Universidade Federal de Goiás
Regional Catalão

Unidade Acadêmica Especial de
Matemática e Tecnologia

Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

ABORDAGEM ANALÍTICA E NUMÉRICA DE TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO BASEADAS NA REDUÇÃO DE INTERVALOS DE INCERTEZA

Ali Ahmad Smidi

Catalão

2015

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Ali Ahmad Smidi					
E-mail:	ali.smidi@facpoli.edu.br					
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [X]Sim [ ] Não						
Vínculo empregatício do autor	Faculdade Politécnica de Uberlândia Universidade Federal de Uberlândia					
Agência de fomento:-	-			Sigla:	-	
País:	-	UF:	-	CNPJ:	-	
Título:	Abordagem analítica e numérica de técnicas de otimização baseadas na redução de intervalos de incerteza					
Palavras-chave:	Otimização, Método de Fibonacci, Método da Seção Áurea, Softwares Computacionais, Intervalos de Incerteza.					
Título em outra língua:	Analytical and numerical approach of optimization techniques based on the reduction of uncertainty intervals.					
Palavras-chave em outra língua:	Optimization, Fibonacci Method, Golden Section Method, Computational Softwares, Uncertainty Interval.					
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico					
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	30/06/2015					
Programa de Pós-Graduação:	Programa de Mestrado Profissional - PROFMAT					
Orientador (a):	Romes Antonio Borges					
E-mail:	kvtborges@gmail.com					
Co-orientador(a):*	-					
E-mail:	-					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Ali Ahmad Smidi

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 23 / 09 / 2015

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Ali Ahmad Smidi

ABORDAGEM ANALÍTICA E NUMÉRICA DE TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO BASEADAS NA REDUÇÃO DE INTERVALOS DE INCERTEZA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Prof. Dr. Romes Antonio Borges - RC/UFG (Orientador)
Prof. Dr. Glen Cézar Lemos - IFG
Prof. Dr. Thiago Alves de Queiroz - RC/UFG

Catalão

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Smidi, Ali Ahmad
Abordagem analítica e numérica de técnicas de otimização baseadas na redução de intervalos de incerteza [manuscrito] / Ali Ahmad Smidi. - 2015.
123 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Romes Antonio Borges .
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, , Catalão, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - profissional), Catalão, 2015.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui tabelas, algoritmos, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Otimização. 2. Método de Fibonacci. 3. Método da Seção Áurea. 4. Softwares computacionais. 5. Intervalos de incerteza. I. , Romes Antonio Borges, orient. II. Título.

Ali Ahmad Smidi

Abordagem Analítica e Numérica de Técnicas de Otimização Baseadas na Redução de Intervalos de Incerteza

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 30 de Junho de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Romes Antonio Borges
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Glen Cézar Lemos
Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologias de Goiás – IFG

Prof. Dr. Thiago Alves de Queiroz
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Ali Ahmad Smidi graduou-se em Engenharia Elétrica (com ênfase em Eletrônica e Telecomunicações) pelo Instituto Nacional de Telecomunicações de Santa Rita do Sapucaí e especializou-se em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia.

Dedico este trabalho a minha família em especial minha mãe sem qual não teria concluído meus estudos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado força para concluir este trabalho.

Aos meus pais pela vida e educação.

A minha esposa pela paciência e incentivo.

À Sociedade Brasileira de Matemática e à Universidade Federal de Goiás por oferecerem este mestrado.

Obrigado também aos queridos amigos do mestrado pelo agradável convívio e apoio.

Agradecimentos especiais aos professores do programa: Fernando Kennedy da Silva, Igor dos Santos Lima, Márcio Roberto Rocha Ribeiro, Paulo Roberto Bergamaschi, Plínio José Oliveira, Porfírio Azevedo dos Santos Júnior e Thiago Porto de Almeida Freitas por toda a contribuição fornecida ao longo do curso.

Por fim, agradeço de forma muito especial ao professor Romes Antonio Borges por toda a sua contribuição, paciência e incentivo que tornaram possível a conclusão deste trabalho.

Resumo

No presente trabalho, buscou-se apresentar uma iniciação às técnicas numéricas voltadas para a otimização de problemas elementares acessíveis aos alunos do segundo e terceiro ano do ensino médio. As técnicas de otimização trabalhadas foram os Métodos de busca de Fibonacci e da Seção Áurea. O trabalho apresenta e detalha matematicamente tais técnicas, além de sempre partir de um conhecimento inicial e construir os métodos em questão. Ao abordar um problema real, buscou-se introduzir a interpretação e a modelagem matemática do problema, bem como sua solução, tanto analítica quanto numérica, utilizando vários softwares computacionais de simples utilização. Neste sentido, pode-se afirmar que o presente trabalho traz uma abordagem didática das principais técnicas de otimização unimodal por redução de intervalos de incerteza.

Palavras-chave

Otimização, Método de Fibonacci, Método da Seção Áurea, Softwares Computacionais, Intervalos de Incerteza.

Abstract

In this study, we sought to present an introduction to numerical techniques aimed to optimize accessible elementary problems to the students of second and third year of high school. The optimization techniques discussed in this work were the Fibonacci and the Golden Section methods. The work presents and does mathematical description of such techniques, from an initial knowledge and building methods in question. In addressing a real problem, we attempted to introduce the interpretation and mathematical modeling of the problem as well as its solutions analytically and numerically, using softwares simple to use. In this regard, it can be stated that the present work provides didactical approach of main unimodal optimization techniques to reduce uncertainty interval.

Keywords

Optimization, Fibonacci Method, Golden Section Method, Computational Softwares, Uncertainty Interval.

"Talvez não tenhamos conseguido fazer o melhor, mas lutamos para que o melhor fosse feito. Não somos o que deveríamos ser, não somos o que iremos ser.. mas Graças a Deus, não somos o que éramos".

(*Martin Luther King Jr.*)

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 - Funções unimodais 25
Figura 3.2 - Fluxograma do Método da Bisseção 34
Figura 3.3 - Intervalos de incerteza 39
Figura 3.4 - Fluxograma do Método da Dicotomia 42
Figura 3.5 - Método de busca de Fibonacci - Iteração 1 51
Figura 3.6 - Método de busca de Fibonacci - Iteração 2 52
Figura 3.7 - Método de busca de Fibonacci - Iteração j 54
Figura 3.8 - Redução do intervalo com $\alpha_{k+1}=\beta_k$ 62
Figura 3.9 - Algoritmo do Método de Fibonacci 73
Figura 4.1 - O problema das duas indústrias 89
Figura 4.2 - Esquema do problema das duas indústrias 90
Figura 4.3 - Gráfico da função objetivo do problema de abastecimento das duas indústrias.. 91
Figura 4.4 - Exercício das duas fábricas – Reduções sucessivas do intervalo de incerteza pelo método de Fibonacci 96
Figura 4.5 - Planificação da superfície lateral de um cone circular reto 100
Figura 4.6 - Triângulo retângulo formado por r, h e g 100
Figura 4.7 - Gráfico da função objetivo do problema do copo de papel 101
Figura 4.8 - Caixa de base quadrada 104
Figura 4.9 - Gráfico da função objetivo do problema da caixa 105
Figura A.1 - Digitação da função no campo de entrada do Geogebra 112
Figura A.2 - Gráfico da função $C: R \to R$, com $C(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 24x + 148}$ ... 113
Figura A.3 - Comando para achar o mínimo da função *C* 113
Figura A.4 - Ponto de mínimo da função *C* 114
Figura A.5 - Opções de número de casas decimais 115
Figura A.6 - Instalação do SOLVER: Passo 1 - Botão Office 115
Figura A.7 - Instalação do SOLVER: Passo 2 - Opções do Excel 116
Figura A.8 - Instalação do SOLVER: Passo 3 - Suplementos 116
Figura A.9 - Instalação do SOLVER: Passo 4 – Solver 117
Figura A.10 - Instalação do SOLVER: Passo 5 - Ir 117
Figura A.11 - Instalação do SOLVER: Passo 6 - Selecionar Solver 118
Figura A.12 - Instalação do SOLVER: Passo 7 - OK 118

Figura A.13 - Instalação do SOLVER: Passo 8 - Dados 119
Figura A.14 - Digitação da função objetivo 119
Figura A.15 - Valor da função *C* para *x* igual ao valor contido em A3 (zero) 120
Figura A.16 - Digitação do intervalo de incerteza 120
Figura A.17 - Parâmetros do Solver 121
Figura A.18 - Ponto de mínimo da função objetivo com erro de 0,000001 122
Figura A.19 - Opções do Solver 122

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Resultados do problema da excursão pelo Método das Buscas Simultâneas 30
Tabela 3.2 - Resultados do problema da excursão pelo Método da Bisseção 37
Tabela 3.3 - Resultados da planilha do problema da excursão pelo Método da Bisseção 39
Tabela 3.4 - Resultados do problema da excursão pelo Método da Dicotomia 45
Tabela 3.5 - Resultados da planilha do problema da excursão pelo Método da Dicotomia ... 45
Tabela 3.6 - Resultados do problema da excursão pelo Método e Fibonacci 76
Tabela 3.7 - Resultados da planilha do problema da excursão pelo método de Fibonacci 77
Tabela 3.8 - Construção dos números de Fibonacci 78
Tabela 3.9 - Resultados do problema da excursão pelo Método da Seção Áurea 85
Tabela 3.10 - Resultados da planilha do problema da excursão pelo método da Seção Áurea 86
Tabela 4.1 - Resultados do problema das duas fábricas usando o Método de Fibonacci 94
Tabela 4.2 - Resultados da planilha do problema das duas fábricas pelo método de Fibonacci 95
Tabela 4.3 - Resultados do problema das duas fábricas usando o método da Seção Áurea ... 98
Tabela 4.4 - Resultados da planilha do problema das duas fábricas pelo método da Seção Áurea 99
Tabela 4.5 - Resultados do problema do copo de papel usando o método de Fibonacci 102
Tabela 4.6 - Resultados do problema do copo de papel usando o Método da Seção Áurea . 103
Tabela 4.7 - Resultados do problema da caixa usando o Método de Fibonacci 106
Tabela 4.8 - Resultados do problema da caixa usando o Método da Seção Áurea. 107

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 16
2. DEFINIÇÕES BÁSICAS 20
3. FUNDAMENTOS DE OTIMIZAÇÃO 23
3.1. Conceitos iniciais 23
3.2. Método da busca simultânea 25
3.2.1. O Problema da Excursão 26
3.3. Método da Bisseção e Método da Dicotomia 32
3.3.1. Método da Bisseção 32
3.3.1.1. Algoritmo do Método da Bisseção 33
3.3.1.2. Exemplo: o Problema da Excursão 34
3.3.2. Método da Dicotomia 39
3.3.2.1. Algoritmo do Método da Dicotomia 41
3.3.2.2. Exemplo: o Problema da Excursão 43
3.4. Números de Fibonacci 47
3.5. Método de Fibonacci 49
3.5.1. Algoritmo do Método de Fibonacci 72
3.5.2. Exemplo: o Problema da Excursão 74
3.6. Método da Seção Áurea 82
3.6.1. Exemplo: o Problema da Excursão 83
4. EXEMPLOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ELEMENTARES PELOS MÉTODOS DE FIBONACCI E SEÇÃO ÁUREA 89
Problema 1: Abastecimento de duas indústrias 89
Problema 2: Dimensões do copo de papel 99
Problema 3: Dimensões e volume da caixa 104
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS 109
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 111
APÊNDICE A - RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ELEMENTARES DE OTIMIZAÇÃO COM GEOGEBRA E SOLVER 112
A1. OTIMIZAÇÃO NO GEOGEBRA 112
A2. OTIMIZAÇÃO COM O SOLVER (COMPLEMENTO DO EXCEL) 115

1. INTRODUÇÃO

A experiência como professor mostra que a dificuldade de assimilar conteúdos matemáticos é nítida. Alguns alunos até conseguem "reproduzir" alguns exercícios no sentido de resolver mecanicamente certos tipos de problemas. Porém, grande parte não consegue interpretar um problema ou associá-lo aos conteúdos estudados.

Tal fato se comprova pelo baixo desempenho dos alunos brasileiros em provas (de aferição) internacionais, ou mesmo locais, regionais e nacionais.

Pode-se inicialmente apontar alguns motivos para tal deficiência. Um exemplo é o caso de alunos que estudam no turno noturno. Observa-se que normalmente tais alunos trabalham durante o dia, cuidam da sua família, tem que pagar contas, ir ao supermercado etc. Neste caso mal sobra tempo para estudar, então é óbvio que o desempenho não será o mesmo de um aluno que estuda em período integral.

No entanto, o problema de aprendizado não se resume apenas na falta de tempo. Mesmo com tempo disponível, observa-se a dificuldade de aprendizagem.

De modo geral, uma reclamação frequente é que os alunos não conseguem aprender porque não entendem onde devem aplicar tais conteúdos.

De modo mais amplo pode-se dizer que a dificuldade da aprendizagem está no fato de que o aluno não consegue fazer vínculos entre a sua experiência e as novas informações.

Esta observação vai ao encontro à teoria da aprendizagem significativa de Ausubel[1]. Segundo Moreira (1999, p. 153):

> Para Ausubel, aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto especificamente relevante da estrutura do conhecimento do indivíduo, ou seja, este processo envolve a interação da nova informação com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausubel define como conceito subsunçor, ou simplesmente subsunçor existente na estrutura cognitiva do indivíduo. A aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em conceitos ou proposições relevantes, preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Ausubel vê o armazenamento de informações no cérebro humano como sendo organizado, formando uma hierarquia conceitual, na qual elementos mais específicos de conhecimento são ligados (e assimilados) a conceitos mais gerais, mais inclusivos. Estrutura cognitiva significa, portanto, uma estrutura hierárquica de conceitos que são representações de experiências sensoriais do indivíduo.

[1] David Paul Ausubel (1918-2008) foi professor Emérito da Universidade de Columbia, em Nova Iorque. Médico-Psiquiatra de formação dedicou sua carreira acadêmica à psicologia educacional, sendo considerado um representante do cognitivismo (MOREIRA, 1999).

Com base nessa teoria, ao ensinar um novo conteúdo é preciso, então, fazer um levantamento dos conceitos prévios dos alunos.

Ao abordar o conteúdo função (definição de função, domínio, imagem, contradomínio etc.) pode-se estabelecer âncoras entre o novo conteúdo (função) e as situações (ou informações) que os alunos conhecem. O abastecimento de um carro num posto de gasolina ou o preço da corrida de um táxi são exemplos que permitem explorar o que são variáveis independentes e dependentes, domínio, contradomínio e é claro construir uma definição de função. Nesse exemplo, o subsunçor que já existe na estrutura cognitiva do aluno e que servirá de base para o conceito de função é o de conceito de conjunto.

Aqui cabe uma observação: os subsunçores que servirão de base para o processo de ancoragem com a nova informação devem ser relevantes.

A respeito das subsunções, Moreira (1999, p. 153), ainda acrescenta:

> […] este processo de "ancoragem" da nova informação resulta em crescimento e modificação do subsunçor. Isso significa que os subsunçores existentes na estrutura cognitiva podem ser abrangentes e bem-desenvolvidos, ou limitados e pouco desenvolvidos, dependendo da frequência com que ocorre aprendizagem significativa em conjunção com um dado subsunçor.

Assim, se bem trabalhado, o conceito de função passa a ser um novo subsunçor que poderá ser utilizado para construção de novos conhecimentos.

O presente trabalho nasce da frequente pergunta que se ouve em sala de aula: Onde eu vou usar isto? (ou Para quê serve isto?).

Baseado na teoria da aprendizagem significativa, o trabalho oferece uma aplicação do estudo de funções: encontrar, dentro de um intervalo, qual o valor máximo ou valor mínimo de uma função.

Encontrar o ponto de máximo ou de mínimo de uma função é um problema que ocorre frequentemente nas mais variadas áreas de conhecimento.

Quanto se deve vender para que o lucro de uma empresa seja máximo? Qual é a melhor configuração de uma tubulação para atender a demanda com custo mínimo? Qual devem ser as dimensões de uma caixa para abrigar um determinado volume com custo mínimo?

Algumas ideias relacionadas a máximo e mínimo são abordadas na primeira série do ensino médio, ao se trabalhar com funções quadráticas. Porém, a proposta aqui é abranger um número maior de funções e usando apenas os conceitos vistos no primeiro ano do ensino médio.

Assim, para trabalhar com os novos conceitos, que serão desenvolvidos neste trabalho, é necessário ter algum conhecimento relevante sobre funções. Tais conceitos irão servir de base (serão os subsunçores) para a construção dos novos conhecimentos. Por essa razão o novo conteúdo proposto é mais apropriado a alunos que já tem familiaridade com funções, além de uma maturidade mais desenvolvida. Portanto, tal conteúdo é recomendado para alunos do terceiro ano do ensino médio.

O trabalho além de apresentar técnicas elementares de otimização, ainda pretende implementar tais técnicas em planilhas eletrônicas.

O que se pretende, com essas técnicas (iterativas), é gerar uma sequência numérica que convirja para o ponto de máximo ou de mínimo da função. Na verdade duas sequências numéricas: um limitante inferior e um superior.

Tal método é antigo e encontra-se referência até antes da era Cristã com os gregos. O método de exaustão era utilizado para determinar áreas, volumes e comprimentos de arcos. A base deste método é descrita pela proposição:

> Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie. (EVES, 2011, p. 175).

Uma brincadeira muito conhecida relembra esse procedimento: a de descobrir o preço de um produto (ou a altura de uma pessoa ou uma medida qualquer). Pergunta-se o preço de um determinado produto e de acordo com a resposta o questionador irá dizer se o valor é maior ou menor. Tem-se, então, uma sequência numérica inferior e outra superior cada vez mais estreita de forma a convergir para o valor desejado.

Finalmente, o trabalho também se justifica pela dificuldade em encontrar textos dessa natureza, e com os detalhes fornecidos, em língua portuguesa.

Com relação à estrutura, o presente trabalho é dividido, com exceção desta introdução, em quatro capítulos e um apêndice. O segundo capítulo apresenta as definições básicas usadas durante o texto e que fundamental o trabalho todo. O conceito de função é fundamental, pois o texto trabalha essencialmente com valores de funções, mostrando aplicações na resolução de problemas de otimização. As sequências são definidas, pois o que se faz ao longo do trabalho é encontrar, sucessivamente, intervalos, que contém o ponto ótimo, de comprimentos cada vez menores gerando assim duas sequências, inferior e superior, que convergem para o ponto procurado.

No terceiro capítulo, além de se apresentar os conceitos básicos, são apresentadas algumas técnicas elementares de otimização de funções unimodais. As primeiras técnicas são apresentadas como processo de construção para se obter às duas principais, quais sejam: Método de Fibonacci e Método da Seção Áurea. Assim, no quarto capítulo serão utilizados os métodos mostrados no capítulo anterior para a resolução de problemas elementares de otimização.

No último capítulo são feitas as considerações finais.

Finalmente, no apêndice são apresentados dois softwares básicos e bastante conhecidos que podem ser usados para resolver problemas de otimização.

2. DEFINIÇÕES BÁSICAS

A seguir, são apresentadas algumas definições e teoremas básicos que serão utilizados na sequência do trabalho. As demonstrações dos teoremas básicos serão omitidas, podendo ser encontradas em Lima (2008) e Stewart (2009).

Definição 2.1. (LIMA, 2013)

Dados os conjuntos X e Y, uma ***função*** *f: X → Y é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento* $x \in X$ *um elemento* $y = f(x) \in Y$. *O conjunto X chama-se* ***domínio*** *e Y é o* ***contradomínio*** *da função f. Para cada* $x \in X$, *o elemento* $f(x) \in Y$ *chama-se a* ***imagem*** *de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto* $x \in X$.

Neste trabalho o domínio da função é indicado por D_f.

Definição 2.2. (LIMA, 2013)

Uma função $f: X \to \mathbf{R}$ *que tem como domínio um subconjunto* $X \subset \mathbf{R}$ *e cujos valores f(x), para todo* $x \in X$, *são números reais é denominada* ***função real de variável real****.*

Por uma questão de simplificação, uma função real de variável real é tratada apenas como função real. Além disto, no presente trabalho, são abordadas apenas funções reais de uma variável por ser o tipo mais comum encontrado no ensino médio.

Definição 2.3. (LIMA, 2008)

Uma ***sequência*** ($(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ *ou* $(x_n)_{x \in \mathbf{N}}$) *de números reais é uma função* $x: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, *que associa a cada número natural n um número real* x_n , *chamado o enésimo termo da sequencia.*

Definição 2.4. (LIMA, 2008)

Uma sequência (x_n) *diz-se* ***limitada superiormente*** *(respectivamente* ***inferiormente****) quando existe* $c \in R$ *tal que* $x_n \leq c$ *(respectivamente,* $x_n \geq c$ *) para todo* $n \in \mathbf{N}$. *Diz-se que a sequência* (x_n) *é* ***limitada*** *quando ela é limitada superiormente e inferiormente. Isto equivale a dizer que existe k > 0 tal que* $|x_n| \leq k$ *para todo* $n \in \mathbf{N}$.

Definição 2.5. (LIMA, 2008)

Diz-se que o número real a é ***limite*** *da sequência* (x_n) *quando, para todo número real* $\varepsilon > 0$,

dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbf{N}$ *tal que todos os termos* x_n *com índice* $n > n_0$ *cumprem a condição* $|x_n - a| < \varepsilon$. *Escreve-se então* $a = lim\ x_n$.

Além de $a = lim\ x_n$, pode-se também escrever $a = \lim_{n \in N}\ x_n$, $a = \lim_{n \to \infty}\ x_n$ ou $x_n \to a$.

Definição 2.6. (LIMA, 2008)

Uma sequência que possui limite diz-se ***convergente****. Caso contrário, ela se chama* ***divergente****.*

Teorema 2.1. (LIMA, 2008)

Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.

Definição 2.7. (LIMA, 2008)

Uma sequência (x_n) *chama-se* ***monótona*** *quando se tem* $x_n \leq x_{n+1}$, *para todo* $n \in \mathbf{N}$ *ou então* $x_n \geq x_{n+1}$, *para todo* $n \in \mathbf{N}$. *No primeiro caso, diz-se que* (x_n) *é* ***monótona não decrescente*** *e, no segundo, que* (x_n) *é* ***monótona não crescente****. Se, mais precisamente, tivermos* $x_n < x_{n+1}$ *(respectivamente,* $x_n > x_{n+1}$*) para todo* $n \in \mathbf{N}$, *diremos que a sequência é* ***crescente*** *(respectivamente,* ***decrescente****).*

Teorema 2.2. (LIMA, 2008)

Toda sequência monótona limitada é convergente.

Teorema 2.3. (Teorema do sanduíche) (LIMA, 2008)

Se $lim\, x_n = lim\, y_n = a$ *e* $x_n \leq z_n \leq y_n$ *para todo n suficientemente grande então* $lim\, z_n = a$.

Definição 2.8. (STEWART, 2009)

Uma função f é ***contínua em*** $a \in D_f$ *se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Definição 2.9. (STEWART, 2009)

Uma função f é ***contínua em um intervalo*** *do seu domínio se for contínua em todos os pontos do intervalo.*

Definição 2.10. (STEWART, 2009)

Uma função f tem ***máximo absoluto*** *(ou* ***máximo global****) em c se* $f(c) \geq f(x)$ *para todo x em D, onde D é o domínio de f. O número f* (*c*) *é chamado de* ***valor máximo*** *de f em D. Analogamente, f tem um* ***mínimo absoluto*** *em c se* $f(c) \leq f(x)$ *para todo x em D, e o número f* (*c*) *é denominado* ***valor mínimo*** *de f em D. Os valores máximo e mínimo de f são chamados* ***valores extremos*** *de f.*

Teorema 2.4. (Teorema do Valor Intermediário ou Teorema de Bolzano-Cauchy). (LIMA, 2008)

Seja f : $[a;\ b] \rightarrow$ **R** *contínua. Se f* (*a*) $\leq d \leq$ *f* (*b*), *então existe pelo menos um c* $\in$ (*a; b*) *tal que f* (*c*) = *d.*

3. FUNDAMENTOS DE OTIMIZAÇÃO

3.1. CONCEITOS INICIAIS

Os problemas de otimização são frequentemente encontrados nas mais variadas áreas de conhecimento. Segundo Rao (2009, p. 1):

> Otimização é o ato de obter o melhor resultado dentro das circunstâncias dadas. No projeto, construção e manutenção de qualquer sistema de engenharia, os engenheiros precisam tomar muitas decisões tecnológicas e gerenciais em várias fases. O objetivo final de todas essas decisões será para minimizar o esforço necessário ou para maximizar o benefício desejado. Uma vez que o esforço requerido ou o benefício desejado em qualquer situação prática pode ser expresso como uma função de certas variáveis de decisão, a **otimização** pode ser definida como o processo de encontrar as condições que dão o valor máximo ou mínimo de uma função.

As técnicas de otimização que são discutidas a seguir tratam apenas do mínimo de uma função, pois para obter o máximo (de uma função *f*), basta que se busque o ponto de mínimo de g, onde g é dada por $g(x) = -f(x)$.

Por uma questão de facilidade na escrita, usa-se a notação *x** ao invés da notação natural $x_{mín}$ para indicar o ponto de mínimo.

Definição 3.1. *A função que se deseja maximizar ou minimizar dá-se o nome de* ***função objetivo***.

A função objetivo surge ao se efetuar a modelagem matemática de um problema. Equivalentemente ao problema original, o que se tem é que dada uma função real, *f*, deseja-se determinar seu ponto de mínimo sabendo que tal ponto pertence ao intervalo [a; b].

As técnicas iterativas de otimização têm por finalidade produzir uma sequência de números reais (x_n), tal que seu limite seja o valor ótimo *x** (no caso, o ponto de mínimo da função objetivo). Na maioria das vezes tal sequência é infinita e assim não se chega ao valor procurado. No entanto, escolhendo uma margem de erro ε, existe um índice $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que todos os termos da sequência com índice $n > n_0$ são valores aproximados de *x** com erro menor do que, ou igual a, ε.

O primeiro contato que um aluno do ensino médio tem com problemas de otimização ocorre no estudo de funções quadráticas. Uma função quadrática é uma função da forma

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ tal que } f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ sendo } a,\ b,\ c \in \mathbf{R} \text{ (com } a \neq 0),$$

cujo gráfico é uma parábola.

Na maioria dos problemas estudados, o máximo ou o mínimo da função é o vértice da parábola que é obtido por

$$\mathrm{V} = \left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

No entanto, é possível introduzir algumas técnicas numéricas elementares (acessíveis a alunos do ensino médio) de tal forma a obter, se não o ponto ótimo, um intervalo, de comprimento ε, tão pequeno quanto se queira, que contenha o valor com a precisão desejada.

Tais métodos são aplicados a funções de uma variável que apresenta apenas um extremo global num intervalo conhecido e finito: [a; b] (portanto, não somente para funções quadráticas). Apesar de o intervalo final ser determinado, não se sabe a localização exata do ponto ótimo e por isto tal intervalo recebe o nome de **intervalo de incerteza**. Este intervalo pode ser determinado a partir dos dados do problema que se deseja resolver. Em outros casos o gráfico da função poderá nos fornecer essa informação. Há diversos softwares que podem ser utilizados para se gerar um gráfico, como por exemplo, Winplot e Geogebra que são gratuitos.

As técnicas que abordadas neste trabalho usam as chamadas funções objetivo unimodais.

Definição 3.2. (RAO, 2009)
Uma função f é unimodal se

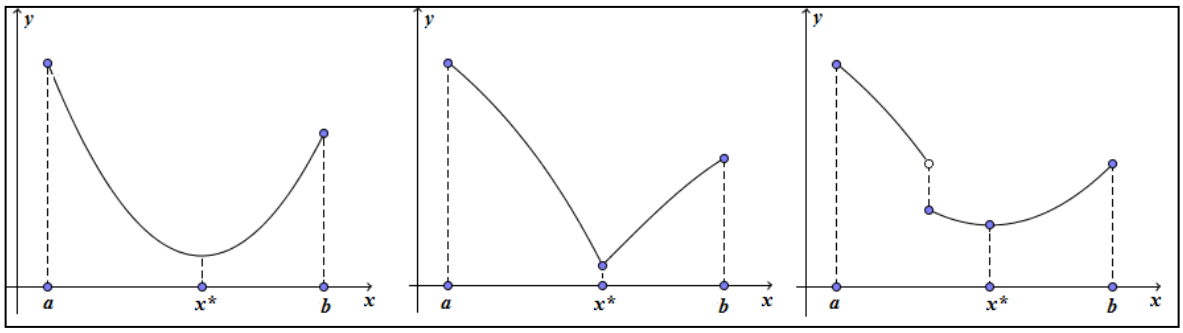
$$(i)\ x_1 < x_2 < x^* \quad \Rightarrow \quad f(x_2) < f(x_1),\ e$$
$$(ii)\ x_2 > x_1 > x^* \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1),$$

onde x é o ponto de mínimo.*

A definição de função unimodal utilizada, considera apenas funções de uma variável, já que é o tipo que será usado no texto.

A Fig.3.1 apresenta exemplos de gráficos de funções unimodais.

Figura 3.1 - Funções unimodais



Fonte: Adaptado de Rao (2009).

Veja que uma função unimodal pode ser descontínua e/ou não derivável.

Serão apresentadas a seguir, algumas técnicas elementares de otimização envolvendo funções unimodais. A sequência das técnicas apresentadas promove um processo de construção das duas principais técnicas deste trabalho: o Método de Fibonacci e a Seção Áurea.

3.2. MÉTODO DA BUSCA SIMULTÂNEA

A primeira técnica de busca a ser abordada é simplesmente calcular o valor da função em múltiplos pontos (n + 1 pontos) e reduzir o intervalo de incerteza inicial (que deve ser conhecido) até o comprimento desejado (menor que um valor ε estabelecido).

Sejam I = [a; b] o intervalo que contém o ponto ótimo da função, L_0 seu comprimento (L_0 = b – a) e ε a precisão desejada.

Particiona-se I em n partes, igualmente espaçadas e tal que

$$\frac{\mathrm{b}-\mathrm{a}}{n} = L_f \tag{3.1}$$

onde,

$$L_f \leq \varepsilon$$

é o comprimento do intervalo final desejado.

Em seguida, calcula-se o valor da função para cada um dos n + 1 pontos da partição

$$\mathrm{a},\ x_1 = \mathrm{a} + L_f,\ x_2 = \mathrm{a} + L_f, \ldots,\ x_{n-1} = \mathrm{a} + L_f,\ \mathrm{b}$$

Avaliam-se, então, quais os menores valores da função; o intervalo inicial se reduz então, ao intervalo cujos extremos são as abscissas correspondentes a tais valores da função.

Em geral, espera-se, dependendo da limitação do método, que o intervalo obtido, *L*, se reduza a:

$$L = L_f \leq \varepsilon.$$

Considera-se que a função é unimodal, porém, isto não garante que todos os valores das funções são diferentes. Pode-se ter algum x_i e x_j não consecutivos, com

$$i, j \in \{\mathrm{a}, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \mathrm{b}\}$$

tais que

$$f(x_i) = f(x_j) \leq f(x_k), \quad \forall x_k \in \{\mathrm{a}, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \mathrm{b}\}$$

e então

$$L = |x_i - x_j| > L_f.$$

Para que isto não ocorra basta alterar o valor de uma das extremidades para:

$$x_i + \delta \text{ ou } x_i - \delta$$

e avaliar novamente o valor da função para tais pontos.

Se x_i e x_j fossem consecutivos, então devido ao fato da função ser unimodal, então o ponto de mínimo pertenceria ao intervalo $[x_i; x_j]$, não havendo necessidade do procedimento acima.

O método de busca simultânea é de fácil implementação, mas no caso de planilhas eletrônicas ele se limita ao número de linhas (ou colunas) da planilha. Isto pode ser um problema dependendo da precisão requerida. Além disto, dependendo da função nem sempre o intervalo final irá conter uma aproximação do valor procurado. No caso da igualdade (mencionado acima), devido à função ser unimodal, o ponto de mínimo estará entre tais pontos, porém no caso de valores diferentes (da maneira como aqui foi concebido o método) não há garantias de que o lado correto é aquele que contém os dois menores valores. Neste caso, obtemos um erro maior do o estabelecido.

Para ilustrar o método, é apresentado em seguida um problema simples, que também é utilizado em todo o trabalho para fins de verificação do funcionamento dos métodos.

3.2.1. O PROBLEMA DA EXCURSÃO (LIMA, 2013)

Um ônibus de 42 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada

passageiro R$ 80,00 mais R$ 10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima?

(i) Modelagem do problema

Seja *x* o número de passageiros.

Então o número de lugares vagos é: $42 - x$.

Portanto, cada passageiro paga: $80 + 10.(42 - x)$

O valor arrecadado pela empresa, $f(x)$, será portanto este valor vezes o número de passageiros, ou seja,

$$f(x) = [80 + 10.(42 - x)].x = 500x - 10x^2$$

A função receita obtida é dependente do número de passageiros com domínio

$$D_f = \{0, 1, 2, \dots, 42\}$$

e contradomínio $\mathbf{R}$. Seu gráfico, portanto, são pontos da parábola

$$y = 500x - 10x^2, \qquad x \in D_f.$$

Apesar disto, considera-se a função com domínio real, e no final aplicam-se os ajustes necessários para corrigir qualquer distorção.

Assim, tem-se

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ tal que } f(x) = 500x - 10x^2,$$

que é uma função quadrática com concavidade para baixo e ponto de máximo entre as raízes $x = 0$ e $x = 50$.

(ii) Problema equivalente

Pretende-se, então, minimizar a função objetivo,

$$g: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ tal que } g(x) = -f(x) = -500x + 10x^2,$$
$$\text{sujeita a: } x^* \in [0;\ 42] \text{ e } \varepsilon = 0{,}1.$$

Como citado anteriormente, pode-se encontrar o ponto de máximo simplesmente invertendo o sinal da função.

(iii) Solução pelo Método das Buscas Simultâneas

Para a precisão requerida divide-se o intervalo inicial em

$$n = \frac{\mathrm{b} - \mathrm{a}}{\varepsilon} = \frac{42}{0{,}1} = 420 \text{ partes.}$$

Em seguida, calcula-se o valor da função para um dos 421 pontos: 0; 0,1; 0,2; ...; 42.

Os menores valores da função são

$$g(24{,}9) = g(25{,}1) = -6.249{,}9 \text{ e } g(25) = -6.250.$$

O intervalo que contém o valor procurado ou é [24,9; 25] ou [25; 25,1]. Alterando o valor 24,9 para 24,95, tem-se

$$g(24{,}95) = -6.249{,}975 < g(25{,}01).$$

Portanto, o intervalo final é [24,95; 25] e, portanto, $x^* \in [24{,}95;\ 25]$.

Como na realidade $x^* \in \{0, 1, 2, \ldots, 42\}$, então o valor procurado é x = 25. Assim, o número de passageiros que torna a rentabilidade da empresa máxima é 25.

Veja que para x = 24 e x = 26, tem-se:

$$g(24) = g(26) = -6.240,$$

que de fato são valores maiores que $g(25) = -6.250$.

(iv) Solução utilizando o software MICROSOFT EXCEL®/LIBREOFFICE CALC

Antes de apresentar a sequência de "comandos" para resolver o problema em questão, cabe uma observação sobre o uso das planilhas eletrônicas Microsoft EXCEL® e LibreOffice CALC. Um dos processos mais usados em planilhas eletrônicas como as citadas é a repetição de fórmulas.

Frequentemente é necessário repetir fórmulas em células adjacentes e a digitação pode ser cansativa e sujeita a erros. Um modo de acelerar o processo dessa repetição é o comando copiar (CTRL+C) e colar (CTRL+V). No entanto, se a quantidade de células for maior pode-se acelerar a repetição através da aba de preenchimento automático. Tal aba, representada por um sinal de mais ("+"), aparece quando se posiciona o ponteiro do mouse no canto inferior direito de uma célula (ou conjunto de células) selecionada.

Para copiar a fórmula de uma célula selecionada para outras adjacentes basta clicar com o botão esquerdo do mouse e, mantendo tal botão pressionado, arrastar até onde se deseja preencher. Por uma simplificação, é usado apenas os termos "selecionar e arrastar" para descrever este processo.

Como exemplo, considere que a célula C1 contém a fórmula

```
=SOMA(A1;B1)
```

que calcula a soma dos valores presentes nas células A1 e B1. Ao selecionar C1 e arrastar até C3, tem-se em C2 e C3 uma cópia da fórmula contida em C1. Um detalhe importante é que a fórmula copiada em C2 não irá se referir à soma de A1 e B1, mas sim de A2 e B2; a fórmula de C3 fornecerá a soma de A3 e B3 e assim por diante. Em outras palavras, quando se seleciona e arrasta uma célula com uma fórmula para a célula adjacente as referências passam a ser, também, das células adjacentes. Ao se arrastar para linhas, mudam-se as linhas das células de referência; ao se arrastar para colunas mudam-se as colunas de referência.

Para ter-se uma referência fixa digita-se antes e depois da letra que simboliza a célula, um sinal de cifrão (por exemplo `$A$1`).

Retornando para o problema em questão, para implementar o método da busca simultânea segue-se os seguintes passos:

1) Digita-se x na célula A1 e $g(x) = -f(x)$ *na célula B1 (este passo é opcional; apenas para identificar as colunas);*

2) Digita-se o valor do primeiro valor de x (zero) na célula A2 e o segundo (0,1) na célula A3;

3) Selecionam-se as células A2 e A3 e arrasta-se o conjunto até a célula A422. É nesta última célula que irá aparecer o último valor, 42.

4) Na célula B2 digita-se

```
=-500*A2+10*A2^2
```

Após apertar a tecla "ENTER" a célula indicará o valor da função para x igual ao valor da célula A2, no caso g(0);

5) Seleciona-se e arrasta-se a célula B2 até a célula B422. Tal procedimento calcula o valor da fórmula

$$=500*Ai-10*Ai\text{^}2$$

para cada i de 2 a 422. Tem-se assim, os valores da função, desde g(0) até g(42).

6) Procura-se, agora, na coluna B, quais são os menores valores da função. Os menores valores encontrados estão nas células B251 e B253 ($-6.249{,}9$*) e na célula B252 (*-6.250*).*

7) Como os valores das células B251 e B253 são iguais, então alteramos o valor da célula A251 para 24,95 e assim a célula B251 já atualizará o valor da função para g(24,95).

8) Observando novamente os valores, conclui-se que o valor procurado pertence ao intervalo [24,95; 25].

A tabela abaixo ilustra parte dos resultados encontrados (a centralização dos dados e as linhas de grade são opcionais).

Tabela 3.1 - Resultados do problema da excursão pelo Método das Buscas Simultâneas.

	A	B	C
1	x	g(x) = -f(x)	
2	0	0	
3	0,1	-49,9	
4	0,2	-99,6	
5	0,3	-149,1	
6	0,4	-198,4	
7	0,5	-247,5	
8	0,6	-296,4	
9	0,7	-345,1	
	⋮	⋮	
248	24,6	-6248,4	
249	24,7	-6249,1	
250	24,8	-6249,6	
251	24,95	-6249,975	
252	25	-6250	
253	25,1	-6249,9	
254	25,2	-6249,6	
255	25,3	-6249,1	
256	25,4	-6248,4	
	⋮	⋮	
499	49,7	-149,1	
500	49,8	-99,6	
501	49,9	-49,9	
502	50	0	

Fonte: Elaborado pelo Autor.

A escolha desse exemplo, com função quadrática, é proposital, para que se perceba que nem sempre é preferível usar algum método numérico em detrimento do conteúdo visto no ensino médio. No caso é bem mais simples achar o ponto de máximo pelo vértice da parábola:

$$x^* = -\frac{b}{2a} = -\frac{500}{2.(-10)} = 25 \text{ passageiros}$$

Um dos problemas do método das buscas simultâneas é que a visualização da planilha eletrônica se torna mais difícil à medida que o número de pontos a serem avaliados aumenta. Aqui, pode-se aplicar três comandos (ou funções) que facilitam a análise.

O primeiro trata-se da função MENOR que retorna o k-ésimo menor valor de um conjunto de dados. A função pode ser inserida via aba de fórmulas ou diretamente por

```
=MENOR(matriz, k)
```

Por exemplo,

```
=MENOR(B2:B422;1),    =MENOR(B2:B422;2)    e    =MENOR(B2:B422;3)
```

fornecem, respectivamente, os três menores valores da coluna B. Valores repetidos são computados como se fossem diferentes. Assim, se houverem dois valores repetidos, eles serão indicados pela ordem como o primeiro e segundo menor número.

A segunda função, `CORRESP`, retorna a posição relativa de um item em uma matriz que corresponde a um valor específico em uma ordem específica. Como toda função, ela pode ser inserida via aba de fórmulas ou diretamente na barra de fórmulas, seguindo a sintaxe:

```
=CORRESP(valor procurado; matriz procurada;[tipo de correspondência])
```

Por exemplo, com a fórmula

```
=CORRESP(−6.250;B2:B422;0)
```

obtém-se o valor 251, que significa que o valor -6.250 está posicionado na 251ª linha da matriz dos dados (B2 a B422). Como os dados começam a partir da linha 2, então somamos 1 para efetuar a correção e obtermos a linha exata. O tipo de correspondência (zero) significa que a busca deve ser exata.

No caso estudado, supondo que não se fez nenhuma análise nos dados da planilha (o que quer dizer que o passo *7* também não foi executado), é necessário descobrir quais são os "três menores" valores da função. O motivo de ser três e não dois, é que se pode ter resultados repetidos, o que ocorre no problema em questão. Assim, combinando as duas funções (MENOR e CORRESP), digita-se, respectivamente, nas células D2, D3 e D4, as fórmulas:

```
=CORRESP(MENOR(B2:B422;1);B2:422;0)+1
=CORRESP(MENOR(B2:B422;2);B2:422;0)+1
=CORRESP(MENOR(B2:B422;3);B2:422;0)+1
```

Os resultados, 252, 251 e 253 indicam, respectivamente, em quais linhas se encontram os menores valores da função objetivo.

É claro que se pode aprimorar ainda mais a planilha. Via de regra, a medida que se acrescenta "inteligência" às planilhas, recursos mais complexos são necessários.

3.3. MÉTODO DA BISSEÇÃO E MÉTODO DA DICOTOMIA

> O método de pesquisa exaustivo é um método de pesquisa simultânea na qual todas as experiências são conduzidas antes que qualquer julgamento seja feito em relação à localização do ponto ótimo. O método de pesquisa dicotômica, bem como os métodos de Fibonacci e da seção áurea discutidos nas próximas seções, são métodos de busca sequenciais em que o resultado de qualquer experiência influencia o local do subsequente experimento. (RAO, 2009, p. 257)

O método anterior apresenta algumas dificuldades, como o número excessivo de cálculos para uma precisão maior.

Pode-se, então, avaliar a função em um número menor de pontos e daí efetuar uma análise dos resultados obtidos e chegar a uma conclusão, ou reutilizar algum dado para se chegar ao resultado procurado. **Métodos iterativos** serão utilizados para este fim. Em tais métodos uma sequência de passos, chamada **iteração**, é efetuada recursivamente.

3.3.1. MÉTODO DA BISSEÇÃO

Quando se procura as raízes de uma função, um dos métodos mais simples que permite obter uma aproximação da raiz de uma equação é o chamado método da bisseção. O método consiste em calcular o ponto médio do intervalo que contém a raiz da equação e, em seguida, comparar o sinal do valor dessa função neste ponto com os sinais dos valores da função nas extremidades do intervalo. Com base nessa comparação concluí-se que a raiz está do lado direito ou esquerdo do ponto médio do intervalo considerado. O intervalo que contém a raiz é reduzido, então, pela metade.

No caso da otimização, o método de reduzir o intervalo de incerteza pela metade também pode ser usado para determinar o ponto de mínimo de uma função definida em um intervalo fechado. Porém, o método da bisseção para otimização é distinto daquele aplicado para obtenção de raízes de equações.

O caso das raízes tem como fundo o teorema do valor intermediário (teorema 2.4). Para determinar uma raiz da função, considera-se este teorema com o caso particular onde $d = 0$. Assim, se o valor de uma função passa de positivo para negativo (ou o contrário) num intervalo fechado, tem-se neste intervalo pelo menos uma raiz da função.

No caso dos problemas de otimização o teorema do valor intermediário não ajuda a determinar o ponto de mínimo. Uma solução encontrada é avaliar a derivada no ponto médio

do intervalo e considerar que além de contínua a função deva ser unimodal e derivável no ponto em questão. Pelo sinal da derivada no ponto médio é possível saber, então, se em tal ponto a função é crescente ou decrescente e decidir qual lado considerar e qual descartar. Ainda, se a derivada for zero, conclui-se que tal ponto é o ponto procurado.

No presente trabalho, procurou-se usar apenas técnicas que envolvam operações elementares típicas do ensino médio, e, portanto, o uso de derivadas foi evitado. Apesar de tal conteúdo (derivadas) ser típico do terceiro ano do ensino médio, são raras as escolas em que tal tópico é abordado.

Outra solução é usar, além do ponto médio x_m, mais dois pontos, x_1 e x_2, pontos médios, respectivamente, dos intervalos [a; x_m] e [x_m; b]. Calcula-se, então, o valor da função nesses três pontos e decide-se em qual das metades estará o ponto de mínimo. O critério é o seguinte (RAO, 2009):

- Se $f(x_1) > f(x_m) \geq f(x_2)$, então $x^* \in [x_m; \text{b}]$;
- Se $f(x_1) \leq f(x_m) < f(x_2)$, então $x^* \in [\text{a}; x_m]$;
- Se $f(x_1) > f(x_m)$ e $f(x_2) > f(x_m)$, então $x^* \in [x_1; x_2]$.

Tal técnica também é chamada de método da bisseção. É possível notar que a cada iteração o intervalo de incerteza reduz-se pela metade.

Como o intervalo de incerteza se reduz à metade em cada iteração, então o comprimento do intervalo de incerteza ao final da n-ésima iteração, L_n, é dado por

$$L_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n L_0 \tag{3.2}$$

onde L_0 é comprimento do intervalo de incerteza inicial.

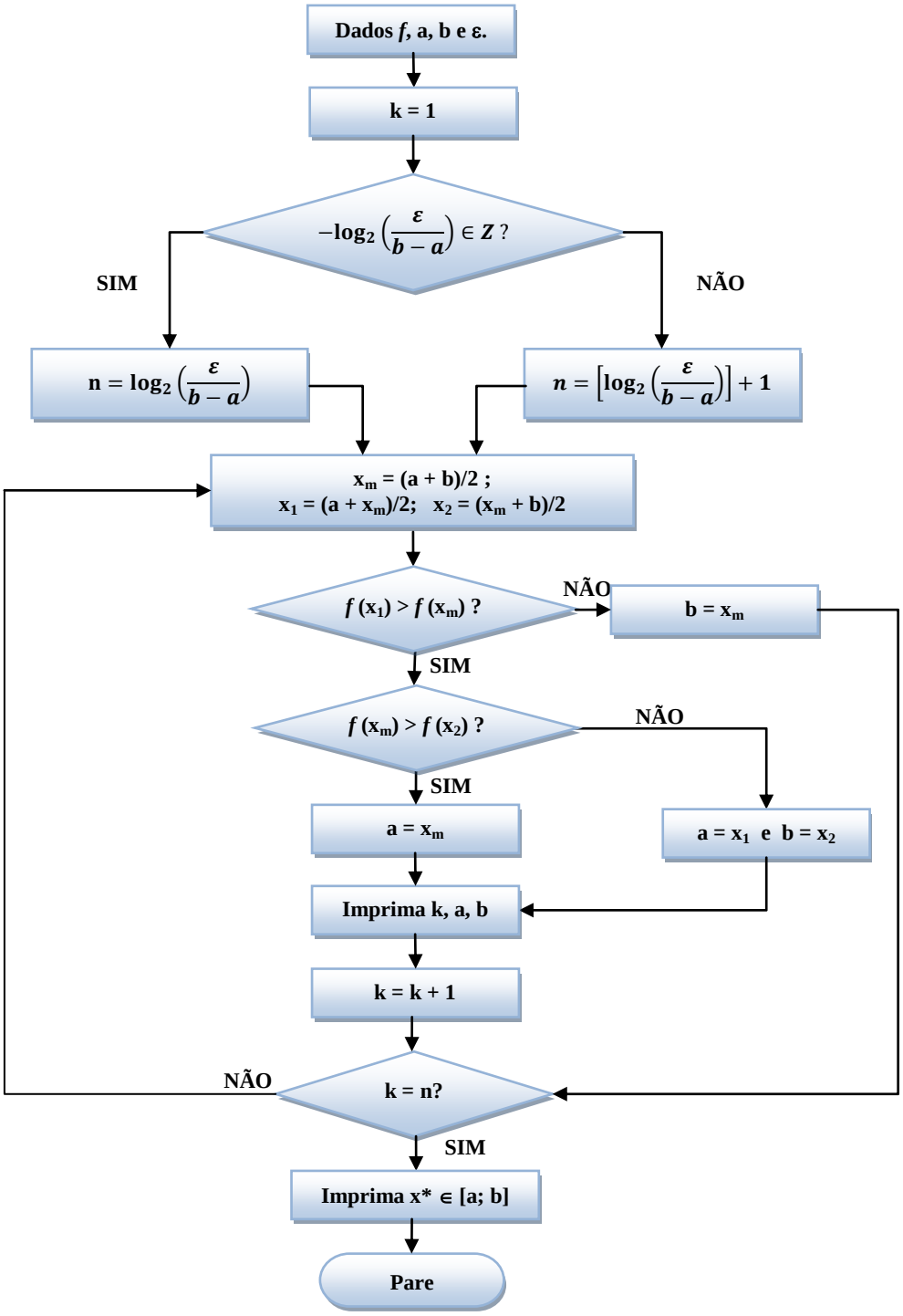
Dado, uma precisão ε, podemos determinar qual deve ser o número de iterações.

$$L_n \leq \varepsilon \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{2}\right)^n L_0 \leq \varepsilon \;\Rightarrow\; n \geq -\log_2\left(\frac{\varepsilon}{L_0}\right) \tag{3.3}$$

3.3.1.1. ALGORITMO DO MÉTODO DA BISSEÇÃO

Apresenta-se a seguir, na Fig. 3.2, um fluxograma relacionado ao algoritmo para implementação do método da bissecção.

Figura 3.2 - Fluxograma do Método da Bisseção



Fonte: Elaborado pelo Autor.

3.3.1.2. EXEMPLO: O PROBLEMA DA EXCURSÃO.

Como exemplo, será novamente utilizado o problema apresentado na seção anterior. Deseja-se minimizar a função objetivo,

$$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \text{tal que } g(x) = -f(x) = -500x + 10x^2,$$
$$\text{sujeita a: } x^* \in [0;\ 42].$$

A precisão escolhida é $\varepsilon = 0{,}1$.

- **SOLUÇÃO**

Inicialmente, calcula-se o número de iterações necessárias para atingir $\varepsilon = 0{,}1$. Para isto, aplica-se a desigualdade (3.3).

Tal desigualdade requer o conhecimento de L_0 e ε.

$$L_0 = \mathrm{b} - \mathrm{a},$$

onde a e b são as extremidades do intervalo de incerteza inicial: $[0;\ 42]$. Assim,

$$\mathrm{a} = 0 \ \text{ e } \ \mathrm{b} = 42,$$

e portanto,

$$L_0 = \mathrm{b} - \mathrm{a} = 42.$$

Para um precisão $\varepsilon = 0{,}01$, tem-se:

$$n \geq -\log_2\left(\frac{\varepsilon}{L_0}\right) = \log_2\left(\frac{0{,}1}{42}\right) \cong 8{,}71 \ \Rightarrow \ n = 9 \text{ iterações.}$$

Assim, o método da bisseção necessita de 9 iterações para atingir a precisão desejada.

A seguir são mostrados os cálculos de cada iteração. O processo consiste em determinar um intervalo cada vez mais estreito que contém o ponto de mínimo procurado, até que a precisão desejada seja atingida.

A justificativa para tal procedimento é que as extremidades inferiores e superiores de tais intervalos formam uma sequência numérica monótona, respectivamente, crescente e decrescente. Além disto, tais sequências são limitadas e, portanto, de acordo com o teorema 2.2 são convergentes. O limite de tais sequências é o ponto de mínimo procurado.

- **Iteração 1**

As extremidade do intervalo inicial da iteração 1, são:

$$\mathrm{a} = 0, \quad \mathrm{b} = 42.$$

O ponto médio de tal intervalo é:

$$x_m = \frac{\mathrm{a} + \mathrm{b}}{2} = \frac{0 + 42}{2} = 21.$$

O ponto médio, x_m, divide o intervalo [a; b] em dois subintervalos, [a; x_m] e [x_m; b], cujos pontos médios são, respectivamente,

$$x_1 = \frac{\mathrm{a} + x_m}{2} = \frac{0 + 21}{2} = 10{,}5;$$

$$x_2 = \frac{x_m + \mathrm{b}}{2} = \frac{21 + 42}{2} = 31{,}5.$$

Os valores da função objetivo para tais pontos são:

$$g(x_1) = g(10{,}5) = -500\,.\,10{,}5 + 10\,.\,10{,}5^2 = -4147{,}5;$$
$$g(x_m) = g(21) = -500\,.\,21 + 10\,.\,21^2 = -6090;$$
$$g(x_2) = g(31{,}5) = -500\,.\,31{,}5 + 10\,.\,31{,}5^2 = -5827{,}5.$$

Como,

$$g(x_1) > g(x_m) \text{ e } g(x_2) > g(x_m),$$

então, conclui-se que:

$$x^* \in [x_1; x_2] = [10{,}5;\ 31{,}5].$$

- **Iteração 2**

As extremidades do novo intervalo de incerteza, obtido ao final da primeira iteração, será o intervalo inicial considerado na segunda iteração. Assim,

$$\mathrm{a} = 10{,}5;\ \mathrm{b} = 31{,}5$$

Com isso, os novos valores de x_m, x_1 e x_2 são

$$x_m = \frac{\mathrm{a} + \mathrm{b}}{2} = \frac{10{,}5 + 31{,}5}{2} = 21.$$

$$x_1 = \frac{\mathrm{a} + x_m}{2} = \frac{10{,}5 + 21}{2} = 15{,}75;$$

$$x_2 = \frac{x_m + \mathrm{b}}{2} = \frac{21 + 31{,}5}{2} = 26{,}25.$$

Os valores da função objetivo para tais pontos são:

$$g(x_1) = g(15{,}75) = -500\,.\,15{,}75 + 10\,.\,15{,}75^2 = -5394{,}375;$$
$$g(x_m) = g(21) = -500\,.\,21 + 10\,.\,21^2 = -6090;$$
$$g(x_2) = g(26{,}25) = -500\,.\,26{,}25 + 10\,.\,26{,}25^2 = -6234{,}375.$$

Como,

$$g(x_1) > g(x_m) \text{ e } g(x_2) > g(x_m),$$

então, conclui-se que:

$$x^* \in [x_1; x_2] = [15{,}75;\ 26{,}25].$$

Observa-se que um dos pontos da iteração anterior (no caso x_m) é sempre reaproveitado na iteração seguinte. Assim, não era necessário calcular novamente x_m e $g(x_m)$.

- **Resultados de todas as iterações**

  A Tab. 3.2 mostra os resultados de todas as iterações.

Tabela 3.2 - Resultados do problema da excursão pelo Método da Bisseção.

Iteração	**a**	**b**	x_m	x_1	x_2	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$g(x_m)$	$\mathbf{a}_{novo}$	$\mathbf{b}_{novo}$
1	0	42	21	10,5	31,5	-4147,5	-5827,5	-6090	10,5	31,5
2	10,5	31,5	21	15,75	26,25	-5394,375	-6234,375	-6090	21	31,5
3	21	31,5	26,25	23,625	28,875	-6231,0938	-6099,8438	-6234,375	23,625	28,875
4	23,625	28,875	26,25	24,9375	27,5625	-6249,9609	-6184,3359	-6234,375	23,625	26,25
5	23,625	26,25	24,9375	24,2813	25,5938	-6244,8347	-6246,474	-6249,9609	24,2813	25,5938
6	24,2813	25,5938	24,9376	24,6095	25,2657	-6248,4751	-6249,294	-6249,9611	24,6095	25,2657
7	24,6095	25,2657	24,9376	24,7736	25,1017	-6249,4874	-6249,8966	-6249,9611	24,7736	25,1017
8	24,7736	25,1017	24,9377	24,8557	25,0197	-6249,7918	-6249,9961	-6249,9612	24,9377	25,1017
9	24,9377	25,1017	25,0197	24,9787	25,0607	-6249,9955	-6249,9632	-6249,9961	24,9787	25,0607

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Pelos resultados, conclui-se que:

$$x^* \in [24{,}9787;\ 25{,}0607].$$

Como $x^* \in \{0, 1, 2, \ldots, 42\}$, então o valor procurado é x = 25. Assim, número de passageiros que torna a rentabilidade da empresa máxima é 25.

(v) Solução pelo método da bisseção via MICROSOFT EXCEL® / LIBREOFFICE CALC

As iterações feitas anteriormente, de modo manual, podem ser feitas automaticamente com a ajuda de uma planilha eletrônica. Tal planilha pode ser feita pelo Microsoft Excel®, software do pacote Microsoft Office®, ou pelo Calc, software do pacote LibreOffice.

A planilha é montada da seguinte maneira:

1) Na linha 1 (colunas de A a I) identifica-se os itens que fazem parte da tabela: k (iteração), a, b, x_m, x_1, x_2, g(x_1), g(x_2) e g(x_m).

2) Nas células A2 e A3 digitam-se os primeiros números de iterações: 1 e 2; Em seguida selecionam-se estas duas células e arrasta-se até a linha desejada (o número de iterações desejado).

3) Nas células B2 e C2 digita-se, respectivamente,

```
0  e  42
```

que são as extremidades iniciais do intervalo de confiança.

4) Nas células D2, E2 e F2 digita-se, respectivamente,

```
=(B2+C2)/2  ,  =(D2+B2)/2 e  =(D2+C2)/2
```

que são os valores de x_m, x_1 e x_2.

5) Nas células G2, H2 e I digita-se, respectivamente,

```
=-500*E2+10*E2^2 , =-500*F2+10*F2^2  e  =-500*D2+10*D2^2
```

que são os valores da função para os valores em E2, F2 e D2.

6) Selecionam-se as células D2, E2, F2, G2, H2 e I2 e arrasta-se a aba de preenchimento automático até a linha da iteração desejada. Assim, estes passos são repetidos em todas as iterações.

7) Nas células B2 e C2 digita-se o condicional que determinará qual das partes do intervalo anterior será considerada ($[x_m; b]$, $[x_1;\ x_2]$ ou $[a;\ x_m]$).

Na célula B2:

```
=SE(E(G2>I2;I2>H2);D2;SE(E(H2>I2;G2>I2);E2;B2))
```

Na célula C2:

```
=SE(E(G2>I2;I2>H2);C2;SE(E(H2>I2;G2>I2);F2;D2))
```

8) Selecionam-se as células B2 e C2 e arrasta-se o sinal positivo, da aba de preenchimento automático, até a linha posterior a da iteração desejada. O motivo é que na linha k+1 é que aparece o intervalo de incerteza resultante da iteração k.

No oitavo passo registra-se o novo intervalo de incerteza na próxima linha, mas a planilha pode ser feita para mostrar o novo intervalo na mesma linha como feito na Tab. 3.2.

A Tab. 3.3 mostra o resultado dos passos descritos acima.

Tabela 3.3 - Resultados da planilha do problema da excursão pelo Método da Bisseção.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	k (Iteração)	a	b	x_m	x_1	x_2	g(x_1)	g(x_2)	g(x_m)
2	1	0	42	21	10,5	31,5	-4147,5	-5827,5	-6090
3	2	10,5	31,5	21	15,75	26,25	-5394,375	-6234,375	-6090
4	3	21	31,5	26,25	23,625	28,875	-6231,09375	-6099,84375	-6234,375
5	4	23,625	28,875	26,25	24,9375	27,5625	-6249,960938	-6184,335938	-6234,375
6	5	23,625	26,25	24,9375	24,28125	25,59375	-6244,833984	-6246,474609	-6249,960938
7	6	24,28125	25,59375	24,9375	24,609375	25,265625	-6248,474121	-6249,294434	-6249,960938
8	7	24,609375	25,265625	24,9375	24,7734375	25,1015625	-6249,486694	-6249,896851	-6249,960938
9	8	24,7734375	25,1015625	24,9375	24,85546875	25,01953125	-6249,791107	-6249,996185	-6249,960938
10	9	24,9375	25,1015625	25,01953125	24,97851563	25,06054688	-6249,995384	-6249,963341	-6249,996185
11		24,97851563	25,06054688						

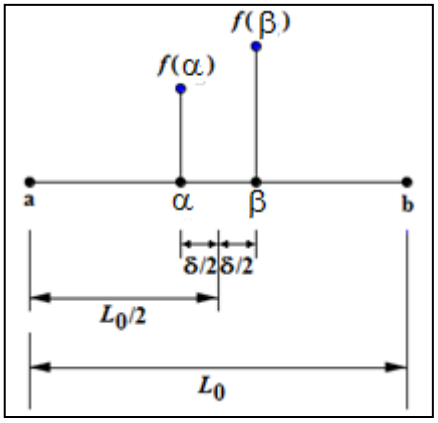
Fonte: Elaborado pelo Autor.

3.3.2. MÉTODO DA DICOTOMIA

Uma solução parecida com o método da bisseção, mas que avalia a função em dois pontos, é o método da dicotomia.

No método da dicotomia escolhem-se dois pontos do interior do intervalo de incerteza (simétricos em relação ao ponto médio do intervalo de incerteza): um antes do ponto médio (α) e outro após o ponto médio (β).

Figura 3.3 - Intervalos de incerteza.



Fonte: Adaptado de Chong e Zak (2013, p. 258).

A comparação dos valores da função objetivo nos pontos α e β, aliado ao fato da função ser unimodal, permite concluir em qual região está o ponto ótimo.

A proposição seguinte é bastante interessante no que diz respeito a este fato:

Proposição 3.1. (CHONG; ZAK, 2013)

Sejam $f: [a; b] \rightarrow \mathbf{R}$ *uma função unimodal com ponto de mínimo* x^* *e* α *e* β *dois pontos quaisquer, com* $\alpha < \beta$, *de* $[a; b]$.

(i) *Se* $f(\alpha) \geq f(\beta)$, *então* $x^* \in [\alpha; b]$;

(ii) *Se* $f(\alpha) < f(\beta)$, *então* $x^* \in [a; \beta]$.

Demonstração.

A seguir demonstra-se a afirmação (i).

Suponha, por absurdo, que $f(\alpha) \geq f(\beta)$, mas com $x^* \in [a; \alpha)$, isto é, $a \leq x^* < \alpha$.

Como $\alpha < \beta$, então $x^* < \alpha < \beta$. Mas *f* é unimodal com um ponto de mínimo, ou seja, *f* é estritamente decrescente para todo $x \in [a; x^*]$ e estritamente crescente para todo $x \in [x^*; b]$. Logo, em $x^* < \alpha < \beta$ a *f* é crescente e, portanto $f(x^*) < f(\alpha) < f(\beta)$, o que é uma contradição visto que por hipótese $f(\alpha) \geq f(\beta)$.

Assim, se $f(\alpha) \geq f(\beta)$, então $x^* \in [\alpha; b]$.

De maneira análoga demonstra-se (ii).

□

A cada iteração *k* (1, 2, …, n), os valores de α e β (α_k e β_k) são calculados como mostrado a seguir:

$$\alpha_k = \frac{a_k + b_k}{2} - \frac{\delta}{2} \tag{3.4}$$

e

$$\beta_k = \frac{a_k + b_k}{2} + \frac{\delta}{2} \tag{3.5}$$

onde a_k e b_k são as extremidades do intervalo inicial na iteração k. δ deve ser escolhido de forma que o comprimento do intervalo final seja menor, ou igual, a ε. Então $\delta < \varepsilon$.

As expressões (3.4) e (3.5) simplesmente informam que os pontos estão a uma distância $\delta/2$, antes e depois, do ponto médio.

Quanto ao comprimento do intervalo de incerteza, pode-se observar que ao final de cada iteração o intervalo de incerteza se reduz a metade do comprimento considerado no início da iteração, adicionado a $\delta/2$. Matematicamente, se L_k e L_{k+1} são, respectivamente, o comprimento do intervalo inicial e final da iteração *k*+1, então:

$$L_{k+1} = \frac{L_k}{2} + \frac{\delta}{2} \tag{3.6}$$

Escrevendo a expressão (3.6) em função do comprimento inicial do intervalo de incerteza (L_0), tem-se a seguinte sequência:

$$L_1 = \frac{L_0}{2} + \frac{\delta}{2}$$

$$L_2 = \frac{1}{2}L_1 + \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{L_0}{2} + \frac{\delta}{2}\right) + \frac{\delta}{2} = \frac{L_0}{2^2} + \frac{\delta}{2^2} + \frac{\delta}{2} = \frac{L_0}{2^2} + \delta\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)$$

$$L_3 = \frac{1}{2}L_2 + \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{L_0}{2^2} + \delta\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\right) + \frac{\delta}{2} = \frac{L_0}{2^3} + \delta\left(1 - \frac{1}{2^3}\right)$$

…

$$L_n = \frac{1}{2}L_{n-1} + \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{L_0}{2^{n-1}} + \delta\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right) + \frac{\delta}{2} = \frac{L_0}{2^n} + \delta\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Como o comprimento final, L_n, deve ser menor, ou igual, à precisão ε, então:

$$\frac{L_0}{2^n} + \delta\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leq \varepsilon \tag{3.7}$$

Isolando *n*, tem-se:

$$\frac{L_0}{2^n} + \delta - \frac{\delta}{2^n} \leq \varepsilon \;\Rightarrow\; \frac{L_0}{2^n} - \frac{\delta}{2^n} \leq \varepsilon - \delta \;\Rightarrow\; \frac{1}{2^n}(L_0 - \delta) \leq \varepsilon - \delta \;\Rightarrow\; 2^n \geq \frac{L_0 - \delta}{\varepsilon - \delta}.$$

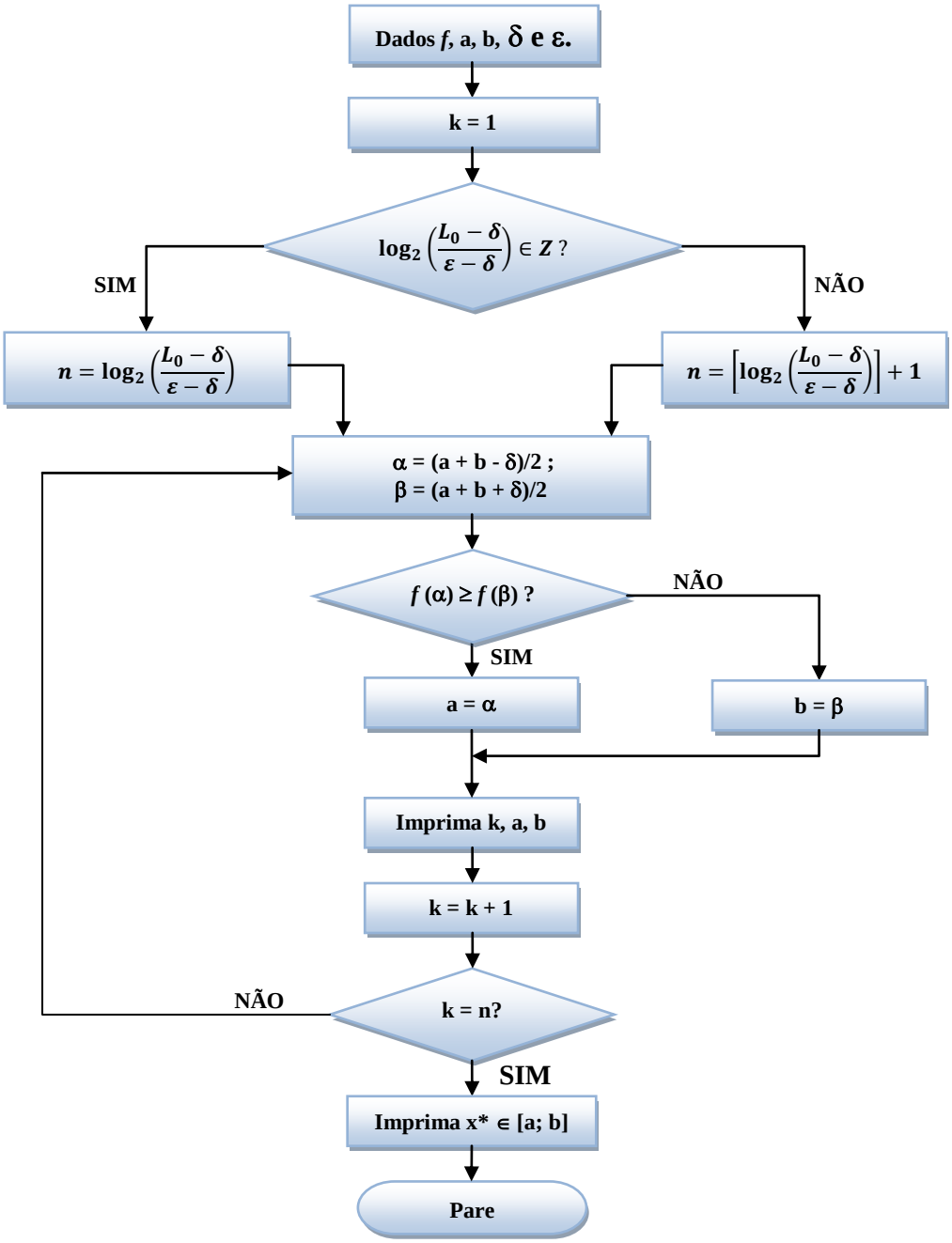
Assim, o número de iterações necessárias para atingir a precisão desejada é dada por:

$$n \geq \log_2\left(\frac{L_0 - \delta}{\varepsilon - \delta}\right) \tag{3.8}$$

3.3.2.1. ALGORITMO DO MÉTODO DA DICOTOMIA

Apresenta-se a seguir, na Fig. 3.4, um fluxograma relacionado ao algoritmo para implementação do método da Dicotomia.

Figura 3.4 - Fluxograma do Método da Dicotomia



Fonte: Elaborado pelo Autor.

O algoritmo acima mostra o intervalo de incerteza ao final de cada iteração.

Ao resolver manualmente um problema, é comum escrever o índice de cada iteração em a, b, α e β para um melhor controle e organização. Já computacionalmente, dependendo do ambiente ou da linguagem de programação, não há necessidade.

3.3.2.2. EXEMPLO: O PROBLEMA DA EXCURSÃO

Como exemplo, será novamente utilizado o problema apresentado na seção anterior. Deseja-se minimizar a função objetivo,

$$g\colon \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \text{tal que } g(x) = -f(x) = -500x + 10x^2,$$
$$\text{sujeita a: } x^* \in [0;\ 42] \text{ e } \varepsilon = 0{,}1.$$

- **SOLUÇÃO**

Inicialmente, calcula-se o número de iterações necessárias para atingir $\varepsilon = 0{,}1$. Para isto, aplica-se a desigualdade (3.8).

Tal desigualdade requer o conhecimento de L_0, ε e δ.

$$L_0 = \mathrm{b} - \mathrm{a},$$

onde a e b são as extremidades do intervalo de incerteza inicial: $[0;\ 42]$. Assim,

$$\mathrm{a} = 0 \text{ e } \mathrm{b} = 42,$$

e portanto,

$$L_0 = \mathrm{b} - \mathrm{a} = 42.$$

A precisão é conhecida e vale $\varepsilon = 0{,}01$; agora, deve-se escolher um valor para δ. Será usado o valor 0,01.

Substituindo L_0, ε e δ em 3.8, obtém-se

$$n \geq \log_2\left(\frac{L_0 - \delta}{\varepsilon - \delta}\right) = \log_2\left(\frac{42 - 0{,}01}{0{,}1 - 0{,}01}\right) \cong 8{,}87 \ \Rightarrow \ n = 9 \text{ iterações.}$$

Assim, o método da dicotomia necessita de 9 iterações para atingir a precisão desejada.

A seguir são mostrados os cálculos de cada iteração.

- **Iteração 1**

As extremidade do intervalo inicial da iteração 1, são:

$$\mathrm{a}_1 = \mathrm{a} = 0, \quad \mathrm{b}_1 = \mathrm{b} = 42.$$

Utilizando as equações 3.4 e 3.5, chega-se a:

$$\alpha_1 = \frac{\mathrm{a}_1 + \mathrm{b}_1 - \delta}{2} = \frac{0 + 42 - 0{,}01}{2} = 20{,}995;$$

$$\beta_1 = \frac{a_1 + b_1 + \delta}{2} = \frac{0 + 42 + 0{,}01}{2} = 21{,}005.$$

Os valores da função objetivo para tais pontos são:

$$g(\alpha_1) = g(20{,}995) = -500\,.\,20{,}995 + 10\,.\,20{,}995^2 \cong -6089{,}5998;$$

$$g(\beta_1) = g(21{,}005) = -500\,.\,21{,}005 + 10\,.\,21{,}005^2 \cong -6090{,}3998.$$

Como,

$$g(\alpha_1) \geq g(\beta_1),$$

então, pela proposição 3.1, conclui-se que:

$$x^* \in [\alpha_1; b_1] = [20{,}995;\ 42].$$

- **Iteração 2**

As extremidades do novo intervalo de incerteza, obtido ao final da primeira iteração, será o intervalo inicial considerado na segunda iteração. Assim,

$$a_2 = \alpha_1 = 20{,}995 \quad , \quad b_2 = b_1 = 42$$

Utilizando as equações 3.4 e 3.5, chega-se a:

$$\alpha_2 = \frac{a_2 + b_2 - \delta}{2} = \frac{20{,}995 + 42 - 0{,}01}{2} = 31{,}4925$$

$$\beta_2 = \frac{a_2 + b_2 + \delta}{2} = \frac{20{,}995 + 42 + 0{,}01}{2} = 31{,}5025$$

Os valores da função objetivo para tais pontos são:

$$g(\alpha_2) = g(31{,}4925) = -500\,.\,31{,}4925 + 10\,.\,31{,}4925^2 \cong -5828{,}4744$$

$$g(\beta_2) = g(31{,}5025) = -500\,.\,31{,}5025 + 10\,.\,31{,}5025^2 \cong -5827{,}1749$$

Como,

$$g(\alpha_2) < g(\beta_2),$$

então, pela proposição 3.1, conclui-se que:

$$x^* \in [a_2; \beta_2] = [20{,}995;\ 31{,}5025].$$

- **Resultados de todas as iterações**

A tabela seguinte mostra os resultados de cada iteração. Nos cálculos foram usados arredondamentos com quatro casas decimais.

Tabela 3.4 - Resultados do problema da excursão pelo Método da Dicotomia.

k (Iteração)	$\mathbf{a_k}$	$\mathbf{b_k}$	α_k	β_k	$g(\alpha_k)$	$g(\beta_k)$	$\mathbf{a_{k\ novo}}$	$\mathbf{b_{k\ novo}}$
1	0	42	20,995	21,005	-6089,5998	-6090,3998	20,995	42
2	20,995	42	31,4925	31,5025	-5828,4744	-5827,1749	20,995	31,5025
3	20,995	31,5025	26,2438	26,2538	-6234,5296	-6234,2799	20,995	26,2538
4	20,995	26,2538	23,6194	23,6294	-6230,9394	-6231,2146	23,6194	26,2538
5	23,6194	26,2538	24,9316	24,9416	-6249,9532	-6249,9659	24,9316	26,2538
6	24,9316	26,2538	25,5877	25,5977	-6246,5461	-6246,4275	24,9316	25,5977
7	24,9316	25,5977	25,2597	25,2697	-6249,3256	-6249,2726	24,9316	25,2697
8	24,9316	25,2697	25,0957	25,1057	-6249,9084	-6249,8883	24,9316	25,1057
9	24,9316	25,1057	25,0137	25,0237	-6249,9981	-6249,9944	24,9316	25,0237

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Pelos resultados, conclui-se que:

$$x^* \in [24{,}9316;\ 25{,}0237].$$

Como $x^* \in \{0, 1, 2, \dots, 42\}$, então o valor procurado é $x = 25$. Assim, número de passageiros que torna a rentabilidade da empresa máxima é 25.

- SOLUÇÃO VIA MICROSOFT EXCEL®/LIBREOFFICE CALC

Tabela 3.5 – Resultados da planilha do problema da excursão pelo Método da Dicotomia.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	ε =	0,1	δ =	0,01	a =	0	b =	42
3								
4								
5	k (Iteraçã	a_k	b_k	alpha_k	beta_k	g(alpha_k)	g(beta_k)	erro_k
6	1	0,00000000	42,00000000	20,99500000	21,00500000	-6089,59975000	-6090,39975000	21,00500000
7	2	20,99500000	42,00000000	31,49250000	31,50250000	-5828,47443750	-5827,17493750	10,50750000
8	3	20,99500000	31,50250000	26,24375000	26,25375000	-6234,53085938	-6234,28110938	5,25875000
9	4	20,99500000	26,25375000	23,61937500	23,62937500	-6230,93874609	-6231,21387109	2,63437500
10	5	23,61937500	26,25375000	24,93156250	24,94156250	-6249,95316309	-6249,96585059	1,32218750
11	6	24,93156250	26,25375000	25,58765625	25,59765625	-6246,54660132	-6246,42807007	0,66609375
12	7	24,93156250	25,59765625	25,25960938	25,26960938	-6249,32602972	-6249,27310785	0,33804687
13	8	24,93156250	25,26960938	25,09558594	25,10558594	-6249,90863329	-6249,88851610	0,17402344
14	9	24,93156250	25,10558594	25,01357422	25,02357422	-6249,99815741	-6249,99444256	0,09201172
15		24,93156250	25,02357422					

Fonte: Elaborado pelo Autor.

A planilha é montada da seguinte maneira:

1) Nas células A2, C2, E2 e G2 digita-se, respectivamente ε, δ, a e b;

2) Seleciona-se as células B2, D2, F2 e H2 e em escolhe-se a cor de fundo desejada (no caso amarela). Tal opção é encontrada clicando-se o botão direito do mouse e selecionando-se a opção "Formatar células..." e "Preenchimento".
Os passso 1 e 2 identificam e reservam os locais (B2, D2, F2 e H2) para os dados do problema.

3) Na linha 5 (colunas de A a H) identifica-se os itens que fazem parte da tabela: k (iteração), a_k, b_k, alpha_k, beta_k, g(alpha_k), g(beta_k) e erro_k (este último opcional).

4) Nas células A6 e A7 digitam-se os primeiros números de iterações: 1 e 2; Em seguida selecionam-se estas duas células e arrasta-se até a linha desejada (o número de iterações desejado).

5) Nas células B6 e C6 digita-se, respectivamente,

```
=F2  e  =H2
```

que são as extremidades iniciais do intervalo de confiança.

6) Nas células D6 e E6 digita-se, respectivamente,

```
=(B6+C6-$D$2)/2  e  =(B6+C6+$D$2)/2
```

que são os valores de α_k e β_k.

7) Nas células F6 e G6 digita-se, respectivamente,

```
=-500*D6+10*D6^2  e  =-500*E6+10*E6^2
```

que são os valores da função para os valores em D6 e E6.

8) Na célula H6 digita-se a diferença entre as extremidades final e inicial do novo intervalo de incerteza por meio da fórmula:

```
=C7-B7
```

Este passo é opcional uma vez que já se sabe no número de iterações e, portanto, o momento de parar. Tal coluna foi adicionada apenas para uma melhor visualização do processo.

9) Selecionam-se as células D6, E6, F6, G6 e H6 e arrasta-se a aba de preenchimento automático até a linha da iteração desejada. Assim, estes passos são repetidos em todas as

iterações.

10) Nas células B7 e C7 digita-se o condicional que determinará qual das partes do intervalo anterior será considerada ($[\alpha_1; b]$ *ou* $[a; \beta_1]$*).*

Na célula B7:

```
=SE(F6<G6;B6;D6)
```

Na célula C7:

```
= SE(F6<G6;E6;C6)
```

11) Selecionam-se as células B7 e C7 e arrasta-se o sinal positivo, da aba de preenchimento automático, até a linha posterior a da iteração desejada. O motivo é que na linha k+1 é que aparece o intervalo de incerteza resultante da iteração k.

O número de casas decimais usado na planilha é maior do que nos cálculos manuais. Caso se deseje fixar o mesmo número de casas decimais (com arredondamento), basta utilizar a função ARRED.

```
=ARRED(expressão; número de casas decimais)
```

O método dicotômico pode ser adaptado de modo a gerar variantes bem interessantes como o método de Fibonacci e o da Seção Áurea. Yuan e Sun (2006, p. 84) comentam a respeito de tais métodos:

> A ideia básica para minimizar uma função unimodal dentro do intervalo [a; b] é iterativamente reduzir o intervalo de incerteza comparando os valores da função das observações. Quando o comprimento do intervalo de incerteza é reduzido ao grau desejado, os pontos sobre o intervalo podem ser considerados como uma aproximação do minimizador. Nesta classe de métodos somente é necessário calcular os valores das funções e possui diversas aplicações para vários tipos de problemas.

3.4. NÚMEROS DE FIBONACCI

Os números de Fibonacci recebem esse nome em homenagem ao matemático italiano Leonardo de Pisa, mais conhecido por Fibonacci. Tais números aparecem no problema do crescimento de uma população de coelhos na obra *Liber Abaci* publicada em 1202. Uma tradução para língua inglesa foi feita por Sigler (2002, p. 404):

> Um homem tinha um par de coelhos juntos em um determinado lugar fechado, e se quer saber quantos são criados a partir do par em um ano, quando é da natureza deles gerar em um único mês um outro par, e, no segundo mês os nascidos também gerar. Porque o par descrito no primeiro mês, irá dobrar; haverá dois pares em um mês. Um destes, a saber, o primeiro, gera outro par no segundo mês, e assim há no segundo mês 3 pares; destes em um mês duas estão grávidas, e no terceiro mês 2 pares de coelhos nascem, e, portanto, há 5 pares no monte; neste mês 3 estão grávidas, e no quarto mês há 8 pares, dos quais 5 geram mais 5 pares; estes são adicionados aos 8 pares fazendo 13 pares no quinto mês; estes 5 pares que nascem neste mês não acasalam neste mês, mas outros 8 pares sim, e, portanto, há, no sexto mês 21 pares; para estes há que acrescentar os 13 pares que nasceram no sétimo mês; haverá 34 pares neste mês; para isso se acrescentam os 21 pares que nascem no oitavo mês; haverá 55 pares neste mês; aos quais se juntam os 34 pares que nascem no nono mês; haverá 89 pares neste mês; aos quais se juntam novamente os 55 pares que nascem no décimo mês; haverá 144 pares neste mês; aos quais se juntam novamente os 89 pares que nascem no décimo primeiro mês; haverá 233 pares neste mês. Para estes ainda são adicionados os 144 pares que nascem no último mês; haverá 377 pares, e esta quantidade de pares são produzidos a partir par casal inicial no local indicado no final de um ano.
>
> Você pode realmente ver na margem como operamos, ou seja, que nós adicionamos o primeiro número para o segundo, ou seja, a 1 com a 2, e do segundo para o terceiro, e o terceiro para o quarto, e do quarto para o quinto, e, assim, um após o outro, até que acrescentou o décimo a décimo primeiro, ou seja, o 144 ao 233, e tivemos a soma de coelhos acima descritos, ou seja, 377, e assim você pode, a fim encontrá-lo para um número qualquer de meses.

Os números de Fibonacci, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... são portanto, gerados por

$$\begin{cases} F_0 = 1,\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1}\ ,\ \forall\, n \in N \cup \{0\} \end{cases} \tag{3.9}$$

O primeiro número, F_0, não aparece no texto original, mas é tradicionalmente incluído por conveniência.

A resolução da relação de recorrência (3.9) nos fornece a expressão que calcula diretamente todos os números de Fibonacci:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\ ,\ n \in \{0, 1, 2, \dots\} \tag{3.10}$$

e pode ser encontrada em Lima (1999).

3.5. MÉTODO DE FIBONACCI

Em 1953, o estatístico e economista Jack Kiefer apresentou o artigo *Sequential minimax search for a maximum*, em que apresentou o método de busca de Fibonacci. A ideia básica de tal método é iterativamente reduzir o intervalo de incerteza, até um intervalo que apresente a precisão desejada, comparando os valores da função (unimodal) em dois pontos, como no método da dicotomia. A diferença, porém, está na forma de determinar os pontos. Aqui se deseja que na próxima iteração um dos pontos calculados seja reaproveitado, reduzindo assim o custo computacional.

Observa-se que nessas condições, a escolha dos números recai sobre os números de Fibonacci: a razão entre os comprimentos dos intervalos de incerteza final e inicial de cada iteração é igual à razão de dois números consecutivos de Fibonacci (daí o nome do método).

Antes de demonstrar tal resultado, vamos construir o método de Fibonacci de modo diferente. Inicialmente, desconsidera-se que um dos pontos seja reaproveitado e procura-se reduzir o intervalo de incerteza à razão de dois números consecutivos de Fibonacci (multiplicado pelo seu comprimento).

A partir dessa abordagem, pode-se concluir que um dos pontos é aproveitado na próxima iteração. Logo, a construção a seguir, mostra que utilizando as razões de dois números consecutivos de Fibonacci (F_n / F_{n+1}), atende a condição original. O motivo da inversão na abordagem é por causa da naturalidade em que as fórmulas surgem.

Tal método pode ser considerado uma variante do método da dicotomia, já que também usa dois pontos interiores do intervalo de incerteza, simétricos em relação à ao ponto médio: um antes do ponto médio (α) e outro após o ponto médio (β), além do fato da função ser unimodal. A seguir segue a construção do método.

Sejam [a; b] o intervalo de confiança, de comprimento L_0, da função unimodal f ; ε a precisão desejada e F_n o n-ésimo número de Fibonacci ($n > 2$).

Inicialmente considere que n é conhecido (posteriormente será estabelecido como determinar n).

O método em questão é um método iterativo que visa diminuir o comprimento do intervalo de incerteza, reduzindo-o à razão de dois números consecutivos de Fibonacci (multiplicado pelo seu comprimento).

Tais razões consideradas geram a seguinte sequência (*n* termos):

$$\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}, \frac{F_{n-1}}{F_n}, \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}, \dots, \frac{F_{n-j+1}}{F_{n-j+2}}, \dots, \frac{F_2}{F_3}, \frac{F_1}{F_2}\right)$$

onde

$$\frac{F_{n-j+1}}{F_{n-j+2}}$$

é o *j*-ésimo elemento da sequência.

Para facilitar, a seguinte nomenclatura é usada: a_k e b_k são as extremidades e α_k e β_k os pontos interiores do intervalo de incerteza na iteração *k*. L_k é o comprimento do novo intervalo de incerteza ao final da iteração *k*.

Na primeira iteração, as extremidades do intervalo considerado são:

$$\mathrm{a}_1 = \mathrm{a} \ \text{e} \ \mathrm{b}_1 = \mathrm{b}$$

e assim,

$$L_0 = \mathrm{b} - \mathrm{a} = \mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1.$$

Deseja-se obter ao final da primeira iteração um intervalo de incerteza de comprimento L_1 tal que

$$L_1 = \frac{F_n}{F_{n+1}} . L_0$$

e que contenha o ponto de mínimo.

Elimina-se, portanto, do intervalo inicial o intervalo $I_1 = L_0 - L_1$. Assim,

$$L_0 - L_1 = L_0 - \frac{F_n}{F_{n+1}} . L_0 = \left(1 - \frac{F_n}{F_{n+1}}\right). L_0 = \rho_1 . L_0 ,$$

onde

$$\rho_1 = 1 - \frac{F_n}{F_{n+1}} .$$

Se I_1 iniciar em a_1, então após a exclusão de I_1, o intervalo restante iniciará na extremidade superior de I_1 até b_1. Se I_1 terminar em b_1, então após a exclusão de I_1, o intervalo restante, de comprimento L_1, iniciará em a_1 e terminará na extremidade inferior de I_1.

Daí, o motivo de se fazer:

$$\alpha_1 = \mathrm{a}_1 + \rho_1 . L_0$$

e

$$\beta_1 = \mathrm{b}_1 - \rho_1 . L_0.$$

Obtêm-se assim os pontos $\alpha_1, \beta_1 \in (\mathrm{a}_1; \mathrm{b}_1)$. Agora a situação é semelhante ao método

da dicotomia. Calcula-se $f(\alpha_1)$ e $f(\beta_1)$ e como a função é unimodal e o ponto de mínimo, x^*, pertence ao intervalo $[a_1; b_1]$, então pela proposição 3.1, tem-se:

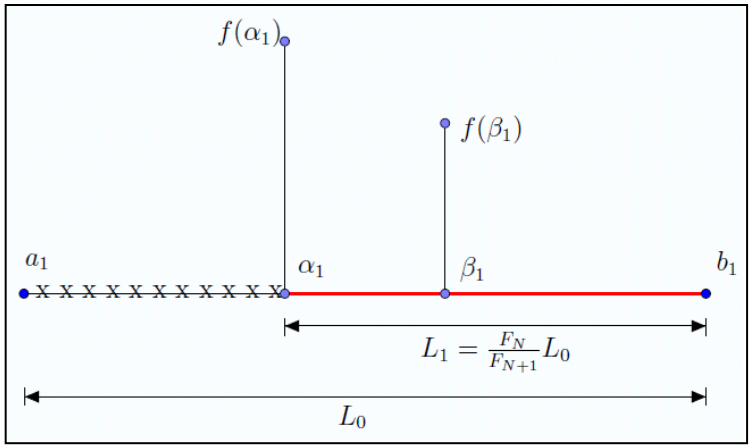
$$f(\alpha_1) \geq f(\beta_1) \Rightarrow \quad x^* \in [\alpha_1; b_1];$$
$$f(\alpha_1) < f(\beta_1) \Rightarrow \quad x^* \in [a_1; \beta_1].$$

Considere, sem perda de generalidade, que $f(\alpha_1) \geq f(\beta_1)$. Então o novo intervalo de incerteza passa a ser $[\alpha_1; b_1]$. Observa-se que o comprimento do novo intervalo é

$$L_1 = b_1 - \alpha_1 = b_1 - (a_1 + \rho_1 . L_0) = (b_1 - a_1) - \rho_1 . L_0 = L_0 - \rho_1 . L_0 = (1 - \rho_1) . L_0 =$$
$$= \frac{F_n}{F_{n+1}} . L_0$$

que é o resultado desejado. A Fig. 3.5 ilustra o que foi feito nessa iteração. A parte marcada com "X" é a parte excluída e a que está em vermelho é o intervalo resultante ao final desta iteração.

Figura 3.5 - Método de busca de Fibonacci - Iteração 1.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na segunda iteração, tem-se:

$$a_2 = \alpha_1 \text{ e } b_2 = b_1$$

e assim,

$$L_1 = b_2 - a_2.$$

Deseja-se obter ao final da segunda iteração um intervalo de incerteza de comprimento L_2, tal que

$$L_2 = \frac{F_{n-1}}{F_n} . L_1$$

e que contenha o ponto de mínimo. Elimina-se, portanto, do intervalo considerado o intervalo $I_2 = L_1 - L_2$. Assim,

$$L_1 - L_2 = L_1 - \frac{F_{n-1}}{F_n}.L_1 = \left(1 - \frac{F_{n-1}}{F_n}\right).L_1 = \rho_2.L_1,$$

onde

$$\rho_2 = 1 - \frac{F_{n-1}}{F_n}.$$

Se I_2 iniciar em a_2, então após a exclusão de I_2, o intervalo restante iniciará na extremidade superior de I_2 até b_2. Se I_2 terminar em b_2, então após a exclusão de I_2, o intervalo restante, de comprimento L_2, iniciará em a_2 e terminará em na extremidade inferior de I_2.

Devido a tal fato, faz-se:

$$\alpha_2 = a_2 + \rho_2.L_1$$

e

$$\beta_2 = b_2 - \rho_2.L_1.$$

Obtém-se, assim, os pontos $\alpha_2, \beta_2 \in (a_2; b_2)$. Calcula-se $f(\alpha_2)$ e $f(\beta_2)$ e aplica-se a proposição 3.1. Considerando, sem perda de generalidade, que $f(\alpha_2) \geq f(\beta_2)$. Então o novo intervalo de incerteza passa a ser $[\alpha_2; b_2]$.

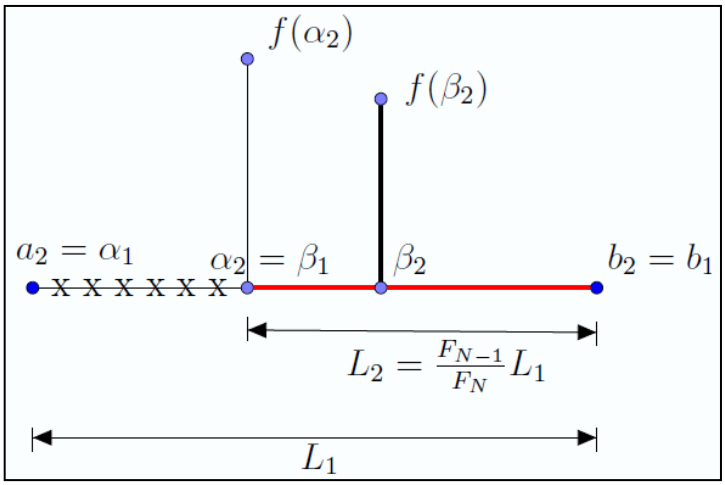
Veja que o comprimento do novo intervalo é

$$L_2 = b_2 - \alpha_2 = b_2 - (a_2 + \rho_2.L_1) = (b_2 - a_2) - \rho_2.L_1 = L_1 - \rho_2.L_1 = (1 - \rho_2).L_1 =$$
$$= \frac{F_{n-1}}{F_n}.L_0$$

que é o resultado desejado.

A Fig. 3.6 ilustra o que foi feito nessa iteração. A parte marcada com "X" é a parte excluída e a que está em vermelho é o intervalo resultante ao final desta iteração.

Figura 3.6 - Método de busca de Fibonacci - Iteração 2.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Na *j*-ésima iteração, tem-se:

$$\mathrm{a}_j = \alpha_{j-1}\, e\, b_j = \mathrm{b}_{j-1} \quad \text{ou} \quad \mathrm{a_j} = a_{j-1}\, e\, \mathrm{b}_j = \beta_{j-1}$$

e daí

$$L_{j-1} = \mathrm{b}_j - \mathrm{a}_j.$$

Deseja-se obter ao final da *j-ésima* iteração um intervalo de incerteza de comprimento L_j tal que

$$L_j = \frac{F_{n-j+1}}{F_{n-j+2}}\, .L_{j-1}$$

e que contenha o ponto de mínimo. Elimina-se, portanto, do intervalo considerado o intervalo $I_j = L_{j-1} - L_j$. Assim,

$$L_{j-1} - L_j = L_{j-1} - \frac{F_{n-j+1}}{F_{n-j+2}}\, .L_{j-1} = \left(1 - \frac{F_{n-j+1}}{F_{n-j+2}}\right).L_{j-1} = \rho_j.L_{j-1}\,,$$

onde

$$\rho_j = 1 - \frac{F_{n-j+1}}{F_{n-j+2}}. \tag{3.11}$$

Se I_j iniciar em $\mathrm{a_j}$, então após a exclusão de I_j, o intervalo restante iniciará na extremidade superior de I_j até $\mathrm{b_j}$. Se I_j terminar em $\mathrm{b_j}$, então após a exclusão de I_j, o intervalo restante, de comprimento L_j, iniciará em $\mathrm{a_j}$ e terminará na extremidade inferior de I_j.

Daí, o motivo de se fazer:

$$\alpha_j = \mathrm{a_j} + \rho_j.L_{j-1} \tag{3.12}$$

e

$$\beta_j = \mathrm{b_j} - \rho_j.L_{j-1}. \tag{3.13}$$

Obtém-se, assim, os pontos $\alpha_j, \beta_j \in (\mathrm{a_j};\ \mathrm{b_j})$. Calcula-se $f(\alpha_j)$ e $f(\beta_j)$ e aplica-se a proposição 3.1. Considerando, sem perda de generalidade, que $f(\alpha_j) \leq f(\beta_j)$ (o caso contrário é análogo). Então o novo intervalo de incerteza passa a ser $[\mathrm{a}_j; \beta_j]$.

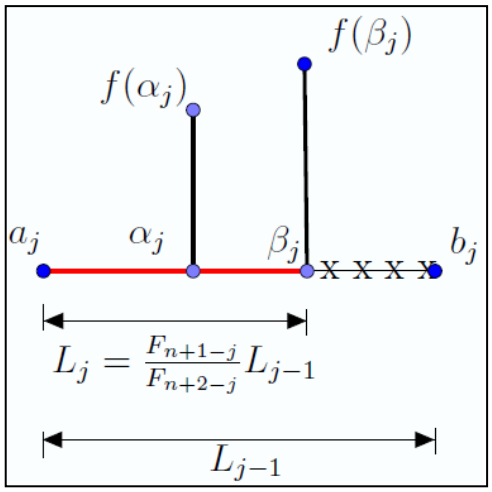
O comprimento do novo intervalo é

$$L_j = \beta_j - \mathrm{a}_j = (\mathrm{b}_j - \rho_j.L_{j-1}) - \mathrm{a}_j = (\mathrm{b}_j - \mathrm{a}_j) - \rho_j.L_{j-1} = L_{j-1} - \rho_j.L_{j-1} \Rightarrow$$

$$L_j = (1 - \rho_1).L_{j-1} = \frac{F_{n-j+1}}{F_{n-j+2}}.L_{j-1} \tag{3.14}$$

que é o resultado desejado.

Figura 3.7 - Método de busca de Fibonacci - Iteração j.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

O processo termina quando a razão entre os dois números de Fibonacci for 0,5 $\left(\frac{F_1}{F_2} = 0{,}5\right)$, o que ocorre na *n*-ésima iteração.

Proposição 3.2. β_k $(k = 2, 3, \dots, n)$, *pode, também, ser calculado por:*

$$\beta_k = \mathrm{a_k} + (1 - \rho_k).\, L_{k-1} \tag{3.15}$$

Demonstração.

De (3.13), sabemos que

$$\beta_k = \mathrm{b_k} - \rho_k.\, L_{k-1}.$$

Como,

$$L_{k-1} = \mathrm{b_k} - \mathrm{a}_k,$$

então,

$$\beta_k = \mathrm{b_k} - \rho_k.\,(\mathrm{b_k} - \mathrm{a}_k) = \mathrm{b_k} - \rho_k.\,\mathrm{b_k} + \rho_k.\,\mathrm{a}_k =$$
$$= (1 - \rho_k).\,\mathrm{b}_k + \rho_k.\,\mathrm{a}_k = (1 - \rho_k).\,\mathrm{b}_k + \rho_k.\,\mathrm{a}_k - \mathrm{a}_k + \mathrm{a}_k =$$
$$= (1 - \rho_k).\,\mathrm{b}_k - (1 - \rho_k).\,\mathrm{a}_k + \mathrm{a}_k = \mathrm{a}_k + (1 - \rho_k).\,(\mathrm{b}_k - \mathrm{a}_k) =$$
$$= \mathrm{a}_k + (1 - \rho_k).\,L_{k-1}.$$

□

Ao final da última iteração (*n*-ésima iteração), o método de Fibonacci reduz o intervalo de confiança final à:

$$L_n = \frac{1}{F_{n+1}}.L_0. \tag{3.16}$$

De fato, como

$$L_1 = (1 - \rho_1).L_0 = \frac{F_n}{F_{n+1}}.L_0\ ;$$

$$L_2 = (1 - \rho_2).L_1 = \frac{F_{n-1}}{F_n}.L_1\ ;$$

...

$$L_j = \left(1 - \rho_j\right).L_{j-1} = \frac{F_{n-j+1}}{F_{n-j+2}}.L_{j-1}\ ;$$

...

$$L_{n-1} = (1 - \rho_{n-1}).L_{n-2} = \frac{F_2}{F_3}.L_{n-2}\ ;$$

$$L_n = (1 - \rho_n).L_{n-1} = \frac{F_1}{F_2}.L_{n-1}\ .$$

substituindo recursivamente L_k ($k = n-1, n-2, \ldots, 1$) por suas expressões, tem-se:

$$L_n = (1 - \rho_n).L_{n-1} = (1 - \rho_n).(1 - \rho_{n-1}).L_{n-2} = \cdots =$$
$$= (1 - \rho_n).(1 - \rho_{n-1}).\ldots.(1 - \rho_j).\ldots.(1 - \rho_2).(1 - \rho_1).L_0 \tag{3.17}$$

ou

$$L_n = \left(1 - \rho_n\right).L_{n-1} = \left(1 - \rho_n\right).\left(1 - \rho_{n-1}\right).L_{n-2} = \ldots =$$
$$= (1 - \rho_n).(1 - \rho_{n-1}).\ldots.(1 - \rho_j).\ldots.(1 - \rho_2).(1 - \rho_1).L_0 =$$
$$= \frac{F_n}{F_{n+1}}.\frac{F_{n-1}}{F_n}.\ldots.\frac{F_{n-j+1}}{F_{n-j+2}}.\ldots.\frac{F_2}{F_3}.\frac{F_1}{F_2}.L_0.$$

Simplificando tem-se:

$$L_n = \frac{F_1}{F_{n+1}}.L_0 = \frac{1}{F_{n+1}}.L_0.$$

Trata-se agora do valor de *n*. Na resolução dos problemas de otimização, a precisão ε e os extremos *a* e *b* são conhecidos (tem-se, então, L_0) e o que se deseja é uma aproximação para o ponto de mínimo. No caso, um intervalo de incerteza de comprimento menor ou igual à ε, ou seja:

$$L_n \leq \varepsilon$$

então,

$$\frac{1}{F_{n+1}}.L_0 \leq \varepsilon \;\Leftrightarrow\; F_{n+1} \geq \frac{L_0}{\varepsilon}. \tag{3.18}$$

Logo, *n* é o menor número natural que satisfaz (3.18).

Uma desvantagem do método de Fibonacci é que, como se necessita de conhecer *n* para efetuar as iterações, então é necessário efetuar uma busca entre os números de Fibonacci até encontrar o primeiro que satisfaz a desigualdade (3.18).

Além, disso, na última iteração tem-se outro problema, decorrente do seguinte fato

$$\rho_n = 1 - \frac{F_1}{F_2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

O que ocorre é que

$$\alpha_n = \mathrm{a}_n + \rho_n.(\mathrm{b}_n - \mathrm{a}_n) = \mathrm{a}_n + \frac{1}{2}.(\mathrm{b}_n - \mathrm{a}_n) = \frac{\mathrm{a}_n + \mathrm{b}_n}{2}$$

e

$$\beta_n = \mathrm{b}_n - \rho_n.(\mathrm{b}_n - \mathrm{a}_n) = \mathrm{b}_n - \frac{1}{2}.(\mathrm{b}_n - \mathrm{a}_n) = \frac{\mathrm{a}_n + \mathrm{b}_n}{2}.$$

isto é, temos α_n igual a β_n. Isto não nos permite comparar a função objetivo em dois pontos distintos.

Para resolver tal problema, Chong e Zak (2013), propõem usar $(\rho_n - h)$, com h pequeno, no lugar de ρ_n nas fórmulas de α_n e β_n.

Daí, tem-se, na *n*-ésima iteração:

$$\alpha_n = \mathrm{a}_n + (\rho_n - h).(\mathrm{b}_n - \mathrm{a}_n) = \mathrm{a}_n + \left(\frac{1}{2} - h\right).(\mathrm{b}_n - \mathrm{a}_n) \tag{3.19}$$

e

$$\beta_n = \mathrm{b}_n - (\rho_n - h).(\mathrm{b}_n - \mathrm{a}_n) = \mathrm{b}_n - \left(\frac{1}{2} - h\right).(b_n - a_n). \tag{3.20}$$

Tal artifício faz com que os dois pontos sejam distintos. No entanto, o autor não explica o que entende por pequeno. Uma sugestão é fazer $h \leq \varepsilon/2$, que atende inclusive os casos de igualdade de função.

Com isto, (3.17) e (3.18) são modificados. A redução proporcionada pela última iteração passa a ser

$$1 - (\rho_n - h) = 1 - \frac{1}{2} + h = \left(\frac{1 + 2h}{2}\right)$$

e assim,

$$L_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}.\frac{F_{n-1}}{F_n}.\ldots.\frac{F_{n-j+1}}{F_{n-j+2}}.\ldots.\frac{F_2}{F_3}.\left(\frac{1+2h}{2}\right).L_0 = \frac{1+2h}{F_{n+1}}.L_0 \quad \Rightarrow$$

$$L_n = \frac{1+2h}{F_{n+1}}.(\mathrm{a}-\mathrm{b}). \tag{3.21}$$

Isolando F_{n+1}, finalmente obtem-se:

$$F_{n+1} \geq \frac{(1-2h).(\mathrm{a}-\mathrm{b})}{\varepsilon}. \tag{3.22}$$

Tal procedimento não altera significativamente a busca dos números de Fibonacci. A finalidade é somente tornar α_n e β_n diferentes. Voltando ao cálculo das abscissas α_k e β_k, observa-se que

$$\rho_k.L_{k-1} \qquad \text{e} \qquad (1-\rho_k).L_{k-1}$$

são o acréscimo que se dá à abscissa $x = \mathrm{a}$ para encontrar, respectivamente, α_k ou β_k em cada iteração. Sabe-se que o ponto médio divide o intervalo dado em dois subintervalos menores. Então se $0 < \rho_k < \frac{1}{2}$, tem-se α_k e β_k em subintervalos diferentes.

$\rho_k > 0$ decorre do fato de que

$$(1-\rho_k).L_{k-1} < L_{k-1}$$

isto é, o comprimento do intervalo ao final de uma iteração deve ser menor do que o do inicial. Já $\rho_k \leq \frac{1}{2}$ é garatindo pela seguinte proposição.

Proposição 3.3.

$$\frac{F_j}{F_{j+1}} \geq \frac{1}{2}\ , \qquad \forall\, j \in \{2, \ldots, n\}. \tag{3.23}$$

Demonstração.

Para mostrar tal fato, observe inicialmente que

$$\frac{a+b}{a+2b} \geq \frac{1}{2}$$

onde $a, b > 0$.

De fato,

$$\frac{a+b}{a+2b} - \frac{1}{2} = \frac{2a+2b-a-2b}{2(a+2b)} = \frac{a}{2(a+2b)}$$

como $a, b > 0$, segue que

$$\frac{a+b}{a+2b} - \frac{1}{2} = \frac{a}{2(a+2b)} > 0 \ \Rightarrow\ \frac{a+b}{a+2b} - \frac{1}{2} \geq 0 \ \Rightarrow\ \frac{a+b}{a+2b} \geq \frac{1}{2}$$

Agora, fazendo

$a = F_{j-2}$ e $b = F_{j-1}$ (deve-se lembrar que os números de Fibonacci são positivos), tem-se:

$$\frac{F_{j-2} + F_{j-1}}{F_{j-2} + 2F_{j-1}} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{F_{j-2} + F_j}{F_{j-2} + F_{j-1} + F_{j-1}} \geq \frac{1}{2}$$

Mas, da lei de formação dos números de Fibonacci

$$F_{j-2} + F_{j-1} = F_{j+1} \quad \text{e} \quad F_j + F_{j-1} = F_{j+1}$$

então,

$$\frac{F_{j-2} + F_{j-1}}{F_{j-2} + F_{j-1} + F_{j-1}} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{F_j}{F_j + F_{j-1}} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{F_j}{F_{j+1}} \geq \frac{1}{2}$$

□

O resultado anterior também vale para $j = 1$, pois

$$\frac{F_1}{F_{1+1}} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

Proposição 3.4.

$$\frac{1}{2} < \frac{F_j}{F_{j+1}} \leq \frac{2}{3} \ , \forall \, j \in \{2, \ldots, n\} \tag{3.24}$$

Demonstração.

A desigualdade da esquerda já foi provada. Será tratada agora, a parte da direita.

Da lei de formação dos números de Fibonacci, tem-se que:

$$F_{j+1} = F_{j-1} + F_j,$$

logo:

$$\frac{F_j}{F_{j+1}} = \frac{F_j}{F_{j-1} + F_j} = \frac{1}{\frac{F_{j-1}}{F_j} + 1}.$$

Mas,

$$\frac{F_{j-1}}{F_j} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{F_{j-1}}{F_j} + 1 \geq \frac{3}{2}$$

assim,

$$\frac{F_j}{F_{j+1}} = \frac{1}{\frac{F_{j-1}}{F_j} + 1} \leq \frac{2}{3}.$$

□

O resultado anterior também é válido para j =1, pois

$$\frac{F_1}{F_{1+1}} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{2} \leq \frac{2}{3}.$$

Corolário 3.1.

$$\rho_k < \tfrac{1}{2} \ , \forall\, k \in \{1, 2, \dots, n-1\}. \tag{3.25}$$

Demonstração.

Basta lembrar que

$$\rho_k = 1 - \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}} \quad e \quad \frac{1}{2} < \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}} \leq \frac{2}{3}.$$

□

Logo, no método de Fibonacci, com exceção da última iteração, tem-se $0 < \rho_k < \frac{1}{2}$, o que significa que de fato, α e β estão em subintervalos diferentes.

O método de Fibonacci produz um resultado interessante: no final de cada iteração o novo intervalo de incerteza irá conter um dos dois pontos calculados, α_k ou β_k de modo que um deles seja reutilizado. Com isto, não é necessário calcular dois pontos do intervalo, mas apenas um. Pode-se aproveitar o outro ponto na iteração seguinte, como será demonstrado a seguir.

Proposição 3.5. *Se* $x^* \in [\alpha_k;\ \mathrm{b}_k]$, *então* $\alpha_{k+1} = \beta_k$ *(para todo k ∈{1, 2, ..., n−1}).*

Proposição 3.6. *Se* $x^* \in [\mathrm{a}_k;\ \beta_k]$, *então* $\beta_{k+1} = \alpha_k$ *(para todo k ∈{1, 2, ..., n−1}).*

A demonstração das proposições acima necessita de um resultado auxiliar.

Lema 3.1.

$$\rho_{k+1} = 1 - \frac{\rho_k}{1 - \rho_k} \ , \qquad \forall\, k \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \tag{3.26}$$

onde

$$\rho_k = 1 - \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}}. \tag{3.27}$$

Demonstração:

Como

$$1-\frac{\rho_k}{1-\rho_k}=1-\frac{1-\frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}}}{1-\left(1-\frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}}\right)}=1-\frac{\frac{F_{n-k+2}-F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}}}{\frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}}}=1-\frac{F_{n-k+2}-F_{n-k+1}}{F_{n-k+1}}$$

e,

$$F_{n-k}+F_{n-k+1}=F_{n-k+2} \;\Rightarrow\; F_{n-k+1}-F_{n-k+2}=F_{n-k}$$

então,

$$1-\frac{\rho_k}{1-\rho_k}=1-\frac{F_{n-k+2}-F_{n-k+1}}{F_{n-k+1}}=1-\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}=\rho_{k+1}.$$

□

Corolário 3.2.

$$\rho_{k+1}.(1-\rho_k)=1-2\rho_k\ ,\quad \forall\, k\in\{1,2,\dots,n-1\}\,, \tag{3.28}$$

onde

$$\rho_k=1-\frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}}.$$

Demonstração:

$$\rho_{k+1}.(1-\rho_k)=1-2\rho_k \;\Leftrightarrow\; \rho_{k+1}=\frac{1-2\rho_k}{1-\rho_k}=\frac{1-\rho_k-\rho_k}{1-\rho_k}=1-\frac{\rho_k}{1-\rho_k}$$

A última igualdade é possível devido ao fato de que $1-\rho_k$ é diferente de zero.

□

Com tais resultados provam-se as proposições 3.5 e 3.6. Abaixo, segue a demonstração da proposição 3.5.

As extremidades do intervalo de confiança na iteração k+1 são

$$\mathrm{a}_{k+1}=\alpha_k,\ \ \mathrm{b}_{k+1}=\mathrm{b}_k.$$

Logo, o comprimento de tal intervalo é:

$$L_k=\mathrm{b}_{k+1}-\mathrm{a}_{k+1}.$$

Pela expressão 3.12, tem-se:

$$\alpha_{k+1}=\mathrm{a}_{k+1}+\rho_{k+1}.(\mathrm{b}_{k+1}-\mathrm{a}_{k+1})=\alpha_k+\rho_{k+1}.(\mathrm{b}_k-\alpha_k)$$

Como

$$\alpha_k=\mathrm{a}_k+\rho_k.(\mathrm{b}_k-\mathrm{a}_k),$$

então

$$\alpha_{k+1} = [a_k + \rho_k.(b_k - a_k)] + \rho_{k+1}.[b_k - a_k + \rho_k.(b_k - a_k)] =$$
$$= a_k + \rho_k.(b_k - a_k) + \rho_{k+1}.[(b_k - a_k) + \rho_k.(b_k - a_k)] =$$
$$= a_k + \rho_k.(b_k - a_k) + \rho_{k+1}.(1 - \rho_k).(b_k - a_k).$$

Mas, do corolário 3.2, sabe-se que:

$$\rho_{k+1}.(1 - \rho_k) = 1 - 2\rho_k.$$

Assim,

$$\alpha_{k+1} = a_k + \rho_k.(b_k - a_k) + (1 - 2\rho_k).(b_k - a_k) =$$
$$= a_k + \rho_k.(b_k - a_k) + (b_k - a_k) - 2\rho_k.(b_k - a_k) = b_k - \rho_k.(b_k - a_k).$$

Da expressão 3.13,

$$\beta_k = b_k - \rho_k.(b_k - a_k)$$

segue que

$$\alpha_{k+1} = \beta_k.$$

De modo análogo prova-se a proposição 3.6.

□

Portanto, a escolha dos números de Fibonacci diminuem os cálculos em cada iteração.

Tal propriedade não é exclusiva do método de Fibonacci. O método da Seção Áurea, visto adiante, também possui a propriedade de reaproveitamento de um dos pontos internos, do intervalo de incerteza, calculados.

Porém, o método com essa característica e que minimiza o intervalo de incerteza é o método de Fibonacci. Para demonstrar este fato, são necessários alguns resultados auxiliares.

Considere α_k e β_k, como no método da dicotomia, pontos do intervalo $(a_k; b_k)$ de comprimento L simétricos em relação ao ponto médio e $\rho_k.L$ a distância entre a extremidade a_k e α_k (ou a distância entre b_k e o ponto β_k) dentro do intervalo [a; b].

Lema 3.2. *Se em cada iteração do "método da dicotomia" deseja-se que um dos pontos, α_k ou β_k, seja reaproveitado na iteração seguinte, ou seja,*

$$\alpha_{k+1} = \beta_k \ \ ou \ \ \beta_{k+1} = \alpha_k,$$

então tais pontos estão sujeitos à condição

$$\rho_{k+1} = 1 - \frac{\rho_k}{1-\rho_k}, \qquad \text{com} \quad 0 \leq \rho_k \leq \frac{1}{2}. \tag{3.29}$$

Demonstração:

No método da dicotomia os pontos α_k e β_k se posicionam, um antes do ponto médio e outro depois, então:

$$\rho_k . L \leq \frac{L}{2},$$

ou seja,

$$\rho_k \leq \frac{1}{2}.$$

Deseja-se reduzir o intervalo de incerteza, então

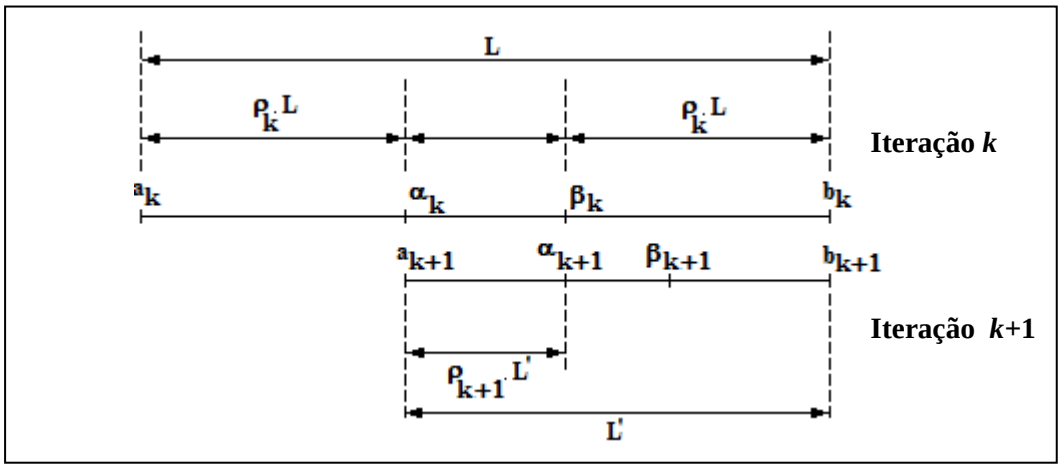
$$1 - \rho_k < 1 \Rightarrow \rho_k > 0.$$

Isto significa que se reduzir o intervalo então os pontos devem ser interiores ao intervalo. Assim,

$$0 \leq \rho_k \leq \frac{1}{2}.$$

Ainda, se quer que a cada etapa o ponto pertencente ao novo intervalo de incerteza seja reaproveitado como mostrado na figura abaixo.

Figura 3.8 - Redução do intervalo com $\alpha_{k+1} = \beta_k$.



Fonte: Adaptado de Chong e Zak (2013, p. 109).

Sem perda de generalidade, suponha que $\alpha_{k+1} = \beta_k$. Logo, a distância entre α_k e β_k, que é

$$L - \rho_k . L - \rho_k L = (1 - 2\rho_k) . L.$$

será igual a distância entre a$_{k+1}$ e α_{k+1} que é

$$\rho_{k+1} . L'$$

sendo *L'* o comprimento do novo intervalo de incerteza. Mas,

$$L' = L - \rho_k . L.$$

Assim,

$$(1 - 2\rho_k) . L \ = \rho_{k+1} . L' \ = \rho_{k+1} . (L - \rho_k . L) = \rho_{k+1} . (1 - \rho_k) . L \ \Rightarrow \ \rho_{k+1} = \frac{1 - 2\rho_k}{1 - \rho_k}$$

$$\Rightarrow \ \rho_{k+1} \ = \ 1 \ - \frac{\rho_k}{1 - \rho_k}.$$

□

Como já mencionado anteriormente, ao final de cada iteração, elimina-se do intervalo de incerteza um intervalo de comprimento ρ_k, então, ao final do processo todo o intervalo se reduz a

$$(1 - \rho_1) . (1 - \rho_2) . \ldots . (1 - \rho_n) . L_0.$$

Agora o que se deseja é determinar os valores de ρ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ que têm a propriedade de

minimizar[2]

$$(1 - \rho_1) . (1 - \rho_2) . \ldots . (1 - \rho_n) . L_0$$

sujeito às condições

$$\rho_{k+1} \ = \ 1 \ - \frac{\rho_k}{1 - \rho_k} \ , \quad k = 1, 2, \ldots, n - 1$$

e

$$0 \leq \rho_k \leq \frac{1}{2} \ , \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Que é o mesmo que dizer que se procura a melhor opção para a escolha de dois pontos do interior do intervalo de incerteza, simétricos em relação ao ponto médio, de tal forma que na iteração seguinte reaproveitemos um dos valores calculados.

Para facilitar os cálculos que seguem, faz-se $1 - \rho_k \ = \ r_k$. Então

$$\rho_k \ = \ 1 - \frac{\rho_{k-1}}{1 - \rho_{k-1}} \ \Rightarrow \ 1 - r_k \ = \ 1 - \frac{1 - r_{k-1}}{r_{k-1}} \ \Rightarrow \ r_k \ = \ \frac{r_{k-1} - 1}{r_{k-1}}$$

[2] Problema da minimização do intervalo de incerteza sujeita às condições dadas. Adaptado de Chong e Zak (2013).

$$\Rightarrow \; r_k \; = \frac{1}{r_{k-1}} - \; 1 \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Como o intervalo se reduz, em cada etapa, a $1 - \rho_k$, então após *n* etapas tem-se

$$(1-\rho_1).(1-\rho_2).\dots.(1-\rho_n).L_0$$

ou

$$r_1.r_2.\dots.r_n.\mathrm{L}_0.$$

Observe que

$$0 \leq \rho_k \leq \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2} \leq r_k \leq 1 \;, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

De fato.

$$0 \leq \rho_k \;\Leftrightarrow\; -\rho_k \leq 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - \rho_k \leq 1 \;\Leftrightarrow\; r_k \leq 1$$

e

$$\rho_k \leq \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; -\rho_k \geq -\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 1 - \rho_k \geq \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; r_k \geq \frac{1}{2}.$$

Então o problema de minimização anterior pode ser reescrito como sendo o de minimizar

$$r_1.r_2.\dots.r_n.L_0$$

sujeito às condições

$$r_{k+1} \; = \frac{1}{r_k} - \; 1 \qquad k = 1, 2, \dots, n-1$$

e

$$\frac{1}{2} \leq r_k \leq 1 \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

Lema 3.3. (CHONG; ZAK, 2013, p. 113)

Para $k \geq 2$ *(*$k \in \mathbf{N}$*),*

$$r_k = -\frac{F_{k-2} \; - \; F_{k-1}.r_1}{F_{k-3} \; - \; F_{k-2}.r_1}, \tag{3.30}$$

onde (r_k) *é uma sequência que satisfaz*

$$r_{k+1} \; = \frac{1}{r_k} - \; 1 \,, \quad k = 1,2,3, \dots, n-1. \tag{3.31}$$

Demonstração.

Prova-se por indução sobre *k*.

Seja

$$\text{P(k): } r_k = -\frac{F_{k-2} - F_{k-1}.r_1}{F_{k-3} - F_{k-2}.r_1}.$$

Para k = 2, temos

$$-\frac{F_{2-2} - F_{2-1}.r_1}{F_{2-3} - F_{2-2}.r_1} = \frac{-F_0 + F_1.r_1}{F_{-1} - F_0.r_1} = \frac{-1 + 1.r_1}{0 - 1.r_1} = \frac{1 - r_1}{r_1} = \frac{1}{r_1} - 1 = r_2.$$

Assim P(2) é verdadeira.

Supondo que P(k) seja verdadeira para algum $k \in \mathbf{N}$ $(k \geq 2)$, deseja-se provar que P(k+1) também é verdadeira, isto é, que

$$r_{k+1} = -\frac{F_{(k+1)-2} - F_{(k+1)-1}.r_1}{F_{(k+1)-3} - F_{(k+1)-2}.r_1}.$$

Para tal, deve-se observar que pela hipótese da indução,

$$r_k = -\frac{F_{k-2} - F_{k-1}.r_1}{F_{k-3} - F_{k-2}.r_1}.$$

Substituindo, então, r_k na expressão de r_{k+1}, tem-se:

$$r_{k+1} = \frac{1}{r_k} - 1 = \frac{1}{-\frac{F_{k-2} - F_{k-1}.r_1}{F_{k-3} - F_{k-2}.r_1}} - 1 = \frac{-F_{k-3} + F_{k-2}.r_1}{F_{k-2} - F_{k-1}.r_1} - 1 =$$

$$= \frac{-F_{k-3} + F_{k-2}.r_1 - F_{k-2} + F_{k-1}.r_1}{F_{k-2} - F_{k-1}.r_1} = \frac{-(F_{k-3} + F_{k-2}) + (F_{k-2}+F_{k-1}).r_1}{F_{k-2} - F_{k-1}.r_1}.$$

Da lei de formação dos números de Fibonacci, sabe-se que

$$F_{k-3} + F_{k-2} = F_{k-1} \quad \text{e} \quad F_{k-2}+F_{k-1} = F_k.$$

Logo,

$$r_{k+1} = \frac{-F_{k-1} + F_k.r_1}{F_{k-2} - F_{k-1}.r_1} = -\frac{F_{(k+1)-2} - F_{(k+1)-1}.r_1}{F_{(k+1)-3} - F_{(k+1)-2}.r_1}.$$

Como P(2) é verdadeira e

$$\text{P}(k) \Rightarrow \text{P}(k+1), \qquad (k \geq 2)$$

então segue do Princípio de Indução Finita que afirmação dada é verdadeira.

□

Lema 3.4. (CHONG; ZAK, 2013, p. 113)

Para $k \geq 2$ ($k \in \mathbf{N}$),

$$(-1)^k(F_{k-2} - F_{k-1}.r_1) > 0. \tag{3.32}$$

Demonstração.

A prova é feita por indução sobre *k*.

Seja

$$\text{P}(k):\ (-1)^k(F_{k-2} - F_{k-1}.r_1) > 0.$$

Para *k* = 2, tem-se:

$$(-1)^2(F_{2-2} - F_{2-1}.r_1) = F_0 - F_1.r_1 = 1 - r_1.$$

Mas, $r_1, r_2, \ldots$, satisfaz

$$r_{k+1} = \frac{1}{r_k} - 1$$

e $\mathrm{r_k} \geq \frac{1}{2}$.

Então,

$$\mathrm{r_k} \geq \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ \mathrm{r_k} = \frac{1}{\mathrm{r_{k-1}}} - 1 \geq \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{\mathrm{r_{k-1}}} \geq \frac{3}{2} \ \Leftrightarrow \ \mathrm{r_{k-1}} \leq \frac{2}{3},$$

e portanto,

$$1 - r_1 > 0.$$

Assim, P(2) é verdadeira.

Supondo que P(*k*) seja verdadeira para algum $k \in N$ ($k \geq 2$) deseja-se provar que P(*k*+1) também é verdadeira, isto é, que

$$(-1)^{k+1}\left(F_{(k+1)-2} - F_{(k+1)-1}.r_1\right) > 0\,.$$

Para tal, deve-se observar que:

$$(-1)^{k+1}\left(F_{(k+1)-2} - F_{(k+1)-1}.r_1\right) = (-1)^{k+1}(F_{k-1} - F_k.r_1) =$$

$$= \frac{r_{k+1}}{r_{k+1}}.(-1)^{k+1}(F_{k-1} - F_k.r_1).$$

Do lema 3.3,

$$r_{k+1} = -\frac{F_{k-1} - F_k.r_1}{F_{k-2} - F_{k-1}.r_1}.$$

Substituindo o denominador por tal resultado, tem-se:

$$(-1)^{k+1}.\frac{r_{k+1}}{-\frac{F_{k-1} - F_k.r_1}{F_{k-2} - F_{k-1}.r_1}}.(F_{k-1} - F_k.r_1) = r_{k+1}.(-1)^k.(F_{k-2} - F_{k-1}.r_1)$$

Mas, $r_{k+1} > 0$ e pela hipótese de indução

$$(-1)^k.\left(F_{k-2} - F_{k-1}.r_1\right) > 0,$$

então

$$(-1)^{k+1}\left(F_{(k+1)-2} - F_{(k+1)-1}.r_1\right) > 0.$$

Como P(2) é verdadeira e

$$\mathrm{P}(k) \Rightarrow \mathrm{P}(k+1), \qquad (k \geq 2)$$

então segue do Princípio de Indução Finita que afirmação dada é verdadeira.

□

Lema 3.5. (CHONG; ZAK, 2013, p. 114)

Para $k \geq 2$ ($k \in \mathbf{N}$),

$$(-1)^{k+1}.r_1 \geq (-1)^{k+1}.\frac{F_k}{F_{k+1}}. \tag{3.33}$$

Demonstração.

Como

$$\frac{1}{2} \leq r_k \leq 1,$$

e do lema 3.3

$$r_{k+1} = -\frac{F_{k-1} - F_k.r_1}{F_{k-2} - F_{k-1}.r_1},$$

então, tem-se:

$$r_{k+1} = -\frac{F_{k-1} - F_k.r_1}{F_{k-2} - F_{k-1}.r_1} \leq 1 \;\Rightarrow\; -\frac{(-1)^k}{(-1)^k}\frac{F_{k-1} - F_k.r_1}{F_{k-2} - F_{k-1}.r_1} \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad (-1)^{k+1}(F_{k-1} - F_k.r_1) \leq (-1)^k(F_{k-2} - F_{k-1}.r_1)$$

$$\Rightarrow \; (-1)^{k+1}F_{k-1} - (-1)^{k+1}F_k.r_1 \leq (-1)^k F_{k-2} - (-1)^k F_{k-1}.r_1$$

$$\Rightarrow \; (-1)^{k+1}F_{k-1} - (-1)^k F_{k-2} \leq -(-1)^k F_{k-1}.r_1 + (-1)^{k+1}F_k.r_1$$

$$\Rightarrow \; (-1)^{k+1}(F_{k-1} + F_{k-2}) \leq (-1)^{k+1}(F_{k-1} + F_k).r_1.$$

Mas, da lei de formação dos números de Fibonacci,

$$F_{k-1} + F_{k-2} = F_k \quad \text{e} \quad F_{k-1} + F_k = F_{k+1}.$$

Daí, tem-se:

$$(-1)^{k+1}(F_{k-1} + F_{k-2}) \leq (-1)^{k+1}(F_{k-1} + F_k).r_1 \;\Rightarrow\; (-1)^{k+1}F_k \leq (-1)^{k+1}F_{k+1}.r_1$$

$$\Rightarrow \quad (-1)^{k+1}.r_1 \geq (-1)^{k+1}.\frac{F_k}{F_{k+1}}.$$

□

Lema 3.6.

Para $k \geq 2$ ($k \in$ **N**),

$$F_{k-2}.F_{k+1} - F_{k-1}.F_k = (-1)^k \tag{3.34}$$

Demonstração.

A demonstração é feita por indução sobre *k*.

Seja

$$\text{P}(k):\ F_{k-2}.F_{k+1} - F_{k-1}.F_k = (-1)^k.$$

Para k = 2, tem-se

$$F_{2-2}.F_{2+1} - F_{2-1}.F_2 = F_0.F_3 - F_1.F_2 = 1\,.3 - 1\,.\ 2 = 1 = \ (-1)^2.$$

Assim P(2) é verdadeira.

Supondo que P(k) seja verdadeira para algum $k \in N$ ($k \geq 2$) deseja-se provar que P(k+1) também é verdadeira, isto é, que

$$F_{(k+1)-2}.F_{(k+1)+1} - F_{(k+1)-1}.F_{(k+1)} = (-1)^{k+1}.$$

Para tal, desenvolve-se o primeiro membro da igualdade acima até obter-se o resultado do segundo membro.

$$F_{(k+1)-2}.F_{(k+1)+1} - F_{(k+1)-1}.F_{(k+1)} = F_{k-1}.F_{k+2} - F_k.F_{k+1}.$$

Da lei de formação dos números de Fibonacci, tem-se que

$$F_{k-1} = F_{k-3} + F_{k-2} \ \text{ e } \ F_{k+2} = F_k + F_{k+1}.$$

Substituindo este resultado no segundo membro da igualdade anterior, tem-se:

$$F_{(k+1)-2}.F_{(k+1)+1} - F_{(k+1)-1}.F_{(k+1)} = (F_{k-3} + F_{k-2}).(F_k + F_{k+1}) - F_k.F_{k+1} =$$

$$= (F_{k-3} + F_{k-2}).F_k + (F_{k-3} + F_{k-2}).F_{k+1} - F_k.F_{k+1} =$$

$$= (F_{k-3} + F_{k-2}).F_k + (F_{k-3} + F_{k-2} - F_k).F_{k+1} =$$

$$= F_{k-1}.F_k + (F_{k-1} - F_k).F_{k+1} = F_{k-1}.F_k + F_{k-2}.F_{k+1} = -(F_{k-2}.F_{k+1} - F_{k-1}.F_k).$$

Da hipótese de indução:

$$F_{k-2}.F_{k+1} - F_{k-1}.F_k = (-1)^k.$$

Logo,

$$F_{(k+1)-2}.F_{(k+1)+1} - F_{(k+1)-1}.F_{(k+1)} = -(F_{k-2}.F_{k+1} - F_{k-1}.F_k) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}.$$

Como P(2) é verdadeira e

$$\text{P}(k) \Rightarrow \ \text{P}(k+1), \qquad (k \geq 2)$$

então segue do Princípio de Indução Finita que afirmação dada é verdadeira.

□

Teorema 3.1. (CHONG; ZAK, 2013, p. 114)

Se $r_1, r_2, \dots, r_n$ satisfazem as condições

$$r_{k+1} = \frac{1}{r_k} - 1 \qquad k = 1, 2, \dots, n-1$$

e

$$\frac{1}{2} \leq r_k \leq 1 \qquad k = 1, 2, \dots, n$$

então,

$$r_1 . r_2 . \dots . r_n \geq \frac{1}{F_{n+1}}.$$

Ainda,

$$r_1 . r_2 . \dots . r_n = \frac{1}{F_{n+1}} \iff r_k = \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Demonstração.

Sabe-se do lema 3.3 que

$$r_{k+1} = -\frac{F_{k-1} - F_k . r_1}{F_{k-2} - F_{k-1} . r_1}.$$

Logo,

$$r_1 . r_2 . \dots . r_n = r_1 . \left(-\frac{F_{2-2} - F_{2-1} . r_1}{F_{2-3} - F_{2-2} . r_1}\right) . \left(-\frac{F_{3-2} - F_{3-1} . r_1}{F_{3-3} - F_{3-2} . r_1}\right) . \dots . \left(-\frac{F_{n-2} - F_{n-1} . r_1}{F_{n-3} - F_{n-2} . r_1}\right)$$

$$= (-1)^{n-1} . r_1 . \frac{F_0 - F_1 . r_1}{F_{-1} - F_0 . r_1} . \frac{F_1 - F_2 . r_1}{F_0 - F_1 . r_1} . \dots . \frac{F_{n-2} - F_{n-1} . r_1}{F_{n-3} - F_{n-2} . r_1} =$$

$$= (-1)^{n-1} . r_1 . \frac{F_{n-2} - F_{n-1} . r_1}{F_{-1} - F_0 . r_1} = (-1)^{n-1} . r_1 . \frac{F_{n-2} - F_{n-1} . r_1}{0 - 1 . r_1} =$$

$$= (-1)^n (F_{n-2} - F_{n-1} . r_1) = (-1)^n F_{n-2} + (-1)^{n+1} . r_1 . F_{n-1}$$

Mas, do lema 3.5

$$(-1)^{n+1} . r_1 \geq (-1)^{n+1} . \frac{F_n}{F_{n+1}},$$

então,

$$r_1 . r_2 . \dots . r_n = (-1)^n F_{n-2} + (-1)^{n+1} . r_1 . F_{n-1} \geq (-1)^n F_{n-2} + F_{n-1} (-1)^{n+1} \frac{F_n}{F_{n+1}} =$$

$$= (-1)^n (F_{n-2} . F_{n+1} - F_{n-1} . F_n) . \frac{1}{F_{n+1}}.$$

Do lema 3.6

$$F_{n-2}.F_{n+1} - F_{n-1}.F_n = (-1)^n$$

tem-se

$$r_1.r_2.\ldots.r_n \geq (-1)^n(F_{n-2}.F_{n+1} - F_{n-1}.F_n).\frac{1}{F_{n+1}} = (-1)^n.(-1)^n.\frac{1}{F_{n+1}} = \frac{1}{F_{n+1}}.$$

Portanto,

$$r_1.r_2.\ldots.r_n \geq \frac{1}{F_{n+1}}.$$

Finalmente, a seguir demonstra-se a última afirmação do teorema:

$$r_1.r_2.\ldots.r_n = \frac{1}{F_{n+1}} \quad \Leftrightarrow \quad r_k = \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

A demonstração de que

$$r_k = \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}} \;\Rightarrow\; r_1.r_2.\ldots.r_n = \frac{1}{F_{n+1}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

é feita substituindo cada r_k por sua expressão como indicado a seguir.

$$r_1.r_2.\ldots.r_n = \frac{F_{n-1+1}}{F_{n-1+2}}.\frac{F_{n-2+1}}{F_{n-2+2}}.\frac{F_{n-3+1}}{F_{n-3+2}}.\ \ldots\ .\frac{F_{n-n+1}}{F_{n-n+2}} = \frac{F_n}{F_{n+1}}.\frac{F_{n-1}}{F_n}.\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}.\ \ldots\ .\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{F_{n+1}}.$$

Reciprocamente,

$$r_1.r_2.\ldots.r_n = \frac{1}{F_{n+1}} \quad \Rightarrow \quad r_k = \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

é demonstrada por redução ao absurdo.

Suponha que

$$r_1 \neq \frac{F_n}{F_{n+1}}.$$

Multiplicando ambos os lados por $(-1)^{n+1}$, tem-se:

$$(-1)^{n+1}.r_1 \neq (-1)^{n+1}.\frac{F_n}{F_{n+1}}.$$

Mas, pelo lema 3.5

$$(-1)^{n+1}.r_1 \geq (-1)^{n+1}.\frac{F_n}{F_{n+1}},$$

logo, só podemos ter

$$(-1)^{n+1}.r_1 > (-1)^{n+1}.\frac{F_n}{F_{n+1}}$$

uma vez que a igualdade não é possível.

Porém, com tal resultado, a demonstração inicial se torna:

$$r_1.r_2.\ldots.r_n = \mathrm{r}_1.\left(-\frac{\mathrm{F}_{2-2} - \mathrm{F}_{2-1}.\mathrm{r}_1}{\mathrm{F}_{2-3} - \mathrm{F}_{2-2}.\mathrm{r}_1}\right).\left(-\frac{\mathrm{F}_{3-2} - \mathrm{F}_{3-1}.\mathrm{r}_1}{\mathrm{F}_{3-3} - \mathrm{F}_{3-2}.\mathrm{r}_1}\right).\ldots.\left(-\frac{\mathrm{F}_{n-2} - \mathrm{F}_{n-1}.\mathrm{r}_1}{\mathrm{F}_{n-3} - \mathrm{F}_{n-2}.\mathrm{r}_1}\right) =$$

$$= (-1)^{n-1}.\mathrm{r}_1.\frac{\mathrm{F}_{n-2} - \mathrm{F}_{n-1}.\mathrm{r}_1}{\mathrm{F}_{-1} - \mathrm{F}_0.\mathrm{r}_1} = (-1)^{n}(\mathrm{F}_{n-2} - \mathrm{F}_{n-1}.\mathrm{r}_1) =$$

$$= (-1)^n F_{n-2} + (-1)^{n+1}.r_1.F_{n-1} > (-1)^n F_{n-2} + F_{n-1}(-1)^{n+1}\frac{F_n}{F_{n+1}} =$$

$$(-1)^n(F_{n-2}.F_{n+1} - F_{n-1}.F_n).\frac{1}{F_{n+1}} = (-1)^n.(-1)^n.\frac{1}{F_{n+1}} = \frac{1}{F_{n+1}}.$$

Ou seja, a igualdade não ocorre mais, isto é

$$r_1.r_2.\ldots.r_n > \frac{1}{F_{n+1}}$$

o que contraria a hipótese

$$r_1.r_2.\ldots.r_n = \frac{1}{F_{n+1}}.$$

Assim,

$$r_1 = \frac{F_n}{F_{n+1}}.$$

Com tal valor de r_1, afirma-se que

$$r_k = \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}} \ , \qquad k = 2, 3, \ldots, n$$

o que pode ser demonstrado por indução.

Seja

$$\mathrm{P}(k):\ r_k = \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}}.$$

Para *k* = 2, tem-se

$$r_2 = \frac{1}{r_1} - 1 = \frac{F_{n+1}}{F_n} - 1 = \frac{F_{n+1} - F_n}{F_n}.$$

Da lei de formação dos números de Fibonacci

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n \quad \Leftrightarrow \quad F_{n-1} = F_{n+1} - F_n.$$

Assim,

$$r_2 = \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{F_{n-2+1}}{F_{n-2+2}}.$$

E portanto P(2) é verdadeira.

Suponha que, P(*k*) seja verdadeira para algum $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$, deseja-se mostrar que P(*k*+1) também é verdadeira, ou seja, que

$$r_{k+1} = \frac{F_{n-(k+1)+1}}{F_{n-(k+1)+2}}.$$

Para tal, deve-se lembrar que

$$r_{k+1} = \frac{1}{r_k} - 1.$$

Substituindo-se a hipótese da indução

$$r_k = \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}}$$

tem-se

$$r_{k+1} = \frac{1}{r_k} - 1 = \frac{F_{n-k+2}}{F_{n-k+1}} - 1 = \frac{F_{n-k+2} - F_{n-k+1}}{F_{n-k+1}}.$$

Da lei de formação dos números de Fibonacci

$$F_{n-k+2} = F_{n-k} + F_{n-k+1} \quad \Leftrightarrow \quad F_{n-k} = F_{n-k+2} - F_{n-k+1}.$$

Assim,

$$r_{k+1} = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} = \frac{F_{n-(k+1)+1}}{F_{n-(k+1)+2}}$$

que é P(k+1).

Como P(2) é verdadeira e

$$\mathrm{P}(k) \Rightarrow \mathrm{P}(k+1), \qquad (2 \leq k \leq n-1),$$

então segue do Princípio de Indução Finita que afirmação dada é verdadeira.

□

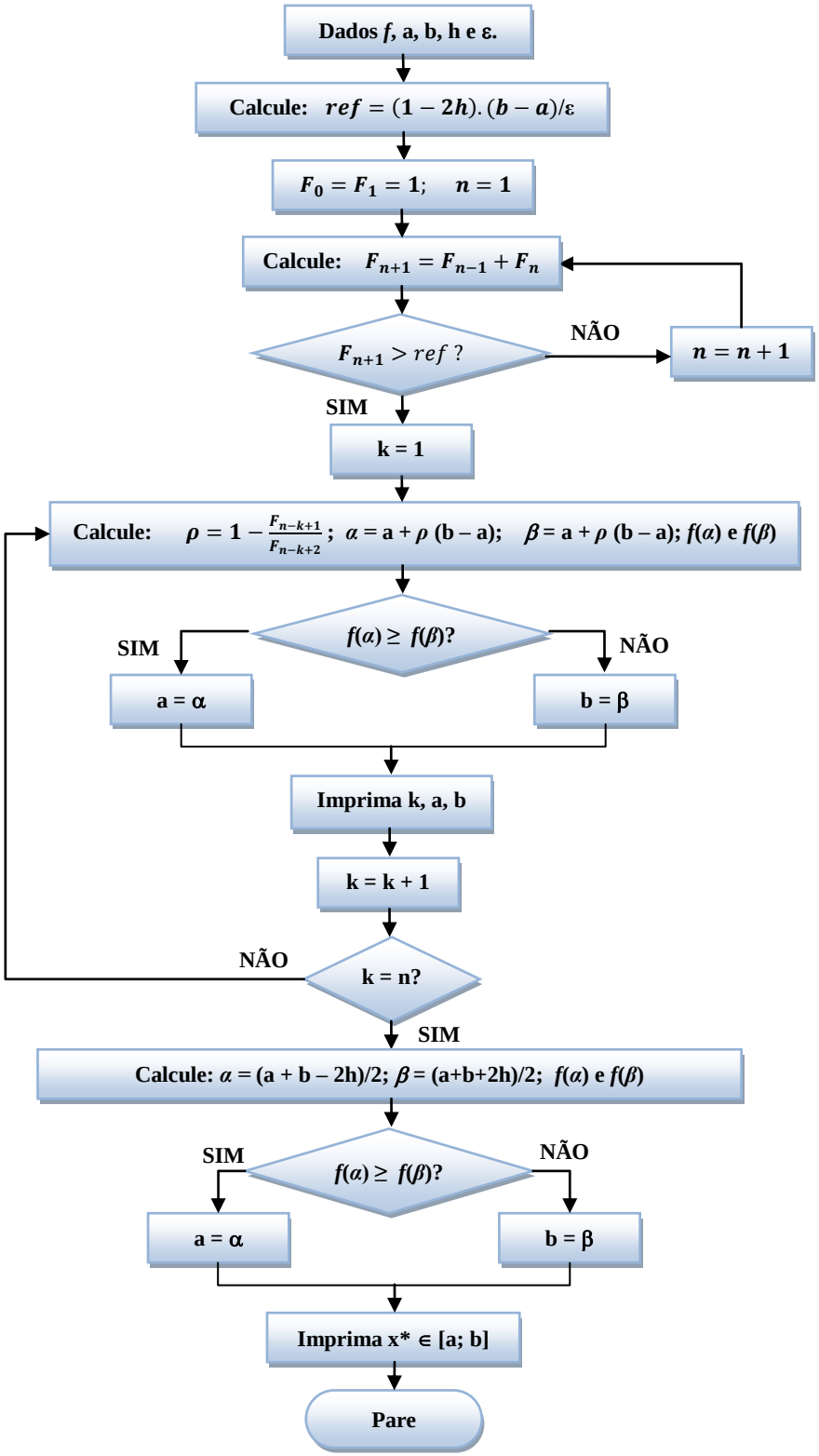
É interessante observar que se r_1 for dado, os demais r são determinados unicamente. Além disto, os r determinados são os valores usados no método de Fibonacci.

Assim, conclui-se que os valores de r usados no método de busca de Fibonacci formam a única solução para o problema de otimização do intervalo de incerteza mencionado anteriormente.

3.5.1. ALGORITMO DO MÉTODO DE FIBONACCI

Apresenta-se a seguir, na Fig. 3.10, um fluxograma relacionado ao algoritmo para implementação do método de Fibonacci.

Figura 3.9 - Algoritmo do Método de Fibonacci.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Para mostrar uma aplicação do método exposto acima, novamente é retomado o problema da excursão na seção seguinte.

3.5.2. EXEMPLO: O PROBLEMA DA EXCURSÃO

Deseja-se, minimizar a função objetivo,

$$g\colon \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}\ \text{, tal que } g(x) = -f(x) = -500x + 10x^2,$$

$$\text{sujeita a: } x^* \in [0;\ 42] \text{ e } \varepsilon = 0{,}1.$$

- **SOLUÇÃO**

A solução analítica para o problema dado, será descrita abaixo para as duas primeiras iterações, com a finalidade de exemplificar como se dá a manipulação do problema, porém, os resultados para as demais iterações são mostrados na Tab.3.6.

A função objetivo, o intervalo onde o ponto de mínimo está contido e a precisão desejada são conhecidos:

$$[\mathrm{a};\ \mathrm{b}] = [0;\ 42] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a} = 0 \text{ e } \mathrm{b} = 42.$$

$$\varepsilon = 0{,}1.$$

Adotando h = 0,005 na desigualdade 3.22:

$$F_{n+1} \geq \frac{(1-2h).(\mathrm{b}-\mathrm{a})}{\varepsilon},$$

obtém-se:

$$F_{n+1} \geq \frac{(1-2h).(\mathrm{b}-\mathrm{a})}{\varepsilon} = \frac{(1+2\,.\,0{,}005).(42-0)}{0{,}1} = 424{,}2.$$

Observando-se a "sequência de Fibonacci"

$$(F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{13}, F_{14}, \ldots) = (1, 1, 2, 3, \ldots, 377, 610, \ldots)$$

verifica-se que o primeiro número de Fibonacci, maior ou igual a 424,2, é 610 e corresponde a F_{14}.

Então faz-se

$$F_{n+1} = F_{14} \quad \Rightarrow \quad n = 13$$

ou seja, são necessárias 13 iterações para se chegar no resultado procurado.

- **Iteração 1**

As extremidades do intervalo inicial da iteração 1, são:

$$\mathrm{a}_1 = \mathrm{a} = 0, \quad \mathrm{b}_1 = \mathrm{b} = 42.$$

Aplicando a equação 3.11, obtém-se:

$$\rho_1 = 1 - \frac{F_{13}}{F_{14}} = 1 - \frac{377}{610} \quad \Rightarrow \quad \rho_1 \cong 0{,}3820.$$

Utilizando as equações 3.12 e 3.15, chega-se a:

$$\alpha_1 = a_1 + \rho_1.(b_1 - a_1) \cong 0 + 0{,}3820.(42 - 0) = 16{,}044;$$
$$\beta_1 = a_1 + (1 - \rho_1).(b_1 - a_1) \cong 0 + 0{,}6180.(42 - 0) = 25{,}956.$$

Os valores da função objetivo para tais pontos são:

$$g(\alpha_1) = -500\ .\ 16{,}044 + 10\ .\ 16{,}044^2 = -5447{,}9006;$$
$$g(\beta_1) = -500\ .25{,}956 + 10\ .\ 25{,}956^2 = -6240{,}8606.$$

Como,

$$g(\alpha_1) \geq g(\beta_1),$$

então, pela proposição 3.1, conclui-se que:

$$x^* \in [\alpha_1;\ b_1] = [16{,}044;\ 42].$$

Erro = $42 - 16{,}044 = 25{,}956 > 0{,}1$

O erro (máximo) é calculado apenas por curiosidade. Como o método tem um número de iterações definido, não é necessário calcular o erro.

- **Iteração 2**

Ao final da primeira iteração tem-se um novo intervalo de incerteza. Tal intervalo passa a ser o inicial da segunda iteração. Assim:

$$a_2 = \alpha_1 = 16{,}044, \quad b_2 = b_1 = 42.$$

Aplicando a equação 3.11, obtém-se:

$$\rho_2 = 1 - \frac{F_{12}}{F_{13}} = 1 - \frac{233}{377} \Rightarrow \rho_2 \cong 0{,}3820.$$

Pela proposição 3.5, conclui-se que:

$$\alpha_2 = \beta_1 = 25{,}956$$

e pela equação 3.15, chega-se a:

$$\beta_2 = a_2 + (1 - \rho_2).(b_2 - a_2) \cong 16{,}044 + 0{,}6180.(42 - 16{,}044) \cong 32{,}0848.$$

Os valores da função objetivo para tais pontos são:

$$g(\alpha_2) = g(\beta_1) = -6240{,}8606;$$
$$g(\beta_2) = -500\ .\ 32{,}0848 + 10\ .\ 32{,}0848^2 \cong -5748{,}0561$$

Como

$$g(\alpha_1) < g(\beta_1)$$

então, pela proposição 3.1, conclui-se que:

$$x^* \in [a_2;\ \beta_2] = [16{,}044;\ 32{,}0848].$$

O erro máximo é:

$$\text{Erro} = 32{,}0848 - 16{,}044 = 16{,}0408 > 0{,}1.$$

O processo se repete até a décima segunda iteração. Na décima terceira iteração há uma diferença: é necessário fazer um ajuste para que α_{13} e β_{13}, apresentem valores diferentes. Abaixo são apresentados os resultados de todas as iterações e em seguida são detalhados os cálculos da décima terceira iteração.

- **Resultados de todas as iterações**

  A Tab. 3.6 mostra os resultados de todas as iterações.

Tabela 3.6 - Resultados do problema da excursão pelo Método e Fibonacci.

k (Iteração)	ρ_k	a_k	b_k	α_k	β_k	$g(\alpha_k)$	$g(\beta_k)$	$a_{k\ novo}$	$b_{k\ novo}$
1	0,3820	0	42	16,044	25,956	-5447,9006	-6240,8606	16,044	42
2	0,3820	16,044	42	25,956	32,0848	-6240,8606	-5748,0561	16,044	32,0848
3	0,3820	16,044	32,0848	22,1716	25,956	-6170,0015	-6240,8606	22,1716	32,0848
4	0,3819	22,1716	32,0848	25,956	28,2989	-6240,8606	-6141,1726	22,1716	28,2989
5	0,3820	22,1716	28,2989	24,5122	25,956	-6247,6205	-6240,8606	22,1716	25,956
6	0,3818	22,1716	25,956	23,6165	24,5122	-6230,8593	-6247,6205	23,6165	25,956
7	0,3824	23,6165	25,956	24,5122	25,0614	-6247,6205	-6249,9623	24,5122	25,956
8	0,3810	24,5122	25,956	25,0614	25,4059	-6249,9623	-6248,3525	24,5122	25,4059
9	0,3846	24,5122	25,4059	24,8559	25,0614	-6249,7924	-6249,9623	24,8559	25,4059
10	0,375	24,8559	25,4059	25,0614	25,1997	-6249,9623	-6249,6012	24,8559	25,1997
11	0,4	24,8559	25,1997	24,9934	25,0614	-6249,9996	-6249,9623	24,8559	25,0614
12	0,3333	24,8559	25,0614	24,9244	24,9934	-6249,9428	-6249,9996	24,9244	25,0614
13	0,5	24,9244	25,0614	24,9922	24,9936	-6249,9994	-6249,9996	24,9922	25,0614

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Na décima terceira iteração tem-se:

$$a_{13} = \alpha_{12} = 24{,}9244, \quad b_{13} = b_{12} = 25{,}0614.$$

Aplicando as equações 3.19 e 3.20, tem-se:

$$\alpha_{13} = a_{13} + \left(\frac{1}{2} - h\right).(b_{13} - a_{13}) = 24{,}9244 + (0{,}5 - 0{,}005).(25{,}0614 - 24{,}9244) =$$
$$= 24{,}9922;$$

$$\beta_{13} = a_{13} + \left(\frac{1}{2} - h\right).(b_{13} - a_{13}) = 24{,}9244 + (0{,}5 + 0{,}005).(25{,}0614 - 24{,}9244) =$$
$$= 24{,}9936.$$

Os valores da função objetivo para α_{13} e β_{13}, são:

$$g(\alpha_{13}) = -500\,.\,24{,}9922 + 10\,.\,24{,}9922^2 \cong -6249{,}9994;$$
$$g(\beta_{13}) = -500\,.\,24{,}9936 + 10\,.\,24{,}9936 \cong -6249{,}9996.$$

Como

$$g(\alpha_{13}) > g(\beta_{13})$$

então, pela proposição 3.1, conclui-se que:

$$x^* \in [\alpha_{13};\ b_{13}] = [24{,}9922;\ 25{,}0614].$$

Pode-se observar que o erro máximo é:

$$\text{Erro} = 25{,}0614 - 24{,}9922 = 0{,}0692 < 0{,}1.$$

Como $x^* \in \{0, 1, 2, \ldots, 42\}$, então o valor procurado é $x = 25$. Assim, número de passageiros que torna a rentabilidade da empresa máxima é 25.

- **SOLUÇÃO VIA MICROSOFT EXCEL®/LIBREOFFICE CALC**

Tabela 3.7 - Resultados da planilha do problema da excursão pelo método de Fibonacci.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	ε =	0,1	h =	0,005		a =	0	b =	42
3									
4	Fn ≥	424,2	n +1 =	14	⇒	n =	13	F_n+1 =	610
5									
6	k (Iteração	p_k	a_k	b_k	alpha_k	beta_k	g(alpha_k)	g(beta_k)	erro_k
7	1	0,38196721	0,00000000	42,00000000	16,04262295	25,95737705	-5447,65396399	-6240,83429186	25,95737705
8	2	0,38196286	16,04262295	42,00000000	25,95737705	32,08524590	-6240,83429186	-5747,99290513	16,04262295
9	3	0,38197425	16,04262295	32,08524590	22,17049180	25,95737705	-6169,93883365	-6240,83429186	9,91475410
10	4	0,38194444	22,17049180	32,08524590	25,95737705	28,29836066	-6240,83429186	-6141,20816985	6,12786885
11	5	0,38202247	22,17049180	28,29836066	24,51147541	25,95737705	-6247,61343725	-6240,83429186	3,78688525
12	6	0,38181818	22,17049180	25,95737705	23,61639344	24,51147541	-6230,85632894	-6247,61343725	2,34098361
13	7	0,38235294	23,61639344	25,95737705	24,51147541	25,06229508	-6247,61343725	-6249,96119323	1,44590164
14	8	0,38095238	24,51147541	25,95737705	25,06229508	25,40655738	-6249,96119323	-6248,34711099	0,89508197
15	9	0,38461538	24,51147541	25,40655738	24,85573770	25,06229508	-6249,79188390	-6249,96119323	0,55081967
16	10	0,37500000	24,85573770	25,40655738	25,06229508	25,20000000	-6249,96119323	-6249,60000000	0,34426230
17	11	0,40000000	24,85573770	25,20000000	24,99344262	25,06229508	-6249,99957001	-6249,96119323	0,20655738
18	12	0,33333333	24,85573770	25,06229508	24,92459016	24,99344262	-6249,94313357	-6249,99957001	0,13770492
19	13	0,50000000	24,92459016	25,06229508	24,99275410	24,99413115	-6249,99947497	-6249,99965557	0,06954098
20	14		24,99275410	25,06229508					

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Para construir a planilha acima é necessário antes criar uma aba separada (NumFib) onde constarão os números da sequência de Fibonacci (F_0, F_1, F_2, …) e seus respectivos índices (0, 1, 2, …) como mostrado abaixo. Digitam-se os dois primeiros índices (em A2 e A3) e em seguida selecionando-se ambos arrasta-se o sinal positivo da aba de preenchimento automático até a linha desejada.

Nas células B2 e B3 digita-se os dois primeiros números de Fibonacci, na célula B4 digitamos

```
=B2+B3
```

e após pressionar `ENTER` seleciona-se essa célula (B4) e copia-se sua fórmula para as demais células da coluna (através do processo de arrastamento).

Tabela 3.8 - Construção dos números de Fibonacci.

n	F_n
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597
17	2584
18	4181
19	6765
20	10946
21	17711
22	28657

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Retornando à aba principal segue-se o seguinte procedimento:

1) Digita-se nas células A2, C2, F2 e H2, respectivamente ε, h, a e b;

2) Selecionam-se as células B2, D2, G2 e I2 e preenche-se com a cor amarela (opcional).

Os passos 1 e 2 identificam e reservam os locais (B2, D2, G2 e I2) para os dados do problema.

3) Digita-se nas células A3, C3, E3, F3 e H3, respectivamente Fn, n+1, ⇒, n e F_n+1;

4) Digita-se na célula B4:

```
=(I2-G2)*(1+2*D2)/B2
```

na célula D4:

```
=SE(CONT.SE(NumFib!B:B;"=" & B4) =1;CONT.SE(NumFib!B:B;"<" & B4)-1;
CONT.SE(NumFib!B:B;"<" & B4))
```

na célula G4:

```
=D4-1
```

e na célula I4:

```
=ÍNDICE(NumFib!B:B;D4+1)
```

A fórmula digitada na célula B3 faz o cálculo de

$$F_{n+1} \geq \frac{(1-2h).(b-a)}{\varepsilon}$$

A fórmula digitada em D3 determina a posição do primeiro número de Fibonacci maior ou igual ao indicado na célula B3. Este é o enésimo primeiro termo (indicado na célula I3).

A célula G4 indica qual o número de iterações.

Mostrar o enésimo primeiro termo da sequência de Fibonacci (I4) é opcional.

5) Na linha 6 (colunas de A a I) identifica-se os itens que farão parte da tabela: k (iteração), p_k, a_k, b_k, alpha_k, beta_k, f(alpha_k), f(beta_k) e erro_k (este último opcional).

6) Nas células A7 e A8 digitam-se os primeiros números de iterações: 1 e 2; Em seguida selecionam-se estas duas células e arrasta-se a aba de preenchimento automático até a linha desejada (k+1).

7) Na célula B7 digita-se

```
=1-ÍNDICE(NumFib!B:B;$D$4+2-A7)/ÍNDICE(NumFib!B:B;$D$4+3-A7)
```

A fórmula

ÍNDICE(NumFib!B:B;$D$4+2-A7)

identifica o enésimo termo e

ÍNDICE(NumFib!B:B;$D$4+3-A7)

o enésimo primeiro termo da sequência de Fibonacci.

Logo, o que é mostrado em B7 é

$$1 - \frac{F_n}{F_{n+1}}$$

8) Seleciona-se a célula B7 e arrasta-se o sinal positivo da aba de preenchimento automático até a linha desejada (n+1).

9) Nas células C7 e D7 digita-se, respectivamente,

```
=G2  e  =I2
```

que são as extremidades iniciais do intervalo de confiança.

10) Nas células E7 e F7 digita-se, respectivamente,

```
=C7+B7*(D7-C7)  e  =D7-B7*(D7-C7)
```

que são os valores de α_1 e β_1.

11) Nas células G7 e H7 digita-se, respectivamente,

```
=-500*D6+10*D6^2  e  =-500*E6+10*E6^2
```

que são os valores da função para os valores em D6 e E6.

12) Na célula I7 digita-se

```
=D8-C8
```

que representa a diferença entre as extremidades final e inicial do novo intervalo de incerteza.

Em seguida, seleciona-se essa célula e através do processo arrastamento copia-se sua fórmula para as demais células de sua coluna até a linha da enésima iteração.

Este passo é opcional já que o número de iteração é conhecido. Foi colocado apenas para melhor visualização do processo.

13) Nas células C8 e D8 digitam-se os condicionais que determinarão qual das partes do intervalo anterior é considerada ($[\alpha_1; b]$ ou $[a; \beta_1]$).

Na célula C8:

```
=SE(G7>=H7;E7;C7)
```

Na célula D8:

```
=SE(H7>G7;F7;D7)
```

14) Selecionam-se as células C8 e D8 e copiam-se suas fórmulas até a linha posterior a da iteração desejada. O motivo é que na linha k+1 é que aparece o intervalo de incerteza

resultante da iteração k.

15) Nas células E8 e F8 digitam-se os condicionais que calcularão os valores de α_k e β_k.

Na célula E8:

```
=SE(G7>=H7;F7;C8+B8*(D8-C8))
```

Na célula F8:

```
=SE(H7>G7;E7;D8-B8*(D8-C8))
```

Em seguida, copia-se a fórmula, através do processo de arrastamento, para as células de suas colunas até a linha anterior a enésima iteração.

As fórmulas do passo 10 poderiam ser reaproveitadas, mas aqui as fórmulas realizam o aproveitamento de valores repetidos. Reduzindo os cálculos.

16) Nas células G8 e H8 digitam-se os condicionais que calculam os valores da função para os alfas e betas correspondentes ou repetem os valores da iteração anterior.

Na célula G8

```
=SE(G7>=H7;H7;-500*E8+10*E8^2)
```

Na célula H8:

```
=SE(H7>G7;G7;-500*F8+10*F8^2)
```

Em seguida, selecionam-se as células G8 e H8 e executa-se o processo de arrastamento até a linha anterior a enésima iteração.

17) Nas células E19 e F19 digitam-se as fórmulas que calculam α_{13} e β_{13} corrigidos e nas células G19 e H19 a fórmula que fornece os valores da função para tais pontos.

Na célula E19:

```
=C19+(B19-D2)*(D19-C19)
```

Na célula F19:

```
=C19+(B19+D2)*(D19-C19)
```

Na célula G19:

```
=-500*E19+10*E19^2
```

Na célula H19:

```
=-500*F19+10*F19^2
```

18) Digitam-se os valores de ε, h, a e b desejados e a planilha nos fornecerá os valores procurados.

3.6. MÉTODO DA SEÇÃO ÁUREA

No método de Fibonacci, a cada iteração, o valor de ρ_k muda. No entanto, a mudança é considerável apenas nas últimas iterações. Na maior parte das iterações o valor fica próximo de 0,3820 conforme o exemplo anterior. Daí surge a motivação de adaptar a técnica de Fibonacci, mas com ρ fixo (constante) em todas as iterações.

Porém, desta forma, pode-se perder em convergência, já que o método de Fibonacci é a melhor escolha dentro das condições já mencionadas anteriormente. No entanto, a diferença é muito pequena e em boa parte dos problemas nem é relevante.

Abaixo, tem-se a implicação de tal consideração.

Consideremos, então,

$$\rho_{k+1} = \rho_k = \rho.$$

Como

$$\rho_{k+1} \;=\; 1 \;-\frac{\rho_k}{1-\rho_k}$$

então teremos

$$\rho \;=\; 1 \;-\frac{\rho}{1-\rho} \;\Leftrightarrow\; \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1-\rho}{1}. \tag{3.35}$$

Este resultado é bem conhecido: ρ é determinado pela seção áurea do intervalo de incerteza considerado, daí o nome do método.

Resolvendo tal equação, temos

$$\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1-\rho}{1} \Leftrightarrow (1-\rho)^2 = \rho \;\Leftrightarrow\; \rho^2 - 3\rho + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \rho = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \;\text{ ou }\; \rho = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Como

$$\rho < 1,$$

então

$$\rho = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \tag{3.36}$$

Com esse valor de ρ, temos:

$$\alpha_j = \mathrm{a_j} + \; 0{,}3820.\,(\mathrm{b_j} - \; \mathrm{a_j}); \tag{3.37}$$

$$\beta_j = \mathrm{b_j} - \; 0{,}3820.\,(\mathrm{b_j} - \; \mathrm{a_j}) = \mathrm{a_j} + \; 0{,}6180.\,(\mathrm{b_j} - \; \mathrm{a_j}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.38}$$

Como a cada iteração o intervalo se reduz a $(1-\rho) = 0{,}6180$ do intervalo inicial,

então após n iterações, tem-se:

$$L_n = (0{,}6180)^n L_0. \tag{3.39}$$

Além disto,

$$L_n \leq \varepsilon\,,$$

então

$$(0{,}6180)^n L_0 \leq \varepsilon \;\Rightarrow\; n \geq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{L_0}\right)}{\ln 0{,}6180}. \tag{3.40}$$

Para mostrar uma aplicação do método da Seção Áurea, novamente é retomado o problema da excursão.

3.6.1. EXEMPLO: O PROBLEMA DA EXCURSÃO

Queremos, minimizar a função objetivo,

$$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \text{tal que } g(x) = -f(x) = -500x + 10x^2,$$

$$\text{sujeita a: } x^* \in [0;\ 42] \text{ e } \varepsilon = 0{,}1.$$

- **SOLUÇÃO**

Para este caso, assim como no resolvido na seção anterior, serão feitas analiticamente as duas primeiras iterações, sendo que as restantes, são mostrados na Tab.3.9.

A função objetivo, o intervalo onde o ponto de mínimo está contido e a precisão desejada são conhecidos:

$$[\mathrm{a};\ \mathrm{b}] = [0;\ 42] \;\Rightarrow\; \mathrm{a} = 0 \text{ e } \mathrm{b} = 42.$$

$$\varepsilon = 0{,}1.$$

O número de iterações é calculado pela desigualdade 3.40:

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{L_0}\right)}{\ln 0{,}6180} \;\Rightarrow\; n \geq \frac{\ln\left(\frac{0{,}1}{42}\right)}{\ln (0{,}6180)} \cong 12{,}55$$

Então são necessárias 13 iterações para atingir a precisão desejada.

A seguir são descritos os cálculos feitos em cada iteração.

- **Iteração 1**

O intervalo inicial a ser considerado é o intervalo de incerteza original. Assim:

$$\mathrm{a}_1 = \mathrm{a} = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{b}_1 = \mathrm{b} = 42.$$

Utilizando as equações 3.37 e 3.38, chega-se a:

$$\alpha_1 = a_1 + \rho.(b_1 - a_1) \cong 0 + 0{,}3820.(42 - 0) = 16{,}044;$$
$$\beta_1 = a_1 + (1-\rho).(b_1 - a_1) \cong 0 + 0{,}6180.(42 - 0) = 25{,}956.$$

Os valores da função objetivo para tais pontos são:

$$g(\alpha_1) = -500\ .\ 16{,}044 + 10\ .\ 16{,}044^2 = -5447{,}9006;$$

$$g(\beta_1) = -500\ .25{,}956 + 10\ .\ 25{,}956^2 = -6240{,}8606.$$

Como,

$$g(\alpha_1) \geq g(\beta_1),$$

então, pela proposição 3.1, conclui-se que:

$$x^* \in [\alpha_1;\ b_1] = [16{,}044;\ 42].$$

Erro = $42 - 16{,}044 = 25{,}956 > 0{,}1$

Como já mencionado, o erro (máximo) será calculado a título de curiosidade. Como o método tem um número de iterações definido, não é necessário calcular o erro.

- **Iteração 2**

Ao final da primeira iteração tem-se um novo intervalo de incerteza. Tal intervalo passa a ser o inicial da segunda iteração. Assim:

$$a_2 = \alpha_1 = 16{,}044, \quad b_2 = b_1 = 42.$$

Pela proposição 3.5, conclui-se que:

$$\alpha_2 = \beta_1 = 25{,}956$$

e pela equação 3.15, chega-se a:

$$\beta_2 = a_2 + (1-\rho).(b_2 - a_2) \cong 16{,}044 + 0{,}6180.(42 - 16{,}044) \cong 32{,}0848.$$

Os valores da função objetivo para tais pontos são:

$$g(\alpha_2) = g(\beta_1) = -6240{,}8606;$$
$$g(\beta_2) = -500\ .\ 32{,}0848 + 10\ .\ 32{,}0848^2 \cong -5748{,}0561$$

Como

$$g(\alpha_1) < g(\beta_1)$$

então, pela proposição 3.1, conclui-se que:

$$x^* \in [a_2;\ \beta_2] = [16{,}044;\ 32{,}0848].$$

O erro máximo é:

$$\text{Erro} = 32{,}0848 - 16{,}044 = 16{,}0408 > 0{,}1.$$

O processo se repete até a décima terceira iteração.

- **Resultados de todas as iterações**

Tabela 3.9 - Resultados do problema da excursão pelo Método da Seção Áurea.

k (Iteração)	$\mathbf{a_k}$	$\mathbf{b_k}$	$\boldsymbol{\alpha_k}$	$\boldsymbol{\beta_k}$	$\mathbf{g(\alpha_k)}$	$\mathbf{g(\beta_k)}$	$\mathbf{a_{k\ novo}}$	$\mathbf{b_{k\ novo}}$
1	0	42	16,044	25,956	-5447,9006	-6240,8606	16,044	42
2	16,044	42	25,956	32,0848	-6240,8606	-5748,0561	16,044	32,0848
3	16,044	32,0848	22,1716	25,956	-6170,0015	-6240,8606	22,1716	32,0848
4	22,1716	32,0848	25,956	28,298	-6240,8606	-6141,232	22,1716	28,298
5	22,1716	28,298	24,5119	25,956	-6247,6176	-6240,8606	22,1716	25,956
6	22,1716	25,956	23,6172	24,5119	-6230,8786	-6247,6176	23,6172	25,956
7	23,6172	25,956	24,5119	25,0626	-6247,6176	-6249,9608	24,5119	25,956
8	24,5119	25,956	25,0626	25,4044	-6249,9608	-6248,3646	24,5119	25,4044
9	24,5119	25,4044	24,8528	25,0626	-6249,7833	-6249,9608	24,8528	25,4044
10	24,8528	25,4044	25,0626	25,1937	-6249,9608	-6249,6248	24,8528	25,1937
11	24,8528	25,1937	24,983	25,0626	-6249,9971	-6249,9608	24,8528	25,0626
12	24,8528	25,0626	24,9329	24,983	-6249,955	-6249,9971	24,9329	25,0626
13	24,9329	25,0626	24,983	25,0131	-6249,9971	-6249,9983	24,9830	25,0626

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Pelos resultados, conclui-se que:

$$x^* \in [24{,}9830;\ 25{,}0626].$$

Pode-se observar que o erro máximo é:

$$\text{Erro} = 25{,}0626 - 24{,}9830 = 0{,}0796 < 0{,}1$$

Como $x^* \in \{0, 1, 2, \ldots, 42\}$, então o valor procurado é x = 25. Assim, número de passageiros que torna a rentabilidade da empresa máxima é 25.

Comparando os resultados, deste problema, obtidos pelo método de Fibonacci e pela da Seção Áurea, nota-se que o primeiro apresenta o intervalo de incerteza com extremos mais próximos do valor exato (x = 25) do que o segundo.

- **SOLUÇÃO VIA MICROSOFT EXCEL®/LIBREOFFICE CALC**

Tabela 3.10 - Resultados da planilha do problema da excursão pelo método da Seção Áurea.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	ε =	0,1	a =	0	b =	42	ρ =	0,381966011
3								
4	k (Iteraçã	a_k	b_k	alpha_k	beta_k	g(alpha_k)	g(beta_k)	erro_k
5	1	0,000000000	42,000000000	16,042572473	25,957427527	-5447,644920897	-6240,833325296	25,957427527
6	2	16,042572473	42,000000000	25,957427527	32,085144945	-6240,833325296	-5748,007211082	16,042572473
7	3	16,042572473	32,085144945	22,170289890	25,957427527	-6169,927406935	-6240,833325296	9,914855055
8	4	22,170289890	32,085144945	25,957427527	28,298007308	-6240,833325296	-6141,231477995	6,127717418
9	5	22,170289890	28,298007308	24,510869670	25,957427527	-6247,607515203	-6240,833325296	3,787137637
10	6	22,170289890	25,957427527	23,616847747	24,510869670	-6230,868898463	-6247,607515203	2,340579780
11	7	23,616847747	25,957427527	24,510869670	25,063405605	-6247,607515203	-6249,959797293	1,446557857
12	8	24,510869670	25,957427527	25,063405605	25,404891593	-6249,959797293	-6248,360627982	0,894021923
13	9	24,510869670	25,404891593	24,852355658	25,063405605	-6249,782011482	-6249,959797293	0,552535935
14	10	24,852355658	25,404891593	25,063405605	25,193841646	-6249,959797293	-6249,624254165	0,341485988
15	11	24,852355658	25,193841646	24,982791698	25,063405605	-6249,997038744	-6249,959797293	0,211049947
16	12	24,852355658	25,063405605	24,932969564	24,982791698	-6249,955069207	-6249,997038744	0,130436041
17	13	24,932969564	25,063405605	24,982791698	25,013583471	-6249,997038744	-6249,998154893	**0,080613906**
18	14	24,982791698	25,063405605					
19								

Fonte: Elaborado pelo Autor.

A planilha é construída da seguinte forma:

1) Digitam-se nas células A2, C2, E2 e G2, respectivamente, ε, a, b e ρ;

2) Selecionam-se as células B2, D2, F2 e H2 e escolhe-se a cor amarela para preencher o fundo destas células.

Os passo 1 e 2 identificam e reservam os locais (B2, D2 e F2) para os dados do problema e H2 para o valor de ρ.

3) Na célula H2 digita-se

```
=(3-RAIZ(5))/2
```

que é o valor fixo de ρ.

4) Na linha 5 (colunas de A a H) identificam-se os itens que farão parte da tabela: k (iteração), a_k, b_k, alpha_k, beta_k, g(alpha_k), g(beta_k) e erro_k (este último opcional).

5) Nas células A6 e A7 digitam-se os primeiros números de iterações: 1 e 2; Em seguida selecionam-se estas duas células e arrasta-se o sinal positivo do preenchimento automático até a linha desejada (k+1).

6) Nas células B6 e C6 digita-se, respectivamente,

```
=D2 e =F2
```

que são as extremidades iniciais do intervalo de confiança.

7) Nas células D6 e E6 digita-se, respectivamente,

```
=B6+$H$2*(C6-B6)  e  =C6-$H$2*(C6-B6)
```

que são os valores de α_1 e β_1.

8) Nas células F6 e G6 digita-se, respectivamente,

```
=-500*D6+10*D6^2  e  = -500*E6+10*E6^2
```

que são os valores da função para os valores em D6 e E6.

9) Na célula H6 digita-se

```
=C7-B7
```

que representa a diferença entre as extremidades final e inicial do novo intervalo de incerteza.

Este passo é opcional já que calculamos e, portanto, já sabemos em que iteração parar. Foi colocado para melhor visualização do processo.

10) Selecionam-se as células F6, G6 e H6 e copiam-se suas fórmulas, através do método de arrastamento, até a linha da iteração desejada. Estes passos são repetidos em todas as iterações.

11) Nas células B7 e C7 digitam-se os condicionais que determinarão qual das partes do intervalo anterior é considerada ($[\alpha_1; b]$ ou $[a; \beta_1]$).

Na célula B7:

```
=SE(F6>=G6;D6;B6)
```

Na célula C7:

```
=SE(G6>F6;E6;C6)
```

12) Selecionam-se e arrastam-se as células B7 e C7 até a linha posterior da iteração desejada. O motivo é que na linha k+1 é que aparece o intervalo de incerteza resultante da iteração k.

13) Nas células D7 e E7 digitam-se os condicionais que calculam os valores da função para os alfas e betas correspondentes ou repetem os valores da iteração anterior.

Na célula D7:

```
=SE(F6>=G6;E6;B7+$H$2*(C7-B7))
```

Na célula E7:

```
=SE(G6>F6;D6;C7-$H$2*(C7-B7))
```

Em seguida seleciona-se as células D7 e E7 e executa-se o processo de arrastamento até a linha da iteração desejada.

14) Nas células F7 e G7 digita-se, respectivamente,

```
=SE(F7>=G7;G6;-500*D7+10*D7^2)
```

e

```
=SE(G7>F7;F6;-500*E7+10*E7^2)
```

que são os valores da função para os valores em D7 e E7.

Selecionam-se ambas células, F7 e G7, e arrasta-se o sinal positivo da aba de preenchimento automático até a linha da enésima iteração.

15) Ao digitar os valores de ε, a e b desejados, a planilha fornece os valores procurados.

4. EXEMPLOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ELEMENTARES PELOS MÉTODOS DE FIBONACCI E SEÇÃO ÁUREA

A seguir são apresentados alguns problemas de aplicação dos métodos de busca de Fibonacci e da Seção Áurea.

Inicialmente é feita uma modelagem dos problemas onde se estabelece qual a função a ser minimizada. Após, são aplicados os métodos em questão. Para a aplicação de tais métodos é necessário que as funções sejam unimodais nos intervalos de incerteza. Porém, apenas com conhecimento de ensino médio, nem sempre é simples identificar se uma função é unimodal ou não. Aqui os gráficos são plotados com ajuda do software GEOGEBRA[3].

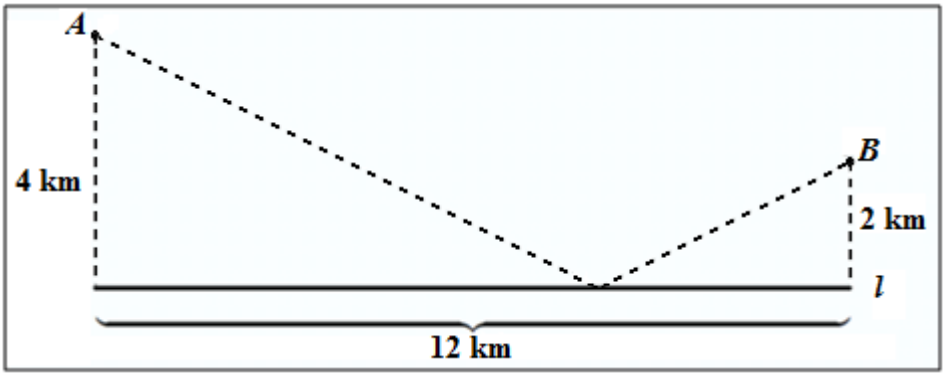
PROBLEMA 1 - ABASTECIMENTO DE DUAS INDÚSTRIAS

Conteúdos do ensino básico associados: Função, Valor de uma função, Domínio de uma função, Ponto de mínimo de uma função, Teorema de Pitágoras.

O PROBLEMA

Duas indústrias *A* e *B* necessitam de água potável. A figura a seguir esquematiza a posição das indústrias, bem como a posição de um encanamento retilíneo *l*, já existente. Em que ponto do encanamento deve ser instalado um reservatório de modo que a metragem de cano a ser utilizada seja mínima?

Figura 4.1 - O problema das duas indústrias.



Fonte: Flemming e Gonçalves (2006).

SOLUÇÃO.

[3] Software muito usado no ensino de Geometria e na plotagem de gráficos, disponível em www.geogebra.org. A versão usada neste trabalho foi a 4.4.44.0.

- **MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROBLEMA**

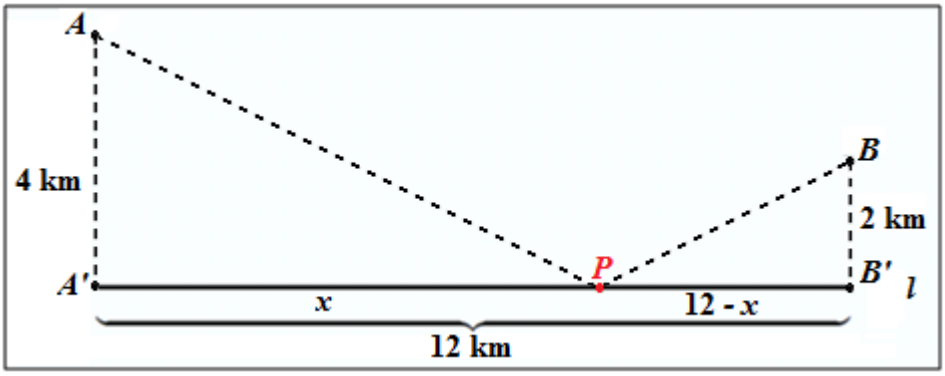
Sejam A' e B' os pés das perpendiculares ao encanamento passando, respectivamente, por A e B. O ponto P é o ponto que satisfaz às condições do problema.

Sejam, ainda,

x : a distância entre A' e P $(x \geq 0)$

$f(x)$: o comprimento total dos encanamentos a serem instalados ($AP + PB$).

Figura 4.2 - Esquema do problema das duas indústrias.



Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves (2006).

Pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$$AP^2 = 4^2 + x^2 \quad \Rightarrow \quad AP = \sqrt{16 + x^2}$$

$$PB^2 = 2^2 + B'P^2 = 4 + (12 - x)^2 \quad \Rightarrow \quad PB = \sqrt{4 + (12 - x)^2}$$

Assim,

$$f(x) = AP + PB \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sqrt{16 + x^2} + \sqrt{4 + (12 - x)^2} \qquad (4.1)$$

Para obter a expressão dada em 4.1 considera-se que o ponto procurado deve estar entre A' e B', ou seja, x pertence ao intervalo [0; 12] que, portanto, é o domínio da função.

O motivo para que P deva estar entre A' e B' é o fato de desejarmos uma instalação com menor custo. Como o custo está diretamente associado ao comprimento do encanamento que deverá ser instalado, deve-se descartar os casos imediatos em que o custo será maior.

De fato, se P estiver à esquerda de A' então,

$$AP^2 = 4^2 + x^2 \quad \Rightarrow \quad AP = \sqrt{16 + x^2}$$

$$PB^2 = 2^2 + B'P^2 = 4 + (12 + x)^2 \quad \Rightarrow \quad PB = \sqrt{4 + (12 + x)^2}$$

Assim,

$$f(x) = AP + PB \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sqrt{16 + x^2} + \sqrt{4 + (12 + x)^2} \qquad (4.2)$$

Como

$$4 + (12 + x)^2 > 4 + (12 - x)^2$$

então a expressão 4.1 fornece resultados menores do que 4.2 e portanto um custo menor.

Na verdade somente a expressão 4.1 não caracteriza uma função. É necessário definir seu domínio e contradomínio. No tipo de problema em questão trabalha-se com números reais, logo o contradomínio acaba sendo o próprio conjunto dos números reais. Já o domínio, de acordo com as considerações anteriores, deve ser o intervalo [0; 12].

Assim, a função que rege o problema é:

$$f: [0;\ 12] \rightarrow \mathbf{R} \text{ tal que } f(x) = \sqrt{16 + x^2} + \sqrt{4 + (12 - x)^2}$$

- **PROBLEMA EQUIVALENTE**

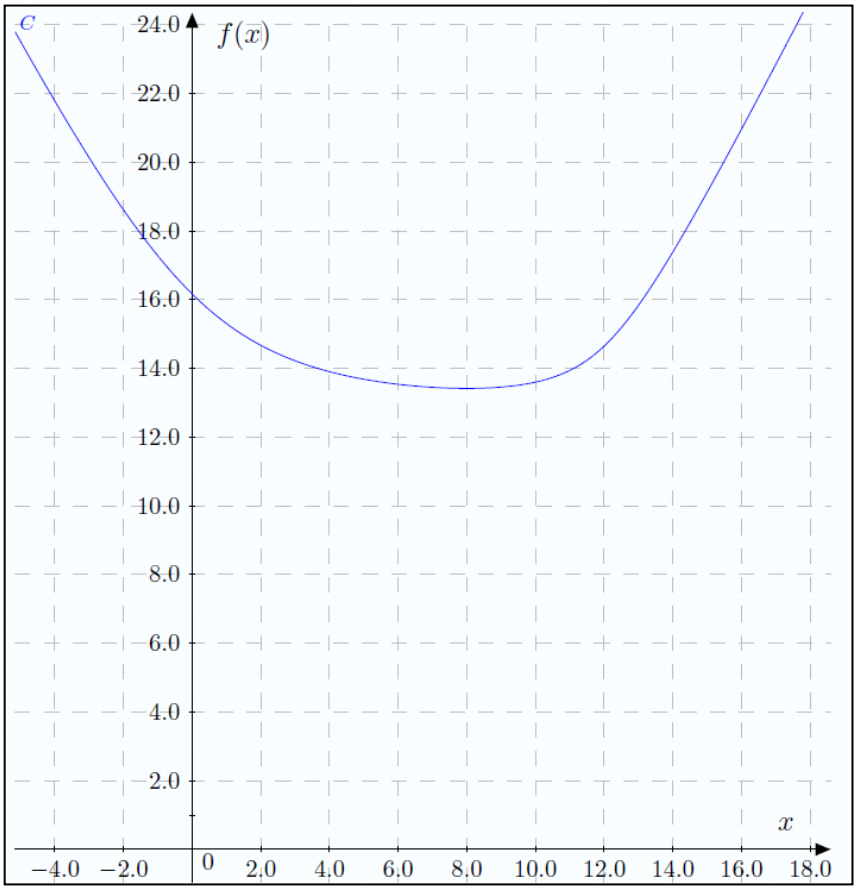
  Após as considerações acima, o problema se resume a minimizar a função objetivo:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \text{tal que } f(x) = \sqrt{16 + x^2} + \sqrt{4 + (12 - x)^2}$$

sujeita a condição: $x^* \in [0;\ 12]$.

A figura abaixo apresenta o gráfico da função,

Figura 4.3 - Gráfico da função objetivo do problema de abastecimento das duas indústrias.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Pelo gráfico observa-se que, mesmo considerando o domínio como todo o conjunto dos números reais, a função objetivo é unimodal e, de fato, o ponto de mínimo da função pertence ao intervalo [0; 12].

- **SOLUÇÃO PELO MÉTODO DE FIBONACCI**

  O intervalo onde o ponto de mínimo está contido é conhecido:

$$[\mathrm{a};\ \mathrm{b}] = [0;\ 12] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a} = 0 \ \text{e} \ \mathrm{b} = 12.$$

  Escolhe-se ε = 0,01.

  Adotando h = 0,005 na desigualdade 3.22:

$$F_{n+1} \geq \frac{(1-2h).(\mathrm{b}-\mathrm{a})}{\varepsilon},$$

obtém-se:

$$F_{n+1} \geq \frac{(1-2h).(\mathrm{b}-\mathrm{a})}{\varepsilon} = \frac{(1+2\,.\,0{,}005).(12-0)}{0{,}01} = 1212.$$

  Analisando a "sequência de Fibonacci"

$$(F_0, F_1, F_2, \dots, F_{15}, F_{16}, \dots) = (1, 1, 2, 3, \dots, 987, 1597, \dots)$$

verifica-se que o primeiro número de Fibonacci, maior ou igual a 1.212, é 1.597 e corresponde a F_{16}. Então faz-se:

$$F_{n+1} = F_{16} \quad \Rightarrow \quad n = 15$$

ou seja, precisa-se de 15 iterações para chegar no resultado procurado.

A seguir são detalhados os cálculos das duas primeiras iterações. Foram utilizados 4 casas decimais com arredondamento.

- **Iteração 1**

  As extremidades do intervalo inicial da iteração 1, são:

$$\mathrm{a}_1 = \mathrm{a} = 0, \quad \mathrm{b}_1 = \mathrm{b} = 12.$$

  Aplicando a equação 3.11, obtém-se:

$$\rho_1 = 1 - \frac{F_{15}}{F_{16}} = 1 - \frac{987}{1597} \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = 0{,}3820.$$

  Utilizando as equações 3.12 e 3.15, chega-se a:

$$\alpha_1 = a_1 + \rho_1.(b_1 - a_1) = 0 + 0{,}3820.(12 - 0) = 4{,}584;$$
$$\beta_1 = a_1 + (1 - \rho_1).(b_1 - a_1) = 0 + 0{,}6180.(12 - 0) = 7{,}416.$$

Os valores da função objetivo para tais pontos são:

$$f(\alpha_1) = \sqrt{16 + 4{,}584^2} + \sqrt{4 + (12 - 4{,}584)^2} = 13{,}7648;$$
$$f(\beta_1) = \sqrt{16 + 7{,}416^2} + \sqrt{4 + (12 - 7{,}416)^2} = 13{,}4273.$$

Como,

$$f(\alpha_1) \geq f(\beta_1),$$

então, pela proposição 3.1, conclui-se que:

$$x^* \in [\alpha_1;\ b_1] = [4{,}584;\ 12].$$

- **Iteração 2**

  As extremidades do intervalo de incerteza, agora, são:

$$a_2 = \alpha_1 = 4{,}584, \quad b_2 = b_1 = 12.$$

  Aplicando a equação 3.11, obtém-se:

$$\rho_2 = 1 - \frac{F_{14}}{F_{15}} = 1 - \frac{610}{987} \Rightarrow \rho_2 = 0{,}3820.$$

  Pela proposição 3.5, conclui-se que:

$$\alpha_2 = \beta_1 = 7{,}416$$

  e pela equação 3.15, chega-se a:

$$\beta_2 = a_2 + (1 - \rho_2).(b_2 - a_2) = 4{,}584 + 0{,}6180.(12 - 4{,}584) = 9{,}1671.$$

  Os valores da função objetivo para tais pontos são:

$$f(\alpha_2) = f(\beta_1) = 13{,}4273;$$
$$f(\beta_2) = \sqrt{16 + 9{,}1671^2} + \sqrt{4 + (12 - 9{,}1671)^2} = 13{,}4695.$$

  Como,

$$f(\alpha_2) < f(\beta_2),$$

então, pela proposição 3.1, conclui-se que:

$$x^* \in [a_2;\ \beta_2] = [4{,}584;\ 9{,}1671].$$

O processo se repete até a décima quarta iteração. Na décima quinta iteração são feitos ajustes para se encontrar α_{15} e β_{15}. Abaixo, na Tab. 4.1, são apresentados os resultados de todas as iterações e em seguida são detalhados os cálculos da décima quinta iteração.

- **Resultados de todas as iterações**

Tabela 4.1. Resultados do problema das duas fábricas usando o método de Fibonacci.

k (Iteração)	ρ_k	a_k	b_k	α_k	β_k	$f(\alpha_k)$	$f(\beta_k)$	$a_{k\ novo}$	$b_{k\ novo}$
1	0,3820	0	12	4,584	7,416	13,7648	13,4273	4,584	12
2	0,3820	4,584	12	7,416	9,1671	13,4273	13,4695	4,584	9,1671
3	0,3820	4,584	9,1671	6,3347	7,416	13,4999	13,4273	6,3347	9,1671
4	0,3820	6,3347	9,1671	7,416	8,0851	13,4273	13,4167	7,416	9,1671
5	0,3820	7,416	9,1671	8,0851	8,4982	13,4167	13,4252	7,416	8,4982
6	0,3819	7,416	8,4982	7,8293	8,0851	13,4174	13,4167	7,8293	8,4982
7	0,3820	7,8293	8,4982	8,0851	8,2427	13,4167	13,4184	7,8293	8,2427
8	0,3818	7,8293	8,2427	7,9871	8,0851	13,4164	13,4167	7,8293	8,0851
9	0,3824	7,8293	8,0851	7,9271	7,9871	13,4166	13,4164	7,9271	8,0851
10	0,3810	7,9271	8,0851	7,9871	8,0249	13,4164	13,4164	7,9871	8,0851
11	0,3846	7,9871	8,0851	8,0249	8,0474	13,4164	13,4165	7,9871	8,0474
12	0,375	7,9871	8,0474	8,0097	8,0249	13,4164	13,4164	8,0097	8,0474
13	0,4	8,0097	8,0474	8,0249	8,0323	13,4164	13,4164	8,0249	8,0474
14	0,3333	8,0249	8,0474	8,0323	8,0399	13,4164	13,4165	8,0249	8,0399
15	0,5	8,0249	8,0399	8,0323	8,0325	13,4164	13,4164	8,0323	8,0399

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Na décima quinta iteração tem-se:

$$a_{15} = a_{14} = 8{,}0249, \quad b_{15} = \beta_{14} = 8{,}0399.$$

$$\alpha_{15} = a_{15} + \left(\frac{1}{2} - h\right).(b_{15} - a_{15}) =$$

$$= 8{,}0249 + (0{,}5 - 0{,}005).(8{,}0399 - 8{,}0249) \cong 8{,}0323;$$

$$\beta_{15} = a_{15} + \left(\frac{1}{2} - h\right).(b_{15} - a_{15}) =$$

$$= 8{,}0249 + (0{,}5 + 0{,}005).(8{,}0399 - 8{,}0249) \cong 8{,}0325.$$

Os valores da função objetivo para α_{15} e β_{15}, são:

$$f(\alpha_{15}) = \sqrt{16 + 8{,}0323^2} + \sqrt{4 + (12 - 8{,}0323)^2} \cong 13{,}4164;$$

$$f(\beta_{15}) = \sqrt{16 + 8{,}0325^2} \; + \; \sqrt{4 + (12 - 8{,}0325)^2} \cong \; 13{,}4164.$$

Como

$$f(\alpha_{12}) \geq f(\beta_{12})$$

então, pela proposição 3.1, conclui-se que:

$$x^* \in [\alpha_{15};\, b_{15}] \; = \; [8{,}0323;\, 8{,}0399].$$

Uma solução para x^* pode ser qualquer ponto do intervalo anterior. Por exemplo, o ponto médio do intervalo: 8,0361 km.

A resposta exata, no entanto, é 8 km, isto é, a canalização deve ser feita a 8 km do encontro da canalização L com a perpendicular que passa por *A*. Este fato ocorre devido ao número de casas decimais e ao arredondamento adotado. A Tab. 4.2, por exemplo, mostra os resultados com mais casas decimais. Neste caso, observa-se que o resultado da tabela tem mais sentido do que o resultado anterior.

- **SOLUÇÃO PELO MÉTODO DE FIBONACCI VIA MICROSOFT EXCEL® OU LIBREOFFICE CALC**

  A seguir é apresentada uma planilha com os resultados de todas as 15 iterações.

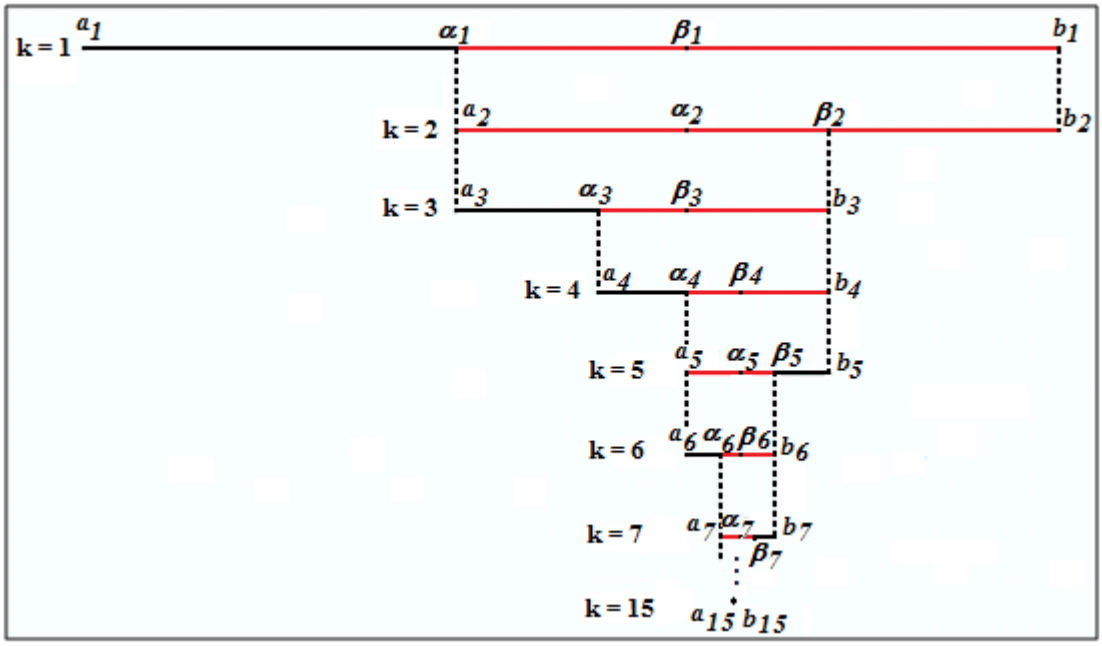
Tabela 4.2 - Resultados da planilha do problema das duas fábricas pelo método de Fibonacci.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	ε =	0,01	h =	0,005		a =	0	b =	12
3									
4	Fn ≥	1212	n+1 =	16	⇒	n =	15	F_n+1 =	1597
5									
6	k (Iteraçã	p_k	a_k	b_k	alpha_k	beta_k	f(alpha_k	f(beta_k	erro_k
7	1	0,38196619	0,00000000	12,00000000	4,58359424	7,41640576	13,76487578	13,42726573	7,41640576
8	2	0,38196555	4,58359424	12,00000000	7,41640576	9,16718848	13,42726573	13,46954944	4,58359424
9	3	0,38196721	4,58359424	9,16718848	6,33437696	7,41640576	13,49988542	13,42726573	2,83281152
10	4	0,38196286	6,33437696	9,16718848	7,41640576	8,08515967	13,42726573	13,41665323	1,75078272
11	5	0,38197425	7,41640576	9,16718848	8,08515967	8,49843456	13,41665323	13,42521883	1,08202880
12	6	0,38194444	7,41640576	8,49843456	7,82968065	8,08515967	13,41736505	13,41665323	0,66875391
13	7	0,38202247	7,82968065	8,49843456	8,08515967	8,24295554	13,41665323	13,41843921	0,41327489
14	8	0,38181818	7,82968065	8,24295554	7,98747652	8,08515967	13,41641312	13,41665323	0,25547902
15	9	0,38235294	7,82968065	8,08515967	7,92736381	7,98747652	13,41658357	13,41641312	0,15779587
16	10	0,38095238	7,92736381	8,08515967	7,98747652	8,02504696	13,41641312	13,41642896	0,09768316
17	11	0,38461538	7,92736381	8,02504696	7,96493425	7,98747652	13,41644896	13,41641312	0,06011271
18	12	0,37500000	7,96493425	8,02504696	7,98747652	8,00250470	13,41641312	13,41640808	0,03757044
19	13	0,40000000	7,98747652	8,02504696	8,00250470	8,01001879	13,41640808	13,41641124	0,02254227
20	14	0,33333333	7,98747652	8,01001879	7,99499061	8,00250470	13,41640871	13,41640808	0,01502818
21	15	0,50000000	7,99499061	8,01001879	8,00242956	8,00257984	13,41640806	13,41640809	**0,00758923**
22	16		7,99499061	8,00257984					

Fonte: Elaborado pelo Autor.

O esquema abaixo mostra as sucessivas reduções do intervalo que contém x^*.

Figura 4.4 - Exercício das duas fábricas – Reduções sucessivas do intervalo de incerteza pelo método de Fibonacci.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

- **SOLUÇÃO PELO MÉTODO DA SEÇÃO ÁUREA**

A função objetivo já é conhecida e sabe-se que o ponto de mínimo está contido no intervalo:

$$[a;\ b] = [0;\ 12] \quad \Rightarrow \quad a = 0 \text{ e } b = 12.$$

A precisão desejada é $\varepsilon = 0{,}01$.

O número de iterações é calculado pela desigualdade 3.40:

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{L_0}\right)}{\ln 0{,}6180} \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{\ln\left(\frac{0{,}01}{12}\right)}{\ln\left(0{,}6180\right)} \cong 14{,}73.$$

Então são necessárias 15 iterações para se atingir a precisão desejada.

A seguir são detalhados os cálculos para as duas primeiras iterações e, na Tab. 4.3 são apresentados os resultados das iterações restantes. Neste caso, também foram utilizados 4 casas decimais com arredondamento.

- **Iteração 1**

O intervalo inicial a ser considerado é o intervalo de incerteza original. Assim:

$$a_1 = a = 0 \quad e \quad b_1 = b = 12.$$

Utilizando as equações 3.37 e 3.38, chega-se a:

$$\alpha_1 = a_1 + \rho.(b_1 - a_1) \cong 0 + 0{,}3820.(12 - 0) = 4{,}584;$$

$$\beta_1 = a_1 + (1-\rho).(b_1 - a_1) \cong 0 + 0{,}6180.(12 - 0) = 7{,}416.$$

Os valores da função objetivo para tais pontos são:

$$f(\alpha_1) = \sqrt{16 + 4{,}584^2} + \sqrt{4 + (12 - 4{,}584)^2} \cong 13{,}7648;$$

$$f(\beta_1) = \sqrt{16 + 7{,}416^2} + \sqrt{4 + (12 - 7{,}416)^2} \cong 13{,}4273,$$

Como

$$f(\alpha_1) \geq f(\beta_1)$$

então, pela proposição 3.1, conclui-se que:

$$x^* \in [\alpha_1;\ b_1] = [4{,}584;\ 12].$$

- **Iteração 2**

O intervalo inicial a ser considerado na segunda iteração é o novo intervalo obtido ao final da primeira iteração. Assim:

$$a_2 = \alpha_1 = 4{,}584, \quad b_2 = b_1 = 12.$$

Pela proposição 3.5, conclui-se que:

$$\alpha_2 = \beta_1 = 7{,}416$$

e pela equação 3.38, chega-se a:

$$\beta_2 = a_2 + 0{,}6180.(b_2 - a_2) = 4{,}584 + 0{,}6180.(12 - 4{,}584) \cong 9{,}1671.$$

Os valores da função objetivo para tais pontos são:

$$f(\alpha_2) = f(\beta_1) = 13{,}4273;$$

$$f(\beta_2) = \sqrt{16 + 9{,}1671^2} + \sqrt{4 + (12 - 9{,}1671)^2} \cong 13{,}4695.$$

Como

$$f(\alpha_2) < f(\beta_2)$$

então, pela proposição 3.1, conclui-se que:

$$x^* \in [a_2;\ \beta_2] = [4{,}584; 9{,}1671].$$

- **Resultados de todas as iterações**

Tabela 4.3 - Resultados do problema das duas fábricas usando o método da Seção Áurea.

k (Iteração)	$\mathbf{a_k}$	$\mathbf{b_k}$	$\boldsymbol{\alpha_k}$	$\boldsymbol{\beta_k}$	$\boldsymbol{f(\alpha_k)}$	$\boldsymbol{f(\beta_k)}$	$\mathbf{a_{k\ novo}}$	$\mathbf{b_{k\ novo}}$
1	0	12	4,584	7,416	13,7648	13,4273	4,584	12
2	4,584	12	7,416	9,1671	13,4273	13,4695	4,584	9,1671
3	4,584	9,1671	6,3347	7,416	13,4999	13,4273	6,3347	9,1671
4	6,3347	9,1671	7,416	8,0851	13,4273	13,4167	7,416	9,1671
5	7,416	9,1671	8,0851	8,4982	13,4167	13,4252	7,416	8,4982
6	7,416	8,4982	7,8294	8,0851	13,4174	13,4167	7,8294	8,4982
7	7,8294	8,4982	8,0851	8,2427	13,4167	13,4184	7,8294	8,2427
8	7,8294	8,2427	7,9873	8,0851	13,4164	13,4167	7,8294	8,0851
9	7,8294	8,0851	7,9271	7,9873	13,4166	13,4164	7,9271	8,0851
10	7,9271	8,0851	7,9873	8,0247	13,4164	13,4164	7,9873	8,0851
11	7,9873	8,0851	8,0247	8,0477	13,4164	13,4165	7,9873	8,0477
12	7,9873	8,0477	8,0104	8,0247	13,4164	13,4164	8,0104	8,0477
13	8,0104	8,0477	8,0247	8,0335	13,4164	13,4164	8,0247	8,0477
14	8,0247	8,0477	8,0335	8,0389	13,4164	13,4165	8,0247	8,0389
15	8,0247	8,0389	8,0301	8,0335	13,4164	13,4164	8,0301	8,0389

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Pelos resultados, conclui-se que:

$$x^* \in [8{,}0301;\ 8{,}0389].$$

Uma solução para x^* pode ser qualquer ponto do intervalo anterior. Por exemplo, o ponto médio do intervalo: 8,0345 km. Como mencionado anteriormente, observa-se um erro maior do que o desejado em relação ao valor correto (8 km) devido ao número de casas decimais e ao arredondamento usados.

A Tab.4.4 mostra os resultados de cada iteração com mais casas decimais.

- **SOLUÇÃO PELO MÉTODO DA SEÇÃO ÁUREA VIA MICROSOFT EXCEL® OU LIBREOFFICE CALC.**

A seguir é apresentada uma planilha com os resultados de todas as 15 iterações.

Tabela 4.4 - Resultados da planilha do problema das duas fábricas pelo o método da Seção Áurea.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		ε = 0,01		p = 0,382		a = 0		b = 12
3								
4								
5	k (Iteraçã	a_k	b_k	alpha_k	beta_k	f(alpha_k	f(beta_k	erro_k
6	1	0	12	4,584	7,416	13,7647897	13,4272805	7,416
7	2	4,584	12	7,416	9,167088	13,4272805	13,4695394	4,5831
8	3	4,584	9,167088	6,33473962	7,416	13,4998501	13,4272805	2,8323
9	4	6,33473962	9,167088	7,416	8,08513092	13,4272805	13,4166531	1,7511
10	5	7,416	9,167088	8,08513092	8,49817238	13,4166531	13,4252093	1,0822
11	6	7,416	8,49817238	7,82938985	8,08513092	13,4173683	13,4166531	0,6688
12	7	7,82938985	8,49817238	8,08513092	8,24269746	13,4166531	13,4184348	0,4133
13	8	7,82938985	8,24269746	7,98727336	8,08513092	13,4164133	13,4166531	0,2557
14	9	7,82938985	8,08513092	7,92708294	7,98727336	13,4165849	13,4164133	0,158
15	10	7,92708294	8,08513092	7,98727336	8,02475659	13,4164133	13,4164285	0,0977
16	11	7,92708294	8,02475659	7,96439427	7,98727336	13,4164502	13,4164133	0,0604
17	12	7,96439427	8,02475659	7,98727336	8,00169818	13,4164133	13,416408	0,0375
18	13	7,98727336	8,02475659	8,00169818	8,01043799	13,416408	13,4164115	0,0232
19	14	7,98727336	8,01043799	7,99612225	8,00169818	13,4164084	13,416408	0,0143
20	15	7,99612225	8,01043799	8,00169818	8,00496938	13,416408	13,4164087	**0,0088**
21		7,99612225	8,00496938					

Fonte: Elaborado pelo Autor.

PROBLEMA 2 – DIMENSÕES DO COPO DE PAPEL

Conteúdos do ensino básico associados: Função, Valor de uma função, Domínio de uma função, Ponto de mínimo de uma função, Gráfico de uma função, Volume de um cone, Comprimento de uma circunferência, Áreas do círculo e do retângulo e Teorema de Pitágoras.

O PROBLEMA DO COPO DE PAPEL

Um copo de papel em forma de cone é feito de maneira a conter 27 cm^3 de água. Ache a altura e o raio do copo que usa a menor quantidade possível de papel.

SOLUÇÃO.

- **MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROBLEMA**

  Sejam r e h, respectivamente, o raio e a altura do cone (onde $r, h > 0$).

  O volume de um cone circular reto é dado por:

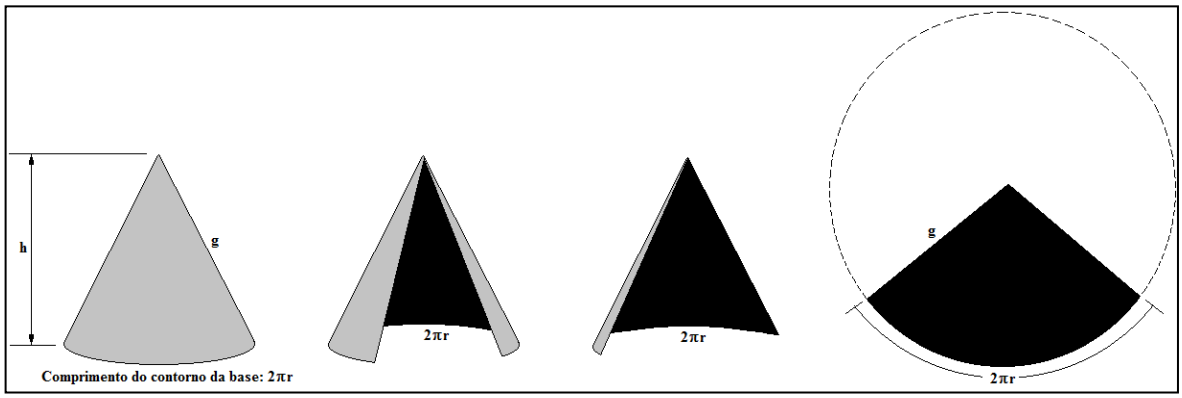
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h. \tag{4.3}$$

  Como $V = 27\ cm^3$, então

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 27 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{81}{\pi r^2}. \tag{4.4}$$

A Fig. 4.5 mostra a planificação do cone (sem a base, que não é usada no problema).

Figura 4.5 - Planificação da superfície lateral de um cone circular reto.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Com uma simples regra de três, determina-se a área lateral do cone: a área do círculo maior (tracejado), πg^2, está para a área do setor circular (escura), A, assim como o comprimento da circunferência maior, $2\pi g$, está para $2\pi r$.

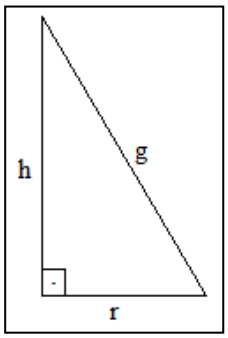
Assim:

$$\frac{\pi g^2}{A} = \frac{2\pi g}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad A = \pi r g, \tag{4.5}$$

onde g é geratriz do cone.

Através do seguinte triângulo retângulo estabelecemos uma relação entre *h, r e g*.

Figura 4.6. Triângulo retângulo formado por r, h e g.



$$g = \sqrt{r^2 + h^2} \tag{4.6}$$

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Substituindo 4.6 em 4.5, obtém-se:

$$A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}.$$

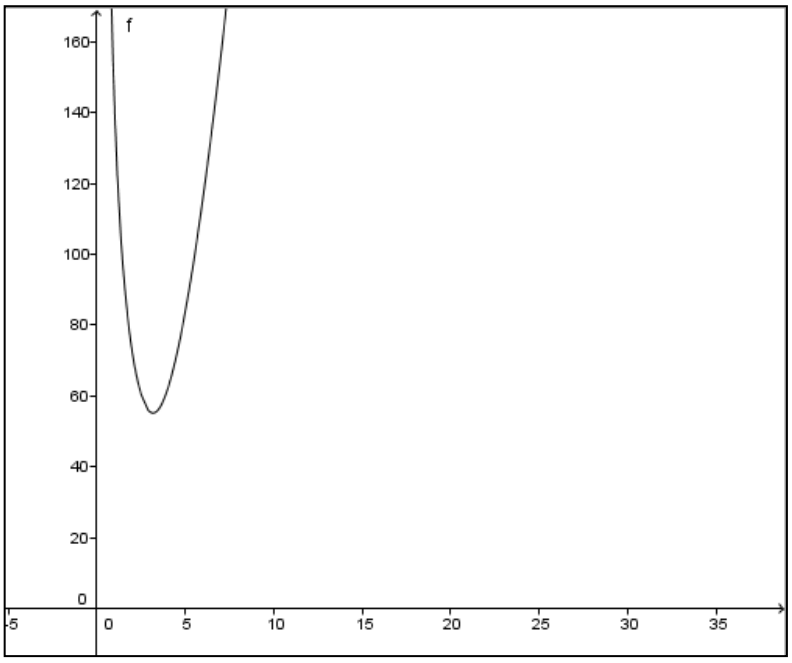
Substituindo 4.4 na expressão acima, tem-se:

$$A = \pi r \sqrt{r^2 + \left(\frac{81}{\pi r^2}\right)^2} \tag{4.7}$$

onde $r \in [0, +\infty)$.

A figura abaixo apresenta o gráfico da função,

Figura 4.7. Gráfico da função objetivo do problema do copo de papel.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

O gráfico mostra que a função é unimodal e o ponto de mínimo pertence ao intervalo [0; 10].

- **PROBLEMA EQUIVALENTE**

Após as considerações acima, o problema se resume a minimizar a função objetivo:

$$A: R^+ \rightarrow R, \text{tal que } A(r) = \pi r \sqrt{r^2 + \left(\frac{81}{\pi r^2}\right)^2}$$

sujeita a condição: $r^* \in [0;\ 10]$.

- **RESOLUÇÃO PELO MÉTODO DE FIBONACCI VIA MICROSOFT EXCEL®/LIBREOFFICE CALC**

O intervalo onde o ponto de mínimo está contido e a precisão desejada são conhecidos:

$$[\text{a};\ \text{b}] = [0;\ 10] \quad \Rightarrow \quad \text{a} = 0 \text{ e } \text{b} = 10.$$

Adotando ε = 0,01 e h = 0,005, tem-se na desigualdade 3.22:

$$F_{n+1} \geq \frac{(1-2h).(\mathrm{b}-\mathrm{a})}{\varepsilon},$$

obtém-se:

$$F_{n+1} \geq \frac{(1-2h).(\mathrm{a}-\mathrm{b})}{\varepsilon} = \frac{(1+2\,.0{,}005).(10-0)}{0{,}01} = 1010.$$

Analisando a "sequência de Fibonacci"

$$(F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{15}, F_{16}, \ldots) = (1, 1, 2, 3, \ldots, 987, 1597, \ldots)$$

verifica-se que o primeiro número de Fibonacci, maior ou igual a 1.010, é 1.597 e corresponde a F_{16}.

Então faz-se:

$$F_{n+1} = F_{16} \quad \Rightarrow \quad n = 15,$$

ou seja, são necessárias 15 iterações para se chegar no resultado procurado.

A Tab.4.5 apresenta os resultados de cada iteração.

Tabela 4.5 - Resultados do problema do copo de papel usando o método de Fibonacci.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		ε =	0,01	h =	0,005		a =	0	b =	10
3									
4		Fn ≥	1010	n+1 =	16	⇒	n =	15	F_n+1 =	1597
5									
6		k (Iteração)	p_k	a_k	b_k	alpha_k	beta_k	f(alpha_k)	f(beta_k)	erro_k
7		1	0,38196619	0,00000000	10,00000000	3,81966187	6,18033813	50,50315223	120,71168844	6,18033813
8		2	0,38196555	0,00000000	6,18033813	2,36067627	3,81966187	38,52061482	50,50315223	3,81966187
9		3	0,38196721	0,00000000	3,81966187	1,45898560	2,36067627	55,91932927	38,52061482	2,36067627
10		4	0,38196286	1,45898560	3,81966187	2,36067627	2,91797120	38,52061482	38,54978653	1,45898560
11		5	0,38197425	1,45898560	2,91797120	2,01628053	2,36067627	42,15432437	38,52061482	0,90169067
12		6	0,38194444	2,01628053	2,91797120	2,36067627	2,57357545	38,52061482	37,73002532	0,55729493
13		7	0,38202247	2,36067627	2,91797120	2,57357545	2,70507201	37,73002532	37,75038743	0,34439574
14		8	0,38181818	2,36067627	2,70507201	2,49217282	2,57357545	37,90897227	37,73002532	0,21289919
15		9	0,38235294	2,49217282	2,70507201	2,57357545	2,62366938	37,73002532	37,69344389	0,13149656
16		10	0,38095238	2,57357545	2,70507201	2,62366938	2,65497808	37,69344389	37,69846860	0,08140263
17		11	0,38461538	2,57357545	2,65497808	2,60488416	2,62366938	37,70068585	37,69344389	0,05009393
18		12	0,37500000	2,60488416	2,65497808	2,62366938	2,63619286	37,69344389	37,69289973	0,03130870
19		13	0,40000000	2,62366938	2,65497808	2,63619286	2,64245460	37,69289973	37,69390671	0,01878522
20		14	0,33333333	2,62366938	2,64245460	2,62993112	2,63619286	37,69274478	37,69289973	0,01252348
21		15	0,50000000	2,62366938	2,63619286	2,62986850	2,62999374	37,69274754	37,69094726	0,00632436
22		16		2,62986850	2,63619286					

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Os resultados da tabela acima mostram que o raio procurado pertence ao intervalo [2,62986850; 2,63619286]. Como resposta pode-se considerar o ponto médio do intervalo. Assim,

$$r^* \cong \frac{2{,}62986850 + 2{,}63619286}{2} \cong 2{,}6330 \text{ cm}$$

Substituindo o valor encontrado em 4.4, obtém-se:

$$h^* = \frac{81}{\pi \,.\, 2{,}6350^2} \cong 3{,}7191 \text{ cm}$$

- **RESOLUÇÃO PELO MÉTODO DA SEÇÃO ÁUREA VIA MICROSOFT EXCEL®/LIBREOFFICE CALC**

A função objetivo já é conhecida e sabe-se que o ponto de mínimo está contido no intervalo:

$$[a;\ b] = [0;\ 10] \quad \Rightarrow \quad a = 0 \text{ e } b = 10.$$

Além disto,

$$\varepsilon = 0{,}01.$$

O número de iterações é calculado pela desigualdade 3.40:

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{L_0}\right)}{\ln 0{,}6180} \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{\ln\left(\frac{0{,}01}{10}\right)}{\ln\left(0{,}6180\right)} \cong 14{,}35$$

Então precisamos de 15 iterações para atingir a precisão desejada.

A Tab. 4.6 mostra os resultados de cada iteração do método da Seção Áurea.

Tabela 4.6. Resultados do problema do copo de papel usando o Método da Seção Áurea.

ε =	0,01	p =	0,38196601	a =	0	b =	10

k (Iteraçã	a_k	b_k	alpha_k	beta_k	f(alpha_k	f(beta_k)	erro_k
1	0,00000000	10,00000000	3,81966011	6,18033989	50,50311812	120,71175572	6,18033989
2	0,00000000	6,18033989	2,36067977	3,81966011	38,52059306	50,50311812	3,81966011
3	0,00000000	3,81966011	1,45898034	2,36067977	55,91952224	38,52059306	2,36067977
4	1,45898034	3,81966011	2,36067977	2,91796068	38,52059306	38,54972476	1,45898034
5	1,45898034	2,91796068	2,01626124	2,36067977	42,15461658	38,52059306	0,90169944
6	2,01626124	2,91796068	2,36067977	2,57354214	38,52059306	37,73006811	0,55728090
7	2,36067977	2,91796068	2,57354214	2,70509831	37,73006811	37,75042872	0,34441854
8	2,36067977	2,70509831	2,49223595	2,57354214	37,90877526	37,73006811	0,21286236
9	2,49223595	2,70509831	2,57354214	2,62379212	37,73006811	37,69342197	0,13155617
10	2,57354214	2,70509831	2,62379212	2,65484833	37,69342197	37,69840396	0,08130619
11	2,57354214	2,65484833	2,60459834	2,62379212	37,70085582	37,69342197	0,05024999
12	2,60459834	2,65484833	2,62379212	2,63565454	37,69342197	37,69285290	0,03105620
13	2,62379212	2,65484833	2,63565454	2,64298591	37,69285290	37,69403130	0,01919379
14	2,62379212	2,64298591	2,63112350	2,63565454	37,69270852	37,69285290	0,01186241
15	2,62379212	2,63565454	2,62832316	2,63112350	37,69284273	37,69270852	**0,00733137**
16	2,62832316	2,63565454					

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Os resultados da tabela acima mostram que o raio procurado pertence ao intervalo [2,62832316; 2,63565454]. Como resposta pode-se considerar o ponto médio do intervalo. Assim,

$$r^* \cong \frac{2{,}62832316 + 2{,}63565454}{2} \cong 2{,}6320 \text{ cm}$$

Substituindo o valor de em 4.4, obtém-se:

$$h^* = \frac{81}{\pi \,.\, 2{,}6320^2} \cong 3{,}7219 \text{ cm}$$

Comparando os resultados obtidos pelos dois métodos, observa-se que o intervalo de incerteza final é mais estreito no caso do método de Fibonacci do que na Seção Áurea. Entretanto, pela precisão procurada, o impacto no resultado não é muito significativo.

PROBLEMA 3 – DIMENSÕES E VOLUME DA CAIXA

Conteúdos do ensino básico associados: Função, Valor de uma função, Domínio de uma função, Ponto de mínimo de uma função, Gráfico de uma função, Volume de um paralelepípedo reto, Áreas do retângulo.

O PROBLEMA DA CAIXA

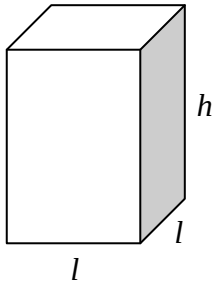
Se 1200 cm^2 de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa.

SOLUÇÃO.

- **MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROBLEMA**

Sejam *l* o comprimento do lado da base e *h* a altura da caixa (*l*, *h* > 0).

Figura 4.8. Caixa de base quadrada.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A área total da superfície da caixa é:

$$\text{A} = \text{área da base} + 4\,.\,\text{área de um retângulo lateral} = l^2 + 4lh = 1200 \quad \Rightarrow$$

$$h = \frac{1200 - l^2}{4l}. \tag{4.8}$$

O volume da caixa é dado por:

$$V = \text{área da base} \,.\, \text{altura} = l^2 h. \tag{4.9}$$

Substituindo 4.8 em 4.9, obtém-se:

$$V = l^2 . \frac{1200 - l^2}{4b} = 300b - \frac{l^3}{4}. \tag{4.10}$$

Como

$$V > 0 \;\Rightarrow\; 300l - \frac{l^3}{4} > 0 \;\Rightarrow\; 0 < l < \sqrt{1200}\ \text{cm}$$

- **PROBLEMA EQUIVALENTE**

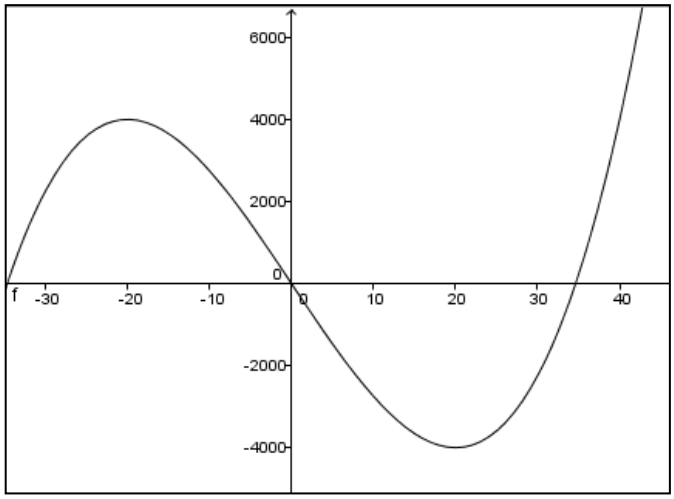
Após as considerações acima, o problema se resume a minimizar a função objetivo:

$$V: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \text{ tal que } V(l) = -300l + l^3/4$$

$$\text{sujeita a condição: } l^* \in [0;\ \sqrt{1200}].$$

O gráfico de tal função é mostrada na Fig. 4.4. Tal gráfico foi feito no Geogebra.

Figura 4.9. Gráfico da função objetivo do problema da caixa.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

- **RESOLUÇÃO PELO MÉTODO DE FIBONACCI VIA MICROSOFT EXCEL®/LIBREOFFICE CALC**

O intervalo onde o ponto de mínimo está contido e a precisão desejada são conhecidos:

$$(\text{a; b}) = (0;\ \sqrt{1200}) \;\Rightarrow\; \text{a} = 0 \text{ e } \text{b} = \sqrt{1200}.$$

Adotando ε = 0,01 e h = 0,0005 na desigualdade 3.22:

$$F_{n+1} \geq \frac{(1-2h).(\mathrm{b}-\mathrm{a})}{\varepsilon},$$

obtém-se:

$$F_{n+1} \geq \frac{(1-2h).(\mathrm{b}-\mathrm{a})}{\varepsilon} = \frac{(1+2\,.\,0{,}0005).(\sqrt{1200}-0)}{0{,}01} = 3467{,}57.$$

Analisando a "Sequência de Fibonacci"

$$(F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{17}, F_{18}, \ldots) = (1, 1, 2, 3, \ldots, 2584, 4181, \ldots)$$

verifica-se que o primeiro número de Fibonacci, maior ou igual a $3467{,}57$, é 4181 e corresponde a F_{18}.

Então faz-se:

$$F_{n+1} = F_{18} \quad \Rightarrow \quad n = 17$$

ou seja, precisa-se de 17 iterações para se chegar no resultado procurado.

Tabela 4.7 - Resultados do problema da caixa usando o Método de Fibonacci.

ε =	0,01	h =	0,005		a =	0	b =	34,6410162
Fn ≥	3498,74263	n+1 =	18	⇒	n =	17	F_n+1 =	4181

k (Iteraçã	p_k	a_k	b_k	alpha_k	beta_k	f(alpha_k)	f(beta_k)	erro_k
1	0,38196604	0,00000000	34,64101615	13,23169165	21,40932450	-3390,36407926	-3969,50726829	21,40932450
2	0,38196594	13,23169165	34,64101615	21,40932450	26,46338330	-3969,50726829	-3305,86766185	13,23169165
3	0,38196619	13,23169165	26,46338330	18,28575045	21,40932450	-3957,17962289	-3969,50726829	8,17763285
4	0,38196555	18,28575045	26,46338330	21,40932450	23,33980926	-3969,50726829	-3823,37178183	5,05405880
5	0,38196721	18,28575045	23,33980926	20,21623521	21,40932450	-3999,29610735	-3969,50726829	3,12357405
6	0,38196286	18,28575045	21,40932450	19,47883974	20,21623521	-3995,96126765	-3999,29610735	1,93048476
7	0,38197425	19,47883974	21,40932450	20,21623521	20,67192904	-3999,29610735	-3993,15182849	1,19308929
8	0,38194444	19,47883974	20,67192904	19,93453357	20,21623521	-3999,93578234	-3999,29610735	0,73739546
9	0,38202247	19,47883974	20,21623521	19,76054138	19,93453357	-3999,14332622	-3999,93578234	0,45569383
10	0,38181818	19,76054138	20,21623521	19,93453357	20,04224302	-3999,93578234	-3999,97321406	0,28170164
11	0,38235294	19,93453357	20,21623521	20,04224302	20,10852576	-3999,97321406	-3999,82301284	0,17399219
12	0,38095238	19,93453357	20,10852576	20,00081631	20,04224302	-3999,99999000	-3999,97321406	0,10770945
13	0,38461538	19,93453357	20,04224302	19,97596028	20,00081631	-3999,99133485	-3999,99999000	0,06628274
14	0,37500000	19,97596028	20,04224302	20,00081631	20,01738699	-3999,99999000	-3999,99546407	0,04142671
15	0,40000000	19,97596028	20,01738699	19,99253097	20,00081631	-3999,99916331	-3999,99999000	0,02485603
16	0,33333333	19,99253097	20,01738699	20,00081631	20,00910165	-3999,99999000	-3999,99875721	0,01657068
17	0,50000000	19,99253097	20,00910165	20,00073346	20,00089916	-3999,99999193	-3999,99998787	0,00836820
18		19,99253097	20,00089916					

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Os resultados da Tab. 4.7 mostram que o comprimento ótimo pertence ao intervalo [19,99253097; 20,00089916]. Como resposta, pode-se considerar o ponto médio do intervalo. Assim,

$$l^* \cong \frac{19{,}99253097 + 20{,}00089916}{2} \cong 20 \text{ cm}$$

Substituindo o valor encontrado em 4.9, obtém-se:

$$h^* = \frac{1200 - l^2}{4l} = \frac{1200 - 20^2}{4\,.\,20} = 10 \text{ cm}$$

Logo, o maior volume é

$$V = 20^2 . 10 = 4000 \text{ cm}^3$$

- **RESOLUÇÃO PELO MÉTODO DA SEÇÃO ÁUREA VIA MICROSOFT EXCEL OU LIBREOFFICE CALC**

A função objetivo já é conhecida e sabe-se que o ponto de mínimo está contido no intervalo:

$$(a; b) = (0; \sqrt{1200}) \quad \Rightarrow \quad a = 0 \text{ e } b = \sqrt{1200}.$$

Além disto,

$$\varepsilon = 0{,}01.$$

O número de iterações é calculado pela desigualdade 3.40:

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{L_0}\right)}{\ln 0{,}6180} \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{\ln\left(\frac{0{,}01}{\sqrt{1200}}\right)}{\ln\left(0{,}6180\right)} \cong 16{,}93$$

Portanto são necessárias 17 iterações para atingir a precisão desejada.

A tabela seguinte mostra os resultados de cada iteração do método da Seção Áurea.

Tabela 4.8 - Resultados do problema da caixa usando o Método da Seção Áurea.

ε =	0,01	p =	0,38196601	a =	0	b =	34,6410162

k (Iteraçã	a_k	b_k	alpha_k	beta_k	f(alpha_k)	f(beta_k)	erro_k
1	0,00000000	34,64101615	13,23169076	21,40932539	-3390,36392976	-3969,50722950	21,40932539
2	13,23169076	34,64101615	21,40932539	26,46338153	-3969,50722950	-3305,86806106	13,23169076
3	13,23169076	26,46338153	18,28574691	21,40932539	-3957,17944840	-3969,50722950	8,17763462
4	18,28574691	26,46338153	21,40932539	23,33980305	-3969,50722950	-3823,37245529	5,05405614
5	18,28574691	23,33980305	20,21622457	21,40932539	-3999,29617671	-3969,50722950	3,12357848
6	18,28574691	21,40932539	19,47884772	20,21622457	-3995,96139073	-3999,29617671	1,93047767
7	19,47884772	21,40932539	20,21622457	20,67194853	-3999,29617671	-3993,15142886	1,19310081
8	19,47884772	20,67194853	19,93457168	20,21622457	-3999,93585704	-3999,29617671	0,73737685
9	19,47884772	20,21622457	19,76050062	19,93457168	-3999,14303510	-3999,93585704	0,45572396
10	19,76050062	20,21622457	19,93457168	20,04215351	-3999,93585704	-3999,97332750	0,28165290
11	19,93457168	20,21622457	20,04215351	20,10864274	-3999,97332750	-3999,82263074	0,17407106
12	19,93457168	20,10864274	20,00106091	20,04215351	-3999,99998312	-3999,97332750	0,10758183
13	19,93457168	20,04215351	19,97566428	20,00106091	-3999,99112020	-3999,99998312	0,06648923
14	19,97566428	20,04215351	20,00106091	20,01675689	-3999,99998312	-3999,99578693	0,04109260
15	19,97566428	20,01675689	19,99136026	20,00106091	-3999,99888048	-3999,99998312	0,02539663
16	19,99136026	20,01675689	20,00106091	20,00705624	-3999,99998312	-3999,99925305	0,01569598
17	19,99136026	20,00705624	19,99735559	20,00106091	-3999,99989511	-3999,99998312	0,00970065
18	19,99735559	20,00705624					

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Os resultados da Tab. 4.8 mostram que o comprimento ótimo pertence ao intervalo [19,99735559; 20,00705624]. Como resposta pode-se considerar o ponto médio do intervalo. Assim,

$$l^* \cong \frac{19{,}99735559 + 20{,}00705624}{2} \cong 20 \text{ cm}$$

Substituindo o valor encontrado em 4.9, obtém-se:

$$h^* = \frac{1200 - l^2}{4l} = \frac{1200 - 20^2}{4\,.\,20} = 10 \text{ cm}$$

Logo, o maior volume é

$$V = 20^2.10 = 4000 \text{ cm}^3$$

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi desenvolvido, por meio de uma pesquisa bibliográfica, visando apresentar dois métodos de otimização: Fibonacci e Seção Áurea. A proposta foi construir tais métodos partindo de um conhecimento inicial relevante, que no caso é o conhecimento sobre Funções.

Aqui não se propõe incluir o conteúdo de otimização no currículo do ensino médio, mesmo porque já se tem muito conteúdo a ser trabalhado (e nem sempre se consegue abordar tudo). Sugere-se que os métodos apresentados neste trabalho sejam trabalhados como atividade complementar, como uma espécie de iniciação científica. Caso se deseje, ou exista uma disciplina de informática, os métodos em questões podem ser introduzidos, no estudo de planilhas eletrônicas, como aplicação do estudo de Funções.

Muitos detalhes (como algumas demonstrações) podem ser omitidos quando apresentados aos alunos. É também interessante trabalhar o conceito de convergência de sequências numéricas. Como já mencionado, na introdução, uma atividade que trabalha como esse conceito é o de adivinhar o preço de um produto.

Deve-se observar, também, que reunindo os resultados de cada iteração dos Métodos de Fibonacci e da Seção Áurea, criam-se sequências que convergem (pelos teoremas abordados no segundo capítulo) ao resultado desejado.

A proposta de construir o conhecimento visa desenvolver e dar naturalidade a conteúdos matemáticos já vistos, bem como assimilar novos conceitos.

A própria resolução dos problemas dá mais sentido em encontrar o valor de uma função, do que propriamente problemas do tipo: Calcule $f(2)$.

Uma questão que deve ser deixada clara é que os métodos de Fibonacci e da Seção Áurea não resolvem todo tipo de problema de otimização. Apresentam limitações, mas nem por isso deixam de ser interessantes e úteis, em especial, no contexto do ensino médio.

Uma limitação dos dois métodos é que eles se aplicam apenas para funções unimodais dentro de um intervalo fechado (intervalo de incerteza). E isto foi um dos problemas que se pode verificar na aplicação dos métodos: saber se uma função é ou não unimodal. Essa análise nem sempre pode ser feita apenas com conhecimento de conteúdos do ensino médio. Por isso, usou-se o Geogebra para gerar os gráficos e fazer uma análise da função. Apesar disto, o processo não deixa de ser interessante já que explora e dá sentido a diversos conteúdos conhecidos pelo público a que se destina.

Com relação à convergência dos resultados obtidos nos dois métodos citados, pode-se observar que mesmo aplicando o método corretamente o resultado pode não ser o esperado. Como já foi mencionado, no problema das duas fábricas (problema 1 do capítulo 4) os intervalos de incerteza obtidos ([8,0323; 8,0399] pelo método de Fibonacci e [8,0301; 8,0389] pelo método da Seção Áurea), não contêm o valor exato do ponto de mínimo que 8. A diferença entre um valor desse intervalo e o valor exato supera a precisão 0,01. O problema ocorreu devido à limitação dos cálculos a quatro casas decimais e ao arredondamento utilizado; quando se usou mais casas decimais o resultado ficou dentro do esperado.

A resolução dos problemas propostos pelo Método de Fibonacci e pelo Método da Seção Áurea permite concluir que o segundo método é preferível ao primeiro. Um dos problemas do Método de Fibonacci é que se tem que buscar primeiro o enésimo e o enésimo primeiro número de Fibonacci para iniciar o método. Não só isto, mas em cada iteração, deve-se sempre obter os dois números consecutivos de Fibonacci que geram o "ρ_k" necessário para obter "α_k" e "β_k". Perde-se tempo com isto, o que não ocorre com o Método da Seção Áurea, já que "ρ" é constante em tal método. Além disto, o fato, de não buscar o raio ("ρ") em cada iteração torna o método mais simples (menor custo computacional).

Como demonstrado, no teorema 3.1, o Método de Fibonacci é o método que melhor otimiza o intervalo de incerteza nas condições adotadas neste trabalho: Funções unimodais, com reaproveitamento de um dos pontos obtidos em cada iteração ("α_k" ou "β_k"), isto é, o antigo α se torna o novo β (ou vice-versa). Tal fato foi observado nos problemas propostos, o intervalo de incerteza final obtido pelo método de Fibonacci em geral foi mais refinado do que o da Seção Áurea. No entanto, não se percebe alteração significativa no número de iterações e os resultados encontrados não têm diferenças significativas.

Reunindo esses argumentos conclui-se que o Método da Seção Áurea é preferível ao de Fibonacci.

Uma sugestão para outros trabalhos é utilizar a mesma proposta (de partir de um conhecimento inicial relevante e construir um novo conhecimento) para a resolução de problemas elementares envolvendo a obtenção de raízes de equações não lineares ou mesmo incluir outras técnicas de otimização.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CHONG, E.; ZAK, S. **Introduction to Optimization**. 4. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2013.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática.** 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

KIEFER, J. **Sequential minimax for search a maximum**. New York: AMS, v.4, Nº3, 1953.

LIMA, E. L. **Análise Real : Funções de Uma Variável**. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. v.1.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 1999. v.2.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção Profmat).

MOREIRA, M. A. **Teoria de Aprendizagem**. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1999.

RAO, S. **Engineering Optimization Theory and Practice**. 4. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2009.

SIGLER, L. E. **Fibonacci's Liber Abaci - A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation**. New York: Springer, 2002.

STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo: Cengage, 2009. v.1.

SUN, W.; YAN, Y. **Optimization Theory and Methods - Nonlinear Programming**. New York: Springer, 2006. v.1.

APÊNDICE A: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ELEMENTARES DE OTIMIZAÇÃO COM GEOGEBRA E SOLVER

A seguir são apresentados dois programas que permitem resolver problemas "elementares" de otimização. O primeiro é o GEOGEBRA, programa muito utilizado para construções geométricas. Este software é gratuito e pode ser encontrado através da página www.geogebra.org. Já o segundo aplicativo, SOLVER, é um complemento do Microsoft Excel®.

A1. OTIMIZAÇÃO NO GEOGEBRA

O Geogebra oferece dois comandos, Mínimo e Máximo, que permitem obter, dentro das limitações do programa, o resultado de um problema de otimização.

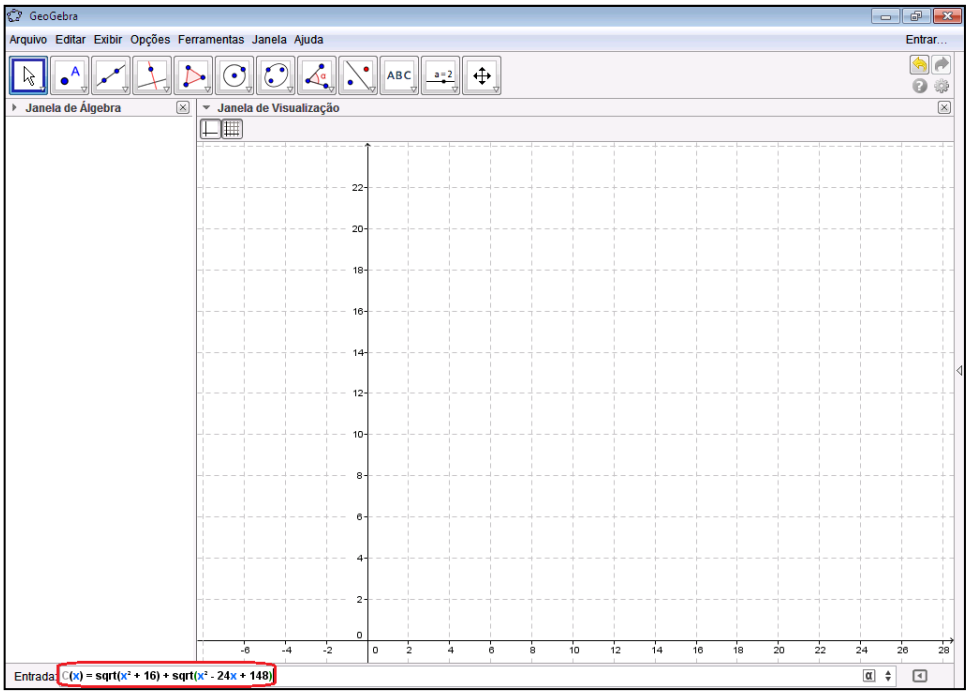
Para exemplificar o uso do comando Mínimo é retomado o problema das duas indústrias dado no capítulo 4. O uso do comando Máximo é análogo. O procedimento para resolver tal problema é dado a seguir.

No campo de Entrada (parte inferior, como mostrado na Fig. A.1) digita-se a expressão da função objetivo:

```
C(x) = sqrt(x^2 + 16) + sqrt(x^2 - 24x + 148)
```

onde sqrt() é a raiz quadrada da expressão indicada dentro do parênteses.

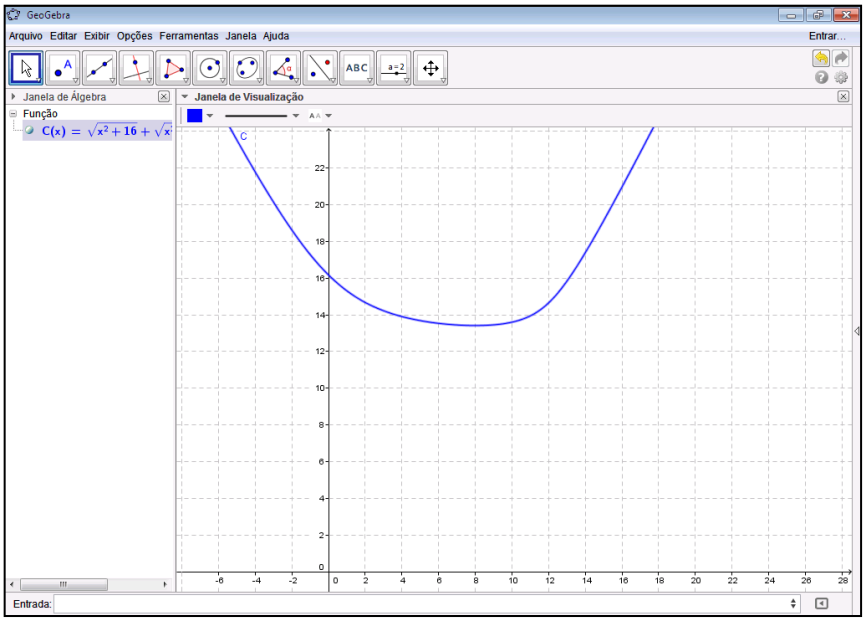
Figura A.1 - Digitação da função no campo de entrada do Geogebra.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Após digitar a expressão de C(x) aperte a tecla ENTER, como ilutra a Fig. A.2.

Figura A.2 - Gráfico da função $C: R \rightarrow R,$ com $C(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 24x + 148}$



Fonte: Elaborado pelo Autor.

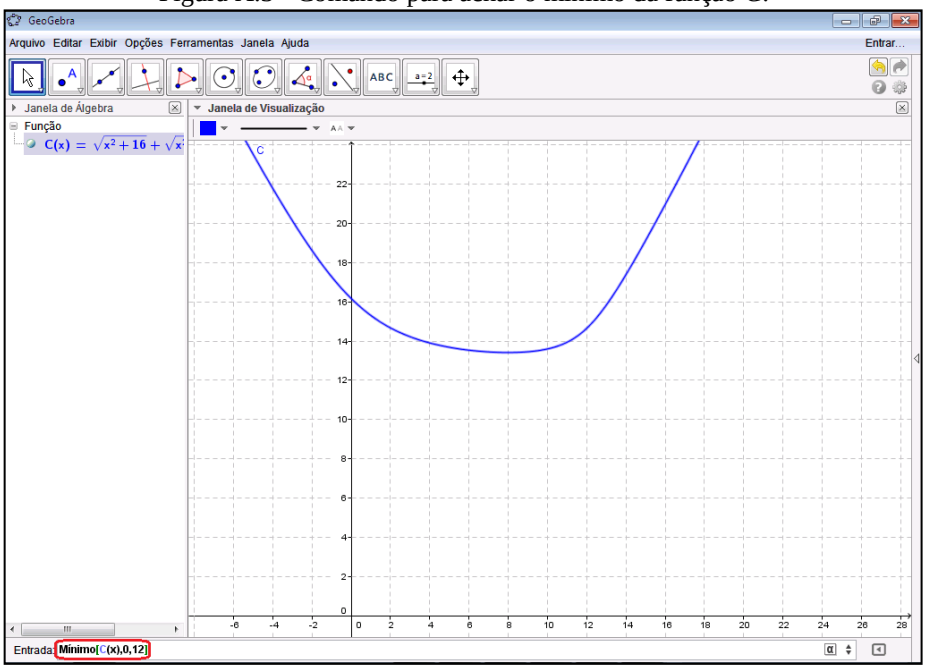
Digita-se no campo de Entrada o comando que irá fornecer o ponto de mínimo da função, conforme a Fig. A.3.

```
Mínimo[C(x),0,12]
```

A sintaxe de tal comando é a seguinte:

Mínimo[Função objetivo, extremidade inicial do intervalo de incerteza, extremidade final do intervalo de incerteza]

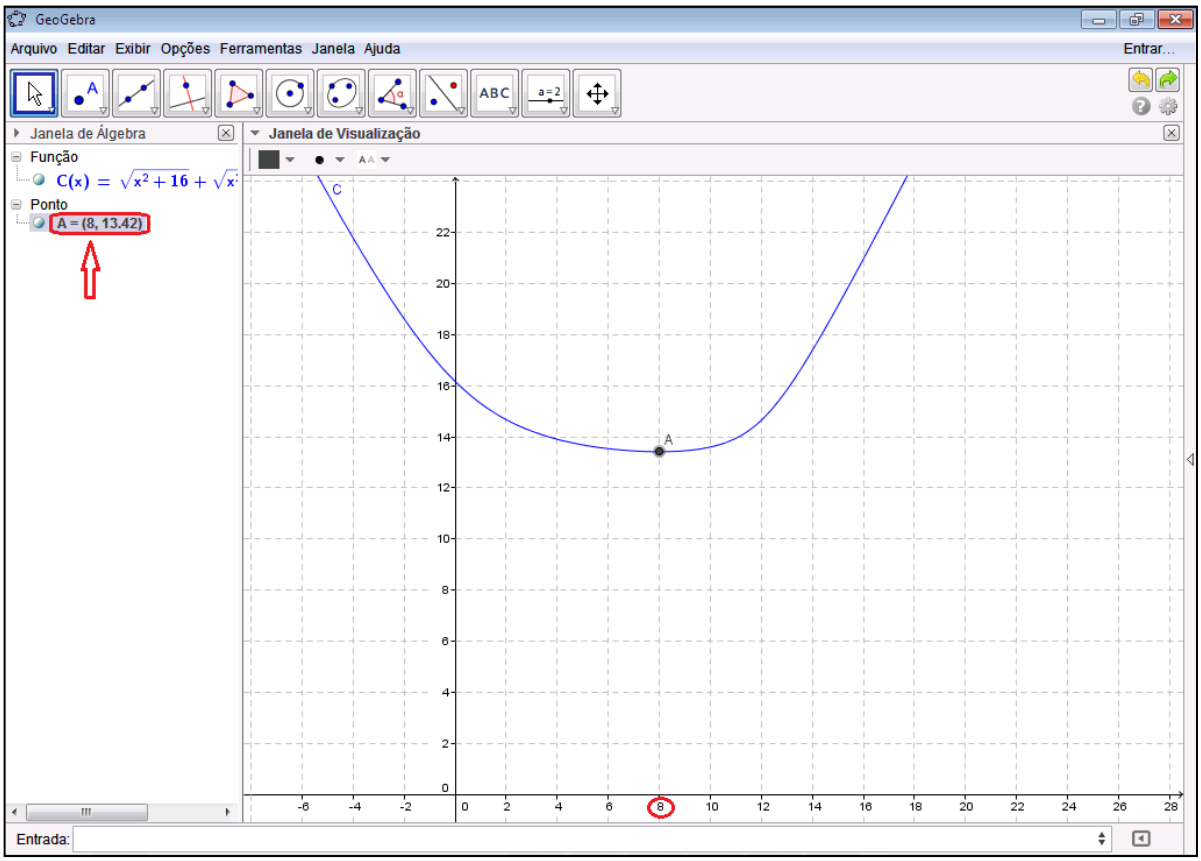
Figura A.3 - Comando para achar o mínimo da função *C*.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Ao apertar a tecla ENTER aparecerá o ponto de mínimo da função, conforme a Fig. A.4.

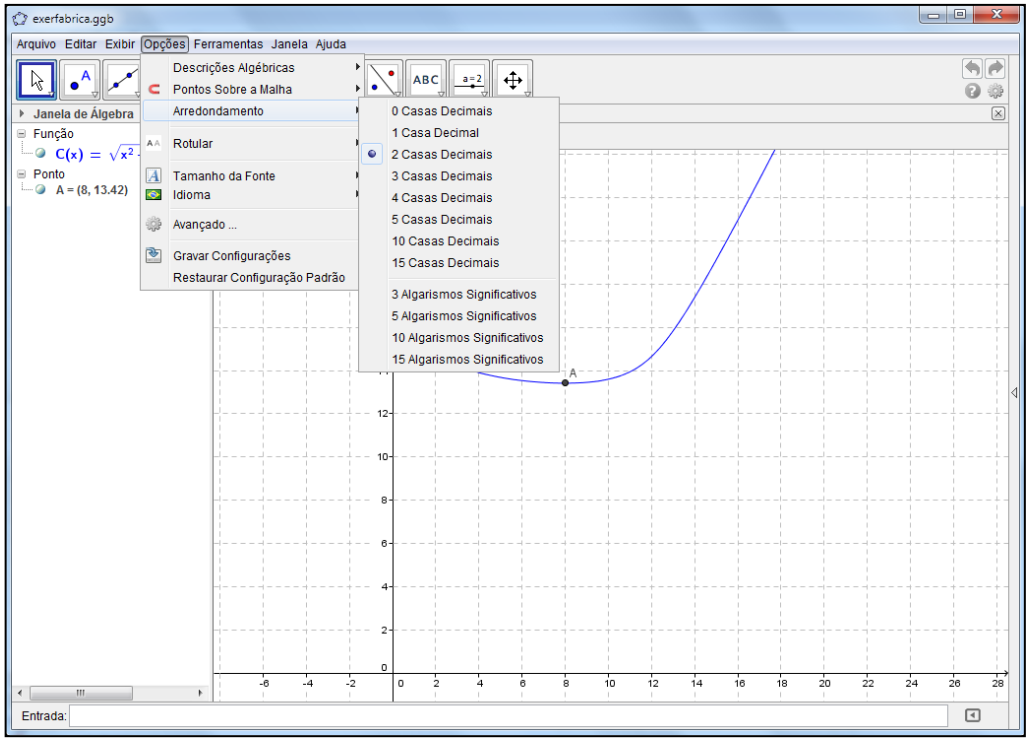
Figura A.4 - Ponto de mínimo da função *C*.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

O resultado é apresentado com duas casas decimais, porém há outras opções disponíveis: basta que se clique em Opções, na barra de menu, e em seguida escolhe-se o número de casas desejado em Arredondamento, conforme ilustra a Fig. A.5.

Figura A.5 - Opções de número de casas decimais.



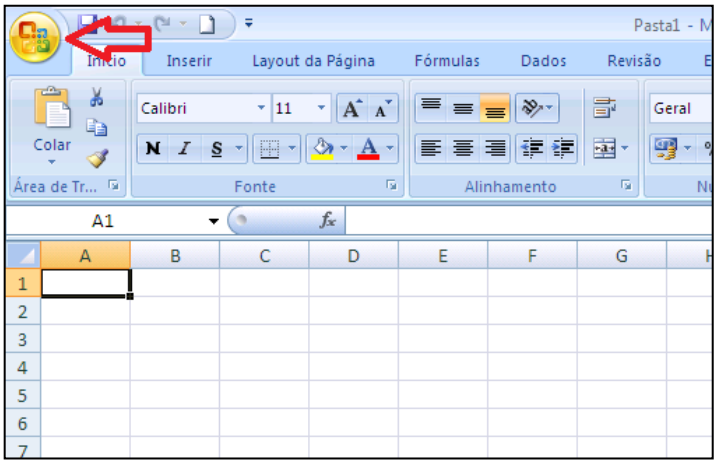
Fonte: Elaborado pelo Autor.

A2. OTIMIZAÇÃO COM O SOLVER (COMPLEMENTO DO EXCEL)

Outro aplicativo que permite a resolução de alguns problemas de otimização é o SOLVER, um suplemento do Microsoft Excel®. Tal suplemento nem sempre está disponível na aba DADOS do Excel®. Caso não esteja, os passos abaixo mostram como habilitá-lo.

1) Clique no Botão Office (círculo do canto superior esquerdo), conforme ilustra a Fig. A.6.

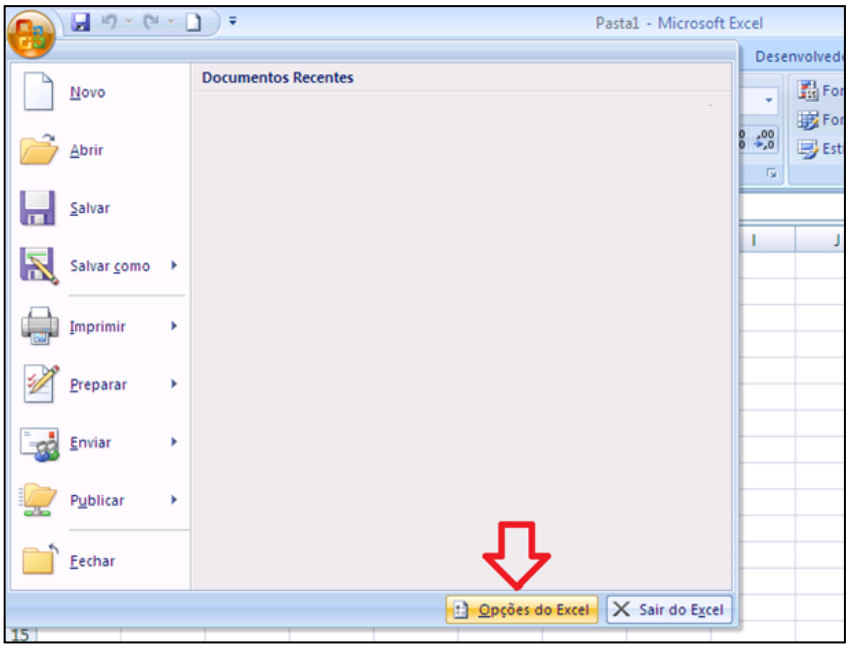
Figura A.6 - Instalação do SOLVER: Passo 1 - Botão Office.



Fonte: *print screen* do software Microsoft Excel®

2) Clique em Opções do Excel, como na Fig. A.7.

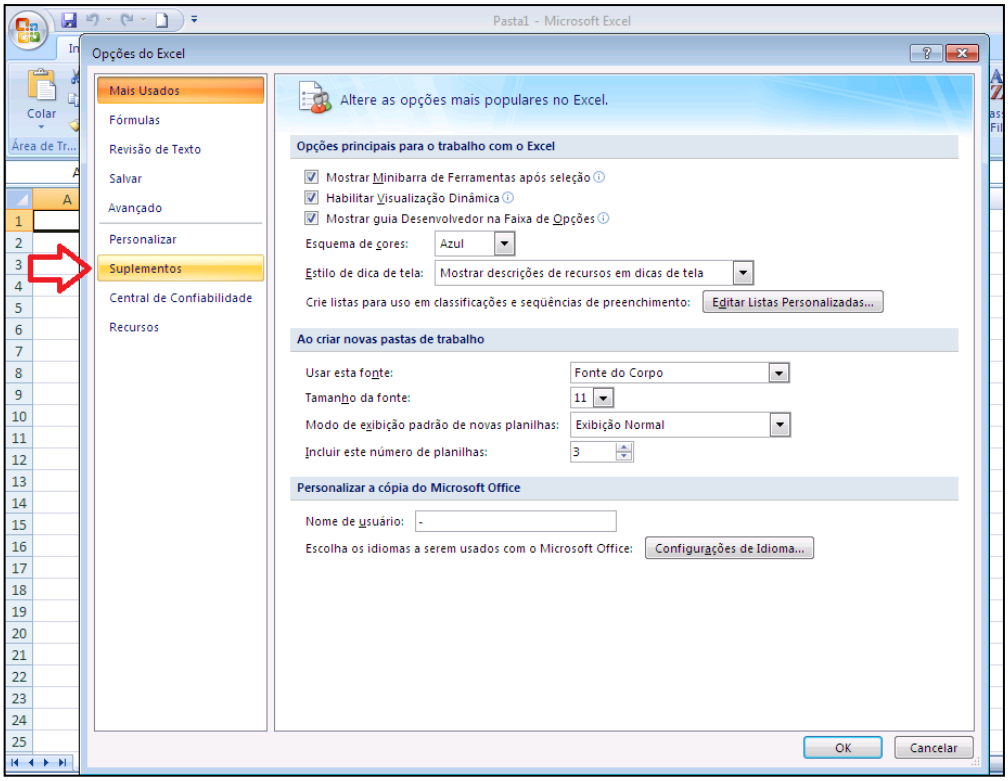
Figura A.7 - Instalação do SOLVER: Passo 2 - Opções do Excel.



Fonte: *print screen* do software Microsoft Excel®

3) Clique em Suplementos, como na Fig. A.8.

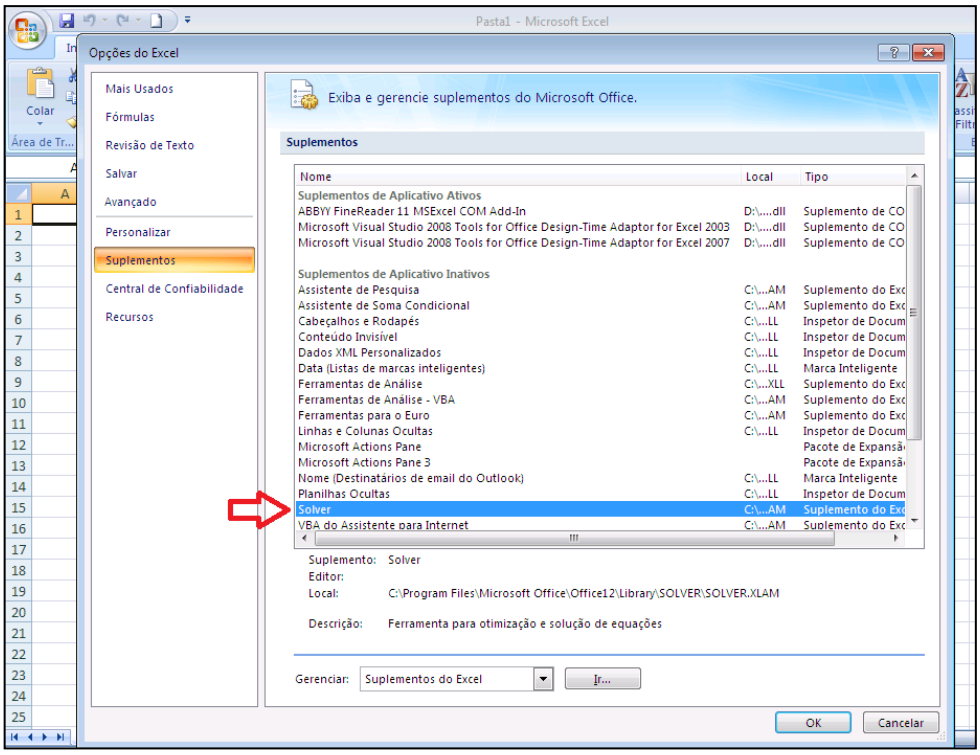
Figura A.8 - Instalação do SOLVER: Passo 3 - Suplementos.



Fonte: *print screen* do software Microsoft Excel®

4) Selecione a opção Solver, como na Fig. A.9.

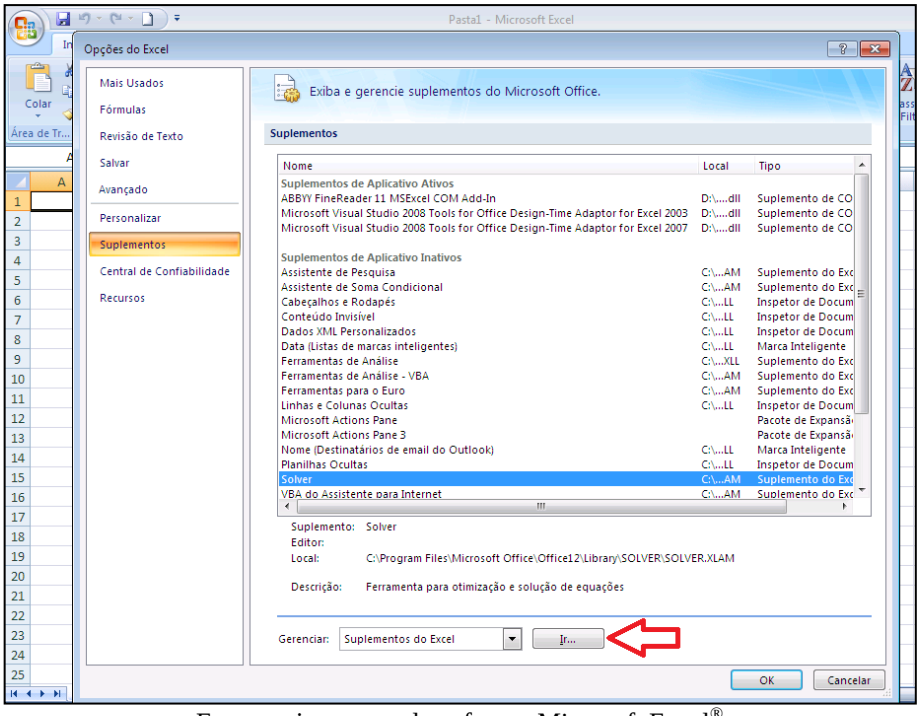
Figura A.9 - Instalação do SOLVER: Passo 4 - Solver.



Fonte: *print screen* do software Microsoft Excel®

5) Clique em Ir, como na Fig. A.10.

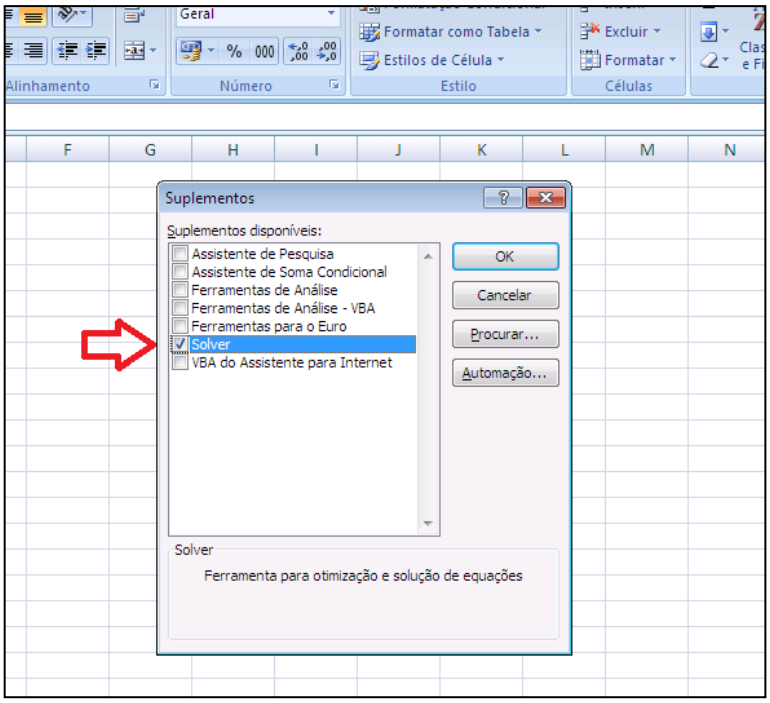
Figura A.10 - Instalação do SOLVER: Passo 5 - Ir.



Fonte: *print screen* do software Microsoft Excel®

6) Selecione a opção Solver, como na Fig. A.11.

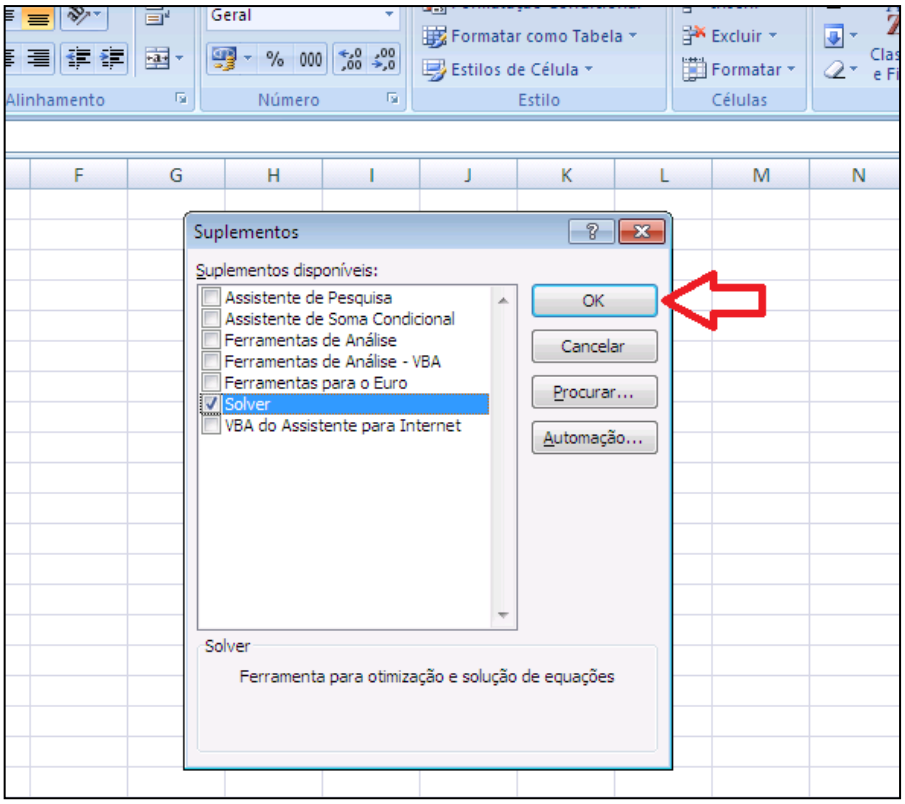
Figura A.11 - Instalação do SOLVER: Passo 6 - Selecionar Solver.



Fonte: *print screen* do software Microsoft Excel®

7) Clique em OK, como ilustra a Fig. A.12, e assim a opção estará instalada.

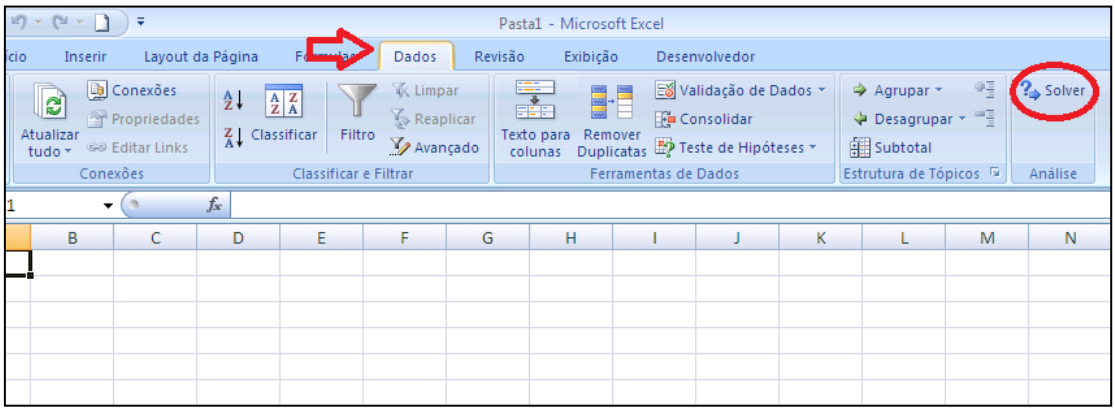
Figura A.12 - Instalação do SOLVER: Passo 7 - OK.



Fonte: *print screen* do software Microsoft Excel®

É possível, dependendo das opções selecionadas durante a instalação do Office, que apareça uma mensagem pedindo para o usuário inserir o CD de Instalação do Office. Depois de instalado, a opção aparecerá na aba DADOS, conforme ilustra a Fig. A.13.

Figura A.13 - Instalação do SOLVER: Passo 8 - Dados.



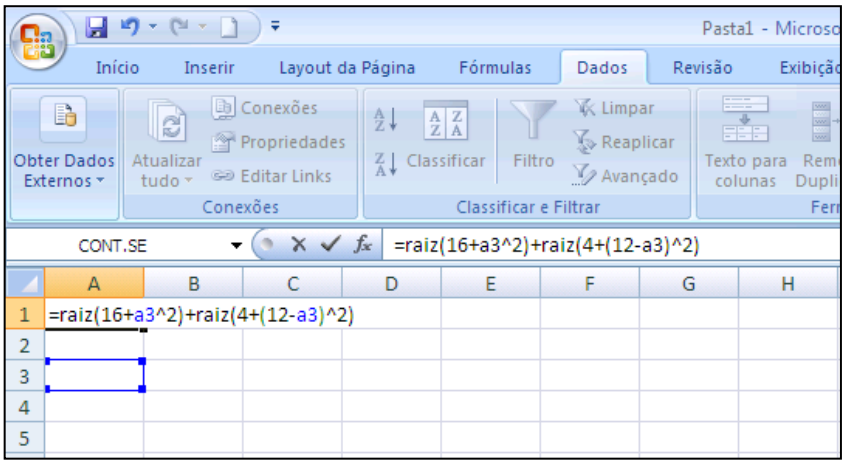
Fonte: *print screen* do software Microsoft Excel®

A seguir, segue o procedimento para resolver o problema das duas indústrias pelo Solver.

Digita-se na célula A1, conforme a Fig. A.14, a fórmula:

```
=raiz(16+A3^2)+raiz((4-(12-A3)^2)
```

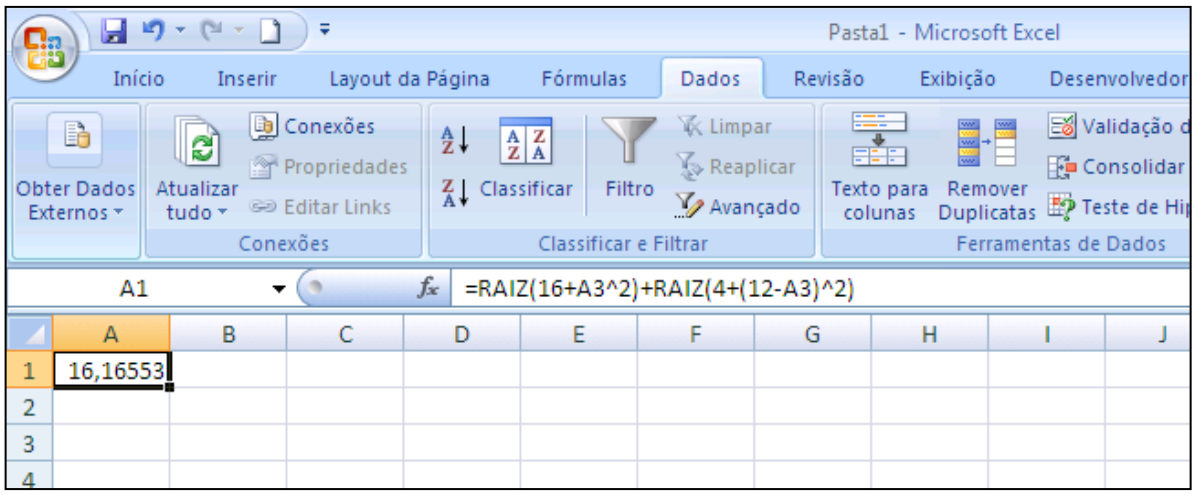
Figura A.14. Digitação da função objetivo.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

em seguida aperte ENTER. Aparecerá o valor da função objetivo para x igual ao valor presente na célula A3, conforme mostrado na Fig. A.15. Como não há nada na célula referenciada (A3), o programa entende que é zero, assim é calculado $f(0)$.

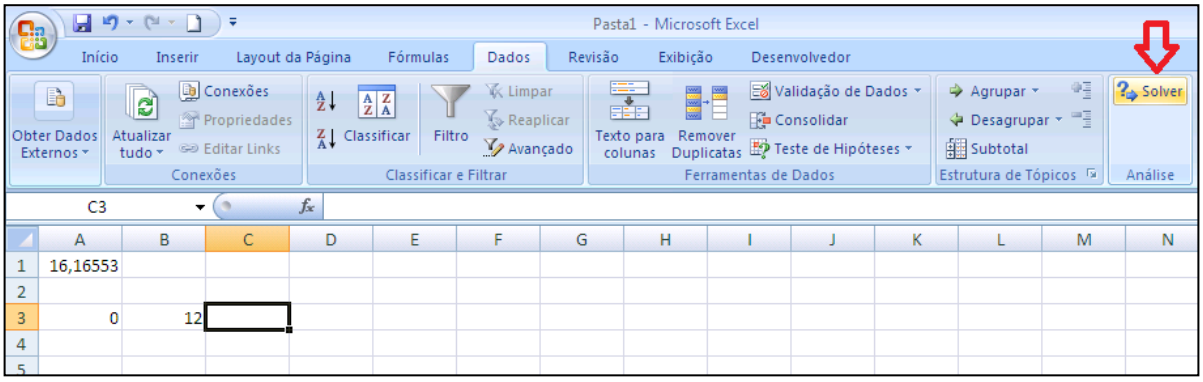
Figura A.15. Valor da função C para *x* igual ao valor contido em A3 (zero).



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Agora digita-se em A3 o valor 0 e em B3 o valor 12, que correspondem às extremidades do intervalo de incerteza. Após, selecione a opção Solver, conforme ilustra a Fig. A.16.

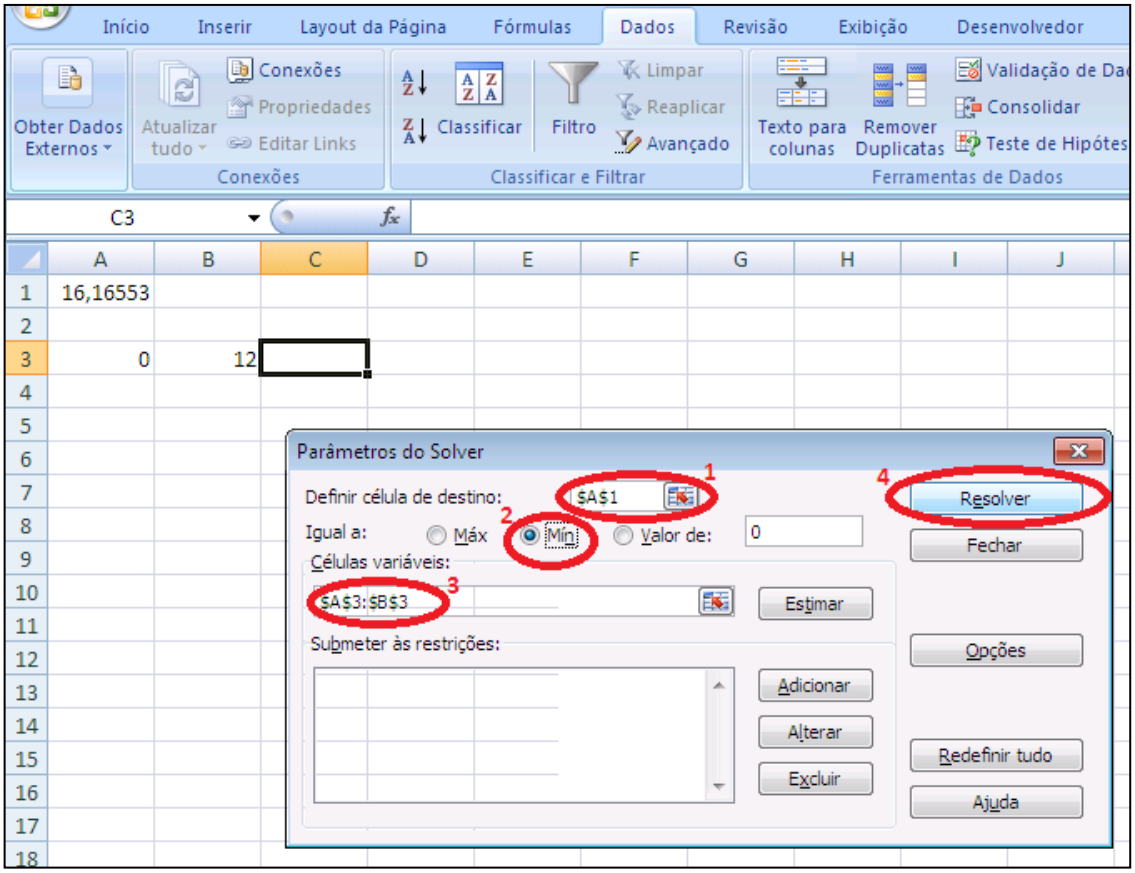
Figura A.16 - Digitação do intervalo de incerteza.



Elaborado pelo Autor.

Aparecerá uma caixa como na figura abaixo.

Figura A.17 - Parâmetros do Solver.



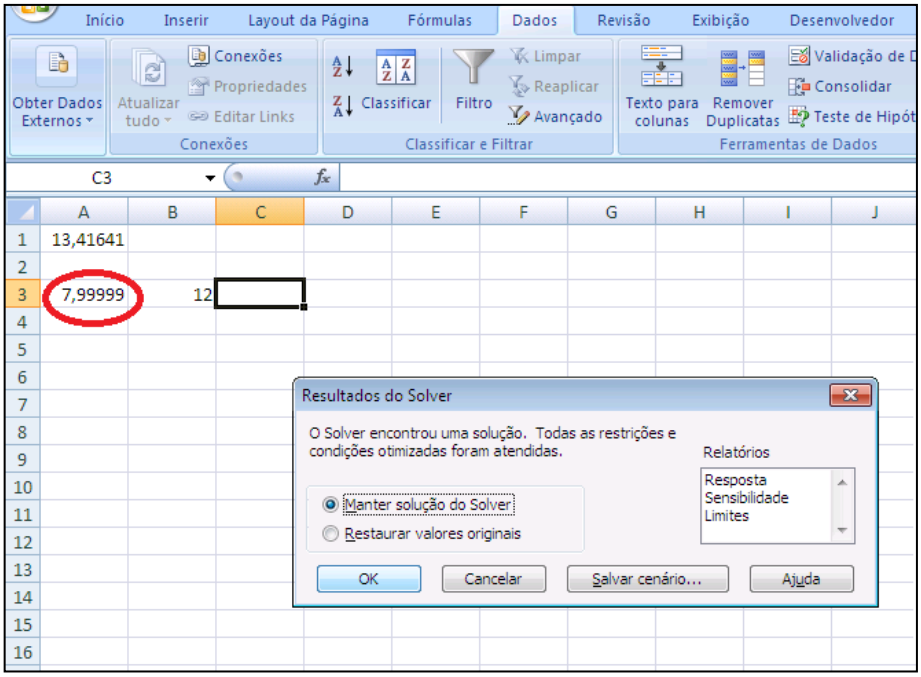
Fonte: *print screen* da caixa de diálogo dos Parâmetros do Solver.

Nesta caixa de diálogo registra-se, no campo 1, o local onde foi digitada a fórmula que indica a função objetivo ($A$1). No campo 2, seleciona-se Mín, já que se deseja o ponto de mínimo. No campo 3, indica-se onde se encontram as extremidades do intervalo de incerteza. No caso $A$3:$B$3.

Os campos 1 e 3 podem ser preenchidos com a ajuda do "*quadrinho*" com uma seta vermelha ao lado. Quando se clica nela, abre-se uma janela, daí com o mouse basta selecionar diretamente as células que farão parte do campo.

Após os três passos anteriores, basta clicar em "Resolver" que em instantes será registrado na célula A3 o valor, com uma aproximação de 0,0000001, do valor procurado. Digite "OK" para a nova janela se quiser manter o valor na célula A3, conforme a Fig. A.18.

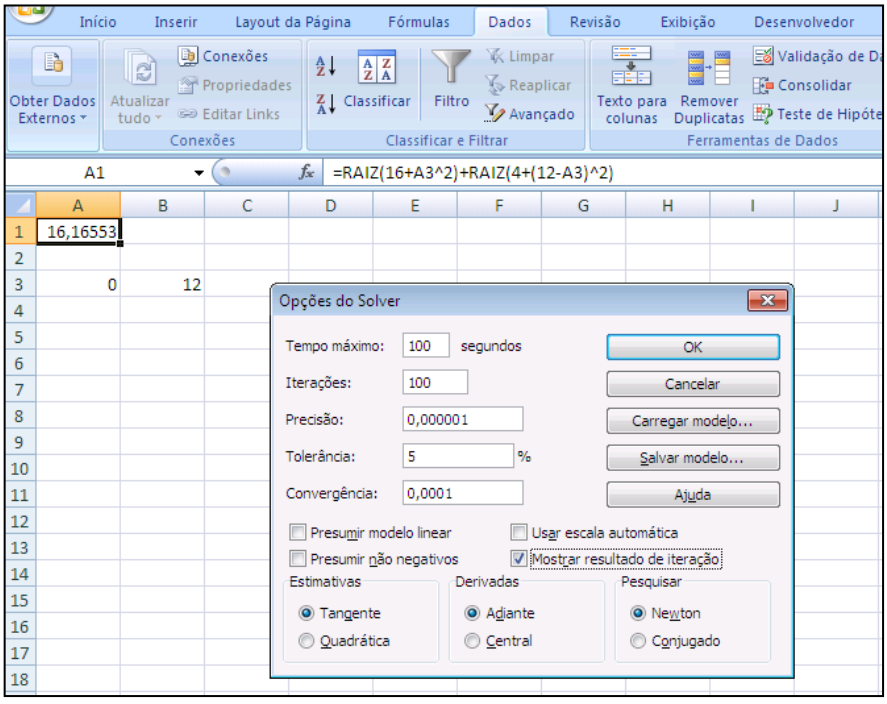
Figura A.18 - Ponto de mínimo da função objetivo com erro de 0,000001.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Na Fig. A.19, pode-se observar a presença do botão “Opções”. Ao ser clicado ele irá fornecer detalhes adicionais sobre a busca, como precisão e método da busca. Ainda há a opção de mostrar o resultado de cada iteração do método escolhido.

Figura A.19 - Opções do Solver.



Fonte: *print screen* da caixa de diálogo das Opções do Solver.

Naturalmente, tanto o Solver como Geogebra estão limitados aos métodos que eles utilizam para determinar os valores ótimos. No caso do Solver, a Fig. A.18 mostra que a opção usada foi o método de Newton.