo de deslocamento da estrutura.
- Com a estrutura engastada, ocorre a análise dos esforços e condições de contorno: A modelagem do sistema compreende-se da confecção inicial de uma malha contendo 16 nós e 15 elementos. Concomitantemente a confecção desta malha, confecciona-se uma plataforma para análise do movimento da viga;
- Aquisição de dados da plataforma de experimentos tem a finalidade de reproduzir o fenômeno analisado.
- Uso do método de elementos finitos para modelar as equações do sistema utilizado.
- Validar a formulação matemática usando a simulação computacional;
- Adição do Filtro de Kalman afim de diminuir o ruído do sistema.
- Uma vez obtido o campo de deslocamento as equações serão usadas para obter as reações no contorno da viga.

### 1.3 Sistemas micromecânicos

Estruturas microeletromecânicas desempenham um papel importante em projetos de engenharia. São máquinas em escalas de nanômetros que possuem componentes eletrônicos e mecânicos. Como exemplo de aplicações, podemos citar microscópios eletrônicos usados na inspeção de superfícies de materiais (ARJMAND *et al.*, 2008). Devido a simplicidade de seus componentes e ao baixo custo de fabricação aliado a uma gama enorme de aplicações, os microssistemas tem atraído cada vez mais atenção no setor industrial. Isto, devido as suas enormes potencialidades em aplicações em sistemas automotivos, controle em manufatura, manejo sustentável e controle de contaminantes em sistemas hidrológicos, melhoramento de performasse e confiabilidade de sistemas.

A principal parte de um sistema eletrônico é a conexão que os circuitos possuem. Esses circuitos são agregados por placas de circuitos em um chassi (MIKELL, 1999) como visto na Figura 1.1. Os Pacotes de Circuito chamados (ICs) são identificados com números de lote, e data de fabricação (MARDI, 2002). Esses pacotes de circuito integrados são organizados em cinco níveis e obedecem uma hierarquia esse níveis são descritos da seguinte maneira:

Figura 1.1 – Hierarquia de pacotes



Fonte – (MIKELL, 1999)

1. **Distribuição de energia e interconexão de sinal- Nível Zero:** A utilização da energia dentro do sistema, esta ligado com o *design* da estrutura especificado pelo Chip, fabricado em muitos casos, de plástico ou cerâmica (MAGEN *et al.*, 2004) (MA; SUN, 2007). A propagação da energia em microprocessadores pode ser um fator limitante devido ao número de ciclos no processamento de sinais (DROPSHO *et al.*, 2002).
2. **Suporte Estrutural e proteção - Nível Um:** O Painel estrutural inclui controle térmico integral

(RAWAL; BARNETT; MARTIN, 1998). Dessa maneira envolve pelo menos um dos lados entre a superfície superior do chip e a superfície inferior do suporte, proporcionando assim uma vedação para o chip (CAREY; WHALEN, 1995). Um exemplo um dispositivo de proteção são soquetes e tampas que fornecem segurança e proteção eletromagnética (AVERY, 1983).

3. **Propagação da informação - Nível Dois:** De acordo com (MONTROSE, 1996) a placa de Circuito foi projetada para ajudar os engenheiros a minimizar as emissões eletromagnéticas geradas por componentes (e circuitos) e para atingir níveis aceitáveis de compatibilidade eletromagnética (EMC). Os principais aspectos da EMC são propagação de interferência eletromagnética (EMI) de dispositivos não compatíveis incluindo descarga eletrostática (ESD) e outras formas de sobrecarga elétrica (EOS).
4. **Suporte e refrigeração - Nível Três:** Neste suporte é adicionado placas de circuito que possuem *desing* simples e tem a finalidade de proteção das placas inseridas (HOWRILKA, 1966). Comumente é proposto que circuitos integrados que compartilham recursos de refrigeração e energia sejam colocados juntos neste suporte (CRIPPEN *et al.*, 2005).
5. **Gabinete para análise de dados - Nível Quatro:** Este dispositivo composto por uma cabine que tem por desígnio receber os dados provenientes do sistema e selecionar conjuntos de medidas individuais a partir de um conjunto de dados advindos da placa de circuitos (BAKER *et al.*, 1993).

### 1.3 Microestruturas

De acordo com Fabula e Btittgenbach (1997) os sistemas microeletromecânicos (MEMS) são micro-dispositivos ou sistemas integrados que consistem componentes mecânicos. Os sensores que utilizam desta tecnologia possuem micro escala e baixíssimo consumo de energia.

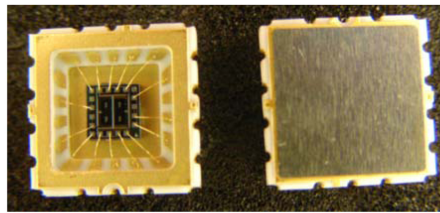
Um dos grandes desafios na análise de microestruturas é a garantia de um desempenho satisfatório, aliada a uma boa resolução instrumental. Vários elementos podem influenciar na dinâmica destas variáveis. Entretanto um dos fatores que mais tem despertado atenção é a questão de vibrações do sistema estrutural de microcomponentes. Neste sentido, a literatura tem reportado nos últimos anos, contribuições relevantes ao controle de vibrações em microestruturas. Tais como técnicas de supressão de vibrações baseadas em controle ativo (CUNNINGHAM *et al.*, 1995; WANG, 1998; VAGIA; NIKOLAKOPOULOS; TZES, 2008; LAKRAD; BELHAQ, 2010; YEN; LAN; KRAMAR, 2005).

No campo da fabricação de microestruturas, novos dispositivos e semicondutores modificam o cenário industrial. Isto, devido aos produtos menores compostos por peças e subconjuntos ainda menores, resultando em menor uso de material, eficiência no consumo de energia e otimização do espaço de utilização da placa (SPEAKMAN, 2011). A micro usinagem possibilitou a fabricação de microssensores indispensáveis para a realização de diversas tarefas (ELWENSPOEK; WIEGERINK, 2012) assim, possui aplicação, desde a sistemas físicos a sistemas biológicos (GARDNER; VARADAN,

2001). Os produtos de microescala são classificados por tipo de dispositivo, esses tipos são expressos a seguir:

**Micro sensores:** Dispositivo inteligente, que possui um transdutor usado para identificar uma variedade de sinais (GARDNER; VARADAN, 2001). A maioria dos micro sensores são fabricados em um substrato de silício usando as mesmas tecnologias necessárias para a fabricação de circuitos integrados (ELWENSPOEK; WIEGERINK, 2012). A Figura 1.2 mostra uma micrografia de um micro-acelerômetro desenvolvido em microescala possuindo o tamanho total de  $6.25 \times 6.25 \times 2 \text{ mm}$ .

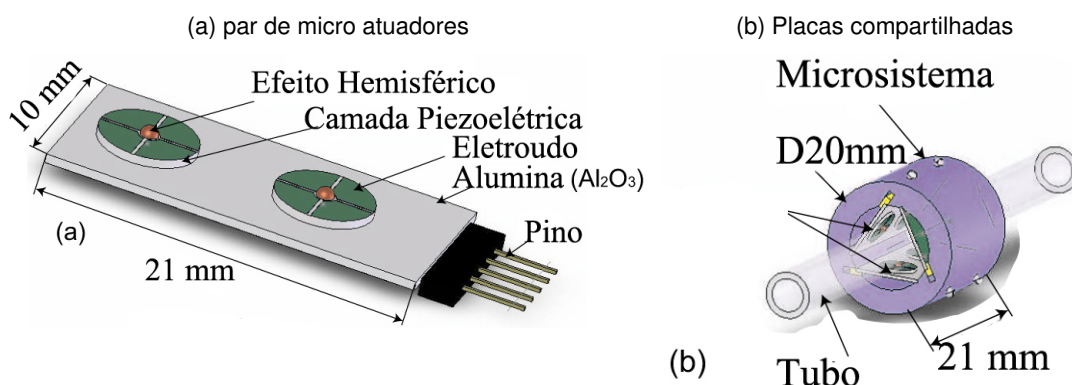
Figura 1.2 – Micrografia do micro acelerômetro



Fonte – (DAO *et al.*, 2004)

**Micro atuadores:** De acordo com Ishihara, Arai e Fukuda (1996) micro atuadores são dispositivos de dimensões super reduzidas que convertem energia em força mecânica. São classificados por meio dos seus mecanismos. Sendo um mecanismo, capaz de transformar a força produzida de acordo com o eletromagnetismo em uma força mecânica, e o outro mecanismo, é gerar energia mecânica, por meio de elementos funcionais e enviar informação para que o sistema se movimente. Na Figura 1.3 mostra-se um micro atuador usado para assegurar a orientação axial e o equilíbrio. Segundo Rakotondrabe, Haddab e Lutz (2005) em 1.3-a um par de micro atuadores são fixados em uma placa de alumínio para garantir a orientação axial e equilíbrio. Na Figura 1.3-b três placas são compartilhadas em  $360^\circ \text{C}$  de uma peça redonda para garantir a orientação e equilíbrio angular.

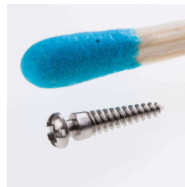
Figura 1.3 – Micro atuador



Fonte – (RAKOTONDRABE; HADDAB; LUTZ, 2005)

**Microcomponentes** De acordo com Dreschel *et al.* (2003) microcomponentes são dispositivos eletromecânicos, onde pelo menos um elemento mecânico é fabricado em microescala. Exemplos de microestruturas e micro componentes, incluem engrenagens microscópicas, lentes, espelhos, bicos e vigas (MIKELL, 1999). A Figura 1.4 mostra um parafuso de pequeno diâmetro usado para implante.

Figura 1.4 – Parafuso usado como exemplo de microcomponentes



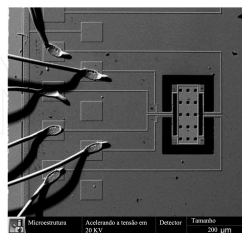
Fonte – (IWAI, 2019)

### 1.3 Aplicações em Microestruturas

Progressivamente, com a evolução tecnológica aplicada à indústria, nota-se a necessidade ampliada de incorporar vários sensores em um único chip. Segundo Herrera-May *et al.* (2011) esses sensores serão integrados com várias outras micro estruturas, transdutores e circuitos eletrônicos. Logo, existe a vantagem de obter varias funcionalidades em uma única micro estrutura. Portanto, esta integração é um desafio importante e inerente a evolução tecnológica (D'EMILIA *et al.*, 2018). Em relação ao aumento de produção de produtos microeletrônicos, a seguir é mostrado algumas aplicações encontradas na literatura;

**Microsensores:** Microsensores são usados para medir campos magnéticos e têm a finalidade de revelar realidades que não podem ser percebidas pelos sentidos humanos (ROUMENIN, 2006). Tecnologias microeletrônicas baseiam-se em novas estruturas ressonantes com alta sensibilidade. Os componentes verticais e horizontais do campo magnético são medidos por sensores baseados na detecção piezoresistiva. De acordo com Herrera-May *et al.* (2011) na Figura 1.5 é expresso um micro sensor de campo magnético formado por feixes de silício e uma ponte de *Wheatstone* com quatro piezoresistores. O mesmo explora a força de Lorentz e usa uma técnica de detecção piezoresistiva.

Figura 1.5 – Imagem de um microsensor de campo magnético baseado em MEMS

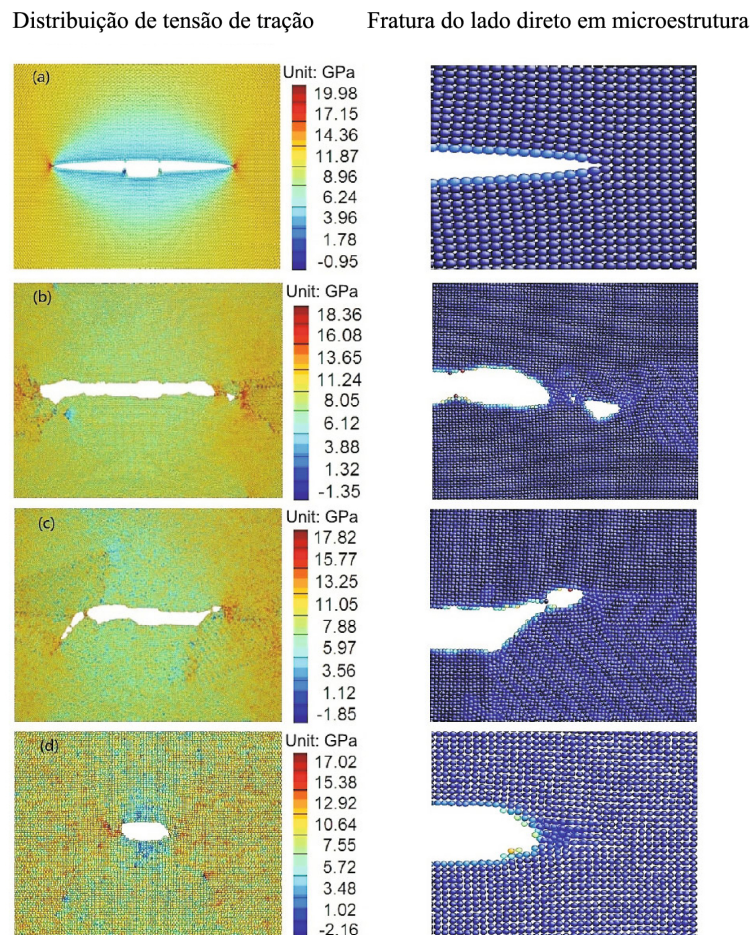


Fonte – (HERRERA-MAY *et al.*, 2011)

**Efeitos de tensão em microestrutura na aviação:** Na aviação existe a preocupação com a segurança de materiais metálicos no projeto de fuselagem (SANKARAN; MISHRA, 2017). As propriedades de resistência em microestruturas, são avaliadas afim de obter a região de deformação plástica. Os impactos de diferentes tipos de usinagem em microestruturas são elaboradas em Sun *et al.* (2018).

Na Figura 1.6 as características de propagação de uma trinca é avaliada sobre diferentes valores de temperatura. Desta forma, é mostrado a evolução microestrutural em uma dada concentração de tensão, nota-se em 1.6-a conforme a temperatura aumenta, as alterações de trinca em seus estados originais se modificam. Em 1.6-b a deformação ocorre devido a mudança de sentido da trinca por meio de valores maiores de tensão. Em 1.6-c ocorre a diminuição da trinca devido a região gasta pela tenção. Em 1.6-d o progresso do tamanho da trinca esta diretamente ligado com o aumento da tensão em torno da fissura (WU; YAO, 2014).

Figura 1.6 – Gráficos de contorno das distribuições de tensão de tração atômica e microestruturas próximas à ponta da trinca do lado direito no tempo de carregamento de  $t = 360$  ps e diferentes temperaturas: (a)  $T = 5$  K; (b)  $T = 100$  K; (c)  $T = 300$  K; (d)  $T = 500$  K.



Fonte – (WU; YAO, 2014)

## 1.4 Revisão da literatura

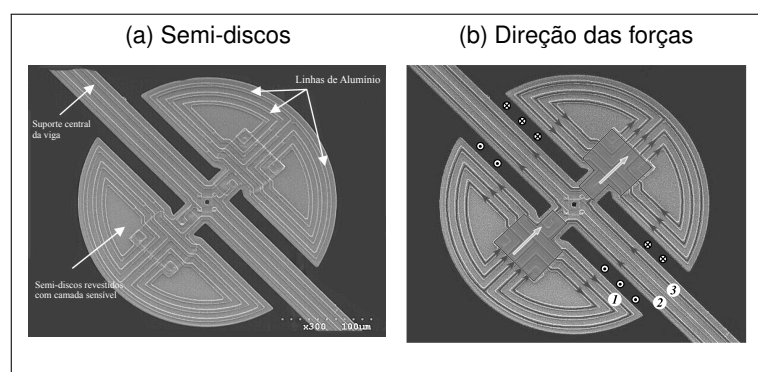
Nesta seção, é formulada uma revisão da literatura com respeito aos principais trabalhos utilizados na elaboração dessa dissertação.

A análise de vibração é um domínio muito amplo e complexo que explora vários aspectos, desde o monitoramento de condições até a detecção de defeitos. Uma abordagem muito utilizada na literatura, é aplicar análises de energia de vibração em diversos processos metalúrgicos de engenharia e após isto, reduzir a escala para microestruturas. Foi visto, que os principais trabalhos seguem um padrão nos métodos utilizados. Primeiro se decide qual estrutura será modelada. Posteriormente monta-se a Hamiltoniana do sistema, para que seja possível obter toda informação referente ao sistema. Realiza-se a análise de deformação gradiente para investigar a maneira como a estrutura se movimenta. Emprega-se método dos elementos finitos para obter quaisquer grandezas analisadas, neste caso, o deslocamento.

No trabalho de Brand (2006) um novo mecanismo de excitação auto-magnética para ressonância microssensores que vibram em modo rotacional no plano são apresentados. Mecanismos integrados de excitação comumente encontrados em microssensores ressonantes incluem princípios eletrostáticos, piezoelétricos, eletromagnéticos e eletrotérmicos. A excitação eletrotérmica tem a vantagem de apenas requerer resistências de aquecimento e tem sido amplamente utilizada em microrressonadores baseados em CMOS.

Para excitar a microestrutura é necessário um torque em torno do centro da estrutura. Para isso, foi criado um campo externo por meio do campo magnético. Na Figura 1.7-a a vibração é produzida por linhas de alumínio em torno dos semi-discos e ao longo da viga de suporte central. Cada condutor interage com o fluxo magnético gerado por transporte de corrente próximo linhas. Os condutores de alumínio são projetados para produzir torque rotacional líquido apenas pelo fluxo de corrente. Na Figura 1.7-b e pela direção das forças geradas pode ser facilmente entendido imaginando a força exercida entre duas correntes paralelas condutores.

Figura 1.7 – Microestrutura

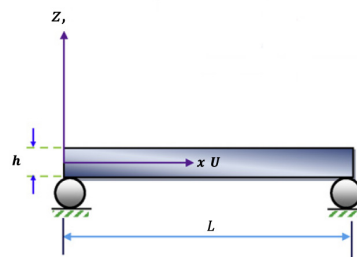


Fonte – (Brand, 2006)

São investigadas em Ansari, Gholami e Sahmani (2011) características de vibração em microvigas usando o princípio de Hamilton. Foi introduzida a teoria do gradiente de deformação modificado com três parâmetros de escala de comprimento. Isto, mostrou-se relevante para análise de deformação gradiente, e tensores de gradiente de rotação simétricos. Foi investigado respostas estáticas e dinâmicas de microvigas de Euler-Bernoulli usando gradiente de deformação modificado.

As equações de movimento juntamente com as condições de contorno correspondentes foram obtidas para a análise de vibração livre de micro-vigas. Observa-se que o valor do índice de gradiente desempenha um papel importante na resposta vibracional da micro-viga estudada mostrada na Figura 1.8.

Figura 1.8 – Esquema de uma microviga



Fonte – (ANSARI; GHOLAMI; SAHMANI, 2011)

Com base na teoria de deformação gradiente e vigas de Timoshenko, foi investigada a resposta vibracional de uma microviga, e foi analisada como a variação de seu tamanho poderia influenciar as repostas do sistema.

As equações governantes de ordem superior e limite correspondente as condições foram derivadas pelo uso do princípio de Hamilton. As influências do parâmetro da escala de comprimento, índice de gradiente de material, foram discutidas em detalhe em Ansari, Gholami e Sahmani (2011). Além disso, neste trabalho foi feita uma comparação entre o comportamento vibracional das microvigas.

Observou-se que as frequências naturais das microvigas (FMG) com base na teoria de vigas Timoshenko e gradiente de deformação, que a tensão é maior que os das microvigas de Alumínio e menores que os dos microvigas de Cerâmica. No entanto, as frequências das microvigas FGM são maiores que as dos microvigas metálicas e menores que as dos microvigas cerâmicos.

## 1.5 Estrutura do trabalho

No Capítulo 1, foi exibido os objetivos gerais e específicos da pesquisa. As características de sistemas micromecânicos e a Revisão da Literatura para explorar o tema escolhido e métodos utilizados para resolver problemas de vibrações em viga semelhante ao estudado.

No Capítulo 2, é desenvolvida uma formulação acerca da concepção da formulação matemática e modelos não lineares. Posteriormente, é mostrado a teoria do Filtro de Kalman e sua aplicabilidade como ferramenta de controle on-line de vibração, e por fim, uma breve teoria da formulação do método de Diferenças Finitas.

No Capítulo 3, são expressos os cálculos resultantes modelagem feita no Capítulo 2 e em seguida o modelo numérico utilizado.

No Capítulo 4, são expressos os matérias e métodos utilizados para obter os dados captados pelo sensor e a programação em blocos utilizada responsável pelo processamento de sinais.

No Capítulo 5, são exibidos os resultados inerente a pesquisa. Primeiramente os resultados método de elementos finitos, em seguida a simulação numérica e por fim, os resultados do Filtro de Kalman.

No Capítulo 6 é mostrada a conclusão final da pesquisa e dos artigos desenvolvidos em conjunto com o trabalho.

## CAPITULO 2

### MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA

Neste capítulo será apresentada a modelagem do sistema utilizado. Inicialmente foi formulado o sistema lagrangiano, afim de compreender o fenômeno vibratório estudado. Para isso, expressamos as energias envolvidas no movimento e por fim, apresentamos o método de elementos finitos utilizado para modelar o deslocamento da viga.

#### 2.1 Teoria da deformação gradiente

A teoria de deformação gradiente foi introduzida na literatura por Mindlin e Tiersten (1962), Mindlin (1965), Mindlin (1964). A principal diferença entre a teoria da elasticidade clássica e a deformação gradiente é que a energia de deformação possui o termo de segunda ordem,

$$w = w(\epsilon_{ij}, \eta_{ijk}), \quad (2.1)$$

onde  $\epsilon_{ij}$  e  $\eta_{ijk}$  representam respectivamente o tensor de deformações e o tensor de segunda ordem,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i); \quad (2.2)$$

$$\eta_{ijk} = \partial_{ij} u_k. \quad (2.3)$$

Nas equação (2.2)-(2.3) o termo  $u_i, i = 1, \dots, n$  representa o campo de deslocamento da estrutura nas coordenadas globais  $x_i, i = 1, \dots, m$ . As quantidades  $n$  e  $m$ , de campos de deslocamentos, juntamente com as coordenadas globais dependem do tipo de problema a serem analisados, podendo ser unidimensional, bidimensional ou tridimensional.

A partir do princípio de Hamilton aplicado à equação (2.1) obtêm-se as equações de equilíbrio do corpo:

$$\partial_i \sigma_{ik} - \partial_{ij} \tau_{ijk} + f_k = 0, \text{ em } V \quad (2.4)$$

para  $0 \leq i, j, k \leq 3$ . As equações em (2.4) são interpretadas levando em consideração o somatório em  $i$  e  $j$ . Segue de Lam *et al.* (2003b) que os tensores de Cauch  $\sigma_{ij}$  e os tensores de superfícies  $\tau_{ijk}$  são dados por:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \epsilon_{ij}}; \quad (2.5)$$

$$\tau_{ijk} = \frac{\partial w}{\partial \eta_{ijk}}. \quad (2.6)$$

As equações em (2.5)-(2.6) são no interior da estrutura. Como condições de fronteira, segue de Lam *et al.* (2003b) que:

$$n_j(\sigma_{jk} - \partial_i \tau_{ijk}) + n_i n_j \tau_{ijk} (D_l n_l) - D_i(n_j \tau_{ijk}) = \bar{r}_k, \text{ OU} \quad (2.7)$$

$$u_k = \bar{u}_k, \text{ OU} \quad (2.8)$$

$$n_i n_j \tau_{ijk} = \bar{r}_k, \text{ OU} \quad (2.9)$$

$$D u_k = \bar{D} u_k. \quad (2.10)$$

Nas equações (2.7) e (2.9)  $D_l$  e  $D$  representam os operadores tensão de superfície, cuja definição é dada, respectivamente por:

$$D_l = (\delta_{ij} - n_j n_k) \partial_k, \quad D = n_k \partial_k. \quad (2.11)$$

No sistema de equações (2.7)-(2.9) e (2.11) os termos  $n_i$  representam as componentes do vetor normal à superfície de contorno.

A relação (2.4) representa a relação de forças no elemento estrutural quando levado em consideração o tensor deformação gradiente.

Neste trabalho assume-se que o comportamento dos materiais é linear. Assim, a energia de deformação (2.1) pode ser dada por:

$$w = \frac{1}{2} a_{i_1 j_1 i_2 j_2} \epsilon_{i_1 j_1} \epsilon_{i_2 j_2} + \frac{1}{2} b_{i_1 j_1 k_1 i_2 j_2 k_2} \eta_{i_1 j_1 k_1} \eta_{i_2 j_2 k_2}. \quad (2.12)$$

Segue de (2.5) e (2.6) que as tensões  $\sigma_{ij}$ ,  $\tau_{ijk}$ , de primeira e segunda ordem, respectivamente, são dadas por:

$$\sigma_{ij} = a_{i_1 j_1 i j} \epsilon_{i_1 j_1}, \quad \tau_{ijk} = b_{i_1 j_1 k_1 i j k} \eta_{i_1 j_1 k_1}. \quad (2.13)$$

No caso unidimensional, e levando em consideração a modelagem Euler-Bernoulli da viga, o campo de tensões  $\epsilon$  é dado por:

$$\epsilon = \partial_{xx} w. \quad (2.14)$$

Usando o campo de deslocamento  $u$  para descrever o tensor de deformação  $\epsilon$  (2.14), pode-se reescrever os tensores  $\sigma$  e  $\tau$  como:

$$\sigma = a_\sigma \partial_{xx} w, \quad \tau = a_\tau \partial_{xxx} w. \quad (2.15)$$

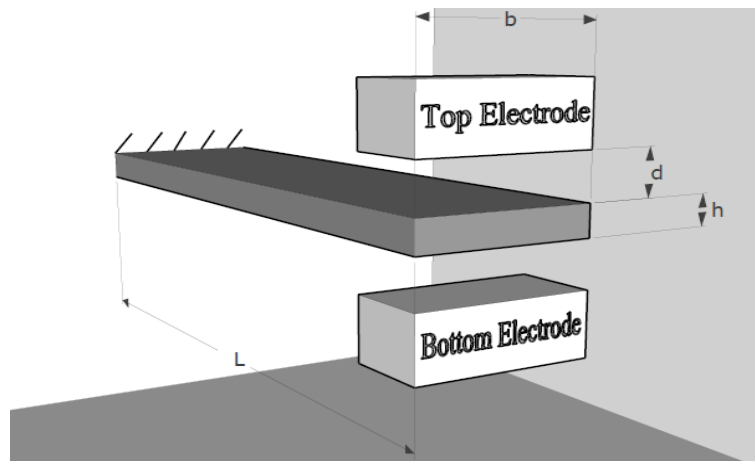
Desta forma o equilíbrio de forças dado em (2.4) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$f = a_\tau \partial_{xxx} w - a_\sigma \partial_{xx} w. \quad (2.16)$$

## 2.2 Modelo não Linear de estruturas

Nesta seção foi feito o desenvolvimento da modelagem matemática necessária para a análise de esforços na estrutura. A estrutura é uma viga de comprimento  $L(\mu m)$  com área da seção transversal  $A = bh$ ,  $b(\mu m)$  representa a largura e  $h(\mu m)$  a espessura da barra. A densidade do material gira em torno de  $1000 \frac{kg}{m^3}$ ; o módulo de elasticidade é da ordem de  $E = 1.44 GPa$ , conforme pode ser visto na figura (2.1)

Figura 2.1 – Modelo de Viga do Tipo Euler-Bernoulli



Fonte – Elaborada por Werley Rafael da Silva adaptado de Vatankhah, Karami e Salarieh (2015b)

No presente trabalho, para que seja possível analisar as deformações da estrutura, a teoria de Euler-Bernoulli para barras será considerada. Seu uso pressupõe uma relação entre o comprimento e espessura de barra da ordem de 10; isto significa que  $\frac{L}{h} > 10$ . No presente modelo, a deformação  $\epsilon_x$ , ao longo das fibras da estrutura, é dada por sua curvatura, cuja definição é

$$\epsilon_x = \frac{z - a}{R} \quad (2.17)$$

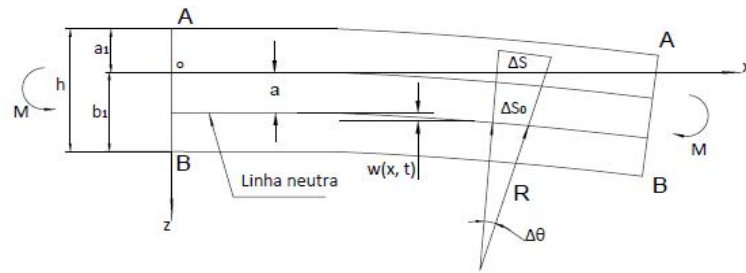
A tensão,  $\sigma_x$  atuante nas fibras da estrutura ao longo da direção  $x$  é

$$\sigma_x = -\frac{E(z - a)}{R}, \quad (2.18)$$

onde  $z$  representa a linha de deformação da estrutura e  $a$  é a distância não deformada do eixo de referência à linha neutra da estrutura, veja Figura (2.2). O momento gerado no plano  $y - z$  a partir do campo de tensões  $\sigma_x$  na direção  $x$  é dado por:

$$M_{yz} = \frac{EI}{R}, \quad (2.19)$$

Figura 2.2 – Relação momento curvatura em uma viga do tipo Euler-Bernoulli



Fonte – Magrab (2012)

onde  $I_{yz}$  representa o momento de inércia do elemento de área  $dA_{yz}$  no plano  $y - z$ ,

$$I_{yz} = \int \int_{dA_{yz}} (z - a)^2 dz dy, \quad (2.20)$$

e  $E$  representa o módulo de elasticidade da estrutura (D.H., 1984; MAGRAB, 2012). Se o campo de deslocamento da estrutura, no plano  $x, z$  é dado, respectivamente por  $u$  e  $w$ , a curvatura no plano  $x - z$  é dado por:

$$\frac{1}{R} = \frac{(1 + \partial_x u) \partial_x^2 w - (\partial_x w) (\partial_x^2 u)^2}{[(1 + \partial_x u)^2 + \partial_x^2 w]^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.21)$$

Neste trabalho a deformação por deslocamento axial é pequena, assim podemos assumir que a curvatura  $\kappa$  é aproximada por:

$$\kappa = \frac{1}{R} = \partial_{xx} w. \quad (2.22)$$

De (2.17) a deformação axial é dada pela expressão:

$$\epsilon_x = -(z - a) \partial_{xx} w. \quad (2.23)$$

A lei de Hooke expressão na relação (2.18) fornece:

$$\sigma_x = -E(z - a) \partial_{xx} w. \quad (2.24)$$

Levando em consideração (2.19) juntamente com a teoria das estruturas, o momento  $M_{yz}$  e a força cortante são dados por:

$$\begin{aligned} M_{yz}(x) &= EI(x) \partial_{xx} w, \\ V_y &= (EI(x) \partial_{xx} w)_x. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Neste trabalho a dinâmica da viga será feita por meio da hamiltoniana generalizada,

$$F(x, t, w, \dot{w}, w_x, w_{xx}, w_{xxx}) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A(x) (\partial_t w)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) (\kappa_1 (\partial_{xxx} w)^2 - \kappa_2 (\partial_{xx} w)^2) dx, \\ + \frac{1}{2} \epsilon b V_0^2 \int_0^L F(w(x, t)) \delta(x - L) dx \quad (2.26)$$

onde  $\kappa_i, i = 1, 2$  são dadas por:

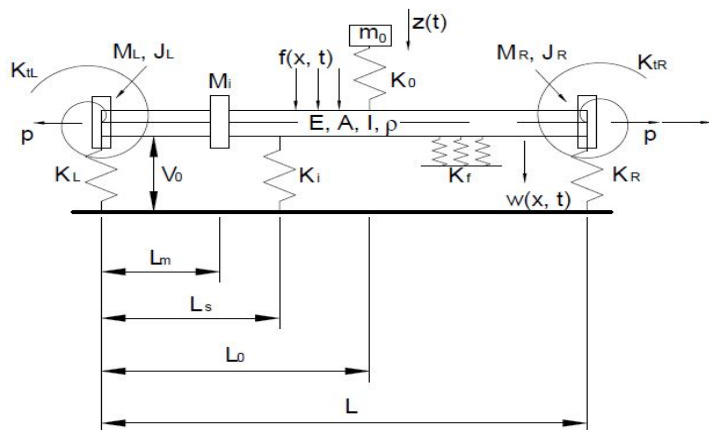
$$\kappa_1 = \mu A \left( 2l_0^2 + \frac{43}{225} l_1^2 + l_2^2 \right), \quad (2.27)$$

$$\kappa_2 = \mu I \left( 2l_0^2 + \frac{4}{5} l_1^2 \right). \quad (2.28)$$

Nas equações (2.27)-(2.28) os termos  $l_0, l_1$  e  $l_2$  representam, respectivamente, a tensão gradiente por dilatação, tensão gradiente por tração e tensão gradiente por rotação (LAM *et al.*, 2003b).

A partir deste funcional as equações descrevem o deslocamento transversal da estrutura, juntamente com as condições de fronteira. Para a montagem da hamiltoniana as energias de deformações internas expressas pelo momento fletor são; a inércia distribuída da estrutura, geralmente o peso específico da estrutura exerce um papel preponderante; as concentrações de massa pontual; as energias elásticas, distribuídas e pontuais que estão em contato ao longo do interior da estrutura; os campos de temperatura e os campos elétricos atuam na estrutura. Na fronteira da viga considera-se os efeitos devido a inércia, energia potencial elástica de contato e energia de deformação devido a presença de gradientes de temperatura. Todos estes campos de forças que exercem tensão na estrutura podem ser vistos na Figura (2.3).

Figura 2.3 – Campos de forças atuantes na estrutura



Fonte – Elaborada por Werley Rafael da Silva adaptado de Magrab (2012)

## 2.2 Energia Cinética

Nesta subseção foi feito a descrição da energia de inércia associada ao elemento de estrutura. A variável que mede o deslocamento  $w = w(x, t)$ , é uma variável temporal, isto quer dizer que

podemos associar a ela, em cada ponto  $x$ , uma quantidade de momento linear dada por:

$$\rho A \partial_t w(x, t)^2 \quad (2.29)$$

O momento total da estrutura é obtido fazendo-se a integração na variável  $x$ . Assim a energia total do sistema é dada por:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A(x) (\partial_t w(x, t))^2 \quad (2.30)$$

O presente trabalho leva em consideração uma condição de contorno imposta a partir de considerações do campo de deslocamento não linear que atua na extremidade livre da estrutura. Para deixar o texto mais claro, foi feito um breve comentário sobre condições de contorno.

Conforme pode ser visto na Figura 2.3 as extremidades da viga podem assumir diferentes tipos de contorno; desde contatos elásticos, lineares e torcionais, elementos de mola, gerando neste caso, dinâmica nos engastes. Posto isto, pode se afirmar que, a energia de engastamento pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$F^{C_1} = \frac{1}{2} (M_0 \dot{w}(0, t)^2 + J_0 \dot{w}_x(0, t)^2 + M_L \dot{w}(L, t)^2 + J_L \dot{w}_x(L, t)^2) - \frac{1}{2} (k_0 w(0, t)^2 + k_{rot0} w_x(0, t)^2 + k_L w(L, t)^2 + k_{rotL} w_x(L, t)^2). \quad (2.31)$$

Na equação (2.31) o termo  $M_i \dot{w}(i, t)$ ,  $i = 0, L$ ,  $t \leq 0$  representa a energia de inércia quando é acoplado alguma massa em uma das extremidades; para o caso de energia rotacional, temos o termo  $J_i \dot{w}_x(i, t)$ ,  $i = 0, L$ ,  $t \leq 0$  que representa a taxa temporal de rotação do elemento de massa acoplado nas extremidades; fazendo uma analogia com a dinâmica discreta,  $w_x(i, t) = \theta_i(t)$ , onde  $\theta$  representa o ângulo de rotação dos elementos de engaste, enquanto que,  $\dot{w}_x(i, t) = \dot{\theta}_i(t)$  a taxa de rotação temporal dos elementos nos engastes;  $k_i w(0, t)^2$  representa a energia potencial linear de contato, enquanto,  $K_{i,t} w_x(i, t)$  descreve a energia potencial de contato rotacional nos engastes. No presente trabalho, a excitação externa age conforme:

$$F(x) = ((d - x)^{-0.5} - (d + x)^{-0.5}) \quad (2.32)$$

atua na estrutura da seguinte forma:

$$EI \partial_x^3 w(0, t) - EI \partial_x^2 w(0, t) = F(w(L, t)), t \leq 0 \quad (2.33)$$

Como pode ser visto da equação anterior, as condições de contorno são não lineares. Este problema será resolvido usando a matriz de rigidez tangente. Voltaremos a este tema no Capítulo 3.

### 2.3 Sistemas dissipativos

Nessa seção discute-se a técnica de sistemas dissipativos na análise de estabilidade da viga engastada-livre, dada pela figura (2.1). A ideia básica da teoria consiste em descrever a estabilidade do sistema por meio do funcional energia, ou funcional de Lyapunov. A construção do funcional energia  $E(t) = F(x, t, w, \dot{w}, w_x, w_{xx}, w_{xxx})$ , onde  $F$  é dada em (2.26), se dá a partir da hamiltoniana generalizada do sistema. Um tal procedimento leva em consideração a energia de deformação, que denota-se por  $U(\cdot)$ , sendo que esta energia foi discutida na seção (2.1); a energia de inércia do sistema, que será denotada por:  $T(t)$  e a energia eletroestática dada:

$$W_{V_0}(t) = \frac{1}{2} \epsilon b V_0^2 \int_0^L F(w(x, t)) \delta(x - L) dx.$$

A teoria de sistemas dissipativos teve início com os trabalhos pioneiros de Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, onde em seu famoso trabalho (LYAPUNOV, 1992), o funcional de Lyapunov. O método direto de Lyapunov consiste em obter informações sobre a estabilidade do sistema, sem precisar resolver analiticamente as equações de movimento. Para isto é utilizado a função energia. No presente trabalho, a função energia total é dada por:

$$E(t) = T(t) + U(t) + W_{V_0}(t), \quad (2.34)$$

onde os funcionais em (2.34) são dados por (2.26). A estrutura considerada é formada por uma viga engastada em uma extremidade e livre na outra. Uma vez definida o funcional energia, a estabilidade do sistema é garantida quando a variação de  $E(t)$  é negativa, o que significa:

$$\dot{E} \leq 0, \text{ para } t \leq 0. \quad (2.35)$$

No projeto considera-se que a viga é composta por material homogêneo e de seção transversal constante e de comprimento total  $L$  com espessura total  $h$ . As ações atuantes na viga são dadas pela hamiltoniana do sistema levando em consideração os efeitos de segunda ordem são:

$$\rho A \partial_{tt} w(s, t) + EI(s) \partial_s^4 w(s, t) - \kappa_1 \partial_s^6 w(s, t) = 0, \quad s \in (0, L), t > 0, \quad (2.36)$$

na equação (2.36)  $EI(s)$  representa a rigidez da estrutura e  $\kappa_1 = \kappa_1(\mu, l)$ ,  $\mu$  representa o módulo de cisalhamento, enquanto  $l$  representa as características do material. As condições de contorno leva em consideração o campo de forças eletrostático que atua na fronteira  $s = L$ ,  $\epsilon V_0^2 ((d - w(L, t))^{-0.5} - (d + w(L, t))^{-0.5})$ . Neste caso teremos momento  $EI \partial_{ss} w(0, t)$  e força de cisalhamento  $EI(x) \partial_{sss} w(0, t)$  de reação obtendo a seguinte condição de contorno física são:

$$EI \partial_{sss} w(0, t) + EI \partial_{ss} w(0, t) = (1 + L) \epsilon V_0^2 ((d - w(L, t))^{-0.5} - (d + w(L, t))^{-0.5}), \quad (2.37)$$

na equação (3.2) o termo de fronteira não linear será denotado por:

$$F(w) = (d - w(L, t))^{-0.5} - (d + w(L, t))^{-0.5}. \quad (2.38)$$

Neste trabalho, um dos resultados que pretende-se ter é a estabilidade assintótica para o sistema (2.36)-(3.2) O espaço de função usado para modelar o problema é:

$$V = \mathcal{H}^3(0, L) \times \mathcal{L}^2(0, L),$$

onde  $\mathcal{L}^2(0, L)$  representa o espaço das função  $u(\cdot)$  tais que:

$$\int_0^L |u(s)|^2 dx < \infty. \quad (2.39)$$

O conjunto  $\mathcal{H}^3(0, L)$  é o espaço de Sobolev definido por:

$$\mathcal{H}^3(0, L) = \left\{ u; D^i u \in L^2(0, L); 0 \leq i \leq 3 \right\}, \quad (2.40)$$

onde  $D^i$  representa a  $i$ -ésima derivada fraca da função  $u(\cdot)$ . Para o caso em que  $i = 0$ ,  $D^i u(\cdot)$  representa o operador identidade, ou seja,  $D^0 u(\cdot) = u(\cdot)$ . O conjunto  $\mathcal{H}^3(0, L)$  munido com o produto interno dado:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho A x_1 y_1 + E I x_2'' y_2'' + \kappa_1 x_2''' y_2''') ds, \quad (2.41)$$

onde  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$ . O espaço de funções  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  munido com o produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é um espaço de Hilbert, veja (REDDY, 1991). Para o caso de fronteira linear (3.2) várias técnicas podem ser usadas para obter propriedades da solução de (2.36)-(3.2). Uma das formas é através da teoria de semigrupos. O uso de tal técnica só é possível devido a linearidade dos operadores diferenciais em (2.36) e com condições de contorno lineares. No presente trabalho as condições de contorno (3.2) são não lineares o que não permite o uso diretamente de tal teoria. Para contornar este problema foi considerado da seguinte forma:

$$\partial_s^3 w(0, t) = -\partial_s^2 w(0, t) + (EI)^{-1} (1 + L) \epsilon V_0^2 F(w(L, t)); \quad (2.42)$$

$$\partial_s^4 w(0, t) = \kappa_1^{-1} \partial_{ss} w(0, t) - \kappa_1^{-1} (1 + L) \epsilon V_0^2 F(w(L, t))$$

$$+ \kappa_1^{-1} (1 + L) \epsilon V_0^2 \partial_s F(w(L, t))$$

$$\partial_s^5 w(0, t) = -\kappa_1^{-1} \partial_{sss} w(0, t) + \kappa_1^{-1} (1 + L) \epsilon V_0^2 F(w(L, t))$$

$$- \kappa_1^{-1} (1 + L) \epsilon V_0^2 \partial_s F(w(L, t)) + (1 + L) \epsilon V_0^2 \partial_{sss} F(w(L, t)). \quad (2.43)$$

Como pode ser visto de (2.36)-(3.2)  $w^* = 0$  é solução de equilíbrio do sistema (2.36)-(3.2). Assim, o sistema linear assume a seguinte forma:

$$\rho A \partial_t^2 \eta(s, t) + EI(x) \partial_s^4 \eta(s, t) + \kappa_1 \partial_s^6 \eta(s, t) = 0, \quad x \in (0, L), t > 0, \quad (2.44)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\partial_s^3 \eta(0, t) = -\partial_s^2 \eta(0, t) + (EI)^{-1} (1 + L) \epsilon V_0^2 \delta F(w^*(L, t)); \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \partial_s^4 \eta(0, t) &= \kappa_1^{-1} \partial_{ss} w(0, t) - \kappa_1^{-1} (1 + L) \epsilon V_0^2 \delta F(w^*(L, t)) \\ &\quad + \kappa_1^{-1} (1 + L) \epsilon V_0^2 \delta \partial_s F(w^*(L, t)) \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \partial_s^5 \eta(0, t) &= -\kappa_1^{-1} \partial_{ss} w(0, t) + \kappa_1^{-1} (1 + L) \epsilon V_0^2 \delta F(w^*(L, t)) \\ &\quad - \kappa_1^{-1} (1 + L) \epsilon V_0^2 \delta \partial_s F(w^*(L, t)) + (1 + L) \epsilon V_0^2 \delta \partial_{ss} F(w^*(L, t)), \end{aligned} \quad (2.47)$$

onde o operador  $\delta$  representa a derivada funcional, cuja definição é dada por:  $\delta f(\varphi)(\eta) = \frac{d}{d\epsilon} f(\varphi + \epsilon \eta)|_{\epsilon=0}$ ,  $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(0, L)$ . A equação (2.36) com as condições de contorno (3.10)-(3.12) pode ser modelada na forma de equações de estado na seguinte forma:

$$\dot{y} = Ay, \quad (2.48)$$

onde  $A: D(A) \subset V \rightarrow V$  é um operador linear dado por

$$Aw = (w_2, -EI \partial_s^4 w_1 - \kappa_1 \partial_s^6 w_1), \quad (2.49)$$

para  $w = (w_1, w_2) \in D(A) = H_{\Gamma_0}^6(0, L) \times L^2(0, L)$ . O espaço  $\mathcal{H}_{\Gamma_0}^6(0, L)$  representa o espaço de Sobolev  $\mathcal{H}^6(0, L)$  munido com as condições de contorno (3.10)-(3.12). A energia total do sistema é dada por:

$$\langle y, Ay \rangle = \int_0^L (\rho A (\partial_t \eta)^2 + EI (\partial_{ss} \eta)^2 + \kappa_1 (\partial_{sss} \eta)^2) ds, \quad (2.50)$$

onde  $y = (\eta, \partial_t \eta)$ . Numericamente, estamos interessados na taxa de variação da energia, dada por (3.15). A taxa da variação de energia é dada por:

$$\frac{d}{dt} \langle y, y \rangle, \quad (2.51)$$

sendo que é solução da equação (3.9). Substituindo (3.9) em (3.16) temos:

$$\begin{aligned} \langle y, \dot{y} \rangle &= \langle e, Ae \rangle = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho A \eta_t^2 + EI \eta_{ss}^2 + \kappa_1 \eta_{sss}^2) ds \\ &\quad \int_0^L (-\rho AEI \eta_t \eta_{ssss} - \rho A \kappa_1 \eta_t \eta_{sssss} + EI \eta_{ss} \eta_{sst} + \kappa_1 \eta_{sss} \eta_{ssst}) ds. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Usando integração por partes e as condições de contorno (3.10)-(3.8) em (3.17) obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle y, Ay \rangle &= \int_0^L \left( (-\rho AEI + EI)\eta_{ss}\eta_{sst} + 2\kappa_1\eta_{sss}\eta_{ssst} \right) ds \\
&\quad - \rho A\kappa_1\partial_s^5\eta\partial_t\eta|_0^L + \rho A\kappa_1\partial_s^4\eta\partial_{st}\eta|_0^L - \rho A\kappa_1\partial_s^3\eta\partial_{sst}\eta|_0^L \\
&= \int_0^L \left( (-\rho AEI + EI)\eta_{ss}\eta_{sst} + 2\kappa_1\eta_{sss}\eta_{ssst} \right) ds \\
&\quad (c_1^{-1}EI\partial_s^3\eta(L, t) + \rho Ac_1^{-1}(EI)^{-1}(1+L)\epsilon V_0^2\delta F(w^*(L, t)))(\partial_{ss}\eta(0, t)) \\
&\quad + (1+L)\epsilon V_0^2\delta F(w^*(L, t)) + (1+L)\epsilon V_0^2\delta\partial_s F(w^*(L, t)) + (1+L)\epsilon V_0^2\delta\partial_s^2 F(w^*(L, t)) \\
&\quad + (c_1^{-1}EI\partial_s^2\eta(L, t) + \rho Ac_1^{-1}(EI)^{-1}(1+L)\epsilon V_0^2\delta F(w^*(L, t)))(\partial_{ss}^2\eta(0, t)) \\
&\quad - (1+L)\epsilon V_0^2\delta f(w^*(L, t)) + (1+L)\epsilon V_0^2\delta\partial_s^2 F(w^*(L, t)) \\
&\quad + \rho A(-\kappa_1\partial_s^2\eta(0, t) + (EI)^{-1}(1+L)\epsilon V_0^2\delta F(w^*(L, t)))(a_1\partial_s^2\eta(0, t) + a_2\epsilon V_0^2 F(w^*)) \quad (2.54)
\end{aligned}$$

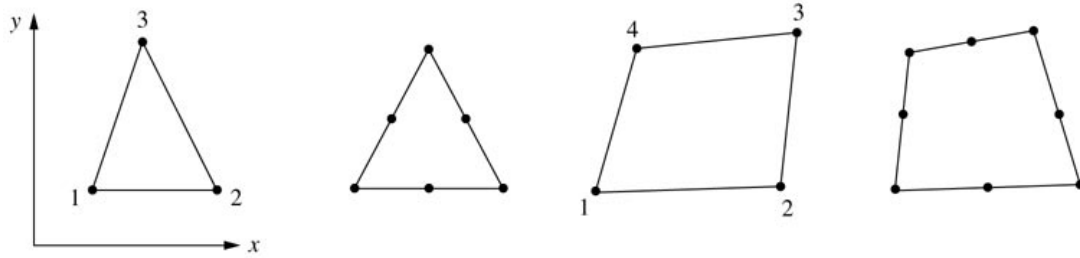
## 2.4 Formulação do método de elementos finitos

O método dos elementos finitos é um método numérico para resolver problemas de engenharia e física matemática. Situações típicas nas áreas de engenharia e física matemática que podem usar elementos finitos, são elas: análise de estruturas, transferência de calor, fluxo de fluidos, transporte de massas e potenciais eletromagnéticos, entre outros.

O método consiste em discretizar o domínio a ser analisado em um conjunto de nós. Esta discretização pode ser estruturada. Dessa forma, os nós são distribuídos ao longo da malha seguindo um padrão. Já na discretização não estruturada os nós são alocados de maneira aleatória.

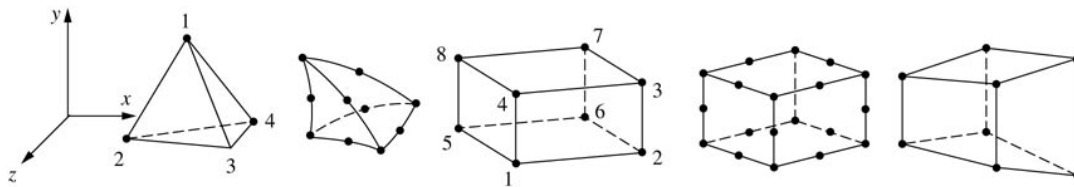
O processo de construção dos nós da malha gera uma matriz de coordenadas e uma matriz de conectividade que relaciona os nós com cada um dos elementos da malha. Usando a matriz de conectividade e a matriz de coordenadas é possível, através de uma rotina computacional obter a matriz de rigidez, de inércia, e o vetor de forças. Nas Figuras 2.4 e 2.5 são ilustrados os modelos de elementos lineares bidimensionais e tridimensionais e apresenta-se alguns elementos comumente usados na discretização de geometrias. Segundo (LOGAN, 2011) os elementos tridimensionais mais comuns são elementos tetraédricos e hexaédricos eles são usados quando se torna necessário realizar uma análise de tensão tridimensional.

Figura 2.4 – Elementos Bidimensionais



Fonte – Adaptado de (LOGAN, 2011)

Figura 2.5 – Elementos Tridimensionais



Fonte – Adaptado de (LOGAN, 2011)

Após a discretização da geometria, o campo de deslocamentos,  $u(x)$ ; o vetor  $x$  está relacionado com as coordenadas dos nós podendo ser de dimensão 1, 2 ou 3. O vetor de deslocamento  $u$  é construído da seguinte forma:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n H_i(x) u_i. \tag{2.55}$$

Na equação (2.55) as funções  $H_i(\cdot)$  são construídas por meio de bases polinomiais, para maiores detalhes sobre tais construções, o leitor pode consultar (Soriano, Método de Elementos Finitos na Análise de Estruturas). A quantidade de funções de forma,  $H_i, i = 1, \dots, n$  é determinada a partir do número de nós presente em cada elemento. Uma vez determinada a quantidade de funções de forma, monta-se a matriz de rigidez local utilizando a equação 2.56 :

$$[k^e] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i^e \\ f_j^e \end{Bmatrix} \tag{2.56}$$

De forma semelhante à montagem da matriz rigidez/flexibilidade, as demais matrizes do sistema são construídas, a saber, matriz de inércia  $M_{i,j}$  e a matriz de amortecimento  $C_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n_{total}$ . Uma vez montada as matrizes,  $M, C$  e  $K$ , o seguinte sistema

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = F, \tag{2.57}$$

deve ser resolvido. Na equação (2.57) o campo de deslocamento  $u$  deve ser adaptado para

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{n_{total}} H_i(x) u_i(t), \quad (2.58)$$

para mensurar os efeitos dinâmicos do sistema.

## 2.5 Filtro de Kalman

Este estudo propõe-se a utilizar o Filtro de Kalman para minimizar os ruídos de valores de deslocamentos em uma viga. Comparado com outros procedimentos de estimação, a abordagem do Filtro de Kalman gera parâmetros estimados com melhor propriedades em termos de eficiência e previsão (HATEMI-J; ROCA, 2006).

Filtragem, no contexto de raciocínio probabilístico temporal, consiste em estimar variáveis de estado, tais como posição, velocidade, entre outras observações ruidosas ao longo do tempo. Para dar um exemplo claro de sua aplicação, é usado as palavras de Russell e Norvig (2009): “Imagine observar um pássaro pequeno voar em uma floresta de folhagem densa na penumbra: você pisca brevemente e vê intermitentes *flashes* de movimento, você se esforça para adivinhar onde o pássaro está e ele irá aparecer de forma que você não perca ele”. Quando você tenta seguir a trajetória de voo do pássaro você está fazendo filtragem.

O filtro de Kalman é usado para estimar o estado de um sistema linear, consistindo de dois passos: predição e correção (também conhecida como passo de atualização). O primeiro passo usa as variáveis do estado anterior para predizer as variáveis do estado corrente e a incerteza destas. O segundo passo usa a medição corrente, ou seja, os valores atuais captados pelos sensores, para corrigir a estimativa do estado corrente. Desta forma, o filtro de Kalman é um processo *online* onde a nova medição (também chamada de observação) é processada assim que ele é recebida.

Para definir o modelo temporal geral usado pelo filtro de Kalman. Assume-se que ambos, o modelo de transição e o modelo de sensor seguem uma transformação linear com ruído gaussiano aditivo. Assim, a equação 2.59 representa a projeção do estado à frente, e a equação 2.60, a projeção do erro de covariância do estado seguinte. Juntas elas formam o estado de predição do Filtro de Kalman (DOUCET *et al.*, 2000), (CORREA; BARBOSA, ). Outro estado importante do Filtro é a fase de correção, formada pelas equações 2.61, 2.62 e 2.63.

Na equação 2.60 é produzido o ganho kalman, na equação 2.61 é atualizada a estimativa por meio da medição  $z_k$ . E por fim, na equação 2.62 ocorre a atualização do erro de covariância.

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \quad (2.59)$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \quad (2.60)$$

$$K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} \quad (2.61)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H \hat{x}_k^-) \quad (2.62)$$

$$P_k = (I - K_k H) P_k^- \quad (2.63)$$

onde:

$\hat{x}_k^-$  → Vetor de estado a priori em um determinado instante de tempo  $k$

$\hat{x}_k$  → Vetor de estado a posteriori em um determinado instante de tempo  $k$

$P_k^-$  → Covariância a priori gerada entre os valores de entrada do processo.

$P_k$  → Covariância a posteriori gerada entre os valores de entrada do processo.

$z_k$  → Medida fornecida do sistema.

$Bu_{k-1}$  → Matriz que relaciona o estado a posteriori com os pontos de monitoramento de entrada e controle do processo, representados por um vetor  $u_k$ .

$A$  → Matriz de estados para movimento em 2 dimensões.

$Q$  → Modelo de transição, (matriz de covariância dos estados), relacionada com ruídos.

$R$  → Modelo de sensor, (matriz de covariância do sensor), relacionada com ruídos.

$I$  → Matriz identidade.

$K$  → Ganho de Kalman.

## 2.6 Método das diferenças finitas para sistemas contínuos

A equação de movimento de um sistema com múltiplos graus de liberdade pode ser expressa como (RAO; YAP, 2011)

$$[m] \ddot{\vec{x}} + [c] \dot{\vec{x}} + [k] \vec{x} = \vec{F} \quad (2.64)$$

onde  $[m]$ ,  $[c]$  e  $[k]$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez,  $\vec{x}$  é o vetor de deslocamento e  $\vec{F}$  é o vetor de força. O método das diferenças finitas para os vetores de velocidade e aceleração no tempo  $t_i = i\Delta t$  ( $\dot{\vec{x}}$  e  $\ddot{\vec{x}}$ ) são dadas por:

$$\dot{\vec{x}} = \frac{1}{2\Delta t} (\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_{i-1}) \quad (2.65)$$

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{1}{(\Delta t)^2} (\vec{x}_{i+1} - 2\vec{x}_i + \vec{x}_{i-1}) \quad (2.66)$$

Assim, a equação 2.64, no tempo  $t_i$  pode ser escrita como:

$$[m] \frac{1}{(\Delta t)^2} (\vec{x}_{i+1} - 2\vec{x}_i + \vec{x}_{i-1}) + [c] \frac{1}{2\Delta t} (\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_{i-1}) + [k] \vec{x}_i = \vec{F} \quad (2.67)$$

onde  $\vec{x}_{i+1} = \vec{x}(t = t_{i+1})$ ,  $\vec{x}_i = \vec{x}(t = t_i)$ ,  $\vec{x}_{i-1} = \vec{x}(t = t_{i-1})$ ,  $\vec{F}_i = \vec{F}(t = t_i)$ . A equação 2.67 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\left(\frac{1}{(\Delta t)^2} [m] + \frac{1}{2\Delta} [c]\right) \vec{x}_{i+1} = \vec{F}_i - \left([k] - \frac{2}{(\Delta t)^2} [m]\right) \vec{x}_i - \left(\frac{1}{(\Delta t)^2} [m] - \frac{1}{2\Delta} [c]\right) \vec{x}_{i-1} \quad (2.68)$$

Assim Equação 2.68 fornece o vetor de solução  $\vec{x}_{i+1}$  uma vez que  $\vec{x}_i$  e  $\vec{x}_{i-1}$ . Eqs. 2.64 a 2.66 são avaliados em  $i = 0$  para obter:

$$[m] \vec{\ddot{x}}_0 + [c] \vec{\dot{x}}_0 + [k] \vec{x}_0 = \vec{F}_0 = \vec{F}(t = 0) \quad (2.69)$$

$$\vec{\dot{x}}_0 = \frac{1}{2\Delta} (\vec{x}_1 - \vec{x}_{-1}) \quad (2.70)$$

$$\vec{\ddot{x}}_0 = \frac{1}{(\Delta t)^2} (\vec{x}_1 - 2\vec{x}_0 + \vec{x}_{-1}) \quad (2.71)$$

A equação 2.69 fornece o vetor de aceleração inicial como:

$$\vec{\ddot{x}}_0 = [m]^{-1} (\vec{F}_0 - [c] \vec{\dot{x}}_0 - [k] \vec{x}_0) \quad (2.72)$$

e a equação 2.70 fornece o vetor de deslocamento em  $t_1$ .

$$\vec{\ddot{x}}_1 = \vec{\ddot{x}}_{-1} + 2\Delta t \vec{\ddot{x}}_0 \quad (2.73)$$

Logo obtêm-se:

$$\vec{x}_{-1} = \Delta t \vec{\dot{x}}_0 + \frac{(\Delta)^2}{2} \vec{\ddot{x}}_0 \quad (2.74)$$

onde  $\vec{\ddot{x}}_0$  é dado pela Eq. 2.72. Assim  $\vec{x}_{-1}$  necessário para aplicar a Eq. 2.68 para  $i = 1$  é dado pela Eq. 2.74. O procedimento computacional pode ser descrito pelos seguintes passos.

1. A partir das condições iniciais conhecidas  $\vec{x}(t = 0) = \vec{x}_0$  e  $\dot{\vec{x}}(t = 0) = \dot{\vec{x}}_0$  compute  $\vec{\ddot{x}}(t = 0) = \vec{\ddot{x}}_0$ , usando a Eq. 2.72
2. Selecione um intervalo  $\Delta t$  de tempo de tal forma que  $\Delta t < Tolerância$

3. Compute  $\vec{x}_1$  usando a Equação 2.74
4. Encontre  $\vec{x}_{i+1} = \vec{x}(t = t_{i+1})$ , começando com  $i = 0$  a partir da equação 2.68

Assim obtem-se:

$$\vec{x}_{i+1} = \left[ \frac{1}{(\Delta t)^2} [m] + \frac{1}{2\Delta t} [c] \right]^{-1} \left[ \vec{F}_i - \left( [k] - \frac{2}{(\Delta t)^2} [m] \right) \vec{x}_i - \left( \frac{1}{(\Delta t)^2} [m] - \frac{1}{2\Delta t} [c] \right) \vec{x}_{i-1} \right] \quad (2.75)$$

## CAPITULO 3

### CÁLCULOS DA MODELAGEM DO SISTEMA

Neste capítulo serão apresentados os cálculos referente a modelagem do sistema. Serão mostrados as características da hamiltoniana do sistema. Também será exibido os parâmetros necessários para avaliar a estabilidade da viga.

#### 3.1 Método de solução

A estrutura considerada é formada por uma viga em balanço. No projeto considera-se que a viga é composta por material homogêneo e de seção transversal constante e de comprimento total  $L$  com espessura total  $h$ . As ações atuantes na viga são dadas pela hamiltoniana do sistema levando em consideração os efeitos de segunda ordem dados por:

$$\rho A \partial_{tt} w(s, t) + EI(s) \partial_s^4 w(s, t) - \kappa_1 \partial_s^6 w(s, t) = 0, \quad s \in (0, L), t > 0, \quad (3.1)$$

na equação (3.1)  $EI(s)$  representa a rigidez da estrutura e  $\kappa_1 = \kappa_1(\mu, l)$ ,  $\mu$  representa o módulo de cisalhamento, enquanto  $l$  representa as características do material. As condições de contorno levam em consideração o campo de forças eletrostático que atua na fronteira  $s = L$ ,  $\epsilon V_0^2 ((d - w(L, t))^{-0.5} - (d + w(L, t))^{-0.5})$ . Neste caso teremos momento  $EI \partial_{ss} w(0, t)$  e força de cisalhamento  $EI(x) \partial_{sss} w(0, t)$  de reação obtendo a seguinte condição de contorno física:

$$EI \partial_{sss} w(0, t) + EI \partial_{ss} w(0, t) = (1 + L) \epsilon V_0^2 ((d - w(L, t))^{-0.5} - (d + w(L, t))^{-0.5}), \quad (3.2)$$

na equação (3.2) o termo de fronteira não linear será denotado por:

$$F(w) = (d - w(L, t))^{-0.5} - (d + w(L, t))^{-0.5}. \quad (3.3)$$

Neste trabalho, um dos resultados que pretendemos é a estabilidade assintótica para o sistema (2.36)-(3.2) O espaço de função usado para modelar o problema é:

$$V = \mathcal{H}^3(0, L) \times \mathcal{L}^2(0, L),$$

onde  $\mathcal{L}^2(0, L)$  representa o espaço das função  $u(\cdot)$  tais que:

$$\int_0^L |u(s)|^2 dx < \infty. \quad (3.4)$$

O conjunto  $\mathcal{H}^3(0, L)$  é o espaço de Sobolev definido por:

$$\mathcal{H}^3(0, L) = \left\{ u; D^i u \in L^2(0, L); 0 \leq i \leq 3 \right\}, \quad (3.5)$$

onde  $D^i$  representa a  $i$ -ésima derivada fraca da função  $u(\cdot)$ . Para o caso em que  $i = 0$ ,  $D^i u(\cdot)$  representa o operador identidade, ou seja,  $D^0 u(\cdot) = u(\cdot)$ . O conjunto  $\mathcal{H}^3(0, L)$  munido com o produto interno:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho A x_1 y_1 + E I x_2'' y_2'' + \kappa_1 x_2''' y_2''') ds, \quad (3.6)$$

onde  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$ . O espaço de funções  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  munido com o produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é um espaço de Hilbert (REDDY, 1991). Para o caso de fronteira linear (3.2) várias técnicas podem ser usadas para obter propriedades da solução de (2.36)-(3.2). Uma das formas é através da teoria de semigrupos. O uso de tal técnica só é possível devido a linearidade dos operadores diferenciais em (2.36) e com condições de contorno lineares. No presente trabalho as condições de contorno (3.2) são não lineares o que não permite o uso diretamente de tal teoria. Para contornar este problema considera-se a linearização das condições de contorno:

$$\partial_s^3 w(0, t) = -\partial_s^2 w(0, t) + (EI)^{-1} (1 + L) \epsilon V_0^2 F(w(L, t)); \quad (3.7)$$

$$\partial_s^4 w(0, t) = \kappa_1^{-1} \partial_{ss} w(0, t) - \kappa_1^{-1} (1 + L) \epsilon V_0^2 F(w(L, t))$$

$$+ \kappa_1^{-1} (1 + L) \epsilon V_0^2 \partial_s F(w(L, t))$$

$$\partial_s^5 w(0, t) = -\kappa_1^{-1} \partial_{sss} w(0, t) + \kappa_1^{-1} (1 + L) \epsilon V_0^2 F(w(L, t))$$

$$- \kappa_1^{-1} (1 + L) \epsilon V_0^2 \partial_s F(w(L, t)) + (1 + L) \epsilon V_0^2 \partial_{sss} F(w(L, t)). \quad (3.8)$$

Como pode ser visto de (2.36)-(3.2)  $w^* = 0$  é solução de equilíbrio do sistema (2.36)-(3.2). Assim, o sistema linear assume a seguinte forma:

$$\rho A \partial_t^2 \eta(s, t) + EI(x) \partial_s^4 \eta(s, t) + \kappa_1 \partial_s^6 \eta(s, t) = 0, \quad x \in (0, L), t > 0, \quad (3.9)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\partial_s^3 \eta(0, t) = -\partial_s^2 \eta(0, t) + (EI)^{-1} (1 + L) \epsilon V_0^2 \delta F(w^*(L, t)); \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \partial_s^4 \eta(0, t) &= \kappa_1^{-1} \partial_{ss} w(0, t) - \kappa_1^{-1} (1 + L) \epsilon V_0^2 \delta F(w^*(L, t)) \\ &\quad + \kappa_1^{-1} (1 + L) \epsilon V_0^2 \delta \partial_s F(w^*(L, t)) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \partial_s^5 \eta(0, t) &= -\kappa_1^{-1} \partial_{ss} w(0, t) + \kappa_1^{-1} (1 + L) \epsilon V_0^2 \delta F(w^*(L, t)) \\ &\quad - \kappa_1^{-1} (1 + L) \epsilon V_0^2 \delta \partial_s F(w^*(L, t)) + (1 + L) \epsilon V_0^2 \delta \partial_{ss} F(w^*(L, t)), \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde o operador  $\delta$  representa a derivada funcional, cuja definição é dada por:  $\delta f(\varphi)(\eta) = \frac{d}{d\epsilon} f(\varphi + \epsilon \eta)|_{\epsilon=0}$ ,  $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(0, L)$ . A equação (2.36) com as condições de contorno (3.10)-(3.12) pode ser modelada na forma de equações de estado na seguinte forma:

$$\dot{y} = Ay, \quad (3.13)$$

onde  $A: D(A) \subset V \rightarrow V$  é um operador linear dado por:

$$Aw = (w_2, -EI \partial_s^4 w_1 - \kappa_1 \partial_s^6 w_1), \quad (3.14)$$

para  $w = (w_1, w_2) \in D(A) = H_{\Gamma_0}^6(0, L) \times L^2(0, L)$ . O espaço  $\mathcal{H}_{\Gamma_0}^6(0, L)$  representa o espaço de Sobolev  $\mathcal{H}^6(0, L)$  munido com as condições de contorno (3.10)-(3.12). A energia total do sistema é dada por:

$$\langle y, Ay \rangle = \int_0^L (\rho A (\partial_t \eta)^2 + EI (\partial_{ss} \eta)^2 + \kappa_1 (\partial_{sss} \eta)^2) ds, \quad (3.15)$$

onde  $y = (\eta, \partial_t \eta)$ . Numericamente, estamos interessados na taxa de variação da energia, dada por (3.15). A taxa da variação de energia é dada por:

$$\frac{d}{dt} \langle y, y \rangle, \quad (3.16)$$

sendo que é solução da equação (3.9). Substituindo (3.9) em (3.16) temos:

$$\begin{aligned} \langle y, \dot{y} \rangle &= \langle e, Ae \rangle = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho A \eta_t^2 + EI \eta_{ss}^2 + \kappa_1 \eta_{sss}^2) ds \\ &\quad \int_0^L (-\rho AEI \eta_t \eta_{ssss} - \rho A \kappa_1 \eta_t \eta_{sssss} + EI \eta_{ss} \eta_{sst} + \kappa_1 \eta_{sss} \eta_{ssst}) ds. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Usando integração por partes e as condições de contorno (3.10)-(3.8) em (3.17) obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle y, Ay \rangle &= \int_0^L ((-\rho AEI + EI)\eta_{ss}\eta_{sst} + 2\kappa_1\eta_{sss}\eta_{ssst}) ds & (3.18) \\
&\quad -\rho A\kappa_1\partial_s^5\eta\partial_t\eta|_0^L + \rho A\kappa_1\partial_s^4\eta\partial_{st}\eta|_0^L - \rho A\kappa_1\partial_s^3\eta\partial_{sst}\eta|_0^L \\
&= \int_0^L ((-\rho AEI + EI)\eta_{ss}\eta_{sst} + 2\kappa_1\eta_{sss}\eta_{ssst}) ds \\
&\quad (c_1^{-1}EI\partial_s^3\eta(L, t) + \rho Ac_1^{-1}(EI)^{-1}(1+L)\epsilon V_0^2\delta F(w^*(L, t)))(\partial_{ss}\eta(0, t)) \\
&\quad + (1+L)\epsilon V_0^2\delta F(w^*(L, t)) + (1+L)\epsilon V_0^2\delta\partial_s F(w^*(L, t)) + (1+L)\epsilon V_0^2\delta\partial_s^2 F(w^*(L, t)) \\
&\quad + (c_1^{-1}EI\partial_s^2\eta(L, t) + \rho Ac_1^{-1}(EI)^{-1}(1+L)\epsilon V_0^2\delta F(w^*(L, t)))(\partial_{ss}^2\eta(0, t)) \\
&\quad - (1+L)\epsilon V_0^2\delta f(w^*(L, t)) + (1+L)\epsilon V_0^2\delta\partial_s^2 F(w^*(L, t)) \\
&\quad + \rho A(-\kappa_1\partial_s^2\eta(0, t) + (EI)^{-1}(1+L)\epsilon V_0^2\delta F(w^*(L, t)))(a_1\partial_s^2\eta(0, t) + a_2\epsilon V_0^2 F(w^*)) & (3.19)
\end{aligned}$$

### 3.2 Modelo numérico

Nesta seção será feita a análise numérica da energia do sistema dada pela equação (3.18). Usando o método de Rayleigh-Ritz, o campo de deslocamento  $w$  pode ser dado por:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n H_i(x)u_i(t). \quad (3.20)$$

As funções  $H_i, i = 1, \dots, n$  são funções de forma, geralmente conhecidas, e  $u_i, i = 1, \dots, n$  representam a evolução temporal nodal da estrutura. Com o intuito de facilitar a notação, usa-se a terminologia  $\langle f, g \rangle_{L^2(0,L)}$  para designar o produto interno no espaço  $L^2(0, L)$  e  $(f_1, g_1)_{L^2(\partial(0,L))}$  para designar o produto interno na fronteira, de forma mais explícita temos:

$$\langle f, g \rangle_{L^2(0,L)} = \int_0^L f(s)g(s)ds, \quad f, g \in L^2(0, L), \quad \text{e} \quad (3.21)$$

$$(f_1, g_1)_{L^2\partial(0,L)} = fg|_0^L = f_1(L)g_1(L) - f_1(0)g_1(0). \quad (3.22)$$

Utilizando (3.20) juntamente com as expressões dadas anteriormente, o problema (2.36) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\rho A \langle \sum_i \ddot{u}_i(t) H_i, H_j \rangle + EI [ \langle \sum_i u_i(t) H_i^3, H_j \rangle + \langle \sum_i u_i(t) H_i'', H_j' \rangle + \langle \sum_i u_i(t) H_i'', H_j'' \rangle ] \\
&- \kappa_1 [ \langle \sum_i u_i(t) H_i^{(5)}, H_j \rangle - \langle \sum_i u_i(t) H_i^{(4)}, H_j' \rangle + \langle \sum_i u_i(t) H_i''', H_j'' \rangle - \langle \sum_i u_i(t) H_i''', H_j''' \rangle ] = 0. & (3.23)
\end{aligned}$$

A análise na fronteira é feita utilizando as condições (3.7). Temos:

$$\begin{aligned}
H_i'''(0)H_j(0) &= [H_i''(0)u_i(t) + (EI)^{-1}(1+L)\epsilon V_0^2((d - H_i(L)u_i(t))^{-0.5} \\
&\quad - (d + H_i(L)u_i(t))^{-0.5})]H_j(0), \\
H_i^{(4)}(0)H_j'(0) &= [\kappa_1^{-1}H_i''(0)u_i(t) - \kappa_1^{-1}(1+L)\epsilon V_0^2((d - H_i(L)u_i(t))^{0.5} - (d + H_i(L)u_i(t))^{-0.5}) \\
&\quad + \kappa_1^{-1}(1+L)\epsilon V_0^2\partial_s((d - H_i(L)u_i(t))^{-0.5} - (d + H_i(L)u_i(t))^{-0.5})]H_j'(0), \\
H_i^{(5)}(0)H_j''(0) &= [-\kappa_1^{-1}H_j''(0)u_i(t) + \kappa_1^{-1}(1+L)\epsilon V_0^2((d - H_i(L)u_i(t))^{-0.5} - (d + H_i(L)u_i(t))^{-0.5}) \\
&\quad - \kappa_1^{-1}(1+L)\epsilon V_0^2\partial_s^2((d - H_i(L)u_i(t))^{-0.5} - (d + H_i(L)u_i(t))^{-0.5}) \\
&\quad + (1+L)\epsilon V_0^2\partial_s^2((d - H_i(L)u_i(t))^{-0.5} - (d + H_i(L)u_i(t))^{-0.5})]H_j''(0). \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Em (3.24), os termos:

$$\partial_s((d + H_i(L)u_i(t))^{-0.5} - (d - H_i(L)u_i(t))^{-0.5}), \tag{3.25}$$

$$\partial_{ss}((d + H_i(L)u_i(t))^{-0.5} - (d - H_i(L)u_i(t))^{-0.5}) \tag{3.26}$$

O sistema de equações (3.23) pode ser escrito de forma matricial:

$$[M]\ddot{y} + [K]y = 0. \tag{3.27}$$

A matriz de inércia  $[M]$  juntamente com a matriz de rigidez  $[K]$  são dadas por:

$$m_{ij} = \langle H_i, H_j \rangle \tag{3.28}$$

$$k_{ij} = EI[(H_i^{(3)}, H_j) - (H_i'', H_j') + \langle H_i''', H_j''' \rangle] \tag{3.29}$$

$$-\kappa_1[(H_i^{(5)}, H_j) - (H_i^{(4)}, H_j') + (H_i''', H_j'') - \langle H_i''', H_j''' \rangle] \tag{3.30}$$

## CAPITULO 4

### MATERIAIS E MÉTODOS

Neste capítulo apresenta-se os materiais necessários para a aquisição de dados, e descreve-se as etapas e técnicas utilizadas para investigar o comportamento vibratório do sistema.

#### 4.1 Materiais utilizados

Para a realização deste trabalho, foi necessário montar uma bancada de ensaios para aquisição de sinais. Foram utilizados os seguintes materiais:

- Uma chapa metálica de alumínio de dimensões de  $230mm$  de comprimento,  $33.24mm$  de largura, e  $1.18mm$  de espessura.
- Um suporte de madeira, sendo que  $85mm$  de comprimento foi o engaste e  $145mm$  ficou em balanço;
- Um motor de corrente contínua;
- Um parafuso de diâmetro  $3.5mm$ , e comprimento de  $14mm$  fixado na ponta do eixo para provocar um desbalanceamento;
- Um fonte geradora de tensão modelo DC *POWER SUPPLY* FA-3003 marca *instrutrutherm*, fixando sua tensão de saída em  $6.7V$ ;
- Um acelerômetro GY 61 *ADXL335* com alimentação de  $1.8V$  à  $3.6V$ ;
- Duas pilhas *Panasonic Super Hyper* AA 1.5 volts cada;

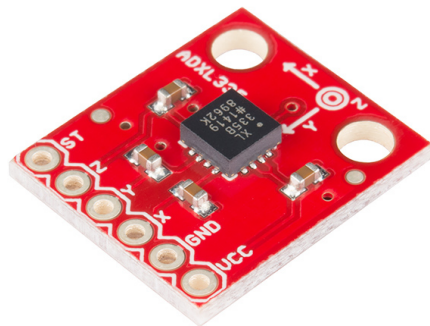
- Um multímetro MD-1200 da *ICEL* de 3.17V;
- Uma *protoboard* de 1680 pontos modelo *mp1680* marca *minipa*;
- 10 *Jumps* de ligação;
- Um resistor de 1K $\Omega$ ;
- Um capacitor eletrolítico de 47 $\mu$ F;
- Placa de aquisição de dados NI USB-6008 da *National Instruments*;
- Um Computador para aquisição/ tratamento dos sinais recebidos.

#### 4.1 O Sensor Utilizado

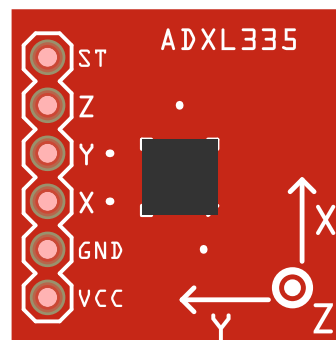
O acelerômetro GY 61 *ADXL335* é um sensor que realiza medições em 3 dimensões, *X*, *Y* e *Z* com baixo valor de ruído, e consumo de energia. Estes eixos são mostrados na Figura 4.1, que ilustra o sensor utilizado em a) mostra-se o acelerômetro real e em b) ilustra o desenho feito no Software *Fritizing*. De acordo com Babu, Naidu e Meenakshi (2018), o sensor é usado para medir aceleração estática da gravidade, aceleração dinâmica, choque ou vibração. Na Tabela 4.1 é especificado algumas características básicas do sensor.

Figura 4.1 – Aceleração utilizado

(a) Imagem Original



(b) Desenho



Fonte – Elaborada pela autora.

Tabela 4.1 – Características do sensor

Parâmetro	Condição	Mínimo	Typ	Máximo	Unidade
Entrada do Sensor	Cada eixo				
Faixa de Medição		$\pm 3$	$\pm 3.6$		g
Sensibilidade	VS = 3 V	270	300	330	mV/g
Ruído eixo X e Y			150		$\mu\text{g}/\text{Hzrms}$
Ruído eixo Z			300		$\mu\text{g}/\text{Hzrms}$
Frequência eixo X e Y			1600		Hz
Frequência eixo Z			550		Hz

Fonte – (DEVICES, 2009)

As características do sensor refere as entradas dos três eixos nos sentidos X, Y e Z. Na Tabela 4.1 é visto que a faixa de medição é de  $\pm 3\text{g}$ , onde 1g é aproximadamente o valor da aceleração devido à gravidade na superfície da Terra.

A sensibilidade é definida como a variação do parâmetro de entrada, necessária para produzir uma variação de saída. Esta sensibilidade, esta relacionada com a conversão entre vibração e tensão em uma frequência de referência, como neste caso de 1600Hz para o eixo X e Y e 550Hz para o eixo Z (DEVICES, 2009).

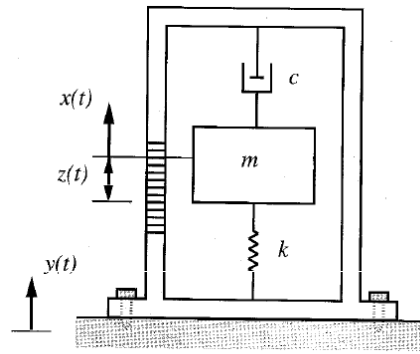
Ruídos estão envolvidos em todos tipos de medições. Essas perturbações nos sistemas de entrada, tem sido amplamente estudadas, por meio da identificação das fontes de ruídos, e da utilização técnicas de minimização (AREBI *et al.*, 2011). Nesta pesquisa, o nível de ruído esta definida no eixo X e Y é de  $150\mu\text{g}/\text{Hzrms}$  e  $300\mu\text{g}/\text{Hzrms}$ .

## 4.2 Princípio de funcionamento

Segundo Adriano (2014) o acelerômetro ADXL é composto de uma estrutura de polisilício de superfície micro usinada, construída de silício do tipo MEMS. O funcionamento parte de uma tensão, que é gerada quando ocorre movimentação. A aceleração da estrutura, é transmitida a uma massa sísmica interna do acelerômetro, que gera uma força proporcional em um cristal piezoelétrico. Esse esforço externo no cristal gera uma carga elétrica de alta impedância proporcional à força aplicada e, assim, proporcional à aceleração (DEVICES, 2009).

A seguir, o princípio de funcionamento do acelerômetro, dado pelas variáveis  $m$  = massa  $c$  = amortecimento,  $k$  = constante da mola e  $z(t)$  = variável adotada para calculo da variável medida. Por fim a equação 4.6 é responsável pelo valor de saída do acelerômetro.

Figura 4.2 – Princípio de funcionamento



Fonte – (SOUSA, 2018)

Variável adotada:

$$z(t) = x(t) - y(t) \quad (4.1)$$

Equação do movimento:

$$m\ddot{z} + c\dot{z}(t) + kz(t) = m\ddot{y}(t) \quad (4.2)$$

Movimento da base:

$$y(t) = Y_0 \sin(\omega t) \quad (4.3)$$

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 Y_0 \sin(\omega t) \quad (4.4)$$

equação do movimento:

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) = -m\omega^2 Y_0 \sin(\omega t) \quad (4.5)$$

Resposta do Sistema:

$$z(t) = Y_0 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 |G(i\omega)| \cos(\omega t - \phi) \quad (4.6)$$

onde:

$$\frac{Z_0}{Y_0} = \frac{\omega}{\omega_n} |G(i\omega)| \quad (4.7)$$

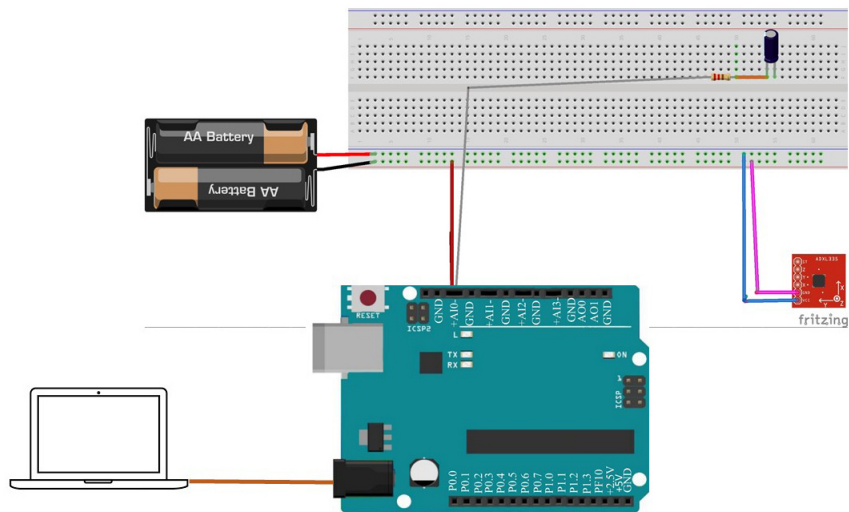
## 4.2 Aquisição de Sinais

Para a medição da aceleração, fixamos o acelerômetro na extremidade da viga em balanço. Foi considerado apenas um eixo, nomeado eixo Z, escolhido de acordo com o sentido da oscilação gerada pelo motor.

Apos a ligação do eixo Z do acelerômetro na protoboard. Houve a necessidade de filtrar o sinal DC que estava interferindo na forma de onda senoidal, este filtro foi feito com o resistor e o capacitor em serie na protobord.

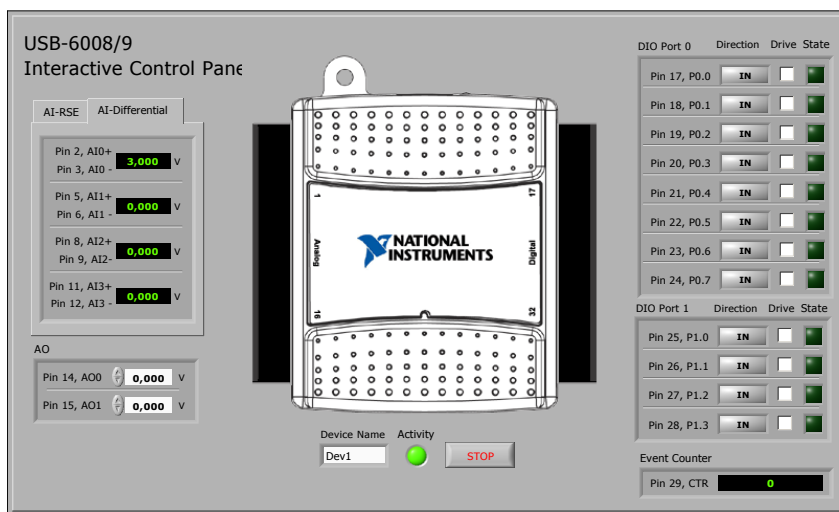
De posse dessa plataforma montada, a saída do eixo Z, já interligada ao filtro, foi ligada ao canal AI1 da placa de aquisição de dados NI USB-6008 da National Instruments mostrada na Figura 4.3 e especificada amplamente na Figura 4.4. Com auxilio *software* da National Instrumentes que possibilita a visualização de um painel de controle interativo, foi possível ver em tempo real o funcionamento da placa e acompanhar as oscilações no fenômeno estudado.

Figura 4.3 – Diagrama Esquemático



Fonte – (FRITZING, 0.9.3b)

Figura 4.4 – Painel de controle interativo



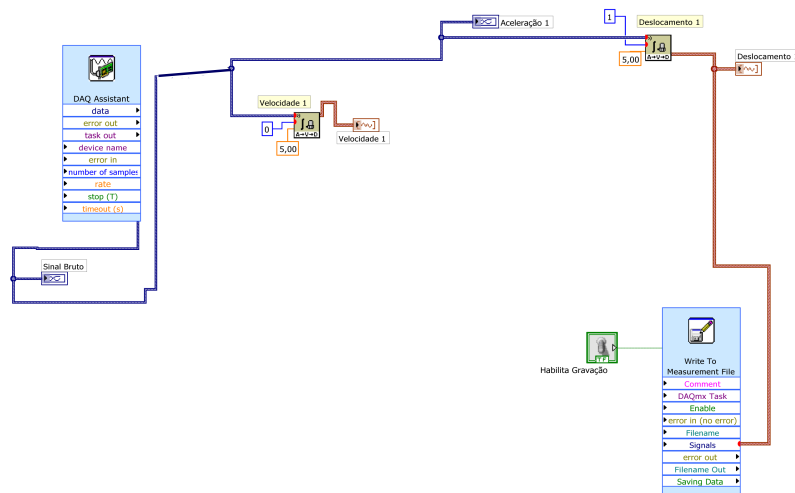
Fonte – (LABVIEW, 2014)

A função para adquirir dados (DAQ) é usada em processos de medição de fenômenos elétricos ou físicos. Um sistema DAQ é formado por sensores, hardware de aquisição, medição de dados, e de um computador com software programável. Em comparação com os sistemas tradicionais de medição, os sistemas DAQ exploram a capacidade de processamento, produtividade, sistemas de visualização e recursos de conectividades dos computadores padrão na indústria.

Com o auxílio do software para leitura fornecida pela placa de aquisição de dados, foi montado um diagrama de blocos mostrado na Figura 4.5, e dividido em 4 passos para aquisição de sinais expressos a seguir:

1. Função Assistente de DAQ mostrada como uma maneira eficiente e rápida de adquirir dados, posteriormente, o diagrama mostra apenas que estes dados ainda estão em estado bruto.
2. Esta integração seguinte, refere-se a um sistema de 1<sup>a</sup> ordem, assim é necessário um integrador para resolver a equação diferencial. Desda forma, a entrada do integrador é  $x$ , e a saída é  $\dot{x}$ . No quadrado azul neste passo do bloco, especifica-se o tipo de integrador, sendo ele integral simples, dupla ou tripla. Logo, o *input* é velocidade e o *output* é aceleração. Este bloco foi expresso apenas para acompanhar o valor de velocidade.
3. Em seguida no diagrama de blocos, a segunda integração, refere-se a uma integral dupla, realizada para obter o deslocamento. Assim, quando resolvemos a integral da aceleração  $a(t)$ , o resultado é a velocidade  $v(t)$ . Se integrarmos a velocidade  $v(t)$ , obteremos o deslocamento  $s(t)$ .
4. Write to Menstruate File é uma função é responsável em gravar arquivos em diferentes formatos. Pode se especificar dentro da função a nomenclatura do arquivo.

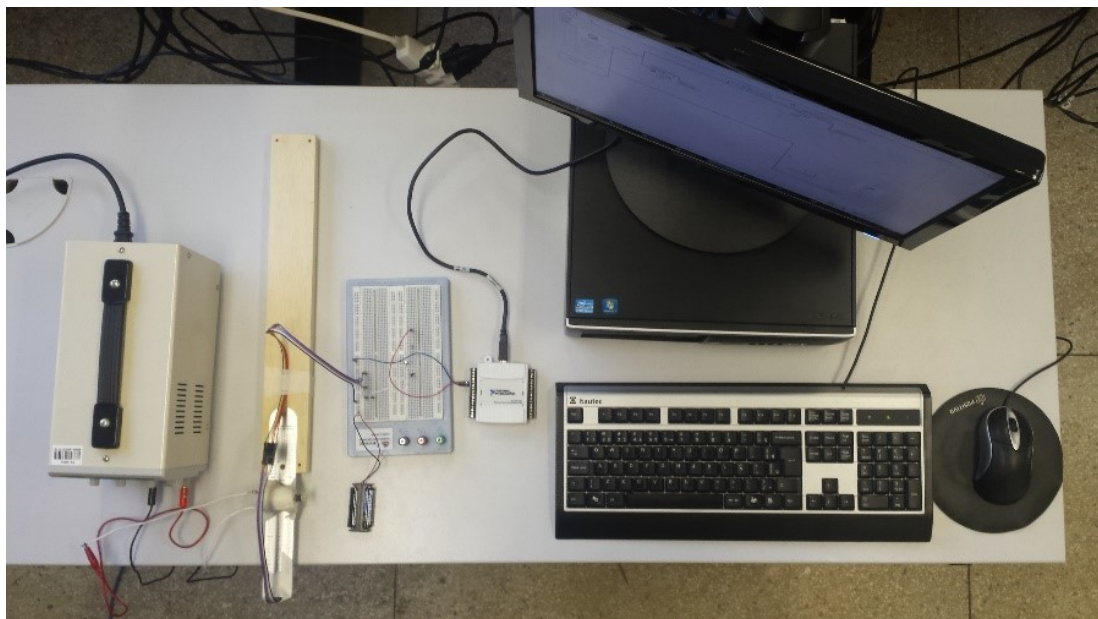
Figura 4.5 – Programação em Blocos utilizada



Fonte – (LABVIEW, 2014)

Assim, obteve-se o arquivo de texto expresso pelas grandezas tempo *versus* deslocamento. Em seguida, estes dados foram inseridos no computador. O passo seguinte, foi extrair os dados para aplicação do Filtro de Kalman. A Figura 4.6 mostra a plataforma montada e acoplada a placa de aquisição de dados.

Figura 4.6 – Vista da Bancada Experimental



Fonte – Elaborado pela Autora

## CAPITULO 5

### RESULTADOS

Neste capítulo apresenta-se os resultados referente a análise numérica de vibrações em microestruturas. Neste intuito, são expressos os gráficos de deslocamentos dos nós e posteriormente, o produto da aquisição de sinais e Filtro de Kalman.

#### 5.1 Resultado do método de elementos finitos

A motivação inicial do trabalho, foi realizar uma análise numérica, do sistema vibratório produzido em uma bancada de ensaios mostrado na Figura 4.6. Em seguida, espera-se que seja possível, capturar, ou investigar, as energias vibracionais dentro do processo, considerando deformação por deslocamento.

Uma vez finalizada a primeira parte da pesquisa, que compreende a aquisição de sinais visto no Capítulo 4. Em seguida, os elementos finitos foram discretizados em função dos nós de 1 a 16 e ilustrados nas de Figuras 5.1 a 5.7. Assim, fez-se a análise dinâmica de vibrações da estrutura. O sistema considerado possui 1 dimensão, com 16 nós, 15 elementos e 1 grau de liberdade.

A partir de uma formulação clássica foi usado o método numérico de Elementos Finitos, para obter a solução aproximada, referente ao deslocamento da viga. Além disso, foi visto que existe uma vantagem muito grande em usar uma formulação em conjunto com outra ferramenta numérica. Neste caso, usamos o Método dos Elementos Finitos, unido ao método das diferenças finitas, com o propósito de não deparar com soluções nulas ao formular a teoria de vigas de Euler-Bernoulli.

Sendo assim, encontramos polinômios mais simples na matriz de rigidez e, ao acoplar ao método das diferenças finitas, alcançamos funções lineares. Portanto, foi obtido menor esforço com-

putacional.

## 5.2 Simulação Numérica

No Capítulo 3 a equação 3.1 descreve o comportamento dinâmico de uma viga do tipo microcantilever. Para fazer a descrição do modelo, deformações do tipo gradiente, foram consideradas, gerando uma equação diferencial parcial de ordem 6.

Alguns, recentes resultados na literatura, tem mostrado que, quando o problema é modelado com condições de contorno do tipo Dirichlet ou Newman o sistema apresenta comportamento oscilatório com presença de ruído, veja Vatankhah, Karami e Salarieh (2015a), Yen, Lan e Kramar (2005), Zhang, Meng e Li (2006), Qian *et al.* (2012), Arjmand *et al.* (2008), Joglekar e Pawaskar (2011).

Os resultados numéricos apresentados no presente trabalho mostram que a dinâmica nodal muda completamente quando condições de contorno não linear são consideradas na modelagem de problemas micromecânicos. O conjunto de gráficos abaixo, mostram o comportamento dinâmico dos nós da estrutura. Os comportamentos dinâmicos foram obtidos levando em consideração os seguintes dados paramétricos:

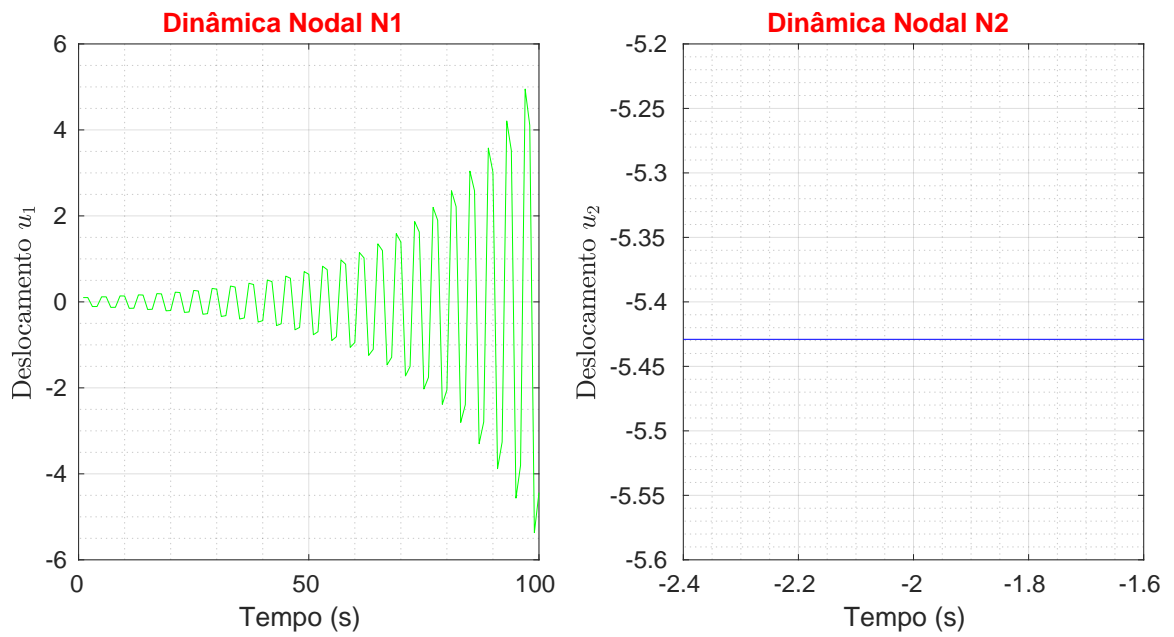
- (i) segundo momento de área:  $I = 10^{-5} \mu m^4$
- (ii) módulo de Young  $E = 1 GPa$
- (iii) distância  $d = 5 mm$
- (iv) comprimento da viga  $L = 1 \mu m$

Nota-se por meio do conjunto de simulações, para os parâmetros dados acima, que temos diferentes comportamentos dinâmicos para os nós da estrutura.

O nó 1 apresenta instabilidade enquanto que, o nó 2 não exibi deslocamento devido a sua localidade no engaste da estrutura, veja (5.1). Os nós de 3 a 15 apresentam um comportamento de instabilidade, conforme pode ser visto das figuras (5.2,5.3,5.4,5.5,5.6,5.7).

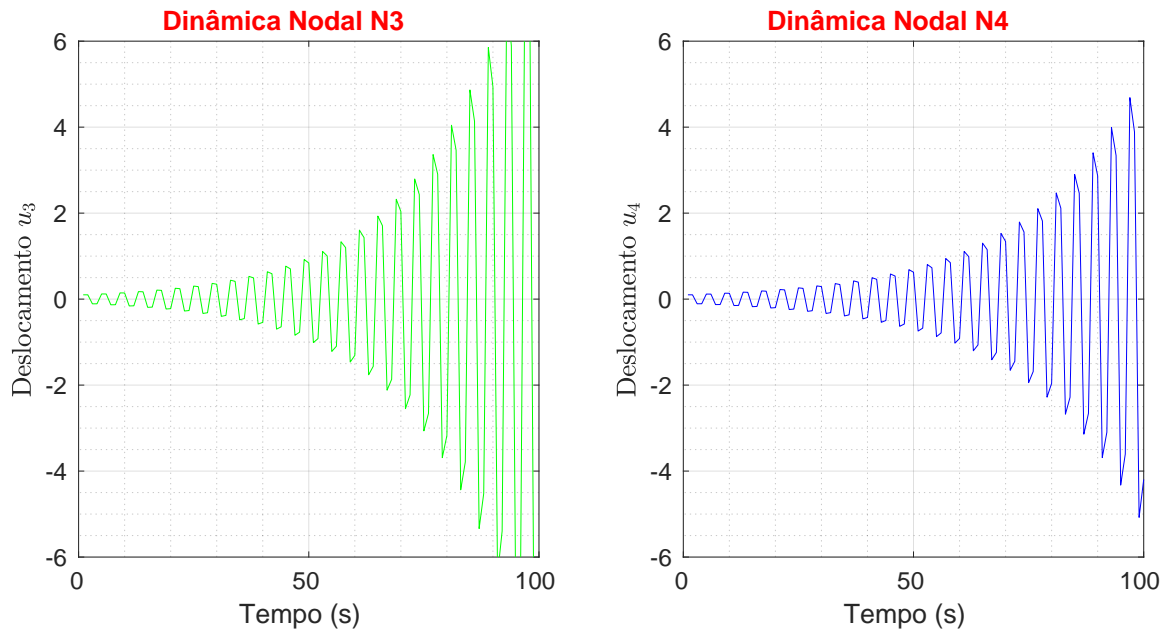
Entretanto uma diferença marca os nós 2 e 3 dos demais; enquanto os nós 2 e 3 apresentam uma perda de estabilidade lenta, os demais nós perdem estabilidade abrupta. Os nós 14 a 16 possuem uma peculiaridade: exibem um comportamento oscilatório crescente.

Figura 5.1 – Dinâmica Nodal  $N_1$  e  $N_2$



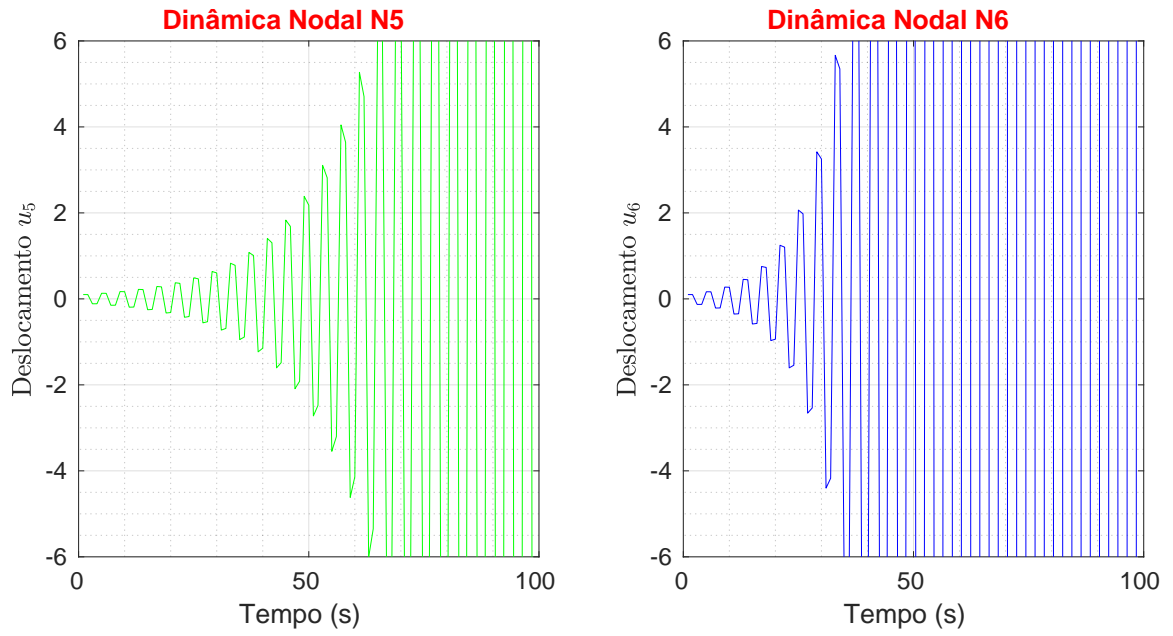
Fonte – Elaborado pela Autora

Figura 5.2 – Dinâmica Nodal  $N_3$  e  $N_4$



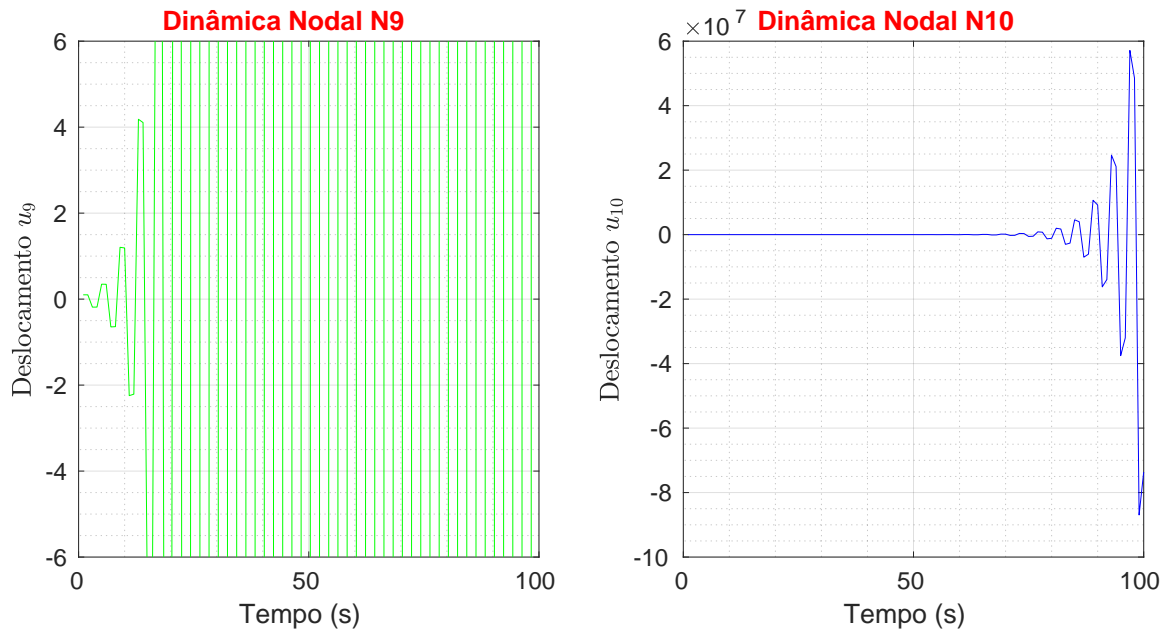
Fonte – Elaborado pela Autora

Figura 5.3 – Dinâmica Nodal  $N_5$  e  $N_6$



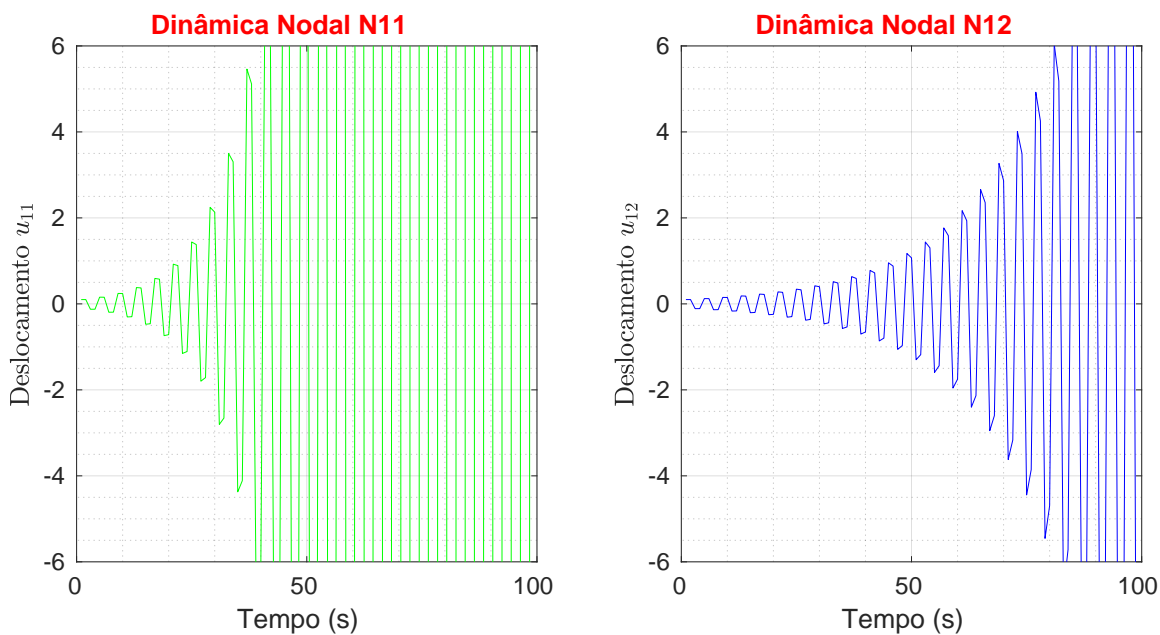
Fonte – Elaborado pela Autora

Figura 5.4 – Dinâmica Nodal  $N_9$  e  $N_{10}$



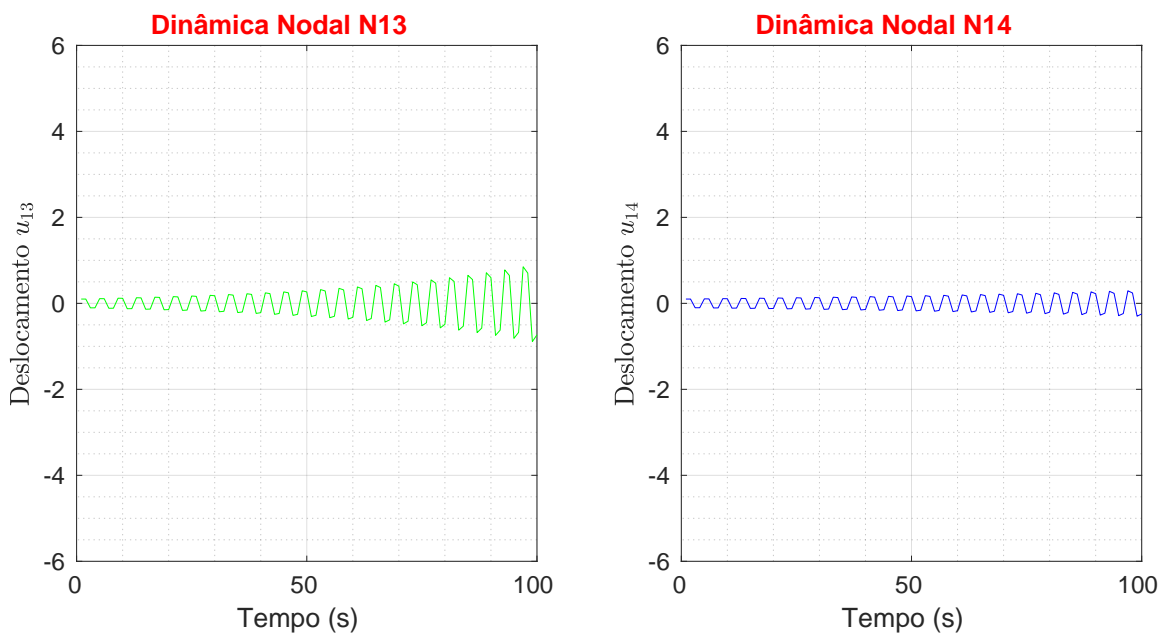
Fonte – Elaborado pela Autora

Figura 5.5 – Dinâmica Nodal  $N_{11}$  e  $N_{12}$



Fonte – Elaborado pela Autora

Figura 5.6 – Dinâmica Nodal  $N_{13}$  e  $N_{14}$

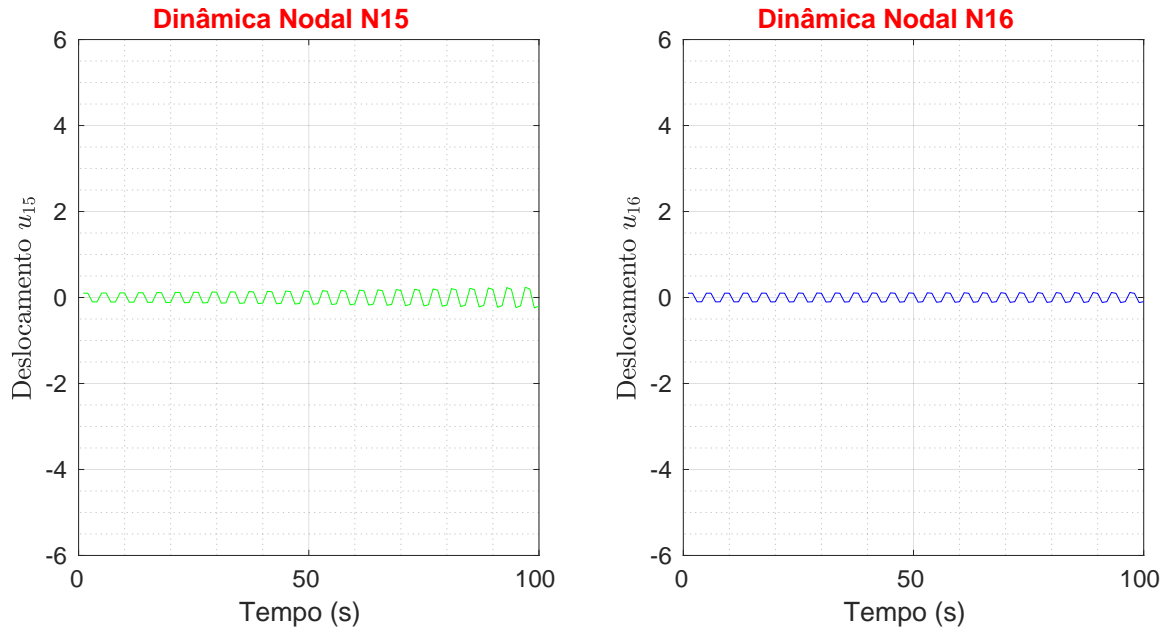


Fonte – Elaborado pela Autora

A próxima figura mostra o comportamento dinâmico dos nós 15 e 16 para o caso em que o

comprimento da estrutura passa de  $L = 1\mu\text{m}$  para  $L = 50\mu\text{m}$ . Conforme pode se visto, neste caso a dinâmico do sistema, para os nós 15 e 16 apresenta comportamento oscilatório.

Figura 5.7 – Dinâmica Nodal  $N_{15}$  e  $N_{16}$

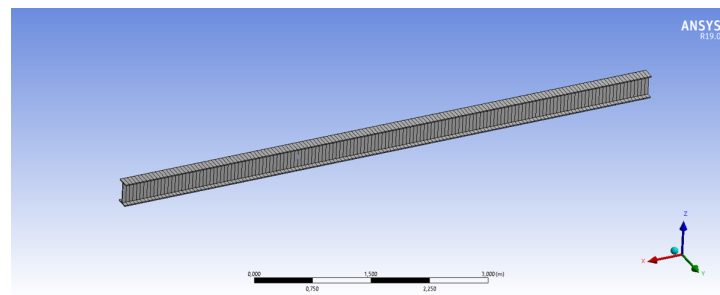


Fonte – Elaborado pela Autora

## 5.2 Resultados da simulação computacional

Foi realizado a simulação computacional no programa ANSYS® ACT™ para analisar se os resultados são próximos dos adquiridos numericamente. Foi obtido a geometria final da viga, sendo a malha do modelo utilizada hexaédrica com 301 e 150 elementos, ilustrada na Figura 5.8.

Figura 5.8 – Malha criada

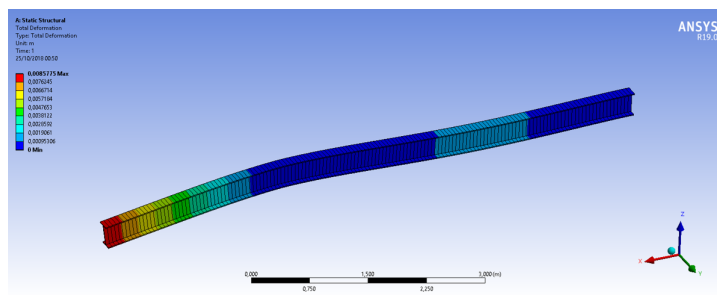


Fonte – (GOPAL, 2000–2019)

Obteve-se os resultados referente a Figura 5.9. Nota-se os pontos vermelhos de maior de-

formação da viga isto, devido a sua deformidade elástica. Com a modelagem adequada, análises não lineares podem descrever a distribuição com maior assertividade, alcançando maior controle da distribuição da carga. Portanto, adquire-se com clareza as forças e momentos seccionais.

Figura 5.9 – Resultado da simulação computacional



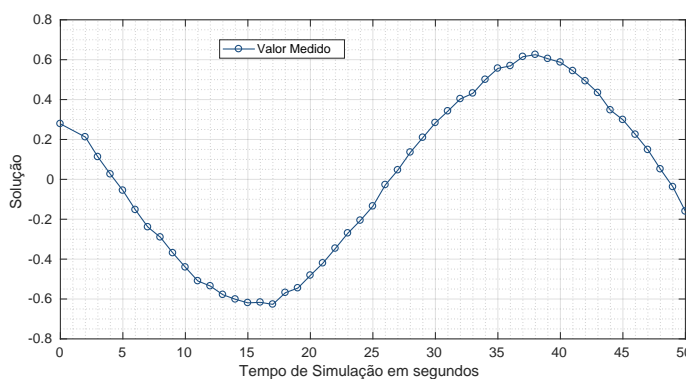
Fonte – (GOPAL, 2000–2019)

### 5.3 Resultados filtro de Kalman

O uso de um filtro de Kalman para incorporar os dados no modelo e fornecer estimativas de erro foi determinado como a abordagem mais promissora na aquisição de dados. O filtro de Kalman é um método de otimização estatística de estimativas de um estado instantâneo em sistemas dinâmicos não-lineares (SANSOM *et al.*, 2015).

O sinal de forma de onda bruta é exibido na Figura 5.10, estes dados vem da aquisição de sinais captados pelo acelerômetro, por meio da programação em blocos mostrado na Figura 4.3, no Capítulo 4. Posteriormente, é expresso os sinais que formularam uma função sinusoidal de deslocamento versus tempo.

Figura 5.10 – Sinal Bruto



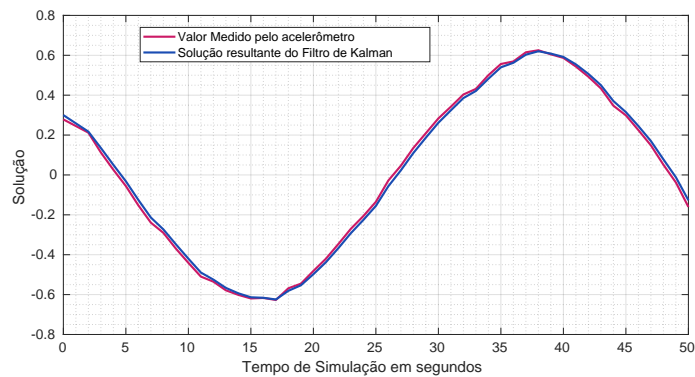
Fonte – Elaborado pela Autora

O filtro de Kalman tem dois parâmetros que definem principalmente seu comportamento: matriz de covariância e matriz medição. Modelar esses fatores não é trivial, foi visto que o Filtro passa

por um tempo de adaptação. Isto, por que nos testes notou-se que sempre no primeiro valor captado ocorreu grande faixa de erro. Isto ocorre devido ao fato de que o usuário precisa inicializa-lo com um primeiro passo, por que não há histórico de medições anteriores.

Ao longo do tempo, foi observado que os valores correspondentes ao Filtro de Kalman se tornaram melhores, como o que acontece na Figura 5.11. Pode ser visto que, conforme o método vai sendo testado, ele vai se adaptando ao episódio e torna-se satisfatório os valores em relação a medição real. Estes valores representados no gráfico correspondem ao deslocamento coletado pelo acelerômetro, e os valores preditos pelo Filtro de Kalman.

Figura 5.11 – Simulação com Filtro de Kalman



Fonte – Elaborado pela Autora

## **CAPITULO 6**

### **CONCLUSÕES**

O principal objetivo foi modelar uma microviga engastada em uma extremidade e livre em outra. A análise de deslocamento vertical da viga, leva em consideração as forças que agem na estrutura, condições de contorno e campo de forças eletrostática que atuaram na fronteira.

A primeira etapa foi montar a plataforma para aquisição de dados, para reproduzir e entender o fenômeno estudado. Dessa forma, foi direcionado o foco para o tipo de análise que seria realizada, linear ou não linear. Foi visto, que análise não linear reuniria um conjunto maior de possibilidades. Sendo elas, a rigidez da estrutura, as características do material envolvido, as condições de contorno, o momento e força cisalhante.

Um detalhe importante, foi representar o espaço de funções para modelar o problema estudado. Desta forma, obteve-se funções de forma mais apropriadas e abrangentes no domínio de possibilidades.

Diferentemente de trabalhos recentes na literatura, que consideram o campo externo e a força eletrostática atuadora no sistema para realizar análise de deslocamento. Nesta dissertação, inclui-se a força de atuação nas condições de contorno. Dessa forma, permitiu-se que o problema de análise de vibrações fosse modelado como um problema de vibrações livres sem amortecimento. Entretanto, diferentemente de sistema ordinário, as simulações numéricas, mostraram-se sendo sistemas contínuos e portanto podem apresentar elementos de estabilidade ou instabilidade mesmo quando sujeitos a oscilações livres.

Foram encontradas algumas dificuldades em relação a pesquisa, após realizar o processamento de dados, foi visto que havia muito ruído empregado as medições. Então surgiu a necessidade de usar um filtro estatístico para minimizar este fato. Em conjunto com a pesquisa foram desenvol-

vidos alguns artigos publicados no Seminário de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação da Regional Catalão em 2017. Eles contribuíram com o desenvolvimento da pesquisa, são eles:

**Análise de vibrações em medição utilizando o filtro EWMA:** Neste trabalho foi apresentado um método estatístico para tratamento de sinais baseado no Filtro (EWMA). O principal objetivo foi suavizar flutuações de valores de curto prazo e destacar tendências ou ciclos de longo prazo, por meio do teste de diferentes valores do parâmetro  $\lambda$ . Foi utilizada a estatística EWMA de duas maneiras: sendo ferramenta para verificação de processos, verificando se as vibrações nos mesmos se encontram dentro de limites estabelecidos e, como Filtro Estatístico para estimar valores de média. Ao monitorar algum processo que seja afetado pela presença de vibrações, podemos considerá-lo como um processo de fabricação, e assim realizar uma análise estatística. Como aplicação prática, foi desenvolvido um sistema para monitoramento de vibrações que consiste em um acelerômetro montado em uma viga metálica sendo excitada por um motor com rotor desbalanceado. O sistema mecânico desenvolvido foi utilizado para medição da amplitude do sinal de vibração, em aceleração, que é posteriormente submetido ao Filtro EWMA. Desta forma, estas medições foram tratadas no Filtro EWMA, e à partir da aplicação e comparação dos resultados para três pesos  $\lambda$  diferentes, os resultados foram obtidos e os objetivos iniciais alcançados.

**Estudo de Técnicas de remoção de ruídos:** Neste estudo investigou-se o uso de equações diferenciais no tratamento de imagens como ferramenta usada por vários pesquisadores nos últimos anos, devido aos bons resultados que esta técnica tem produzido nos mais diversos tipos de problemas envolvendo processamento de imagens. O uso de Equações Diferenciais Parciais (EDP s) permite um tratamento bastante amplo em imagens, desde deformações, que são vistas como curvas ou superfícies em espaços euclidianos apropriados, até propriedades como independência de malhas, usadas na discretização de problemas envolvendo computação gráfica. Neste trabalho realizou-se uma revisão numérica dos principais métodos, recentemente utilizados, na remoção de ruídos nos quais se baseiam em equações diferenciais parciais não lineares; testou-se também, contribuições computacionais aos modelos de discretizações das equações diferenciais parciais envolvidas. Para atingir os objetivos, iniciou-se com uma análise teórica dos modelos de equações diferenciais parciais não lineares envolvidas no processo. Foram feitos alguns comentários sobre questões envolvendo os espaços de funções apropriados para adequar os modelos de equações. Questões envolvendo as não linearidades também foram tratadas.

**Refinamento de Malha com Base na Convergência do Método de Elementos Finitos:** Neste estudo analisou-se que simulação computacional é amplamente utilizada para realizar análises e melhorar a qualidade dos produtos e projetos na construção civil. Os métodos tradicionais, tanto de análise e projeto estrutural quanto de análise de falhas, são normalmente baseados no Método dos Elementos Finitos (MEF). Nessa perspectiva, teve-se o objetivo de comparar a precisão do método de elementos finitos e averiguar a dependência da quantidade de nós e elementos, o tamanho e o tipo de elemento da malha. Para isso, foi utilizado o método de Galerkin para resolver a equação diferencial descrita pelo modelo de viga de Euler-Bernoulli, analisando a deflexão desta viga sujeita a carregamentos estáticos ou dinâmicos.

Avaliação de incerteza da medição em sistema de monitoramento de vibrações: Este trabalho apresenta uma avaliação da incerteza de medição de um sistema de monitoramento de vibrações aplicado a um sistema discreto com dois graus de liberdade. O sistema utilizado para diagnosticar e medir a amplitude do sinal de vibração, é composto por sensores de vibração, acelerômetros, acoplados a uma bancada experimental, uma placa de aquisição de sinais e um computador para visualização e tratamento de dados. Para a excitação da estrutura foi utilizado um micro motor DC montado na parte superior da bancada. Com o sistema de aquisição foram obtidos os sinais de vibração no eixo Y dos sensores. Para a análise de incertezas utilizou-se a metodologia de propagação de incertezas através de módulos e com estes resultados foi construída uma curva de erros. Pôde-se analisar a magnitude do sinal de vibração da aceleração. Concluiu-se que o acelerômetro é o módulo que mais contribui para a incerteza global do sistema.

Análise numérica das reações de apoio, de uma torre treliçada, sujeita a carregamentos externos: Neste artigo estudou-se a modelagem de um elemento estrutural treliçado, simulando uma torre de transmissão de linhas elétricas. A partir do carregamento fornecido pelas linhas de transmissão será feito, através do método dos elementos finitos uma análise das forças atuantes em cada um dos elementos na estrutura, bem como as tensões de tração e compressão. Simulações serão feitas para determinar o comportamento dos elementos estruturais e reações de apoio para diversos tipos de carregamento.

## CAPITULO 7

### ANEXO

#### 7.1 Código utilizado

```
1 clear all
2 clc
3 epsilon=0.001;
4 V0=0.005;
5 d=0.0005;
6 E=10^6;
7 I=10^(-5);
8 L=10;
9 alpha=0.5;
10 alpha1=0.6;
11 alpha2=0.7;
12 alpha3=0.8;
13 alpha4=0.9;
14 alpha5=0.9;
15 alpha6=0.9;
16 alpha7=0.9;
17 alpha8=0.9;
18 alpha9=0.9;
19 kappa_1=0.1;
20 for i=1:16
```

```
21     matcoord(i)=(i-1)*0.066666666666666666;
22 end
23 matelemento=[1 2;
24     2 3;
25     3 4;
26     4 5;
27     5 6;
28     6 7;
29     7 8;
30     8 9;
31     9 10;
32     10 11;
33     11 12;
34     12 13;
35     13 14;
36     14 15;
37     15 16];
38 for e=1:15
39     x1(e)=matcoord(matelemento(e,1));
40     x2(e)=matcoord(matelemento(e,2));
41 end
42 vetorfronteira=[1 16];
43 for i=1:16
44     for mm=1:100
45         xo(i,mm)=0.1;
46         y(i,mm)=0.1;
47     end
48 end
49 h11=25;
50 for ii1=1:1000
51     t1(ii1)=ii1*h11;
52 end
53
54 for i=1:16
55     for j=1:16
56         kk1(i,j)=0;
57         m(i,j)=0;
58     end
59 end
60 format long
```

```

61
62 for e=1:length(matelemento(:,1))
63     w1L(1)=(1-10*L^3+15*L^4-6*L^5);% derivada de ordem 0 H1 em L
64     w1L(2)=(L*(L^3+8*L^4-3*L^5));% derivada de ordem 0 H2 L
65     w(1)=(-360*x2(e)^2+360*x2(e)-60);%derivada de ordem 3 de H1 em x2(e)
66     w(2)=(-L*(180*x2(e)^2-192*x2(e)+36));% derivada de ordem 3 H2 em x2(e)
67     w1(1)=(1-10*x2(e)^3+15*x2(e)^4-6*x2(e)^5);% derivada de ordem 0 H1 em x2(e)
68     w1(2)=(L*(x2(e)^3+8*x2(e)^4-3*x2(e)^5));% derivada de ordem 0 H2 x2(e)
69     w2(1)=(-120*x1(e)^3+180*x1(e)^2-60*x1(e)); % derivada de ordem 2 H1 em x1(
70     w2(2)=(-L*(60*x1(e)^3-96*x1(e)^2+36*x1(e)));% derivada de ordem 2 H2 em x1
71     w2L(1)=(-120*L^3+180*L^2-60*L); % derivada de ordem 2 H1 em L
72     w2L(2)=(-L*(60*L^3-96*L^2+36*L));% derivada de ordem 2 H2 em L
73     w3(1)=(-30*x2(e)^4+60*x2(e)^3-30*x2(e)^2); % derivada de ordem 1 em x2(e)
74     w3(2)=(-L*(15*x2(e)^4-32*x2(e)^3+18*x2(e)^2-1)); % derivada de ordem 1 em
75     w4(1)=(-30*x1(e)^4+60*x1(e)^3-30*x1(e)^2); % derivada de ordem 1 em x1(e)
76     w4(2)=(-L*(15*x2(e)^4-32*x2(e)^3+18*x2(e)^2-1));% derivda de ordem 1 em x1
77     w5(1)=(-120*x2(e)^3+180*x2(e)^2-60*x2(e)); % derivada de ordem 2 H1 em x2(
78     w5(2)=(-L*(60*x2(e)^3-96*x2(e)^2+36*x2(e))); % derivada de ordem 2 H1 em
79     w6(1)=-720; %derivada ordem 5 H1 em x1(e)
80     w6(2)=-720; % derivada ordem 5 H2 em x1(e)
81     w7(1)=-720; % derivada ordem 5 H1 em x2(e)
82     w7(2)=-720; % derivada ordem 5 H2 em x2(e)
83     w8(1)=(1-10*x1(e)^3+15*x1(e)^4-6*x1(e)^5);% derivada de ordem 0 H1 em x1(e)
84     w8(2)=(L*(x1(e)^3+8*x1(e)^4-3*x1(e)^5));% derivada de ordem 0 H2 x1(e)
85     w9(1)=(360 - 720*x1(e));% derivada ordem 4 H1 x1(e)
86     w9(2)=(-L*(360*x1(e) - 192));% derivada ordem 4 H2 x1(e)
87     w10(1)=(360 - 720*x2(e));% derivada ordem 4 H1 x2(e)
88     w10(2)=(-L*(360*x2(e) - 192));% derivada ordem 4 H2 x2(e)
89     w11(1)=(-360*x1(e)^2+360*x1(e)-60);%derivada de ordem 3 de H1 em x1(e)
90     w11(2)=(-L*(180*x1(e)^2-192*x1(e)+36));% derivada de ordem 3 H2 em x1(e)

```

```

91     w4L(1)=(-30*L^4+60*L^3-30*L^2);% derivada de ordem 1 em L H1
92     w4L(2)=(-L*(15*L^4-32*L^3+18*L^2-1));% derivda de ordem 1 em L H2
93     h=(x2(e)-x1(e))/100;
94     for iL=1:100
95         x(iL)=x1(e)+(iL-1)*h;
96         termo_aux1(1,iL)=-120*x(iL)^3+180*x(iL)^2-60*x(iL);
97         termo_aux1(2,iL)=-L*(60*x(iL)^3-96*x(iL)^2+36*x(iL));
98         termo_aux2(1,iL)=(-360*x(iL)^2+360*x(iL)-60);
99         termo_aux2(2,iL)=-L*(180*x(iL)^2-192*x(iL)+36);
100        termo_aux3(1,iL)=1-10*x(iL)^3+15*x(iL)^4-6*x(iL)^5;
101        termo_aux3(2,iL)=L*(x(iL)^3+8*x(iL)^4-3*x(iL)^5);
102    end
103    for kk=1:2
104        for kkk=1:2
105            for iL=1:100
106                termo1(kk,kkk,iL)=termo_aux1(kk,iL)*termo_aux1(kkk,iL);
107                termo2(kk,kkk,iL)=termo_aux2(kk,iL)*termo_aux2(kkk,iL);
108                termo3(kk,kkk,iL)=termo_aux3(kk,iL)*termo_aux3(kkk,iL);
109            end
110        end
111    end
112    for kk=1:2
113        for kkk=1:2
114            soma1=0;
115            soma2=0;
116            soma3=0;
117            for iL=1:99
118                soma1=soma1+(1/2)*(termo1(kk,kkk,iL+1)+termo1(kk,kkk,iL));
119                soma2=soma2+(1/2)*(termo2(kk,kkk,iL+1)+termo2(kk,kkk,iL));
120                soma3=soma3+(1/2)*(termo3(kk,kkk,iL+1)+termo3(kk,kkk,iL));
121            end
122            k5(kk,kkk)=soma1; %termo (w'_i,w'_j)
123            k9(kk,kkk)=soma2; %termo (w''_i,w''_j)
124            a8(kk,kkk)=soma3; %termo (w_i,w_j)
125        end
126    end
127
128    if e==1
129        for i=1:2
130            for j=1:2

```

```

131      k1(i, j)=w(i)*w1(j);
132      k2(i, j)=w2(i)*w1(j);
133      k3(i, j)=(E*I)^(-1)*(1+L)*epsilon*V0^2*((d-w1L(i))^( -0.5)-(d+
          w1L(i))^( -0.5))*w1(j);
134      deltak3(i, j)=(E*I)^(-1)*(1+L)*epsilon*V0^2*((d-(w1L(i)+alpha*
          w1L(i)))^( -0.5)...
135          -(d+(w1L(i)+alpha*w1L(i)))^( -0.5))*w1(j)...
136      -k3(i, j);
137      k4(i, j)=w5(i)*w3(j)-0.9*w2(i)*w4(j);
138      k6(i, j)=w7(i)*w1(j)-(-kappa_1^(-1)*w2L(i)*w8(j)-kappa_1^(-1)*
          epsilon...
139          *V0^2*((d-w1L(i))^( -0.5)-(d+w1L(i))^( -0.5))*w8(j)-...
140          -kappa_1^(-1)*epsilon*V0^2*((d+w1L(i))^( -1.5)-(d-w1L(i))
          ^(-1.5))*...
141          2*w4(j)+(1+L)*(0.5*(d+w1L(i))^( -1.5)*w2L(i)-0.75*w4L(i)
          ^2*(...
142          (d-w1L(i))^( -2.5)+(d-w1L(i))^( -2.5))+...
143          0.5*w4L(i)^2*(d-w1L(i))^( -2.5))*w4(i));
144      k6aprox(i, j)=w7(i)*w1(j)-(-kappa_1^(-1)*w2L(i)*w8(j)-kappa_1
          ^(-1)*epsilon...
145          *V0^2*((d-w1L(i)-alpha*w1L(i))^( -0.5)-(d+w1L(i)+alpha*w1L(
          i))^( -0.5))*w8(j)-...
146          -kappa_1^(-1)*epsilon*V0^2*((d+w1L(i)+alpha*w1L(i))^( -1.5)
          ...
147          -(d-w1L(i)-alpha*w1L(i))^( -1.5))*...
148          2*w4(j)+(1+L)*(0.5*(d+w1L(i)+alpha*w1L(i))^( -1.5)*w2L(i)
          ...
149          -0.75*(w4L(i)+alpha*w1L(i))^2*(...
150          (d-w1L(i)-alpha*w1L(i))^( -2.5)+(d-w1L(i)-alpha*w1L(i))
          ^(-2.5))+...
151          0.5*(w1L(i)+alpha*w1L(i))^2*(d-w1L(i)-alpha*w1L(i))^( -2.5)
          )*w4(i));
152      deltak6(i, j)=k6aprox(i, j)-k6(i, j);
153      k7(i, j)=-kappa_1^(-1)*(w10(i)*w3(j)-(kappa_1^(-1)*w4(i)-
          kappa_1^(-1))*...
154          (1+L)*epsilon*V0^2*((d-w1L(i))^( -0.5)-(d+w1L(i))^( -0.5))
          ...
155          +kappa_1^(-1)*(1+L)*epsilon*V0^2*((d+w1L(i))^( -1.5)+...
156          (d-w1L(i))^( -1.5)...
157          )*2*w4L(i))*w4(j));

```

```

158         k7aprox(i,j)=-kappa_1^(-1)*(w10(i)*w3(j)-(kappa_1^(-1)*w4(i)-
           kappa_1^(-1)*...
159         (1+L)*epsilon*V0^2*((d-w1L(i)-alpha*w1L(i))^(-0.5)-(d+w1L(
           i)+alpha*w1L(i))^(-0.5))...
160         +kappa_1^(-1)*(1+L)*epsilon*V0^2*((d+w1L(i)+alpha*w1L(i))
           ^(-1.5))+...
161         (d-w1L(i)-alpha*w1L(i))^(-1.5)...
162         )*2*(w4L(i)+alpha*w1L(i))*w4(j));
163     deltak7(i,j)=k7aprox(i,j)-k7(i,j);
164     k8(i,j)=w1(i)*w5(j)-(w2L(i)+(E*I)^(-1)*(1+L)*epsilon*V0^2*...
165         ((d-w1L(i))^(-0.5)-(d+w1L(i))^(-0.5))*w2(j));
166     k8aprox(i,j)=w1(i)*w5(j)-(w2L(i)+(E*I)^(-1)*(1+L)*epsilon*V0
           ^2*...
167         ((d-w1L(i)-alpha*w1L(i))^(-0.5)-(d+w1L(i)+alpha*w1L(i))
           ^(-0.5))*w2(j));
168     deltak8(i,j)=k8aprox(i,j)-k8(i,j);
169     end
170 end
171
172 for i=1:2
173     for j=1:2
174         kauxiliar(i,j)=k1(i,j)+k2(i,j)+k3(i,j)...
175             +k4(i,j)+E*I*k5(i,j)+k6(i,j)...
176             +k7(i,j)+k8(i,j)-kappa_1*k9(i,j)+a8(i,j);
177         kauxiliaraprox(i,j)=k1(i,j)+k2(i,j)+k3(i,j)+k4(i,j)+E*I*k5(i,j)
           )...
178             +deltak6(i,j)+deltak7(i,j)+deltak8(i,j)-kappa_1*k9(i,j)+a8
           (i,j);
179         deltakauxiliar(i,j)=kauxiliar(i,j)+kauxiliaraprox(i,j);
180         kk1(e+i-1,e+j-1)=kk1(e-1+i,e-1+j)+kauxiliar(i,j);
181         deltakk1(e+i-1,e+j-1)=kk1(e+i-1,e+j-1)+deltakauxiliar(i,j);
182         m(e+i-1,e+j-1)=m(e+i-1,e+j-1)+a8(i,j);
183     end
184 end
185 else
186
187     for i=1:2
188         for j=1:2
189             a1(i,j)=E*I*(w(i)*w1(j)-w11(i)*w8(j));
190             a2(i,j)=E*I*(w5(i)*w3(j)-w2(i)*w4(j));

```

```

191         a4(i,j)=kappa_1*(w7(i)*w1(j)-w6(i)*w8(j));
192         a5(i,j)=kappa_1*(w10(i)*w3(j)-w9(i)*w4(j));
193         a6(i,j)=kappa_1*(w(i)*w5(j)-w11(i)*w2(j));
194     end
195 end
196
197 for i=1:2
198     for j=1:2
199         aauxiliar(i,j)= a1(i,j)-a2(i,j)...
200             +E*I*k5(i,j)+a4(i,j)-a5(i,j)...
201             +a6(i,j)+k9(i,j)+a8(i,j);
202         kk1(e+i-1,e+j-1)=kk1(e+i-1,e+j-1)+aauxiliar(i,j);
203         deltakk1(e+i-1,e+j-1)=kk1(e+i-1,e+j-1);
204         m(e+i-1,e+j-1)=m(e+i-1,e+j-1)+a8(i,j);
205     end
206 end
207 end
208 end
209
210
211 for il=1:98
212     for i=1:16
213         j=1;
214         soma=0;
215         while j~=i && j<=15
216             soma=soma-m(i,j)*xo(i,il);
217
218             j=j+1;
219         end
220         y(i,il+2)=1/(m(i,i))*(soma-2*0.001*m(i,j)*xo(i,il+1)-(m(i,j)+0.0001*
                deltakk1(i,j))*xo(i,il));
221         erro(i,il+2)=abs(y(i,il+2)-xo(i,il+2));
222         xo(i,il+2)=y(i,il+2);
223     end
224 end
225 subplot(1,2,1)
226 plot(y(1,:), 'Color', 'green')
227 title('Din mica Nodal N1', 'Color', 'r')
228 xlabel('Comprimento L(\mu)')
229 ylabel('Deslocamento u_{1}(\mu)')

```

```
230 subplot(1,2,2)
231 plot(y(2,:), 'Color', 'blue')
232 title('Din mica Nodal N2', 'Color', 'r')
233 xlabel('Comprimento L(\mu)')
234 ylabel('Deslocamento u_{2}(\mu)')
235
236 figure(2)
237 subplot(1,2,1)
238 plot(y(3,:), 'Color', 'green')
239 title('Din mica Nodal N3', 'Color', 'r')
240 xlabel('Comprimento L(\mu)')
241 ylabel('Deslocamento u_{3}(\mu)')
242 subplot(1,2,2)
243 plot(y(4,:), 'Color', 'blue')
244 title('Din mica Nodal N4', 'Color', 'r')
245 xlabel('Comprimento L(\mu)')
246 ylabel('Deslocamento u_{4}(\mu)')
247
248 figure(3)
249 subplot(1,2,1)
250 plot(y(5,:), 'Color', 'green')
251 title('Din mica Nodal N5', 'Color', 'r')
252 xlabel('Comprimento L(\mu)')
253 ylabel('Deslocamento u_{5}(\mu)')
254 subplot(1,2,2)
255 plot(y(6,:), 'Color', 'blue')
256 title('Din mica Nodal N6', 'Color', 'r')
257 xlabel('Comprimento L(\mu)')
258 ylabel('Deslocamento u_{6}(\mu)')
259
260 figure(4)
261 subplot(1,2,1)
262 plot(y(7,:), 'Color', 'green')
263 title('Din mica Nodal N7', 'Color', 'r')
264 xlabel('Comprimento L(\mu)')
265 ylabel('Deslocamento u_{7}(\mu)')
266 subplot(1,2,2)
267 plot(y(8,:), 'Color', 'blue')
268 title('Din mica Nodal N8', 'Color', 'r')
269 xlabel('Comprimento L(\mu)')
```

```
270 ylabel('Deslocamento u_{8}(\mu)')
271
272 figure(5)
273 subplot(1,2,1)
274 plot(y(9,:), 'Color', 'green')
275 title('Din mica Nodal N9', 'Color', 'r')
276 xlabel('Comprimento L(\mu)')
277 ylabel('Deslocamento u_{9}(\mu)')
278 subplot(1,2,2)
279 plot(y(10,:), 'Color', 'blue')
280 title('Din mica Nodal N10', 'Color', 'r')
281 xlabel('Comprimento L(\mu)')
282 ylabel('Deslocamento u_{10}(\mu)')
283
284 figure(6)
285 subplot(1,2,1)
286 plot(y(11,:), 'Color', 'green')
287 title('Din mica Nodal N11', 'Color', 'r')
288 xlabel('Comprimento L(\mu)')
289 ylabel('Deslocamento u_{11}(\mu)')
290 subplot(1,2,2)
291 plot(y(12,:), 'Color', 'blue')
292 title('Din mica Nodal N12', 'Color', 'r')
293 xlabel('Comprimento L(\mu)')
294 ylabel('Deslocamento u_{12}(\mu)')
295
296 figure(7)
297 subplot(1,2,1)
298 plot(y(13,:), 'Color', 'green')
299 title('Din mica Nodal N13', 'Color', 'r')
300 xlabel('Comprimento L(\mu)')
301 ylabel('Deslocamento u_{13}(\mu)')
302 subplot(1,2,2)
303 plot(y(14,:), 'Color', 'blue')
304 title('Din mica Nodal N14', 'Color', 'r')
305 xlabel('Comprimento L(\mu)')
306 ylabel('Deslocamento u_{14}(\mu)')
307
308 figure(8)
309 subplot(1,2,1)
```

```
310 plot(y(15,:), 'Color', 'green')
311 title('Din mica Nodal N15', 'Color', 'r')
312 xlabel('Tempo (s)')
313 ylabel('Deslocamento u_{15}(\mu)')
314 subplot(1,2,2)
315 plot(y(16,:), 'Color', 'blue')
316 title('Din mica Nodal N16', 'Color', 'r')
317 xlabel('Tempo (s)')
318 ylabel('Deslocamento u_{16}(\mu)')
```

## REFERÊNCIAS

- ABDEL-RAHMAN, E. M.; YOUNIS, M. I.; NAYFEH, A. H. Characterization of the mechanical behavior of an electrically actuated microbeam. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, v. 12, n. 6, p. 759, 2002.
- ADRIANO, V. S. R. Análise experimental da influência da vibração na resistência de blocos de concreto produzidos em máquinas vibro-compactadoras. 2014.
- ANSARI, R.; GHOLAMI, R.; SAHMANI, S. Free vibration analysis of size-dependent functionally graded microbeams based on the strain gradient timoshenko beam theory. *Composite Structures*, v. 94, n. 1, p. 221 – 228, 2011.
- AREBI, L. *et al.* Misalignment detection using a wireless sensor mounted on a rotating shaft. In: . [S.l.: s.n.], 2011.
- ARJMAND, M. T. *et al.* Chaos control in afm systems using nonlinear delayed feedback via sliding mode control. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, v. 2, n. 3, p. 993 – 1001, 2008. Special Issue Section: Analysis and Design of Hybrid Systems.
- ASKES, H.; AIFANTIS, E. C. Gradient elasticity in statics and dynamics: an overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, v. 48, n. 13, p. 1962–1990, 2011.
- AUFFRAY G. LE QUANG, Q. C. H. N. Matrix representation for 3d strain-gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Elsevier, v. 61, n. 12, p. 1203–1223, 2013.
- AVERY, L. R. *Integrated circuit protection device*. [S.l.]: Google Patents, 1983. US Patent 4,400,711.
- BABU, A. S.; NAIDU, G.; MEENAKSHI, U. Earth quake detection and alerting using iot. p. 14–18, 05 2018.
- BAKER, M. K. *et al.* *Data analysis system and method for industrial process control systems*. [S.l.]: Google Patents, 1993. US Patent 5,226,118.
- Brand and O. Self-magnetic excitation for in-plane mode resonant microsensors. In: *19th IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 74–77.
- CAREY, D. H.; WHALEN, B. H. *Compact adapter package providing peripheral to area translation for an integrated circuit chip*. [S.l.]: Google Patents, 1995. US Patent 5,379,191.

CORREA, L. G. C.; BARBOSA, C. R. H. Inferência da qualidade de produtos de destilação utilizando redes neurais artificiais e filtro de kalman estendido.

CRIPPEN, M. J. *et al.* Blade-center packaging, power, and cooling. *IBM Journal of Research and Development*, v. 49, n. 6, p. 887–904, 2005.

CUNNINGHAM, M. *et al.* Active vibration control and actuation of a small cantilever for applications in scanning probe instruments. *Sensors and Actuators A: Physical*, v. 50, n. 1, p. 147 – 150, 1995.

DAO, D. V. *et al.* Development of a 3-dof silicon piezoresistive micro accelerometer. In: IEEE. *Micro-Nanomechanics and Human Science, 2004 and The Fourth Symposium Micro-Nanomechanics for Information-Based Society, 2004. Proceedings of the 2004 International Symposium on*. [S.l.], 2004. p. 271–276.

DELL'ISOLA, F.; SCIARRA, G.; VIDOLI, S. Generalized hooke's law for isotropic second gradient materials. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society London, v. 465, n. 2107, p. 2177–2196, 2009.

D'EMILIA, G. *et al.* Calibration of tri-axial mems accelerometers in the low-frequency range – part 1: comparison among methods. *Journal of Sensors and Sensor Systems*, v. 7, n. 1, p. 245–257, 2018.

DEVICES, A. Datasheet adxl335. *Rev B*, 2009.

D.H., H. Proper definition of curvature in nonlinear beam kinematics. *AIAA Journal*, v. 422, n. 12, p. 1825 – 1827, 1984.

DOUCET, A. *et al.* Rao-blackwellised particle filtering for dynamic bayesian networks. In: *Proceedings of the Sixteenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*. San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2000. (UAI'00), p. 176–183.

DRESCHER, W. R. *et al.* Diagnostic medical ultrasound systems and transducers utilizing micro-mechanical components. [S.l.]: Google Patents, 2003. US Patent 6,645,145.

DROPSHO, S. *et al.* Managing static leakage energy in microprocessor functional units. In: IEEE. *Microarchitecture, 2002.(MICRO-35). Proceedings. 35th Annual IEEE/ACM International Symposium on*. [S.l.], 2002. p. 321–332.

DYM, C.; SHAMES, I. *Solid Mechanics: A Variational Approach, Augmented Edition*. [S.l.]: Springer New York, 2013. (SpringerLink : Bücher). ISBN 9781461460343.

ELWENSPÖCK, M.; WIEGERINK, R. *Mechanical microsensors*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

FABULA, T. as; BTITTGENBACH, S. Analytical and finite-element modeling of resonant silicon microsensors. *Sensors and Materials*, v. 9, n. 8, p. 501–51, 1997.

FLECK, N. *et al.* Strain gradient plasticity: theory and experiment. *Acta Metallurgica et materialia*, Elsevier, v. 42, n. 2, p. 475–487, 1994.

\_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. *Acta Metallurgica et materialia*, Elsevier, v. 42, n. 2, p. 475–487, 1994.

FRITZING, S. *Interaction Design Lab Potsdam*. 0.9.3b.

GARDNER, J. W.; VARADAN, V. K. *Microsensors, MEMS and smart devices*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2001.

- GERMAIN, P. The method of virtual power in continuum mechanics. part 2: Microstructure. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, SIAM, v. 25, n. 3, p. 556–575, 1973.
- GOPAL, A. *Academic Research Mechanical, Coupled Field Analysis Guide*. 2000–2019. <<https://www.ansys.com/>>.
- HASSANPOUR, P. A. *et al.* Nonlinear vibration of micromachined asymmetric resonators. *Journal of Sound and Vibration*, v. 329, n. 13, p. 2547 – 2564, 2010.
- HASSANPOUR, P. A.; NIEVA, P. M.; KHAJEPOUR, A. Stochastic analysis of a novel force sensor based on bifurcation of a micro-structure. *Journal of Sound and Vibration*, v. 330, n. 23, p. 5753 – 5768, 2011.
- HATEMI-J, A.; ROCA, E. Calculating the optimal hedge ratio: constant, time varying and the kalman filter approach. *Applied Economics Letters*, v. 13, n. 5, p. 293–299, 2006.
- HERRERA-MAY, A. *et al.* Development of resonant magnetic field microsensors: Challenges and future applications. In: \_\_\_\_\_. [S.l.: s.n.], 2011.
- HOWRILKA, P. P. *Printed circuit card rack*. [S.l.]: Google Patents, 1966. US Patent 3,271,626.
- ISHIHARA, H.; ARAI, F.; FUKUDA, T. Micro mechatronics and micro actuators. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, IEEE, v. 1, n. 1, p. 68–79, 1996.
- IWAI, M. C. *Micro Components IWAI*. [S.l.]: <http://iwaiseisakusho.com/index.html>, 2019. Acessado: 2019-02-08.
- JAVILI, A.; DELL'ISOLA, F.; STEINMANN, P. Geometrically nonlinear higher-gradient elasticity with energetic boundaries. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Elsevier, v. 61, n. 12, p. 2381–2401, 2013.
- JOGLEKAR, M.; PAWASKAR, D. Estimation of oscillation period/switching time for electrostatically actuated microbeam type switches. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 53, n. 2, p. 116 – 125, 2011. ISSN 0020-7403.
- JONES, D. R.; ASHBY, M. F. *Engineering materials 2: an introduction to microstructures, processing and design*. [S.l.]: Elsevier, 2005.
- LABVIEW. *Interaction Design Lab Potsdam*. 2014. Disponível em: <<http://www.ni.com>>.
- LAKRAD, F.; BELHAQ, M. Suppression of pull-in instability in mems using a high-frequency actuation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 15, n. 11, p. 3640 – 3646, 2010.
- LAM, D. *et al.* Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 51, n. 8, p. 1477 – 1508, 2003.
- LAM, D. C. *et al.* Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Elsevier, v. 51, n. 8, p. 1477–1508, 2003.
- LIN, R.; WANG, W. Structural dynamics of microsystems—current state of research and future directions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 20, n. 5, p. 1015 – 1043, 2006.
- LOGAN, D. L. *A first course in the finite element method*. [S.l.]: Cengage Learning, 2011.
- LUO, Z.-H.; GUO, B.-Z.; MORGÜL, Ö. *Stability and stabilization of infinite dimensional systems with applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

- LYAPUNOV, A. M. The general problem of the stability of motion. *International journal of control*, Taylor & Francis, v. 55, n. 3, p. 531–534, 1992.
- MA, L.; SUN, Y. On-chip network design automation with source routing switches. *Tsinghua Science Technology*, v. 12, n. 1, p. 77 – 85, 2007.
- MA, Q.; CLARKE, D. R. Size dependent hardness of silver single crystals. *Journal of Materials Research*, Cambridge University Press, v. 10, n. 4, p. 853–863, 1995.
- \_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. *Journal of Materials Research*, Cambridge University Press, v. 10, n. 4, p. 853–863, 1995.
- MAGEN, N. *et al.* Interconnect-power dissipation in a microprocessor. In: ACM. *Proceedings of the 2004 international workshop on System level interconnect prediction*. [S.l.], 2004. p. 7–13.
- MAGRAB, E. *Vibrations of Elastic Systems: With Applications to MEMS and NEMS*. [S.l.]: Springer Netherlands, 2012. (Solid Mechanics and Its Applications). ISBN 9789400726727.
- MARDI, M. H. *Method for marking packaged integrated circuits*. [S.l.]: Google Patents, 2002. US Patent 6,359,248.
- MIKELL, P. G. *Fundamentals of modern manufacturing: materials, processes, and systems*. [S.l.]: John Wiley & Sons, New York, 1999.
- MINDLIN, R.; TIERSTEN, H. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and analysis*, Springer, v. 11, n. 1, p. 415–448, 1962.
- MINDLIN, R. D. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Springer, v. 16, n. 1, p. 51–78, 1964.
- \_\_\_\_\_. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, v. 1, n. 4, p. 417–438, 1965.
- MOJAHEDI, M.; ZAND, M. M.; AHMADIAN, M. Static pull-in analysis of electrostatically actuated microbeams using homotopy perturbation method. *Applied Mathematical Modelling*, v. 34, n. 4, p. 1032 – 1041, 2010.
- MONTROSE, M. I. *Printed circuit board design techniques for EMC compliance*. [S.l.]: IEEE press Piscataway, NJ, 1996. v. 1.
- NIX, W. D. Mechanical properties of thin films. *Metallurgical transactions A*, Springer, v. 20, n. 11, p. 2217, 1989.
- POLIZZOTTO, C. A hierarchy of simplified constitutive models within isotropic strain gradient elasticity. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Elsevier, v. 61, p. 92–109, 2017.
- POOLE, W.; ASHBY, M.; FLECK, N. Micro-hardness of annealed and work-hardened copper polycrystals. *Scripta Materialia*, Tarrytown, NY: Elsevier Science Inc., 1996-, v. 34, n. 4, p. 559–564, 1996.
- QIAN, Y. *et al.* Analytical approximations to nonlinear vibration of an electrostatically actuated microbeam. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 17, n. 4, p. 1947 – 1955, 2012. ISSN 1007-5704.
- RAKOTONDRABE, M.; HADDAB, Y.; LUTZ, P. Step modelling of a high precision 2dof (linear-angular) microsystem. In: . [S.l.: s.n.], 2005. v. 2005, p. 150 – 156.

- RAO, S. S.; YAP, F. F. *Mechanical vibrations*. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, 2011. v. 4.
- RAWAL, S. P.; BARNETT, D. M.; MARTIN, D. E. Thermal management for multifunctional structures [spacecraft electronics]. In: *Proceedings. 1998 International Conference on Multichip Modules and High Density Packaging (Cat. No.98EX154)*. [S.l.: s.n.], 1998. p. 129–134.
- REDDY, J. *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*. [S.l.]: Krieger Publishing Company, 1991.
- REZAZADEH, G.; TAHMASEBI, A.; ZIAEI-RAD, S. Nonlinear electrostatic behavior for two elastic parallel fixed–fixed and cantilever microbeams. *Mechatronics*, v. 19, n. 6, p. 840 – 846, 2009.
- ROBINSON, J. C. *Infinite-dimensional dynamical systems: an introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001. v. 28.
- ROUMENIN, C. Microsensors for magnetic fields. In: \_\_\_\_\_. *MEMS: A Practical Guide to Design, Analysis, and Applications*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006. p. 453–521.
- RUSSELL, S.; NORVIG, P. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. 3rd. ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall Press, 2009. ISBN 0136042597, 9780136042594.
- SANKARAN, K. K.; MISHRA, R. S. *Metallurgy and Design of Alloys with Hierarchical Microstructures*. [S.l.]: Elsevier, 2017.
- SANSOM, E. *et al.* A novel approach to fireball modeling: The observable and the calculated. *Meteoritics Planetary Science*, v. 50, p. 1423–1435, 07 2015.
- SEOK, J.; SCARTON, H. A. Dynamic characteristics of a beam angular-rate sensor. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 48, n. 1, p. 11 – 20, 2006.
- SOUSA, A. de P. Métodos experimentais para vibrações mecânicas. 2018. Disponível em: <[https://aprender.ead.unb.br/pluginfile.php/86346/mod\\_resource/content/1/Metodos\\_Experimentais/Aula\\_Metodos\\_Experimentais\\_-\\_AlineSouzaPaula.pdf](https://aprender.ead.unb.br/pluginfile.php/86346/mod_resource/content/1/Metodos_Experimentais/Aula_Metodos_Experimentais_-_AlineSouzaPaula.pdf)>.
- SPEAKMAN, S. P. *Methods and apparatus for the manufacture of microstructures*. [S.l.]: Google Patents, 2011. US Patent App. 12/446,452.
- STÖLKEN, J. S.; EVANS, A. A microbend test method for measuring the plasticity length scale. *Acta Materialia*, Elsevier, v. 46, n. 14, p. 5109–5115, 1998.
- STÖLKEN, J.; EVANS, A. A microbend test method for measuring the plasticity length scale. *Acta Materialia*, v. 46, n. 14, p. 5109 – 5115, 1998.
- SUN, D. *et al.* Hole-making processes and their impacts on the microstructure and fatigue response of aircraft alloys. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, v. 94, n. 5, p. 1719–1726, Feb 2018.
- TANG, C.; ALICI, G. Evaluation of length-scale effects for mechanical behaviour of micro-and nanocantilevers: I. experimental determination of length-scale factors. *Journal of Physics D: Applied Physics*, IOP Publishing, v. 44, n. 33, p. 335501, 2011.
- VAGIA, M.; NIKOLAKOPOULOS, G.; TZES, A. Design of a robust pid-control switching scheme for an electrostatic micro-actuator. *Control Engineering Practice*, v. 16, n. 11, p. 1321 – 1328, 2008.

VARDOULAKIS, I.; SULEM, J. Bifurcation analysis in geomechanics, blackie academic and professional. Zervos, A., *Vardoulakis*, v. 1, p. 305–324, 1995.

VATANKHAH, R.; KARAMI, E.; SALARIEH, H. Observer-based vibration control of non-classical microcantilevers using extended kalman filters. *Applied Mathematical Modelling*, v. 39, n. 19, p. 5986 – 5996, 2015. ISSN 0307-904X.

\_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. *Applied Mathematical Modelling*, v. 39, n. 19, p. 5986–5996, 2015.

WANG, P. Feedback control of vibrations in a micromachined cantilever beam with electrostatic actuators. *Journal of Sound and Vibration*, v. 213, n. 3, p. 537 – 550, 1998. ISSN 0022-460X.

WU, W.-P.; YAO, Z. Z. Influence of a strain rate and temperature on the crack tip stress and microstructure evolution of monocrystalline nickel: A molecular dynamics simulation. *Strength of Materials*, v. 46, p. 164–171, 03 2014.

YEN, J.-Y.; LAN, K.-J.; KRAMAR, J. A. Active vibration isolation of a large stroke scanning probe microscope by using discrete sliding mode control. *Sensors and Actuators A: Physical*, v. 121, n. 1, p. 243 – 250, 2005.

ZHANG, W.; MENG, G.; LI, H. Adaptive vibration control of micro-cantilever beam with piezoelectric actuator in mems. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, v. 28, n. 3, p. 321–327, Mar 2006.