



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO



Liliane de Azevedo Oliveira

ESTABILIDADE DE CARGA NO PROBLEMA DE CARREGAMENTO DE
CONTÊINERES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CATALÃO – GO, 2017

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

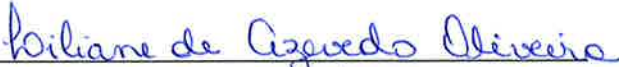
Nome completo do autor: Liliane de Azevedo Oliveira

Título do trabalho: Estabilidade de Carga no Problema de Carregamento de Contêineres

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.


Assinatura do (a) autor (a) ²

Data: 22 / 02 / 2017

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

²A assinatura deve ser escaneada.

LILIANE DE AZEVEDO OLIVEIRA

ESTABILIDADE DE CARGA NO PROBLEMA DE CARREGAMENTO DE
CONTÊINERES

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem e Otimização pela Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão.

Orientador:
Thiago Alves de Queiroz

CATALÃO – GO

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Oliveira, Liliane de Azevedo
Estabilidade de Carga no Problema de Carregamento de
Contêineres [manuscrito] / Liliane de Azevedo Oliveira. - 2017.
CIX, 109 f.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Alves de Queiroz.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade
Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão,
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização, Catalão, 2017.
Bibliografia. Anexos.
Inclui gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Problema de Carregamento de Contêineres. 2. Estabilidade de
Carga. 3. Equilíbrio Estático de Corpos Rígidos. 4. Fator de Suporte.
5. Programação Linear Inteira. I. Queiroz, Thiago Alves de , orient. II.
Título.

CDU 517

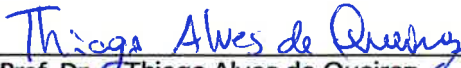



Defesa Nº 15

Ata de Defesa Pública - Dissertação de Mestrado

Aos 22 dias do mês de fevereiro do ano de 2017, às 10h:30 min, reuniram-se os componentes da banca examinadora, professores(as) Dr. Thiago Alves de Queiroz (presidente e orientador), Dr. Celso Vieira Abud e Dr. Flávio Keidi Miyazawa para, em sessão pública realizada no Miniauditório Congadas (Centro Integrado de Pesquisa), da Regional Catalão (RC), da Universidade Federal de Goiás (UFG), procederem com a avaliação do trabalho intitulado: "**Estabilidade de Carga no Problema de Carregamento de Contêineres**", em nível de Mestrado, área de concentração *Modelagem e Otimização*, de autoria de **Liliane de Azevedo Oliveira**, discente do Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização (PPGMO) da UFG/RC. A sessão foi aberta pelo presidente da banca, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao discente que, dentro do tempo regulamentar, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o candidato, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação do trabalho. Os membros da banca consideraram o trabalho final: () **Aprovado** (unanimidade) ou () **Reprovado** (por maioria simples). Cumpridas as formalidades de pauta, às 12 h: 10 min a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu Thiago Alves de Queiroz, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo discente e, posteriormente, será homologada pelo Colegiado do PPGMO.

Catalão-GO, 22 de fevereiro de 2017.


Prof. Dr. Thiago Alves de Queiroz.
Programa de Pós-Graduação em Modelagem
e Otimização, UFG/RC.
(Presidente da Banca)


Prof. Dr. : Celso Vieira Abud.
Programa de Pós-Graduação em Modelagem
e Otimização, UFG/RC.


Prof. Dr. : Flávio Keidi Miyazawa.
Instituto de Computação, UNICAMP


Discente: Liliane de Azevedo Oliveira.
Programa de Pós-Graduação em Modelagem
e Otimização, UFG/RC.

Dedico este trabalho à Deus, por ser essencial em minha vida.

Agradecimentos

À DEUS, que todos os dias me deu forças para nunca desistir.

Ao meu orientador, Professor Thiago Alves de Queiroz, por seu apoio e amizade, além de sua dedicação, competência e especial atenção nas revisões e sugestões, fatores fundamentais para a conclusão deste trabalho.

À todos os professores do mestrado que de alguma forma contribuíram para a minha formação.

Ao meu pai (*in memoriam*) meu infinito agradecimento.

À minha mãe e minha irmã, que são meu porto seguro.

Ao meu namorado André Luiz Galdino, pela paciência, carinho, incentivo e por se mostrar um grande companheiro.

À dona Maria Aparecida Barbosa Galdino por todo o cuidado e carinho.

À Lorrany Cristina, à Oliviana e ao Vinícius Loti pela amizade.

À todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigada.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG) pelo apoio financeiro.

“Desistir ... eu já pensei seriamente nisso, mas nunca me levei realmente a sério. É que tem mais chão nos meus olhos do que o cansaço nas minhas pernas, mais esperança nos meus passos do que tristeza nos meus ombros, mais estrada no meu coração do que medo na minha cabeça.” (Cora Coralina)

RESUMO

OLIVEIRA, L. DE A. *Estabilidade de Carga no Problema de Carregamento de Contêineres*. 2017. 109 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem e Otimização) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

Aplica-se um algoritmo baseado na resolução de modelos de programação linear inteira para o problema de carregamento de caixas dentro de um único contêiner considerando a restrição de estabilidade de carga. O problema em estudo consiste em arranjar itens (caixas) de diferentes tamanhos dentro de um objeto maior (contêiner), de maneira maximizar a ocupação do volume do contêiner enquanto respeita as restrições dadas. Quatro métodos são investigados e comparados quanto a estabilidade vertical do empacotamento, sendo que três deles são desenvolvidos neste trabalho e baseados em conceitos do equilíbrio de corpos rígidos, enquanto um deles é baseado no fator de suporte da base das caixas. No caso do fator de suporte, um conjunto de restrições pode ser inserido totalmente dentro da formulação inteira, enquanto nos demais métodos planos de corte são inseridos durante a resolução da formulação por um algoritmo *branch-and-cut*. Os testes computacionais mostraram que o uso do fator de suporte pode subestimar a solução, porém seu uso com modelos de programação linear inteira tem a vantagem das soluções viáveis poderem ser estáveis, enquanto os demais métodos desenvolvidos apenas verificam a estabilidade e, assim, dependem do programa linear inteiro retornar soluções viáveis mais rapidamente. Os métodos para a estabilidade de carga desenvolvidos neste trabalho mostraram-se superiores ao fator de suporte para testes envolvendo diferentes tipos de malhas para o empacotamento no contêiner.

Palavras-chaves: Problema de Carregamento de Contêineres, Estabilidade de Carga, Equilíbrio Estático de Corpos Rígidos, Fator de Suporte, Programação Linear Inteira.

ABSTRACT

OLIVEIRA, L. DE A. *Estabilidade de Carga no Problema de Carregamento de Contêineres*. 2017. 109 f. Master Thesis in Modelling and Optimization – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

In this work we applied an algorithm based on the resolution of integer linear models for the problem of packing boxes into a single container considering the cargo stability constraint. The problem consists of arranging items (boxes) of different sizes inside a large object (container) to maximize the occupied container volume while respecting the imposed constraints. Four methods are investigated and compared due to vertical cargo stability, in which three of these methods are proposed in this work and based on the equilibrium of rigid bodies, and the other one is based on the factor of support of boxes bottom faces. In the case of the factor of support, a set of constraints can be inserted totally in the integer formulation, while in the other methods cutting planes are inserted during optimization of the formulation by a branch-and-cut algorithm. Computational tests on instances from the literature show that the usage of a factor of support underestimates the value of the optimal solution. The computational tests showed that the use of the factor of support may underestimate the solution, but its use with integer linear programming models has the advantage that feasible solutions are stable, while the other developed methods only verify stability and thus they depend of the integer linear program to return feasible solutions more quickly. By the way, the methods for the cargo stability developed here also overcame the factor of support for tests involving different types of mesh to pack into the container.

Keywords: Container Loading Problem, Cargo Stability, Static Equilibrium of Rigid Bodies, Factor of Support, Integer Linear Programming.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Exemplo de empacotamento com estabilidade vertical para suporte completo das faces inferiores.	40
Figura 2.2 – Exemplo de estabilidade horizontal para suporte completo das faces laterais.	41
Figura 3.1 – Superfície de contato e tríade de forças.	46
Figura 3.2 – Configuração de forças sobre caixas.	48
Figura 3.3 – Atuação de forças em uma caixa apoiada no chão do contêiner.	50
Figura 3.4 – Força horizontal atuando em uma caixa para a condição de deslizamento.	55
Figura 3.5 – Força horizontal atuando em uma caixa para a condição de tombamento.	57
Figura 4.1 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo A_5 para a estabilidade vertical.	65
Figura 4.2 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo A_{10} para a estabilidade vertical.	65
Figura 4.3 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo A_{20} para a estabilidade vertical.	65
Figura 4.4 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo B_5 para a estabilidade vertical.	70
Figura 4.5 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo B_{10} para a estabilidade vertical.	70
Figura 4.6 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo B_{20} para a estabilidade vertical.	70
Figura 4.7 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo A_5 para a estabilidade horizontal.	75
Figura 4.8 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo A_{10} para a estabilidade horizontal.	75
Figura 4.9 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo A_{20} para a estabilidade horizontal.	75
Figura 4.10 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo B_5 para a estabilidade horizontal.	80

Figura 4.11 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo B_{10} para a estabilidade horizontal.	80
Figura 4.12 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo B_{20} para a estabilidade horizontal.	80
Figura A.1 – Exemplo de empacotamento estável.	90
Figura A.2 – Exemplo de empacotamento instável.	102
Figura A.3 – Exemplo de empacotamento para a estabilidade horizontal	108

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Trabalhos da literatura para empacotamento tridimensional com restrições práticas, sendo (1) limite de peso, (2) distribuição de peso, (3) orientação e (4) estabilidade.	34
Tabela 3.1 – Velocidades diretrizes em km/h.	56
Tabela 3.2 – Raios mínimos de curvatura horizontal, em metros, dos eixos das estradas.	56
Tabela 4.1 – Resultados de estabilidade vertical para o grupo A_5	62
Tabela 4.2 – Resultados de estabilidade vertical para o grupo A_{10}	63
Tabela 4.3 – Resultados de estabilidade vertical para o grupo A_{20}	64
Tabela 4.4 – Resultados de estabilidade vertical para o grupo B_5	67
Tabela 4.5 – Resultados de estabilidade vertical para o grupo B_{10}	68
Tabela 4.6 – Resultados de estabilidade vertical para o grupo B_{20}	69
Tabela 4.7 – Resultados de estabilidade horizontal para o grupo A_5	72
Tabela 4.8 – Resultados de estabilidade horizontal para o grupo A_{10}	73
Tabela 4.9 – Resultados de estabilidade horizontal para o grupo A_{20}	74
Tabela 4.10 – Resultados de estabilidade horizontal para o grupo B_5	77
Tabela 4.11 – Resultados de estabilidade horizontal para o grupo B_{10}	78
Tabela 4.12 – Resultados de estabilidade horizontal para o grupo B_{20}	79

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Objetivos	25
1.2	Justificativas	25
1.3	Metodologia e Estratégia Empregada	26
1.4	Organização do Trabalho	27
2	PROBLEMA DE CARREGAMENTO EM CONTÊINERES E ESTABILIDADE DE CARGA	29
2.1	Estado da Arte Envolvendo Problemas de Carregamento de Contêineres .	31
2.1.1	Estabilidade de Carga	35
2.2	Modelo de Programação Inteira para o PCUC	37
2.3	Estabilidade Via Fator de Suporte	39
2.3.1	Estabilidade Vertical de Carga Via Fator de Suporte	39
2.3.2	Estabilidade Horizontal de Carga Via Fator de Suporte	40
3	ESTABILIDADE DE CARGA COM EQUILÍBRIO DE CORPOS RÍGIDOS	43
3.1	Movimento de Corpos Rígidos	43
3.2	Abordagens para a Estabilidade de Carga	45
3.2.1	Estabilidade Vertical	48
3.2.1.1	Abordagem BGN	48
3.2.1.2	Abordagem B	49
3.2.1.3	Abordagem WOD	51
3.2.1.4	Considerações para a Estabilidade Vertical	53
3.2.2	Estabilidade Horizontal	53
4	RESULTADOS COMPUTACIONAIS	59
4.1	Resultados para a Estabilidade Vertical	61
4.2	Resultados para a Estabilidade Horizontal	71
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	81
	REFERÊNCIAS	83

ANEXO A	APLICAÇÃO DAS ABORDAGENS EM EMPACOTAMENTOS	89
A.1	Exemplo 1: Estabilidade Vertical	89
A.1.1	Abordagem B	89
A.1.2	Abordagem WOD	94
A.2	Exemplo 2: Estabilidade Vertical	101
A.2.1	Abordagem B	101
A.2.2	Abordagem WOD	104
A.3	Exemplo 3: Estabilidade Horizontal	108
A.3.1	Abordagem B	108

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Este trabalho está relacionado aos problemas de logística que recaem sobre problemas de otimização combinatória. Um problema de otimização busca maximizar (ou minimizar) uma função objetivo sujeita a restrições relacionadas ao problema a ser resolvido. A resposta encontrada para o problema é um ótimo global quando o valor é de máximo (ou de mínimo) comparado ao valor de todas as outras soluções (SPADOTTO, 2008). Nos problemas de otimização combinatória, o espaço de soluções é limitado e o número de soluções é finito, porém, apesar de finito, há um número exageradamente grande de soluções que precisam ser avaliadas (KRASNOGOR, 2002).

Entre os problemas de otimização combinatória, tem-se os problemas de empacotamento, em que é preciso empacotar itens (caixas, paletes, barras, etc.) em um ou mais recipientes, de forma a atingir um objetivo, como maximizar a ocupação do espaço disponível para alocar os itens. Problemas de empacotamento são comuns em aplicações práticas, especialmente aquelas ligadas ao setor de logística que lida diariamente com o recebimento e despacho de mercadorias, organizadas dentro de recipientes. Outras aplicações podem ser encontradas no transporte ferroviário, construção civil, transporte de mercadorias, carregamento de veículos, corte de bobinas, corte de vigas, corte de placas, corte de retalhos em fábrica de tecidos ou em confecção de roupas, empacotamento de caixas em galpões, empacotamento em contêineres, carregamento de cargas em furgões, corte de espumas para colchões, entre outros (ARENALES *et al.*, 2007).

Atualmente, existem diferentes versões de problemas de empacotamento, as quais são influenciadas diretamente pelo tipo de restrição considerada, podendo incluir restrições de descarregamento, estabilidade, ordem, orientação, empilhamento, balanceamento do veículo, fragilidade, sequenciamento, geométricas, entre outras (BISCHOFF; RATCLIFF, 1995). Quanto às dimensões, pode-se encontrar problemas unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais. Em qualquer dimensão, requer-se que os itens sejam empacotados totalmente dentro do recipiente, isto é, os itens não podem extrapolar as dimensões do re-

recipiente, e não podem se sobrepor. Também é comum que os itens sejam empacotados de forma ortogonal, isto é, os seus lados são paralelos aos lados do recipiente.

As versões unidimensionais de problemas de empacotamento consideram que apenas uma dimensão está sendo observada, como por exemplo, o comprimento. Nas versões bidimensionais, tem-se duas dimensões sendo consideradas, como a largura e o comprimento. Em geral, deseja-se arranjar itens bidimensionais, com diferentes áreas, dentro de um recipiente retangular, de modo que não haja sobreposição entre os itens e que a área total ocupada seja a máxima. As versões tridimensionais referem-se aos itens e recipientes com comprimento, largura e profundidade (KLEIN, 2005). Neste trabalho o recipiente é um contêiner e os itens são caixas (todos paralelepípedos retângulos determinados por três dimensões), de forma que se busca empacotar um conjunto de caixas que resulte em máximo volume ocupado para o contêiner.

No que tange ao empacotamento de itens em contêineres, o desperdício de espaço pode gerar prejuízos e elevar custos, uma vez que o custo de um contêiner é bastante alto e qualquer desperdício pode tornar a entrega demasiadamente cara. No caso do transporte via caminhões, quando o contêiner tem seu espaço bem utilizado, pode-se evitar um número maior de viagens (SPADOTTO, 2008).

Uma pesquisa realizada pela Fundação Dom Cabral, sobre análise dos “custos logísticos no Brasil”, revelou que o percentual do custo logístico em relação à receita é de até 10% (RESENDE; SOUSA, 2015). Outra pesquisa apresentada pelo Instituto de Logística *Supply Chain*, aponta que a maior parcela do gasto logístico está no estoque, armazenagem e transporte, sendo o transporte que mais influencia no custo. A pesquisa apontou que a fonte de transporte mais utilizada é a rodoviária (81,7%) e depois a ferroviária (14,6%). O transporte rodoviário vem aumentando cerca de 12% ao ano, desde 2004 no Brasil, sendo que em 2014 foram gastos cerca de R\$ 334 bilhões. Um dos fatores para o elevado gasto está relacionado com a falta de planejamento da maioria das empresas, o que certamente torna os produtos mais caros (GRIBEL; LOUREIRO, 2015).

Quando se trata de custo logístico, uma forma eficiente para a diminuição dos gastos é a utilização da unitização de carga. A unitização de carga busca unir itens, em termos de volume e dimensões em um volume unitário. Assim, busca-se agilizar o processo de movimentação ao mesmo tempo que reduzir os custos dada a utilização de equipamentos para a movimentação da carga. A unitização é o processo de agregar volumes fracionados em uma única unidade de carga que é mantida inviolável ao longo de todo o transporte. Os dispositivos de unitização podem, por exemplo, ser paletes, contêineres, barris, tambores, entre outros. É interessante que a unidade de carga tenha seu volume ocupado adequadamente para que o recipiente seja melhor aproveitado e também haja compatibilidade com os equipamentos de movimentação nos processos de carregamento e descarregamento. Assim, evita-se que as mercadorias ou produtos sejam avariados.

A unitização apresenta vantagens com relação a redução de mão-de-obra, redução de atividades relacionadas ao manuseio de carga, redução de gasto com embalagens, agilidade no manuseio e estocagem, proteção contra danos e avarias aos produtos. Por outro lado, existem também problemas com a unitização, como a não ocupação por completo da unidade de carga, investimentos para a aquisição de máquinas e dispositivos de unitização, acessórios para a fixação de carga, necessidade de modificações nos locais de embarque e desembarque, despesas relacionadas com o reparo e a reposição, e o retorno dos dispositivos de unitização (JUNQUEIRA, 2013).

Neste trabalho é utilizado o contêiner como um dispositivo de unitização de carga, de forma que os itens são empacotados dentro do contêiner. O contêiner é um recipiente tridimensional, em geral fabricado de madeira, aço ou alumínio. Atualmente ele pode ser acoplado a caminhões, trens e navios, sem que para isso seja preciso mexer na sua carga interna. A vantagem em se utilizar um contêiner está relacionada com a estocagem de mercadoria em áreas descobertas e rapidez nas operações de carregamento e descarregamento entre veículos e navios, por exemplo. Por outro lado, entre as desvantagens está a necessidade por equipamentos caros e pesados para a movimentação nos locais de transferência e a incorporação da tara do contêiner na tara do modal de transporte.

Como é comum ter restrições em problemas de empacotamento para tentar evitar danos aos itens transportados, este trabalho investiga, em particular, a restrição de Estabilidade de Carga (tanto a versão vertical quanto a horizontal) (JUNQUEIRA; MORABITO; YAMASHITA, 2012). A estabilidade vertical, também chamada de estabilidade estática, está relacionada à capacidade das caixas paradas de resistirem à atuação da aceleração da gravidade. Assim, os itens não se movimentarão dada a atuação apenas da gravidade. A estabilidade horizontal, também chamada de estabilidade dinâmica, está relacionada à capacidade das caixas em movimento, pela ação de alguma força lateral, resistirem à atuação da inércia.

O item que provoca o desequilíbrio no empacotamento precisa ser removido ou empacotado em outra posição. Conforme aponta Junqueira e Queiroz (2015), a literatura tem adotado comumente o uso de um fator de suporte para as faces dos itens, o qual indica a porcentagem que cada face precisa estar suportada por faces de outros itens, a fim de “garantir” a estabilidade da carga. Por outro lado, poucos trabalhos têm usado os princípios de equilíbrio mecânico no empacotamento, tal que os itens precisam obedecer às condições de equilíbrio estático de corpos rígidos, uma vez que os itens e os recipientes são tomados como corpos rígidos e feitos de mesmo material, além de assumir que o empacotamento está estático e recebe todas as forças no que seria a pior configuração aceitável (HIBBELER, 2010).

Tem-se o conhecimento de quatro trabalhos que levam em consideração as condições de equilíbrio estático para lidar com a restrição de estabilidade de carga e que, assim, propuseram uma abordagem exata para resolvê-la, diferente de usar a aproximação por fator

de suporte. O primeiro trabalho a apresentar um estudo de estabilidade baseado na estática dos corpos rígidos foi feito por [Silva, Soma e Maculan \(2003\)](#), seguido de [Queiroz e Miyazawa \(2014\)](#), depois de [Ramos *et al.* \(2016\)](#) e, por fim, tem-se a contribuição de [Ramos, Oliveira e Lopes \(2016\)](#). Em [Bracht *et al.* \(2016\)](#), a estabilidade é tratada usando um simulador físico, que apesar de ser baseado no equilíbrio de corpos materiais, requer um processo computacionalmente caro.

O Problema de Carregamento de um único Contêiner com a restrição de estabilidade de carga, assim como outros de empacotamento, é classificado como NP-difícil e, então, o uso de heurísticas é mais comum para a sua resolução, pois não se acredita que haja algoritmos exatos de tempo polinomial para resolvê-lo. Do ponto de vista computacional, os problemas podem ser divididos em diferentes classes de complexidade, como P, NP, NP-Completo, NP-difícil, entre outras ([CORMEN *et al.*, 2013](#)).

Segundo [Cormen *et al.* \(2013\)](#), os problemas classificados como P são aqueles cujos algoritmos demandam tempo de pior caso polinomial para resolvê-los, sendo considerados problemas tratáveis. Os problemas NP são os que podem ter uma solução candidata verificada por um algoritmo de tempo polinomial no pior caso. Tem-se que a classe P é um subconjunto da classe NP. Os problemas NP-Completo são os mais difíceis da classe NP e estão relacionados com problemas de decisão, tal que um problema é NP-Completo se qualquer problema em NP pode ser reduzido a ele por meio de um algoritmo de tempo polinomial no pior caso. Nesse sentido, suponha dois problemas *A* e *B* das classes P e NP, respectivamente. Se existe uma redução polinomial de *B* para *A*, então o algoritmo que resolve o problema *A* também resolve o problema *B*. Um problema NP-Difícil não precisa estar em NP, mas requer que qualquer problema em NP possa ser reduzido a ele por meio de um algoritmo de tempo polinomial no pior caso.

De acordo com [Romero e Mantovani \(2004\)](#), uma heurística realiza um conjunto de movimentos dentro do espaço de busca do problema, podendo partir de uma solução inicial e finalizando em uma solução possivelmente ótima local. As meta-heurísticas correspondem a heurísticas gerais para o problema, tendo como característica a facilidade para escapar de ótimos locais, pois realiza a procura da solução em diversas regiões do espaço de busca a partir de critérios pré-estabelecidos. Um algoritmo exato, por sua vez, retorna a solução ótima, nem que seja preciso analisar todo o espaço de soluções do problema.

A importância de se levar em conta a estabilidade de carga é para garantir que o empacotamento não venha a se desmanchar depois de pronto e, assim, não haja danos a carga. Somada ao critério de otimização, que busca maximizar a ocupação do recipiente, tem-se a busca por um conjunto de itens que melhor ocupem o volume do recipiente ao mesmo tempo que permaneçam em equilíbrio estático.

No que tange à restrição de estabilidade de carga, este trabalho apresenta abordagens baseadas no equilíbrio estático de corpos rígidos, as quais são comparadas com o fator

de suporte, que é a abordagem comumente empregada na literatura. A comparação das abordagens ocorre em termos da solução e do tempo gasto por um algoritmo exato do tipo *branch-and-cut* que resolve um modelo de programação linear inteira do problema de empacotamento sobre diferentes tipos de malha e faz a inserção de desigualdades de acordo com a estabilidade das soluções.

1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal fazer uma investigação da restrição de estabilidade de carga no âmbito do problema de carregamento de um único contêiner. Tal restrição, que é de suma importância durante o transporte, tem sido explorada de forma heurística na literatura ao se usar o fator de suporte. Buscando tratá-la de forma exata, este trabalho apresenta abordagens baseadas no equilíbrio de corpo rígidos para resolvê-la, tanto para a estabilidade vertical quanto para a horizontal.

Os objetivos secundários decorrem em estudar métodos baseado no equilíbrio de corpos rígidos que podem ser aplicados em problemas de empacotamento, codificar as abordagens propostas em uma linguagem de programação de alto nível e comparar o uso do fator de suporte com as abordagens apresentadas, dada a resolução do problema de carregamento de um único contêiner sobre diferentes tipos de malha. Para a resolução do problema, recorre-se a uma formulação por programação linear inteira que é resolvida por um algoritmo exato do tipo *branch-and-cut*.

1.2 Justificativas

Problemas de empacotamento são comuns e surgem nas mais diversas aplicações, tanto no setor logístico, quanto na produção e manufatura de itens. No que tange ao problema de carregamento de contêineres, que apesar de ser NP-Difícil, suas aplicações englobam o transporte de mercadorias em caminhões, aviões, navios, trens, entre outros tipos de veículos. Soma-se a isto que os contêineres possuem dimensões fixas e padronizadas que permitem que eles sejam usados tanto por equipamentos de carga/descarga como no acoplamento a veículos de transporte. Assim, o problema de carregamento de contêineres é justificado tanto do ponto de vista prático (aplicações concretas no mundo real) quanto do ponto de vista computacional (problema NP-Difícil e, assim, requer estratégias de resolução que sejam eficientes para situações do mundo real).

Na mesma linha, ainda existem poucos trabalhos na literatura que tratam a restrição de estabilidade de carga de forma exata, isto é, assumindo as leis da mecânica de corpos materiais, principalmente pela complexidade na modelagem e resolução das equações de equilíbrio [Junqueira e Queiroz \(2015\)](#).

1.3 Metodologia e Estratégia Empregada

Esta pesquisa está classificada de acordo com [Fontelles et al. \(2009\)](#). Quanto à finalidade, ela é classificada como pesquisa aplicada, uma vez que visa a solução de problemas concretos, próprios da vida moderna. Quanto à natureza, ela é classificada como pesquisa experimental, que visa a realização de algum tipo de experimento, neste caso, experimentos computacionais sobre instâncias da literatura. Quanto à forma de abordagem, ela é classificada como pesquisa quantitativa, uma vez que trabalha com variáveis expressas sob a forma de dados numéricos. Quanto aos objetivos, ela é classificada como pesquisa exploratória, pois busca explicar os fatores responsáveis pela ocorrência de um fenômeno. Quanto aos procedimentos técnicos, ela é classificada como pesquisa bibliográfica, pois sua base é a análise de material já publicado, por exemplo, artigos científicos. E, por fim, quanto ao desenvolvimento, esta pesquisa é classificada como prospectiva.

A primeira etapa da pesquisa consistiu em um levantamento bibliográfico de trabalhos mais relevantes da área visando identificar a importância real dos problemas de empacotamento, a qual é bem clara na área logística. Observou-se que somente maximizar a ocupação do volume do contêiner não necessariamente garante melhores soluções para as empresas, então, é necessário considerar restrições práticas dentro do problema. Neste caso, considerou-se a restrição de estabilidade vertical e horizontal de carga, a qual tem sido pouco explorada do ponto de vista exato envolvendo o equilíbrio de corpos rígidos.

Em seguida, buscou-se por abordagens para lidar com a estabilidade vertical e horizontal de carga, sendo então apresentadas três abordagens para a estabilidade vertical e uma abordagem para a horizontal. A primeira abordagem vertical segue o desenvolvimento feito por [Blum, Griffith e Neumann \(1970\)](#). O trabalho desses autores é baseado na checagem da estabilidade segundo as equações de equilíbrio de corpos rígidos, para o caso sem e com atrito, aplicados em blocos bi e tridimensionais. A partir da proposta desses autores, fez-se a extensão para problemas de carregamento de contêineres.

A segunda abordagem é utilizada para checar a estabilidade vertical e horizontal e segue o trabalho de [Baraff \(1989\)](#), em que o autor desenvolveu um método para realizar a simulação dinâmica de corpos rígidos. Este método envolve determinar os pontos de contato entre os corpos e, assim, as forças que surgem nesses pontos. No caso do carregamento de contêineres, a extensão da ideia desse autor pode ser feita com poucas adaptações.

A última abordagem para a estabilidade vertical é elaborada a partir do trabalho de [Whiting, Ochsendorf e Durand \(2009\)](#), que propuseram um método para verificar o equilíbrio de construções conforme a estática de corpos rígidos.

As três abordagens foram codificadas em uma linguagem de programação de alto nível e incorporadas como rotinas de plano de corte em um algoritmo *branch-and-cut* que resolve um modelo de programação linear inteira do problema de carregamento de um único

contêiner. Esse modelo foi proposto por [Junqueira, Morabito e Yamashita \(2012\)](#) e é baseado em uma malha de pontos em que um dos cantos das caixas é empacotada sobre esses pontos.

O algoritmo *branch-and-cut* desenvolvido usa o *framework* do pacote de otimização Gurobi Optimizer versão 6.5.1, que tem se mostrado superior aos demais pacotes disponíveis na literatura ([OPTIMIZATION, 2015](#)). De maneira geral, o algoritmo resolve o modelo de programação linear inteira na busca de soluções viáveis para o problema de empacotamento, de forma que as soluções viáveis são testadas pela abordagem de estabilidade para ver se atende a restrição de estabilidade de carga. Caso seja detectada pela abordagem que a solução não é estável, faz-se a inserção de um corte (desigualdade) para que o algoritmo busque uma outra solução viável, até achar uma que seja ótima (viável, estável e de máximo volume).

Como forma de analisar as abordagens para a estabilidade, fez-se um estudo do impacto de cada abordagem na solução do problema de empacotamento ao comparar com o uso apenas do fator de suporte, dado o suporte completo (*full support*) da face das caixas, que é o único que garante a estabilidade do empacotamento. Os resultados têm mostrado que o fator de suporte pode ocasionar a perda de boas soluções, aquelas com melhor ocupação do contêiner, ao mesmo tempo que verificar a estabilidade por qualquer das abordagens apresentadas é muito rápido ao comparar com o processo de encontrar empacotamentos viáveis. O fator de suporte não garante, em especial, soluções válidas para a estabilidade horizontal, pois somente o contato lateral não garante que as caixas deslizem ou tombem. A influência do tipo de malha para o empacotamento também ocorre quanto a estabilidade, de forma que para malhas mais refinadas é comum ocorrer a perda de boas soluções.

1.4 Organização do Trabalho

A presente dissertação está estruturada em capítulos, de forma que o primeiro capítulo traz uma introdução a respeito do problema a ser investigado e a sua importância prática. Os demais capítulos são explicados adiante:

- *Capítulo 2*: apresenta o problema de estudo nesta pesquisa e as restrições do mundo real que já foram abordadas pela literatura. O capítulo ainda traz um breve levantamento bibliográfico de trabalhos que envolvem a restrição de estabilidade de carga e problemas de empacotamento em contêineres. A revisão aponta para a falta de abordagens exatas para lidar com a restrição de estabilidade de carga. Além disso, também é apresentado um modelo de programação linear inteira, algumas malhas usadas para empacotar e como modelar a estabilidade de carga usando o fator de suporte.
- *Capítulo 3*: traz as abordagens apresentadas para lidar com a estabilidade de carga. As

abordagens são baseadas nas condições de equilíbrio de corpos rígidos. No caso da estabilidade horizontal é importante mencionar que não se conhece qualquer trabalho na literatura que usa as condições de equilíbrio de corpos rígidos para resolvê-la, sem que para isso recorra ao uso de simuladores físicos, ao mesmo tempo que há poucos trabalhos com métodos exatos para a estabilidade vertical.

- *Capítulo 4*: apresenta os resultados computacionais obtidos sobre instâncias da literatura para as abordagens propostas no capítulo anterior. Os resultados mostram que o uso do fator de suporte pode resultar em soluções que subutilizam o volume e, no caso da estabilidade horizontal, o uso do fator de suporte pode gerar soluções instáveis mesmo para o suporte completo das faces laterais.
- *Capítulo 5*: traz as conclusões, deixando claro como uso das abordagens propostas conseguem melhorar o valor da solução em detrimento ao fator de suporte, o qual é comumente empregado na literatura, além de mostrar direções para trabalhos futuros.
- *Anexo A*: exemplifica como as abordagens propostas podem ser aplicadas para verificar se um dado empacotamento é estável. Assim, o desenvolvimento das equações dos métodos são apresentados passo-a-passo permitindo que outros pesquisadores interessados no tema possam se basear e, assim, aplicar com mais facilidade os métodos desenvolvidos nesta dissertação.

Capítulo 2

PROBLEMA DE CARREGAMENTO EM CONTÊINERES E ESTABILIDADE DE CARGA

De forma geral, os problemas de empacotamento consistem em empacotar itens em um ou mais recipientes. Os tipos dos itens a serem empacotados podem caracterizar os problemas em uni, bi- ou tridimensionais, os quais possuem aplicações nos mais diversos setores da economia, como na logística, indústrias de transformação e na cadeia de suprimentos. Em um problema de empacotamento busca-se por padrões ou combinação de itens de maneira a satisfazer um objetivo, como maximizar a ocupação do recipiente ou utilizar o menor número de recipientes, respeitando as dimensões do recipiente e as restrições de não sobreposição, entre outras, provenientes de aplicações do mundo real.

Algumas restrições provenientes de aplicações e problemas do mundo real que, comumente, aparecem em problemas de empacotamento são apresentadas a seguir. Outras restrições podem ser encontradas em [Bischoff e Ratcliff \(1995\)](#) e [Bortfeldt e Wäscher \(2013\)](#).

- **Estabilidade de carga:** divide-se em estabilidade horizontal e vertical. Na estabilidade vertical as caixas devem ser apoiadas uma sobre as outras, de forma que depois do empacotamento feito, elas não venham a rotacionar e tombar devido a ação da gravidade. Na estabilidade horizontal, deseja-se que as caixas não venham a romper a sua inércia (deslizar ou tombar);
- **Ordem:** impõe a ordem em que itens são desempacotados em seu local de destino conforme a ordem em que os destinos são visitados. Também é conhecida como *multi-drop*;
- **Empilhamento:** as caixas devem ser empilhadas respeitando suas especificações e condições de fragilidade, de forma que não sofram alterações em sua forma quando

empilhadas uma sobre as outras;

- **Limite de peso no recipiente:** leva-se em consideração a capacidade de peso máximo suportado pelo recipiente, isto é, não se pode carregar o recipiente com uma quantidade de itens que extrapolará o limite de peso que ele suporta carregar;
- **Balanceamento de carga:** o peso dos itens deve ser distribuído adequadamente dentro do recipiente. Carregamentos inadequados geralmente resultam em uma distribuição desproporcional do peso que prejudica o desempenho e o funcionamento do veículo, gerando desgastes excessivos, além de poder causar problemas de desbalanceamento e acidentes devido a tombamentos;
- **Restrição de manuseio:** alguns itens, devido às suas dimensões, ao seu peso, ou ao equipamento que realiza o carregamento e descarregamento de carga, devem estar posicionados em determinados lugares dentro do recipiente;
- **Agrupamento de itens:** esse tipo de restrição está voltada para itens que tem o mesmo destino, tal que os itens devem ser agrupados próximos uns dos outros para facilitar o descarregamento, ou todos ou nenhum dos itens de um mesmo destino devem ser levados;
- **Prioridade:** certos itens devem ser deixados primeiro em seus destinos com relação à outros itens de baixa prioridade;
- **Orientação:** os itens podem ser considerados apenas na sua orientação ou rotacionados conforme algum critério.

No Problema de Carregamento em um Único Contêiner, de agora em diante denominado por PCUC, busca-se arranjar um subconjunto de caixas em um único contêiner. A questão é encontrar a melhor disposição das caixas de maneira a maximizar a ocupação do volume interno do contêiner. Ao considerar a estabilidade de carga, busca-se também que a carga chegue ao seu destino final sem danos (JUNQUEIRA; MORABITO; YAMASHITA, 2012; BORTFELDT; HOMBERGER, 2013).

No PCUC, o contêiner tem medidas de comprimento L , largura W e altura H conhecidas. Cada caixa do tipo k tem um comprimento l_k , largura w_k , altura h_k , volume ou valor v_k e uma disponibilidade máxima b_k . Admite-se que as dimensões das caixas e do contêiner são inteiras e as caixas só podem ser empacotadas ortogonalmente, ou seja, com os seus lados paralelos aos lados do contêiner, com orientação fixa, isto é, as caixas não giram em torno de nenhum de seus eixos. Além disso, as caixas não podem ter sobreposição entre si e devem respeitar as dimensões do contêiner após serem empacotadas.

De acordo com Junqueira (2013), o qual considera a tipologia de Wäscher, Haubner e Schumann (2007), para diferenciar os problemas de empacotamento, o autor destaca di-

ferentes versões do PCUC, que envolvem três dimensões (3D); empacotamento de caixas retangulares (R); e, o objetivo de maximizar. Essas versões são: 3D-R-IIPP (*Identical Item Packing Problem*), em que as caixas são iguais; 3D-R-SLOPP (*Single Large Object Placement Problem*), em que há poucas caixas diferentes; 3D-R-SKP (*Single Knapsack Problem*), em que há caixas muito diferentes entre si.

As caixas neste trabalho são assumidas como corpos rígidos e feitas de um mesmo material com densidade homogênea. Um corpo rígido é aquele em que a distância entre quaisquer dois de seus pontos permanece constante mesmo sofrendo a ação de forças externas (HIBBELER, 2010). Embora na realidade as caixas transportadas não sejam totalmente rígidas (ou mesmo homogêneas), assume-se que as deformações sofridas são pequenas e, assim, podem ser desprezadas.

2.1 Estado da Arte Envolvendo Problemas de Carregamento de Contêineres

Algumas contribuições que a literatura fez com relação aos problemas de empacotamento são listadas e discutidas adiante, com foco em problemas de três dimensões, em particular no carregamento de contêineres, e com a consideração de restrições práticas, em especial para a estabilidade de carga. Gilmore e Gomory (1961), Gilmore e Gomory (1963), Gilmore e Gomory (1965) apresentaram um estudo pioneiro sobre problemas de corte e empacotamento a partir da resolução de modelos de programação linear para problemas de uma e duas dimensões que buscam empacotar todos os itens minimizando o número de recipientes utilizados.

George e Robinson (1980) dedicaram-se a resolver o PCUC. Os autores desenvolveram uma heurística que preenche o contêiner construindo camadas de forma que o volume do recipiente seja utilizado ao máximo. A heurística exige que as caixas do mesmo tipo sejam colocadas próximas umas das outras e carregadas em pilhas. A ideia é que as caixas iguais sejam empilhadas de forma que o contêiner seja carregado do seu fundo para a entrada, tentando sempre manter uma superfície plana. O problema não considera restrições quanto ao número de caixas que podem ser empilhadas umas sobre as outras, nem sobre qual face das caixas deve ficar voltada para cima, mas a heurística pode ser adaptada para tratar esses casos.

Morabito e Arenales (1994) propuseram um método baseado em grafos E/OU para resolver um problema de carregamento de contêineres, em que cada ramo completo do grafo representa um padrão de carregamento guilhotinado, além das restrições de estabilidade do carregamento. Os autores utilizaram 80 instâncias divididas em 8 grupos, em que as dimensões dos contêineres são iguais.

Heurísticas construtivas foram propostas por [Bischoff e Ratcliff \(1995\)](#) destinadas a resolver o problema de carregamento de contêineres com algumas restrições práticas. A primeira heurística foi projetada para construir padrões estáveis verticalmente e a outra para cargas com múltiplos destinos. As cargas com múltiplos destinos exigem que os itens a serem deixados em um determinado ponto devem ficar juntos dentro do recipiente. Para a garantia da estabilidade vertical, os autores utilizaram o fator de suporte, em que a base das caixas devem estar totalmente apoiadas, isto é, *full support*. Os autores também apresentaram uma série de restrições práticas que são aplicáveis em situações reais, como a orientação, estabilidade de carga, agrupamento, separação e suporte de carga, carregamento completo de certos grupos de itens, complexidade do carregamento, limite de peso do recipiente, distribuição de peso, entre outras.

[Ratcliff e Bischoff \(1998\)](#) lidaram com o carregamento de um contêiner com largura e altura fixas e profundidade variável. Os autores especificaram que cada caixa do tipo i deve ter um número máximo de caixas colocadas acima dela. Além disso, a pressão total que as caixas exercem sobre uma caixa não pode exceder uma pressão máxima estabelecida a fim de evitar que ocorra deformações na caixa e avariação do produto. Os autores ainda consideraram um suporte total para a estabilidade vertical de carga.

[Davies e Bischoff \(1999\)](#) propuseram uma heurística para tratar do problema de carregamento de contêineres com restrição de distribuição de peso e também considerando a estabilidade de carga. No caso da estabilidade, os autores impuseram que as caixas devem ter suas faces inferiores suportadas por faces superiores de outras caixas, ou que as suas faces laterais estejam apoiadas nas faces laterais de outras caixas. Assim, eles trataram tanto da questão de estabilidade vertical quanto da horizontal por meio do fator de suporte. [Martello, Pisinger e Vigo \(2000\)](#) foram os pioneiros a desenvolver um algoritmo exato para um problema de carregamento de contêineres, com uma abordagem do tipo *branch-and-bound*. O método apresentou resultados ótimos para instâncias com até 90 caixas.

[Bortfeldt e Gehring \(2001\)](#) apresentaram um algoritmo genético híbrido para PCUC. O carregamento do contêiner é feito por meio de camadas verticais composta de diferentes caixas. O processo leva em conta também restrições práticas. Os testes numéricos atestaram para o bom desempenho do algoritmo genético, sobretudo para os problemas com caixas fortemente heterogêneas. [Eley \(2002\)](#) apresentou uma heurística gulosa para tratar o problema de carregamento de contêineres. Entre as restrições consideradas, tem-se a estabilidade de carga e a distribuição de peso dentro do recipiente. [Gehring e Bortfeldt \(2002\)](#) desenvolveram um algoritmo genético paralelo para o PCUC com cargas fortemente heterogêneas. São levadas em consideração as restrições de estabilidade, orientação, empilhamento e peso.

[Pisinger \(2002\)](#) estudou o problema de carregamento de contêineres na sua versão mochila. Uma nova heurística com base na construção de paredes foi proposta, em que

são construídas camadas a partir de faixas com itens empacotados. O método desenvolvido apresentou um bom desempenho, uma vez que a ocupação foi de até 95% do recipiente. [Silva, Soma e Maculan \(2003\)](#) apresentaram uma heurística gulosa para o problema de carregamento de contêineres, em que o preenchimento do contêiner é feito por meio da alocação das caixas em pontos de canto. A maior contribuição deste trabalho está na abordagem para lidar com a estabilidade vertical de carga por meio do equilíbrio estático de corpos rígidos.

[Jin, Ohno e Du \(2004\)](#) utilizaram uma heurística para lidar com o problema de carregamento de contêineres, enquanto [Mack, Bortfeldt e Gehring \(2004\)](#) desenvolveram uma heurística híbrida paralela que combina o método de recozimento simulado com o método de busca Tabu. Um apanhado geral sobre o problema de carregamento de contêineres foi feito por [Bortfeldt e Wäscher \(2013\)](#), em que várias restrições práticas foram discutidas no âmbito deste problema.

[Yamashita e Morabito \(2015\)](#) fizeram um estudo sobre o carregamento de caixas em um único contêiner levando em consideração a restrição de estabilidade de carga. Os autores apontaram que uma das condições para garantir a estabilidade de carga é que a base do item esteja totalmente ou parcialmente apoiada pelo chão do contêiner ou por outras caixas, mais especificadamente, os vértices da base da caixa devem estar totalmente apoiados no chão do contêiner ou sobre outras caixas assim como uma parte da área da base da caixa.

[Ramos et al. \(2016\)](#) resolveram o problema de carregamento de contêineres nas versões 3D-SLOPP e 3D-SKP, além de levar em consideração restrições práticas de estabilidade vertical de carga. Os autores propuseram um algoritmo genético com chaves aleatórias de múltiplas populações, em que as restrições de estabilidade são baseadas nas condições de equilíbrio estático de corpos rígidos. Para cargas altamente heterogêneas, a consideração do suporte completo da base das caixas traz melhores resultados.

[Ramos et al. \(2015\)](#) trataram do problema de carregamento de contêineres com a estabilidade dinâmica. Para tratar a estabilidade dinâmica, os autores desenvolveram duas métricas diferentes do que as propostas existentes na literatura. Utilizando 1500 soluções de instâncias da literatura, os novos indicadores de desempenho foram avaliados usando uma ferramenta de simulação física chamada (*StableCargo*), substituindo o transporte real por uma simulação do comportamento dinâmico do empacotamento. Os resultados computacionais mostraram que as métricas propostas fornecem melhores aproximações para a estabilidade dinâmica ao comparar com as métricas utilizadas atualmente.

A Tabela (2.1) apresenta um levantamento breve feito sobre trabalhos da literatura envolvendo problemas de empacotamento tridimensionais, com foco no carregamento de contêineres e suas versões com a presença de restrições práticas, quais sejam: (1) limite de peso para o contêiner; (2) distribuição de peso dentro do contêiner; (3) orientação; e (4) estabilidade.

Tabela 2.1 – Trabalhos da literatura para empacotamento tridimensional com restrições práticas, sendo (1) limite de peso, (2) distribuição de peso, (3) orientação e (4) estabilidade.

	Autores	Restrições			
		1	2	3	4
1	Carpenter e Dowsland (1985)				*
2	Haessler e Talbot (1990)		*	*	*
3	Portmann (1990)			*	*
4	Bischoff (1991)				*
5	Abdou e Yang (1999)			*	*
6	Morabito e Arenales (1994)			*	*
7	Ngoi, Tay e Chua (1994)			*	*
8	Abdou e Yang (1995)			*	*
9	Abdou e Arghavani (1997)			*	*
10	Gehring e Bortfeldt (1997)	*	*	*	*
11	Liu e Hsiao (1997)				*
12	Hemminck, Leipälä e Nevalainen (1998)			*	*
13	Ratcliff e Bischoff (1998)			*	*
14	Abdou e Elmasry (1999)			*	*
15	Davies e Bischoff (1999)		*		*
16	Terno <i>et al.</i> (2000)	*		*	*
17	Bortfeldt e Gehring (2001)	*	*	*	*
18	Eley (2002)		*	*	*
19	Gehring e Bortfeldt (2002)	*		*	*
20	Hifi (2002)			*	*
21	Bortfeldt, Gehring e Mack (2003)			*	*
22	Silva, Soma e Maculan (2003)			*	*
23	Jin e Ohno (2003)			*	*
24	Jin, Ohno e Du (2004)			*	*
25	Mack, Bortfeldt e Gehring (2004)			*	*
26	Moura e Oliveira (2005)			*	*
27	Bischoff (2005)			*	*
28	Chan <i>et al.</i> (2006)	*	*	*	*
29	Gendreau, Iori e Martello (2006)	*		*	*
30	Araújo e Armentano (2007)			*	*
31	Liu, Tian e Sawaragi (2007)	*	*		*
32	Moura e Oliveira (2009)			*	*
33	Balakirsk <i>et al.</i> (2010)	*	*		*
34	Egeblad <i>et al.</i> (2010)	*	*	*	*
35	Fanslau e Bortfeldt (2010)			*	*
36	Fuellerer <i>et al.</i> (2010)	*		*	*
37	Makarem e Haraty (2010)		*	*	*
38	Bortfeldt (2011)	*		*	*
39	Ceschia e Schaerf (2013)	*		*	*
40	Junqueira, Morabito e Yamashita (2012)			*	*
41	Ramos <i>et al.</i> (2016)				*

2.1.1 Estabilidade de Carga

Conforme observado, a literatura tem tratado a estabilidade de carga predominantemente usando um fator de suporte, em que os itens devem ter uma porcentagem da área de suas faces apoiada em uma ou mais faces de itens em contato direto. Neste trabalho, considera-se abordagens para lidar com a estabilidade baseada nas condições de equilíbrio estático de corpos rígidos e tem uma formulação direta e simples ao comparar com as abordagens já propostas na literatura e que utilizam os conceitos de equilíbrio de corpos materiais, que são as de [Silva, Soma e Maculan \(2003\)](#), [Queiroz e Miyazawa \(2014\)](#), [Ramos, Oliveira e Lopes \(2016\)](#) e [Ramos *et al.* \(2016\)](#).

[Silva, Soma e Maculan \(2003\)](#) descreveram a estabilidade de carga como dependente do centro de massa, momento de uma força e das condições de equilíbrio de corpos rígidos, considerando apenas a atuação da gravidade sobre as caixas. Os autores ilustraram os casos que podem gerar instabilidade e concluíram que um empacotamento é estável quando as forças externas e momentos que atuam sobre os itens são iguais à zero. Além disso, as condições para um item ser estável são: o item deve estar completamente apoiado no chão do contêiner; o item deve ter o seu centro de massa projetado sobre um item abaixo ou entre outros itens que o suportam; e, a resultante dos momentos dos itens empacotados em relação ao centro de massa do empacotamento deve ser igual à zero.

[Queiroz e Miyazawa \(2014\)](#) e [Ramos, Oliveira e Lopes \(2016\)](#) recorreram a conceitos do equilíbrio de corpos rígidos, em que a soma de todas as forças e de todos momentos que atuam sobre os itens devem ser iguais a zero. Os autores consideraram apenas a força que surge a partir da ação da gravidade sobre os itens, isto é, a força peso. A metodologia deles é diferente da apresentada por [Silva, Soma e Maculan \(2003\)](#), pois a análise para a garantia da estabilidade é feita individualmente para cada item e as forças de reação são calculadas a partir de cada interação entre os itens. Os autores não consideram a estabilidade horizontal.

A análise proposta por [Queiroz e Miyazawa \(2014\)](#), [Ramos, Oliveira e Lopes \(2016\)](#) e [Ramos *et al.* \(2016\)](#) é feita de cima para baixo, verificando se cada item atende as condições de estabilidade para, em seguida, calcular a distribuição de suas forças para os itens abaixo em contato direto (itens adjacentes). Em outras palavras, ao calcular o centro de massa do item, verifica-se se o mesmo está em uma região estável (condições de estabilidade). Caso a resposta seja positiva, emprega-se as equações de equilíbrio estático de corpos rígidos para determinar as forças de reação que surgem nos contatos (entre o item sendo analisado e os seus adjacentes). Assim, os itens adjacentes vão receber uma parcela da força resultante do item atual, o que impacta na posição do seu centro de massa, que agora precisa ser recalculado. O procedimento continua até que todos os itens sejam analisadas ou algum item seja avaliado como instável (não atende as condições de estabilidade). A diferença particular nos trabalhos é que [Queiroz e Miyazawa \(2014\)](#) trataram de empacotamentos bidimensionais, em que se usa o método da equação dos três momentos para o cálculo das forças de

reação, enquanto Ramos, Oliveira e Lopes (2016) e Ramos *et al.* (2016) consideraram empacotamentos tridimensionais e aplicaram o método das forças de forma que a resultante das forças e de torques externos que atuam sobre os itens seja nula.

No caso do fator de suporte, a literatura tem utilizado um fator de suporte parcial ou total. O primeiro exige que apenas uma certa porcentagem da face esteja apoiada, já o segundo exige que 100% da face da caixa esteja em contato direto sobre uma ou mais caixas. Os seguintes autores adotaram o suporte total na estabilidade, quais sejam: Ngoi (1990), Bischoff e Ratcliff (1995), Davies e Bischoff (1999), Bortfeldt, Gehring e Mack (2003), Gehring e Bortfeldt (2002), Eley (2002), Araújo e Armentano (2007), Moura e Oliveira (2009), Fanslau e Bortfeldt (2010), Bortfeldt e Homberger (2013), Junqueira, Morabito e Yamashita (2012), Zhu e Lim (2012), Gonçalves e Resende (2012) e Araya e Riff (2014).

Por outro lado, os seguintes autores consideraram aceitável que apenas uma certa porcentagem da face das caixas esteja suportada, sendo eles: Carpenter e Dowsland (1985), Bischoff (1991), Gehring e Bortfeldt (1997), Mack, Bortfeldt e Gehring (2004), Gendreau, Iori e Martello (2006), Christensen e Rousoe (2009), Parreño *et al.* (2008) e Parreño *et al.* (2010). Além disso, outros autores consideram que as caixas estão verticalmente estáveis desde que quatro vértices da sua base estejam devidamente apoiados na face superior de outras caixas, como é o caso de Egeblad *et al.* (2010), ou, ainda que pelo menos três vértices da base estejam apoiados, como é o caso em Paquay e Limbourg (2016).

Ramos *et al.* (2015) afirmaram que a literatura atual tem avaliado a estabilidade dinâmica da carga através da aplicação de duas métricas. A primeira métrica está baseada no número médio de caixas apoiando os itens, excluindo aquelas colocadas diretamente no chão. A segunda métrica está baseada no suporte das faces laterais das caixas, como feito em Junqueira, Morabito e Yamashita (2012). De acordo com os autores, essas métricas não traduzem as condições reais de estabilidade dinâmica.

Em Ramos *et al.* (2015), dois novos indicadores de desempenho de estabilidade dinâmica foram propostos para avaliar a estabilidade dado o carregamento de contêineres, que são o número de caixas caídas (NFB) e o número de caixas dentro da área de danos da curva limite de danos (NB-DBC). NFB é o número de caixas cuja diferença entre a posição inicial e final do seu centro de gravidade ao longo do eixo da altura é maior que zero. O conceito DBC pressupõe que um item sofrerá dano quando ocorrer uma combinação de dois fatores: quando há uma variação na velocidade e uma na aceleração, ambas sendo superiores aos respectivos valores críticos que o item pode suportar.

A estabilidade dinâmica também foi explorada usando pacotes de simulação física por Bracht *et al.* (2016), em que o PCUC foi resolvido usando algoritmo genético de chaves aleatórias viciadas, ao passo que a cada empacotamento encontrado, o simulador físico checava a estabilidade vertical e horizontal observando se o centro de massa de cada item movimentava.

2.2 Modelo de Programação Inteira para o PCUC

O problema de carregamento de um único contêiner encontra-se formulado como um modelo de Programação Linear Inteira (PLI). Um problema de PLI busca otimizar (maximizar ou minimizar) uma função objetivo linear sujeita a um conjunto de restrições lineares. Neste caso, deseja-se maximizar a ocupação do volume interno de um contêiner. Adota-se um sistema de coordenadas cartesianas com discretização unitária em que a origem fica no canto inferior frontal esquerdo do contêiner e (p, q, r) são as coordenadas onde se coloca o canto inferior frontal esquerdo de uma dada caixa. As coordenadas podem ser indicadas pelos conjuntos:

$$X_c = \{p \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq p \leq L - \min_{1 \leq k \leq n} (l_k)\}, \quad (2.1)$$

$$Y_c = \{q \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq q \leq W - \min_{1 \leq k \leq n} (w_k)\}, \quad (2.2)$$

$$Z_c = \{r \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq r \leq H - \min_{1 \leq k \leq n} (h_k)\}, \quad (2.3)$$

em que X_c , Y_c e Z_c indicam as direções do comprimento, largura e altura, respectivamente.

As variáveis de decisão para o modelo consistem em:

$$x_{kpqr} = \begin{cases} 1, & \text{se a caixa do tipo } k \text{ é empacotada com seu canto inferior frontal esquerdo na} \\ & \text{posição } (p, q, r), \text{ com } 0 \leq p \leq L - l_k, \ 0 \leq q \leq W - w_k \text{ e } 0 \leq r \leq H - h_k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ainda, tem-se os conjuntos de coordenadas para cada item k , a saber:

$$X_k = \{p \in X \mid 0 \leq p \leq L - l_k\}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

$$Y_k = \{q \in Y \mid 0 \leq q \leq W - w_k\}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.5)$$

$$Z_k = \{r \in Z \mid 0 \leq r \leq H - h_k\}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

Segundo [Junqueira, Morabito e Yamashita \(2012\)](#), o PCUC pode ser formulado como:

$$\max \sum_{k=1}^n \sum_{p \in X_k} \sum_{q \in Y_k} \sum_{r \in Z_k} v_k x_{kpqr} \quad (2.7)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{\{p \in X_k \mid p' - l_k + 1 \leq p \leq p'\}} \sum_{\{q \in Y_k \mid q' - w_k + 1 \leq q \leq q'\}} \sum_{\{r \in Z_k \mid r' - h_k + 1 \leq r \leq r'\}} x_{kpqr} \leq 1, \forall p' \in X_c, \forall q' \in Y_c, \forall r' \in Z_c. \quad (2.8)$$

$$\sum_{p \in X_k} \sum_{q \in Y_k} \sum_{r \in Z_k} x_{kpqr} \leq b_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

$$x_{kpqr} \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \dots, n, \forall p \in X_k, \forall q \in Y_k, \forall r \in Z_k. \quad (2.10)$$

A função objetivo (2.7) busca pela solução com o máximo valor empacotado no contêiner e que respeita as restrições impostas. As restrições em (2.8) garantem a não sobreposição dos itens empacotados, de forma que qualquer ponto (p', q', r') da malha só pode ser sobreposto por no máximo um item k empacotado em (p, q, r) . As restrições em (2.9) limitam o número máximo de réplicas de cada caixa k a ser empacotada no contêiner. Por fim, as restrições em (2.10) definem o domínio das variáveis de decisão, impondo que elas são inteiras, mais precisamente, binárias.

Algoritmos que permitem resolver modelos de programação inteira são baseados em enumeração, com o princípio de ramificar e podar, como os algoritmos *branch-and-bound* e *branch-and-cut*. Existem vários pacotes de otimização que trazem implementações eficientes desses algoritmos, como é o caso do *Gurobi Optimizer*. Mais detalhes são dados no capítulo com os experimentos computacionais. Outras formas de resolver problemas de empacotamento incluem o uso de heurísticas e meta-heurísticas, que são capazes de encontrar uma solução em tempo polinomial, mas nem sempre o valor encontrado é o valor ótimo procurado (ARENALES *et al.*, 2007).

Herz (1972) propôs uma abordagem exata para geração de padrões de corte bidimensionais usando uma estratégia em árvore. Para limitar os ramos percorridos, o autor criou o conceito de *canonical dissections*, aqui denominados de *pontos de discretização*, que torna a implementação mais eficiente.

As possíveis posições ao longo das dimensões do contêiner onde cada caixa pode ser colocada com a utilização dos pontos de discretização de Herz (1972) estão nas equações (2.11)-(2.13). Essas posições são obtidas a partir da combinação linear inteira não negativa das dimensões dos itens observando a dimensão do recipiente. Sem perda de generalidade, tem-se que os conjuntos X_c , Y_c e Z_c podem, então, ser substituídos, respectivamente, por:

$$X_d = \{p \in \mathbb{Z} | p = \sum_{k=1}^n \delta_k l_k, 0 \leq p \leq L - \min(l_k), 0 \leq \delta_k \leq b_k \text{ e } \delta_k \in \mathbb{Z}, k = 1, \dots, n\}, \quad (2.11)$$

$$Y_d = \{q \in \mathbb{Z} | q = \sum_{k=1}^n \delta_k w_k, 0 \leq q \leq W - \min(w_k), 0 \leq \delta_k \leq b_k \text{ e } \delta_k \in \mathbb{Z}, k = 1, \dots, n\}, \quad (2.12)$$

$$Z_d = \{r \in \mathbb{Z} | r = \sum_{k=1}^n \delta_k h_k, 0 \leq r \leq H - \min(h_k), 0 \leq \delta_k \leq b_k \text{ e } \delta_k \in \mathbb{Z}, k = 1, \dots, n\}. \quad (2.13)$$

A formulação (2.7)-(2.10) se mantém, mudando apenas o conjunto de posições onde o canto inferior frontal esquerdo de cada caixa pode ser colocado, assim usando os conjuntos

X_d , Y_d e Z_d , sem perda de generalidade para o PCUC puro, isto é, sem qualquer restrição prática.

A partir dos pontos de discretização surgiram os chamados *reduced raster points* desenvolvidos por [Scheithauer e Terno \(1996\)](#). Os *reduced raster points* permitem uma diminuição nas possíveis posições que as caixas podem ser empacotadas, mas neste caso não há a garantia de encontrar a solução ótima para o PCUC puro ([QUEIROZ; MIYAZAWA; WAKABAYASHI, 2015](#)).

Os conjuntos de *reduced raster points* podem ser obtidos conforme as eqs. (2.14)-(2.16), as quais representam, respectivamente, os conjuntos ao longo do comprimento (eixo x), da largura (eixo y) e da altura (eixo z).

$$X_r = \{(L - p)_x \mid \forall p \in X_d\} \cup \{0\}, \quad (2.14)$$

$$Y_r = \{(W - q)_y \mid \forall q \in Y_d\} \cup \{0\}, \quad (2.15)$$

$$Z_r = \{(H - r)_z \mid \forall r \in Z_d\} \cup \{0\}, \quad (2.16)$$

sendo, $(L - p)_x = \max\{s \in X_d \mid s \leq L - p\}$, $(W - q)_y = \max\{t \in Y_d \mid t \leq W - q\}$ e $(H - r)_z = \max\{u \in Z_d \mid u \leq H - r\}$.

2.3 Estabilidade Via Fator de Suporte

A seguir são apresentadas restrições lineares para tratar a estabilidade via fator de suporte, as quais são acopladas ao modelo de programação linear inteira para o PCUC e, então, resulta na abordagem JMY. O fator de suporte na estabilidade vertical refere-se ao suporte da face inferior de cada caixa. No caso da estabilidade horizontal, as faces laterais das caixas precisam ser suportadas por faces laterais de outras caixas de forma a evitar o deslocamento na situação em que o veículo de carga está em movimento ou alguma força externa atua nas laterais do empacotamento.

2.3.1 Estabilidade Vertical de Carga Via Fator de Suporte

Define-se um parâmetro de estabilidade vertical em relação ao eixo z, dado por $\alpha \in [0, 1]$, que indica o percentual de suporte desejado para as caixas. Se $\alpha = 1$, então as faces inferiores de todas as caixas devem ser 100% apoiadas pelas faces superiores de uma ou mais caixas colocadas abaixo delas e em contato direto. Por outro lado, se $\alpha = 0$, então não necessariamente as caixas precisam ter algum apoio, podendo inclusive flutuar dentro do recipiente.

Com base na formulação para o PCUC, [Junqueira, Morabito e Yamashita \(2012\)](#) definiram a seguinte restrição para considerar o apoio das caixas a partir de um fator de suporte,

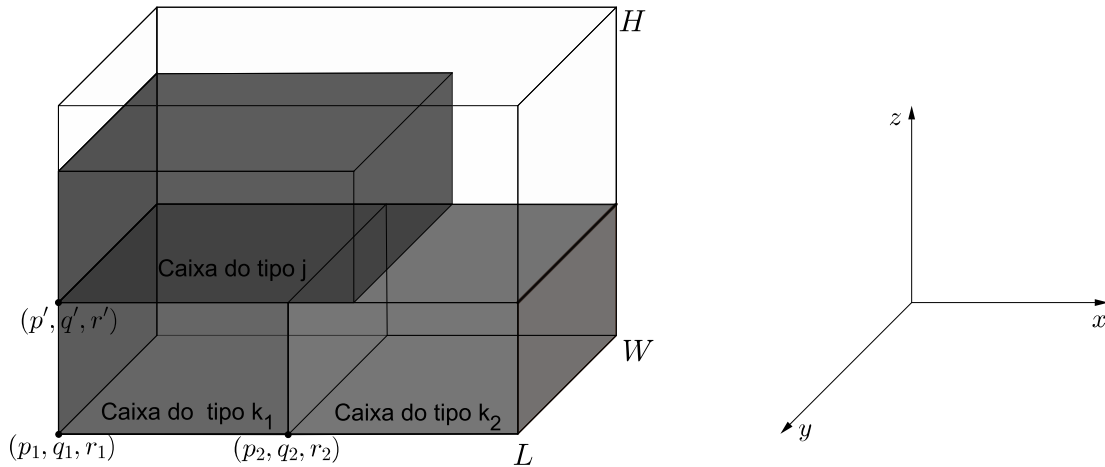
a saber:

$$\sum_{\Phi} \sum_{\Psi} \sum_{\Omega} L_{kj}^{[2]} W_{kj}^{[2]} x_{kpq(r'-h_k)} \geq \alpha l_j w_j x_{jp'q'r'}, \quad j = 1, \dots, n, \forall p' \in X_j, \forall q' \in Y_j, \forall r' \in Z_j \setminus \{0\}, \quad (2.17)$$

sendo $\Phi = \{k = 1, \dots, n \mid r' - h_k \geq 0\}$, $\Psi = \{p \in X_k \mid p' - l_k + 1 \leq p \leq p' + l_j - 1\}$, $\Omega = \{q \in Y_k \mid q' - w_k + 1 \leq q \leq q' + w_j - 1\}$, $L_{kj}^{[2]} = \min(p + l_k, p' + l_j) - \max(p, p')$ e $W_{kj}^{[2]} = \min(q + w_k, q' + w_j) - \max(q, q')$.

As restrições em (2.17) impõem que cada caixa j empacotada no ponto (p', q', r') precisa ter caixas k empacotadas imediatamente abaixo e em contato direto com j , isto é, as caixas k devem ser empacotadas em (p, q, r) , com p e q dentro dos limites que permitem algum suporte para a caixa j , como apresenta a Figura 2.1 para $\alpha = 1$.

Figura 2.1 – Exemplo de empacotamento com estabilidade vertical para suporte completo das faces inferiores.



Fonte: o autor.

2.3.2 Estabilidade Horizontal de Carga Via Fator de Suporte

Conforme [Junqueira, Morabito e Yamashita \(2012\)](#), define-se um fator de suporte $\beta \in [0, 1]$ e $\gamma \in [0, 1]$, respectivamente, para assegurar o suporte das faces laterais esquerda e frontal das caixas, no caso da estabilidade horizontal.

$$\sum_{\varepsilon} \sum_{\kappa} \sum_{\xi} W_{kj}^{[1]} H_{kj}^{[1]} x_{k(p'-l_k)qr} \geq \beta w_j h_j x_{jp'q'r'}, \quad j = 1, \dots, n, \forall p' \in X_j \setminus \{0\}, \forall q' \in Y_j, \forall r' \in Z_j, \quad (2.18)$$

sendo $\varepsilon = \{k = 1, \dots, n \mid p' - l_k \geq 0\}$, $\kappa = \{q \in Y_k \mid q' - w_k + 1 \leq q \leq q' + w_j - 1\}$, $\xi = \{r \in Z_k \mid r' - h_k + 1 \leq r \leq r' + h_j - 1\}$, $W_{kj}^{[1]} = \min(q + w_k, q' + w_j) - \max(q, q')$, $H_{kj}^{[1]} = \min(r +$

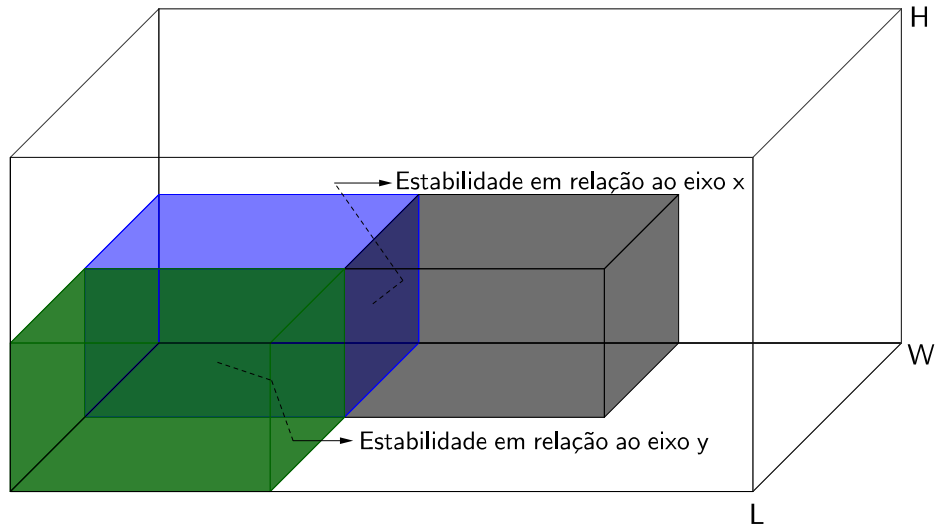
$h_k, r' + h_j) - \max(r, r')$ e β indica a fração mínima da área da face lateral esquerda da caixa j que deve estar apoiada por áreas das faces laterais direitas de caixas k .

$$\sum_{\rho} \sum_{\varrho} \sum_{\sigma} L_{kj}^{[1]} H_{kj}^{[1]} x_{kp(q'-w_k)r} \geq \gamma l_j h_j x_{jp'q'r'}, \quad j = 1, \dots, n, \forall p' \in X_j, \forall q' \in Y_j \setminus \{0\}, \forall r' \in Z_j, \quad (2.19)$$

sendo $\rho = \{k = 1, \dots, n \mid q' - w_k \geq 0\}$, $\varrho = \{p \in X_k \mid p' - l_k + 1 \leq p \leq p' + l_j - 1\}$, $\sigma = \{r \in Z_k \mid r' - h_k + 1 \leq r \leq r' + h_j - 1\}$, $L_{kj}^{[1]} = \min(p + l_k, p' + l_j) - \max(p, p')$, $H_{kj}^{[1]} = \min(r + h_k, r' + h_j) - \max(r, r')$ e γ a fração mínima da área da face lateral frontal da caixa j que deve estar apoiada por áreas das faces laterais do fundo de caixas k .

Similar ao fator de suporte para a estabilidade vertical, tem-se que as restrições (2.18) referem-se a estabilidade horizontal em relação ao eixo x , em que as caixas devem ter uma porcentagem de sua face lateral suportada por outras caixas. As restrições (2.19) referem-se a estabilidade horizontal em relação ao eixo y , em que as caixas devem ter uma porcentagem de sua face frontal suportada por outras caixas. Na Figura 2.2 é dado um exemplo levando em consideração a estabilidade horizontal em relação ao eixo x e y , sendo $\beta = 1$ e $\gamma = 1$, indicando que as faces laterais esquerda e frontais devem estar 100% apoiadas por faces de outras caixas.

Figura 2.2 – Exemplo de estabilidade horizontal para suporte completo das faces laterais.



Fonte: o autor.

Capítulo 3

ESTABILIDADE DE CARGA COM EQUILÍBRIO DE CORPOS RÍGIDOS

Ao se pensar em estabilidade de uma caixa é necessário que ela não se mova (translação) e não gire (rotação). Ao tratar uma caixa como corpo rígido, tem-se que mesmo submetida à ação de forças externas a sua forma não varia, ou as deformações são pequenas a ponto de serem desprezíveis. Além disso, o desenvolvimento que se segue é para o caso tridimensional, sendo facilmente reduzido para o caso bidimensional. Para tanto, basta tomar o valor de profundidade das caixas/recipiente sendo igual à uma unidade de medida.

O movimento de translação pode ser analisado por meio do centro de massa do corpo. Neste caso, o seu centro de massa desloca à medida que o tempo passa. Para o movimento de translação valem as leis de Newton e a conservação da quantidade de movimento. E, ao movimento de rotação está associado a uma força de torque aplicado sobre o corpo.

3.1 Movimento de Corpos Rígidos

Parte do desenvolvimento que se segue é baseado em [Erleben \(2004\)](#) e [Hibbeler \(2010\)](#) e traz as condições que um corpo material precisa atender para estar em equilíbrio. Naturalmente, estende-se esse desenvolvimento para lidar com a restrição de estabilidade de carga.

Primeira lei de Newton (Lei da Inércia): A lei da inércia diz que se um determinado corpo está em repouso, ele continuará em repouso até que uma força externa seja aplicada nele. Também, se o corpo está em movimento uniforme, ele continuará neste movimento conforme a força atuando nele. Em resumo, essa lei garante que um determinado corpo, quando não há nenhuma força aplicada a ele, permanece em seu estado original, isto é, em repouso ou movimento retilíneo uniforme. A inércia é caracterizada como sendo a resistência que um corpo possui a fim de manter o seu estado atual.

Segunda lei de Newton (Princípio Fundamental da Dinâmica): A força que atua so-

bre um determinado corpo é proporcional ao produto da sua massa pela a sua aceleração. Assim, tem-se que:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (3.1)$$

sendo \vec{F} o vetor força, m a massa e \vec{a} o vetor aceleração.

Terceira lei de Newton (Princípio da Ação e Reação): Toda força de ação tem como correspondente uma força de reação, sendo elas de mesmo módulo e direção, porém apresentam sentidos contrários.

A força é definida como o agente físico capaz de alterar o estado de repouso ou de movimento uniforme de um corpo material. Neste trabalho aparecem quatro tipos de forças, sendo elas, força de atrito, força peso, força normal e força centrípeta. A força de atrito é uma força de contato que se opõe ao movimento de um corpo, sendo paralela à superfície de contato entre os corpos. O atrito entre as superfícies depende da força normal, que é a componente vertical da força de contato. Geralmente, quanto maior for a força normal maior será a força de atrito. Denomina-se por superfície de contato a região onde existe interação (isto é, contato direto) entre os corpos.

A estabilidade vertical de carga é caracterizada pela atuação da gravidade sobre os corpos, tal que pela segunda lei de Newton, um corpo de determinada massa m sofre a ação da aceleração da gravidade quando é aplicado a ele o princípio fundamental da dinâmica, em que o peso do corpo é a força com que a terra o atrai. Para cada unidade de massa, a aceleração da gravidade \vec{g} tem intensidade de aproximadamente $9,8m/s^2$ na superfície da terra e, então, a força é de $9,8N$. De maneira geral, o peso de um corpo corresponde ao produto da massa pela a aceleração da gravidade.

Como mencionado, a força normal surge quando um corpo está em contato com alguma superfície. De acordo com a terceira lei de Newton, para toda força de ação existe uma força de reação, então se o corpo comprime uma superfície de contato, ou seja, se ele aplica força sobre a superfície, tem-se a respectiva reação da superfície sobre o corpo, denominada de força normal. Vale destacar que a força normal não é a força de reação da força peso, mas sim a reação da compressão que é exercida sobre a superfície de contato. Além disso, a força normal tem direção perpendicular a superfície de contato, por isso acaba coincidindo com a reação da força peso no caso de problemas de empacotamento de forma ortogonal.

A força centrípeta depende da aceleração centrípeta. Quando um veículo efetua um movimento circular, por exemplo, ao fazer uma curva, ele sofre uma aceleração que é responsável pela mudança da direção do movimento, chamada de aceleração centrípeta. Sabendo da existência da aceleração e conhecendo a massa do veículo, pode-se, pela segunda lei de Newton, encontrar uma força que assim como a aceleração centrípeta, aponta para o centro da trajetória circular.

Segundo [Silva, Soma e Maculan \(2003\)](#), [Queiroz e Miyazawa \(2014\)](#) e [Ramos, Oliveira e Lopes \(2016\)](#), a restrição de estabilidade de carga é dependente da posição do centro de massa das caixas. Os próprios autores definiram que as condições de equilíbrio dependem do local onde o centro de massa de cada caixa está. Por definição, o centro de massa é um ponto onde se pode assumir que toda a massa do corpo está concentrada. Além disso, assumindo que o campo gravitacional é uniforme, o centro de gravidade coincide com o centro de massa do corpo. Também se assume que o centro de massa é o ponto onde todas as forças externas estão sendo aplicadas.

Seja M a soma de todas as massas envolvidas no sistema ou empacotamento, isto é:

$$M = \sum_{k=1}^n m_k = m_1 + m_2 + \cdots + m_n. \quad (3.2)$$

As coordenadas (x, y, z) do Centro de Massa (\vec{CM}) são calculados por meio de uma média ponderada conforme as equações (3.3)-(3.5), respectivamente, para a caixa k com distância $\vec{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$ com relação a um ponto referencial inercial.

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{M}, \quad (3.3)$$

$$y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n}{M}, \quad (3.4)$$

$$z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_n z_n}{M}. \quad (3.5)$$

3.2 Abordagens para a Estabilidade de Carga

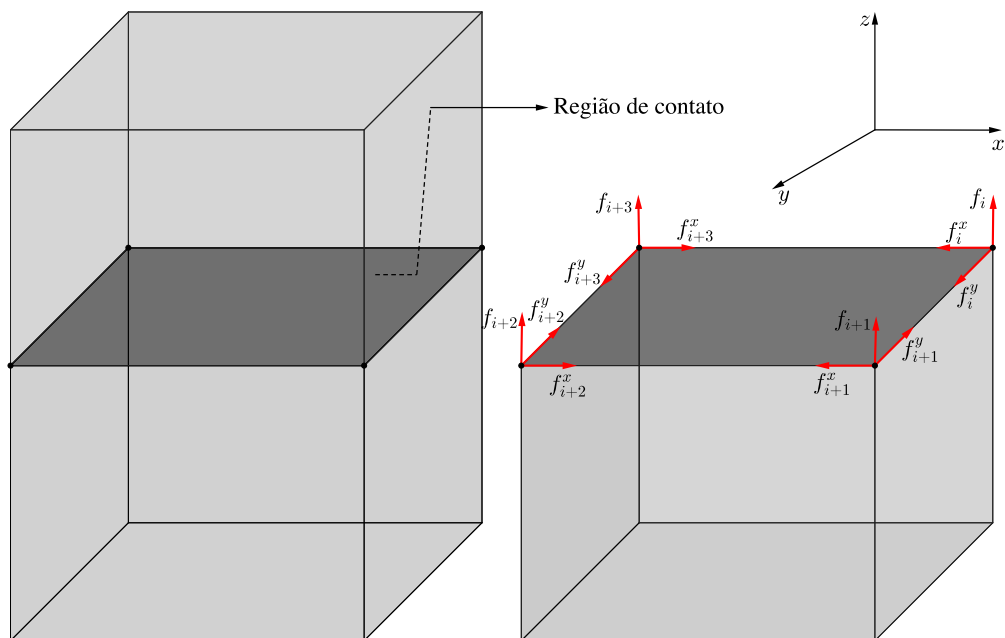
As abordagens desenvolvidas neste trabalho para checar a estabilidade de carga observam o empacotamento como um todo usando as condições de equilíbrio de corpos rígidos, sendo que o interesse está em saber se um dado empacotamento é estável (ou não) sem, para tanto, analisar item a item. Assim, essas abordagens são diferentes daquelas que também usam a ideia de equilíbrio de corpos rígidos propostas na literatura, em particular por [Silva, Soma e Maculan \(2003\)](#), [Queiroz e Miyazawa \(2014\)](#), [Ramos, Oliveira e Lopes \(2016\)](#) e [Ramos et al. \(2016\)](#) que analisaram cada item individualmente e, assim, faz-se o cálculo do centro de massa de acordo com a influência de itens sobre outros itens para checar as condições de equilíbrio.

Os trabalhos que utilizam as leis da dinâmica Newtoniana para simular sistemas de corpos rígidos buscam evitar a interpenetração entre os corpos de forma a checar a consistência quanto às situações reais. Uma maneira para se fazer isso é calcular a força normal

que age perpendicularmente à superfície de contato entre os corpos e verificar se tal força mantém o sinal adotado inicialmente (BARAFF, 1989).

Sejam duas caixas, uma em contato direto com a outra, tal que elas se tocam em infinitos pontos definidos dentro de um polígono (região, superfície ou interface) de contato conforme ilustra a Figura 3.1. Com o objetivo de simplificar a análise, assume-se que apenas os vértices do polígono de contato, a partir de agora denominados *pontos de contato*, são considerados. Em cada ponto de contato i atua uma tríade de forças $\vec{f}_i = (f_i, f_i^x, f_i^y)$, onde f_i é a magnitude da força normal, f_i^x e f_i^y representam a magnitude da força de atrito na direção dos eixos x e y , respectivamente.

Figura 3.1 – Superfície de contato e tríade de forças.



Fonte: o autor.

Quando o objeto é de duas dimensões, tem-se um segmento de reta como região de contato. Claramente, quanto mais pontos forem considerados, mais próximo da realidade estará a representação, porém o custo computacional cresce significativamente, gerando pouca influência na precisão dos resultados de estabilidade, como foi percebido em testes computacionais preliminares.

De acordo com Baraff (1989), a força normal possui magnitude correta se obedecer às seguintes condições:

- Não permite que os corpos se interpenetrem, por isso ela não deve trocar de sinal;

- A força normal empurra, mas não puxa e, assim, ela não pode trocar de sinal;
- A força normal atua apenas nos pontos de contato;
- Em função do tempo, a força normal é contínua.

A rotação de um corpo deve-se ao torque aplicado nele. O torque é obtido em consequência da força aplicada ao corpo. Caracteriza-se a força \vec{F}_k aplicada ao corpo k como sendo a soma da força tangencial $\vec{F}_{(t)k}$ com a força perpendicular $\vec{F}_{(\perp)k}$, ou seja:

$$\vec{F}_k = \vec{F}_{(t)k} + \vec{F}_{(\perp)k}. \quad (3.6)$$

O torque pode ser representado como o produto vetorial entre \vec{r}_k e \vec{F}_k , a saber:

$$\vec{\tau}_k = \vec{r}_k \times \vec{F}_k, \quad (3.7)$$

em que $\vec{\tau}_k$ é o torque gerado pela força \vec{F}_k e \vec{r}_k é a distância da força aplicada até o ponto fixo de rotação, que neste caso é tomado como o centro de massa do corpo. Sabe-se que sobre um corpo pode haver a atuação de uma ou mais forças. Suponha que sobre o corpo k estão agindo η forças, sendo assim:

$$\sum_{k=1}^{\eta} \vec{\tau}_k = \tau = \sum_{k=1}^{\eta} m_k \vec{\alpha} r_k^2. \quad (3.8)$$

Tem-se que $\sum m_k r_k^2 = I_k$, em que I_k é o momento de inércia de um corpo k de massa m e que gira em torno de um eixo a uma distância r_k desse eixo de rotação. Então, pode-se reescrever a equação (3.8) da seguinte forma:

$$\vec{\tau} = I_k \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}}{I_k}, \quad (3.9)$$

em que $\vec{\alpha}$ é a aceleração angular. Neste caso, o momento de inércia indica o grau de dificuldade em alterar o estado de movimento do corpo em rotação. Em geral, quanto maior for o momento de inércia de um corpo, mais difícil será fazê-lo girar ou alterar seu estado de rotação.

No momento de inércia a rotação ocorre em relação à um único eixo. Ao considerar que a rotação pode ocorrer em tornos dos três eixos (x , y e z), usa-se o tensor de inércia. O tensor de inércia I de uma caixa depende da escolha do sistema referencial adotado para o corpo. Toda caixa possui três eixos, em particular os eixos principais de inércia, que uma vez

tomados como os eixos do corpo, com origem no centro de massa, fazem com que o produto de inércia se anule. No caso de caixas, o tensor de inércia da caixa k é diagonal e dado por:

$$I_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} m_k (l_k^2 + h_k^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m_k (w_k^2 + h_k^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m_k (w_k^2 + l_k^2) \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

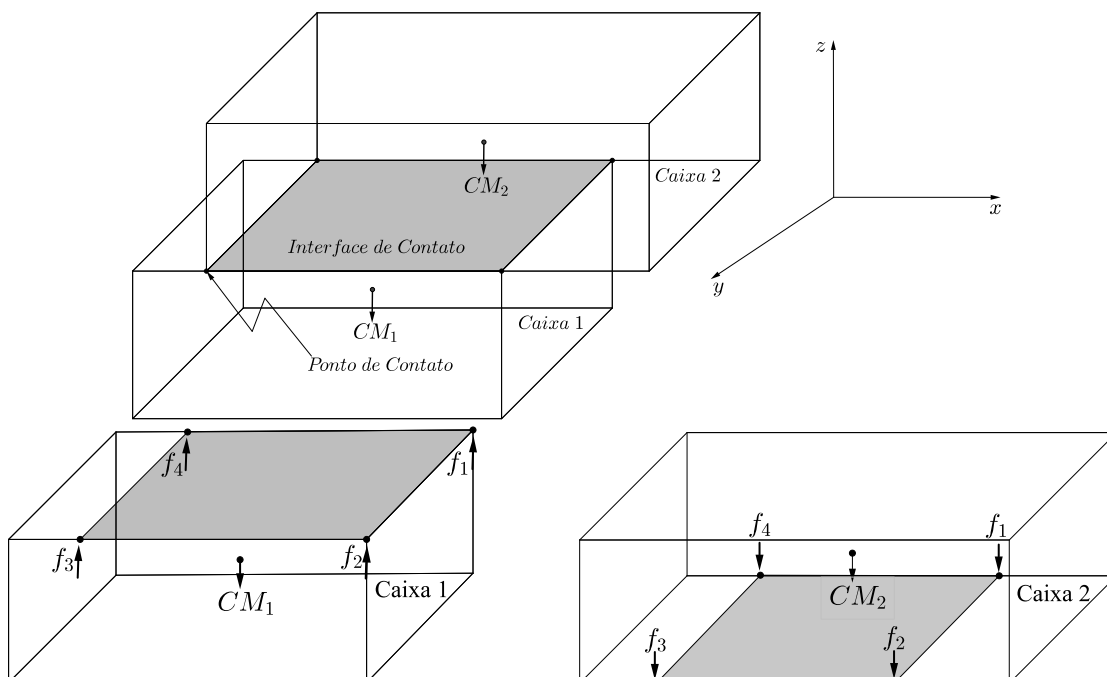
3.2.1 Estabilidade Vertical

Esta seção apresenta três abordagens para resolver a estabilidade vertical de carga baseada nos conceitos de equilíbrio de corpos rígidos. Essas abordagens seguem as contribuições de [Blum, Griffith e Neumann \(1970\)](#), resultando na abordagem BGN, de [Baraff \(1989\)](#), resultando na abordagem B, e de [Whiting, Ochsendorf e Durand \(2009\)](#), resultando na abordagem WOD.

3.2.1.1 Abordagem BGN

Os conceitos e definições a seguir são baseados no trabalho de [Blum, Griffith e Neumann \(1970\)](#). Como mencionado anteriormente, as forças de reação da superfície de contato surgem nos pontos de contato, como mostra a Figura 3.2. Em [Queiroz e Miyazawa \(2014\)](#), o ponto de contato é tomado como sendo o ponto médio do segmento de contato, sendo uma representação mais simples (envolve menos cálculos).

Figura 3.2 – Configuração de forças sobre caixas.



Fonte: o autor.

Para determinar a magnitude da força normal f_i em cada ponto de contato i da superfície de contato, basta resolver as equações (3.11) envolvendo a caixa k que contém tal superfície de contato.

$$\sum \vec{F}_k = 0 \quad \text{e} \quad \sum \vec{\tau}_k = 0, \quad (3.11)$$

em que \vec{F}_k é a força resultante atuante na caixa k , a qual inclui f_i , e $\vec{\tau}_k$ é o torque com relação ao referencial inercial, o qual é assumido no centro de massa da caixa.

Para cada superfície de contato é possível derivar três equações de equilíbrio resultando em quatro forças desconhecidas. Para um dado empacotamento, ε representa o total de equações de equilíbrio e η é o total de forças desconhecidas, sendo $\eta \geq \varepsilon$. Se $\varepsilon = \eta$, o sistema é determinado com única solução, mas em geral $\eta > \varepsilon$ e o sistema não apresenta uma solução única.

A partir de [Blum, Griffith e Neumann \(1970\)](#), em consonância com as condições de [Baraff \(1989\)](#), para que um empacotamento seja estável é preciso que exista uma solução para as ε equações de forma que nenhuma força normal tenha magnitude de valor negativo. Para tanto, constrói-se um sistema de equações para o empacotamento a partir da aplicação da equação (3.11), resultando em $A\vec{f} - \vec{b} = \vec{0}$, isto é:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,\eta} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,\eta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\varepsilon,1} & a_{\varepsilon,2} & \cdots & a_{\varepsilon,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_\varepsilon \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_\varepsilon \end{bmatrix} = 0, \quad (3.12)$$

em que A é uma matriz composta por números reais que são os coeficientes que acompanham $\vec{f} = [f_1, f_2, \dots, f_\varepsilon]$ e \vec{b} recebe valores reais, sendo que para as equações de momento este valor é zero e para as equações de forças este valor corresponde à força peso.

[Blum, Griffith e Neumann \(1970\)](#) afirmaram que um sistema de corpos rígidos com η forças desconhecidas escritas em ε equações satisfaz as condições de equilíbrio estático se $(\eta - \varepsilon)$ forças podem ter valor zero e as demais terem valores positivos. Um exemplo mostrando a construção do sistema $A\vec{f} - \vec{b} = \vec{0}$ é dado no Anexo A, sendo possível perceber que a quantidade de equações é menor do que o número de forças.

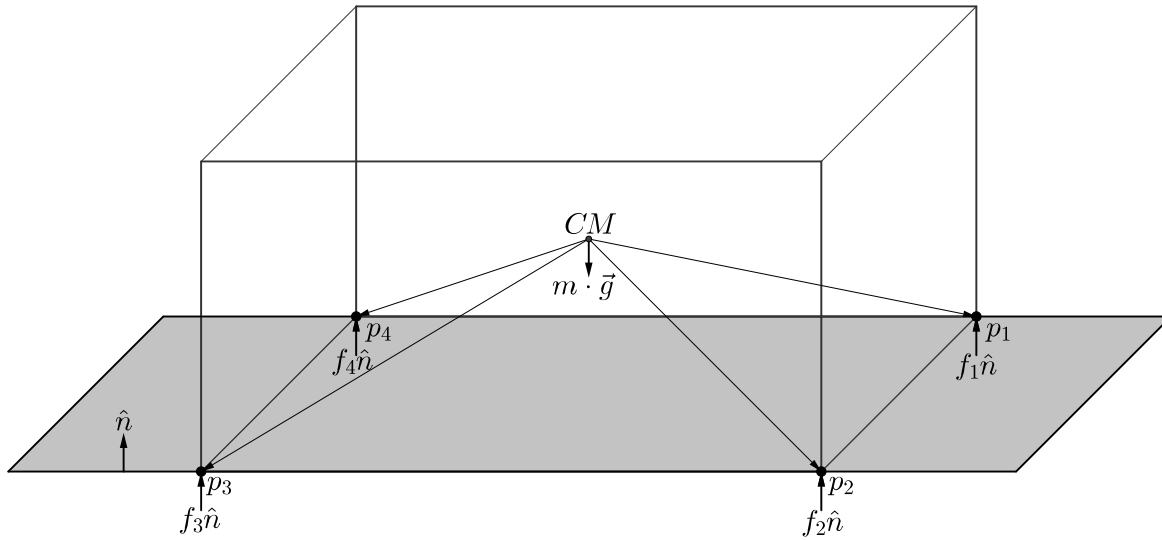
3.2.1.2 Abordagem B

A Figura 3.3 mostra uma caixa k descansando no chão do contêiner, em que nela atuam as forças com direção da normal \hat{n} , isto é, $f_1\hat{n}, f_2\hat{n}, f_3\hat{n}, f_4\hat{n}$. A força resultante da

caixa k é dada por:

$$\vec{F}_k = m_k \vec{g} + f_1 \hat{n} + f_2 \hat{n} + f_3 \hat{n} + f_4 \hat{n}. \quad (3.13)$$

Figura 3.3 – Atuação de forças em uma caixa apoiada no chão do contêiner.



Fonte: o autor.

O torque resultante é obtido a partir da soma de todos os torques na superfície de contato, isto é:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times f_1 \hat{n} + \vec{r}_2 \times f_2 \hat{n} + \vec{r}_3 \times f_3 \hat{n} + \vec{r}_4 \times f_4 \hat{n}. \quad (3.14)$$

Partindo de Baraff (1989), a aceleração em cada ponto de contato i de uma caixa k é dada por:

$$\ddot{p}_i = \frac{\vec{F}_k}{m_k} + \frac{\vec{\tau}}{I_k} \times \vec{r}_i. \quad (3.15)$$

Segue que a aceleração em cada ponto de contato da superfície de contato da caixa k é representada nas equações (3.16)-(3.19), a saber:

$$\ddot{\chi}_1 = \ddot{p}_1 \hat{n} = \hat{n} \cdot \left(\frac{m_k \cdot \vec{g} + f_1 \hat{n} + f_2 \hat{n} + f_3 \hat{n} + f_4 \hat{n}}{m_k} + \frac{\vec{r}_1 \times f_1 \hat{n} + \vec{r}_2 \times f_2 \hat{n} + \vec{r}_3 \times f_3 \hat{n} + \vec{r}_4 \times f_4 \hat{n}}{I_k} \times \vec{r}_1 \right) \geq 0, \quad (3.16)$$

$$\ddot{\chi}_2 = \ddot{p}_2 \hat{n} = \hat{n} \cdot \left(\frac{m_k \cdot \vec{g} + f_1 \hat{n} + f_2 \hat{n} + f_3 \hat{n} + f_4 \hat{n}}{m_k} + \frac{\vec{r}_1 \times f_1 \hat{n} + \vec{r}_2 \times f_2 \hat{n} + \vec{r}_3 \times f_3 \hat{n} + \vec{r}_4 \times f_4 \hat{n}}{I_k} \times \vec{r}_2 \right) \geq 0, \quad (3.17)$$

$$\ddot{\chi}_3 = \ddot{p}_3 \hat{n} = \hat{n} \cdot \left(\frac{m_k \vec{g} + f_1 \hat{n} + f_2 \hat{n} + f_3 \hat{n} + f_4 \hat{n}}{m_k} + \frac{\vec{r}_1 \times f_1 \hat{n} + \vec{r}_2 \times f_2 \hat{n} + \vec{r}_3 \times f_3 \hat{n} + \vec{r}_4 \times f_4 \hat{n}}{I_k} \times \vec{r}_3 \right) \geq 0, \quad (3.18)$$

$$\ddot{\chi}_4 = \ddot{p}_4 \hat{n} = \hat{n} \cdot \left(\frac{m_k \vec{g} + f_1 \hat{n} + f_2 \hat{n} + f_3 \hat{n} + f_4 \hat{n}}{m_k} + \frac{\vec{r}_1 \times f_1 \hat{n} + \vec{r}_2 \times f_2 \hat{n} + \vec{r}_3 \times f_3 \hat{n} + \vec{r}_4 \times f_4 \hat{n}}{I_k} \times \vec{r}_4 \right) \geq 0. \quad (3.19)$$

Para um sistema com ε equações, a formulação pode ser escrita na forma matricial como:

$$A \vec{f} - \vec{w} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\eta} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\eta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{\varepsilon 1} & a_{\varepsilon 2} & \cdots & a_{\varepsilon \varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_\varepsilon \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\chi}_1 \\ \ddot{\chi}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\chi}_\varepsilon \end{bmatrix} \geq \vec{0}. \quad (3.20)$$

A matriz A possui ordem $\varepsilon \times \varepsilon$, enquanto as matrizes \vec{f} e \vec{w} possuem ordem $\varepsilon \times 1$. Tem-se que A é composta pelos coeficientes de \vec{f} , ao passo que \vec{w} contém a magnitude da aceleração da gravidade, isto é, $\vec{w} = [g, g, \dots, g]$.

Quando existem até dois pontos de contato entre os corpos torna-se fácil resolver o sistema anterior. Por outro lado, quando um corpo possui três ou mais pontos de contato, surgem os casos indeterminados, em que equações podem ser redundantes e o sistema pode apresentar mais de uma solução para as forças de contato.

Para atender as condições de Baraff (1989) e evitar a interpenetração entre os corpos, segue que $\vec{f} \geq \vec{0}$. Logo, no caso da estabilidade do empacotamento, torna-se suficiente montar o sistema de equações (3.20) e verificar se há uma solução satisfazendo $\vec{f} \geq \vec{0}$. Caso contrário, havendo alguma força negativa, ela é contrária ao sinal adotado para a normal, de forma que puxa o corpo de cima para interpenetrar no corpo de baixo, ao invés de empurrá-lo para manter o equilíbrio.

Esse mesmo comportamento ocorre no método BNG, daí a necessidade da força normal ser sempre não negativa. Um exemplo mostrando a construção do sistema $A \vec{f} - \vec{w} = \vec{0}$ para a abordagem B é dado no Anexo A.

3.2.1.3 Abordagem WOD

Para Whiting, Ochsendorf e Durand (2009), em cada superfície de contato há uma tríade de forças agindo em cada ponto de contato i . Essa tríade de forças é composta por: força normal f_i , força de atrito na direção x (f_i^x) e força de atrito na direção y (f_i^y). A força

normal f_i encontra-se no eixo z , enquanto a força de atrito tem suas componentes nos eixos x e y . Parte-se da equação:

$$A\vec{f} - \vec{p} = \vec{0}, \quad (3.21)$$

em que A é a matriz com os coeficientes das equações de equilíbrio, \vec{f} é o vetor de forças (normal e atrito) e \vec{p} é o vetor que contém o peso de cada caixa. Esta equação implica geralmente em sistemas indeterminados de forma que algumas forças devem ser fixas para que o sistema resultante possa ser solucionado. Mais uma vez, deseja-se uma configuração com $\vec{f} \geq \vec{0}$.

Para um dado empacotamento de n caixas, a matriz A é obtida a partir da equação (3.21) composta por submatrizes $G_{k,c}$, com informações da caixa k e as suas superfícies de contato c .

$$\begin{bmatrix} G_{0,0} & G_{0,1} & G_{0,2} & \cdots & G_{0,s} \\ G_{1,0} & G_{1,1} & G_{1,2} & \cdots & G_{1,s} \\ G_{2,0} & G_{2,1} & G_{2,2} & \cdots & G_{2,s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n,0} & G_{n,1} & G_{n,2} & \cdots & G_{n,s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Assim, cada caixa k tem o vetor \vec{p}_k contendo o seu peso e o torque, em que a única componente diferente de zero é a componente para o peso da caixa. A equação (3.23) mostra o vetor \vec{p}_k , enquanto a equação (3.24) ilustra como montar a submatriz $G_{k,c}$ para o ponto de contato i da caixa k com superfície na contato c , isto é:

$$\vec{p}_k^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m_k g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

$$G_{k,c} = \begin{bmatrix} \hat{n}_x & (\hat{f}_i^x)_x & (\hat{f}_i^y)_x & \cdots \\ \hat{n}_y & (\hat{f}_i^x)_y & (\hat{f}_i^y)_y & \cdots \\ \hat{n}_z & (\hat{f}_i^x)_z & (\hat{f}_i^y)_z & \cdots \\ (\hat{n} \times \vec{r}_{i,k})_x & (\hat{f}_x \times \vec{r}_{i,k})_x & (\hat{f}_y \times \vec{r}_{i,k})_x & \cdots \\ (\hat{n} \times \vec{r}_{i,k})_y & (\hat{f}_x \times \vec{r}_{i,k})_y & (\hat{f}_y \times \vec{r}_{i,k})_y & \cdots \\ (\hat{n} \times \vec{r}_{i,k})_z & (\hat{f}_x \times \vec{r}_{i,k})_z & (\hat{f}_y \times \vec{r}_{i,k})_z & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}^i \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

em que $\vec{x}^i = \begin{bmatrix} f_i & f_i^x & f_i^y \end{bmatrix}^T$, $\hat{n} = (\hat{n}_x, \hat{n}_y, \hat{n}_z) = (0, 0, 1)$, $\hat{f}_i^x = ((\hat{f}_i^x)_x, (\hat{f}_i^x)_y, (\hat{f}_i^x)_z) = (1, 0, 0)$ e $\hat{f}_i^y = ((\hat{f}_i^y)_x, (\hat{f}_i^y)_y, (\hat{f}_i^y)_z) = (0, 1, 0)$. A submatriz $G_{k,c}$ possui ordem 6×12 , além disso \vec{x}^i é o vetor com as forças aplicadas no ponto de contato i ; \hat{n} é o vetor unitário para indicar a direção da normal na superfície de contato c ; \hat{f}_x é o vetor unitário para indicar a direção da

força de atrito em relação ao eixo x , dada a superfície de contato c ; \hat{f}_y é o vetor unitário para indicar a direção da força de atrito em relação ao eixo y , dada a superfície de contato c ; e, $\vec{r}_{i,k}$ é o vetor distância entre o centro de massa da caixa k e o ponto de contato i .

3.2.1.4 Considerações para a Estabilidade Vertical

Para tratar a estabilidade vertical, resolve-se um sistema linear de forma a verificar se há a presença de forças normais negativas, pois forças negativas indicam que o empacotamento é instável. Se há forças negativas, a ideia é eliminar esta solução a partir da inserção de um corte durante a otimização e, assim, outro empacotamento deve ser obtido resolvendo o modelo de programação linear inteira.

Encontrar a magnitude correta da força normal, conforme aponta Baraff (1989), requer a resolução de um problema de programação quadrática. A programação quadrática pode ser caracterizada como sendo uma classe específica da programação não-linear. O problema de programação quadrática considerado neste trabalho possui apenas a função objetivo com termos quadrático, enquanto as restrições são lineares.

Segundo Baraff (1989), para que o sistema apresente um conjunto de forças corretas é preciso atender as condições:

$$A\vec{f} \geq \vec{w}, \vec{f} \geq 0 \text{ e } \sum_i f_i \chi_i(\vec{f}) = 0. \quad (3.25)$$

Se $\sum_i f_i \chi_i(\vec{f}) \geq 0$, então uma solução correta para \vec{f} é encontrada ao minimizar $\sum_i f_i \chi_i(\vec{f})$. Assim, a equação (3.25) pode ser escrita como:

$$A\vec{f} \geq \vec{w}, \vec{f} \geq 0 \text{ e } \vec{f}^T A\vec{f} - \vec{f}^T \vec{w} = 0, \quad (3.26)$$

em que $\vec{f}^T A\vec{f}$ é quadrático em f_i . Logo, o problema a ser resolvido para obter o valor correto das forças normais consiste de (BARAFF, 1989):

$$\min \vec{f}^T A\vec{f} - \vec{f}^T \vec{w} \quad (3.27)$$

Sujeito a:

$$A\vec{f} \geq \vec{w}, \quad (3.28)$$

$$\vec{f} \geq 0. \quad (3.29)$$

3.2.2 Estabilidade Horizontal

Na estabilidade horizontal, assim como na estabilidade vertical, é preciso encontrar a interface de contato entre as caixas e conseqüentemente os pontos de contato. No caso

horizontal, as interfaces de contato encontram-se entre as faces laterais das caixas. Então, para saber se as caixas possuem interface de contato lateral, verifica-se se a face lateral de alguma caixa j está suportada por alguma face lateral de caixas k . Após descobrir as caixas que estão em contato, obtém-se as equações de força. Como as caixas apresentam mais de dois pontos de contato, segue que o sistema linear a ser resolvido tem o número de equações menor do que o número de forças a serem encontradas. Além disso, as equações são elaboradas usando a mesma ideia da estabilidade vertical no caso da abordagem B, sendo que se considera a substituição da força peso pela massa da caixa, uma vez que a força peso tem direção vertical e é perpendicular as forças horizontais.

Para a estabilidade horizontal, torna-se necessário encontrar a magnitude correta da força normal em cada ponto de contato i , pois a magnitude da força de atrito atuante em cada ponto de contato depende do valor correto da força normal. Para encontrar a magnitude correta da força normal, resolve-se o modelo de programação quadrática (3.27)-(3.29).

É importante salientar que nem todas as abordagens desenvolvidas neste trabalho podem ser usadas para verificar a estabilidade horizontal, pois a matriz A deve ser quadrada. Para a abordagem BGN e WOD não é possível tratar a estabilidade horizontal, pois suas matrizes A não são quadradas. Sendo assim, apenas a abordagem B possibilita tratar a estabilidade horizontal por permitir obter valores corretos para as forças.

Na estabilidade horizontal surge a força de atrito devido ao contato entre as caixas e entre as caixas e o recipiente. Em um ponto de contato há a presença de pelo menos dois tipos de forças, uma perpendicular a superfície de contato, que é a força normal, e a outra é tangencial à superfície, que é a força de atrito. A magnitude da força de atrito é obtida por meio das equações (3.30) e (3.31):

$$|f_i^x| \leq \mu f_i, \quad (3.30)$$

$$|f_i^y| \leq \mu f_i. \quad (3.31)$$

em que μ é o coeficiente de atrito, f_i é a força normal, f_i^x e f_i^y são as componentes da força de atrito em relação aos eixos x e y , como especificado anteriormente.

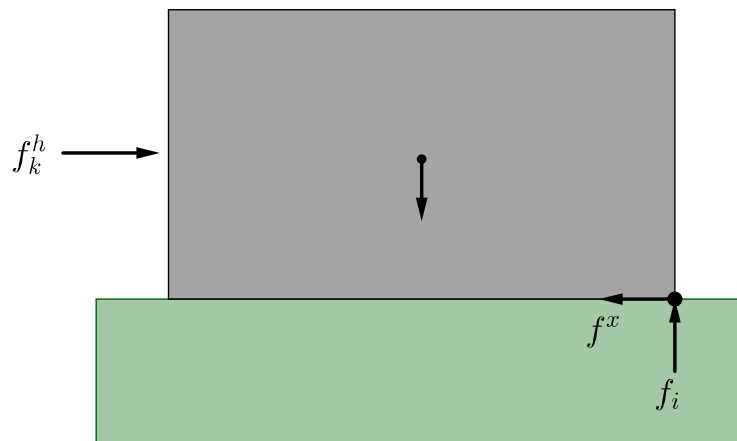
A Figura 3.4 apresenta uma situação em que a caixa k está apoiada sobre uma superfície com coeficiente de atrito positivo. Se uma força horizontal de intensidade f_k^h for aplicada na face lateral esquerda da caixa, surge a força de atrito com intensidade f^x como reação à força horizontal, de forma que uma das duas situações ocorre, a saber:

- A força lateral pode exceder a força de atrito estático e a caixa começará a deslizar pela superfície (situação de *deslizamento*); ou,

- A força lateral não consegue fazer a caixa deslizar devido a reação da força de atrito, porém a força lateral tem intensidade suficiente para fazer com que a caixa rotacione no ponto de contato i (situação de *tombamento*).

Para que um corpo em repouso deslize sobre uma superfície é necessário que a intensidade da força horizontal seja maior do que a intensidade da força de atrito estático, assim devendo obedecer a equação (3.30), no eixo x , e a equação (3.31), no eixo y . A intensidade da força de atrito estático em um ponto é igual ao produto entre o coeficiente de atrito estático e a força normal naquele ponto. Se a força horizontal exceder a este valor, então o corpo desliza.

Figura 3.4 – Força horizontal atuando em uma caixa para a condição de deslizamento.



Fonte: o autor.

Neste trabalho, consideram-se dois tipos de forças horizontais atuando sobre as caixas, tal que em uma caixa k podem atuar a força centrípeta f_k^c e a força lateral f_k^l . Além disso, f_k^h consiste na resultante das forças horizontais que age na referida caixa.

A força centrípeta está relacionada com o movimento circular desenvolvido pelas caixas em determinada trajetória curvilínea e representa de forma geral a resultante dos corpos que realizam uma trajetória circular atraindo-os para o centro da trajetória. A magnitude da força centrípeta para a caixa k , representada por f_k^c , é obtida por:

$$f_k^c = m_k \frac{v^2}{r}. \quad (3.32)$$

em que r representa o raio da curvatura e v é a velocidade com que a caixa (neste caso o veículo transportando o empacotamento) faz a curva.

Para a obtenção da aceleração centrípeta foram utilizados os raios e a velocidade das curvas definidas nas normas para o projeto das estradas de rodagem, disponível em [Ministério dos Transportes \(1973\)](#), com as informações nas Tabelas (3.1) e (3.2).

Tabela 3.1 – Velocidades diretrizes em km/h.

Regiões	Classe Especial	Classe I	Classe II	Classe III
Planas	100	100	80	60
Onduladas	80	80	60	40
Montanhosas	60	60	40	30

Fonte: [Ministério dos Transportes \(1973\)](#).

Tabela 3.2 – Raios mínimos de curvatura horizontal, em metros, dos eixos das estradas.

Regiões	Classe Especial	Classe I	Classe II	Classe III
Planas	430	340	200	110
Onduladas	280	200	110	50
Montanhosas	160	100	30	30

Fonte: [Ministério dos Transportes \(1973\)](#).

Após fazer os cálculos para obter a aceleração centrípeta para cada tipo de curva, percebe-se que a pior curva é a do tipo “montanhosas” da Classe II. Então, a magnitude da força centrípeta para cada caixa k é dada em (3.33).

$$f_k^c = 4,11m_k. \quad (3.33)$$

Para encontrar a força de atrito estático é necessário que seja estabelecido o coeficiente de atrito estático μ_e . Adota-se neste trabalho que as caixas são fabricadas de papelão com um coeficiente de atrito estático entre as superfícies igual a $\mu_e = 0,25$. Assim, para que a caixa k não deslize é necessário que:

$$0,25f_k \geq f_k^h, \quad (3.34)$$

em que f_k é a resultante da força normal e f_k^h é a resultante da força horizontal, ambas atuando na caixa k . É importante destacar que quanto mais baixo for o coeficiente de atrito mais fácil será para uma caixa deslizar.

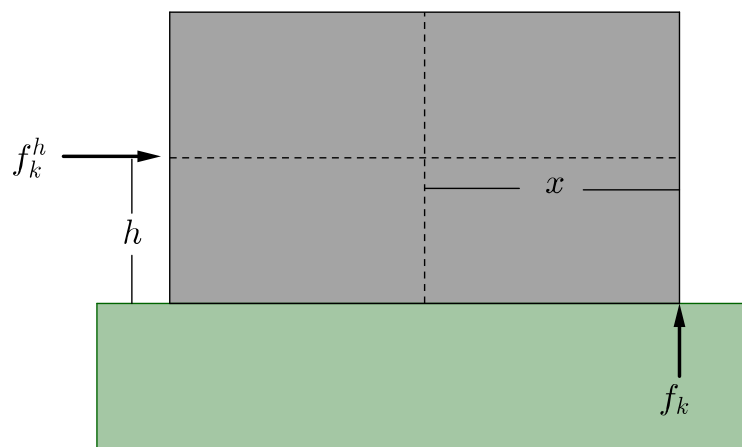
Com relação ao tombamento de um corpo é necessário entender que a força normal está distribuída sobre a superfície de contato. Essa força também é responsável para evitar que um corpo rotacione quando as forças que atuam sobre ele causam um momento. Assim, haverá uma redistribuição da força normal para um ponto de forma a resistir ao momento exercido por outras forças e que causará o tombamento.

Como a força normal surge do resultado do contato entre os corpos, não se pode deslocá-la para um ponto além daqueles na superfície de contato. A Figura 3.5 mostra o

que ocorre quando a resultante da força horizontal não consegue fazer com que a caixa deslize, mas é suficiente para gerar um momento, de forma que a resultante da força normal é, então, deslocada para o último ponto da superfície de contato (canto inferior direito) a fim de assegurar o equilíbrio. A condição para ocorrer o tombamento é expressa na equação (3.35) e depende das distâncias x e h com relação ao centro de massa do caixa.

$$f_k^h h > f_k x. \quad (3.35)$$

Figura 3.5 – Força horizontal atuando em uma caixa para a condição de tombamento.



Fonte: o autor.

O procedimento para verificar a estabilidade horizontal é aplicado após checar a estabilidade vertical e não for constatado que o empacotamento é instável (isto é, não há forças normais com sinal negativo). Neste caso, as forças normais f_i de cada ponto de contato i foram obtidas corretamente a partir da resolução do modelo de programação quadrática (3.27)-(3.29). Assim, o procedimento segue calculando a força de atrito para cada ponto de contato e montando o sistema de equações de força para as superfícies de contato laterais.

As forças laterais f_i^l , em cada ponto de contato i das superfícies laterais, são obtidas usando a Abordagem B assumindo que não há redução no valor da força lateral, passada de uma caixa para a outra, devido ao atrito, porém usando o valor da massa m_k , da caixa k , sendo extraído da resultante da força normal em k , pois assim se leva em consideração a influência das massas que agem direta ou indiretamente sobre a caixa k . Em seguida, obtém-se as forças centrípetas para cada caixa k para, assim, compor a resultante das forças horizontais f_k^h da respectiva caixa. De posse da resultante das forças horizontal e normal para cada caixa k , verificam-se as condições de deslizamento e tombamento, respectivamente, nas equações (3.34) e (3.35). Se alguma caixa deslizar, então o empacotamento é instável e igualmente se alguma caixa tombar.

Capítulo 4

RESULTADOS COMPUTACIONAIS

O algoritmo foi codificado na linguagem de programação C++ e foram realizados experimentos em um computador com processador Intel Core *i7 – 4790K* 4.0 GHz, 32 GB de memória RAM e sistema operacional Linux Ubuntu 14.04 LTS.

Os testes consistiram em resolver a formulação para o PCUC com o *framework* disponibilizado no *Gurobi Optimizer*, na versão 6.5.1, para algoritmos do tipo *Branch-and-Cut* (B&C). Em linhas gerais, fez-se a inserção da formulação para o problema de empacotamento, que estão nas equações (2.7) a (2.10). Além disso, define-se uma rotina a ser chamada a cada vez que o *Gurobi* encontrar uma solução viável. Esta rotina tem o intuito de aplicar a abordagem para verificar a estabilidade de carga sobre o empacotamento que foi encontrado e, ao detectar que o empacotamento é instável, insere-se um corte (desigualdade) proibindo que as caixas do empacotamento não sejam mais empacotadas nas respectivas posições que originaram a instabilidade.

O *Branch-and-Cut* combina o método *Branch-and-Bound* (B&B) com o método de planos de corte. O B&B é um algoritmo de ramificação e poda, que se enquadra na classe dos métodos de enumeração e é bastante utilizado para resolver modelos de programação linear inteira.

O primeiro passo do B&B consiste na resolução da relaxação do problema inteiro, de forma que se a solução encontrada para a relaxação respeita as condições de integralidade, então esta solução é ótima para o problema inteiro também. Por outro lado, o valor encontrado para a função objetivo fornece um limite inferior para o mínimo do problema inteiro. No caso em que a solução ótima da relaxação não satisfaz as condições de integralidade, escolhe-se uma variável com valor fracionário S_i e constroem-se dois subproblemas, com a inserção restrição $S_i \leq \lfloor S_i^0 \rfloor$ no primeiro e a inserção de $S_i \geq \lfloor S_i^0 \rfloor + 1$ no outro subproblema. Por sua vez, o método de planos de corte busca inserir desigualdades válidas no problema a fim de eliminar regiões com soluções fracionárias. A ideia é remover soluções indesejáveis modificando a região factível, mas sem perder soluções inteiras, para se obter

um ponto extremo que corresponda a uma solução ótima inteira.

Assim, o B&C trabalha sobre a mesma árvore de enumeração do B&B, porém adiciona cortes válidos em cada nó da árvore a fim de obter bons limitantes e acelerar a busca por soluções inteiras. Além disso, existem vários pacotes de otimização que trazem implementações eficientes do B&C, como é o caso do *Gurobi Optimizer*, que tem se sobressaído frente aos seus concorrentes (OPTIMIZATION, 2015).

Com relação as instâncias de teste, usaram-se as mesmas instâncias de [Junqueira, Morabito e Yamashita \(2012\)](#), as quais consideram $m = 5$, $m = 10$ e $m = 20$ como os tipos diferentes de itens, para orientação fixa das caixas, e cada caixa k com demanda b_k gerada aleatoriamente no intervalo $[1, \lfloor \frac{L}{l_k} \rfloor \cdot \lfloor \frac{W}{w_k} \rfloor \cdot \lfloor \frac{H}{h_k} \rfloor]$, para $k = 1, 2, \dots, m$. As dimensões das caixas foram geradas de duas maneiras: o grupo A_m considera as dimensões das caixas variando entre 25% e 75% das respectivas dimensões do contêiner; e, o grupo B_m considera as dimensões das caixas variando entre 10% e 50% das respectivas dimensões do contêiner. Em todos os exemplos, os contêineres possuem dimensões iguais, isto é, $L = W = H$, com valor igual a 10, 20 ou 30. O tempo computacional para resolver cada instância foi limitado em 3600 segundos. Vale observar que pelo menos uma das três situações seguintes são possíveis de ocorrer quanto à qualidade da solução obtida pelo *Gurobi*, a saber: (i) solução ótima, com GAP igual a zero; (ii) solução inteira, com GAP maior que zero e com o limite de tempo excedido; e, (iii) sem solução, sem GAP e com o limite de tempo excedido. As tabelas possuem células com a entrada “-” quando ocorre a situação (iii).

As tabelas a seguir apresentam os valores mínimo, médio e máximo para o GAP de otimalidade (em %) retornado pelo *Gurobi*, o tempo computacional (em segundos) gasto, e a fração de volume (em %) ocupado do contêiner. Além disso, é importante destacar que estes valores foram calculados apenas para as instâncias que foram resolvidos de forma ótima ou para aquelas em que pelo menos uma solução foi reportada pelo *Gurobi*. Os resultados envolvem a comparação das abordagens apresentadas nesse trabalho, isto é, abordagem B, BGN e WOD, com a abordagem JMY, que é a do fator de suporte para $\alpha = 1$ (suporte completo das faces).

Os resultados também envolvem o uso de três diferentes tipos de malha para o contêiner, isto é, a malha com discretização unitária, com os *discretization points* de [Herz \(1972\)](#) e com os *reduced raster points* de [Scheithauer e Terno \(1996\)](#). Vale ressaltar que não foram apresentados os resultados da abordagem BGN, pois estes sempre coincidiram com o da abordagem WO. Além disso, as comparações são realizadas exclusivamente observando o valor médio reportado na tabela (linha com entrada “Méd.”) com prioridade para comparações envolvendo o volume ocupado do contêiner.

4.1 Resultados para a Estabilidade Vertical

Os resultados obtidos para os grupos A_5 , A_{10} e A_{20} são apresentados nas Tabelas 4.1-4.3, enquanto que para os grupos B_5 , B_{10} e B_{20} , os resultados estão nas Tabelas 4.4-4.6. As Figuras 4.1-4.6 ilustram o volume ocupado dos contêineres para os grupos A_m e B_m . Os valores em negrito nas tabelas indicam as melhores ocupações em termos de volume ao comparar as abordagens.

Na Tabela 4.1, ao comparar as abordagens com discretização unitária para o grupo A_5 , percebe-se que a abordagem JMY apresenta ocupação de volume inferior às abordagens B e WOD. As abordagens B e WOD, apresentam neste caso, ocupação do recipiente iguais, mas o tempo gasto pela abordagem WOD é inferior como pode ser observado na Figura 4.1. Ao utilizar o *discretization points* para obter os resultados do grupo A_5 , a abordagem JMY apresentou resultados inferiores em termos de ocupação quando comparada aos resultados obtidos pelas abordagens B e WOD, como pode ser observado na Figura 4.1. Em termos de ocupação, as abordagens B e WOD apresentaram a mesma ocupação, mas o tempo gasto pela abordagem WOD foi inferior. Assim como nas soluções encontradas com discretização unitária e com *discretization points* para o grupo A_5 , o uso do *reduced raster points* trouxe soluções inferiores para a abordagem JMY. Mas neste caso, as soluções encontradas pela abordagem WOD foi superior as outras abordagens para contêineres de tamanhos 20 e 30, como pode ser observado na Figura 4.1. Quando se leva em conta o GAP, a abordagem WOD com os *discretization points* superou as demais.

Na Tabela 4.2, para o grupo A_{10} , a abordagem JMY com discretização unitária, para contêineres de tamanhos 10 e 20, apresenta soluções em termos de ocupação do recipiente inferior ao comparar com a abordagem B e WOD, mas para contêineres de tamanho 30 é superior a abordagem B, como se observa na Figura 4.2. Utilizando os *discretization points* é possível perceber que a abordagem JMY apresenta ocupação do recipiente inferior quando comparada às outras duas abordagens, como pode ser verificado na Figura 4.2. Ao usar os *reduced raster points*, a abordagem JMY continua apresentando ocupação inferior, como pode ser verificado na Figura 4.2. No geral, quando se compara a abordagem WOD com a abordagem JMY e B, nota-se claramente que a abordagem WOD traz melhores resultados em termos de ocupação do contêiner e GAP.

Ao analisar as soluções para o grupo A_{20} , na Tabela 4.3, o uso da discretização unitária mostra que, para contêineres de tamanho 10, todas as abordagens retornaram a mesma ocupação, conforme também aponta a Figura 4.3, mas em termos de GAP, a abordagem WOD é mais competitiva. Para contêineres de tamanhos 20 e 30, a abordagem JMY é bastante inferior em termos de ocupação quando comparada com as abordagens B e WOD, fato verificável na Figura 4.3. Ao utilizar o *discretization points* para contêineres de tamanho 10, as abordagens JMY e WOD trazem a mesma ocupação conforme a Figura 4.3, mas levando em consideração o tempo, a WOD é mais interessante. Para contêineres de tamanhos 20 e 30,

tanto com os *discretization points* quanto com os *reduced raster points*, a melhor abordagem em termos de ocupação e GAP é a WOD, ao passo que a pior é a JMY.

Tabela 4.1 – Resultados de estabilidade vertical para o grupo A_5 .

Discretização Unitária										
Dimensão Contêiner (L=W=H)	Tipo	Abordagem JMY			Abordagem B			Abordagem WOD		
		GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)
10	Mín.	0,00	0,27	76,00	0,00	0,22	77,20	0,00	0,16	77,20
	Méd.	0,00	14,56	89,87	0,00	16,55	91,04	0,00	14,60	91,04
	Máx.	0,00	108,70	100,00	0,00	79,16	100,00	0,00	80,39	100,00
20	Mín.	0,00	2,12	55,53	0,00	30,76	60,69	0,00	0,16	60,69
	Méd.	0,00	320,16	75,50	0,00	900,07	78,54	0,00	463,91	78,54
	Máx.	0,00	1683,45	87,80	0,00	3600,07	91,10	0,00	1575,97	91,10
30	Mín.	0,00	4,70	42,93	0,00	52,31	42,93	0,00	51,95	42,93
	Méd.	0,00	58,62	60,87	0,71	2051,24	60,90	6,49	1913,77	60,90
	Máx.	0,00	196,38	76,18	5,77	3600,90	76,18	43,10	3600,90	76,18
Discretization Points										
10	Mín.	0,00	0,05	76,00	0,00	0,03	77,20	0,00	0,03	77,20
	Méd.	0,00	3,53	89,36	0,00	0,79	91,04	0,00	0,76	91,04
	Máx.	0,00	14,25	100,00	0,00	4,58	100,00	0,00	4,60	100,00
20	Mín.	0,00	0,02	55,53	0,00	0,06	60,69	0,00	0,05	60,69
	Méd.	0,00	1,71	70,24	2,48	1,20	78,54	0,00	0,77	78,54
	Máx.	0,00	8,55	83,75	24,80	8,82	91,10	0,00	5,26	91,10
30	Mín.	0,00	0,00	42,93	0,00	0,00	42,93	0,00	0,00	42,93
	Méd.	0,00	0,06	59,99	0,00	0,07	60,90	0,00	0,04	60,90
	Máx.	0,00	0,44	74,51	0,00	0,37	76,18	0,00	0,14	76,18
Reduced Raster Points										
10	Mín.	0,00	0,06	76,00	0,00	0,03	77,20	0,00	0,02	77,20
	Méd.	0,00	4,48	88,76	0,00	0,81	91,04	0,00	0,61	91,04
	Máx.	0,00	15,79	100,00	0,00	4,11	100,00	0,00	3,13	100,00
20	Mín.	0,00	0,00	51,35	0,00	0,02	60,69	0,00	0,01	60,69
	Méd.	0,00	0,87	66,49	0,62	360,39	77,76	0,00	0,34	78,54
	Máx.	0,00	6,02	80,20	6,20	3600,91	88,35	0,00	1,18	91,09
30	Mín.	0,00	0,00	42,93	0,00	0,00	42,93	0,00	0,00	42,93
	Méd.	0,00	0,05	57,82	0,00	0,04	60,03	0,00	0,03	60,46
	Máx.	0,00	0,37	66,70	0,00	0,08	76,18	0,00	0,07	76,18

Fonte: o autor.

Em resumo, para o grupo A_m , as soluções encontradas pela abordagem WOD usando o *discretization points* é sempre melhor, em especial em termos de ocupação e GAP, do que as soluções encontradas por meio da abordagem JMY e B, usando discretização unitária ou *reduced raster points*. Além disso, a fração média de volume ocupado decresce à medida que as dimensões dos contêineres aumentam. Estas dificuldades começam a aparecer devido a necessidade de maior tempo de processamento e de memória, uma vez que o GAP começa a aumentar.

Tabela 4.2 – Resultados de estabilidade vertical para o grupo A₁₀.

Discretização Unitária										
Dimensão Container (L=W=H)	Tipo	Abordagem JMY			Abordagem B			Abordagem WOD		
		GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)
10	Mín.	0,00	1,60	96,80	0,00	0,41	98,40	0,00	0,36	98,40
	Méd.	0,00	64,44	99,37	0,01	29,08	99,53	0,00	32,16	99,53
	Máx.	0,00	369,68	100,00	0,10	226,23	100,00	0,00	243,18	100,00
20	Mín.	0,00	114,10	70,76	0,00	183,79	69,58	0,00	105,16	76,45
	Méd.	1,58	1296,85	86,72	3,26	1624,99	87,50	0,64	1134,99	89,86
	Máx.	7,93	3603,09	94,30	30,40	3600,37	94,30	6,40	3600,03	94,30
30	Mín.	0,00	210,43	63,83	0,00	1198,46	25,16	0,00	1080,41	55,66
	Méd.	4,40	2360,03	79,19	11,73	3408,62	76,91	30,96	3429,25	79,27
	Máx.	16,66	3686,19	93,56	74,80	3994,89	93,55	81,00	4252,49	93,56
Discretization Points										
10	Mín.	0,00	0,21	96,80	0,00	0,06	98,40	0,00	0,06	98,40
	Méd.	0,00	58,43	99,36	0,00	19,19	99,54	0,00	21,78	99,54
	Máx.	0,00	373,45	100,00	0,00	136,84	100,00	0,00	159,68	100,00
20	Mín.	0,00	1,12	70,76	0,00	0,28	76,45	0,00	0,29	76,45
	Méd.	0,00	154,77	83,43	0,00	313,56	89,80	0,00	47,35	89,95
	Máx.	0,00	857,27	94,30	0,00	2792,70	94,30	0,00	249,45	94,30
30	Mín.	0,00	1,06	63,83	0,00	0,21	70,06	0,00	0,21	70,06
	Méd.	0,00	47,12	75,48	0,12	392,64	82,94	0,00	50,64	83,05
	Máx.	0,00	323,45	83,33	1,20	3601,22	93,56	0,00	232,69	93,55
Reduced Raster Points										
10	Mín.	0,00	0,28	96,80	0,00	0,13	98,40	0,00	0,09	98,40
	Méd.	0,00	78,27	99,38	0,00	24,47	99,53	0,00	28,62	99,53
	Máx.	0,00	504,45	100,00	0,00	185,22	100,00	0,00	225,30	100,00
20	Mín.	0,00	0,38	70,76	0,00	0,07	76,45	0,00	0,09	76,45
	Méd.	0,00	434,27	81,56	0,00	364,56	89,77	0,00	31,38	89,91
	Máx.	0,00	3086,92	94,30	0,00	3340,17	94,30	0,00	140,82	94,30
30	Mín.	0,00	0,30	62,72	0,00	0,03	70,06	0,00	0,03	70,06
	Méd.	0,00	22,08	74,75	0,12	376,23	82,86	0,00	18,33	83,05
	Máx.	0,00	173,86	83,33	1,20	3601,36	93,56	0,00	92,23	93,55

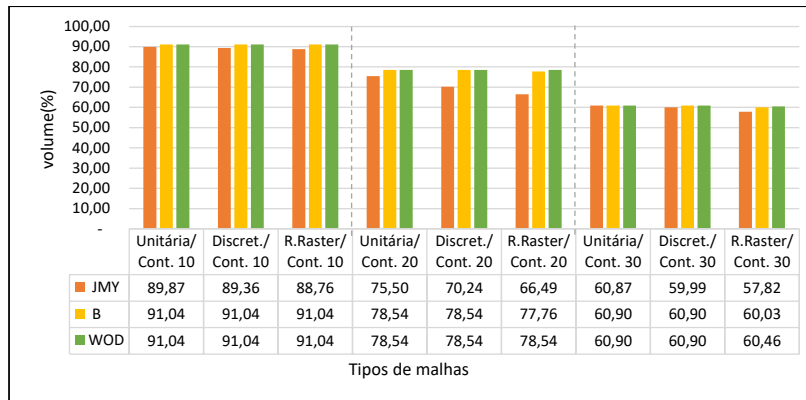
Fonte: o autor.

Tabela 4.3 – Resultados de estabilidade vertical para o grupo A_{20} .

Discretização Unitária										
Dimensão Container (L=W=H)	Tipo	Abordagem JMY			Abordagem B			Abordagem WOD		
		GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)
10	Mín.	0,00	13,19	99,60	0,00	1,76	99,60	0,00	1,76	99,60
	Méd.	0,01	25,18	99,94	0,02	4,99	99,94	0,00	5,63	99,94
	Máx.	0,10	100,27	100,00	0,10	19,50	100,00	0,00	24,93	100,00
20	Mín.	0,00	577,72	84,33	0,00	406,23	86,98	0,00	414,61	90,70
	Méd.	1,56	1795,76	93,87	1,46	2097,30	94,62	0,56	1944,27	95,13
	Máx.	10,24	3600,19	97,75	10,46	3600,78	97,74	5,60	3600,03	97,85
30	Mín.	3,45	3600,37	58,95	0,00	2052,81	86,42	0,00	2172,96	86,42
	Méd.	12,62	3658,68	83,63	4,24	3496,20	91,36	26,96	3479,99	91,64
	Máx.	41,00	3938,33	92,15	8,61	4028,33	97,21	76,40	3787,93	97,21
Discretization Points										
10	Mín.	0,00	7,13	99,60	0,00	2,02	99,60	0,00	1,76	99,60
	Méd.	0,00	35,79	99,96	0,00	3,74	99,95	0,00	3,59	99,96
	Máx.	0,00	267,85	100,00	0,00	11,26	100,00	0,00	11,31	100,00
20	Mín.	0,00	162,92	84,33	0,00	65,00	90,64	0,00	32,42	90,71
	Méd.	0,00	874,95	91,43	0,00	350,34	95,10	0,00	207,66	95,18
	Máx.	0,00	2034,91	96,53	0,00	1388,81	97,75	0,00	493,96	97,85
30	Mín.	0,00	102,14	80,01	0,00	32,97	86,42	0,00	36,38	86,42
	Méd.	0,00	706,21	86,47	0,04	810,99	91,78	0,00	460,64	91,84
	Máx.	0,00	1765,75	91,06	0,40	3600,57	97,21	0,00	1201,78	97,21
Reduced Raster Points										
10	Mín.	0,00	7,23	99,60	0,00	1,99	99,60	0,00	1,79	99,60
	Méd.	0,00	42,31	99,96	0,00	3,73	99,95	0,00	3,58	99,95
	Máx.	0,00	332,54	100,00	0,00	11,28	100,00	0,00	11,21	100,00
20	Mín.	0,00	57,41	84,33	0,00	27,77	90,64	0,00	31,17	90,71
	Méd.	0,00	872,95	90,40	0,00	369,47	95,11	0,00	222,85	95,18
	Máx.	0,00	2709,54	96,53	0,00	1590,20	97,75	0,00	588,04	97,85
30	Mín.	0,00	59,21	80,01	0,00	13,52	86,42	0,00	13,47	86,42
	Méd.	0,00	327,61	85,88	0,12	772,19	91,37	0,00	773,10	91,60
	Máx.	0,00	860,28	91,06	1,20	3601,20	97,21	0,00	3600,33	97,21

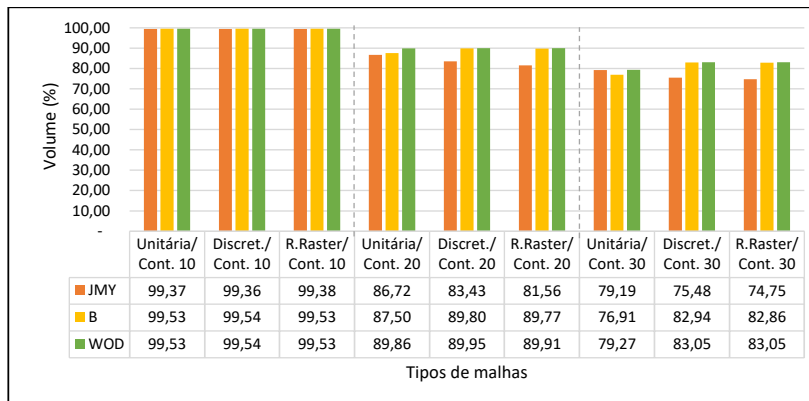
Fonte: o autor.

Figura 4.1 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo A_5 para a estabilidade vertical.



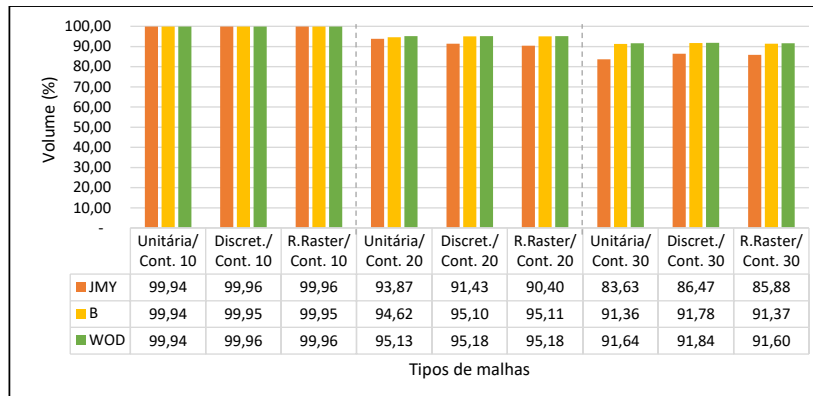
Fonte: o autor.

Figura 4.2 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo A_{10} para a estabilidade vertical.



Fonte: o autor.

Figura 4.3 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo A_{20} para a estabilidade vertical.



Fonte: o autor.

Observando a Tabela 4.4, para o grupo B_5 , na discretização unitária com contêineres de tamanhos 10 e 30, tem-se que a abordagem mais vantajosa em termos de ocupação e tempo é a B, ao passo que a pior é a JMY. Para contêineres de tamanho 20, a melhor abordagem é a WOD e a pior é a JMY, como pode ser visto na Figura 4.4. Utilizando os *discretization points*, para contêineres de tamanho 10, em termos de ocupação e tempo, a abordagem WOD é melhor, sendo a abordagem JMY a que apresenta a menor ocupação do recipiente. Para contêineres de tamanho 20 e 30, a abordagem mais vantajosa em termos de ocupação e tempo é a abordagem WOD, conforme a Figura 4.4. Ao usar os *reduced raster points*, para contêineres de tamanhos 10 e 30, em termos de ocupação e tempo, a abordagem WOD apresenta as melhores soluções. Para contêineres de tamanho 20, a abordagem JMY torna-se mais interessante em termos de ocupação, como mostra a Figura 4.4. No geral, os melhores GAPS são obtidos usando a abordagem B e WOD para uma malha com *discretization points*.

Na Tabela 4.5, ao usar a discretização unitária para o grupo B_{10} , para contêineres de tamanho 10, todas as abordagens apresentaram o mesmo resultado em termos de ocupação. Para contêineres de tamanhos 20 e 30, a abordagem mais vantajosa é a WOD e JMY, respectivamente, conforme a Figura 4.5. Usando os *discretization points*, a abordagem que apresenta melhores soluções em termo de tempo e ocupação para contêineres de tamanho 10 é a B. Para contêineres de tamanhos 20 e 30, a melhor abordagem é a WOD, seguindo o ilustrado na Figura 4.5. Usando os *reduced raster points*, para contêineres de tamanho 10, a melhor solução encontrada em termos de ocupação e tempo foi por meio da abordagem B. Já para contêineres de tamanhos 20 e 30, a melhor abordagem em termos de ocupação foi a WOD, como mostra a Figura 4.5. No geral, os melhores GAPS são obtidos usando a abordagem JMY.

Observando a Tabela 4.6, ao utilizar a discretização unitária, *discretization points* e *reduced raster points* para o grupo B_{20} , para contêineres de tamanhos 10, 20 e 30, a abordagem que retorna a melhor solução em termos de ocupação é a WOD, como também pode ser facilmente verificado nas Figuras 4.6 a 4.6. Nota-se claramente que a abordagem JMY não conseguiu solução para as instâncias com contêiner de tamanho 30. No geral, os melhores resultados, tanto em termos de ocupação como GAP, ocorrem novamente para a abordagem WOD usando os *discretization points*.

Tabela 4.4 – Resultados de estabilidade vertical para o grupo B_5 .

Discretização Unitária										
Dimensão Conteiner (L=W=H)	Tipo	Abordagem JMY			Abordagem B			Abordagem WOD		
		GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)
10	Mín.	0,00	1,93	95,20	0,00	1,76	99,60	0,00	0,66	95,20
	Méd.	0,12	729,30	98,54	0,02	4,99	99,94	0,06	474,42	98,60
	Máx.	0,62	3600,09	100,00	0,10	19,50	100,00	0,60	3600,00	100,00
20	Mín.	0,00	170,71	71,85	0,00	406,23	86,98	0,00	112,64	77,60
	Méd.	6,26	3202,69	90,60	1,46	2097,30	94,62	5,37	2483,26	95,03
	Máx.	16,80	3606,95	99,20	10,46	3600,78	97,74	23,60	3601,53	100,00
30	Mín.	0,00	1408,02	63,57	0,00	2052,81	86,42	7,70	3600,03	62,67
	Méd.	12,84	3384,28	84,54	4,24	3496,20	91,36	20,22	3600,18	85,36
	Máx.	36,40	3609,86	96,58	8,61	4028,33	97,21	42,40	3600,43	97,45
Discretization Points										
10	Mín.	0,00	0,62	95,20	0,00	0,46	95,20	0,00	0,43	95,20
	Méd.	0,12	727,52	98,54	0,06	416,39	98,59	0,06	415,76	98,59
	Máx.	0,60	3600,00	100,00	0,60	3600,00	100,00	0,60	3600,00	100,00
20	Mín.	0,00	53,62	71,20	0,00	10,74	34,54	0,00	10,77	77,60
	Méd.	10,76	3245,39	86,69	8,24	1998,33	88,40	6,04	1943,33	92,80
	Máx.	40,40	3600,15	99,20	65,40	3600,67	100,00	22,80	3600,68	100,00
30	Mín.	8,60	3600,01	44,74	0,00	1210,24	64,83	0,00	1204,00	74,83
	Méd.	30,00	3600,64	68,02	11,47	3359,37	87,85	5,82	3253,40	89,39
	Máx.	75,00	3603,13	90,22	42,40	3600,19	97,38	21,80	3601,14	97,38
Reduced Raster Points										
10	Mín.	0,00	0,62	95,20	0,00	0,47	95,20	0,00	0,44	95,20
	Méd.	0,12	727,61	98,54	0,06	438,62	98,59	0,00	436,52	98,59
	Máx.	0,60	3600,01	100,00	0,60	3600,00	100,00	0,00	3600,02	100,00
20	Mín.	0,00	38,00	75,53	0,00	1,99	2,45	0,00	2,00	2,45
	Méd.	11,62	3243,89	85,35	17,67	2000,27	81,17	16,17	2025,91	81,21
	Máx.	20,40	3600,55	99,20	97,50	3600,49	99,99	97,50	3602,85	99,99
30	Mín.	2,80	3600,01	45,30	0,00	910,27	30,59	0,00	900,43	30,59
	Méd.	32,85	3601,13	67,61	17,14	3331,80	82,86	13,25	3240,00	84,85
	Máx.	70,10	3610,39	90,22	74,30	3607,45	98,61	69,40	3609,05	98,61

Fonte: o autor.

Tabela 4.5 – Resultados de estabilidade vertical para o grupo B_{10} .

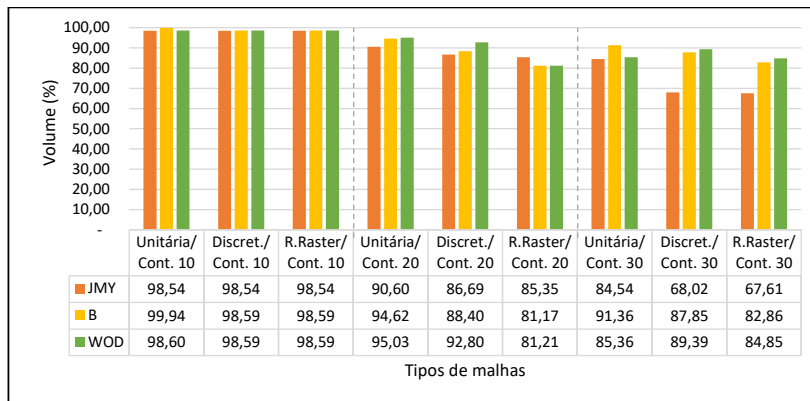
Discretização Unitária										
Dimensão Container (L=W=H)	Tipo	Abordagem JMY			Abordagem B			Abordagem WOD		
		GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)
10	Mín.	0,00	4,26	100,00	0,00	1,04	100,00	0,00	0,78	100,00
	Méd.	0,00	20,38	100,00	0,00	3,71	100,00	0,00	4,02	100,00
	Máx.	0,00	60,94	100,00	0,00	6,47	100,00	0,00	6,41	100,00
20	Mín.	4,20	3600,34	67,20	1,80	3600,01	0,60	1,80	3600,01	73,60
	Méd.	12,86	3602,74	87,11	53,22	3600,09	46,76	11,29	3600,06	90,13
	Máx.	32,80	3604,93	95,73	99,40	3600,39	98,18	26,40	3600,35	98,18
30	Mín.	10,80	3639,64	75,48	11,70	3600,12	1,00	11,70	3600,10	6,26
	Méd.	17,46	3684,63	82,51	80,22	3606,82	19,74	23,58	3603,18	76,38
	Máx.	24,50	3778,61	89,14	99,00	3649,65	88,30	93,70	3615,49	88,30
Discretization Points										
10	Mín.	0,00	4,20	100,00	0,00	0,81	100,00	0,00	0,78	100,00
	Méd.	0,00	19,62	100,00	0,00	3,53	100,00	0,00	3,65	100,00
	Máx.	0,00	60,81	100,00	0,00	6,48	100,00	0,00	6,45	100,00
20	Mín.	0,00	3279,95	56,84	0,00	1827,63	1,05	0,00	1837,52	73,60
	Méd.	18,10	3569,26	84,03	43,94	3363,82	57,53	10,58	3372,90	91,27
	Máx.	48,10	3603,65	99,99	98,90	3600,68	100,00	26,40	3600,86	100,00
30	Mín.	26,50	3603,01	29,86	11,70	3600,04	1,80	11,70	3600,04	6,26
	Méd.	36,69	3619,47	63,26	79,89	3600,06	20,07	23,58	3600,10	76,38
	Máx.	70,10	3683,88	73,50	98,20	3600,11	88,30	93,70	3600,36	88,30
Reduced Raster Points										
10	Mín.	0,00	4,38	100,00	0,00	0,81	100,00	0,00	0,77	100,00
	Méd.	0,00	19,50	100,00	0,00	3,53	100,00	0,00	3,61	100,00
	Máx.	0,00	59,93	100,00	0,00	6,48	100,00	0,00	6,35	100,00
20	Mín.	4,20	3600,05	56,84	0,00	2176,78	1,05	0,00	2169,29	76,80
	Méd.	22,06	3601,63	81,15	44,77	3457,78	56,38	9,51	3457,09	91,63
	Máx.	48,80	3604,88	95,73	98,90	3600,47	100,00	30,20	3600,63	100,00
30	Mín.	26,60	3606,06	29,86	11,70	3600,01	1,80	11,70	3600,04	1,80
	Méd.	37,38	3618,12	62,58	48,15	3600,13	51,81	32,34	3600,43	67,93
	Máx.	70,10	3670,66	73,33	98,20	3600,45	88,30	98,20	3600,99	88,30

Fonte: o autor.

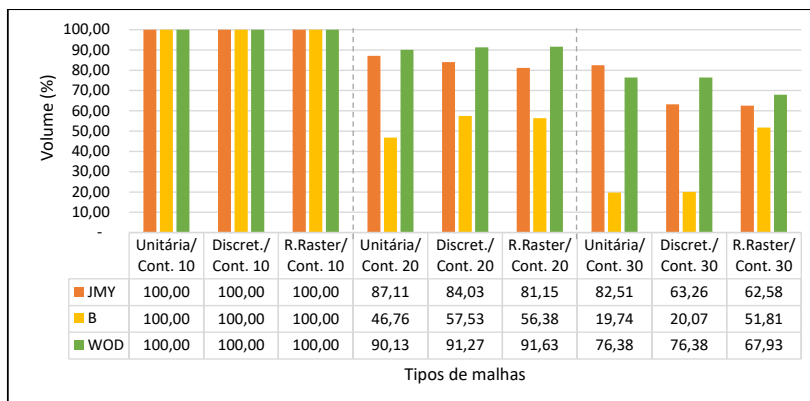
Tabela 4.6 – Resultados de estabilidade vertical para o grupo B_{20} .

Discretização Unitária										
Dimensão Conteiner (L=W=H)	Tipo	Abordagem JMY			Abordagem B			Abordagem WOD		
		GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)
10	Mín.	0,00	13,90	99,90	0,00	0,60	100,00	0,00	0,58	100,00
	Méd.	0,00	32,31	99,99	0,00	3,72	100,00	0,00	3,45	100,00
	Máx.	0,00	54,63	100,00	0,00	6,99	100,00	0,00	6,91	100,00
20	Mín.	0,50	3606,26	90,68	1,10	3600,02	1,25	0,30	3600,02	92,03
	Méd.	3,85	3615,55	96,12	32,16	3600,02	67,79	3,78	3600,04	96,18
	Máx.	9,30	3631,16	99,45	98,70	3600,03	98,83	7,90	3600,16	99,70
30	Mín.	-	-	-	11,70	3600,19	1,30	11,60	3600,18	4,56
	Méd.	-	-	-	79,32	3621,02	20,64	22,69	3616,84	77,25
	Máx.	-	-	-	98,70	3651,17	88,27	95,40	3637,46	88,32
Discretization Points										
10	Mín.	0,00	13,89	100,00	0,00	0,59	100,00	0,00	0,59	100,00
	Méd.	0,00	32,38	100,00	0,00	3,75	100,00	0,00	3,48	100,00
	Máx.	0,00	55,42	100,00	0,00	6,99	100,00	0,00	7,00	100,00
20	Mín.	0,50	3602,64	90,68	1,10	3600,01	1,25	0,30	3600,01	92,03
	Méd.	3,85	3605,35	96,12	32,16	3600,10	67,79	3,78	3600,09	96,18
	Máx.	9,30	3610,61	99,45	98,70	3600,57	98,83	7,90	3600,49	99,70
30	Mín.	-	-	-	11,70	3600,10	1,30	11,60	3600,11	4,56
	Méd.	-	-	-	79,32	3600,28	20,64	22,69	3600,14	77,25
	Máx.	-	-	-	98,70	3600,82	88,27	95,40	3600,16	88,32
Reduced Raster Points										
10	Mín.	0,00	13,95	99,90	0,00	0,59	100,00	0,00	0,60	100,00
	Méd.	0,00	32,15	99,99	0,00	3,71	100,00	0,00	3,46	100,00
	Máx.	0,00	54,34	100,00	0,00	6,99	100,00	0,00	6,92	100,00
20	Mín.	0,50	3600,77	90,68	1,10	3600,02	1,25	0,30	3600,02	92,03
	Méd.	3,86	3608,82	96,11	32,16	3600,10	67,79	3,78	3600,14	96,18
	Máx.	9,30	3617,51	99,45	98,70	3600,50	98,83	7,90	3600,79	99,70
30	Mín.	-	-	-	11,70	3600,10	1,30	11,60	3600,11	2,07
	Méd.	-	-	-	87,82	3600,17	12,16	39,33	3600,26	60,61
	Máx.	-	-	-	98,70	3600,49	88,27	97,90	3600,84	88,32

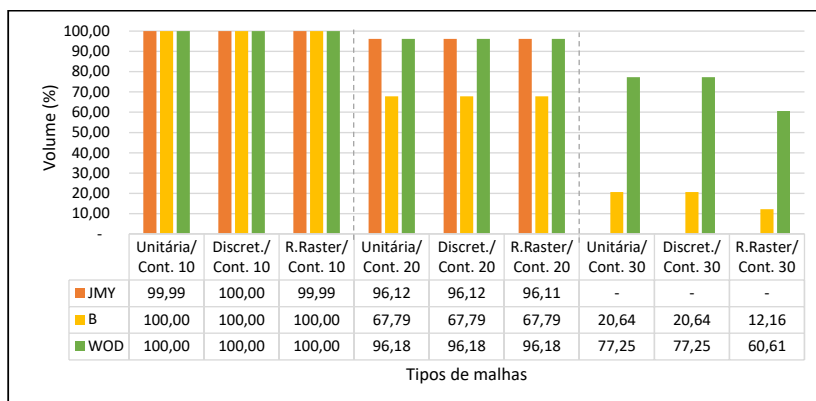
Fonte: o autor.

Figura 4.4 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo B_5 para a estabilidade vertical.

Fonte: o autor.

Figura 4.5 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo B_{10} para a estabilidade vertical.

Fonte: o autor.

Figura 4.6 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo B_{20} para a estabilidade vertical.

Fonte: o autor.

Em resumo para o grupo B_m , tem-se mais uma vez que a abordagem WOD com o uso dos *discretization points* se sobressaiu frente as demais tanto em termos de ocupação quanto de GAP. Pode-se observar que o uso dos *reduced raster points* fez com houvesse perda de solução com boas taxas de ocupação do volume do contêiner, mostrando que a estabilidade vertical pode sofrer com o refinamento da malha, embora as soluções em termos de ocupação com o uso de discretização unitária tiveram pouca diferença comparada as apresentas com o uso dos *discretization points*.

4.2 Resultados para a Estabilidade Horizontal

Nos testes de estabilidade horizontal considera-se que as forças horizontais são aplicadas com relação ao eixo x. De forma geral, a estabilidade detectada com o uso da abordagem B e com as condições de deslizamento e tombamento, aproxima-se melhor da realidade do que usando a abordagem JMY por fator de suporte lateral, conforme se observa nos resultados para o grupo A_m nas Tabelas 4.7-4.9 e Figuras 4.7-4.9 e, para o grupo B_m , nas Tabelas 4.10-4.12 e Figuras 4.10-4.12. Para alguns grupos, em particular o A_{20} e o B_{20} , a abordagem JMY não conseguiu retornar nenhuma solução viável para diversas instâncias dentro do tempo limite imposto.

Como mostra a Tabela 4.7, para o grupo A_5 , com discretização unitária, para contêineres de tamanhos 10 e 20, a abordagem B apresenta a melhor solução quando se trata de taxa de ocupação, também observável na Figura 4.7. Para contêineres de tamanho 30, em termos de ocupação, tem-se vantagem para a abordagem JMY. Usando os *discretization points*, em termos de ocupação para contêineres de tamanho 10, tem-se melhores resultados com o uso da abordagem B. Para contêineres de tamanhos 20 e 30, as melhores soluções em termos de ocupação foram usando a abordagem JMY, como pode ser observado na Figura 4.7. O uso dos *reduced raster points*, para contêineres de tamanhos 10 e 20, mostra que a abordagem B consegue retornar melhores ocupações do recipiente, como também mostra a Figura 4.7. Os melhores GAPs no grupo B_5 são apresentados pela abordagem JMY, em todas as instâncias foram resolvidas na otimalidade dentro do tempo limite.

Observando a Tabela 4.8, para o grupo A_{10} , com discretização unitária, para contêineres de tamanho 10, a abordagem B trouxe as melhores taxas de ocupação do contêiner. Para contêineres de tamanhos 20 e 30, o melhor em termos de ocupação já ocorre para a abordagem JMY, conforme mostra a Figura 4.8. Usando os *discretization points*, para contêineres de tamanhos 10 e 30, a abordagem que traz a melhor ocupação do recipiente é a B, conforme ilustra a Figura 4.8. Para contêineres de tamanho 30 a melhor ocupação do recipiente é obtida pela abordagem JMY. O mesmo ocorre ao usar *reduced raster points*, como pode ser observado na Figura 4.8. Mais uma vez, os melhores GAPs são apresentados pela abordagem JMY.

Como pode ser observado na Tabela 4.9, para o grupo A_{20} , com a discretização unitária, *discretization points* e *reduced raster points*, tem-se que as melhores soluções em termos de ocupação foram encontradas por meio da abordagem B (veja também nas Figuras 4.9-4.9). Neste grupo em particular, a abordagem JMY não conseguiu resultados para a discretização unitária com contêineres de tamanhos 10, 20 e 30. Com relação ao GAP, a abordagem B passa também a ser mais vantajosa, em especial com o uso dos *discretization points* e *reduced raster points*.

Tabela 4.7 – Resultados de estabilidade horizontal para o grupo A_5 .

Discretização Unitária							
Dimensão Contenier (L=W=H)	Tipo	Abordagem JMY			Abordagem B		
		GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)
10	Mín.	0,00	0,10	76,00	0,00	0,20	77,20
	Méd.	0,00	6,15	88,75	1,11	391,22	90,04
	Máx.	0,00	28,84	100,00	11,10	3600,08	100,00
20	Mín.	0,00	1,58	53,25	0,00	47,61	31,40
	Méd.	0,00	17,01	72,20	14,30	2109,86	72,71
	Máx.	0,00	76,84	87,00	68,60	3601,37	91,10
30	Mín.	0,00	2,87	42,49	0,00	2568,87	9,48
	Méd.	0,00	7,64	58,58	34,60	3288,20	56,51
	Máx.	0,00	16,12	76,18	90,50	3607,64	76,18
Discretization Points							
10	Mín.	0,00	0,10	76,00	0,00	0,07	77,20
	Méd.	0,00	2,74	88,75	0,00	15,14	90,74
	Máx.	0,00	10,58	100,00	0,00	92,60	100,00
20	Mín.	0,00	0,02	53,25	0,00	0,10	6,12
	Méd.	0,00	2,26	72,20	20,60	2542,77	68,92
	Máx.	0,00	15,40	87,00	93,87	3601,95	91,10
30	Mín.	0,00	0,00	42,49	0,00	0,13	29,67
	Méd.	0,00	0,03	58,58	12,91	1483,04	52,99
	Máx.	0,00	0,10	76,18	41,90	3601,53	74,51
Reduced Raster Points							
10	Mín.	0,00	0,05	76,00	0,00	0,06	77,20
	Méd.	0,00	2,35	88,75	0,00	17,99	90,74
	Máx.	0,00	12,82	100,00	0,00	124,72	100,00
20	Mín.	0,00	0,01	53,25	0,00	0,08	51,05
	Méd.	0,00	1,07	68,62	12,97	2352,75	70,78
	Máx.	0,00	1,07	68,62	43,90	3632,73	88,25
30	Mín.	0,00	0,00	42,49	0,00	0,09	34,20
	Méd.	0,00	0,02	55,51	8,45	1715,88	54,04
	Máx.	0,00	0,10	66,70	35,00	3604,56	66,70

Fonte: o autor.

Tabela 4.8 – Resultados de estabilidade horizontal para o grupo A_{10} .

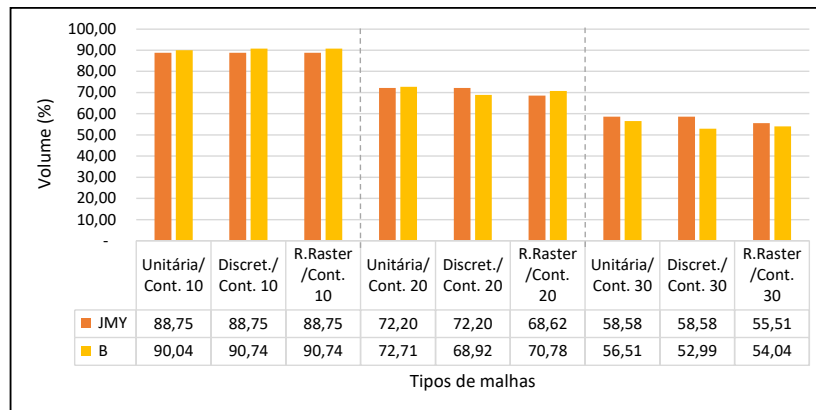
Discretização Unitária							
Dimensão Contenier (L=W=H)	Tipo	Abordagem JMY			Abordagem B		
		GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)
10	Mín.	0,00	2,35	96,80	0,00	0,33	98,40
	Méd.	0,00	214,63	99,22	0,00	27,52	99,53
	Máx.	0,00	1268,58	100,00	0,00	193,64	100,00
20	Mín.	0,00	13,26	70,76	0,00	325,74	4,90
	Méd.	2,14	789,42	85,14	19,51	1966,89	77,19
	Máx.	15,50	3600,07	94,30	97,00	3601,22	94,29
30	Mín.	0,00	68,20	63,83	0,00	3409,98	5,40
	Méd.	0,00	683,61	76,02	41,77	3658,79	57,54
	Máx.	0,00	3600,33	93,56	94,6	3954,21	93,56
Discretization Points							
10	Mín.	0,00	0,62	96,80	0,00	0,12	98,40
	Méd.	0,00	225,53	99,21	0,00	29,56	99,53
	Máx.	0,00	1232,70	100,00	0,00	235,2	100,00
20	Mín.	0,00	1,93	70,76	0,00	5,99	49,88
	Méd.	0,00	190,96	85,26	3,60	1532,41	81,71
	Máx.	0,00	1088,87	94,30	21,60	3603,41	94,30
30	Mín.	0,00	0,45	63,83	0,00	0,33	58,32
	Méd.	0,00	53,13	76,02	3,27	1774,98	79,04
	Máx.	0,00	382,04	93,56	17,50	3600,92	93,56
Reduced Raster Points							
10	Mín.	0,00	0,84	96,80	0,00	0,13	98,40
	Méd.	0,00	220,73	99,20	0,00	31,21	99,53
	Máx.	0,00	1208,86	100,00	0,00	252,34	100,00
20	Mín.	0,00	0,95	70,76	0,00	1,73	18,50
	Méd.	0,00	125,05	82,28	18,85	1723,18	75,96
	Máx.	0,00	582,21	94,30	81,50	3602,53	94,30
30	Mín.	0,00	0,08	60,89	0,00	0,03	45,47
	Méd.	0,00	17,84	73,83	6,28	1291,41	77,50
	Máx.	0,00	136,95	93,56	40,80	3601,68	93,56

Fonte: o autor.

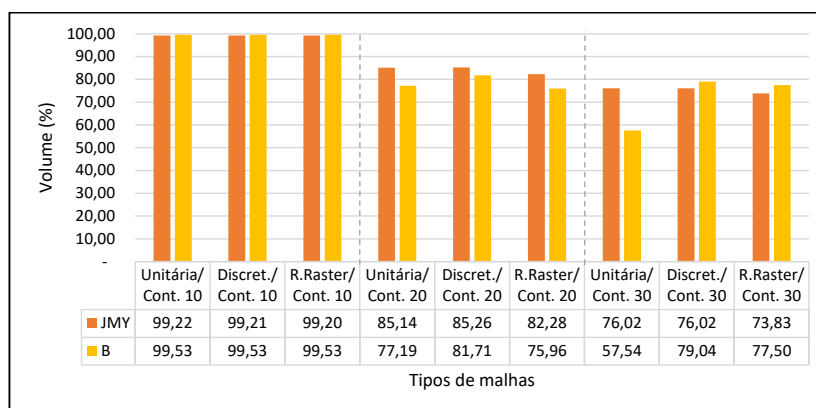
Tabela 4.9 – Resultados de estabilidade horizontal para o grupo A_{20} .

Discretização Unitária							
Dimensão Contenier (L=W=H)	Tipo	Abordagem JMY			Abordagem B		
		GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)
10	Mín.	-	-	-	0,00	1,84	99,6
	Méd.	-	-	-	0,00	5,34	99,94
	Máx.	-	-	-	0,00	19,36	100,00
20	Mín.	-	-	-	0,00	1588,51	19,25
	Méd.	-	-	-	19,97	3123,07	79,14
	Máx.	-	-	-	80,70	3602,28	97,30
30	Mín.	-	-	-	0,00	3257,34	7,70
	Méd.	-	-	-	23,09	3643,17	75,58
	Máx.	-	-	-	92,30	4215,76	97,21
Discretization Points							
10	Mín.	0,00	16,86	98,40	0,00	1,70	99,60
	Méd.	0,12	379,61	99,81	0,00	3,82	99,95
	Máx.	1,20	3600,01	100,00	0,00	11,30	100,00
20	Mín.	0,00	104,33	82,93	0,00	42,62	90,64
	Méd.	0,47	1172,69	91,76	0,00	794,96	95,02
	Máx.	4,70	3600,03	97,75	0,00	3601,04	97,75
30	Mín.	0,00	51,63	77,96	0,00	37,24	86,24
	Méd.	0,28	806,01	88,51	0,27	1107,72	91,59
	Máx.	2,80	3600,03	92,89	2,70	2500,44	97,21
Reduced Raster Points							
10	Mín.	0,00	16,97	98,40	0,00	1,70	99,60
	Méd.	0,12	379,58	99,81	0,00	3,82	99,95
	Máx.	1,20	3600,01	100,00	0,00	11,31	100,00
20	Mín.	0,00	183,03	81,93	0,00	79,78	90,64
	Méd.	0,46	1021,18	91,53	0,00	730,02	95,02
	Máx.	4,60	3600,12	97,75	0,00	3600,04	97,75
30	Mín.	0,00	27,09	77,96	0,00	21,18	86,42
	Méd.	0,00	489,50	87,15	0,23	2366,33	91,27
	Máx.	0,00	2663,68	92,89	1,20	14194,00	97,21

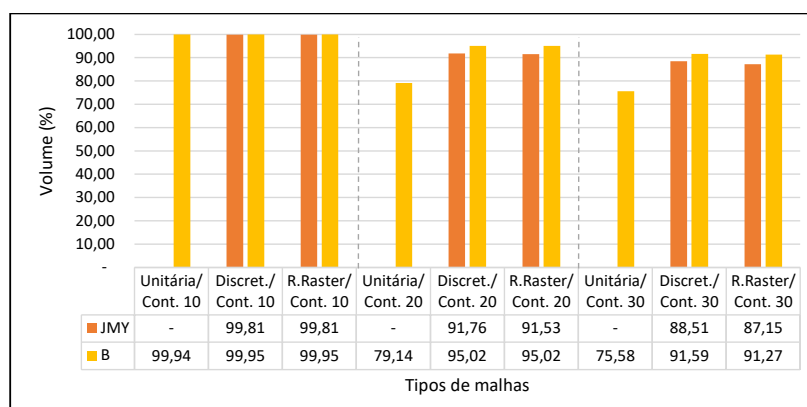
Fonte: o autor.

Figura 4.7 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo A_5 para a estabilidade horizontal.

Fonte: o autor.

Figura 4.8 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo A_{10} para a estabilidade horizontal.

Fonte: o autor.

Figura 4.9 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo A_{20} para a estabilidade horizontal.

Fonte: o autor.

Ao comparar as duas abordagens no grupo A_m , tem-se que a melhor ocupação para o grupo A_5 , para contêineres de tamanhos 10 e 20, foi usando a abordagem B com os *reduced raster points*. Todavia, para contêineres de tamanho 30, a melhor ocupação foi com a abordagem JMY com os *reduced raster points*. Para o grupo A_{10} , para contêineres de tamanhos 10 e 30, a melhor ocupação ocorreu usando a abordagem B com os *reduced raster points*. Para contêineres de tamanho 20, a melhor ocupação ocorreu com o uso da abordagem B com os *discretization points*. Para o grupo A_{20} , para contêineres de tamanho 10, a abordagem B com discretização unitária trouxe as melhores taxas de ocupação, ao passo que para contêineres de tamanhos 20 e 30, as melhores ocupações ocorrem pela abordagem B, porém usando os *reduced raster points*. Com relação ao GAP, a abordagem JMY foi melhor para as instâncias com poucos itens e contêineres menores, embora a taxa de ocupação do volume tenha ficado menor em vários casos ao comparar com a reportada pela abordagem B.

A Tabela 4.10 traz os resultados para o grupo B_5 , em que o uso da discretização unitária, para contêineres de tamanho 10, mostra que a abordagem B traz uma melhor taxa de ocupação para as instâncias. Por outro lado, para contêineres de tamanhos 20 e 30, a melhor ocupação ocorre usando a abordagem JMY, como se observa também na Figura 4.10. Usando os *discretization points*, a melhor taxa de ocupação, para os contêineres de tamanhos 10, 20 e 30, ocorre usando a abordagem B, conforme se apresenta na Figura 4.10. Ao usar os *reduced raster points*, a abordagem B foi superior em termos de ocupação para os contêineres de tamanhos 10 e 20. Embora a abordagem B tenha se sobressaído frente a JMY em termos de ocupação, os melhores GAPs no geral ainda são retornados ao usar a abordagem JMY.

Observando os resultados para o grupo B_{10} na Tabela 4.11, nota-se que a abordagem B consegue melhores taxas de ocupação frente a JMY, independente do tipo de malha assumida, como também se observa nas Figuras 4.11-4.11. Em termos de GAP, a abordagem JMY, por outro lado, mostra-se superior.

Já para o grupo B_{20} , na Tabela 4.12, em que a abordagem B mostra sua superioridade em termos de volume ocupado e GAP frente a abordagem JMY, com os resultados também nas Figuras 4.11-4.11. Assim, nota-se que a abordagem B consegue lidar adequadamente com a estabilidade horizontal, retornando melhores taxas de utilização do volume do contêiner e menores GAPs no geral.

Tabela 4.10 – Resultados de estabilidade horizontal para o grupo B_5 .

Discretização Unitária							
Dimensão Contenier (L=W=H)	Tipo	Abordagem JMY			Abordagem B		
		GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)
10	Mín.	0,00	4,69	95,20	0,00	0,55	95,20
	Méd.	0,14	751,97	98,50	0,00	468,01	98,60
	Máx.	0,80	3600,34	100,00	0,00	3600,01	100,00
20	Mín.	0,00	204,57	58,50	0,00	108,52	77,60
	Méd.	14,56	3260,49	83,36	3,70	2553,87	95,03
	Máx.	32,70	3600,13	99,20	2,20	3600,62	100,00
30	Mín.	2,90	3600,18	24,69	2,00	3600,01	72,90
	Méd.	18,51	3601,29	78,97	10,4	3600,54	88,95
	Máx.	75,30	3603,98	95,64	27,00	4215,76	97,21
Discretization Points							
10	Mín.	0,00	1,35	95,20	0,00	0,63	95,20
	Méd.	0,14	853,12	98,51	0,00	447,45	98,59
	Máx.	0,80	3600,06	100,00	0,00	3601,67	100,00
20	Mín.	0,00	32,74	69,65	0,00	11,53	77,60
	Méd.	11,36	3154,16	85,87	0,67	2358,07	94,47
	Máx.	30,50	3600,12	99,20	6,70	3609,72	100,00
30	Mín.	3,10	3600,01	24,69	1,00	1031,63	84,18
	Méd.	16,50	3601,32	79,36	7,27	3182,20	92,72
	Máx.	75,30	3610,04	95,38	15,81	3600,5	99,00
Reduced Raster Points							
10	Mín.	0,00	1,36	95,20	0,00	0,38	95,20
	Méd.	0,14	754,74	98,51	0,00	435,36	98,59
	Máx.	0,80	3600,01	100,00	0,00	3600,00	100,00
20	Mín.	0,00	13,60	69,05	0,00	2,87	48,60
	Méd.	11,49	3081,18	85,23	13,03	2301,38	90,53
	Máx.	30,90	3600,14	99,20	92,00	3613,29	100,00
30	Mín.	0,00	971,14	49,01	0,00	946,94	11,61
	Méd.	18,63	3217,22	79,19	26,22	3335,01	71,42
	Máx.	82,70	3606,36	95,64	88,30	3601,62	99,00

Fonte: o autor.

Tabela 4.11 – Resultados de estabilidade horizontal para o grupo B_{10} .

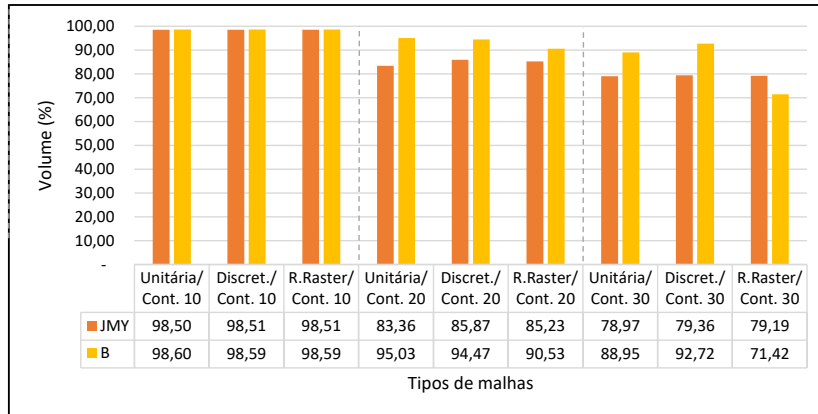
Discretização Unitária							
Dimensão Contenier (L=W=H)	Tipo	Abordagem JMY			Abordagem B		
		GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)
10	Mín.	0,00	10,53	99,90	0,00	1,23	100,00
	Méd.	0,00	59,10	99,98	0,00	4,20	100,00
	Máx.	0,00	273,47	100,00	0,00	7,07	100,00
20	Mín.	4,30	3600,12	60,00	0,00	3313,05	73,60
	Méd.	19,91	3602,11	81,73	9,50	3571,42	90,07
	Máx.	40,00	3605,10	95,63	26,00	3600,64	100,00
30	Mín.	19,60	3660,61	68,47	9,30	3600,01	79,81
	Méd.	23,95	3724,07	76,00	15,17	3603,43	84,83
	Máx.	31,50	3865,85	80,36	20,19	3612,10	90,70
Discretization Points							
10	Mín.	0,00	10,52	100,00	0,00	1,22	100,00
	Méd.	0,00	60,00	100,00	0,00	4,23	100,00
	Máx.	0,00	276,49	100,00	0,00	7,06	100,00
20	Mín.	10,40	3600,13	60,00	0,00	1838,46	1,50
	Méd.	24,48	3602,17	81,08	18,28	3424,05	81,71
	Máx.	40,30	3605,75	95,63	98,50	3601,08	100,00
30	Mín.	19,60	3622,96	68,47	9,30	3600,00	79,81
	Méd.	23,95	3646,85	76,00	15,14	3600,01	84,83
	Máx.	31,50	3671,19	80,36	20,10	3600,03	90,70
Reduced Raster Points							
10	Mín.	0,00	10,47	99,90	0,00	1,22	100,00
	Méd.	0,00	60,13	99,98	0,00	4,19	100,00
	Máx.	0,00	278,84	100,00	0,00	7,06	100,00
20	Mín.	4,30	3600,92	60,00	0,00	2291,8	3,00
	Méd.	23,79	3603,25	81,01	19,00	3469,40	81,95
	Máx.	23,79	3603,25	81,01	97,00	3600,63	100,00
30	Mín.	19,60	3606,69	68,47	9,00	3600,00	80,74
	Méd.	25,58	3632,47	74,37	15,02	3600,00	84,92
	Máx.	31,50	3668,39	80,36	19,20	3600,01	90,70

Fonte: o autor.

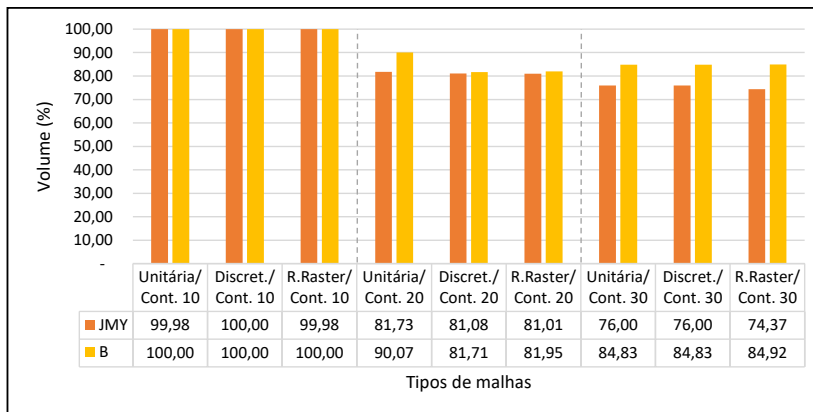
Tabela 4.12 – Resultados de estabilidade horizontal para o grupo B_{20} .

Discretização Unitária							
Dimensão Contenier (L=W=H)	Tipo	Abordagem JMY			Abordagem B		
		GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	GAP (%)	Tempo (s)	Vol. (%)
10	Mín.	0,00	32,06	100,00	0,00	0,72	100,00
	Méd.	0,00	87,24	100,00	0,00	4,79	100,00
	Máx.	0,00	156,05	100,00	0,00	8,07	100,00
20	Mín.	0,50	3628,63	82,99	0,30	3600,01	92,03
	Méd.	6,89	3630,96	93,08	3,78	3600,06	96,18
	Máx.	17,00	3635,48	99,45	7,90	3600,37	99,70
30	Mín.	0,00	0,00	0,00	11,60	3600,02	81,46
	Méd.	20,71	16689,04	59,29	14,63	3608,24	85,31
	Máx.	33,50	51176,78	85,40	18,50	3667,17	88,32
Discretization Points							
10	Mín.	0,00	32,13	100,00	0,00	0,72	100,00
	Méd.	0,00	87,18	100,00	0,00	4,79	100,00
	Máx.	0,00	156,26	100,00	0,00	8,06	100,00
20	Mín.	0,50	3612,72	82,99	0,30	3600,00	92,03
	Méd.	6,89	3629,82	93,08	3,78	3600,12	96,18
	Máx.	17,00	3672,34	99,45	7,90	3600,44	99,70
30	Mín.	-	-	-	11,68	3600,01	81,46
	Méd.	-	-	-	14,72	3600,02	85,27
	Máx.	-	-	-	18,53	3600,05	88,32
Reduced Raster Points							
10	Mín.	0,00	32,15	100,00	0,00	0,72	100,00
	Méd.	0,00	87,35	100,00	0,00	4,81	100,00
	Máx.	0,00	157,20	100,00	0,00	8,08	100,00
20	Mín.	0,50	3612,30	82,99	0,30	3600,00	92,03
	Méd.	6,89	3631,28	93,08	3,78	3600,07	96,18
	Máx.	17,00	3678,31	99,45	7,90	3600,72	99,70
30	Mín.	-	-	-	11,60	3600,01	81,46
	Méd.	-	-	-	14,62	3600,02	85,32
	Máx.	-	-	-	18,50,00	3600,06	88,32

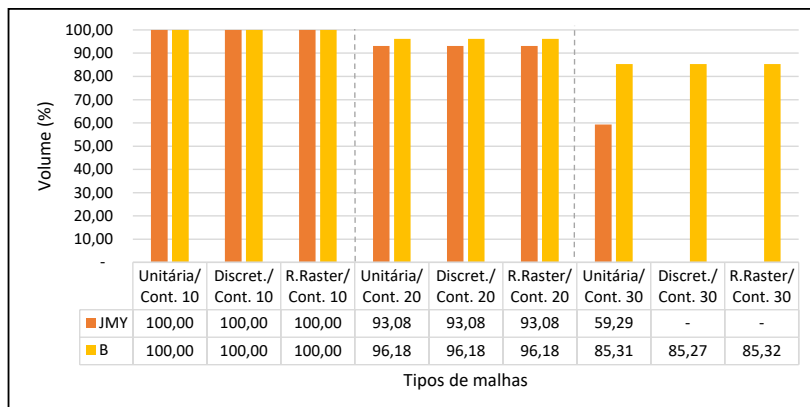
Fonte: o autor.

Figura 4.10 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo B_5 para a estabilidade horizontal.

Fonte: o autor.

Figura 4.11 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo B_{10} para a estabilidade horizontal.

Fonte: o autor.

Figura 4.12 – Representação gráfica da fração de volume ocupado no grupo B_{20} para a estabilidade horizontal.

Fonte: o autor.

Capítulo 5

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O problema de carregamento de um único contêiner foi considerado neste trabalho com a inclusão da restrição de estabilidade vertical e horizontal de carga. A partir de um modelo de programação linear inteira, considerou-se a restrição de estabilidade de carga modelada com o uso de um fator de suporte, estratégia já bem difundida na literatura, bem como aplicando as condições de equilíbrio de corpos rígidos, estratégia ainda pouco tratada na literatura. O uso do fator de suporte permite inserir todas as restrições dentro do modelo, enquanto que as abordagens baseadas nas condições de equilíbrio de corpos rígidos exigem que o empacotamento já esteja pronto, assim verificando a estabilidade e proibindo empacotamento instáveis via planos de corte para uma resolução via algoritmo *branch-and-cut*.

Ao melhor do nosso conhecimento, existem apenas quatro trabalhos que consideram a restrição de estabilidade vertical da carga de forma exata, ou seja, buscando atender as condições de equilíbrio de corpos rígidos. Neste sentido, este trabalho traz uma contribuição significativa para o estado-da-arte, pois além da estabilidade vertical, também complementa as abordagens para lidar com a estabilidade horizontal, que entra com a possibilidade do atrito, deslizamento e tombamento de itens.

No que tange a estabilidade vertical, desenvolveram-se três abordagens, denominadas de B, BNG e WOD, cada qual necessitando escrever um conjunto de equações de força e torque para, assim, obter as forças normais que surgem nas superfícies de contato. Em comparação com o fator de suporte, as abordagens desenvolvidas permitem que as caixas não tenham suporte de 100% de suas bases para garantir a estabilidade ao mesmo tempo que, em comparação com as abordagens da literatura, elas checam a estabilidade do empacotamento de uma só vez ao invés de verificar item a item. Além disso, os resultados computacionais em instâncias da literatura mostraram que o uso do fator de suporte limita as configurações possíveis resultando, assim, em resultados piores em termos de taxa de ocu-

pação do volume do contêiner e inclusive em GAP para diferentes tipos de discretização de malha adotadas para o contêiner.

Para a estabilidade horizontal, acredita-se que este seja o primeiro trabalho a propor uma abordagem efetiva no caso de problemas de empacotamento tridimensionais. Embora esta abordagem exija o valor correto das forças normais, sendo necessário recorrer a resolução de um modelo de programação quadrática, ela é bem superior ao uso do fator de suporte lateral. Os resultados computacionais mostraram que em geral o uso do fator de suporte traz empacotamentos com taxa de ocupação bem inferior se comparado a abordagem proposta. Além disso, o fato das caixas estarem juntas lado a lado, como é exigido pelo fator de suporte, não garante que as caixas deixem de deslizar ou até mesmo tombem devido a aplicação de uma força lateral.

Trabalhos futuros que podem ser desenvolvidos considera o emprego de outros modelos de programação linear inteira e até mesmo heurísticas para lidar com o empacotamento, uma vez que este foi o maior gargalo com relação ao tempo reportado, pois cada abordagem de estabilidade foi executada muito rapidamente. Assim, como a checagem da estabilidade é bastante rápida, busca-se por novas frentes de pesquisa com relação a um bom empacotador. Outra linha de trabalho concerne ao emprego do método de Elementos Finitos para tratar com a estabilidade vertical e horizontal e, assim, fazer uma comparação com as abordagens desenvolvidas neste trabalho. Até o momento, não se conhece qualquer trabalho que emprega uma rotina de Elementos Finitos para calcular as forças e checar a estabilidade do empacotamento.

Linhas de pesquisa de interesse também incluem: adaptar as abordagens BNG e WOD para lidar com a estabilidade horizontal, sem que para isso seja preciso recorrer a resolução de um modelo de programação quadrática; considerar novas restrições de interesse no problema, como questões de fragilidade e ordem de entrega; desenvolver heurísticas que gerem empacotamentos com boa chance de estabilidade; e, estudar meios de incluir as equações de equilíbrio dos métodos B, BNG ou WOD dentro do modelo de programação linear inteira, sem para tanto usar uma rotina de planos de corte.

REFERÊNCIAS

- ABDOU, G.; ARGHAVANI, J. Interactive ilp procedures for stacking optimization for the 3d palletization problem. *International Journal of Production Research*, v. 35, p. 1287–1304, 1997. Citado na página [34](#).
- ABDOU, G.; ELMASRY, M. 3d random stacking of weakly heterogeneous palletization problems. *International Journal of Production Research*, v. 37, p. 1505–1524, 1999. Citado na página [34](#).
- ABDOU, G.; YANG, M. Multi-layer palletisation of multi-size boxes. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, v. 10, p. 292–297, 1995. Citado na página [34](#).
- _____. A systematic approach for the three-dimensional palletization problem. *International Journal of Production Research*, v. 32, p. 2381–2394, 1999. Citado na página [34](#).
- ARAÚJO, O. C. B.; ARMENTANO, V. A. A multistart random constructive heuristic for the container loading problem. *Pesquisa Operacional*, v. 27, n. 2, p. 311–331, 2007. Citado 2 vezes nas páginas [34](#) e [36](#).
- ARAYA, I.; RIFE, M. C. A beam search approach to the container loading problem. *Computers and Operations Research*, v. 43, p. 100–107, 2014. Citado na página [36](#).
- ARENALES, M. *et al.* *Pesquisa Operacional*. Rio de Janeiro: Elsevier - Campus, 2007. Citado 2 vezes nas páginas [21](#) e [38](#).
- BALAKIRSK, S. *et al.* Using simulation to assess the effectiveness of pallet stacking methods. In: *2nd International Conference on Simulation, Modeling, and Programming for Autonomous Robots*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 336–349. Citado na página [34](#).
- BARAFFE, D. Analytical methods for dynamic simulation of non-penetrating rigid bodies. *Computer Graphics*, v. 23, n. 3, p. 223–232, 1989. Citado 9 vezes nas páginas [26](#), [46](#), [48](#), [49](#), [50](#), [51](#), [53](#), [89](#) e [101](#).
- BISCHOFF, E. E. Stability aspects of pallet loading. *Operations-Research-Spektrum*, v. 13, n. 3, p. 189–197, 1991. Citado 2 vezes nas páginas [34](#) e [36](#).
- _____. Three-dimensional packing of items with limited load bearing strength. *European Journal of Operational Research*, v. 160, p. 19–33, 2005. Citado na página [34](#).
- BISCHOFF, E. E.; RATCLIFFE, M. S. W. Issues in the development of approaches to container loading. *Omega*, v. 23, n. 4, p. 377–390, 1995. Citado 4 vezes nas páginas [21](#), [29](#), [32](#) e [36](#).

BLUM, M.; GRIFFITH, A.; NEUMANN, B. *A stability test for configurations of blocks*. TR-AI Memo AIM-188, Massachusetts Institute of Technology, 1970. Citado 3 vezes nas páginas 26, 48 e 49.

BORTFELDT, A. A hybrid algorithm for the capacitated vehicle routing problem with three-dimensional loading constraint. *Computers and Operations Research*, v. 30, n. 1, p. 78–98, 2011. Citado na página 34.

BORTFELDT, A.; GEHRING, H. A hybrid genetic algorithm for the container loading problem. *European Journal of Operational Research*, v. 131, n. 1, p. 143–161, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 34.

BORTFELDT, A.; GEHRING, H.; MACK, D. A parallel tabu search algorithm for solving the container loading problem. *Parallel Computing*, v. 29, n. 5, p. 641–662, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 36.

BORTFELDT, A.; HOMBERGER, J. Packing first, routing second a heuristic for the vehicle routing and loading problem. *Computers and Operations Research*, v. 40, n. 3, p. 873–885, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 36.

BORTFELDT, A.; WÄSCHER, G. Constraints in container loading - a state-of-the-art review. *European Journal of Operational Research*, v. 229, p. 1–20, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 33.

BRACHT, E. C. *et al.* Dynamic cargo stability in loading and transportation of containers. In: *2016 IEEE International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*. Fort Worth, TX, USA: [s.n.], 2016. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 36.

CARPENTER, H.; DOWSLAND, W. B. Practical considerations of the pallet-loading problem. *Journal of the Operational Research Society*, v. 36, p. 489–497, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 36.

CESCHIA, S.; SCHAERF, A. Local search for a multi-drop multi-container loading problem. *Journal of Heuristics*, v. 19, n. 2, p. 275–294, 2013. Citado na página 34.

CHAN, F. T. S. *et al.* Development of a decision support system for air-cargo pallets loading problem. *Expert Systems with Applications*, v. 31, p. 472–485, 2006. Citado na página 34.

CHRISTENSEN, S. G.; ROUSOE, D. M. Container loading with multi-drop constraints. *International Transactions in Operational Research*, v. 16, n. 6, p. 727–723, 2009. Citado na página 36.

CORMEN, T. H. *et al.* *Introduction to Algorithms*. [S.l.]: MIT Press, 2013. Citado na página 24.

DAVIES, A. P.; BISCHOFF, E. E. Weight distribution considerations in container loading. *European Journal of Operational Research*, v. 114, n. 3, p. 509–527, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 32, 34 e 36.

EGEBLAD, J. *et al.* Heuristics for container loading of furniture. *European Journal of Operational Research*, v. 200, n. 3, p. 881–892, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 36.

ELEY, M. Solving container loading problems by block arrangement. *European Journal of Operational Research*, v. 141, n. 2, p. 393–409, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 32, 34 e 36.

- ERLEBEN, K. *Stable, Robust, and Versatile Multibody Dynamics Animation*. Tese (Doutorado) — Ph.D. dissertation in Computer Science - The Department of Computer Science, University of Copenhagen, Denmark, 2004. Citado na página 43.
- FANSLAU, T.; BORTFELDT, A. Solving container loading problems by block arrangement. *INFORMS Journal on Computing*, v. 22, n. 2, p. 222–235, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 36.
- FONTELLES, M. J. *et al.* Metodologia da pesquisa científica: diretrizes para elaboração de um protocolo de pesquisa. *Revista Paraense de Medicina*, v. 23, p. 69–76, 2009. Citado na página 26.
- FUELLERER, G. *et al.* Metaheuristics for vehicle routing problems with three-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, v. 201, n. 3, p. 751–759, 2010. Citado na página 34.
- GEHRING, H.; BORTFELDT, A. A genetic algorithm for solving the container loading problem. *International Transactions in Operational Research*, v. 4, n. 5/6, p. 401–418, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 36.
- _____. A parallel genetic algorithm for solving the container loading problem. *International Transactions in Operational Research*, v. 9, n. 4, p. 497–511, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 32, 34 e 36.
- GENDREAU, M.; IORI, M.; MARTELLO, S. A tabu search algorithm for a routing and container loading problem. *Transportation Science*, v. 40, n. 3, p. 342–350, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 36.
- GEORGE, J. A.; ROBINSON, D. F. A heuristic for packing boxes into a container. *Computers and Operations Research*, v. 7, n. 3, p. 147–156, 1980. Citado na página 31.
- GILMORE, P.; GOMORY, R. A linear programming approach to the cutting stock problem. *Operations Research*, v. 9, n. 6, p. 849–859, 1961. Citado na página 31.
- _____. A linear programming approach to the cutting stock problem - part ii. *Operations Research*, v. 11, n. 6, p. 863–888, 1963. Citado na página 31.
- _____. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations Research*, v. 14, p. 94–120, 1965. Citado na página 31.
- GONÇALVES, J. F.; RESENDE, M. G. A parallel multi-population biased random-key genetic algorithm for a container loading problem. *Computers and Operations Research*, v. 39, n. 2, p. 179–190, 2012. Citado na página 36.
- GRIBEL, A.; LOUREIRO, M. *Carga pesada*. 2015. Acesso em: 03/10/2015. Disponível em: <<http://www.ilos.com.br/web/carga-pesada/>>. Citado na página 22.
- HAESSLER, R. W.; TALBOT, F. B. Load planning for shipments of low density products. *European Journal of Operational Research*, v. 44, p. 289–299, 1990. Citado na página 34.
- HEMMINK, J.; LEIPÄLÄ, T.; NEVALAINEN, O. On-line packing with boxes of different size. *International Journal of Production Research*, v. 36, n. 8, p. 2225–2245, 1998. Citado na página 34.

HERZ, J. C. Recursive computational procedure for two-dimensional stock cutting. *Journal of Research and Development*, v. 16, n. 5, p. 462–469, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 60.

HIBBELER, R. C. *Statics & Mechanics of Materials*. [S.l.]: Prentice Hall, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 23, 31 e 43.

HIFI, M. Approximate algorithms for the container loading problem. *International Journal of Production Research*, v. 9, n. 6, p. 747–774, 2002. Citado na página 34.

JIN, Z.; OHNO, K. A three-dimensional bin packing problem and its practical algorithm. *JSME International Journal, Series C: Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing*, v. 46, p. 60–66, 2003. Citado na página 34.

JIN, Z.; OHNO, K.; DU, J. An efficient approach for the three-dimensional container packing problem with practical constraints. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, v. 21, n. 3, p. 279–295, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.

JUNQUEIRA, L. *Modelos e algoritmos para problemas integrados de roteamento e carregamento de veículos*. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Produção, UFSCar, São Carlos-SP, Brasil, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 30.

JUNQUEIRA, L.; MORABITO, R.; YAMASHITA, D. S. Three-dimensional container loading models with cargo stability and load bearing constraints. *Computers and Operations Research*, v. 39, n. 1, p. 74–85, 2012. Citado 9 vezes nas páginas 23, 27, 30, 34, 36, 37, 39, 40 e 60.

JUNQUEIRA, L.; QUEIROZ, T. A. Condições de equilíbrio e balanceamento em problemas de empacotamento: levantamento e discussão. In: *Anais do XLVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. Porto de Galinhas, PE: [s.n.], 2015. p. 4005–4016. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.

KLEIN, R. *Biblioteca java para solucionar o problema de carregamento de contêineres*. Nova Hamburgo, Brasil: Trabalho de Conclusão de Curso - Ciência da Computação, Instituto de Ciência Exatas e Tecnológicas, Centro Universitário FEEVALE, 2005. Citado na página 22.

KRASNOGOR, N. *Studies on the theory and design space of memetic algorithms*. Tese (Doutorado) — Faculty of computing, engineering and mathematical sciences, University of the West of England, United Kingdom, 2002. Citado na página 21.

LIU, H.; HSIAO, C. J. A three-dimensional pallet loading method for single-size boxes. *Journal of the Operational Research Society*, v. 48, n. 7, p. 726–735, 1997. Citado na página 34.

LIU, Y.; TIAN, Y.; SAWARAGI, T. A toc-based heuristic algorithm for solving a two-row pattern container loading problem. *International Journal of Services Operations and Informatics*, v. 2, n. 4, p. 339–356, 2007. Citado na página 34.

MACK, D.; BORTFELDT, A.; GEHRING, H. A parallel hybrid local search algorithm for the container loading problem. *International Transactions in Operational Research*, v. 11, n. 5, p. 511–533, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 33, 34 e 36.

MAKAREM, O. C.; HARATY, R. A. Smart container loading. *Journal of Computational Methods in Science and Engineering*, v. 10, n. 1, p. S231–S245, 2010. Citado na página 34.

- MARTELLO, S.; PISINGER, D.; VIGO, D. The three-dimensional bin packing problem. *Operations Research*, v. 48, n. 2, p. 256–267, 2000. Citado na página 32.
- MINISTÉRIO DOS TRANSPORTES. *Normas para o projeto das Estradas de Rodagem (Brasil)*. Rio de Janeiro, 1973. 16 p. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 56.
- MORABITO, R.; ARENALES, M. An and/or-graph approach to the container loading problem. *International Transactions in Operational Research*, v. 1, n. 21, p. 59–73, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 34.
- MOURA, A.; OLIVEIRA, J. F. A grasp approach to the container-loading problem. *IEEE Intelligent Systems*, v. 4, n. 20, p. 50–57, 2005. Citado na página 34.
- _____. An integrated approach to the vehicle routing and container loading problems. *Operations-Research-Spektrum*, v. 31, n. 4, p. 775–800, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 36.
- NGOI, B. K. A. *Computer aided design of modular fixture assembly*. Tese (Doutorado) — University of Canterbury, New Zealand, 1990. Citado na página 36.
- NGOI, B. K. A.; TAY, M. L.; CHUA, E. S. Applying spatial representation techniques to the container packing problems. *International Journal of Production Research*, v. 32, n. 1, p. 111–123, 1994. Citado na página 34.
- OPTIMIZATION, G. *Gurobi 6.5 Performance Benchmarks*. 2015. Acesso em: 21/03/2016. Disponível em: <<http://www.gurobi.com/pdfs/benchmarks.pdf>>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 60.
- PAQUAY, F.; LIMBOURG, S. A mixed integer programming formulation for the three-dimensional bin packing problem deriving from an air cargo application. *International Transactions in Operational Research*, v. 23, n. 1–2, p. 187–213, 2016. Citado na página 36.
- PARREÑO, F. *et al.* Neighborhood structures for the container loading problem: A vns implementation. *Heuristics*, v. 16, p. 412–422, 2010. Citado na página 36.
- _____. A maximal-space algorithm for the container loading problem. *INFORMS Journal on Computing*, v. 20, n. 3, p. 412–422, 2008. Citado na página 36.
- PISINGER, D. Heuristics for the container loading problem. *European Journal of Operational Research*, v. 141, n. 2, p. 382–392, 2002. Citado na página 32.
- PORTMANN, M. C. An efficient algorithm for container loading. *Methods of Operations Research*, v. 64, p. 563–572, 1990. Citado na página 34.
- QUEIROZ, T. A.; MIYAZAWA, F. K. Order and static stability into the strip packing problem. *Annals of Operations Research*, v. 223, n. 1, p. 137–154, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 24, 35, 45 e 48.
- QUEIROZ, T. A.; MIYAZAWA, F. K.; WAKABAYASHI, Y. On the *l*-approach for generating unconstrained two-dimensional non-guillotine cutting patterns. *4OR (Berlin)*, v. 13, p. 199–219, 2015. Citado na página 39.
- RAMOS, A. G. *et al.* Dynamic stability metrics for the container loading problem. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, v. 60, p. 480–497, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 36.

- _____. A container loading algorithm with static mechanical equilibrium stability constraints. *Transportation Research Part B: Methodological*, v. 91, n. C, p. 565–581, 2016. Citado 6 vezes nas páginas 24, 33, 34, 35, 36 e 45.
- RAMOS, A. G.; OLIVEIRA, J. E.; LOPES, M. P. A physical packing sequence algorithm for the container loading problem with static mechanical equilibrium conditions. *International Transactions in Operational Research*, v. 23, n. 1–2, p. 215–238, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 24, 35, 36 e 45.
- RATCLIFFE, M. S. W.; BISCHOFF, E. E. Allowing for weight considerations in container loading. *Operations-Research-Spektrum*, v. 20, n. 1, p. 65–71, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 34.
- RESENDE, P.; SOUSA, P. R. *Pesquisa de custos logísticos no Brasil*. Relatório de Pesquisa - Fundação Dom Cabral, Nova Lima - MG, Brasil, 2015. Acesso em: 03/10/2015. Disponível em: <<http://www.fdc.org.br/professoresepesquisa/publicacoes/Paginas/publicacao-detalhe.aspx?publicacao=18217>>. Citado na página 22.
- ROMERO, R.; MANTOVANI, J. R. S. *Introdução a metaheurísticas*. UNESP, Campus de Ilha Solteira: Minicurso – III Congresso Temático de Dinâmica e Controle da SBMAC, 2004. Citado na página 24.
- SCHEITHAUER, G.; TERNO, J. The g4-heuristic for the pallet loading problem. *Journal of the Operational Research Society*, v. 47, p. 511–522, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 60.
- SILVA, J. L. C.; SOMA, N. Y.; MACULAN, N. A greedy search for the three-dimensional bin packing problem: the packing static stability case. *International Transactions in Operational Research*, v. 10, n. 2, p. 141–153, 2003. Citado 5 vezes nas páginas 24, 33, 34, 35 e 45.
- SPADOTTO, A. F. *Desenvolvimento de programa computacional aplicado ao empacotamento do palhiço de cana-de-açúcar*. Dissertação (Mestrado) — Dissertação de Mestrado – Agronomia, Universidade Estadual Paulista, São Paulo-SP, Brasil, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- TERNO, J. *et al.* An efficient approach for the multi-pallet loading problem. *European Journal of Operational Research*, v. 123, n. 2, p. 372–381, 2000. Citado na página 34.
- WÄSCHER, G.; HAUBNER, H.; SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, v. 183, n. 3, p. 1130–1109, 2007. Citado na página 30.
- WHITING, E.; OCHSENDORF, J.; DURAND, F. Procedural modeling of structurally-sound masonry buildings. *ACM Transactions on Graphics*, v. 28, n. 5, p. 112, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 26, 48, 51, 94 e 104.
- YAMASHITA, D. S.; MORABITO, R. Uma nota sobre modelagem matemática de carregamento de caixas dentro de contêineres com considerações de estabilidade da carga. *Production Journal*, v. 25, n. 1, p. 113–124, 2015. Citado na página 33.
- ZHU, W.; LIM, A. A new iterative doubling greedy lookahead algorithm for the single container loading problem. *European Journal of Operational Research*, v. 222, n. 3, p. 408–417, 2012. Citado na página 36.

ANEXO A

APLICAÇÃO DAS ABORDAGENS EM EMPACOTAMENTOS

Este capítulo traz a aplicação das abordagens propostas para o caso da estabilidade vertical e horizontal de carga. Consideram-se alguns exemplos de empacotamento simples com o intuito de mostrar a aplicação das abordagens passo-a-passo. Vale lembrar que a abordagem BGN não será desenvolvida passo-a-passo, pois ela apresenta os mesmos resultados da abordagem WOD. E, no caso da estabilidade horizontal, tem-se apenas a abordagem B.

A.1 Exemplo 1: Estabilidade Vertical

O empacotamento considerado para fins de exemplificação é dado na Figura A.1, com uma configuração de caixas nas posições: $(0, 0, 0)$, $(8, 0, 0)$, $(18, 0, 0)$, $(0, 0, 4)$ e $(18, 0, 8)$. Todavia, para fins de análise da estabilidade vertical, leva-se em consideração apenas as caixas empacotadas nas posições $(0, 0, 4)$ e $(18, 0, 8)$.

A.1.1 Abordagem B

Aplica-se a abordagem B, que considera o trabalho de Baraff (1989), no empacotamento dado na Figura A.1. Assim, tem-se:

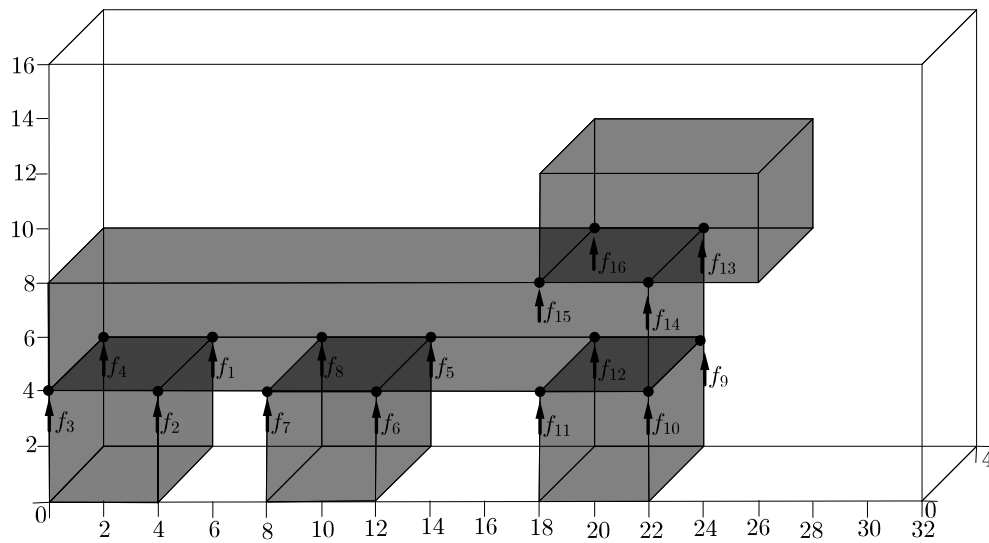
- **Massa dos itens:**

$$m_0 = 500kg$$

$$m_1 = 200kg$$

- **Centro de massa:**

Figura A.1 – Exemplo de empacotamento estável.



Fonte: o autor.

$$CM_0 = (11, 2, 6)$$

$$CM_1 = (22, 2, 10)$$

- **Vértices de contato:**

$$v_1 = (4, 4, 4);$$

$$v_2 = (4, 0, 4);$$

$$v_3 = (0, 0, 4);$$

$$v_4 = (0, 4, 4);$$

$$v_5 = (12, 4, 4);$$

$$v_6 = (12, 0, 4);$$

$$v_6 = (8, 0, 4);$$

$$v_8 = (8, 4, 4);$$

$$v_9 = (22, 4, 4);$$

$$v_{10} = (22, 0, 4);$$

$$v_{11} = (18, 0, 4);$$

$$v_{12} = (18, 4, 4);$$

$$v_{13} = (22, 4, 8);$$

$$v_{14} = (22, 0, 8);$$

$$v_{15} = (18, 0, 8);$$

$$v_{16} = (18, 4, 8);$$

- **Vetor posição entre o centro de massa e o ponto de contato:**

$$\vec{r}_1 = v_1 - CM_0 = (-7, 2, -2);$$

$$\vec{r}_2 = v_2 - CM_0 = (-7, -2, -2);$$

$$\vec{r}_3 = v_3 - CM_0 = (-11, -2, -2);$$

$$\vec{r}_4 = v_4 - CM_0 = (-11, 2, -2);$$

$$\vec{r}_5 = v_5 - CM_0 = (1, 2, -2);$$

$$\vec{r}_6 = v_6 - CM_0 = (1, -2, -2);$$

$$\vec{r}_7 = v_7 - CM_0 = (-3, -2, -2);$$

$$\vec{r}_8 = v_8 - CM_0 = (-3, 2, -2);$$

$$\vec{r}_9 = v_9 - CM_0 = (11, 2, -2);$$

$$\vec{r}_{10} = v_{10} - CM_0 = (11, -2, -2);$$

$$\vec{r}_{11} = v_{11} - CM_0 = (7, -2, -2);$$

$$\vec{r}_{12} = v_{12} - CM_0 = (7, 2, -2);$$

$$\vec{r}_{13} = v_{13} - CM_0 = (11, 2, 2);$$

$$\vec{r}_{14} = v_{14} - CM_0 = (11, -2, 2);$$

$$\vec{r}_{15} = v_{15} - CM_0 = (7, -2, 2);$$

$$\vec{r}_{16} = v_{16} - CM_0 = (7, 2, 2);$$

$$\vec{r}_{17} = v_{13} - CM_1 = (0, 2, -2);$$

$$\vec{r}_{18} = v_{14} - CM_1 = (0, -2, -2);$$

$$\vec{r}_{19} = v_{15} - CM_1 = (-4, 2, -2);$$

$$\vec{r}_{20} = v_{16} - CM_1 = (-4, 2, -2);$$

- **Vetor com as forças em cada ponto de contato:**

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \\ f_2 \\ 0 \\ 0 \\ f_3 \\ 0 \\ 0 \\ f_4 \\ 0 \\ 0 \\ f_5 \\ 0 \\ 0 \\ f_6 \\ 0 \\ 0 \\ f_7 \\ 0 \\ 0 \\ f_8 \\ 0 \\ 0 \\ f_9 \\ 0 \\ 0 \\ f_{10} \\ 0 \\ 0 \\ f_{11} \\ 0 \\ 0 \\ f_{12} \\ 0 \\ 0 \\ f_{13} \\ 0 \\ 0 \\ f_{14} \\ 0 \\ 0 \\ f_{15} \\ 0 \\ 0 \\ f_{16} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Sistema de equações conforme as equações (3.16)-(3.19):

$$[(0, 0, -4900) + (f_1, 0, 0) + (f_2, 0, 0) + (f_3, 0, 0) + (f_4, 0, 0) + (f_5, 0, 0) + (f_6, 0, 0) + (f_7, 0, 0) + (f_8, 0, 0) + (f_9, 0, 0) + (f_{10}, 0, 0) + (f_{11}, 0, 0) + (f_{12}, 0, 0) - (f_{13}, 0, 0) - (f_{14}, 0, 0) - (f_{15}, 0, 0) - (f_{16}, 0, 0)] / 500 + \{[(\vec{r}_1 \times (f_1, 0, 0)) + (\vec{r}_2 \times (f_2, 0, 0)) + (\vec{r}_3 \times (f_3, 0, 0)) + (\vec{r}_4 \times (f_4, 0, 0)) + (\vec{r}_5 \times (f_5, 0, 0)) + (\vec{r}_6 \times (f_6, 0, 0)) + (\vec{r}_7 \times (f_7, 0, 0)) + (\vec{r}_8 \times (f_8, 0, 0)) + (\vec{r}_9 \times (f_9, 0, 0)) + (\vec{r}_{10} \times (f_{10}, 0, 0)) + (\vec{r}_{11} \times (f_{11}, 0, 0)) + (\vec{r}_{12} \times (f_{12}, 0, 0)) + (\vec{r}_{13} \times -(f_{13}, 0, 0)) + (\vec{r}_{14} \times -(f_{14}, 0, 0)) + (\vec{r}_{15} \times -(f_{15}, 0, 0)) + (\vec{r}_{16} \times -(f_{16}, 0, 0))] \cdot I_1^{-1}\} \times \vec{r}_1 = 0;$$

$$(f_1, 0, 0) + (\vec{r}_2 \times (f_2, 0, 0)) + (\vec{r}_3 \times (f_3, 0, 0)) + (\vec{r}_4 \times (f_4, 0, 0)) + (\vec{r}_5 \times (f_5, 0, 0)) + (\vec{r}_6 \times (f_6, 0, 0)) + (\vec{r}_7 \times (f_7, 0, 0)) + (\vec{r}_8 \times (f_8, 0, 0)) + (\vec{r}_9 \times (f_9, 0, 0)) + (\vec{r}_{10} \times (f_{10}, 0, 0)) + (\vec{r}_{11} \times (f_{11}, 0, 0)) + (\vec{r}_{12} \times (f_{12}, 0, 0)) + (\vec{r}_{13} \times -(f_{13}, 0, 0)) + (\vec{r}_{14} \times -(f_{14}, 0, 0)) + (\vec{r}_{15} \times -(f_{15}, 0, 0)) + (\vec{r}_{16} \times -(f_{16}, 0, 0)) \cdot I_1^{-1} \times \vec{r}_9 = 0;$$

$$[(0, 0, -4900) + (f_1, 0, 0) + (f_2, 0, 0) + (f_3, 0, 0) + (f_4, 0, 0) + (f_5, 0, 0) + (f_6, 0, 0) + (f_7, 0, 0) + (f_8, 0, 0) + (f_9, 0, 0) + (f_{10}, 0, 0) + (f_{11}, 0, 0) + (f_{12}, 0, 0) - (f_{13}, 0, 0) - (f_{14}, 0, 0) - (f_{15}, 0, 0) - (f_{16}, 0, 0)]/500 + \{[(\vec{r}_1 \times (f_1, 0, 0)) + (\vec{r}_2 \times (f_2, 0, 0)) + (\vec{r}_3 \times (f_3, 0, 0)) + (\vec{r}_4 \times (f_4, 0, 0)) + (\vec{r}_5 \times (f_5, 0, 0)) + (\vec{r}_6 \times (f_6, 0, 0)) + (\vec{r}_7 \times (f_7, 0, 0)) + (\vec{r}_8 \times (f_8, 0, 0)) + (\vec{r}_9 \times (f_9, 0, 0)) + (\vec{r}_{10} \times (f_{10}, 0, 0)) + (\vec{r}_{11} \times (f_{11}, 0, 0)) + (\vec{r}_{12} \times (f_{12}, 0, 0)) + (\vec{r}_{13} \times -(f_{13}, 0, 0)) + (\vec{r}_{14} \times -(f_{14}, 0, 0)) + (\vec{r}_{15} \times -(f_{15}, 0, 0)) + (\vec{r}_{16} \times -(f_{16}, 0, 0))] \cdot I_1^{-1}\} \times \vec{r}_{10} = 0;$$

$$[(0, 0, -4900) + (f_1, 0, 0) + (f_2, 0, 0) + (f_3, 0, 0) + (f_4, 0, 0) + (f_5, 0, 0) + (f_6, 0, 0) + (f_7, 0, 0) + (f_8, 0, 0) + (f_9, 0, 0) + (f_{10}, 0, 0) + (f_{11}, 0, 0) + (f_{12}, 0, 0) - (f_{13}, 0, 0) - (f_{14}, 0, 0) - (f_{15}, 0, 0) - (f_{16}, 0, 0)]/500 + \{[(\vec{r}_1 \times (f_1, 0, 0)) + (\vec{r}_2 \times (f_2, 0, 0)) + (\vec{r}_3 \times (f_3, 0, 0)) + (\vec{r}_4 \times (f_4, 0, 0)) + (\vec{r}_5 \times (f_5, 0, 0)) + (\vec{r}_6 \times (f_6, 0, 0)) + (\vec{r}_7 \times (f_7, 0, 0)) + (\vec{r}_8 \times (f_8, 0, 0)) + (\vec{r}_9 \times (f_9, 0, 0)) + (\vec{r}_{10} \times (f_{10}, 0, 0)) + (\vec{r}_{11} \times (f_{11}, 0, 0)) + (\vec{r}_{12} \times (f_{12}, 0, 0)) + (\vec{r}_{13} \times -(f_{13}, 0, 0)) + (\vec{r}_{14} \times -(f_{14}, 0, 0)) + (\vec{r}_{15} \times -(f_{15}, 0, 0)) + (\vec{r}_{16} \times -(f_{16}, 0, 0))] \cdot I_1^{-1}\} \times \vec{r}_{11} = 0;$$

$$[(0, 0, -4900) + (f_1, 0, 0) + (f_2, 0, 0) + (f_3, 0, 0) + (f_4, 0, 0) + (f_5, 0, 0) + (f_6, 0, 0) + (f_7, 0, 0) + (f_8, 0, 0) + (f_9, 0, 0) + (f_{10}, 0, 0) + (f_{11}, 0, 0) + (f_{12}, 0, 0) - (f_{13}, 0, 0) - (f_{14}, 0, 0) - (f_{15}, 0, 0) - (f_{16}, 0, 0)]/500 + \{[(\vec{r}_1 \times (f_1, 0, 0)) + (\vec{r}_2 \times (f_2, 0, 0)) + (\vec{r}_3 \times (f_3, 0, 0)) + (\vec{r}_4 \times (f_4, 0, 0)) + (\vec{r}_5 \times (f_5, 0, 0)) + (\vec{r}_6 \times (f_6, 0, 0)) + (\vec{r}_7 \times (f_7, 0, 0)) + (\vec{r}_8 \times (f_8, 0, 0)) + (\vec{r}_9 \times (f_9, 0, 0)) + (\vec{r}_{10} \times (f_{10}, 0, 0)) + (\vec{r}_{11} \times (f_{11}, 0, 0)) + (\vec{r}_{12} \times (f_{12}, 0, 0)) + (\vec{r}_{13} \times -(f_{13}, 0, 0)) + (\vec{r}_{14} \times -(f_{14}, 0, 0)) + (\vec{r}_{15} \times -(f_{15}, 0, 0)) + (\vec{r}_{16} \times -(f_{16}, 0, 0))] \cdot I_1^{-1}\} \times \vec{r}_{12} = 0;$$

$$[(0, 0, -1960) + (f_{13}, 0, 0) + (f_{14}, 0, 0) + (f_{15}, 0, 0) + (f_{16}, 0, 0)]/200 + \{(\vec{r}_{17} \times (f_{13}, 0, 0)) + (\vec{r}_{18} \times (f_{14}, 0, 0)) + (\vec{r}_{19} \times (f_{15}, 0, 0)) + (\vec{r}_{20} \times (f_{16}, 0, 0))\} \cdot I_2^{-1} \times \vec{r}_{17} = 0;$$

$$[(0, 0, -1960) + (f_{13}, 0, 0) + (f_{14}, 0, 0) + (f_{15}, 0, 0) + (f_{16}, 0, 0)]/200 + \{(\vec{r}_{17} \times (f_{13}, 0, 0)) + (\vec{r}_{18} \times (f_{14}, 0, 0)) + (\vec{r}_{19} \times (f_{15}, 0, 0)) + (\vec{r}_{20} \times (f_{16}, 0, 0))\} \cdot I_2^{-1} \times \vec{r}_{18} = 0;$$

$$[(0, 0, -1960) + (f_{13}, 0, 0) + (f_{14}, 0, 0) + (f_{15}, 0, 0) + (f_{16}, 0, 0)]/200 + \{(\vec{r}_{17} \times (f_{13}, 0, 0)) + (\vec{r}_{18} \times (f_{14}, 0, 0)) + (\vec{r}_{19} \times (f_{15}, 0, 0)) + (\vec{r}_{20} \times (f_{16}, 0, 0))\} \cdot I_2^{-1} \times \vec{r}_{19} = 0;$$

$$[(0, 0, -1960) + (f_{13}, 0, 0) + (f_{14}, 0, 0) + (f_{15}, 0, 0) + (f_{16}, 0, 0)]/200 + \{(\vec{r}_{17} \times (f_{13}, 0, 0)) + (\vec{r}_{18} \times (f_{14}, 0, 0)) + (\vec{r}_{19} \times (f_{15}, 0, 0)) + (\vec{r}_{20} \times (f_{16}, 0, 0))\} \cdot I_2^{-1} \times \vec{r}_{20} = 0;$$

A solução desse sistema resulta no seguinte conjunto de forças normais em cada ponto de contato: $f_1 = 344, 1221N$, $f_2 = 344, 1221N$, $f_3 = 207, 5954N$, $f_4 = 207, 5954N$, $f_5 = 617, 1756N$, $f_6 = 617, 1756N$, $f_7 = 480, 6489N$, $f_8 = 480, 6489N$, $f_9 = 958, 4924N$, $f_{10} = 958, 4924N$, $f_{11} = 821, 9657N$, $f_{12} = 821, 9657N$, $f_{13} = 980, 0000N$, $f_{14} = 980, 0000N$, $f_{15} = 0, 0000N$ e $f_{16} = 0, 0000N$.

Observa-se que não há a presença de forças negativas e, por conseguinte, o empacotamento é estável.

A.1.2 Abordagem WOD

Aplica-se agora a abordagem WOD que considera a abordagem baseada no trabalho de [Whiting, Ochsendorf e Durand \(2009\)](#). Assim, observando a Figura A.1, tem-se:

- **Vértices de contato:**

$$v_1 = (4, 4, 4);$$

$$v_2 = (4, 0, 4);$$

$$v_3 = (0, 0, 4);$$

$$v_4 = (0, 4, 4);$$

$$v_5 = (12, 4, 4);$$

$$v_6 = (12, 0, 4);$$

$$v_7 = (8, 0, 4);$$

$$v_8 = (8, 4, 4);$$

$$v_9 = (22, 4, 4);$$

$$v_{10} = (22, 0, 4);$$

$$v_{11} = (18, 0, 4);$$

$$v_{12} = (18, 4, 4);$$

$$v_{13} = (22, 4, 8);$$

$$v_{14} = (22, 0, 8);$$

$$v_{15} = (18, 0, 8);$$

$$v_{16} = (18, 4, 8);$$

- **Centro de massa:**

$$CM_0 = (11, 2, 6);$$

$$CM_1 = (22, 2, 10);$$

- **Submatriz $G_{0,0}$, bloco 0 em contato com a superfície 0:**

$$\vec{r}_{1,0} = v_1 - CM_0 = (-7, 2, -2);$$

$$\vec{r}_{2,0} = v_2 - CM_0 = (-7, -2, -2);$$

$$\vec{r}_{3,0} = v_3 - CM_0 = (-11, -2, -2);$$

$$\vec{r}_{4,0} = v_4 - CM_0 = (-11, 2, -2);$$

- **Submatriz $G_{0,1}$, bloco 0 em contato com a superfície 1:**

$$\vec{r}_{5,1} = v_5 - CM_0 = (1, 2, -2);$$

$$\vec{r}_{6,1} = v_6 - CM_0 = (1, -2, -2);$$

$$\vec{r}_{7,1} = v_7 - CM_0 = (-3, -2, -2);$$

$$\vec{r}_{8,1} = v_8 - CM_0 = (-3, 2, -2);$$

- **Submatriz $G_{0,2}$, bloco 0 em contato com a superfície 2:**

$$\vec{r}_{9,2} = v_9 - CM_0 = (11, 2, -2);$$

$$\vec{r}_{10,2} = v_{10} - CM_0 = (11, -2, -2);$$

$$\vec{r}_{11,2} = v_{11} - CM_0 = (7, -2, -2);$$

$$\vec{r}_{12,2} = v_{12} - CM_0 = (7, 2, -2);$$

- **Submatriz $G_{0,3}$, bloco 0 em contato com a superfície 3:**

$$\vec{r}_{13,3} = v_{13} - CM_0 = (11, 2, 2);$$

$$\vec{r}_{14,3} = v_{14} - CM_0 = (11, -2, 2);$$

$$\vec{r}_{15,3} = v_{15} - CM_0 = (7, -2, 2);$$

$$\vec{r}_{16,3} = v_{16} - CM_0 = (7, 2, 2);$$

- **Submatriz $G_{1,3}$, bloco 1 em contato com a superfície 3:**

$$\vec{r}_{13,4} = v_{13} - CM_1 = (0, 2, -2);$$

$$\vec{r}_{14,4} = v_{14} - CM_1 = (0, -2, -2);$$

$$\vec{r}_{15,4} = v_{15} - CM_1 = (-4, 2, -2);$$

$$\vec{r}_{16,4} = v_{16} - CM_1 = (-4, 2, -2);$$

- **Vetores normalizados:**

$$\hat{n} = (0, 0, 1) \text{ (vetor normal normalizado);}$$

$$\hat{t}_1 = (1, 0, 0) \text{ (vetor de atrito em } x \text{ normalizado);}$$

$$\hat{t}_2 = (0, 1, 0) \text{ (vetor de atrito em } y \text{ normalizado);}$$

- **Produto vetorial entre vetores normalizados e o vetor posição:**

$$\begin{aligned}
\hat{n} \times \vec{r}_{1,0} &= -2\vec{i} - 7\vec{j} + 0\vec{k}; \\
\hat{t}_1 \times \vec{r}_{1,0} &= 0\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}; \\
\hat{t}_2 \times \vec{r}_{1,0} &= -2\vec{i} + 0\vec{j} - 7\vec{k}; \\
\hat{n} \times \vec{r}_{2,0} &= 2\vec{i} - 7\vec{j} + 0\vec{k}; \\
\hat{t}_1 \times \vec{r}_{2,0} &= 0\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}; \\
\hat{t}_2 \times \vec{r}_{2,0} &= -2\vec{i} + 0\vec{j} + 7\vec{k}; \\
\hat{n} \times \vec{r}_{3,0} &= 2\vec{i} - 11\vec{j} + 0\vec{k}; \\
\hat{t}_1 \times \vec{r}_{3,0} &= 0\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}; \\
\hat{t}_2 \times \vec{r}_{3,0} &= -2\vec{i} + 0\vec{j} + 11\vec{k}; \\
\hat{n} \times \vec{r}_{4,0} &= -2\vec{i} - 11\vec{j} + 0\vec{k}; \\
\hat{t}_1 \times \vec{r}_{4,0} &= 0\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}; \\
\hat{t}_2 \times \vec{r}_{4,0} &= -2\vec{i} + 0\vec{j} + 11\vec{k}; \\
\hat{n} \times \vec{r}_{5,1} &= -2\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k}; \\
\hat{t}_1 \times \vec{r}_{5,1} &= 0\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}; \\
\hat{t}_2 \times \vec{r}_{5,1} &= -2\vec{i} + 0\vec{j} - 1\vec{k}; \\
\hat{n} \times \vec{r}_{6,1} &= 2\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k}; \\
\hat{t}_1 \times \vec{r}_{6,1} &= 0\vec{i} + 2\vec{j} + -2\vec{k}; \\
\hat{t}_2 \times \vec{r}_{6,1} &= -2\vec{i} + 0\vec{j} + -1\vec{k}; \\
\hat{n} \times \vec{r}_{7,1} &= 2\vec{i} - 3\vec{j} + 0\vec{k}; \\
\hat{t}_1 \times \vec{r}_{7,1} &= 0\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}; \\
\hat{t}_2 \times \vec{r}_{7,1} &= -2\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k}; \\
\hat{n} \times \vec{r}_{8,1} &= 2\vec{i} - 3\vec{j} + 0\vec{k}; \\
\hat{t}_1 \times \vec{r}_{8,1} &= 0\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}; \\
\hat{t}_2 \times \vec{r}_{8,1} &= -2\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k}; \\
\hat{n} \times \vec{r}_{9,2} &= -2\vec{i} + 11\vec{j} + 0\vec{k}; \\
\hat{t}_1 \times \vec{r}_{9,2} &= 0\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}; \\
\hat{t}_2 \times \vec{r}_{9,2} &= -2\vec{i} + 0\vec{j} - 11\vec{k}; \\
\hat{n} \times \vec{r}_{10,2} &= 2\vec{i} + 11\vec{j} + 0\vec{k}; \\
\hat{t}_1 \times \vec{r}_{10,2} &= 0\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}; \\
\hat{t}_2 \times \vec{r}_{10,2} &= -2\vec{i} + 0\vec{j} - 11\vec{k};
\end{aligned}$$

$$\hat{n} \times \vec{r}_{11,2} = 2\vec{i} + 7\vec{j} + 0\vec{k};$$

$$\hat{t}_1 \times \vec{r}_{11,2} = 0\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k};$$

$$\hat{t}_2 \times \vec{r}_{11,2} = -2\vec{i} + 0\vec{j} - 7\vec{k};$$

$$\hat{n} \times \vec{r}_{12,2} = -2\vec{i} + 7\vec{j} + 0\vec{k};$$

$$\hat{t}_1 \times \vec{r}_{12,2} = 0\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k};$$

$$\hat{t}_2 \times \vec{r}_{12,2} = -2\vec{i} + 0\vec{j} - 7\vec{k};$$

$$\hat{n} \times \vec{r}_{13,3} = -2\vec{i} - 11\vec{j} + 0\vec{k};$$

$$\hat{t}_1 \times \vec{r}_{13,3} = 0\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k};$$

$$\hat{t}_2 \times \vec{r}_{13,3} = 2\vec{i} + 0\vec{j} - 11\vec{k};$$

$$\hat{n} \times \vec{r}_{14,3} = 2\vec{i} + 11\vec{j} + 0\vec{k};$$

$$\hat{t}_1 \times \vec{r}_{14,3} = 0\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k};$$

$$\hat{t}_2 \times \vec{r}_{14,3} = 2\vec{i} + 0\vec{j} - 11\vec{k};$$

$$\hat{n} \times \vec{r}_{15,3} = 2\vec{i} + 7\vec{j} + 0\vec{k};$$

$$\hat{t}_1 \times \vec{r}_{15,3} = 0\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k};$$

$$\hat{t}_2 \times \vec{r}_{15,3} = 2\vec{i} + 0\vec{j} - 7\vec{k};$$

$$\hat{n} \times \vec{r}_{16,3} = -2\vec{i} + 7\vec{j} + 0\vec{k};$$

$$\hat{t}_1 \times \vec{r}_{16,3} = 0\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k};$$

$$\hat{t}_2 \times \vec{r}_{16,3} = 2\vec{i} + 0\vec{j} - 7\vec{k};$$

$$\hat{n} \times \vec{r}_{13,4} = -2\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k};$$

$$\hat{t}_1 \times \vec{r}_{13,4} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k};$$

$$\hat{t}_2 \times \vec{r}_{13,4} = -2\vec{i} + 0\vec{j} - 0\vec{k};$$

$$\hat{n} \times \vec{r}_{14,4} = -2\vec{i} + 0\vec{j} - 2\vec{k};$$

$$\hat{t}_1 \times \vec{r}_{14,4} = 0\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k};$$

$$\hat{t}_2 \times \vec{r}_{14,4} = -2\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k};$$

$$\hat{n} \times \vec{r}_{15,4} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 0\vec{k};$$

$$\hat{t}_1 \times \vec{r}_{15,4} = 0\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k};$$

$$\hat{t}_2 \times \vec{r}_{15,4} = -2\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k};$$

$$\hat{n} \times \vec{r}_{16,4} = -2\vec{i} - 4\vec{j} - 0\vec{k};$$

$$\hat{t}_1 \times \vec{r}_{16,4} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 0\vec{k};$$

$$\hat{t}_2 \times \vec{r}_{16,4} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k};$$

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4900 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1960 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim, a operação $A\vec{f} - \vec{p} = \vec{0}$ resulta no seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 + f_9 + f_{10} + f_{11} + f_{12} - f_{13} - f_{14} - f_{15} - f_{16} = 4900 \\ -2f_1 + 2f_2 + 2f_3 - 2f_4 - 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 - 2f_8 - 2f_9 + 2f_{10} + 2f_{11} - 2f_{12} + 2f_{13} - 2f_{14} - 2f_{15} + 2f_{16} = 0 \\ -7f_1 - 7f_2 - 11f_3 - 11f_4 + f_5 + f_6 - 3f_7 - 3f_8 + 11f_9 + 11f_{10} + 7f_{11} + 7f_{12} - 11f_{13} - 11f_{14} - 7f_{15} - 7f_{16} = 0 \\ f_{13} + f_{14} + f_{15} + f_{16} = 1960 \\ -2f_{13} + 2f_{14} + 2f_{15} - 2f_{16} = 0 \\ -4f_{15} - 4f_{16} = 0 \end{array} \right.$$

cuja solução é dada por: $f_1 = 344,1221N$, $f_2 = 344,1221N$, $f_3 = 207,5954N$, $f_4 = 207,5954N$, $f_5 = 617,1756N$, $f_6 = 617,1756N$, $f_7 = 480,6489N$, $f_8 = 480,6489N$, $f_9 = 958,4924N$, $f_{10} = 958,4924N$, $f_{11} = 821,9657N$, $f_{12} = 821,9657N$, $f_{13} = 980,0000N$, $f_{14} = 980,0000N$, $f_{15} = 0,0000N$ e $f_{16} = 0,0000N$.

Portanto, como não há a presença de forças negativas, conclui-se que o empacotamento é estável.

A.2 Exemplo 2: Estabilidade Vertical

O empacotamento considerado para fins de exemplificação é dado na Figura A.2, que traz uma configuração de caixas com as seguintes posições: $(0,0,0)$, $(8,0,0)$ e $(2,0,4)$. Todavia, para fins de análise da estabilidade vertical, leva-se em consideração apenas a caixa empacotada na posição $(2,0,4)$.

A.2.1 Abordagem B

Aplica-se adiante a abordagem baseada em Baraff (1989) no empacotamento da Figura A.2. Assim, tem-se:

- Massa:

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \\ f_2 \\ 0 \\ 0 \\ f_3 \\ 0 \\ 0 \\ f_4 \\ 0 \\ 0 \\ f_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_6 \\ 0 \\ 0 \\ f_7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

- **Vetor Posição:**

$$\vec{r}_1 = v_1 - CM_0 = (-10, 2, -2);$$

$$\vec{r}_2 = v_2 - CM_0 = (-10, -2, -2);$$

$$\vec{r}_3 = v_3 - CM_0 = (-12, -2, -2);$$

$$\vec{r}_4 = v_4 - CM_0 = (-12, 2, -2);$$

$$\vec{r}_5 = v_5 - CM_0 = (-2, 2, -2);$$

$$\vec{r}_6 = v_6 - CM_0 = (-2, -2, -2);$$

$$\vec{r}_7 = v_7 - CM_0 = (-6, -2, -2);$$

$$\vec{r}_8 = v_8 - CM_0 = (-6, 2, -2);$$

- **Sistema de Equações:**

$$[(0, 0, -4900) + (f_1, 0, 0) + (f_2, 0, 0) + (f_3, 0, 0) + (f_4, 0, 0) + (f_5, 0, 0) + (f_6, 0, 0) + (f_7, 0, 0) + (f_8, 0, 0)] / 500 + \{[(\vec{r}_1 \times (f_1, 0, 0)) + (\vec{r}_2 \times (f_2, 0, 0)) + (\vec{r}_3 \times (f_3, 0, 0)) + (\vec{r}_4 \times (f_4, 0, 0)) + (\vec{r}_5 \times (f_5, 0, 0)) + (\vec{r}_6 \times (f_6, 0, 0)) + (\vec{r}_7 \times (f_7, 0, 0)) + (\vec{r}_8 \times (f_8, 0, 0))] \cdot I^{-1}\} \times \vec{r}_1 = 0;$$

$$[(0, 0, -4900) + (f_1, 0, 0) + (f_2, 0, 0) + (f_3, 0, 0) + (f_4, 0, 0) + (f_5, 0, 0) + (f_6, 0, 0) + (f_7, 0, 0) + (f_8, 0, 0)] / 500 + \{[(\vec{r}_1 \times (f_1, 0, 0)) + (\vec{r}_2 \times (f_2, 0, 0)) + (\vec{r}_3 \times (f_3, 0, 0)) + (\vec{r}_4 \times (f_4, 0, 0)) + (\vec{r}_5 \times (f_5, 0, 0)) + (\vec{r}_6 \times (f_6, 0, 0)) + (\vec{r}_7 \times (f_7, 0, 0)) + (\vec{r}_8 \times (f_8, 0, 0))] \cdot I^{-1}\} \times \vec{r}_2 = 0;$$

$$[(0, 0, -4900) + (f_1, 0, 0) + (f_2, 0, 0) + (f_3, 0, 0) + (f_4, 0, 0) + (f_5, 0, 0) + (f_6, 0, 0) + (f_7, 0, 0) + (f_8, 0, 0)] / 500 + \{[(\vec{r}_1 \times (f_1, 0, 0)) + (\vec{r}_2 \times (f_2, 0, 0)) + (\vec{r}_3 \times (f_3, 0, 0)) + (\vec{r}_4 \times (f_4, 0, 0)) + (\vec{r}_5 \times (f_5, 0, 0)) + (\vec{r}_6 \times (f_6, 0, 0)) + (\vec{r}_7 \times (f_7, 0, 0)) + (\vec{r}_8 \times (f_8, 0, 0))] \cdot I^{-1}\} \times \vec{r}_3 = 0;$$

$$[(0, 0, -4900) + (f_1, 0, 0) + (f_2, 0, 0) + (f_3, 0, 0) + (f_4, 0, 0) + (f_5, 0, 0) + (f_6, 0, 0) + (f_7, 0, 0) + (f_8, 0, 0)] / 500 + \{[(\vec{r}_1 \times (f_1, 0, 0)) + (\vec{r}_2 \times (f_2, 0, 0)) + (\vec{r}_3 \times (f_3, 0, 0)) + (\vec{r}_4 \times (f_4, 0, 0)) + (\vec{r}_5 \times (f_5, 0, 0)) + (\vec{r}_6 \times (f_6, 0, 0)) + (\vec{r}_7 \times (f_7, 0, 0)) + (\vec{r}_8 \times (f_8, 0, 0))] \cdot I^{-1}\} \times \vec{r}_4 = 0;$$

$$[(0, 0, -4900) + (f_1, 0, 0) + (f_2, 0, 0) + (f_3, 0, 0) + (f_4, 0, 0) + (f_5, 0, 0) + (f_6, 0, 0) + (f_7, 0, 0) + (f_8, 0, 0)] / 500 + \{[(\vec{r}_1 \times (f_1, 0, 0)) + (\vec{r}_2 \times (f_2, 0, 0)) + (\vec{r}_3 \times (f_3, 0, 0)) + (\vec{r}_4 \times (f_4, 0, 0)) + (\vec{r}_5 \times (f_5, 0, 0)) + (\vec{r}_6 \times (f_6, 0, 0)) + (\vec{r}_7 \times (f_7, 0, 0)) + (\vec{r}_8 \times (f_8, 0, 0))] \cdot I^{-1}\} \times \vec{r}_5 = 0;$$

$$[(0, 0, -4900) + (f_1, 0, 0) + (f_2, 0, 0) + (f_3, 0, 0) + (f_4, 0, 0) + (f_5, 0, 0) + (f_6, 0, 0) + (f_7, 0, 0) + (f_8, 0, 0)] / 500 + \{[(\vec{r}_1 \times (f_1, 0, 0)) + (\vec{r}_2 \times (f_2, 0, 0)) + (\vec{r}_3 \times (f_3, 0, 0)) + (\vec{r}_4 \times (f_4, 0, 0)) + (\vec{r}_5 \times (f_5, 0, 0)) + (\vec{r}_6 \times (f_6, 0, 0)) + (\vec{r}_7 \times (f_7, 0, 0)) + (\vec{r}_8 \times (f_8, 0, 0))] \cdot I^{-1}\} \times \vec{r}_6 = 0;$$

$$[(0, 0, -4900) + (f_1, 0, 0) + (f_2, 0, 0) + (f_3, 0, 0) + (f_4, 0, 0) + (f_5, 0, 0) + (f_6, 0, 0) + (f_7, 0, 0) + (f_8, 0, 0)] / 500 + \{[(\vec{r}_1 \times (f_1, 0, 0)) + (\vec{r}_2 \times (f_2, 0, 0)) + (\vec{r}_3 \times (f_3, 0, 0)) + (\vec{r}_4 \times (f_4, 0, 0)) + (\vec{r}_5 \times (f_5, 0, 0)) + (\vec{r}_6 \times (f_6, 0, 0)) + (\vec{r}_7 \times (f_7, 0, 0)) + (\vec{r}_8 \times (f_8, 0, 0))] \cdot I^{-1}\} \times \vec{r}_7 = 0;$$

$$[(0, 0, -4900) + (f_1, 0, 0) + (f_2, 0, 0) + (f_3, 0, 0) + (f_4, 0, 0) + (f_5, 0, 0) + (f_6, 0, 0) + (f_7, 0, 0) + (f_8, 0, 0)] / 500 + \{[(\vec{r}_1 \times (f_1, 0, 0)) + (\vec{r}_2 \times (f_2, 0, 0)) + (\vec{r}_3 \times (f_3, 0, 0)) + (\vec{r}_4 \times (f_4, 0, 0)) + (\vec{r}_5 \times (f_5, 0, 0)) + (\vec{r}_6 \times (f_6, 0, 0)) + (\vec{r}_7 \times (f_7, 0, 0)) + (\vec{r}_8 \times (f_8, 0, 0))] \cdot I^{-1}\} \times \vec{r}_8 = 0;$$

cuja solução é dada por: $f_1 = -16,9492N$; $f_2 = -16,9492N$; $f_3 = -80,5085N$; $f_4 = -80,5085N$; $f_5 = 237,2881N$; $f_6 = 237,2881N$; $f_7 = 110,1695N$; e, $f_8 = 110,1695N$.

Como há a presença de forças negativas, tem-se que o empacotamento é instável.

A.2.2 Abordagem WOD

Aplica-se também a abordagem baseada no trabalho de [Whiting, Ochsendorf e Durand \(2009\)](#) para checar a estabilidade do empacotamento na Figura A.2. Assim, tem-se:

- **Vértices de contato:**

$$v_1 = (4, 4, 4);$$

$$v_2 = (4, 0, 4);$$

$$v_3 = (2, 0, 4);$$

$$v_4 = (2, 4, 4);$$

$$v_5 = (12, 4, 4);$$

$$v_6 = (12, 0, 4);$$

$$v_7 = (8, 0, 4);$$

$$v_8 = (8, 4, 4);$$

- **Centro de Massa:**

$$CM_0 = (14, 2, 6);$$

- **Submatriz $G_{0,0}$, bloco 0 em contato com a interface 0:**

$$\vec{r}_{10} = v_{1,0} - CM_0 = (-10, 2, -2);$$

$$\vec{r}_{20} = v_{2,0} - CM_0 = (-10, -2, -2);$$

$$\vec{r}_{30} = v_{3,0} - CM_0 = (-12, -2, -2);$$

$$\vec{r}_{40} = v_{4,0} - CM_0 = (-12, 2, -2);$$

$$\vec{r}_{12} = v_{5,0} - CM_0 = (-2, 2, -2);$$

$$\vec{r}_{22} = v_{6,0} - CM_0 = (-2, -2, -2);$$

$$\vec{r}_{32} = v_{7,0} - CM_0 = (-6, -2, -2);$$

$$\vec{r}_{42} = v_{8,0} - CM_0 = (-6, 2, -2);$$

- **Vetores normalizados:**

$$\hat{n} = (0, 0, 1) \text{ (vetor normal normalizado);}$$

$$\hat{t}_1 = (1, 0, 0) \text{ (vetor de atrito em } x \text{ normalizado);}$$

$$\hat{t}_2 = (0, 1, 0) \text{ (vetor de atrito em } y \text{ normalizado);}$$

- **Produto vetorial entre vetores normalizados e vetor posição:**

$$\hat{n} \times \vec{r}_{1,0} = -2\vec{i} - 10\vec{j} + 0\vec{k};$$

$$\hat{t}_1 \times \vec{r}_{1,0} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k};$$

$$\hat{t}_2 \times \vec{r}_{1,0} = -2\vec{i} + 0\vec{j} + 10\vec{k};$$

$$\hat{n} \times \vec{r}_{2,0} = 2\vec{i} - 10\vec{j} + 0\vec{k};$$

$$\hat{t}_1 \times \vec{r}_{2,0} = 0\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k};$$

$$\hat{t}_2 \times \vec{r}_{2,0} = -2\vec{i} + 0\vec{j} + 10\vec{k};$$

$$\hat{n} \times \vec{r}_{3,0} = 2\vec{i} - 12\vec{j} + 0\vec{k};$$

$$\hat{t}_1 \times \vec{r}_{3,0} = 0\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k};$$

$$\hat{t}_2 \times \vec{r}_{3,0} = -2\vec{i} + 0\vec{j} + 12\vec{k};$$

$$\hat{n} \times \vec{r}_{4,0} = 2\vec{i} - 12\vec{j} + 0\vec{k};$$

$$\hat{t}_1 \times \vec{r}_{4,0} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k};$$

$$\hat{t}_2 \times \vec{r}_{4,0} = -2\vec{i} + 0\vec{j} + 12\vec{k};$$

$$\hat{n} \times \vec{r}_{5,0} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 0\vec{k};$$

$$\hat{t}_1 \times \vec{r}_{5,0} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k};$$

$$\hat{t}_2 \times \vec{r}_{5,0} = -2\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k};$$

$$\hat{n} \times \vec{r}_{6,0} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 0\vec{k};$$

$$\hat{t}_1 \times \vec{r}_{6,0} = 0\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k};$$

$$\hat{t}_2 \times \vec{r}_{6,0} = -2\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k};$$

$$\hat{n} \times \vec{r}_{7,0} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 0\vec{k};$$

$$\hat{t}_1 \times \vec{r}_{7,0} = 0\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k};$$

$$\hat{t}_2 \times \vec{r}_{7,0} = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 6\vec{k};$$

$$\hat{n} \times \vec{r}_{8,0} = -2\vec{i} - 6\vec{j} + 0\vec{k};$$

$$\hat{t}_1 \times \vec{r}_{8,0} = 0\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k};$$

$$\hat{t}_2 \times \vec{r}_{8,0} = -2\vec{i} + 0\vec{j} + 6\vec{k};$$

$$G_{0,0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & -2 & 0 & -2 \\ -10 & 2 & 0 & -10 & 2 & 0 & -12 & 2 & 0 & -12 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 0 & -2 & 10 & 0 & -2 & 12 & 0 & 2 & 12 \end{bmatrix};$$

$$G_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & -6 & 2 & 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & 6 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix};$$

- Montando a matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} G_{00} & G_{01} \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & -2 & 0 & -2 & -2 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & -2 & 0 & -2 \\ -10 & 2 & 0 & -10 & 2 & 0 & -12 & 2 & 0 & -12 & 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & -6 & 2 & 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 0 & -2 & 10 & 0 & -2 & 12 & 0 & 2 & 12 & 0 & 2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & 6 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix};$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \\ f_2 \\ 0 \\ 0 \\ f_3 \\ 0 \\ 0 \\ f_4 \\ 0 \\ 0 \\ f_5 \\ 0 \\ 0 \\ f_6 \\ 0 \\ 0 \\ f_7 \\ 0 \\ 0 \\ f_8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4900 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Assim, a operação $A\vec{f} - \vec{p} = \vec{0}$ resulta no seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 = 500, \\ -2f_1 + 2f_2 + 2f_3 - 2f_4 - 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 - 2f_8 = 0, \\ -10f_1 - 10f_2 - 12f_3 - 12f_4 - 2f_5 - 2f_6 - 6f_7 - 6f_8 = 0, \end{cases}$$

cuja solução é dada por: $f_1 = -16,9492N$; $f_2 = -16,9492N$; $f_3 = -80,5085N$; $f_4 = -80,5085N$; $f_5 = 237,2881N$; $f_6 = 237,2881N$; $f_7 = 110,1695N$; e $f_8 = 110,1695N$.

Portanto, como há a presença de forças negativas, conclui-se que o empacotamento é instável.

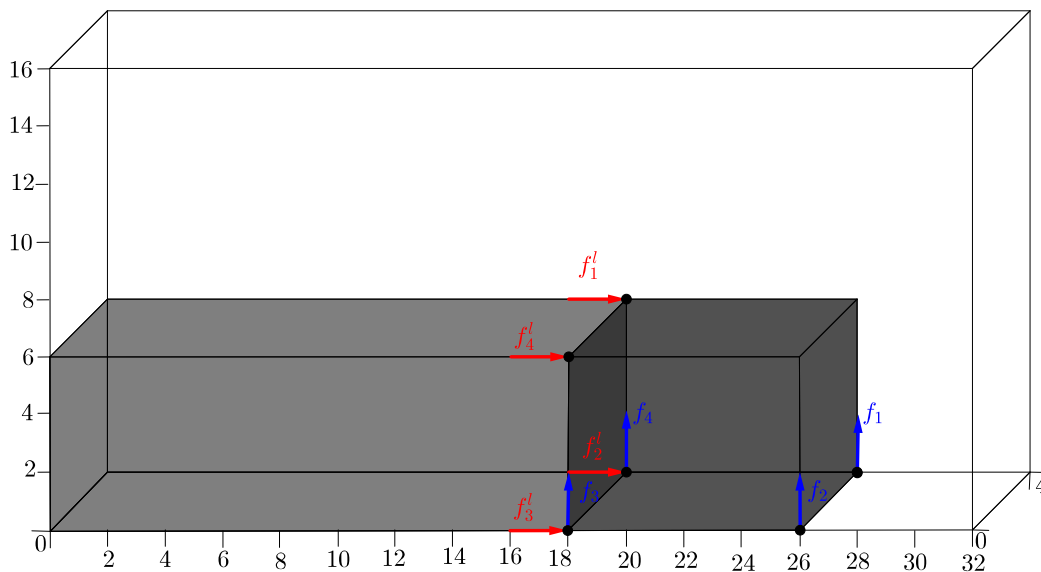
A.3 Exemplo 3: Estabilidade Horizontal

O empacotamento considerado para fins de exemplificação da estabilidade horizontal é dado na Figura A.3, com uma configuração de caixas nas posições: $(0,0,0)$ e $(18,0,0)$. A massa da caixa empacotada na posição $(0,0,0)$ é 432 e a massa da caixa empacotada na posição $(18,0,0)$ é 192.

A.3.1 Abordagem B

Para resolver o problema, seguem-se os passos descritos no final da Subseção 3.2.2 para verificar a estabilidade do empacotamento na Figura A.3.

Figura A.3 – Exemplo de empacotamento para a estabilidade horizontal



Fonte: o autor.

Inicialmente se obtém o valor correto da forças normal da caixa, isto é, $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 470,4$. Como não há a presença de forças negativas, calcula-se a magnitude da força

de atrito em cada ponto de contato. Como a força é aplicada na direção do eixo y , tem-se $|f_1^x| = |f_2^x| = |f_3^x| = |f_4^x| = 117,6N$.

Em seguida, obtém-se as forças laterais em cada ponto de contato da superfície lateral usando a Abordagem B, o que resulta em $f_1^l = f_2^l = f_3^l = f_4^l = 108N$, com resultante $f_1^l + f_2^l + f_3^l + f_4^l = 432$. Por sua vez, a força centrípeta é igual $f_1^c = 789,12N$ e, assim, a resultante da força horizontal é $f_1^h = 432 + 789,12 = 1221,12N$. Ao testar a condição de deslizamento, nota-se que $0,25f_k \leq f_k^h$, indicando que o empacotamento é instável. Assim, não é preciso testar a condição de tombamento.