



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS (UFG)/  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CATALÃO (UFCAT) em implantação  
UNIDADE ACADÊMICA (UA) INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE FÍSICA EM REDE

JOSÉ NETO DE OLIVEIRA

SIMETRIAS NA NATUREZA E LEIS DE CONSERVAÇÃO NA FÍSICA:  
ABORDAGENS RELEVANTES E SIGNIFICATIVAS PARA O 9º ANO DO ENSINO  
FUNDAMENTAL

CATALÃO

2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE FÍSICA

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES  
E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

**1. Identificação do material bibliográfico**

Dissertação     Tese     Outro\*: \_\_\_\_\_

\*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

**2. Nome completo do autor**

Jose Neto de Oliveira

**3. Título do trabalho**

Simetrias na Natureza e Leis de Conservação na Física: Abordagem Relevante e Significativa para o 9º Ano do Ensino Fundamental

**4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)**

Concorda com a liberação total do documento  SIM     NÃO<sup>1</sup>

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

- a) consulta ao(a) autor(a) e ao(a) orientador(a);
- b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

**Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.**



Documento assinado eletronicamente por **Julio Santiago Espinoza Ortiz, Professor do Magistério Superior**, em 17/08/2022, às 10:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **JOSE NETO DE OLIVEIRA, Discente**, em 17/08/2022, às 15:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3119017** e o código CRC **0F515701**.

OSÉ NETO DE OLIVEIRA

SIMETRIAS NA NATUREZA E LEIS DE CONSERVAÇÃO NA FÍSICA:  
ABORDAGENS RELEVANTES E SIGNIFICATIVAS PARA O 9º ANO DO ENSINO  
FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física em Rede, da Unidade Acadêmica (UA) Instituto de Física, da Universidade Federal de Goiás (UFG) / Universidade Federal de Catalão (UFCAT) em implantação, como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Física. Área de concentração: Física na Educação Básica. Linha de Pesquisa: Física no Ensino Médio.

Orientador: Prof. Dr. Julio Santiago Espinoza Ortiz

CATALÃO

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFCAT.

Oliveira, José Neto de  
SIMETRIAS NA NATUREZA E LEIS DE CONSERVAÇÃO NA  
FÍSICA : abordagens relevantes e significativas para o 9º ano do  
ensino fundamental / José Neto de Oliveira. - 2022.  
299, f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Julio Santiago Espinoza Ortiz.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Catalão, Instituto  
de Física, Catalão, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
em Rede, Catalão, 2022.

Bibliografia. Anexos. Apêndice.

Inclui siglas, mapas, fotografias, símbolos, gráfico, tabelas,  
algoritmos, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Ensino de Física. 2. Grupos de Simetria. 3. Leis de  
Conservação. 4. Simetria nos Fractais. 5. Teoria de Grupos. I. Ortiz,  
Julio Santiago Espinoza, orient. II. Título.

CDU 53



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE FÍSICA

**ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO**

Ata nº 04 da sessão de Defesa de Dissertação de **Jose Neto de Oliveira**, que confere o título de **Mestre em Ensino de Física**, na área de concentração **Física na Educação Básica**.

Aos quatro dias do mês de agosto de dois mil e vinte dois, a partir das 15:00 horas, na sala 267 do bloco M, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **“Simetrias na Natureza e Leis de Conservação na Física: Abordagem Relevante e Significativa para o 9º Ano do Ensino Fundamental”** nas dependências da Universidade Federal de Catalão, onde os programas de pós-graduação stricto sensu em funcionamento encontram-se provisoriamente vinculados à Universidade Federal de Goiás, em virtude de procedimentos técnicos relacionados à CAPES, já sendo realizada a transferência da Biblioteca Digital de Dissertações e Teses(BDTD). Assim, justifica-se os nomes das instituições neste documento, uma no cabeçalho(UFG), outra no corpo do texto(UFCAT). Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor **Julio Santiago Espinoza Ortiz (PPGEF/UFCAT)** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Wytler Cordeiro dos Santos (UNB/GAMA)**, membro titular externo; Professor Doutor **Denis Rezende de Jesus (PPGEF/UFCAT)**, membro titular interno. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **( x ) Aprovado ( ) Reprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Julio Santiago Espinoza Ortiz**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao quatro dias do mês de agosto de dois mil e vinte dois.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

---



Documento assinado eletronicamente por **Julio Santiago Espinoza Ortiz, Professor do Magistério Superior**, em 22/09/2022, às 08:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Denis Rezende De Jesus, Professor do Magistério Superior**, em 22/09/2022, às 15:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Wytler Cordeiro dos Santos, Usuário Externo**, em 23/09/2022, às 14:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3206875** e o código CRC **4836C804**.

---

**Referência:** Processo nº 23070.041789/2022-44

SEI nº 3206875

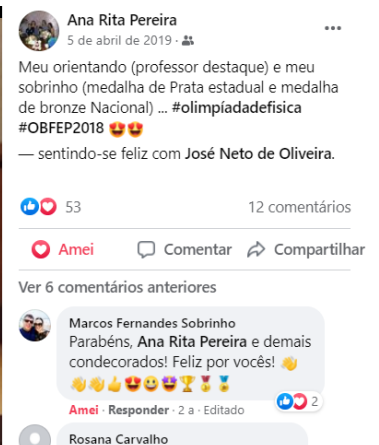


José Luzia de Oliveira (*in memoriam*) e Zilda Rodrigues de Oliveira (*in memoriam*).

*Dedico este trabalho à Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ana Rita Pereira (*in memoriam*), pela sua orientação, dedicação, paciência e, principalmente, pela amizade e contribuições significativas, tanto em minha formação, quanto em minhas práticas pedagógicas. Essa dedicação também se estende aos meus queridos avós maternos, José Luzia de Oliveira (*in memoriam*) e Zilda Rodrigues de Oliveira (*in memoriam*), cuja presença foi essencial na minha vida.*



Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Ana Rita Pereira (*in memoriam*).



## AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus por me dar forças e sabedoria para continuar, mesmo quando desistir se tornara uma opção proporcionada por momentos de tormenta.

Aos meus pais (Felippe Antônio Neto e Neuza Elaine de Oliveira), minhas irmãs (Anna Paula Oliveira Felippe e Emmily Oliveira Felippe) e sobrinhos(as) queridos(as) (Samara, Lucas, Sophia, Stella e Sarah), por todo alicerce construído, carinho, apoio, incentivo e paciência pela minha ausência nas diversas vezes em que queriam que eu estivesse com vocês e não pude estar.

A minha tia Cleide Aparecida Carvalho Rodrigues, professora universitária associada da Universidade Federal de Goiás, pedagoga, especialista em metodologia do ensino superior, mestra e doutora em educação e, sem dúvidas, a principal responsável pelo meu interesse em ingressar neste mestrado.

Aos colegas do mestrado (turma 2014) e (turma 2018), que no transpassar do tempo se tornaram amigos muito queridos, por quem tenho apreço e consideração, em especial aos amigos Gustavo Almeida e Silva, Douglas Xavier de Andrade, Thiago Felipe Domingos Dias Fernandes, Felipe Corrêa Silvano e Bruna Lays Felix.

Ao Prof. Dr. Paulo Eduardo Gonçalves Assis, meu primeiro orientador, o qual tenho grande admiração e respeito. Infelizmente não pude seguir com suas orientações e finalizar o curso com a turma de 2014, devido ao período difícil pelo qual eu estava passando naquela época, mas suas contribuições em minha formação foram muito relevantes e significativas.

A meu querido e admirável orientador, Prof. Dr. Julio Santiago Espinoza Ortiz, pela disposição e interesse em aceitar meu convite para ser meu novo orientador e, principalmente, pela presteza e contribuições durante todo o processo de produção final desta dissertação, sem os quais não seria possível chegar a este momento.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Agradeço a Sociedade Brasileira de Física (SBF), por ter oportunizado este mestrado e, também, a todos os professores e funcionários da UFG – Regional Catalão (Polo 02 – MNPEF), que se encontram inseridos neste programa e que tanto possuem a contribuir com os discentes.

Agradeço as direções e equipes das duas instituições de ensino onde trabalho (Escola Municipal Orozina Maria Martins e Colégio Estadual Dom Pedro II), pelo apoio constante durante essa jornada e, principalmente, pela disponibilização desses locais para a implementação do produto educacional desenvolvido e proporcionado por essa dissertação.

Por fim, ficam os meus cumprimentos e agradecimentos a todos(as) que participaram deste momento tão importante em minha vida.

## RESUMO

### **SIMETRIAS NA NATUREZA E LEIS DE CONSERVAÇÃO NA FÍSICA: abordagens relevantes e significativas para o 9º ano do ensino fundamental**

**José Neto de Oliveira**

Orientador: Prof. Dr. Julio Santiago Espinoza Ortiz

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física em Rede, da Unidade Acadêmica (UA) Instituto de Física, da Universidade Federal de Goiás (UFG) / Universidade Federal de Catalão (UFCAT) em implantação, como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Física. Área de concentração: Física na Educação Básica. Linha de Pesquisa: Física no Ensino Médio.

Desde os primórdios da civilização ocidental atual, na Grécia antiga, associamos as noções de beleza e harmonia ao conceito da simetria, mas é importante perceber que as equações matemáticas e as leis da natureza também podem apresentar característica de simetria com relação a certas transformações das grandezas físicas. Esta pesquisa apresenta um estudo sobre Simetria na Natureza e Leis de Conservação na Física, com abordagens relevantes e significativas para o último ano do ensino fundamental, feitas por meio de uma transposição didática, gerando um significativo produto educacional composto por quatro vídeos instrucionais explicativos e uma sequência didática, já alinhados tanto às competências gerais e específicas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), quanto às habilidades solicitadas pelo nosso Documento Curricular para Goiás (DC-GO). O objetivo desse trabalho foi apresentar o contexto histórico referente ao conceito da simetria, destacando as contribuições importantes e significativas de Évariste Galois e Amalie Emily Nöther; os tipos de simetrias observáveis; a relação entre simetria e certas transformações que levam às invariâncias dos objetos de estudo da Física; e, ainda, oferecer um produto educacional que ofereça, ao(a) professor(a) de Ciências ou de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, uma proposta de trabalho que aborde a Simetria e Leis de Conservação na Física. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica, com o uso de metodologia qualitativa, de natureza aplicada, com objetivo descritivo e exploratório, sendo que o produto educacional produzido amparou-se na teoria da aprendizagem significativa crítica. A aplicação do produto educacional ocorreu de forma presencial, embora tenha ocorrido em tempos de pandemia da COVID-19. Das observações realizadas, juntamente com os dados obtidos pelos questionários, demonstram a aceitação dos(as) estudantes e professores(as) frente às metodologias utilizadas e, ainda, confirmaram que houve de fato a aprendizagem. A partir do estudo empreendido, constatou-se que as atividades propostas se mostraram muito eficazes, tanto em relação ao cumprimento dos objetivos almejados, quando em sua capacidade de proporcionar interações entre os(as) estudantes, seja de forma individual ou mesmo em grupo. Ainda pode-se evidenciar que muitos(as) professores(as) farão uso desse material, seja em suas práticas educacionais ou mesmo para se aprimorarem.

**Palavras-chave:** Ensino de Física. Grupos de Simetria. Leis de Conservação. Simetria nos Fractais. Teoria de Grupos.

CATALÃO

2022

## ABSTRACT

### **SYMMETRIES IN NATURE AND CONSERVATION LAWS IN PHYSICS: relevant and meaningful approaches for 9th grade elementary school**

**José Neto de Oliveira**

Orientador: Prof. Dr. Julio Santiago Espinoza Ortiz

Abstract of master's dissertation submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, of the Special Academic Unit of Physics, of the Universidade Federal de Goiás (UFG) / Universidade Federal de Catalão (UFCAT) under implementation, as a requirement for obtaining the title of Mestre em Ensino de Física. Area of concentration: Physics in Basic Education. Line of Research: Physics in High School.

In the beginnings of current Western civilization, in ancient Greece, we have associated the notions of beauty and harmony with the concept of symmetry, but it is important to realize that mathematical equations and the laws of nature can also present a characteristic of symmetry in relation to certain transformations of quantities. physical. This research presents a study on Symmetry in Nature and Conservation Laws in Physics, with relevant and significant approaches for the last year of elementary school, made through a didactic transposition, generating a significant educational product composed of four explanatory instructional videos and a didactic sequence, already aligned with both the general and specific competences of the National Common Curricular Base (BNCC), as well as the skills requested by our Curriculum Document for Goiás (DC-GO). The objective of this work was to present the historical context regarding the concept of symmetry, highlighting the important and significant contributions of Évariste Galois and Amalie Emily Nöther; the types of observable symmetries; the relationship between symmetry and certain transformations that lead to the invariances of the objects of study of Physics; and, also, to offer an educational product that offers, to the Science or Mathematics teacher in the 9th year of Elementary School, a work proposal that addresses Symmetry and Conservation Laws in Physics. This is a bibliographical research, using a qualitative methodology, of an applied nature, with a descriptive and exploratory objective, and the educational product produced was supported by the theory of critical significant learning. The application of the educational product occurred in a face-to-face manner, although it took place in times of pandemic COVID-19. The observations made, together with the data obtained by the questionnaires, demonstrate the acceptance of the students and teachers regarding the methodologies used and, also, confirmed that there was, in fact, learning. From the study undertaken, it was found that the proposed activities proved to be very effective, both in terms of achieving the desired objectives and in their ability to provide interactions between students, either individually or in groups. It can still be seen that many teachers will use this material, either in their educational practices or even to improve themselves.

**Key-words:** Physics Teaching. Symmetry Groups. Conservation Laws. Symmetry in Fractals. Group Theory.

CATALÃO

2022

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 – Desenho de Galois feito pelo irmão Alfred, de memória, 16 anos depois de sua morte. . . . .	19
Figura 2.2 – As seis simetrias do triângulo equilátero. . . . .	23
Figura 2.3 – Como multiplicar simetrias. . . . .	23
Figura 2.4 – Amalie Emily Nöther ou mais conhecida como Emmy Noether (1882-1935). . . . .	25
Figura 3.1 – A beleza e simetria da Carambola. . . . .	28
Figura 3.2 – Alguns exemplos de simetrias encontradas na natureza. . . . .	29
Figura 3.3 – Beleza e harmonia na natureza: Borboleta (a), Couve-brócoli romanesco (b) e Flor de bromélia (c). . . . .	30
Figura 3.4 – Platão (a) e Aristóteles (b), retirados da obra A Escola de Atenas ou mais conhecida como a Academia de Platão, de Rafael Sanzio, ou Raffaello. . . . .	30
Figura 3.5 – Números triangulares e números quadrados. . . . .	31
Figura 3.6 – Representação do Homem Vitruviano, criada por Leonardo da Vinci em uma das páginas de seu dário. . . . .	32
Figura 3.7 – Simetrias: Planeta Júpiter (a), Galáxia NGC 3583 (b) e Estrela RS Puppis (c). . . . .	34
Figura 3.8 – Simetria Esférica em Protista Actinópode Radiolário (a) e Heliozoário (b). . . . .	35
Figura 3.9 – Exemplos de seres vivos que apresentam simetrias radiais. . . . .	36
Figura 3.10 – Diferentes planos de simetria bilateral. . . . .	37
Figura 3.11 – Translação, tendo $\vec{u}$ como vetor deslocamento. . . . .	39
Figura 3.12 – Simulação da isometria de translação realizada no GeoGebra. . . . .	40
Figura 3.13 – Ângulo: representação e orientação. . . . .	41
Figura 3.14 – Rotação num ponto fixo pertencente ao polígono. . . . .	42
Figura 3.15 – Rotação num ponto fixo fora do polígono. . . . .	42
Figura 3.16 – Identificação das seis rotações ( $60^\circ$ , $120^\circ$ , $180^\circ$ , $240^\circ$ , $300^\circ$ e $360^\circ$ ) num ponto fixo fora do polígono. . . . .	43
Figura 3.17 – Reflexão de um polígono em torno de um ponto fixo. . . . .	44
Figura 3.18 – Reflexão de um polígono em torno de uma reta. . . . .	45
Figura 3.19 – Reflexão de um ponto com deslizamento numa reta. . . . .	46
Figura 3.20 – Reflexão de um polígono com deslizamento numa reta. . . . .	47
Figura 3.21 – A famosa Samambaia de Barnsley, proposta por Michael Barnsley. . . . .	49
Figura 3.22 – Três iterações da Curva de Peano. . . . .	51
Figura 3.23 – Curva de Koch com 5 iterações. . . . .	52
Figura 3.24 – Ilha de Koch inscrita em uma circunferência, com uma, duas e seis iterações. . . . .	53
Figura 3.25 – Curva de Hilbert, dos níveis 0 a 6, e $n$ -ésimo nível, sendo que $n \rightarrow \infty$ . . . . .	54
Figura 3.26 – Curva do Dragão de Harter-Heighway, dos níveis 0 a 4, além dos níveis 10 e $n$ , com $n \rightarrow \infty$ . . . . .	55

Figura 3.27–Cinco Iterações do Triângulo de Sierpinski. . . . .	57
Figura 3.28–Quatro Iterações do Tapete de Sierpinski. . . . .	58
Figura 3.29–Esponja de Menger. . . . .	59
Figura 3.30–Esponja de Menger com três iterações. . . . .	59
Figura 3.31–Conjunto de Cantor com cinco iterações. . . . .	61
Figura 3.32–Fractal Tipo Dürer em formato pentagonal com três iterações. . . . .	62
Figura 3.33–Fractal hexagonal de Dürer com quatro iterações. . . . .	62
Figura 3.34–Fractal Octogonal de Dürer com três iterações. . . . .	63
Figura 3.35–Fractal Circular de Dürer com três iterações. . . . .	64
Figura 3.36–Fractal Árvore Bifurcada com sete iterações, ângulo de bifurcação de 120° e fator de redução $\frac{1}{2}$ . . . . .	65
Figura 3.37–Fractal Árvore Bifurcada com sete iterações, vários ângulos de bifurcação e fator de redução 1, 5. . . . .	66
Figura 3.38–Criação de Árvores Pitagóricas com 6 iterações. . . . .	67
Figura 3.39–Árvore Pitagórica com triângulo equilátero e Árvore Pitagórica com triângulo de lados $\geq$ a base (fractal não limitado), ambas após 6 iterações. . . . .	68
Figura 3.40–Órbitas e o Expoente de Lyapunov. . . . .	70
Figura 3.41–Fractais de Lyapunov. . . . .	70
Figura 3.42–Conjunto de Julia, com quatro valores distintos para $c$ . . . . .	71
Figura 3.43–Representação gráfica da Curva Cardioide. . . . .	72
Figura 3.44–Conjunto de Mandelbrot. . . . .	73
Figura 3.45–Conjunto de Mandelbrot: (a) com fator de ampliação $M = 10^x$ , com $x \in \mathbb{Z}$ e $-1 \leq x \leq 14$ e (b) para $z_{n+1} = z_n^k + c$ , com $k = 3$ e $k = 4$ . . . . .	74
Figura 3.46–Molde de Pulmão Humano. . . . .	75
Figura 3.47–Movimento <i>Browniano</i> em 2 dimensões. . . . .	76
Figura 3.48–Modelos de plantas gerados por Sistema-L. . . . .	77
Figura 3.49–Exemplo de estruturas criadas utilizando movimento Browniano. . . . .	77
Figura 3.50–Imagem congelada de todas partículas geradas em uma simulação de fogos de artifício. . . . .	78
Figura 3.51–Tipo de difusão dependente do valor de $\mu$ , em $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$ . . . . .	79
Figura 3.52–Caminhada aleatória com 1000 passos em duas dimensões, com direção angular uniformemente distribuída. . . . .	80
Figura 3.53–Voos e caminhadas de Lévy para diferentes expoentes $\mu$ associados a um expoente de Hurst $H$ . . . . .	81
Figura 3.54–Exemplo de 50 passos, em duas dimensões, de: (a) um voo de Lévy e (b) um voo do tipo movimento <i>browniano</i> . . . . .	82
Figura 3.55–Gráficos, em função do tempo, de um objeto lançado verticalmente para cima, a partir do solo: posição ( $\vec{y}$ ), velocidade ( $\vec{v}_y$ ) e aceleração ( $\vec{g}$ ). . . . .	84

Figura 3.56–Sir Isaac Newton: (a) Newton com 46 anos de idade e (b) Famosa macieira no quintal da casa onde ele nasceu. . . . .	86
Figura 3.57–Deslocamento de uma partícula de massa $m$ , submetida a ação de uma força constante $\vec{F}$ . . . . .	94
Figura 3.58–Cálculo do trabalho $W$ realizado por uma força $\vec{F}_x$ na direção de $x$ enquanto uma partícula se move de $x_0$ para $x$ . . . . .	95
Figura 3.59–Bloco de massa $m$ , inicialmente em $x_A$ , preso a uma mola. . . . .	96
Figura 3.60–O pêndulo de Newton e a conservação do momentum linear. . . . .	100
Figura 3.61–Rotação da bailarina e a conservação do momentum angular. . . . .	101
Figura 4.1 – Representação gráfica do exemplo de aplicação $f : E \rightarrow F$ apresentado para a Definição 15. . . . .	111
Figura 5.1 – Facilitadores da Aprendizagem Significativa: Princípios Programáticos e Estratégias. . . . .	121
Figura 5.2 – Um mapa conceitual para a aprendizagem significativa crítica (subversiva). . . . .	124
Figura 8.1 – Mês de aniversário dos participantes da pesquisa. . . . .	136
Figura 8.2 – Verificação sobre o conceito inicial de Simetria para os(as) participantes da pesquisa. . . . .	137
Figura 8.3 – Questão nº 6 (Questionário I): respostas obtidas sobre o conceito de simetria. . . . .	140
Figura 8.4 – Questão nº 5 (Questionário II): respostas obtidas sobre o nome correto da representação geométrica identificada na Espiral de Fibonacci, considerada agradável à contemplação humana. . . . .	144
Figura 8.5 – Questão nº 6 (Questionário III): respostas obtidas sobre qual a forma de obtenção de energia seria a mais indicada para ser implantada no município em questão, de modo a causar o menor impacto ambiental. . . . .	148
Figura 8.6 – Questão nº 6 (Questionário IV): Elevação da compreensão do princípio da conservação de energia mecânica pelos(as) participantes dessa pesquisa. . . . .	152
Figura 8.7 – Questão nº 9 (Questionário VI): Elevação da compreensão do conceito de simetria pelos(as) participantes. . . . .	155
Figura 8.8 – Questão nº 11 (Questionário VI): Qualidades indispensáveis a um(a) bom(oa) professor(a). . . . .	156
Figura 8.9 – Questão nº 13 (Questionário VI): (a) Você já pensou em seguir carreira científica? (b) Quais? . . . . .	157
Figura 8.10–Atuação dos(as) professores(as) por rede de ensino, instituições de ensino atendidas e abrangência dessa pesquisa. . . . .	159
Figura 8.11–Gráfico comparativo sobre quais disciplinas ministradas, pelos(as) professores(as) pesquisados, antes de 2021 e em 2021. . . . .	160
Figura 8.12–Considerações finais dos(as) professores(as) participantes. . . . .	162

Figura A.1 – Termo de Consentimento e Anuência devidamente carimbado e assinado pelo diretor da Escola Municipal Orozina Maria Martins. . . . .	231
Figura B.1 – Termo de Consentimento e Anuência devidamente carimbado e assinado pelo diretor do Colégio Estadual Dom Pedro II. . . . .	232

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Tabela de multiplicação para as seis simetrias no triângulo equilátero. . .	24
Tabela 3.1 – Comprimento da aresta ( $a_n$ ) e quantidade de cubos: retirados ( $CR_n$ ), restantes ( $CS_n$ ) e total ( $CT_n$ ), na construção da Esponja de Menger. . .	60
Tabela 3.2 – Árvore Bifurcada com fator de redução de $\frac{1}{2}$ e ângulo de bifurcação de 120°: Segmentos (Gerados e Totais), Comprimento (Segmento e Curva) e Expressão Geral para cada iteração. . . . .	66
Tabela 4.1 – Tabela de operação entre dois elementos do conjunto $D = \{a, b, c\}$ . . .	106
Tabela 4.2 – Tabela de operações entre os dois elementos do conjunto $H = \{a, b\}$ . . .	107
Tabela 4.3 – Os quatro tipos de Elementos de Simetrias e Operações (para Simetria Molecular). . . . .	116
Tabela 4.4 – Tabela de multiplicação para as seis simetrias do grupo $S_3$ . . . . .	119

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>CONTEXTO HISTÓRICO . . . . .</b>	<b>16</b>
2.1	ÉVARISTE GALOIS E A TEORIA DE GRUPOS . . . . .	18
2.2	AMALIE EMILY NÖTHER (EMMY NOETHER) E SEU TEOREMA QUE LIGA AS LEIS DE CONSERVAÇÃO COM AS SIMETRIAS . . .	24
<b>3</b>	<b>SIMETRIA E LEIS DE CONSERVAÇÃO NA FÍSICA . . . . .</b>	<b>28</b>
3.1	SIMETRIAS NA NATUREZA . . . . .	29
3.1.1	<b>Simetria Esférica . . . . .</b>	<b>35</b>
3.1.2	<b>Simetria Radial . . . . .</b>	<b>35</b>
3.1.3	<b>Simetria Bilateral . . . . .</b>	<b>37</b>
3.2	SIMETRIAS NA MATEMÁTICA . . . . .	37
3.2.1	<b>Translação . . . . .</b>	<b>39</b>
3.2.2	<b>Rotação . . . . .</b>	<b>41</b>
3.2.3	<b>Reflexão . . . . .</b>	<b>44</b>
3.2.4	<b>Reflexão Transladada . . . . .</b>	<b>46</b>
3.3	GEOMETRIA DOS FRACTAIS E SUA SIMETRIA DE AUTOSSEME- LHANÇA . . . . .	47
3.3.1	<b>Fractais definidos por sistemas de funções iteradas . . . . .</b>	<b>50</b>
3.3.1.1	Fractais pela Fronteira . . . . .	50
3.3.1.1.1	<i>Curva de Peano . . . . .</i>	<i>50</i>
3.3.1.1.2	<i>Curva de Koch . . . . .</i>	<i>52</i>
3.3.1.1.3	<i>Ilha de Koch . . . . .</i>	<i>52</i>
3.3.1.1.4	<i>Curva de Hilbert . . . . .</i>	<i>53</i>
3.3.1.1.5	<i>Curva do Dragão de Harter-Heighway . . . . .</i>	<i>55</i>
3.3.1.2	Fractais por Remoção . . . . .	56
3.3.1.2.1	<i>Triângulo de Sierpinski . . . . .</i>	<i>56</i>
3.3.1.2.2	<i>Tapete de Sierpinski ou Quadrado de Sierpinski . . . . .</i>	<i>57</i>
3.3.1.2.3	<i>Esponja de Menger . . . . .</i>	<i>58</i>
3.3.1.2.4	<i>Conjunto de Cantor . . . . .</i>	<i>60</i>
3.3.1.3	Fractais Tipo Dürer . . . . .	61
3.3.1.3.1	<i>Fractal Tipo Dürer - pentágono com três iterações . . . . .</i>	<i>61</i>
3.3.1.3.2	<i>Fractal Tipo Dürer - hexágono com quatro iterações . . . . .</i>	<i>62</i>
3.3.1.3.3	<i>Fractal Tipo Dürer - octógono com três iterações . . . . .</i>	<i>63</i>
3.3.1.3.4	<i>Fractal Tipo Dürer - circular com três iterações . . . . .</i>	<i>63</i>

3.3.1.4	Fractais Tipo Árvore . . . . .	64
3.3.1.4.1	Árvore Bifurcada . . . . .	64
3.3.1.4.2	Árvore Pitagórica . . . . .	67
3.3.2	<b>Fractais definidos por uma relação de recorrência</b> . . . . .	68
3.3.2.1	Fractal de Lyapunov . . . . .	69
3.3.2.2	Conjunto de Julia . . . . .	71
3.3.2.3	Conjunto de Mandelbrot . . . . .	72
3.3.3	<b>Fractais aleatórios</b> . . . . .	75
3.3.3.1	<i>Voos e Caminhadas de Lévy</i> . . . . .	79
3.4	<b>MECÂNICA CLÁSSICA NEWTONIANA</b> . . . . .	83
3.4.1	<b>Leis de Newton</b> . . . . .	85
3.4.1.1	Primeira lei de Newton . . . . .	88
3.4.1.2	Segunda lei de Newton . . . . .	89
3.4.1.3	Terceira lei de Newton . . . . .	91
3.4.2	<b>Teoremas de conservação</b> . . . . .	93
3.4.2.1	Conservação de Energia . . . . .	94
3.4.2.1.1	<i>Trabalho de uma Força Constante</i> . . . . .	94
3.4.2.1.2	<i>Trabalho de uma Força Variável</i> . . . . .	95
3.4.2.1.3	<i>Trabalho Total</i> . . . . .	97
3.4.2.1.4	<i>Teorema do Trabalho-Energia</i> . . . . .	97
3.4.2.1.5	<i>Conservação da Energia Mecânica</i> . . . . .	99
3.4.2.2	Conservação do momentum linear . . . . .	99
3.4.2.3	Conservação do momentum angular . . . . .	100
3.5	<b>MECÂNICA LAGRANGIANA</b> . . . . .	101
4	<b>TEORIA DE GRUPOS</b> . . . . .	105
4.1	<b>DEFINIÇÕES FUNDAMENTAIS</b> . . . . .	105
4.1.1	<b>Conjuntos e Operações</b> . . . . .	106
4.1.2	<b>Aplicações</b> . . . . .	110
4.1.2.1	Tipos de Aplicação Regular . . . . .	111
4.2	<b>GRUPO</b> . . . . .	112
4.2.1	<b>Primeiras Definições</b> . . . . .	112
4.2.2	<b>Exemplos de Grupos</b> . . . . .	113
4.2.2.1	Conjunto $\mathbb{Z}$ ou em notação $(\mathbb{Z}, +)$ . . . . .	113
4.2.2.2	Conjunto $(\mathbb{Q}, +)$ , $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}, +)$ . . . . .	113
4.2.2.3	Conjunto $\mathbb{Q}^*$ ou em notação $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ . . . . .	113
4.2.2.4	Conjunto $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ e $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ . . . . .	114
4.2.2.5	O conjunto das matrizes $M_n(\mathbb{R})$ munido da operação de adição . . . . .	114
4.2.2.6	Vetores no $\mathbb{R}^3$ . . . . .	114
4.2.2.7	Reflexão Espacial . . . . .	115

4.2.3	<b>Isomorfismo e Homomorfismo de Grupos</b> . . . . .	115
4.2.3.1	Isomorfismo . . . . .	115
4.2.3.2	Homomorfismo . . . . .	115
4.3	<b>GRUPOS DE SIMETRIAS E PERMUTAÇÕES</b> . . . . .	116
4.3.1	<b>Operações de Simetria</b> . . . . .	116
4.3.2	<b>Grupo Simétrico ou Grupo de Permutações</b> . . . . .	116
4.3.3	<b>O Grupo <math>S_3</math></b> . . . . .	118
<b>5</b>	<b>TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA</b> . . . . .	<b>120</b>
5.1	APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA . . . . .	120
5.2	APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E O ENSINO DE CIÊNCIAS . . . . .	121
5.3	APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA NO ENSINO DE FÍSICA . . . . .	122
5.4	APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA CRÍTICA . . . . .	123
<b>6</b>	<b>METODOLOGIA</b> . . . . .	<b>125</b>
6.1	DA PESQUISA . . . . .	125
6.2	DO CONTEXTO DA PESQUISA . . . . .	127
<b>7</b>	<b>PRODUTO EDUCACIONAL</b> . . . . .	<b>131</b>
<b>8</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b> . . . . .	<b>135</b>
8.1	DA AULA 1 (AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA E EXIBIÇÃO DO VÍDEO 1) . . . . .	135
8.1.1	Da Avaliação Diagnóstica - QUESTIONÁRIO V (APÊNDICE I) . . . . .	135
8.1.2	Da exibição do Vídeo 1 (Contexto Histórico da Simetria, Évariste Galois e Emmy Noether) . . . . .	138
8.2	DA AULA 2 (QUESTIONÁRIO I - APÊNDICE E) . . . . .	138
8.3	DA AULA 3 (EXIBIÇÃO E DISCUSSÃO DO VÍDEO 2) . . . . .	142
8.4	DA AULA 4 (QUESTIONÁRIO II - APÊNDICE F) . . . . .	142
8.5	DA AULA 5 (EXIBIÇÃO E DISCUSSÃO DO VÍDEO 3) . . . . .	145
8.6	DA AULA 6 (QUESTIONÁRIO III - APÊNDICE G) . . . . .	146
8.7	DA AULA 7 (EXIBIÇÃO E DISCUSSÃO DO VÍDEO 4) . . . . .	149
8.8	DA AULA 8 (QUESTIONÁRIO IV (APÊNDICE H) E QUESTIONÁRIO VI (APÊNDICE J) . . . . .	150
8.8.1	Do QUESTIONÁRIO IV (APÊNDICE H) . . . . .	150
8.8.2	Do QUESTIONÁRIO VI - <i>FEEDBACK</i> DO(A) ALUNO(A) REFERENTE AO PRODUTO EDUCACIONAL (APÊNDICE J) . . . . .	154
8.9	DO QUESTIONÁRIO VII - <i>FEEDBACK</i> DO(A) PROFESSOR(A) DE MATEMÁTICA E/OU CIÊNCIAS DE EDUCAÇÃO BÁSICA REFERENTE AO PRODUTO EDUCACIONAL (APÊNDICE K) . . . . .	158
<b>9</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>164</b>

REFERÊNCIAS . . . . .	166
APÊNDICE A – ORIENTAÇÕES PARA PROCEDIMENTOS EM PESQUISAS COM QUALQUER ETAPA EM AMBIENTE VIRTUAL . . . . .	177
APÊNDICE B – RESOLUÇÃO CEE/CP Nº 18/2020 . . . . .	181
APÊNDICE C – DECRETO MUNICIPAL Nº 1329/2021 . . . . .	183
APÊNDICE D – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TCLE (PROFESSORES(AS))	185
APÊNDICE E – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TCLE (ALUNOS(AS)) . . . . .	189
APÊNDICE F – TERMO DE CONSENTIMENTO E ANUÊN- CIA (ESCOLA MUNICIPAL OROZINA MA- RIA MARTINS) . . . . .	193
APÊNDICE G – TERMO DE CONSENTIMENTO E ANUÊN- CIA (COLÉGIO ESTADUAL DOM PEDRO II) . . . . .	194
APÊNDICE H – QUESTIONÁRIO I (SIMETRIAS: CONTEXTO HISTÓRICO, ÉVARISTE GALOIS E EMMY NOETHER) . . . . .	195
APÊNDICE I – QUESTIONÁRIO II (SIMETRIAS NA NA- TUREZA E NA MATEMÁTICA) . . . . .	200
APÊNDICE J – QUESTIONÁRIO III (FÍSICA, ENERGIA, TRABALHO E ENERGIA MECÂNICA) . . . . .	209
APÊNDICE K – QUESTIONÁRIO IV (CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA) . . . . .	213
APÊNDICE L – QUESTIONÁRIO V - AVALIAÇÃO DIAG- NÓSTICA (PRODUTO EDUCACIONAL) . . . . .	217
APÊNDICE M – QUESTIONÁRIO VI - <i>FEEDBACK</i> DO(A) ALUNO(A) (PRODUTO EDUCACIONAL) . . . . .	223

	<b>APÊNDICE N – QUESTIONÁRIO VII - <i>FEEDBACK</i> DO(A) PROFESSOR(A) DE MATEMÁTICA E/OU CIÊNCIAS DE EDUCAÇÃO BÁSICA (PRODUTO EDUCACIONAL) . . . . .</b>	<b>226</b>
	<b>APÊNDICE O – PRODUTO EDUCACIONAL - ACESSOS .</b>	<b>230</b>
O.1	<i>Link</i> de Acesso (Versão Completa) . . . . .	230
O.2	<i>Website</i> PREZI . . . . .	230
O.3	O Produto Educacional em Anexo . . . . .	230
	<b>ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO E ANUÊNCIA DEVIDAMENTE CARIMBADO E ASSINADO (ESCOLA MUNICIPAL OROZINA MARIA MARTINS) . . . . .</b>	<b>231</b>
	<b>ANEXO B – TERMO DE CONSENTIMENTO E ANUÊNCIA DEVIDAMENTE CARIMBADO E ASSINADO (COLÉGIO ESTADUAL DOM PEDRO II) . . . . .</b>	<b>232</b>
	<b>ANEXO C – O PRODUTO EDUCACIONAL . . . . .</b>	<b>233</b>

Os Programas de Pós-Graduação *stricto sensu* em funcionamento na Universidade Federal de Catalão (UFCAT), em virtude de procedimentos técnicos relacionados à CAPES, continuam provisoriamente vinculados à Universidade Federal de Goiás (UFG), por isso, todos os elementos pré-textuais do trabalho apresentado estão identificados como Universidade Federal de Goiás/Universidade Federal de Catalão em implantação, em função da migração da BDTD ter ocorrido a partir de 16 de agosto de 2021, assim como pelo fato das pesquisas e produtos serem realizados na UFCAT.

## 1 INTRODUÇÃO

Desde os primórdios da civilização ocidental atual, na Grécia antiga, associamos as noções de beleza e harmonia ao conceito da simetria, mas é importante perceber que as equações matemáticas e as leis da natureza também podem apresentar característica de simetria com relação a certas operações de transformações. Como a Física é uma ciência experimental sobre a qual todas as outras ciências naturais e de engenharia são construídas, cabe ao(a) físico(a) observar os fenômenos naturais na tentativa de encontrar padrões e os princípios que relacionam esses fenômenos. Tais padrões são denominados teorias, leis ou princípios físicos. Todos os avanços tecnológicos modernos têm sua origem direta na física básica e a boa compreensão de seus conceitos essenciais oferece uma base sólida para o desenvolvimento de conhecimentos avançados em todas as ciências.

A física moderna admite, entre outras, as seguintes leis de conservação (para as quais nunca se observou uma violação: de energia, do momento linear, do momento angular e de cargas. Na matemática, o termo lei de conservação, por analogia, é usado para indicar qualquer quantidade que se mantenha inalterada com o tempo em modelo matemático.

A teoria de grupos é um ramo da matemática que estuda as estruturas algébricas, conhecidas como grupos, e deve ser considerada ao se lidar com simetrias e leis de conservação. Tais grupos são usados geralmente para capturar simetrias internas de estruturas, associada com algumas propriedades invariantes que são preservadas por um conjunto de transformações que, juntamente com a sua operação de composição de transformação, formam o grupo de simetrias.

As leis de conservação e os princípios de simetria da física também são válidos para todos os fenômenos científicos e para muitos aspectos da vida cotidiana. Entretanto, apesar da simetria possuir um papel fundamental no entendimento das leis de conservação na Física, seu ensino não faz parte do currículo escolar da educação básica e raramente é abordado nos anos iniciais dos cursos superiores de ciências exatas. Para um(a) estudante da educação básica, não é evidente que além dos objetos, também as equações matemáticas e as leis da natureza possam apresentar característica de simetria com relação a certas operações de transformações. Uma lei de conservação estabelece que determinada propriedade mensurável de um sistema físico isolado é invariante no tempo. Cada lei de conservação é uma identidade matemática que se aplica ao sistema.

Desse modo, este trabalho objetiva: (i) perceber que as equações matemáticas e as leis da natureza também podem apresentar característica de simetria com relação a certas transformações, levando, assim, às invariâncias dos objetos de estudo da Física, para que se possa entender as leis de conservação; (ii) destacar as contribuições importantes e significativas de dois grandes nomes que revolucionaram a compreensão da simetria e suas aplicabilidades numa melhor compreensão do mundo físico: Évariste Galois (1811-1832)

e Amalie Emily Nöther (1882-1935); *(iii)* oferecer, ao(a) professor(a) de Ciências ou de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, uma proposta de trabalho que aborde a Simetria e Leis de Conservação na Física; *(iv)* possibilitar, ao estudante dessa fase, um acesso inicial ao ensino de simetria com relação a certas operações de transformações, fazendo com que a aprendizagem se desenvolva de forma interessante e prazerosa; *(v)* despertar, no(a) estudante do último ano do ensino fundamental, um maior interesse pela disciplina de Física, servindo como um agente motivador, influenciando, de forma positiva, na escolha de prosseguimentos de estudos em áreas científicas.

Este trabalho, organizado em formato de dissertação, dispõe inicialmente de um capítulo (capítulo 2) tanto para se tratar do contexto histórico referente ao conceito da simetria, cujo início data-se por volta de 9000 anos antes da era comum, quanto para se enfatizar dois importantes personagens que tanto contribuíram para nossos conhecimentos de hoje: (1) Évariste Galois e a Teoria de Grupos e (2) Emmy Noether e seu teorema que liga as leis de conservação com as simetrias. O terceiro capítulo é destinado à simetria e leis de conservação na Física, abordando as simetrias na natureza, as simetrias na matemática, a geometria dos fractais e sua simetria de autossemelhança, a mecânica clássica newtoniana e, ainda, a mecânica lagrangiana. A dissertação segue com o seu quarto capítulo destinado à Teoria de Grupos, contendo as definições fundamentais, grupos de simetrias e permutações.

O quinto capítulo destina-se à Teoria da Aprendizagem Significativa, abordando sua influência no ensino de Ciências, no ensino de Física e finalizando com a Teoria da Aprendizagem Significativa Crítica, de Marco Antônio Moreira, que fora a abordagem educacional escolhida tanto para elaboração, quanto para implementação do Produto Educacional. A dissertação prossegue com o seu sexto capítulo explicitando os aspectos metodológicos do estudo, tanto da pesquisa em si, quanto de seu contexto e do produto acadêmico produzido. No sétimo capítulo tem-se a apresentação do Produto Educacional (PE) produzido e implementado, bem como de cada elemento de sua composição: sequência didática (SD), vídeos instrucionais e questionários.

Na sequência, o oitavo capítulo oferece os Resultados e Discussões, onde são analisados os dados (após crítica, apuração e tabulação) obtidos durante a implementação do PE e, ainda, discutidos os seus resultados. O encerramento ocorre no nono capítulo, destinado ao registro das Considerações Finais, onde encontra-se o relato final, após análise e discussões dos dados coletados, a união de ideias e fechamento das questões apresentadas na introdução desse trabalho, verificando que os objetivos apresentados anteriormente foram alcançados.

## 2 CONTEXTO HISTÓRICO

De acordo com Stewart (2012), na região hoje conhecida como Iraque correm dois rios muito importantes para a história das civilizações, o rio Tigre e o Eufrates. Nascendo nas montanhas do leste da Turquia, percorrem centenas de quilômetros de terras férteis e se fundem em um só corpo aquoso cuja foz se abre no golfo Pérsico. A sudoeste são limitados pelas terras desérticas do planalto arábico e a nordeste pelas encostas inóspitas das montanhas de Zagros e Anti-Taurus. Há cerca de quatro mil anos atrás, esses rios seguiam cursos próximos aos que têm hoje, passando pelas antigas terras da Assíria, da Acádia e da Suméria.

Os arqueólogos consideram a região entre os rios Tigre e o Eufrates como sendo a Mesopotâmia, palavra grega que significa entre dois rios, considerando-a como o berço da civilização. Tais rios traziam água para as planícies, fertilizando-as. Devido a abundância vegetal, horda de cervos e carneiros eram atraídas e, conseqüentemente, o aparecimento de predadores, entre eles caçadores humanos conhecidos como caçadores-coletores. Devido a grande fertilidade e possibilidade de caça, a planície mesopotâmica tornara-se responsável pela atração de várias tribos nômades.

Por volta de 9000 AEC<sup>1</sup>, as colinas próximas do crescente fértil, um pouco a norte, testemunharam o nascimento da agricultura, tecnologia revolucionária responsável por duas mudanças fundamentais na sociedade humana: a necessidade de permanência numa localidade para cuidar das plantações e a possibilidade de alimentar grandes populações. Essa combinação levou, como aponta Stewart (2012), à invenção das cidades, tanto que na Mesopotâmia ainda encontram-se remanescentes arqueológicos das primeiras grandes cidades-estado do mundo: Nínive, Nimrud, Nippur, Uruk, Lagash, Eridu, Ur e, principalmente, Babilônia (terra dos Jardins Suspensos e da Torre de Babel).

Há quatro mil anos atrás, a revolução da agricultura levou a uma inevitável sociedade organizada, com seus governos, burocracia e poder militar. Entre 2000 e 500 AEC, a civilização babilônica floresceu às margens do rio Eufrates. Seu nome vinha da capital, mas possuía um sentido bem mais abrangente, pois o termo babilônico inclui as culturas da Suméria e da Acádia. Stewart (2012) ressalta que a primeira menção à Babilônia que se tem conhecimento, ocorreu numa tábua de argila de Sargão de Acádia datada de aproximadamente 2250 AEC, embora a origem do povo babilônico provavelmente remonte a cerca de 2 ou 3 mil anos.

Não se conhece muito sobre as origens da civilização, embora muitos aspectos atuais provavelmente deve-se aos antigos babilônicos. Especificamente, eles eram astrônomos

<sup>1</sup> AEC e EC é a uma sigla que significa respectivamente Antes da Era Comum e Era Comum, para definir a localização de um determinado evento na linha do tempo. Terminologias utilizadas pelos judeus para evitar que a concepção de tempo seja centrada no ideal cristão.

experientes, com contribuições significativas como: as doze constelações do zodíaco, os 360 graus do círculo, o minuto sendo composto por 60 segundos e a hora de 60 minutos. Os babilônicos precisavam dessas unidades de medidas para praticar a astronomia e, por essa razão, tornaram-se muito experientes em conhecimentos matemáticos.

A cultura babilônica é bem conhecida porque seus registros foram escritos em argila úmida em escrita cuneiforme<sup>2</sup>. Quando o barro endurecia sob o sol da Babilônia, essas inscrições se tornavam muito resistentes. Caso o local pegasse fogo, onde eram guardadas as tábuas de argila, o calor a transformaria em cerâmica, garantindo a preservação da escrita. Segundo Stewart (2012), um revestimento final com areia do deserto acabou preservando os registros de forma definitiva, tornando a Babilônia o local responsável tanto pelo início da história escrita, quanto da compreensão inicial da simetria pela humanidade.

“[...] Por isso a Babilônia se tornou o local do início da história escrita. É aí também que começa a história da compreensão da simetria pela humanidade - e sua incorporação em uma teoria sistemática e quantitativa, um “cálculo” de simetria tão poderoso quanto o cálculo de Isaac Newton e de Gottfried Wilhelm Leibniz. [...] até onde a história escrita nos revela, foram os matemáticos babilônicos que puseram a humanidade no caminho da simetria, com profundas implicações na maneira de se ver o mundo físico.” (STEWART, 2012, p. 19-20).

Apesar da matemática se fundamentar em números, ela não se limita apenas a este fato. Os babilônicos dispunham de uma notação eficiente fazendo uso do sistema de numeração sexagesimal (baseado em potências de 60), conheciam os triângulos retângulos e tinham algo semelhante ao conhecido teorema de Pitágoras. Usavam a matemática para o propósito da astronomia, talvez por razões agrícolas e religiosas, e, ainda, para tarefas de comércio e taxaço. Assim, foram os matemáticos babilônicos que começaram a entender como resolver as equações.

“Equações são a forma como os matemáticos processam o valor de uma quantidade desconhecida a partir de evidências circunstanciais. [...] é uma espécie de quebra-cabeça centrado num número. Não sabemos qual é ele, mas temos algumas informações úteis a seu respeito. Nossa tarefa é resolver o quebra-cabeça encontrando a incógnita.” (STEWART, 2012, p. 20).

Desde então a matemática contou com inúmeras contribuições importantes e significativas de diversos estudiosos do assunto, mas aqui se dará um destaque especial a dois

<sup>2</sup> Escrita Cuneiforme foi a escrita criada pelos sumérios por volta de 3500 a.C., produzida com o auxílio de objetos em formato de cunha. Como uma das ferramentas mais utilizadas nessa escrita era a argila, foi bastante útil em questões que envolviam a administração das terras, pois era possível controlar registros, fazer cálculos e transações comerciais.

grandes nomes que revolucionaram a compreensão da simetria e suas aplicabilidades numa melhor compreensão do mundo físico: (2.1) Évariste Galois (1811-1832), revolucionário político e matemático obsessivo, criou uma linguagem que descreve a simetria nas estruturas matemáticas, deduzindo as suas consequências e (2.2) Amalie Emily Nöther (1882-1935), matemática germânica e grande algebrista, provou dois teoremas que são essenciais para a teoria da relatividade, resolvendo o problema da conservação da energia que é conhecido pelos físicos como o “teorema de Noether”.

A questão algébrica sobre as soluções de equações matemáticas desencadeou a criação da teoria de grupos e simetrias. De acordo com Stewart (2012), a teoria de grupos é uma linguagem usada atualmente tanto na matemática pura quanto na aplicada, na qual regula a formação dos padrões do mundo natural. Este autor define simetria como um tipo especial de transformação, uma maneira de mover um objeto e ainda se preservar a estrutura ou alguma característica desse objeto. Ele ainda evidencia que a simetria possui um papel central nas fronteiras da física, no mundo quântico e na relatividade, podendo promover uma unificação matemática dos principais campos da física moderna. Essa ideia é básica na atual compreensão científica do Universo e suas origens.

Na teoria da relatividade, de Albert Einstein (1879-1955), encontra-se o princípio de que as leis da física devem ser as mesmas em todos os lugares e tempos. Nesse sentido, as leis devem ser simétricas em relação ao movimento e à passagem do tempo. A física quântica nos diz que tudo no Universo é construído a partir de uma coleção de partículas fundamentais, com comportamentos regidos por equações matemáticas (leis da natureza) que também estão associadas a uma simetria. Mesmo que partículas se transformem em outras diferentes, essas transformações também não alteram as leis da física. Segundo Stewart (2012, p. 10), “Ideias extraordinariamente úteis podem sair de considerações apenas abstratas - algo a que o físico Eugene Wigner se refere como ‘a eficiência não razoável da matemática nas ciências naturais’”.

## 2.1 ÉVARISTE GALOIS E A TEORIA DE GRUPOS

Galois nasceu em 25 de outubro de 1811, em *Bourg-la-Reine*, um pequeno vilarejo na periferia de Paris. Atualmente é um subúrbio do departamento de *Hau-de-Siene*, na interseção entre as rodovias N20 e D60, valendo ressaltar que a D60 possui o nome de Galois. Em 1792, conforme aponta Stewart (2012, p. 122), o vilarejo de *Bourg-la-Reine* foi rebatizado como *Bourg-l'Égalité*, nome que refletia a agitação política e a ideológica do período, tanto que a “Cidade da Rainha” tinha dado lugar à “Cidade da Igualdade”, mas logo em 1812, o nome voltara a ser *Bourg-la-Reine*, embora a Revolução ainda estava aparente.

Seu pai, Nicolas-Gabriel Galois, era republicano e líder do Partido Liberal da aldeia, *Liberté* na cidade de *Égalité*, cuja principal política era a abolição da monarquia. Num

estranho acordo firmado em 1814, o rei Luís XVIII voltou ao trono e Nicolas-Gabriel se tornou o prefeito da cidade. A mãe, Adelaide-Marie, nasceu na família Démante, lia fluentemente em latim e transmitiu sua educação clássica a seu filho, educando-o em sua casa nos primeiros doze anos de vida.

Aos 12 anos de idade, Galois entrou para o Colégio *Louis-le-Grand*, uma escola preparatória, ingressando diretamente para a quarta classe, devido à elevada educação que possuía. Iniciou sua trajetória escolar presenciando a expulsão de cem alunos considerados pretensos revolucionários por se recusarem a cantar na capela escolar. Nos dois primeiros anos de estudo, recebeu o seu primeiro prêmio em latim, mas isso não o manteve interessado, pois sua atenção havia se voltado para a matemática, ao ler um livro de geometria intitulado *Elementos de Geometria*, escrito por Legendre. Tal leitura, segundo Stewart (2012, p. 123), “[...] equivale a um estudante de física, hoje, começar seus estudos lendo os textos especializados de Einstein”.



Figura 2.1 – Desenho de Galois feito pelo irmão Alfred, de memória, 16 anos depois de sua morte.

Fonte: Marcolin (2011).

Seu gênio matemático fora se manifestando, deixando de lado as obras clássicas e a retórica, embora fosse desleixado na escola, considerado excêntrico por seus professores e, inclusive, tendo seus trabalhos escolares de rotina considerados medíocres. Nos anos seguintes dedicou seus talentos à matemática, desinteressando-se pela escola e criando problemas com professores e colegas. Aos 16 anos de idade, Galois percebera que era um gênio matemático e, por este motivo, quis ingressar e continuar seus estudos em uma das mais prestigiosas instituições da França, a *École Polytechnique*, considerada, segundo Stewart (2012, p. 123), “[...] a incubadora dos matemáticos franceses.”. Infelizmente foi recusado devido à sua falta de preparo sistemático e não ser compreendido.

Ainda aos 16 anos, expôs suas descobertas fundamentais num artigo sobre a teoria das equações e equações contínuas, pedindo a seu amigo Cauchy que o apresentasse à Academia. Mas infelizmente, Cauchy perdeu o artigo. Assim, Galois passou a odiar não só os examinadores como também os acadêmicos. Mais um fracasso na sua tentativa de entrar na *École Polytechnique*. Em 1829, o então prefeito da localidade, Nicolas, pai de Galois, envolveu-se numa desagradável disputa política que irritara o padre do vilarejo. Por esse motivo, conforme Stewart (2012), esse padre fez circular comentários maliciosos sobre os parentes de Nicolas e falsificou sua assinatura em alguns documentos, fazendo com que Nicolas, em profundo desespero, cometesse suicídio por asfixia em 2 de julho deste mesmo ano.

Apesar dos golpes que sofrera, Galois entrou na *École Préparatoire* (atualmente como o nome de *École Normale*), que na época era considerada a segunda em prestígio. Formou-se em Ciências e Letras no final de 1829. Continuou sua pesquisa e, em 1830, submeteu um texto sobre a teoria das equações à Academia. Joseph Fourier, o secretário da Academia, levou o trabalho para casa, morreu logo depois, e os artigos se perderam. Em meio a tirania e frustrações, ele aderiu à causa da revolução de 1830, tornando-se um republicano radical, e começou a ter problemas com alunos e professores, acabando por ser expulso da Universidade.

Como necessitava de uma fonte de renda para se manter, Galois se ofereceu como professor particular de matemática, e, conforme Stewart (2012, p. 128) “[...] quarenta estudantes se matricularam num curso de álgebra avançada.”. Infelizmente por não ser um bom expositor escrito e, ainda, por certamente misturar comentários políticos em suas aulas, fizeram com que os matriculados fossem desistindo rapidamente. Em seguida, juntou-se temporariamente à Guarda Nacional e, por incentivo de Poisson, enviou novamente o seu artigo para a Academia. Entretanto, o próprio Poisson rejeitou o artigo, alegando que o mesmo era incompreensível.

Frustrado por não conseguir reconhecimento matemático, Galois passou a dedicar-se ao seu radicalismo político, aumentando seus problemas. Foi a julgamento por fazer ameaças públicas à vida do Rei, mas foi considerado inocente. Três meses mais tarde foi condenado a seis meses de prisão por posse de armas e usar ilegalmente o seu uniforme da Guarda. Foi para a prisão de *Sainte-Pélagie*, mas devido ao surto de cólera de 1832, foi transferido para um hospital e depois liberado em regime condicional. Em liberdade viveu seu primeiro e único caso de amor com Stéphanie-Felice Potterin du Motel, uma mulher de reputação duvidosa, que lhe provocou um grande desgosto amoroso.

Aos 29 dias do mês de abril é posto em liberdade e em 30 de maio de 1832 participa de um duelo, com pistolas, por razões obscuras, possivelmente relacionadas com uma intriga política e, ainda, provavelmente por seu possível caso amoroso com Stéphanie. Galois foi ferido nos intestinos e abandonado pelo adversário, que, segundo Stewart (2012,

p. 133), era um dos seus camaradas revolucionários, conforme indicado no relatório da polícia. Na manhã seguinte foi encontrado ainda vivo e foi transportado para o hospital, mas não sobreviveu. A verdade é que existem três possíveis versões para a morte de Galois.

“Uma das versões diz que o desafiante teria sido alguém próximo da moça. Outra afirma que foi uma maquinação de monarquistas. E há ainda uma terceira contando que o próprio Galois teria provocado sua morte para insuflar uma rebelião contra o rei Carlos X. A única certeza é que ele foi atingido por um tiro na barriga e morreu no dia 30 de maio de 1832, depois de 12 horas.” (MARCOLIN, 2011).

Na véspera do duelo, em 29 de maio, Galois escreveu uma carta ao seu amigo Auguste Chevalier, onde o avisa acerca de um duelo de honra e esboça suas descobertas, cujos manuscritos anexou na carta para que fossem submetidos pela última vez à Academia. Era uma tentativa de estabelecer uma relação entre grupos e equações polinomiais, apontando uma condição necessária e suficiente para uma equação ser resolvida por radicais. Finalmente seu trabalho foi publicado 14 anos mais tarde por Joseph-Louis Liouville, filho do capitão do exército de Napoleão que se tornou professor no Collège de France. Durante mais de 100 anos foram estudadas as suas consequências e hoje esta teoria é fundamental na Álgebra. Galois tem sua importância reconhecida e citada atualmente.

“[...] Évariste Galois [...] como um meteoro, riscou o firmamento matemático com brilho intenso e matinal, para depois, súbita e pateticamente, extinguir-se em morte prematura, deixando material de valor extraordinário para ser trabalhado pelos matemáticos das gerações futuras.” (EVES, 2011, p. 533).

O Teorema de Galois diz que para resolver uma equação irredutível de grau primo por radicais é necessário e suficiente que todas as suas raízes sejam funções racionais de duas quaisquer dentre elas. Seu principal objetivo foi determinar quando as equações polinomiais são resolúveis por radicais. Gauss, em seus critérios para construtibilidade de polígonos regulares, em essência tinha resolvido a questão da solubilidade da equação em termos de operações racionais e raízes quadradas dos coeficientes. Galois generalizou o resultado fornecendo critérios para a resolubilidade em termos de operações racionais e raízes enésimas dos coeficientes.

“O estudo dos grupos começou essencialmente com Galois; foi ele o pioneiro no uso (1830) da palavra “grupo” em seu sentido técnico. [...] A noção de grupo veio a alcançar um grande papel codificador em geometria e em álgebra serviu como uma estrutura atômica de coesão, fator de grande importância para a ascensão da álgebra abstrata no século XX. A teoria dos grupos ainda é, nesta segunda metade do século XX, um

campo de pesquisas muito produtivo em matemática.” (EVES, 2011, p. 536).

Galois introduziu um novo ponto de vista na matemática, mudou seu conteúdo e deu um passo necessário na abstração. A matemática deixara de ser o estudo dos números e das formas (aritmética, geometria e ideias desenvolvidas a partir daí como álgebra e trigonometria) para se tornar, segundo Stewart (2012, p. 136, grifo do autor), “[...] o estudo das *estruturas*. O que começou como um estudo das *coisas* se transformou num estudo de *processos*”. Começou suas investigações com um trabalho de Lagrange sobre as permutações das raízes de uma equação polinomial e inspirado pela prova de Abel da irresolubilidade por radicais da equação quártica, descobrindo que uma equação algébrica irreduzível é resolúvel por radicais se e somente se o grupo de permutações sobre suas raízes é resolúvel.

Ele foi o primeiro a avaliar que algumas questões matemáticas podiam ser bem mais compreendidas se transportadas para o domínio do pensamento abstrato. A descrição de um grupo resolúvel é bastante complicada, envolvendo relações entre o grupo e seus subgrupos. A teoria de Galois fornece um algoritmo para achar de fato as raízes de uma equação quando essas podem ser expressas por radicais, mas a ênfase no método na teoria das equações geralmente se volta mais para a estrutura algébrica do que para o tratamento de casos específicos. De acordo com Stewart (2012), embora sua obra fosse anterior à da maior parte dos algebristas ingleses do grande período de 1830-1850, suas ideias não tiveram influência até sua publicação em 1845.

A álgebra então estava tornando-se tão geral e abstrata que métodos heurísticos para encontrar raízes eram subordinados a questões lógicas referentes a teoremas de existências. Atualmente fala-se em Matemática Moderna nas escolas, mas ela só é moderna no sentido que as ideias de Galois finalmente estão chegando a todos, a pouco menos de dois séculos depois que o destino o tratou tão mal. Conforme Stewart (2012, p. 144, grifo do autor) “[...] simetrias de Galois são permutações (das raízes de uma equação), e uma permutação é *uma forma de rearranjar coisas*”. Uma simetria de um objeto matemático é uma transformação que preserva a estrutura desse objeto. Existem três palavras-chave na definição de uma simetria: transformação, estrutura e preservação.

Como exemplo pode-se pensar em um triângulo equilátero, por possuir os três lados do mesmo comprimento e os três ângulos congruentes, ou seja,  $60^\circ$ . A incapacidade de distinção de um lado do outro ou mesmo de seus ângulos é uma consequência das simetrias do triângulo equilátero, definindo essas simetrias. A rotação de  $120^\circ$  é uma simetria do triângulo equilátero. Trata-se de uma transformação (rotação) que preserva a estrutura (seu formato e localização). Esse triângulo tem exatamente seis diferentes simetrias: rotação de  $120^\circ$ , rotação de  $240^\circ$ , rotação de  $360^\circ$  ou  $0^\circ$  ou deixá-lo quieto (simetria trivial chamada de identidade) e seus três reflexos que rebatem o triângulo de

forma que um vértice fixo permaneça fixo e os outros dois mudem de posição.

A Fig. 2.2 expressa as seis simetrias obtidas no triângulo equilátero, em termos de símbolos:  $I$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , onde  $I$  representa a identidade,  $U$  e  $V$  as outras duas rotações e, finalmente,  $P$ ,  $Q$  e  $R$  sendo as três reflexões. Assim:  $S_{\Delta} = \{I, U, V, P, Q, R\}$ . Conforme Stewart (2012, p. 148), “Galois fez uma grande jogada com a ‘propriedade de grupo’ de suas permutações. Se você fizer quaisquer duas de cada vez, obtém outra.”. Deve-se multiplicar as simetrias estando atendo a convenção: se  $X$  e  $Y$  forem duas transformações de simetria, o produto  $XY$  é o que acontece quando fazemos primeiro  $Y$  e depois  $X$ .

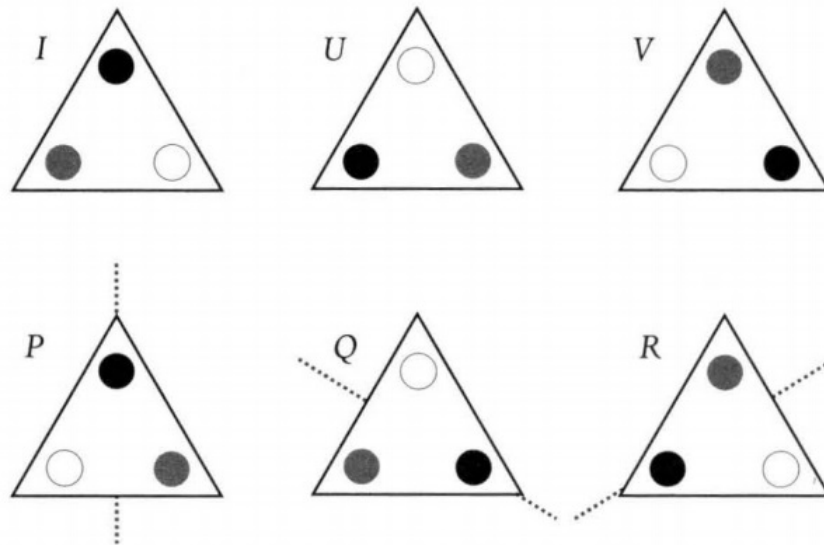


Figura 2.2 – As seis simetrias do triângulo equilátero.  
Fonte: Stewart (2012, p. 147).

Como exemplo, suponha que se queira chegar a  $UQ$ . Isso significa que primeiro aplica-se  $Q$  ao triângulo, depois  $U$ . Se  $Q$  gira o triângulo (rotação) em  $120^\circ$  e reflete a base (reflexão) e  $U$  apenas rotaciona o triângulo em  $120^\circ$ , pode-se reconhecer o resultado como sendo  $P$ . Então  $UQ = P$ , conforme apresentado na Fig. 2.3. Um outro exemplo seria obter  $VU$ , isso significa que primeiro devemos aplicar  $U$  ao triângulo e depois  $V$ . Como  $U$  rotaciona o triângulo em  $120^\circ$  e  $V$  rotaciona o triângulo resultante em  $240^\circ$ , então  $VU$  rotacionará o triângulo em  $120^\circ + 240^\circ = 360^\circ$ , resultando em  $VU = I$ .

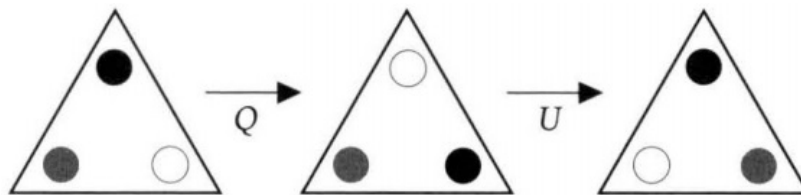


Figura 2.3 – Como multiplicar simetrias.  
Fonte: Stewart (2012, p. 148).

Com estas seis simetrias pode-se formar 36 produtos, e os resultados podem ser obtidos numa tabela de multiplicação. Esta tabela de multiplicação consiste numa espécie

de tabuada de uma determinada operação, efetuada com os elementos de um certo conjunto. Este tipo de tabela originou-se, conforme Stewart (2012, p. 149), “[...] no trabalho do matemático francês Camille Jordan, que transformou a teoria dos grupos em um tema, mais do que um método de análise da solução de equações por radicais.”. Para Galois, os grupos eram compostos por permutações, ou seja, maneiras de embaralhar símbolos.

	<b><i>I</i></b>	<b><i>U</i></b>	<b><i>V</i></b>	<b><i>P</i></b>	<b><i>Q</i></b>	<b><i>R</i></b>
<b><i>I</i></b>	<i>I</i>	<i>U</i>	<i>V</i>	<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>R</i>
<b><i>U</i></b>	<i>U</i>	<i>V</i>	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>Q</i>
<b><i>V</i></b>	<i>V</i>	<i>I</i>	<i>U</i>	<i>Q</i>	<i>R</i>	<i>P</i>
<b><i>P</i></b>	<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>R</i>	<i>I</i>	<i>U</i>	<i>V</i>
<b><i>Q</i></b>	<i>Q</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>V</i>	<i>I</i>	<i>U</i>
<b><i>R</i></b>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>U</i>	<i>V</i>	<i>I</i>

Tabela 2.1 – Tabela de multiplicação para as seis simetrias no triângulo equilátero.

Fonte: Adaptado de Stewart (2012, p. 137).

Na Tabela 2.1, os dados na linha  $X$  e na coluna  $Y$  representam o produto  $XY$ , que significa fazer primeiro  $Y$  e depois aplicar  $X$ . Conforme Stewart (2012, p. 137), “Galois percebeu que um aspecto muito simples e óbvio dessa tabela é de importância crucial. O produto de quaisquer duas permutações é em si uma permutação - os únicos símbolos que aparecem na tabela são  $I, U, V, P, Q, R$ .”. Alguns conjuntos menores de permutações também apresentam esta mesma propriedade (propriedade de grupo): o produto de duas permutações no conjunto também está no conjunto. Assim, Galois chamou esse conjunto de permutações de um grupo. Tais ideias teriam profundas consequências tanto na matemática quanto na física.

## 2.2 AMALIE EMILY NÖTHER (EMMY NOETHER) E SEU TEOREMA QUE LIGA AS LEIS DE CONSERVAÇÃO COM AS SIMETRIAS

Segundo Areas, Barbosa e Santana (2019, p. 3), “Amalie Emily Nöther, carinhosamente chamada por Emmy, nasceu em 23 de março de 1882, em Erlangen, cidade universitária desde o ano de 1002, na Alemanha.”. Vivendo entre o final do século XIX e o início do século XX, sofreu muito no decorrer de sua carreira científica, pois neste período o gênero feminino convivia com uma intensa discriminação de natureza misógina. Mesmo assim, conforme Gnipper (2016), “[...] Ela revolucionou as teorias sobre anéis, corpos e álgebra, sendo considerada a criadora da álgebra moderna. Além disso, Albert Einstein chegou a dizer que Emmy Noether foi ‘a mulher mais importante da história da matemática’.”.

Conforme Dom (2019) e Areas, Barbosa e Santana (2019), Emmy era filha de Ida Amalia Kauffmann Nöther e Max Nöther. Seu pai era matemático algebrista, professor na Universidade de Erlangen e ativo pesquisador que trabalhou na teoria das funções algébricas. De seus irmãos, os dois mais novos tornaram-se cientistas pesquisadores, Fritz foi um matemático e Alfred obteve um doutoramento em química. Ela estudou alemão, inglês, francês, aritmética e deu aulas de piano, tais atividades mais aceitas socialmente para uma mulher daquela época. Inicialmente considerou ser professora de francês e inglês, mas logo desistiu e, conforme Gnipper (2016), “[...] aos 18 anos, decidiu estudar matemática na Universidade de Erlangen-Nuremberg [...]”, onde seu pai lecionava.



Figura 2.4 – Amalie Emily Nöther ou mais conhecida como Emmy Noether (1882-1935).  
Fonte: Nadai (2019).

Em 1900, tornou-se professora nas escolas de meninas da Baviera. Apesar da grande opressão de gênero da época, obteve permissão para frequentar a Universidade de Erlangen, o que era inédito para mulheres na Alemanha, onde permaneceu até 1902. Em 1903 passou no exame em *Nürnberg* e foi para a Universidade de *Göttingen*, onde estudou com grandes nomes matemáticos de sua época, como Blumenthal, Hilbert, Klein e Minkowski. Em 1904 se inscreveu como estudante de doutorado na Universidade de Erlangen e em 1907 obteve seu título, sob a supervisão de Paul A. Gordan.

“[...] Defendeu a tese, aprovada com distinção, sobre invariantes algébricos. Emmy foi orientada por Paul A. Gordon e a tese foi intitulada ‘Sobre Sistemas Completos de Invariantes para Formas Biquadradas Ternárias’. Depois do doutorado, permaneceu em Erlangen, fazendo pesquisa, orientando estudantes e ocasionalmente substituindo docentes sem salário.” (AREAS; BARBOSA; SANTANA, 2019, p. 3).

Em *Göttingen*, pôde exercer sua paixão pela invariância com o estudo matemático dos números que podem ser manipulados de diversas maneiras e, ainda assim, continuarem constantes. Emmy também trabalhou sozinha em suas próprias pesquisas e, particularmente, foi influenciada por Ernst Fischer, que sucedeu Gordan na cadeira de matemática quando ele se aposentou, em 1911. Essa influência motivou Emmy a estudar a álgebra abstrata de um ponto de vista aritmético, o que a aproximou da perspectiva dos trabalhos de Hilbert, que estava trabalhando em ideias sobre a teoria da relatividade próximas às de Albert Einstein.

Conforme Areas, Barbosa e Santana (2019, p. 3), “Emmy ganha notoriedade com seus resultados e em 1915 é convidada por Klein e Hilbert para a Universidade de Göttingen, onde estavam a trabalhar com vários aspectos matemáticos da teoria da relatividade geral de Einstein.”. Segundo Gnipper (2016), “Em 1919, enfim, a matemática conseguiu o posto de *Privatdozent* – um título universitário alemão que serve para designar professores com habilitação para lecionar, mas sem a cátedra de ensino ou e pesquisa.”. Sendo assim, um *Privatdozent* não receberia remuneração por parte do governo. Em 1922, a despeito do reconhecimento, foi admitida como professora não oficializada e um tempo depois recebeu a incumbência de ensino em álgebra, lhe permitindo receber um pequeno salário.

Assim, de 1922 a 1933, Emmy foi Professora da Universidade de *Göttinger* e, ainda nessa mesma condição, assumiu a posição de Professora Visitante da Universidade de Moscou, de 1928 a 1929. Como ela era uma grande algebrista que se atentava aos anéis, grupos e corpos, trabalhando, também, na teoria dos ideais e das álgebras não-comutativas. Segundo Dom (2019), ela era considerada, principalmente por Albert Einstein, como a mulher mais importante na história da matemática. Foi capaz de provar dois teoremas que são essenciais para a teoria da relatividade, resolvendo o problema da conservação da energia conhecido pelos físicos como o teorema de Noether.

Struik (1989, p. 317) esclarece que, no início do século passado, a álgebra foi modificada no seu caráter ancestral. Nesse período, esta área da matemática não se limitava ao estudo da teoria das equações algébricas e da teoria associada de invariantes e covariantes. Ela expandiu-se e tornou-se uma doutrina abstrata em que novas estruturas, a exemplo de ideais, anéis, corpos e tópicos afins, se tornaram fundamentais para o pensamento matemático. Segundo o mencionado autor, a nova álgebra tem uma de suas origens na elaboração da teoria dos grupos, a partir da teoria de Galois (1811-1832) das equações algébricas e conduzia a uma teoria abstrata autônoma, especialmente a teoria dos grupos finitos.

Dentre as suas inúmeras contribuições à física-matemática, seu trabalho mais relevante é o teorema que liga as leis de conservação com as simetrias na natureza, denominado de Teorema de Noether, em homenagem à sua autora, que o enunciou em

1915 e o publicou em 1918 (NOETHER, 1918, p. 235). Esse revolucionário teorema afirma que ao se encontrar algum tipo de simetria na natureza, alguma previsibilidade ou homogeneidade entre as partes, também encontrará uma conservação escondida no segundo plano, seja ela uma de aceleração, de carga elétrica, de energia, entre outras. O teorema demonstra que uma simetria temporal está diretamente relacionada à conservação de energia.

Em 1933, com a ascensão do nazismo na Alemanha, Emmy, por ser filha de mãe judia e pela proximidade com os físicos soviéticos, é expulsa da universidade e, segue para o exílio, nos Estados Unidos. Inicialmente é contratada para trabalhar como professora do *Bryn Mawr College*, na Pensilvânia. Após algum tempo, e devido ao seu reconhecido mérito, torna-se pesquisadora do Instituto de Estudos Avançados de *Princeton*, para onde havia seguido alguns de seus colegas do período de *Göttingen*, como Einstein, Weyl e Klein. Em 1935 teve complicações decorrentes de uma operação para remover um cisto do ovário, morrendo alguns dias depois, no dia 14 de abril, com 53 anos.

Segundo Gnipper (2016), na ocasião de seu falecimento, o próprio Albert Einstein, que havia usado o trabalho de Noether sobre a teoria dos invariantes para formular parte de seu trabalho com a relatividade, chegou a chamá-la de “o gênio matemático criativo mais significativo já produzido desde que a educação superior para mulheres foi iniciada”. Emmy deixou poucos registros sobre como se sentia a respeito das dificuldades que enfrentara como mulher, ou mesmo sobre sua vida pessoal e emocional como um todo, nunca se casou e nem houve registros de casos amorosos, viveu para a matemática não ligando nem para o trabalho doméstico, propriedades ou mesmo vaidade.

### 3 SIMETRIA E LEIS DE CONSERVAÇÃO NA FÍSICA

Desde os primórdios da civilização ocidental atual, na Grécia antiga, associamos as noções de beleza e harmonia ao conceito da simetria. Sabemos que se refletirmos a imagem frontal de uma pessoa pelo eixo central, obtemos quase a mesma figura. Muitas frutas, similarmente, apresentam uma invariância quando giradas ao longo do seu eixo principal, mas a carambola só preserva sua forma original se a rotação ao longo do eixo principal for feita em múltiplos inteiros de um ângulo mínimo,  $360^\circ \div 5$ , por apresentar uma simetria pentarradial, como apresentado na Fig. 3.1.



Figura 3.1 – A beleza e simetria da Carambola.

Fonte: Adaptada de <https://opas.org.br/carambola-conheca-seus-beneficios/> (2020).

As simetrias são facilmente reconhecidas em vários objetos que apresentam essas propriedades, mas é importante perceber que as equações matemáticas e as leis da natureza também podem apresentar característica de simetria com relação a certas operações de transformações. Segundo Moreira (2019, p. 2, grifo do autor), “[...] um sistema físico tem simetria se for feita uma mudança nesse sistema tal que após essa mudança o mesmo continue exatamente como era antes [...] *simetria é uma invariância de um objeto ou sistema frente a uma transformação*.”. O papel da simetria na Física é revelar as transformações que levam as invariâncias de seus objetos de estudo, para que se possa entender as leis de conservação, sendo o teorema de Noether a conexão formal entre simetrias e leis de conservação das grandezas físicas.

Física é uma ciência experimental, pois o físico observa fenômenos naturais na tentativa de encontrar padrões e os princípios que relacionam esses fenômenos. Tais padrões são denominados teorias, leis ou princípios físicos. É uma ciência sobre a qual todas as outras ciências naturais e de engenharia são construídas. Todos os avanços tecnológicos modernos têm sua origem direta na física básica. A boa compreensão de seus conceitos essenciais oferece uma base sólida para o desenvolvimento de conhecimentos avançados em todas as ciências. As leis de conservação e os princípios de simetria da física também são válidos para todos os fenômenos científicos e para muitos aspectos da vida cotidiana.

Uma lei de conservação estabelece que determinada propriedade mensurável de um sistema físico isolado é invariante no tempo. Cada lei de conservação é uma identidade matemática que se aplica ao sistema. A física moderna admite, entre outras, as seguintes leis de conservação (para as quais nunca se observou uma violação): lei da conservação de

energia, lei da conservação do momento linear, lei da conservação do momento angular e lei da conservação de cargas. Na matemática, o termo lei de conservação, por analogia, é usado para indicar qualquer quantidade que se mantenha inalterada com o tempo em modelo matemático.

### 3.1 SIMETRIAS NA NATUREZA

Para a maioria das pessoas, a ideia de simetria está mais ligada a pensamentos sobre Arte e Natureza do que sobre Matemática ou Física. A verdade é que desde as civilizações antigas, a geometria existente nas formas da natureza sempre despertou fascínios e curiosidades na busca de sua compreensão, levando o homem à procura de padrões que tentem identificar tal fenômeno. A simetria na Natureza é um fenômeno único e fascinante, suas características geométricas são percebidas nas mais diversas formas e em diferentes locais.



(a) Asas da borboleta.



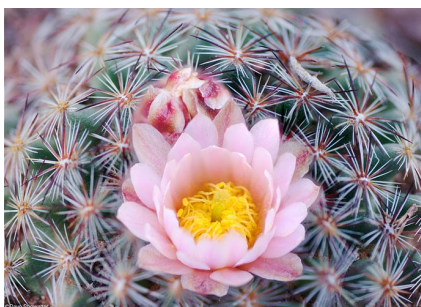
(b) Cauda do pavão.



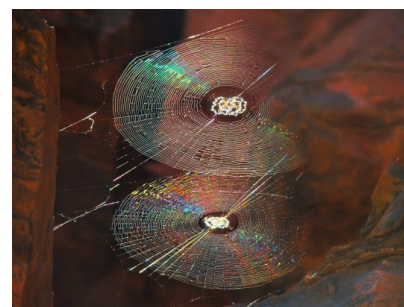
(c) Favo de mel.



(d) Flor de dália.



(e) Flor de cactus.



(f) Teias de aranhas.

Figura 3.2 – Alguns exemplos de simetrias encontradas na natureza.

Fonte: [www.megacurioso.com.br/fenomenos-da-natureza/75491-19](http://www.megacurioso.com.br/fenomenos-da-natureza/75491-19) (2020).

Weyl (1997, p. 17) considera que “[...] o sentido da simetria é a ideia pela qual o homem tem tentado compreender e criar a ordem, a beleza e a perfeição através dos tempos.”. A simetria na natureza geralmente está associada ao equilíbrio e proporção, ao padrão e regularidade, a harmonia e beleza, a ordem e perfeição. Algumas dessas formas possuem regras e princípios de organização que as tornam muito regulares e, conseqüentemente, causam um encantamento de seus espectadores, devido a sua beleza e simetria.



(a) Borboleta e sua beleza bilateral.



(b) Couve-brócoli romanesco, com sua simetria por escala (fractal).



(c) Flor de bromélia, com simetria radial.

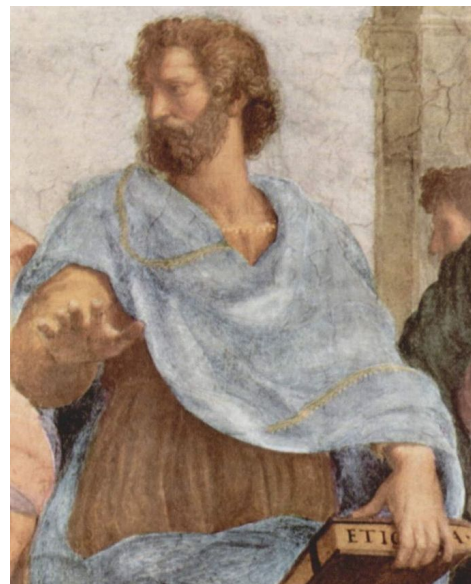
Figura 3.3 – Beleza e harmonia na natureza: Borboleta (a), Couve-brócoli romanesco (b) e Flor de bromélia (c).

Fonte: Museu do Amanhã (2020).

Conforme Santos (2013), foi através da busca de uma explicação racional para o belo que filósofos gregos descobriram a simetria e o equilíbrio. Platão (427 a.C. - 347 a.C.), foi o primeiro a ocupar-se de assuntos referentes ao que mais tarde seria conhecido como simetria. Para ele, o belo estaria relacionado à harmonia do conjunto, composto pelo agrupamento coerente das partes. Para Santos (2013), a introdução da ideia de simetria veio mesmo com Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.), que ampliou seu entendimento, tanto em uma noção primitiva inicial do que seria o eixo de simetria, dizendo que os lados opostos de uma figura dividida por um eixo central são exatamente iguais, quanto no sentido de proporção e equilíbrio entre as partes.



(a) Platão.



(b) Aristóteles.

Figura 3.4 – Platão (a) e Aristóteles (b), retirados da obra A Escola de Atenas ou mais conhecida como a Academia de Platão, de Rafael Sanzio, ou Raffaello.

Fonte: <https://www.culturagenial.com/a-escola-de-atenas-de-rafael-sanzio/> (2020).

Segundo Stewart (2012, p. 38), “Aristóteles e Platão falam de um culto, centrado em Pitágoras, que se desenvolveu por volta de 550 AEC, que via a matemática, especialmente os números, como a base de toda a Criação.”. Esse culto acabou desenvolvendo ideias místicas sobre a harmonia do Universo, ideias em parte baseadas na descoberta de que as notas harmônicas de um instrumento de corda estão relacionadas a padrões matemáticos simples. Se uma corda produz uma nota, então uma outra com a metade de seu comprimento irá produzir a nota uma oitava mais alta, sendo o mais harmônico de todos os intervalos.

Stewart (2012) ainda afirma que eles estudaram diversos padrões numéricos, em especial os números poligonais, formados na organização de objetos com padrões poligonais, como os números triangulares (formados por triângulos) e os números quadrados (formados a partir de quadrados), conforme Figura 3.5. Segundo Pimentel (1999), Plotino (205-270) era um filósofo romano com a crença de que para uma coisa ser realmente bela, a harmonia precisaria estar presente em cada detalhe; e por esse motivo sempre dizia que a beleza não poderia ser construída a partir da feiura. Essas teorias pretendiam criar padrões universais para o bonito e o feio. As mesmas fórmulas que definiam o tamanho ideal de um discurso eram válidas para uma mulher, uma paisagem ou uma flor.

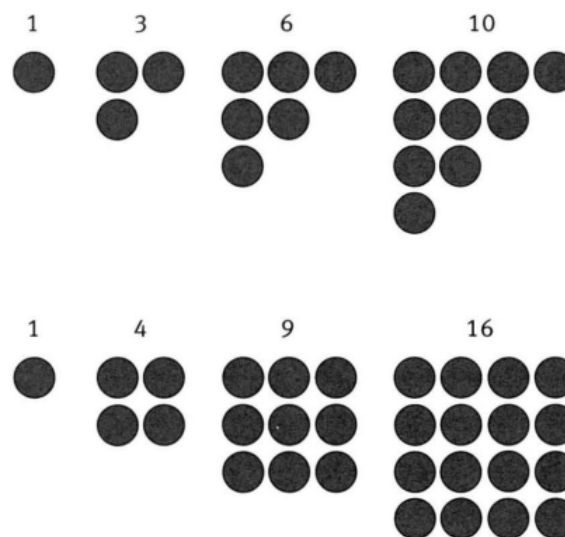


Figura 3.5 – Números triangulares e números quadrados.

Fonte: Stewart (2012, p. 38).

Leonardo Da Vinci (1452-1519), pintor italiano que inspirado no trabalho do arquiteto romano Marcus Vitruvius Pollio, o Vitruvius, produziu em 1490, durante o Renascimento, o seu desenho mais famoso, o Homem Vitruviano, apresentado na Fig. 3.6. Conforme Mello (2010), Vitruvius, em seus estudos, definiu as proporções entre as diversas partes do corpo humano conduzindo a ideia de que este corpo, com os braços e pernas estendidos, deveria caber exatamente dentro de duas formas geométricas mais perfeitas, o círculo e o quadrado. Segundo Martins (2017), “O Homem Vitruviano é baseado numa famosa passagem do arquiteto romano Vitruvius na sua série de dez livros intitulados de

*De Architectura*, um tratado de arquitetura em que, no terceiro livro, ele descreve as proporções do corpo humano masculino.”

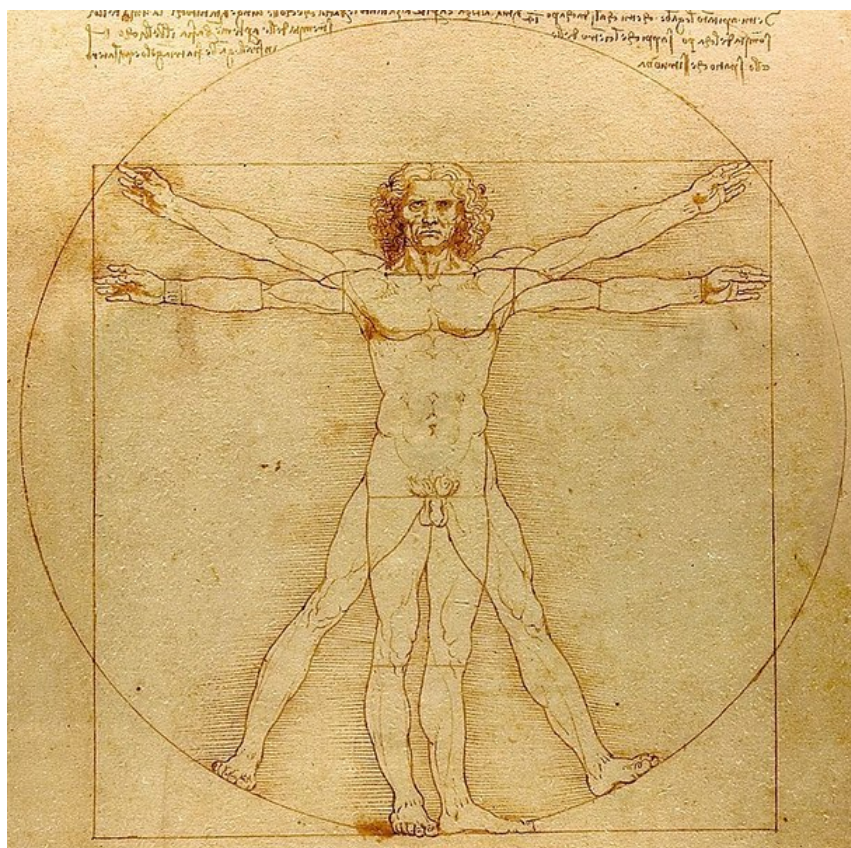


Figura 3.6 – Representação do Homem Vitruviano, criada por Leonardo da Vinci em uma das páginas de seu dário.

Fonte: [www.culturagenial.com/homem-vitruviano-leonardo-da-vinci/](http://www.culturagenial.com/homem-vitruviano-leonardo-da-vinci/) (2020).

Para Silva, Massaranduba e Duarte (2016, p. 4-5), “[...] O Homem Vitruviano é considerado símbolo da simetria básica do corpo humano e para o universo como um todo.”. Da Vinci desenvolveu sua obra respeitando as proporções do corpo humano retratados nesse livro:

“Um palmo é a largura de quatro dedos; Um pé é a largura de quatro palmos; Um antebraço ou cúbito é a largura de seis palmos; A altura de um homem é quatro antebraços (24 palmos); Um passo é quatro antebraços; A longitude dos braços estendidos de um homem é igual à altura dele; A distância entre o nascimento do cabelo e o queixo é um décimo da altura de um homem; A distância do topo da cabeça para o fundo do queixo é um oitavo da altura de um homem; A distância do nascimento do cabelo para o topo do peito é um sétimo da altura de um homem; A distância do topo da cabeça para os mamilos é um quarto da altura de um homem; A largura máxima dos ombros é um quarto da altura de um homem; A distância do cotovelo para o fim da mão é um quinto da altura de um homem; A distância do cotovelo para a axila é um oitavo da altura de um homem; A longitude da mão é um décimo da

altura de um homem; A distância do fundo do queixo para o nariz é um terço da longitude da face; A distância do nascimento do cabelo para as sobrancelhas é um terço da longitude da face; A altura da orelha é um terço da longitude da face.” (CHAVES, 2008, p. 22-23).

Para Diana (2018), esta obra “[...] representa o ideal clássico de beleza, equilíbrio, harmonia das formas e perfeição das proporções.”, e segundo essa mesma autora, “Com a união de estudos de matemática, arquitetura e filosofia, Da Vinci conseguiu atingir a perfeição no desenho, o qual nem mesmo Vitruvius havia alcançado.”. Conforme Chaves (2008), esse desenho ainda representa a simetria básica do corpo e as medidas estéticas ligadas com a perfeição representadas pela razão áurea, citando com exemplos:

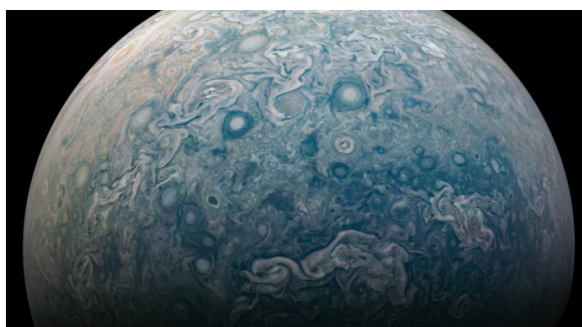
“A altura do corpo humano e a medida do umbigo até o chão. A altura do crânio e a medida da mandíbula até o alto da cabeça. A medida da cintura até a cabeça e o tamanho do tórax. A medida do ombro à ponta do dedo e a medida do cotovelo à ponta do dedo. O tamanho dos dedos e a medida da dobra central até a ponta. A medida da dobra central até a ponta dividido e da segunda dobra até a ponta. A medida do seu quadril ao chão e a medida do seu joelho até ao chão. A medida do cotovelo até o pulso e a medida do seu pé.” (CHAVES, 2008, p. 23-24).

Em outubro de 1623, Galileu Galilei (1564 – 1642), que sempre afirmara ser a Matemática a linguagem da natureza, publica, em Roma, um livro muito polêmico a favor da física matemática intitulado *Il Saggiatore* (em italiano) ou O Ensaaiador (em nossa língua), dizendo que o Universo encontrava-se escrito numa linguagem da Matemática, tendo como seus personagens os triângulos, círculos e outras figuras geométricas. Para Rosa (2012, p. 48), foi nesse importante livro que “[...] Galileu atacou a Astronomia de Tycho Brahe; sustentou, erroneamente, que os cometas eram fenômenos ópticos, e não objetos físicos; assumiu as posições atomistas de Demócrito e expôs sua metodologia científica [...]”.

“Simetrias também existem no mundo natural de outras formas que podemos ver, ouvir e sentir. Luz e som, por exemplo, se comportam em forma de onda - e podemos dizer que são, por isso, simétricos quando seu comprimento de onda é regular. Sua simetria não se dá no espaço como uma figura geométrica que podemos ver – com sua pulsação, luz e som são simétricos no tempo. Algumas estrelas, por exemplo, têm variações de brilho – ou pulsações – regulares. A RS Puppis, localizada perto do centro da nossa Via Láctea, é uma delas: sua periodicidade de pulsação é de 40 dias, aproximadamente.” (MUSEU DO AMANHÃ, 2018, p. 25).

Para Platão, segundo Museu do Amanhã (2018), a esfera era a forma mais simétrica e homogênea existente, portanto, a forma mais bela e mais perfeita de todas. Segundo

ele, o Cosmos tinha forma esférica, assim como os corpos celestes, como o planeta Júpiter, apresentado na Fig. 3.7(a). Planeta (2020) relata que o Telescópio Espacial Hubble, da NASA/ESA<sup>1</sup>, fotografou uma galáxia incrivelmente simétrica, a NGC 3583, uma galáxia espiral barrada com dois braços que se lançam para o universo, a 98 milhões de anos-luz da Via Láctea, que chama atenção também por ter abrigado explosões de duas supernovas nos últimos 45 anos, uma em 1975 e outra, mais recentemente, em 2015.



(a) Planeta Júpiter: o maior planeta do Sistema Solar, em diâmetro e massa, sendo o quinto mais próximo do Sol. Planeta gasoso, conhecido como planeta jupiteriano.



(b) Galáxia NGC 3583: além da simetria, marcada por duas explosões de supernovas.



(c) RS Puppis: classe de estrelas cujo brilho é usado para estimar distâncias a galáxias próximas.

Figura 3.7 – Simetrias: Planeta Júpiter (a), Galáxia NGC 3583 (b) e Estrela RS Puppis (c).

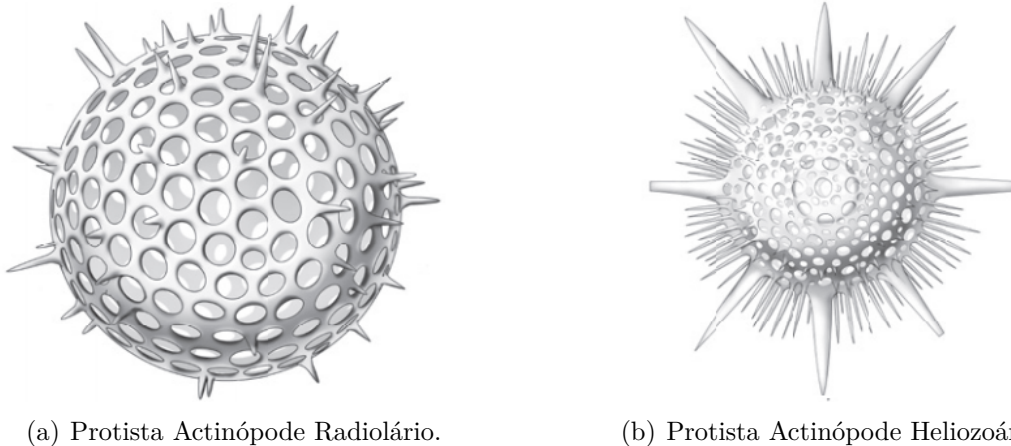
Fonte: (a) Museu do Amanhã (2018, p. 16); (b) Planeta (2020) e (c) <https://science.nasa.gov/rs-puppis> (2019).

A presença marcante da simetria na natureza sempre intrigou e ainda intriga a muitos, fazendo com que os interessados em sua compreensão ou mesmo reprodução fiel se dedicassem em estudar essas formas geométricas, contribuindo muito para nossos conhecimentos atuais sobre simetrias. Na natureza, podemos encontrar simetrias sob as mais diversas formas e em diferentes locais, sendo que os principais tipos são: simetria esférica, simetria radial e suas variações (birradial, tetrarradial, pentarradial e multirradial) e simetria bilateral.

<sup>1</sup> NASA/ESA = Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço, do governo dos Estados Unidos / Agência Espacial Europeia.

### 3.1.1 Simetria Esférica

A Simetria Esférica é aquela em que qualquer plano que passe pelo seu centro divide-a em metades simétricas. Segundo Silveira e Gallas (2017, p. 5-6), “A simetria esférica é encontrada em animais que não apresentam um eixo corporal, mas sim um corpo em forma de esfera. Este tipo de simetria é raro na natureza e, alguns protistas a possuem.”. Nesse grupo incluem-se os protozoários e as algas unicelulares.



(a) Protista Actinópode Radiolário.

(b) Protista Actinópode Heliozoário.

Figura 3.8 – Simetria Esférica em Protista Actinópode Radiolário (a) e Heliozoário (b).

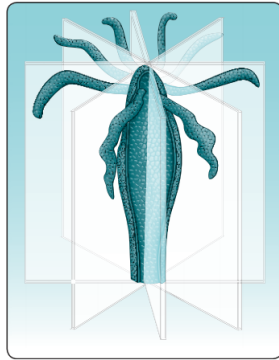
Fonte: Adaptado de [https://uab.ufsc.br/biologia/files/2020/08/Cap\\_03.pdf](https://uab.ufsc.br/biologia/files/2020/08/Cap_03.pdf) (2020, p. 60).

### 3.1.2 Simetria Radial

A Simetria Radial (Fig. 3.9) é a simetria onde um corpo ou objeto pode ser dividido em partes iguais, com  $n$  raios em volta de um eixo central, preservando sua forma original em rotações ao longo desse eixo (perpendicular ao seu plano), com seus ângulos medindo  $(360^\circ \div n)$ . Conforme Silveira e Gallas (2017, p. 6), “[...] A simetria radial perfeita é quase que inexistente e, por isso, ocorreram modificações nos planos dos animais, dando origem, então, à simetria birradial, simetria quadrirradial e simetria pentarradial.”. Este tipo de simetria pode ser encontrada em animais como os cnidários (mãe d’água e corais), ctenóforos e equinodermos (estrelas-do-mar e bolachas-da-praia):

- a) simetria birradial: possui somente dois planos de simetria radial, encontrada em cnidários como as anêmonas-do-mar (Anthozoa) e em tenóforos;
- b) simetria tetrarradial ou quadrirradial: é caracterizada pela presença de apenas quatro planos de simetria, típico de muitas medusas (Scyphozoa e Cubozoa);
- c) simetria pentarradial: é definida por apresentar cinco planos de simetria, é encontrado na maioria dos equinodermos;

d) simetria multirradial: ocorre quando há um número definido de muitos planos de simetria, encontrado em muitas estrelas-do-mar (Echinodermata: Asteroidea), esponjas-do-mar (Porifera), hidroides e hidromedusas (Cnidaria: Hydrozoa).



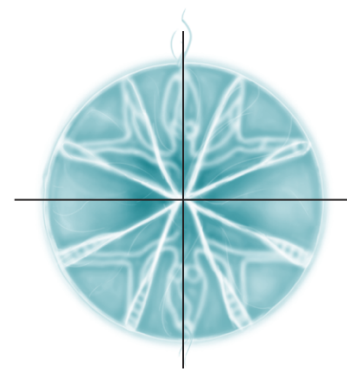
(a) Simetria radial de pólipo de Cnidária.



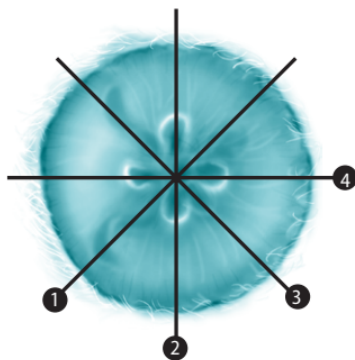
(b) Simetria radial de medusas.



(c) Simetria birradial de anêmona-do-mar.



(d) Simetria birradial de um Ctenóforo. O esquema destaca os dois planos de simetria radial em corte transversal.



(e) Uma cifomedusa em vista oral. As linha de 1 a 4 mostram os planos de simetria em corte transversal.



(f) Uma estrela do mar (Echinodermata) exemplificando a simetria pentarradial.

Figura 3.9 – Exemplos de seres vivos que apresentam simetrias radiais.

Fonte: Adaptado de [https://uab.ufsc.br/biologia/files/2020/08/Cap\\_03.pdf](https://uab.ufsc.br/biologia/files/2020/08/Cap_03.pdf) (2020, p. 60-62).

### 3.1.3 Simetria Bilateral

A Simetria Bilateral é aquela em que um plano, chamado eixo de simetria, divide o corpo ou objeto em duas regiões distintas, a direita e a esquerda, como se uma fosse o reflexo no espelho da outra. Conforme Brusca e Brusca (2007), nos animais que apresentam simetria bilateral, podemos definir três planos de simetria: sagital, transversal e longitudinal (Fig. 3.10). Na simetria bilateral, três diferentes cortes ou planos podem ser traçados no animal: (1.) o corte longitudinal ou frontal divide o corpo em ventral e dorsal, (2.) o corte sagital divide o corpo em esquerdo e direito e (3.) o corte transversal divide o corpo em anterior e posterior.

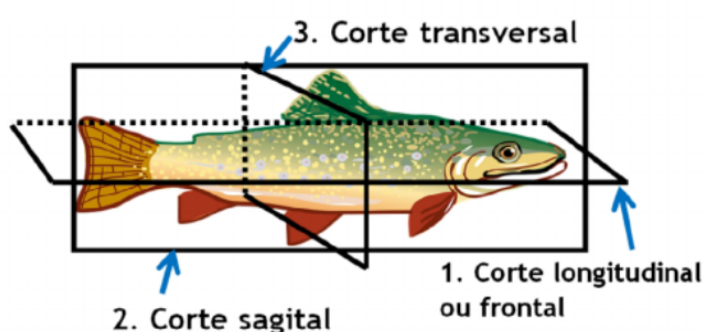


Figura 3.10 – Diferentes planos de simetria bilateral.

Fonte: Silveira e Gallas (2017, p. 6).

A verdade é que as simetrias na natureza são belas, encantam e possuem muitas funções. Segundo Museu do Amanhã (2018), “[...] A natureza esconde números, equações e proporções que podem ser desvendados por qualquer pessoa que tenha curiosidade. Como disse o célebre físico Richard Feynman, ‘o conhecimento da ciência apenas enriquece a empolgação, o mistério e a admiração’ [...]” da natureza, sem tirar sua beleza.

## 3.2 SIMETRIAS NA MATEMÁTICA

Inicialmente tem-se a impressão que uma imagem é simétrica se ela for apenas uma figura espelhada (reflexão). Entretanto, as simetrias não se restringem unicamente a reflexão, mas também podem estar presentes em objetos que transladam segundo um vetor (translação) ou rotacionam em torno de um ponto (rotação). Embora a simetria, na maioria das vezes, é relacionada com as artes, seu conceito é centrado no estudo da geometria. A simetria trata-se de uma semelhança exata de uma forma em torno de um eixo de simetria, em torno de um ponto ou em torno de um plano. Um modelo é simétrico se houver ao menos uma simetria (reflexão, translação ou rotação) que não mudar o modelo.

Segundo Santos (2013, p. 23), “Na descrição da matemática moderna, a simetria plana é um caso particular de uma aplicação do plano no plano, que tem a propriedade

de preservar distâncias, denominada isometria [...]”. Para Ribeiro (2016, p. 84), “Uma isometria é definida para ser uma transformação que preserva distâncias entre pontos [...] suficiente para garantir que isso também preserve comprimentos, ângulos, áreas, volumes, e muitas outras propriedades geométricas [...]”, ou seja, as isometrias preservam o tamanho e a forma de cada figura. Conforme Ribeiro (2016, p. 85), “Tendo em vista que isometrias movem objetos ao redor enquanto preservam relações geométricas, uma isometria é também chamada de um ‘movimento rígido’”.

“Dizemos que o **Espaço Euclidiano** é o espaço que contem os objetos comuns que conhecemos da geometria: retas, círculos, esferas, e assim por diante, e representamos por  $E^n$  um espaço Euclidiano n-dimensional. O espaço Euclidiano é absolutamente uniforme (o termo técnico é ‘homogêneo’). Essa uniformidade do espaço Euclidiano é a característica chave da geometria Euclidiana, ela é que nos permite mover objetos dentro do espaço Euclidiano sem distorcê-los. Objetos distantes podem ser movimentados e colocados sobre outros objetos para que se possa compará-los, sem alterar suas formas e suas características. [...] Objetos são movidos de um lugar a outro no espaço pela ação de ‘funções’. [...] As funções mais importantes no  $E^n$  são aquelas que preservam distâncias.” (RIBEIRO, 2016, p. 83-84, grifo do autor).

Pasquini e Bortolossi (2018) realizaram um estudo que revela três acepções distintas para a palavra simetria, passando por Euclides, Vitruvius, Legendre e culminando com o conceito moderno como é atualmente usando em áreas como Física, Química, Biologia e a própria Matemática. Segundo os mesmos, o conceito moderno de simetria é:

**Definição 1.** Seja  $\mathbf{X}$  um subconjunto não vazio do plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$ . Dizemos que uma função  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma “*simetria*” do conjunto  $\mathbf{X}$  se  $\mathbf{F}$  satisfaz as duas condições seguintes. **1.**  $\mathbf{F}$  é uma *isometria*, isto é,  $\mathbf{F}$  preserva distâncias. Mais precisamente, quaisquer que sejam os pontos  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  em  $\mathbb{R}^2$ , a distância de  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{Q}$  (no domínio de  $\mathbf{F}$ ) é sempre igual a distância de  $\mathbf{F}(\mathbf{P})$  a  $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$  (no contradomínio de  $\mathbf{F}$ ). **2.**  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ , isto é,  $\mathbf{X}$  é invariante por  $\mathbf{F}$  (a imagem do conjunto  $\mathbf{X}$  pela função  $\mathbf{F}$  é igual ao próprio conjunto  $\mathbf{X}$ ). (PASQUINI; BORTOLOSSI, 2016, p. 13-14, grifo do autor).

Deve-se observar que o conceito moderno de simetria usa funções para definir simetrias, dizendo que toda simetria de um conjunto  $\mathbf{X}$  do plano é, em particular, uma função cujo domínio e o contradomínio é o próprio plano, preservando as distâncias e, ainda, deixando o conjunto  $\mathbf{X}$  invariante. Ribeiro (2016, p. 86, grifo do autor) diz que “*existem apenas quatro tipos de isometrias  $f : \Pi \rightarrow \Pi$  do plano Euclidiano  $\Pi \in E^n$ , além da função identidade, a saber: translação, rotação, reflexão e reflexão transladada.*”.

### 3.2.1 Translação

Para Ribeiro (2016, p. 88-89), translação “Trata-se da transformação geométrica que move objetos ao longo de uma linha reta no espaço em uma determinada direção e sentido sem rotacioná-los ou alterar sua orientação ou dimensões.”. Cada translação tem um sentido e uma distância. Nessa simetria, todos os pontos de uma figura se deslocam na mesma direção, sentido e distância, sendo sempre associadas a um vetor. Conforme Santos (2013, p. 27), “Para definir Simetria de Translação é necessário fixar um vetor, que por definição possui três especificações: direção, sentido e comprimento, ou seja, deve ser dado o vetor de translação.”.

Segundo Ribeiro (2016, p. 87), “[...] um vetor (do Latim ‘vehere’ = transportar) é uma classe de segmentos orientados do  $E^n$ . Se  $(A, B)$  é o segmento orientado, o vetor correspondente, ou seja, o vetor cujo representante é  $(A, B)$ , será indicado por  $\vec{AB}$  [...]”. Desse modo, pode-se somar ou subtrair vetores uns dos outros da maneira usual: a cada par de vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , o vetor soma será obtido fazendo  $\vec{u} + \vec{v}$ , enquanto que o vetor diferença poderá ser encontrado fazendo  $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ . A soma de ponto com vetor define a aplicação chamada translação na direção do vetor  $\vec{u}$ , ou translação de vetor  $\vec{u}$ , ou simplesmente, translação no plano por:  $T_{\vec{u}}(M) = M + \vec{u}$ .

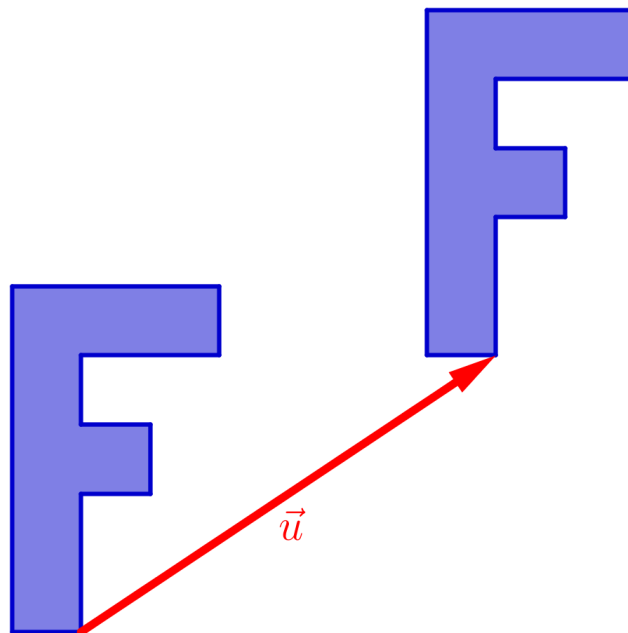
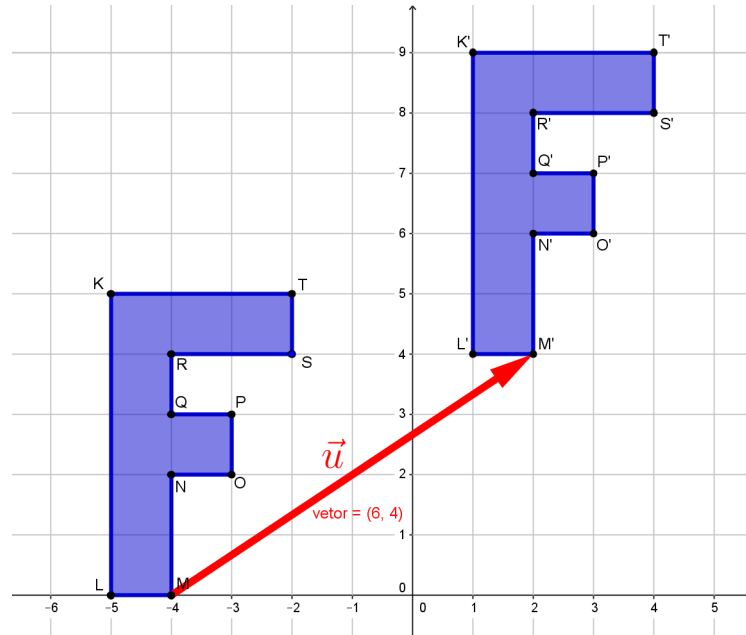


Figura 3.11 – Translação, tendo  $\vec{u}$  como vetor deslocamento.

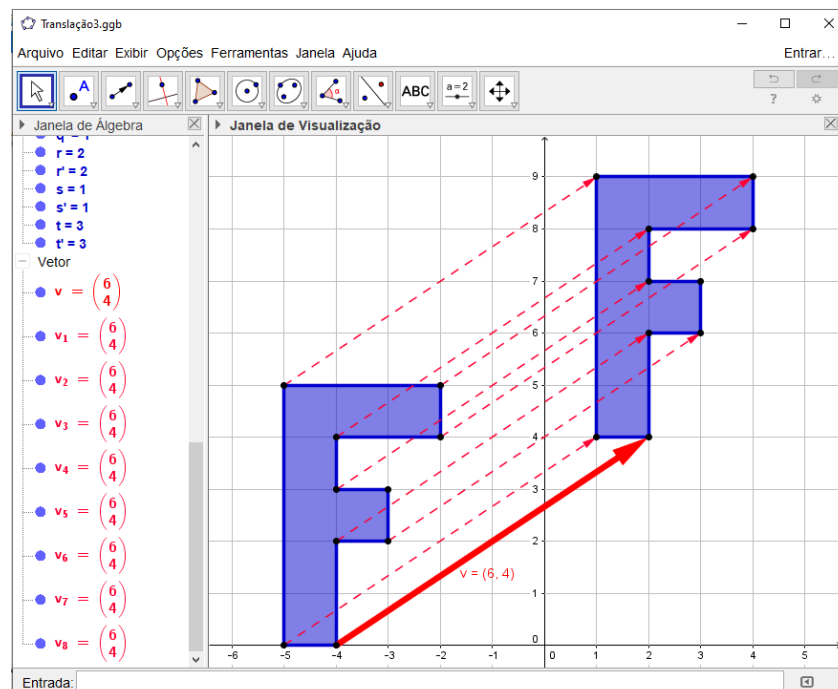
Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Para entender melhor essa isometria de translação (Fig. 3.11), consideremos a figura transladada como sendo um polígono não convexo de 10 lados (decágono),  $Polígono_{[K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T]}$ . Seja  $MN$  um segmento em  $E^n$  e um vetor  $\vec{u}$ , considerando  $u \neq 0$  para que não se tenha a transformação identidade, então  $T_u : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$  e  $T(MN) = MN$ . Desse modo, a transformação  $T_u : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$  é tal que: (i) transporta o segmento

$MN$  pelo vetor  $u$ , gerando o segmento  $M'N'$ ; (ii) transporta o segmento  $NO$  pelo vetor  $u$ , gerando o segmento  $N'O'$ ; (iii) transporta o segmento  $OP$  pelo vetor  $u$ , gerando o segmento  $O'P'$ ; e assim sucessivamente, até que o transporte do polígono ocorra por completo, conforme Fig. 3.12.



(a) Translação do polígono, identificando os vértices, eixos e malha (cordenadas cartesianas).



(b) Apresenta do  $\vec{u}$  (linha cheia), de todos os outros vetores com origem em cada vértice do polígono (linhas tracejadas) e seus valores em coordenadas cartesianas.

Figura 3.12 – Simulação da isometria de translação realizada no GeoGebra.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Tanto a Fig. 3.11 quanto a Fig. 3.12 foram produzidas utilizando o *software* de matemática dinâmica chamado GeoGebra, de código aberto e disponível gratuitamente para usuários não comerciais ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)). Na Fig. 3.12(a) tem-se a apresentação de todos os vértices do polígono (antes e após transladar), o  $\vec{u}$  e seu valor em coordenadas cartesianas, os eixos  $e$ , ainda, a malha para melhor identificação. A Fig. 3.12(b) apresenta o  $\vec{u}$  (linha cheia) e todos os outros vetores com origem em cada vértice do *Polígono*<sub>[K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T]</sub> (linhas tracejadas) usados para essa transladação, juntamente com seus valores em coordenadas cartesianas, confirmando que todos são equipolentes [mesmo comprimento, mesma direção (paralelas) e mesmo sentido].

### 3.2.2 Rotação

Rotacionar um objeto significa girá-lo ao redor de um ponto, sendo que cada rotação tem um centro, um ângulo e, ainda, que a distância dos pontos ao centro de rotação será sempre constante. Para o estudo das rotações vamos inicialmente definir a orientação, a medida e a representação de um ângulo  $\alpha$  dado. Para a medida direta de um ângulo, teremos  $\alpha = \widehat{BOA} = m$ , quando  $\widehat{BOA}$  for medido no sentido anti-horário, e  $\alpha = \widehat{BOA'} = -m$ , quando  $\widehat{BOA'}$  for medido no sentido horário, conforme a Fig. 3.13.

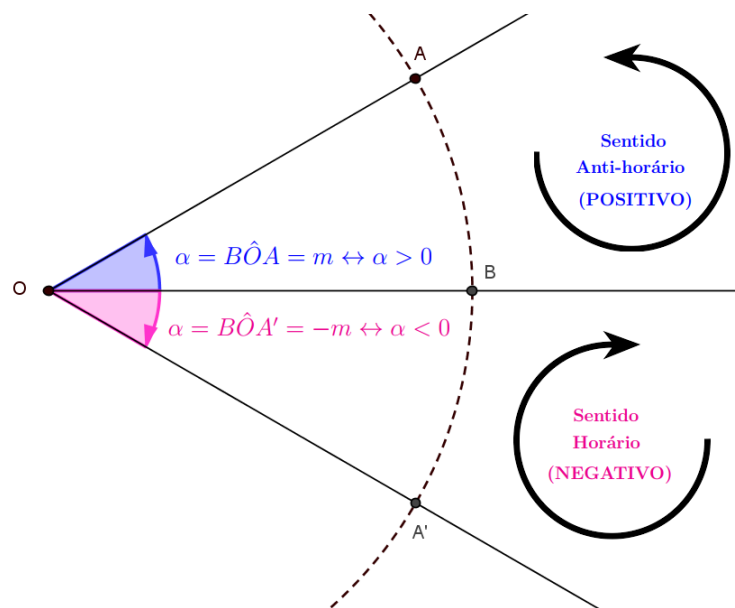


Figura 3.13 – Ângulo: representação e orientação.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Para Nasser, Sousa e Pereira (2004, p. 9, grifo do autor), “Uma **rotação** de centro  $O$  e ângulo  $\alpha$  é uma transformação cuja imagem de uma figura é obtida girando-se cada um de seus pontos segundo o arco de circunferência de centro  $O$ , correspondente ao ângulo  $\alpha$ , no sentido fixado [...]”. Portanto, essa rotação é determinada pelo centro  $O$ , um ângulo de rotação  $\alpha$  e um sentido, podendo ser horário ou anti-horário. A Fig. 3.14 apresenta um polígono e duas rotações realizadas num ponto pertencente a ele.

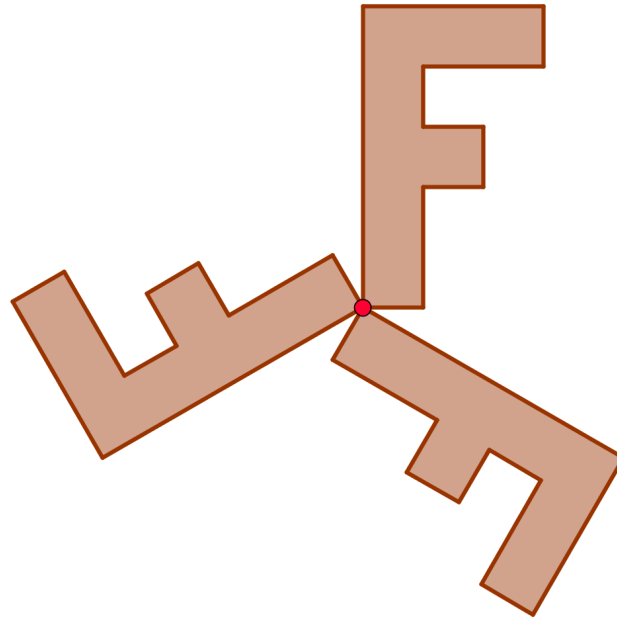


Figura 3.14 – Rotação num ponto fixo pertencente ao polígono.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Vale ressaltar que: (i) a imagem de uma figura por rotação mantém sua forma e suas dimensões; (ii) a rotação mantém invariantes os ângulos e os comprimentos das figuras geométricas, preservando outras grandezas derivadas destas, como a sua área e (iii) o ponto  $O$  pode estar localizado fora da figura a ser girada, sobre o seu contorno, ou no interior da mesma. Denotando a rotação de centro  $O$ , fixo no plano, e ângulo  $\alpha$ , um número real, por  $R_{O,\alpha}$  e, ainda, utilizando a medida do ângulo em radianos, podemos escrever:  $R_{O,\alpha+2k\pi} = R_{O,\alpha}$ , com  $\alpha \in ]-\pi, \pi]$  e  $k \in \mathbb{Z}$ . Na Fig. 3.15 encontra-se representado um polígono e seis rotações realizadas num ponto fora dele.

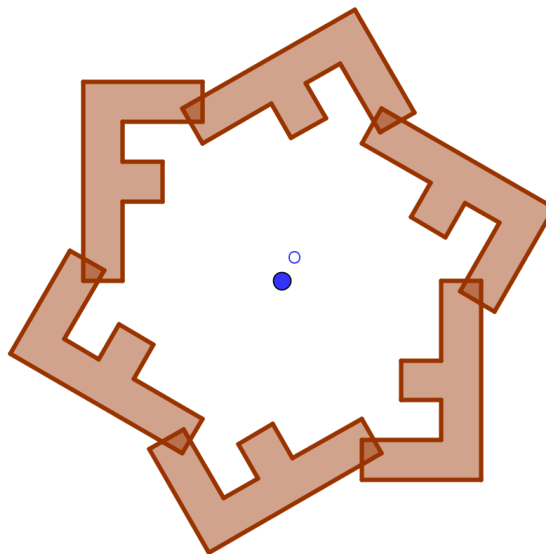


Figura 3.15 – Rotação num ponto fixo fora do polígono.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Para Ribeiro (2016, p. 104), “[...] decorre imediatamente da definição que se  $\alpha = 0$  então  $R_{O,0} = Id$ , e portanto  $R_{O,\alpha}$  fixa todos os pontos do plano; e se  $\alpha = \pi$  então  $R_{O,\pi} = R_O$ , isto é, a rotação coincide com a reflexão em torno do ponto O.”. A Fig. 3.16 identifica um ponto específico no polígono a ser rotacionado, bem como a identificação dos mesmos pontos em cada operação de rotação realizada ( $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$  e  $R_6$ ). Observe, nessa figura, que  $R_1 = 60^\circ = \frac{\pi}{3}rad$ ;  $R_2 = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}rad$ ;  $R_3 = 180^\circ = \pi rad$  (coincidindo com a Reflexão no ponto);  $R_4 = 240^\circ = \frac{4\pi}{3}rad$ ;  $R_5 = 300^\circ = \frac{5\pi}{3}rad$  e  $R_6 = 360^\circ = 0^\circ = 2\pi rad$  (Identidade).

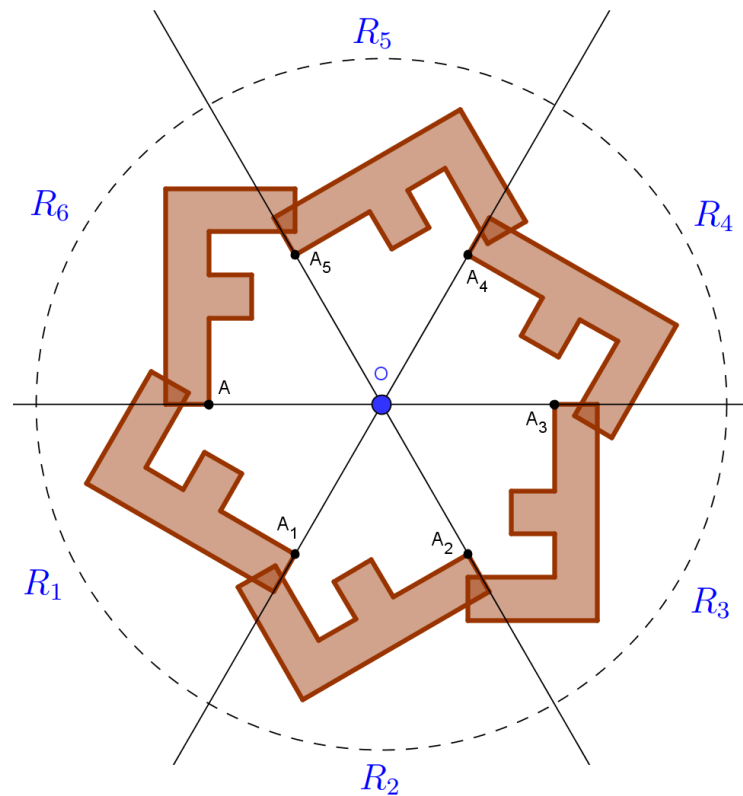


Figura 3.16 – Identificação das seis rotações ( $60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$  e  $360^\circ$ ) num ponto fixo fora do polígono.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Assim, Santos (2013, p. 27) diz que “[...] para definir formalmente uma rotação, consideramos uma transformação  $R_{O,\alpha}$ , que associa a cada ponto  $A$ , distinto de  $O$ , em  $\mathbb{P}$ , um ponto  $A'$  em que, a distância de  $A$  até  $O$  é igual a distância de  $A'$  até  $O$ , sendo que o ângulo  $A'\hat{O}A$ , mede  $\alpha$ .”. Ribeiro (2016, p. 104-105, grifo do autor) ainda afirma que “Verificamos que pela definição,  $R_{O,\alpha}(P) = P'$  se e somente se  $R_{O,\alpha}(P') = P$ , o que nos permite escrever:  $(R_{O,\alpha})^{-1} = R_{O,-\alpha}$  [...] Toda rotação do plano é uma isometria desse plano [...] Portanto  $R_{O,\alpha}$  é uma transformação que preserva distâncias.”.

### 3.2.3 Reflexão

A simetria por reflexão ocorre quando um objeto ou imagem pode ser refletido em relação a um eixo linear, chamado de eixo de simetria, possibilitando se corresponder ponto a ponto com a imagem original. É o mesmo que acontece quando uma pessoa encontra-se em frente a um espelho plano, sua imagem é simétrica a ele. Rohde (1982, p. 20) considera que “[...] Um objeto, ente ou forma que possui simetria de reflexão tem um plano imaginário que o divide em duas partes idênticas, de natureza especular.”

“Uma reflexão em relação a uma reta  $r$  é também chamada de simetria axial em relação a  $r$  (eixo de simetria). [...] Seja  $r$  uma reta. Uma figura é obtida de outra por uma **reflexão** de eixo  $r$  se: - cada ponto  $P$  da figura original está na mesma perpendicular a  $r$  que o ponto  $P'$  correspondente da figura refletida -  $P$  e  $P'$  distam igualmente de  $r$ , e situam-se em semi-planos distintos em relação a  $r$ . Para definir uma reflexão, basta portanto fixar o eixo de simetria  $r$ .” (NASSER; SOUSA; PEREIRA, 2004, p. 4, grifo do autor).

Segundo Santos (2013, p. 25), “A reflexão ocorre por meio de uma reta que se denomina eixo de simetria ou de reflexão [...] A reflexão, portanto, é uma transformação  $R : \Pi \rightarrow \Pi$ , que a cada ponto  $A \in \Pi$ , é levado em um ponto  $A'$ , em que o eixo de rotação é a mediatriz do segmento  $AA'$ ”. Usaremos a notação  $R_X(P)$  para representar a reflexão de um ponto qualquer desse plano  $P$  em relação a  $X$ , ou seja;  $P' = R_X(P)$  se e somente se  $X$  é o ponto médio do segmento  $PP'$ .

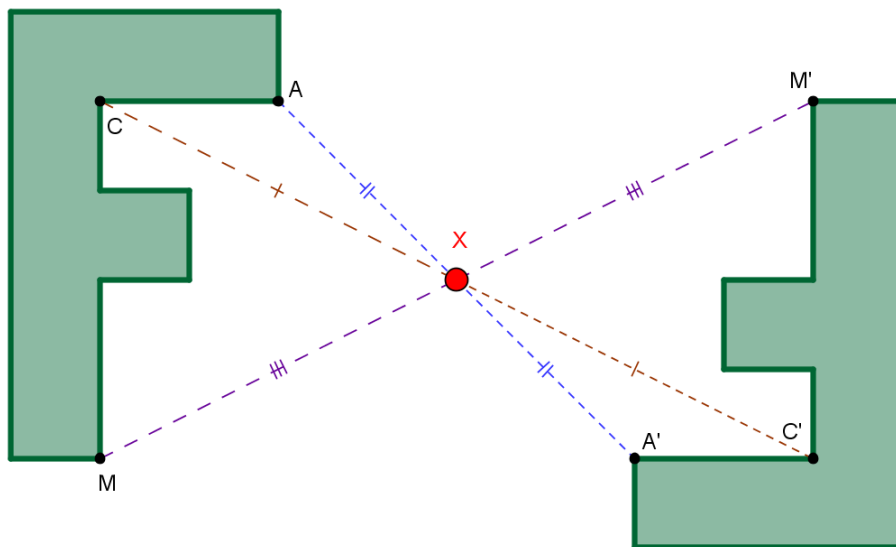


Figura 3.17 – Reflexão de um polígono em torno de um ponto fixo.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Conforme Ribeiro (2016, p. 98, grifo do autor), “O ponto  $A'$  é dito ser obtido do ponto  $A$  através de uma **reflexão em torno de  $M$**  (chamado de centro de simetria) se

$M$  é o ponto médio do segmento  $AA'$ .”. Para esses autores, a reflexão em torno de um ponto também pode ser chamada de meia-volta, meio-giro (*half turn*), ou até de rotação de  $180^\circ$ . O conjunto de todos os pontos obtidos de um dado polígono  $\mathbf{F}$  por uma reflexão em torno de um ponto  $X$  dado, forma a figura  $\mathbf{F}'$ , da mesma forma a figura  $\mathbf{F}$  é obtida de  $\mathbf{F}'$  pela reflexão em torno do mesmo ponto  $X$ , conforme apresentado na Fig. 3.17.

Para Ribeiro (2016, p. 107, grifo do autor), “[...] aquela que é considerada, sob um certo aspecto, a mais importante classe de isometrias no plano, a *Reflexão em torno de uma reta*, muitas vezes chamada simplesmente de ‘Reflexão’ ou mais comumente ainda de **Simetria**.”. Para esse autor, a razão dessa importância é a de se poder obter qualquer isometria do plano usando apenas reflexões em relação a retas, lembrando que toda isometria Euclidiana é uma combinação dos três tipos fundamentais: reflexão, translação e rotação. Nas palavras de Ribeiro (2016, p. 107, grifo do autor), “Seja  $r$  uma reta no plano  $\Pi$ . A *reflexão em relação a essa reta  $r$*  é a função  $R_r : \Pi \rightarrow \Pi$  assim definida:  $R_r(X) = X \forall X \in r$ , e para  $X \notin r$ ,  $R_r(X) = X'$  é tal que a mediatriz do segmento  $XX'$  é a reta  $r$ .”.

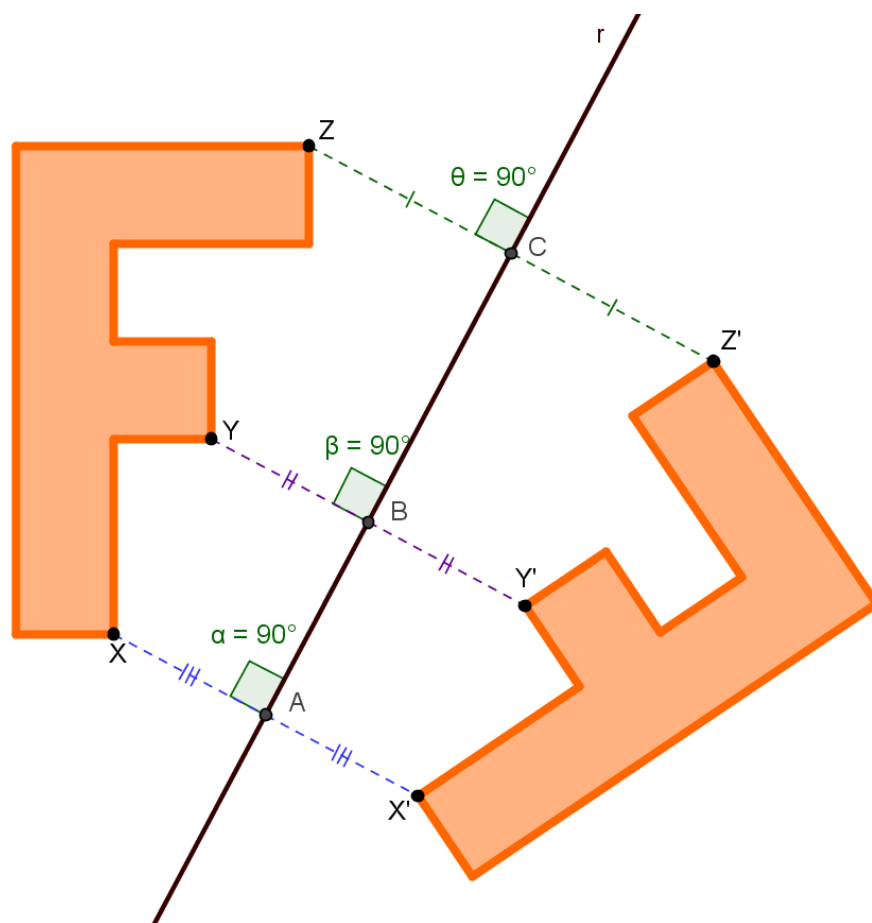


Figura 3.18 – Reflexão de um polígono em torno de uma reta.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Na Fig. 3.18 observe que: (i)  $A$  representa tanto o ponto médio do segmento  $XX'$  como o ângulo reto  $\alpha$  formado pela intersecção desse segmento com a reta  $r$ ; (ii)  $B$  representa tanto o ponto médio do segmento  $YY'$  como o ângulo reto  $\beta$  formado pela

intersecção desse segmento com a reta  $r$  e (iii)  $C$  representa tanto o ponto médio do segmento  $ZZ'$  como o ângulo reto  $\theta$  formado pela intersecção desse segmento com a reta  $r$ . Assim,  $X'$  é imagem de  $X$ ,  $Y'$  é imagem de  $Y$ ,  $Z'$  é imagem de  $Z$  e  $r$  é chamada de eixo de simetria. Note que a imagem de uma figura por reflexão mantém sua forma e dimensões, mas em posição espelhada em relação ao eixo de simetria e coincide com a rotação de  $180^\circ$ .

### 3.2.4 Reflexão Transladada

De acordo com Ribeiro (2016, p. 115, grifo do autor), “**Reflexão com deslizamento** (*Glide Reflexion*) ou **Reflexão transladada** ou **translação refletida** num determinado eixo, é a isometria resultado da soma de uma reflexão em relação a uma reta e uma translação na direção desta reta.”. Sendo assim, trata-se de uma composição de uma reflexão com uma translação, em que o eixo de reflexão e o vetor de translação possuem a mesma direção.

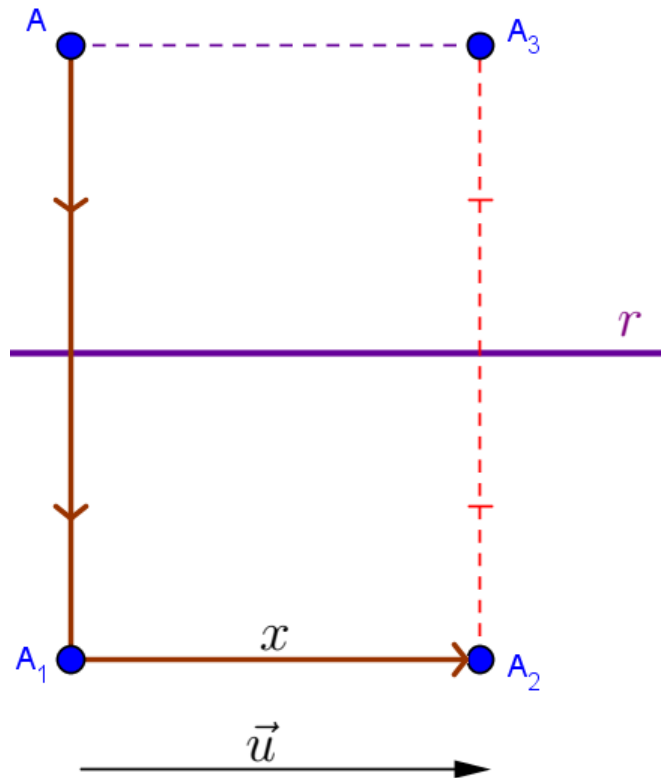


Figura 3.19 – Reflexão de um ponto com deslizamento numa reta.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A Fig. 3.19 apresenta o ponto  $A_1$  como a imagem do ponto  $A$  em relação a reta  $r$  (Reflexão); o ponto  $A_2$  é obtido de  $A_1$  por uma translação em  $\vec{u}$  (vetor de translação). Observe que o ponto  $A_2$  foi obtido do ponto  $A$  por uma reflexão com deslizamento no eixo  $r$  através de  $\vec{u}$  (reflexão transladada). A soma pode ser obtida em outra ordem,  $A_3$  é obtido de  $A$  por uma translação através da distância  $x$  na direção de  $r$  e  $A_2$  é obtido de  $A_3$  por uma reflexão em relação a  $r$  (translação refletida).

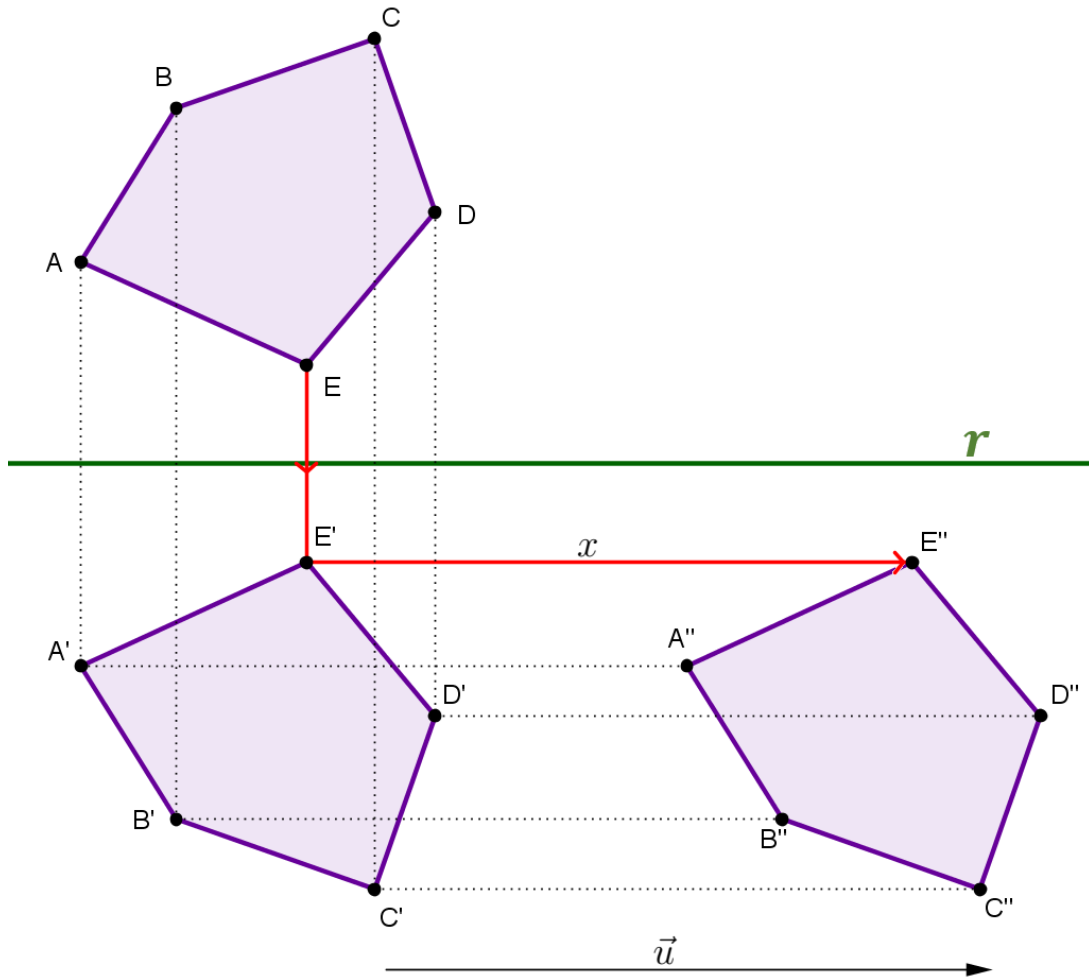


Figura 3.20 – Reflexão de um polígono com deslizamento numa reta.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Na Fig. 3.20 ocorre a reflexão com deslizamento do  $\text{Polígono}_{[A,B,C,D,E]}$ . Observe que o  $\text{Polígono}_{[A',B',C',D',E']}$  representa a sua reflexão na reta  $r$ , seguida por uma translação em  $\vec{u}$ , mediante um deslocamento  $x$  (vetor de translação), resultando no  $\text{Polígono}_{[A'',B'',C'',D'',E']}$  (reflexão transladada).

### 3.3 GEOMETRIA DOS FRACTAIS E SUA SIMETRIA DE AUTOSSEMELHANÇA

Existe uma geometria onde encontramos objetos matemáticos que possuem uma dimensão fracionária, denominados fractais. A palavra fractal vem do adjetivo *fractus*, do verbo *frangere*, em latim, que significa quebrar, fragmentar; e foi criada em 1975 por Mandelbrot<sup>2</sup> em uma de suas primeiras obras. Segundo Mandelbrot (1982, p. 15), “A fractal is a set whose Hausdorff-Besicovitch dimension strictly exceeds its topological dimension.”, o que em tradução livre significa: Um fractal é um conjunto cuja dimensão

<sup>2</sup> Benoît B. Mandelbrot (1924-2010) foi um matemático francês; ajudou a cunhar o termo fractal e desenvolveu sobremaneira a Geometria Fractal, inclusive sendo pioneiro na geração de imagens de fractais via computação gráfica. (MENDONÇA, 2016, p. 12).

de Hausdorff-Besicovitch excede estritamente sua dimensão topológica. A respeito de seu alcance na natureza, Michael Barnsley (*Fractals Everywhere*<sup>3</sup>) afirma que:

“A geometria fractal fará com que você veja as coisas diferente. É perigoso ler mais. Você arrisca perder a visão infantil de nuvens, florestas, flores, galáxias, folhas, penas, rochas, montanhas, torrentes de água, tapetes, tijolos e muito mais. Nunca mais você interpretará estes objetos da mesma forma.” (AMARAL, 2012, p. 1).

Conforme Barros (2017), a dimensão de Hausdorff-Besicovitch refere-se a uma definição matemática introduzida em 1918 por Felix Hausdorff, para o dimensionamento de superfícies regulares, e que foi aperfeiçoada pelo matemático russo Adam Besicovitch, para lidar também com conjuntos altamente irregulares. É possível considerá-la como uma expansão da dimensão topológica, sendo obtida a partir do conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ , fazendo-se a inclusão de dois elementos:  $+\infty$  e  $\infty$ . Como a definição inicial apresentada por Mandelbrot recebeu críticas por não abranger alguns objetos que também eram considerados fractais, ele passou a considerar que um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos. Para Mucheroni (2017),

“A natureza em geral é constituída por diversas formas nas quais predominam a irregularidade e o caos. Tentar simplificá-las usando figuras da geometria clássica, como triângulos, círculos ou esferas seria inadequado. Em contrapartida, encontramos uma boa aproximação para estas formas na geometria fractal, cujas estruturas fornecem certa ordem ao irregular. Por tal motivo ela está intimamente ligada à ciência do Caos podendo até ser considerada a linguagem do caos.” (MUCHERONI, 2017, p. 51).

Barbosa (2007) conceitua a Geometria Fractal como sendo uma linguagem matemática que descreve, analisa e modela as formas encontradas na natureza, sendo essa uma área da matemática componente da ciência do Caos, juntamente com os Sistemas Dinâmicos. Para Mendonça (2016, p. 12), “Os fractais são formas geométricas elementares, cujo padrão pode repetir-se indefinidamente, gerando complexas figuras que preservam em cada uma de suas partes a singularíssima propriedade de representar o todo.”. Os modelos de estrutura fractal são utilizados para que a ciência possa descrever ou representar diversos processos naturais. As características apresentadas em Nussenzveig (1999), reúnem um pouco de cada uma dessas definições de fractal:

“• Auto-similaridade - É a semelhança que uma parte tem com o todo. Pode ser exata, aproximada ou estatística, mas em qualquer desses casos mantém uma semelhança independente da escala que observamos

<sup>3</sup> Em tradução livre: Fractais em toda parte.

o objeto; • Complexidade infinita - Qualquer que seja a ampliação do objeto fractal, poderíamos seguir ampliando pois nunca teríamos uma imagem finalizada; • Irregularidade - No sentido de rugosidade (não-suavidade) ou fragmentação; • Dimensão não-inteira - A maioria dos objetos fractais apresentam dimensão não inteira. A dimensão fractal quantifica, de certo modo, o grau de irregularidade, fragmentação ou intensidade do conjunto considerado.” (RABAY, 2013, p. 17-18).

Antes da definição de fractais apresentada por Mandelbrot, de acordo com Zanotto (2015, p. 40), “[...] já existiam alguns objetos matemáticos com características dos mesmos, dentre eles o Conjunto de Cantor; a Curva de Peano; a Curva de Hilbert; a Curva de Koch; o Triângulo e o Tapete de Sierpinski e o de Fatou e Julia.”. Conforme depreende-se da leitura de Mucheroni (2017), ao longo da história, muitos matemáticos como George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), Giuseppe Peano (1858-1932), David Hilbert (1862-1943), Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924), Waclaw Sierpinski (1882-1969), Karl Menger (1902-1985) e outros, estudaram algumas dessas figuras que não se enquadravam nas definições da geometria euclidiana.

Para Mucheroni (2017, p. 52), “Em geral, os fractais tornam-se figuras com grande beleza e complexidade, nas quais cada parte é semelhante ao todo.”. Um exemplo dessa situação pode ser encontrado no fractal conhecido como samambaia de Barnsley, que forma uma figura muito semelhante a uma folha real de samambaia, contudo trata-se de uma figura que pode ser construída por meio do uso de um computador, conforme se apresenta na Fig. 3.21, a seguir.

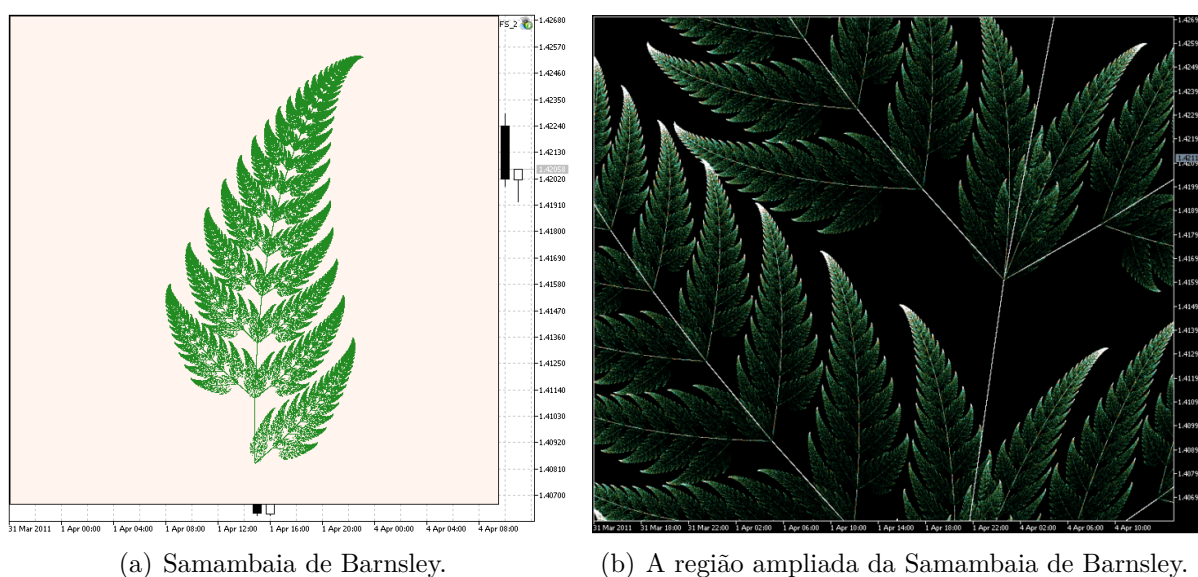


Figura 3.21 – A famosa Samambaia de Barnsley, proposta por Michael Barnsley.

Fonte: <https://www.mq15.com/pt/code/328> (2020).

De acordo com Mucheroni (2017, p. 52), “Tais figuras ficaram conhecidas como ‘monstros matemáticos’. Tempos depois, com os estudos de Benoit Mandelbrot, esses

monstros matemáticos passaram a ser chamados de Fractais Clássicos.”. Para fins didáticos e visando facilitar a compreensão das características e propriedades relacionadas aos objetos fractais e suas construções, Rabay (2013, p. 12) afirma que “Podemos agrupar os fractais em três grupos de acordo com a forma de geração e o grau de autossimilaridade observada [...]”. São eles: Fractais definidos por sistemas de funções iteradas; Fractais definidos por uma relação de recorrência e Fractais aleatórios.

### 3.3.1 Fractais definidos por sistemas de funções iteradas

Como indicado em Mendonça (2016, p. 31), “Esse tipo de fractal foi muito comum antes de Mandelbrot batizá-los de fractal, pois os matemáticos iam formando figuras a partir de uma regra, e quando se davam conta a representação geométrica ‘fugia’ de tudo que era conhecido até então [...]”, em outras palavras, acabavam criando padrões inexplorados pela geometria conhecida”. Denominado fractal determinístico ou geométrico, possui uma regra fixa de substituição geométrica bem definida. Para Rabay (2013, p. 13), “[...] Os fractais gerados por funções iterativas possuem autossimilaridade exata, característica marcante e evidente.”.

Assim, o fractal é idêntico em diferentes escalas, sendo eles: o Conjunto de Cantor, a Curva de Peano, a Curva e a Ilha de Koch, o Tapete e o Triângulo de Sierpinski, a Curva do Dragão de Harter-Heighway, a Esponja de Menger e a Curva de Hilbert. Conforme indicado em Rabay (2013, p. 13), esses objetos fractais podem ser classificados em grupos, de acordo com suas formas geradoras em: Fractais pela Fronteira, Fractais por Remoção, Fractais Tipo Dürer e Fractais Tipo Árvore.

#### 3.3.1.1 Fractais pela Fronteira

De acordo com Rabay (2013, p. 13), “As funções iteradas para construção de fractais pela fronteira são definidas a partir da substituição de uma determinada parte pelo seu gerador, aumentando-se assim o seu comprimento ou área a cada iteração.”. Para Zanotto (2015, p. 30), “O método da fronteira consiste em formar uma iteração por meio de um aumento em determinado ‘pedaço’ do fractal, ou seja, a partir de um todo dividimos ele em partes iguais”. Assim, após substituirmos algumas dessas partes por mais de mesma medida, formaremos um conjunto de comprimento maior que o inicial, o que podemos verificar nos seguintes objetos fractais: Curva de Peano, Curva de Koch, Ilha de Koch ou Floco de Neve de Koch, Curva de Hilbert e Curva do Dragão de Harter-Heighway.

##### 3.3.1.1.1 *Curva de Peano*

Possuem autossimilaridade estatística, sendo a forma menos evidente de autosimilaridade. A similaridade desse grupo de fractal está nas medidas numéricas ou estatísticas

que são preservadas em diferentes escalas, tendo como consequência a preservação da dimensão fractal.

Segundo Zanotto (2015, p. 41), a Curva de Peano foi “proposta de forma a preencher completamente um espaço bidimensional (como um quadrado). Estudando a curva de Peano, observamos que a curva vai preenchendo uma região quadrada cuja diagonal é dada pelo segmento inicial.”, podendo ser observado na Fig. 3.22, que se segue. Inicialmente considere um segmento de reta com um tamanho qualquer, divida-o em três partes iguais e complete um quadrado para cima e para baixo na divisão central; considere os novos segmentos de reta e retorne os passos anteriores repetidamente. Conforme Mucheroni (2017, p. 56), “Repetindo esse processo sucessivamente e indefinidamente obtém-se a Curva de Peano.”.

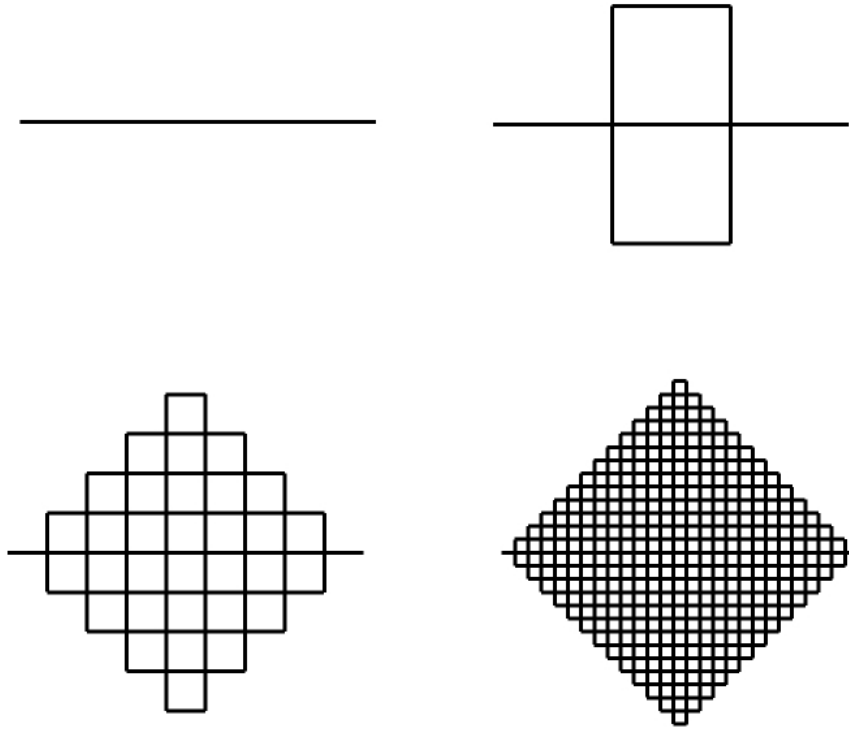


Figura 3.22 – Três iterações da Curva de Peano.

Fonte: Zanotto (2015, p. 43).

Para se calcular o comprimento total  $C_{t_n}$  da curva de Peano (Fig. 3.22), denotaremos  $L$  como sendo o comprimento inicial,  $n$  para o número de iteração e  $I_n$  como sendo o número de segmentos. Inicialmente teremos  $I_0 = 1 = 9^0$ , pois temos apenas um segmento. Fazendo a primeira iteração, teremos  $I_1 = 9 = 9^1$ , ou seja, teremos 9 segmentos. Prosseguindo com as iterações, teremos:  $I_2 = 81 = 9^2$ ;  $I_3 = 729 = 9^3$ ; e assim sucessivamente, tornando-se evidente que para  $n$  iterações teremos  $I_n = 9^n$ .

Em relação ao comprimento  $C_n$  de cada um desse(s) segmento(s), teremos que:  $C_0 = L = \frac{L}{3^0}$ , após a primeira iteração teremos  $C_1 = \frac{L}{3} = \frac{L}{3^1}$ , na segunda iteração  $C_2 = \frac{L}{9} = \frac{L}{3^2}$ , na terceira iteração  $C_3 = \frac{L}{27} = \frac{L}{3^3}$ , concluindo que para  $n$  iterações teremos

cada segmento medindo  $C_n = \frac{L}{3^n}$ . Tendo então o número de segmentos  $I_n$  de cada iteração e o tamanho de cada segmento por iteração  $C_n$ , pode-se obter o comprimento total  $C_{t_n}$  simplesmente multiplicando o número total de segmentos pelo comprimento de cada segmento na iteração, ou seja:  $C_{t_n} = I_n \cdot C_n = 9^n \cdot \frac{L}{3^n} = 3^n L$ .

### 3.3.1.1.2 Curva de Koch

Conforme Mendonça (2016, p. 44), “A curva de Koch é formada a partir de um segmento inicial, unitário. Dividimo-lo em três partes iguais; com o terço central, construímos um triângulo equilátero, e eliminamos o terço central, obtendo a primeira iteração.”, e desse modo obteremos quatro segmentos idênticos. Assim, repetindo sucessivamente o mesmo procedimento com cada um desses segmentos, onde se de cada segmento fizermos a substituição do terço central por dois lados de um triângulo equilátero que terá em sua composição esse lado suprimido, teremos a curva de Koch em seus diversos níveis. A Fig. 3.23 apresenta a Curva de Koch com 5 iterações.

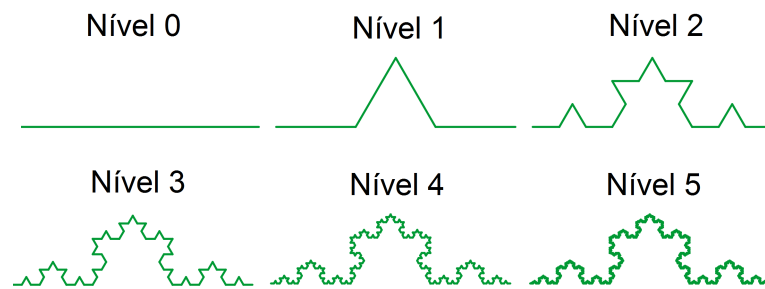


Figura 3.23 – Curva de Koch com 5 iterações.

Fonte: Rabay (2013, p. 15).

Analisando a Fig. 3.23, denotando  $n$  para o número de iteração e  $I_n$  como sendo o número de segmentos, temos que:  $I_0 = 1 = 4^0$ ;  $I_1 = 4 = 4^1$ ;  $I_2 = 16 = 4^2$ ;  $I_3 = 64 = 4^3$  e assim sucessivamente, tornando-se evidente que para  $n$  iterações teremos  $I_n = 4^n$ . Em relação ao comprimento  $C_n$  de cada um desse(s) segmento(s), tomemos um segmento inicial de comprimento  $L$ , assim teremos que:  $C_0 = L = \frac{L}{3^0}$ , após a primeira iteração teremos  $C_1 = \frac{L}{3} = \frac{L}{3^1}$ , na segunda iteração  $C_2 = \frac{L}{9} = \frac{L}{3^2}$ , na terceira iteração  $C_3 = \frac{L}{27} = \frac{L}{3^3}$ , até que para  $n$  iterações tenhamos cada segmento medindo  $C_n = \frac{L}{3^n}$ . Tendo então o número de segmentos  $I_n$  de cada iteração e o tamanho de cada segmento por iteração  $C_n$ , pode-se obter o comprimento total  $C_{t_n}$  bastando multiplicar o número total de segmentos pelo comprimento de cada segmento na iteração, ou seja:  $C_{t_n} = I_n \cdot C_n = 4^n \cdot \frac{L}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n L$ .

### 3.3.1.1.3 Ilha de Koch

De acordo com Zanotto (2015, p. 46-47), “Uma curiosidade da curva de Koch é que ela também pode ser aplicada aos lados de um triângulo equilátero, gerando o que é conhecida como Ilha de Koch, Floco de Neve de Koch ou Estrela de Koch [...]”. Trata-se do

mesmo procedimento para obtenção da curva de Koch, porém a sua construção é iniciada a partir de um triângulo equilátero, conforme Fig. 3.24. Rabay (2013, p. 46) aponta que “[...] Este fractal é também denominada de Floco de Neve de Koch pela semelhança que apresenta com um floco de neve [...]”. Para Mendonça (2016, p. 45), “[...] Devido à simetria perfeita do Floco de Koch, podemos considerá-lo, após as diversas repetições do procedimento de sua construção, como um floco de neve de formação ideal.”

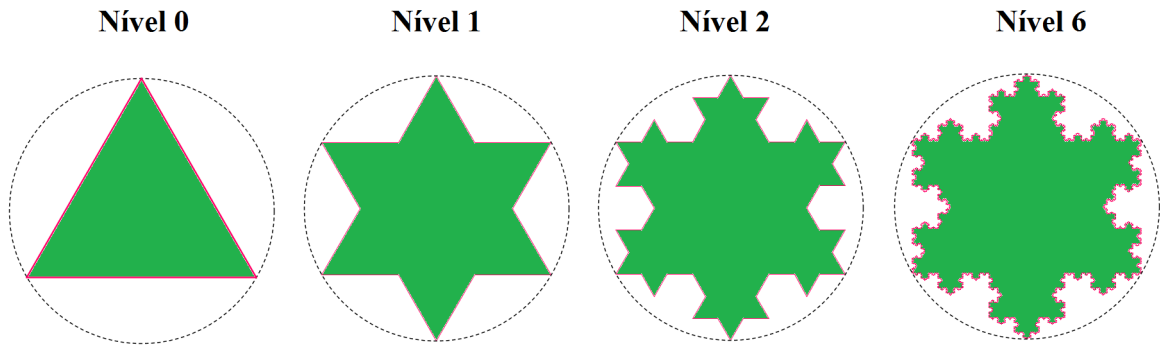


Figura 3.24 – Ilha de Koch inscrita em uma circunferência, com uma, duas e seis iterações.

Fonte: Rabay (2013, p. 46).

Na Fig. 3.24, denotaremos  $n$  para o número de iteração e  $I_n$  como sendo o número de segmentos, temos que:  $I_0 = 3 = 3 \cdot 4^0$ ;  $I_1 = 12 = 3 \cdot 4^1$ ;  $I_2 = 48 = 3 \cdot 4^2$ ;  $I_3 = 192 = 3 \cdot 4^3$  e assim sucessivamente, tornando-se evidente que para  $n$  iterações teremos  $I_n = 3 \cdot 4^n$ . Em relação ao comprimento  $C_n$  de cada um desses segmentos, tomemos um segmento inicial de comprimento  $L$ , assim teremos que:  $C_0 = L = \frac{L}{3^0}$ , após a primeira iteração teremos  $C_1 = \frac{L}{3} = \frac{L}{3^1}$ , na segunda iteração  $C_2 = \frac{L}{9} = \frac{L}{3^2}$ , na terceira iteração  $C_3 = \frac{L}{27} = \frac{L}{3^3}$ , até que para  $n$  iterações tenhamos cada segmento medindo  $C_n = \frac{L}{3^n}$ . Tendo então o número de segmentos  $I_n$  de cada iteração e o tamanho de cada segmento por iteração  $C_n$ , pode-se obter o comprimento (perímetro) total  $C_{t_n}$  bastando multiplicar o número total de segmentos pelo comprimento de cada segmento na iteração, ou seja:  $C_{t_n} = I_n \cdot C_n = (3 \cdot 4^n) \cdot \frac{L}{3^n} = 3 \cdot \left(\frac{4^n}{3^n}\right) \cdot L = 3 \left(\frac{4}{3}\right)^n L$ .

#### 3.3.1.1.4 Curva de Hilbert

A curva de Hilbert é formada a partir de um quadrado inicial unitário e para reproduzi-la, segundo Mendonça (2016, p. 41), “[...] Dividimo-lo em quatro quadrados iguais, e tracemos a poligonal aberta que une seus pontos centrais, tendo a primeira iteração. A partir daí, as outras iterações são formadas de acordo com a mesma regra [...]”. A Fig. 3.25 apresenta a Curva de Hilbert, dos níveis 0 a 6 e, ainda, no  $n$ -ésimo nível, com  $n \rightarrow \infty$ . Ao observá-la, percebe-se que a curva preenche cada vez mais o quadrado unitário inicial, sendo que no limite teremos o quadrado todo “percorrido” pela curva de Hilbert.

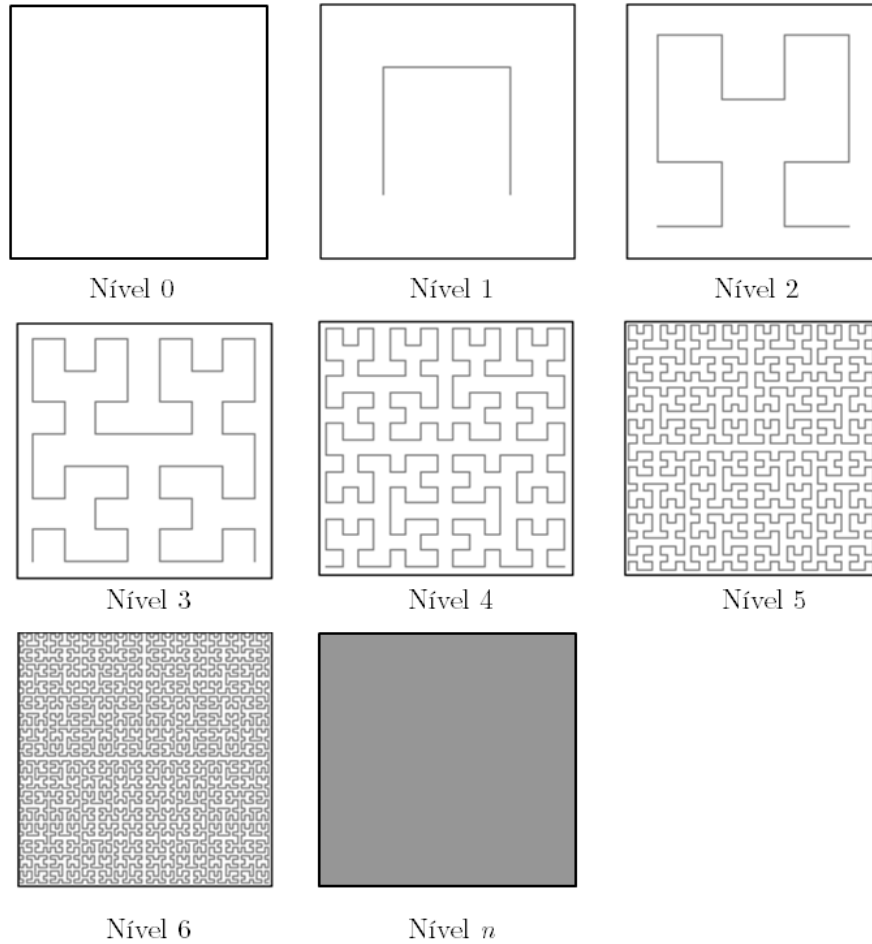


Figura 3.25 – Curva de Hilbert, dos níveis 0 a 6, e  $n$ -ésimo nível, sendo que  $n \rightarrow \infty$ .

Fonte: Mendonça (2016, p. 42).

Analisando a Fig. 3.25, denotando  $n$  para o número de iteração,  $q$  para a quantidade de quadrados e  $I_n$  como sendo o número de segmentos, temos que:  $I_0 = 0 = 4^0 - 1$ ;  $I_1 = 3 = 4^1 - 1$ ;  $I_2 = 15 = 4^2 - 1$ ;  $I_3 = 63 = 4^3 - 1$ ; e assim sucessivamente, consegue-se calcular a quantidade de segmentos dessa curva para  $n$  iterações, com  $I_n = 4^n - 1$ . Em relação a quantidade de quadrados iguais que teremos de dividir o quadrado unitário inicial para cada iteração, temos:  $q_0 = 1 = 4^0$ ;  $q_1 = 4 = 4^1$ ;  $q_2 = 16 = 4^2$ ;  $I_3 = 64 = 4^3$ ; verificando que para  $n$  iterações, teremos a quantidade de quadrados obtidos por  $q_n = 4^n$ .

Para saber o comprimento  $C_n$  de cada um desse(s) segmento(s), observe que:  $C_0 = 1 = \frac{1}{2^0}$ ; após a primeira iteração teremos  $C_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$ ; na segunda iteração  $C_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$ ; na terceira iteração  $C_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$ ; verificando que para  $n$  iterações, cada segmento medirá  $C_n = \frac{1}{2^n}$ . Assim, sabendo o número de segmentos  $I_n$  de cada iteração e o tamanho de cada segmento por iteração  $C_n$ , pode-se obter o comprimento total dessa curva  $C_{t_n}$  bastando multiplicar o número total de segmentos pelo comprimento de cada segmento nessa iteração, ou seja:  $C_{t_n} = I_n \cdot C_n = (4^n - 1) \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right) = 2^n - \frac{1}{2^n}$ . Vale ressaltar que como o quadrado inicial é unitário, o valor do comprimento total dessa curva estará

em função apenas do número de iteração  $n$ .

### 3.3.1.1.5 Curva do Dragão de Harter-Heighway

Segundo Dalpiaz (2016, p. 39, grifo do autor), esse fractal é “[...] também conhecido como Curva de (ou do) Dragão Harter-Heighway ou Dragão ‘Jurassic Park’ [...] A medida em que a poligonal é iterada mais e mais vezes, uma curva conhecida como *Curva do Dragão* é construída.”. Seu nome de *Jurassic Park* se deve a sua aparição famosa no livro *Jurassic Park*, de Michael Crichton. Ela é construída a partir de um segmento unitário, obedecendo a uma iteração que se duplica a cada nível (Fig. 3.26). Para Mendonça (2016, p. 49), “[...] A regra de construção é substituir cada segmento por um triângulo retângulo e isósceles, suprimindo-se a base do triângulo, que pertencia à curva na iteração anterior.”.

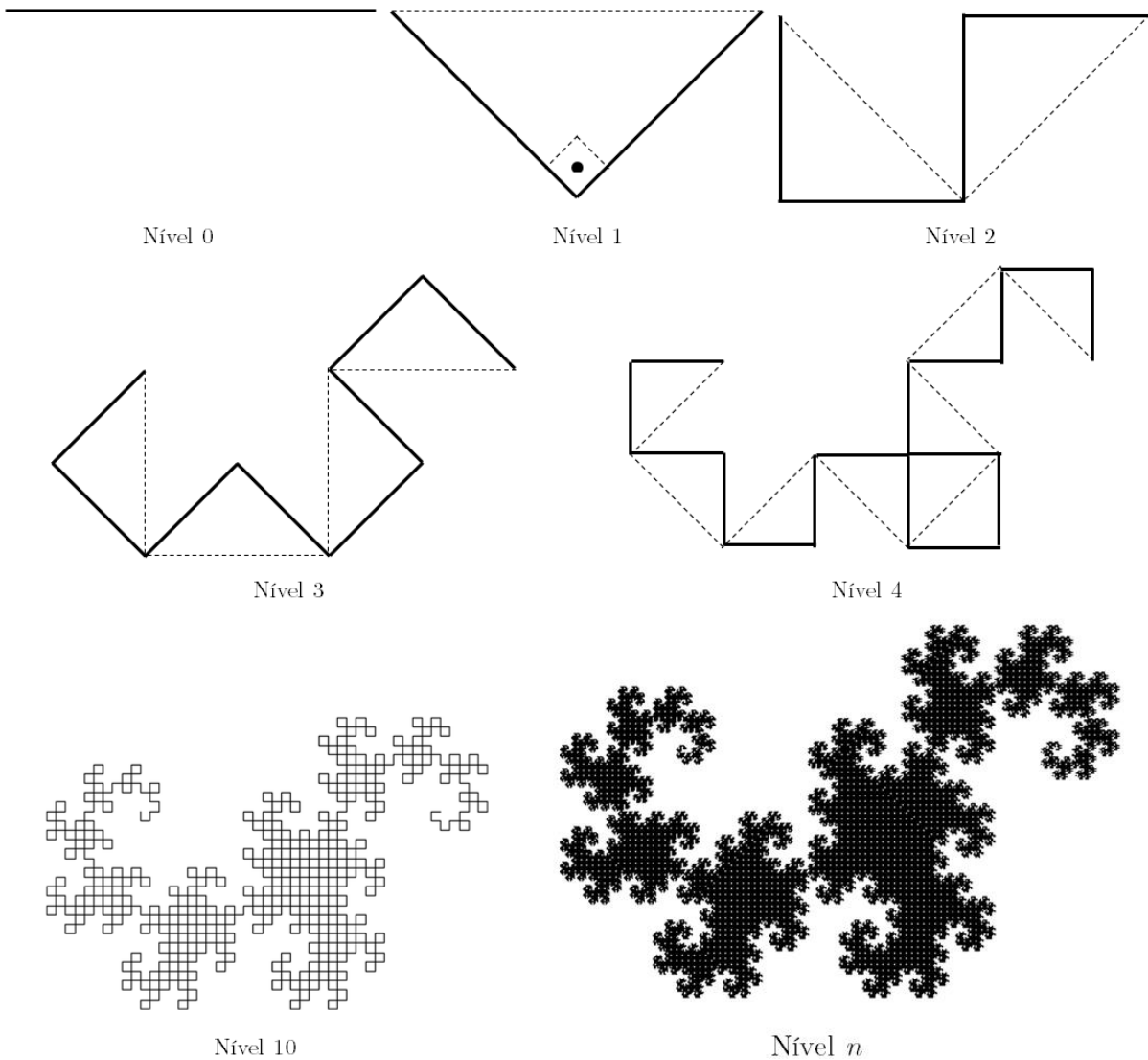


Figura 3.26 – Curva do Dragão de Harter-Heighway, dos níveis 0 a 4, além dos níveis 10 e  $n$ , com  $n \rightarrow \infty$ .

Fonte: Mendonça (2016, p. 49-50).

Portanto, a Fig. 3.26 representa um fractal descrito por uma curva que passa por um processo iterativo, iniciando com um segmento básico de uma linha reta e, a cada iteração, cada linha é substituída por dois segmentos de linha com ângulo de  $90^\circ$  entre eles, sendo que cada linha é girada alternadamente para a esquerda ou para a direita da linha que está substituindo, sendo que a construção é feita no sentido da esquerda para a direita. Essa alternância é apontada por Mendonça (2016, p. 49, grifo do autor), onde “[...] os segmentos de posição ímpar (primeiro, terceiro, quinto, ...) são substituídos por um triângulo de vértice *abaixo* do segmento, e os segmentos de posição par (segundo, quarto, sexto, ...) são substituídos por um triângulo de vértice *acima* do segmento [...]”.

Analisando a Fig. 3.26, denotando  $n$  para o número de iteração e  $I_n$  como sendo o número de segmentos, temos que:  $I_0 = 1 = 2^0$ ;  $I_1 = 2 = 2^1$ ;  $I_2 = 4 = 2^2$ ;  $I_3 = 8 = 2^3$  e assim sucessivamente, tornando-se evidente que para  $n$  iterações teremos uma quantidade de segmentos equivalente a  $I_n = 2^n$ . Para saber o comprimento  $C_n$  de cada um desse(s) segmento(s), observe que:  $C_0 = 1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^0$ , pois inicia-se com segmento unitário; após iniciarmos as iterações, o número de segmentos é duplicado em relação a etapa anterior e seu comprimento é multiplicado por  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , onde teremos:  $C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^1$ ;  $C_2 = \frac{1}{\sqrt{4}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ ;  $C_3 = \frac{1}{\sqrt{8}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$ ; verificando que para  $n$  iterações, cada segmento medirá  $C_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ .

Assim, sabendo o número de segmentos  $I_n$  de cada iteração e o tamanho de cada segmento por iteração  $C_n$ , pode-se obter o comprimento total dessa curva  $C_{t_n}$  bastando multiplicar o número total de segmentos pelo comprimento de cada segmento nessa iteração, ou seja:  $C_{t_n} = I_n \cdot C_n = (2^n) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = (\sqrt{2})^n$ . Desse modo, o comprimento total para as iterações apresentadas na Fig. 3.26 são:  $C_{t_0} = (\sqrt{2})^0 = 1$ ;  $C_{t_1} = (\sqrt{2})^1 = \sqrt{2}$ ;  $C_{t_2} = (\sqrt{2})^2 = 2$ ;  $C_{t_3} = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$ ;  $C_{t_4} = (\sqrt{2})^4 = 4$ ;  $C_{t_{10}} = (\sqrt{2})^{10} = 32$  e  $C_{t_3} = (\sqrt{2})^2 = \sqrt{2^n}$ .

### 3.3.1.2 Fractais por Remoção

Como indicado em Rabay (2013, p. 16), “Os fractais por remoção, conforme o nome sugere, são objetos em que são removidas partes do mesmo de forma iterativa.”. Assim, esse método consiste em criar um fractal por meio da remoção de partes dele. Esse tipo de construção pode ser observado nos seguintes objetos fractais: Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski ou Quadrado de Sierpinski, Esponja de Menger e Conjunto de Cantor.

#### 3.3.1.2.1 Triângulo de Sierpinski

De acordo com Zanotto (2015, p. 48), “O Triângulo de Sierpinski é uma figura geométrica obtida através de um processo recursivo de remoção de partes. Trata-se de um conjunto autossimilar de um triângulo equilátero [...]”. Para construir o Triângulo

de Sierpinski ou Cesta de Sierpinski, segundo Mendonça (2016, p. 37), “consideremos um triângulo equilátero de lado unitário. Unindo-se os três pontos médios dos lados do triângulo, obtém-se um triângulo central; daí, retiramos a área deste último em relação à área anterior, e efetuamos a primeira iteração.”. Para cada iteração seguinte, repete-se a operação nos triângulos restantes (triângulos “cheios”), ou seja, retira-se o triângulo formado pelos pontos médios de seus lados.

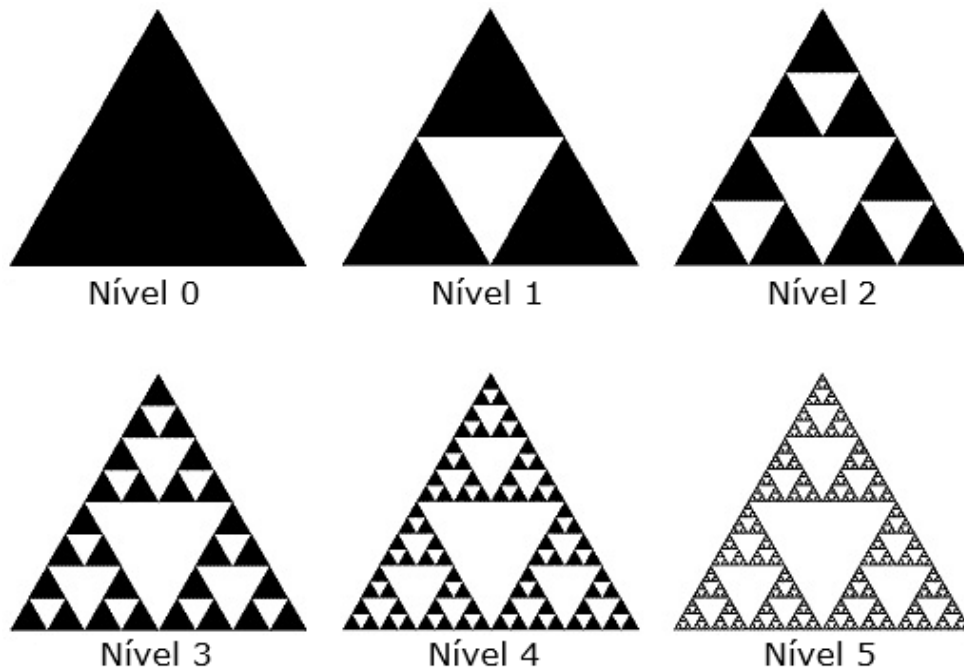


Figura 3.27 – Cinco Iterações do Triângulo de Sierpinski.

Fonte: Adaptado de Zanotto (2015, p. 48).

Analisaremos a Fig. 3.27 denotando  $L$  para o comprimento inicial dos lados do triângulo,  $n$  para o número de iteração,  $I_n$  para a quantidade de triângulos gerados e  $C_n$  como sendo o comprimento do lado de cada um desses triângulos. Desse modo, a quantidade de triângulos em cada iteração apresentada será:  $I_0 = 1 = 3^0$ ;  $I_1 = 3 = 3^1$ ;  $I_2 = 9 = 3^2$ ;  $I_3 = 27 = 3^3$ ;  $I_4 = 81 = 3^4$  e  $I_5 = 243 = 3^5$ , ficando evidente que para  $n$  iterações, teremos  $I_n = 3^n$ . Quanto ao comprimento do lado de cada triângulo  $C_n$ , teremos:  $C_0 = L = L \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0$ ;  $C_1 = \frac{L}{2} = L \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1$ ;  $C_2 = \frac{L}{4} = L \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ ;  $C_3 = \frac{L}{8} = L \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$ ;  $C_4 = \frac{L}{16} = L \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$  e  $C_5 = \frac{L}{32} = L \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$ , levando a conclusão que para  $n$  iterações, teremos  $C_n = L \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{L}{2^n}$ .

### 3.3.1.2.2 Tapete de Sierpinski ou Quadrado de Sierpinski

De acordo com Zanotto (2015, p. 50), “O Quadrado de Sierpinski também chamado de Tapete de Sierpinski é uma figura plana que ocorre em sua iteração a ‘retirada’ de partes [...]”. Para sua construção consideraremos, segundo Mendonça (2016, p. 33), “[...] uma região formada por um quadrado unitário e sua superfície interna, isto é, o contorno

formado pelo quadrado unido de seu interior. A lei de formação do fractal corresponde à divisão do quadrado em nove quadrados, e retirada do quadrado central [...]”. Para cada iteração seguinte, repete-se a operação, o que pode ser verificado nas quatro primeiras iterações apresentadas na Fig. 3.28.

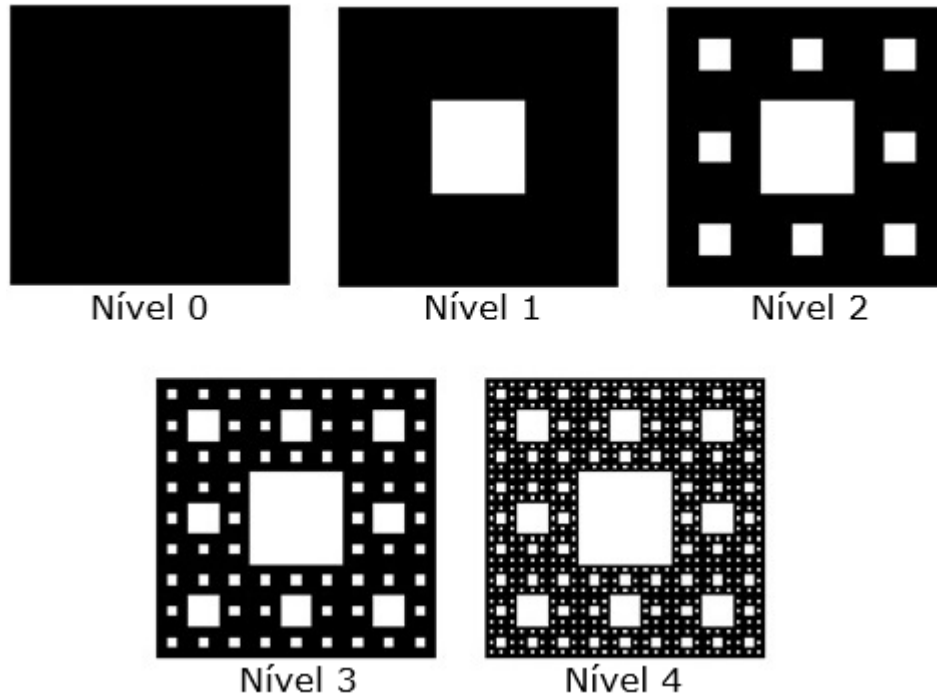


Figura 3.28 – Quatro Iterações do Tapete de Sierpinski.

Fonte: Adaptado de Zanotto (2015, p. 50).

Analisando esse fractal (Fig. 3.28), denotaremos de  $L$  o comprimento inicial do lado do quadrado,  $n$  para o número de iteração,  $I_n$  para a quantidade de quadrados gerados por cada iteração e  $C_n$  como sendo o comprimento do lado de cada um desses quadrados. Desse modo, a quantidade de quadrados em cada iteração apresentada será:  $I_0 = 1 = 8^0$ ;  $I_1 = 8 = 8^1$ ;  $I_2 = 64 = 8^2$ ;  $I_3 = 512 = 8^3$  e  $I_4 = 4096 = 8^4$ , tornando evidente que para  $n$  iterações, teremos  $I_n = 8^n$ . Quanto ao comprimento do lado de cada um desses quadrados  $C_n$ , teremos:  $C_0 = L = L \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0$ ;  $C_1 = \frac{L}{3} = L \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1$ ;  $C_2 = \frac{L}{9} = L \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$ ;  $C_3 = \frac{L}{27} = L \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$  e  $C_4 = \frac{L}{81} = L \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4$ , levando a conclusão que para  $n$  iterações, teremos  $C_n = L \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{L}{3^n}$ .

### 3.3.1.2.3 Esponja de Menger

A Esponja de Menger, para Oliveira (2016, p. 65), “[...] é um objeto geométrico construído através de um infinito processo recursivo em um cubo. Este fractal é considerando uma versão tridimensional do Conjunto de Cantor e do Tapete de Sierpinski.”. Para sua construção pode-se iniciar com um cubo unitário, em seguida divide cada face desse cubo, como indicado em Mendonça (2016, p. 51), “[...] em nove quadrados, o que implica

na divisão do cubo em 27 cubos menores. Daí, removemos os cubos centrais de cada face (6 cubos) e o cubo central da figura (interno, ocultado pelas faces), restando 20 cubos, que consiste na primeira iteração.”. Para cada iteração seguinte, repita o processo.

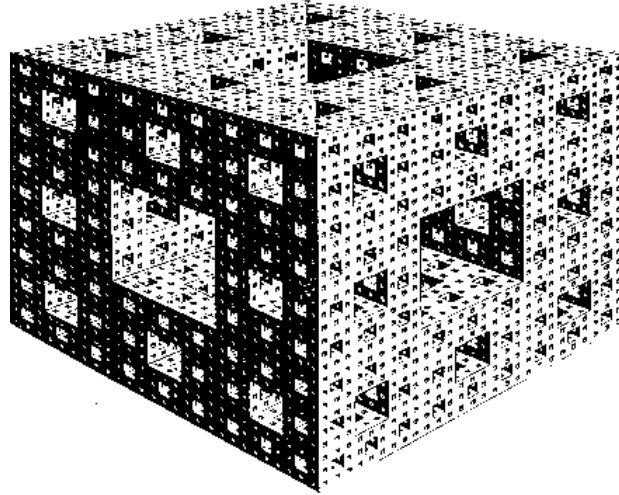


Figura 3.29 – Esponja de Menger.

Fonte: Assis *et al.* (2008, p. 9).

A Fig. 3.29 mostra a Esponja de Menger, com  $n \rightarrow \infty$ , onde  $n$  representa a quantidade de iterações. Para Assis *et al.* (2008, p. 9), “Conclui-se então, que a Esponja de Menger possui volume nulo e uma área infinita na medida em que o número de níveis tende a infinito [...]”. Para entendermos melhor o que acontece em cada uma dessas iterações, tomemos um cubo inicial (Nível 0 - Fig. 3.30) com aresta medindo  $a$ . Denotaremos de  $n$  para o número de iteração,  $a_n$  para o comprimento da aresta na iteração ou nível específico,  $CR_n$  como sendo a quantidade de cubos removidos,  $CS_n$  representando a quantidade de cubos que sobraram naquela iteração e, finalmente,  $CT_n$  para a quantidade total de cubos naquela iteração, sendo que  $CT_n = CR_n + CS_n$ .

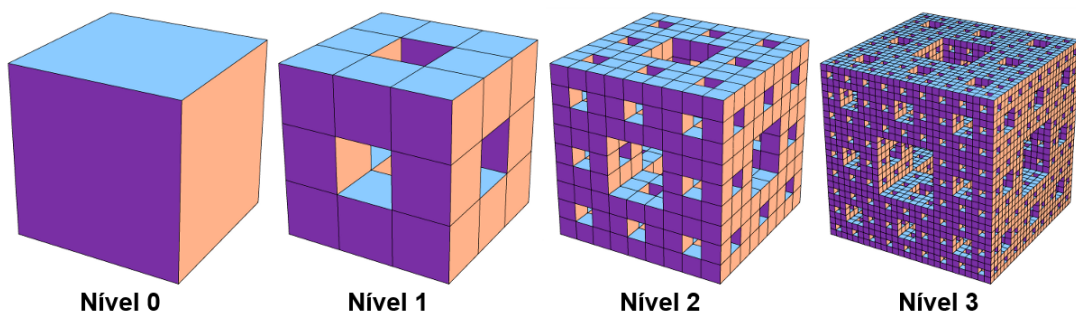


Figura 3.30 – Esponja de Menger com três iterações.

Fonte: Adaptado de Oliveira (2016, p. 66).

Analisando a (Fig. 3.30), percebe-se que o Nível 1 refere-se a primeira iteração, Nível 2 se trata da segunda iteração, e assim sucessivamente. Inicialmente (Nível 0) temos:  $a_0 = a = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0$ ;  $CR_0 = 0$ ;  $CS_0 = 1 = 20^0$  e  $CT_0 = 1$ . Na primeira iteração notamos a divisão do cubo inicial em três partes iguais, sendo criados 27 cubos congruentes de aresta

$\frac{a}{3}$ , em seguida são removidos os cubos localizados no meio de cada face e no centro do cubo inicial, deixando apenas 20 cubos, ou seja:  $a_1 = \frac{a}{3} = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1$ ;  $CR_1 = 7 = 7 \cdot 20^0 = 7 \cdot 20^{1-1}$ ;  $CS_1 = 20 = 20^1$  e  $CT_1 = 27$ . Na segunda iteração repete-se os passos da iteração anterior e se obtém: criação de 540 cubos congruentes de aresta  $\frac{a}{9}$ , com retirada de 140 cubos, sobrando 400 cubos, ou seja:  $a_2 = \frac{a}{9} = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$ ;  $CR_2 = 140 = 7 \cdot 20^1 = 7 \cdot 20^{2-1}$ ;  $CS_2 = 400 = 20^2$  e  $CT_n = 540$ . Assim, obtemos a seguinte tabela:

Iteração ( $n$ )	Aresta ( $a_n$ )	Retirados ( $CR_n$ )	Sobraram ( $CS_n$ )	Total ( $CT_n$ )
1	$\frac{a}{3} = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1$	$7 = 7 \cdot 20^{1-1}$	$20 = 20^1$	27
2	$\frac{a}{9} = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$	$140 = 7 \cdot 20^{2-1}$	$400 = 20^2$	540
3	$\frac{a}{27} = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$	$2800 = 7 \cdot 20^{3-1}$	$8000 = 20^3$	10800
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$	$7 \cdot 20^{n-1}$	$20^n$	$7 \cdot 20^{n-1} + 20^n$

Tabela 3.1 – Comprimento da aresta ( $a_n$ ) e quantidade de cubos: retirados ( $CR_n$ ), restantes ( $CS_n$ ) e total ( $CT_n$ ), na construção da Esponja de Menger.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A Tabela 3.1 nos ajuda a entender o que acontece com o número de cubos e o tamanho de cada aresta na construção da Esponja de Menger, após um número  $n$  de iterações. Note que em cada iteração obteremos uma parte da figura que é semelhante a figura da iteração anterior, ou seja, possui autossimilaridade. Portanto, com o auxílio dessa tabela e da Fig. 3.30 podemos observar que a cada iteração, teremos 20 cubos semelhantes a figura da iteração anterior, ou seja, na segunda iteração teremos 20 cubos semelhantes a figura obtida na primeira iteração e na terceira iteração teremos 20 cubos semelhantes a figura obtida na segunda iteração.

#### 3.3.1.2.4 Conjunto de Cantor

Para Assis *et al.* (2008, p. 6), “A construção geométrica do conjunto de Cantor recebe, por vezes, o nome de ‘Poeira de Cantor’. Para sua construção, inicia-se com um segmento de reta de comprimento unitário. Divide-se este segmento em 3 partes iguais, retirando-se o seu terço médio.”. O Conjunto de Cantor, segundo Mucheroni (2017, p. 53), “[...] é um subconjunto infinito do intervalo  $[0, 1]$  obtido dividindo esse intervalo em três partes iguais, retirando o terço médio e repetindo este procedimento, sucessivamente e indefinidamente, nos intervalos restantes.”. Conforme afirma Barros (2017, p. 37), “[...] Se

esse processo prossegue infinitamente, então, os pedaços pequeninos restantes do formato compõem um conjunto de Cantor [...]”.



Figura 3.31 – Conjunto de Cantor com cinco iterações.

Fonte: Médice Júnior (2014, p. 19).

Na Fig. 3.31 podemos ver a construção do Conjunto de Cantor com cinco iterações, nela os segmentos foram representados por barras para facilitar a visualização. Para a construção desse fractal, basta usar o seguinte algoritmo em cada iteração: considere um segmento de reta; divida esse segmento em três partes iguais, eliminando a parte central e permaneça apenas com os segmentos de reta restantes, repetindo o processo. Vale ressaltar que em cada iteração  $n$ , o número de segmentos  $Q_n$  dobra enquanto sua medida  $\ell_n$  diminui  $\frac{1}{3}$ , assim: com  $n = 0$  temos  $Q_0 = 1$  e  $\ell_0 = 1$ ; para  $n = 1$  temos  $Q_1 = 2$  e  $\ell_1 = \frac{1}{3}$ ; se  $n = 2$  temos  $Q_2 = 4$  e  $\ell_2 = \frac{1}{9}$ ; com  $n = 3$  temos  $Q_3 = 8$  e  $\ell_3 = \frac{1}{27}$ ; tornando-se evidente que para  $n$  iterações, teremos  $Q_n = 2^n$  e  $\ell_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ .

### 3.3.1.3 Fractais Tipo Dürer

Como indicado em Zanotto (2015, p. 35), “Fractais do tipo Dürer são fractais criados por meio de polígonos regulares, fazendo-se a translação do polígono inicial em escala menor e ajustando dentro desse polígono com encontro dos vértices.”. Assim, o procedimento para a obtenção dos fractais consiste simplesmente em fazer as iterações do mesmo polígono regular em seus vértices num processo recursivo. Vale ressaltar que os novos polígonos são semelhantes e devem estar igualmente espaçados, o que pode ser observado nos seguintes fractais de Dürer: pentágono, hexágono, octógono e circular. Segundo Rabay (2013, p. 20), “Além de um visual bastante interessante [...] uma aplicação prática desse tipo de fractal é na construção de cabos ópticos, onde se faz a distribuição agrupada das fibras [...]”.

#### 3.3.1.3.1 Fractal Tipo Dürer - pentágono com três iterações

Podemos construí-lo procedendo da seguinte maneira: (i) construir um pentágono regular de lado  $\ell$  conhecido; (ii) construir cinco pentágonos regulares menores dispostos

internamente, com seus vértices congruentes ao inicial e, finalmente, *(iii)* remover os cinco triângulos intermediários e o pentágono central. Para novas iterações deve-se repetir os procedimentos *(ii)* e *(iii)* em cada pentágono regular gerado.

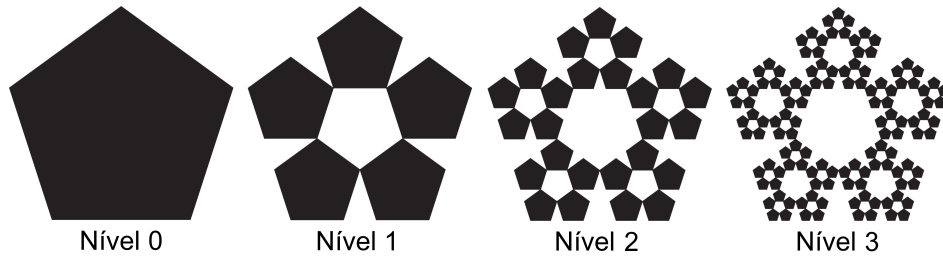


Figura 3.32 – Fractal Tipo Dürer em formato pentagonal com três iterações.

Fonte: Adaptado de Zanotto (2016, p. 36).

Na Fig. 3.32 podemos verificar que a cada iteração o padrão fractal chega a um nível sucessor que será a base para a iteração seguinte. No nível 1 ou primeira iteração, percebemos que cada pentágono regular menor gerado é semelhante ao da figura anterior, ou seja, a cada iteração obteremos uma parte da figura que será semelhante a figura da iteração anterior, garantindo sua autossimilaridade. Denotando  $n$  como sendo a iteração e  $Q_n$  para a quantidade de pentágonos regulares menores gerados, teremos: para  $n = 0$  obteremos  $Q_0 = 1 = 5^0$ ; para  $n = 1$  obteremos  $Q_1 = 5 = 5^1$ ; para  $n = 2$  obteremos  $Q_2 = 25 = 5^2$ ; para  $n = 3$  obteremos  $Q_3 = 125 = 5^3$ ; tornando-se evidente que para  $n$  iterações teremos  $Q_n = 5^n$ .

### 3.3.1.3.2 Fractal Tipo Dürer - hexágono com quatro iterações

Conforme depreende da leitura de Oliveira (2016, p. 54), podemos construir esse fractal de Dürer realizando os seguintes passos: *(i)* inicialmente desenhe um hexágono regular de lado  $\ell$  e com vértices  $A, B, C, D, E$  e  $F$ ; *(ii)* em cada um desses vértices construa um novo hexágono regular semelhante de lado  $\ell/3$ ; *(iii)* agora remova os seis triângulos equiláteros localizados entre os hexágonos construídos e *(iv)* finalize removendo a região poligonal (flocos de neve de Koch) da parte central do hexágono, obtendo a primeira iteração. Para as iterações seguintes, repita os passos anteriores em cada hexágono restante.

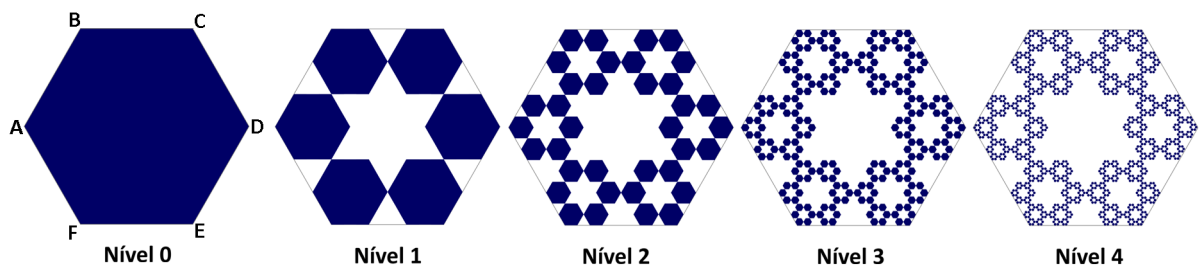


Figura 3.33 – Fractal hexagonal de Dürer com quatro iterações.

Fonte: Oliveira (2016, p. 54).

Observando a Fig. 3.33, denotando  $n$  para o número de iteração,  $Q_n$  para a quantidade de hexágonos regulares menores gerados e  $\ell_n$  como sendo a medida do lado de cada um desses hexágonos, teremos: no estágio inicial,  $n = 0$ ,  $Q_0 = 1 = 6^0$  e  $\ell_0 = \ell = \ell \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0$ ; na primeira iteração,  $n = 1$ ,  $Q_1 = 6 = 6^1$  e  $\ell_1 = \frac{\ell}{3} = \ell \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1$ ; na segunda iteração,  $n = 2$ ,  $Q_2 = 36 = 6^2$  e  $\ell_2 = \frac{\ell}{9} = \ell \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$ ; na terceira iteração,  $n = 3$ ,  $Q_3 = 216 = 6^3$  e  $\ell_3 = \frac{\ell}{27} = \ell \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$ ; e assim sucessivamente, perceberemos que para uma quantidade  $n$  de iterações, teremos  $Q_n = 6^n$  e  $\ell_n = \frac{\ell}{3^n}$ .

### 3.3.1.3.3 Fractal Tipo Dürer - octógono com três iterações

Para construir o fractal tipo Dürer octogonal devemos proceder da seguinte maneira: (i) construir um octógono regular de lado  $\ell$ ; (ii) nos extremos de cada um dos lados do octógono inicial, construir dois octógonos regulares menores que tenham um lado comum e com um de seus ângulos coincidindo com o ângulo do octógono regular inicial e, finalmente, (iii) remover os oito triângulos intermediários e o hexadécágono estrelado central. A cada nova iteração, repetir os passos descritos anteriormente.

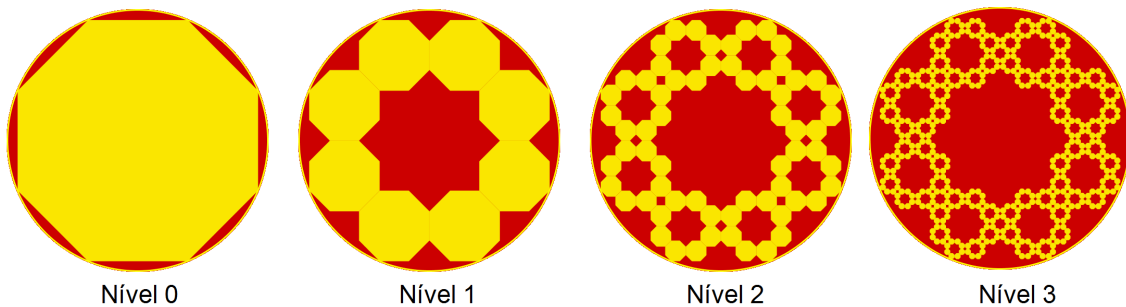


Figura 3.34 – Fractal Octogonal de Dürer com três iterações.

Fonte: Rabay (2013, p. 20).

Na Fig. 3.34 temos a representação, em amarelo, do Fractal Octogonal de Dürer com suas três primeiras iterações. Percebe-se que cada octógono regular menor gerado é semelhante ao da figura anterior, ou seja, a cada iteração obteremos uma parte da figura que será semelhante a figura da iteração anterior, garantindo sua autossimilaridade. Denotando  $n$  como sendo a iteração e  $Q_n$  para a quantidade de octógonos regulares menores gerados, teremos: para  $n = 0$  obteremos  $Q_0 = 1 = 8^0$ ; para  $n = 1$  obteremos  $Q_1 = 8 = 8^1$ ; para  $n = 2$  obteremos  $Q_2 = 64 = 8^2$ ; para  $n = 3$  obteremos  $Q_3 = 512 = 8^3$ ; tornando-se evidente que para  $n$  iterações teremos  $Q_n = 8^n$ .

### 3.3.1.3.4 Fractal Tipo Dürer - circular com três iterações

Conforme depreende-se da leitura de Pereira (2013, p. 60), para se construir esse fractal devemos, em cada iteração: (i) tomar um círculo qualquer e subdividi-lo em seis partes de mesma medida angular; (ii) considerar a distância de cada uma destas partes até

o centro do círculo e a dividi-la em três partes iguais; (iii) da extremidade exterior, tomar como novo centro a primeira terça parte e construir um novo círculo em cada um desses pontos com raio  $\frac{1}{3}$  do círculo maior, o que resultará na geração de seis novos círculos e, finalmente, remova o círculo inicial. Para cada iteração seguinte, repita o procedimento anterior em cada um dos novos círculos.

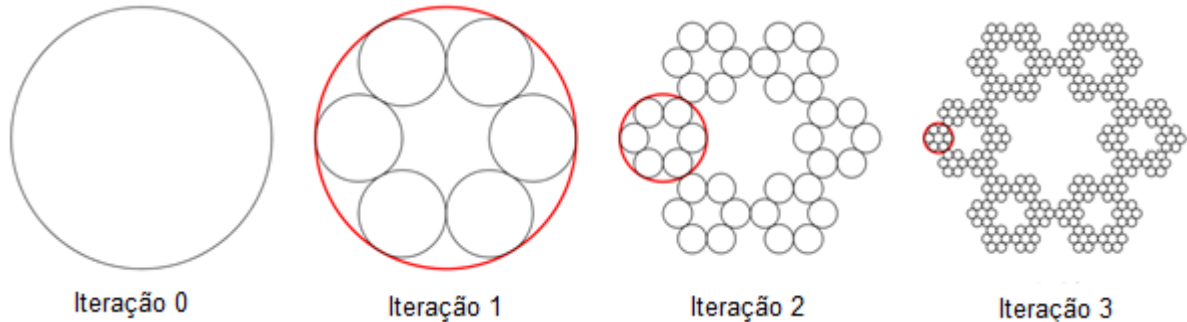


Figura 3.35 – Fractal Circular de Dürer com três iterações.

Fonte: Adaptado de Pereira (2013, p. 60).

Observando a Fig. 3.35 que a cada iteração obteremos uma parte da figura que será semelhante a figura da iteração anterior, garantindo sua autossimilaridade, o que pode ser verificado com o destaque em vermelho. Denotando  $n$  para o número de iteração,  $r$  como sendo o comprimento do raio do círculo gerado,  $Q_n$  para a quantidade de círculos menores gerados e  $R_n$  como sendo a media do raio de cada círculo da iteração, teremos: no estágio inicial,  $n = 0$ ,  $Q_0 = 1 = 6^0$  e  $R_0 = r = r \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0$ ; na primeira iteração,  $n = 1$ ,  $Q_1 = 6 = 6^1$  e  $R_1 = \frac{r}{3} = r \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1$ ; na segunda iteração,  $n = 2$ ,  $Q_2 = 36 = 6^2$  e  $R_2 = \frac{r}{9} = r \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$ ; na terceira iteração,  $n = 3$ ,  $Q_3 = 216 = 6^3$  e  $R_3 = \frac{r}{27} = r \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$ ; e assim sucessivamente, perceberemos que para uma quantidade  $n$  de iterações, teremos  $Q_n = 6^n$  e  $R_n = \frac{r}{3^n}$ .

#### 3.3.1.4 Fractais Tipo Árvore

Para Rabay (2013, p. 21), “Como o nome sugere, os fractais gerados por funções iterativas Tipo Árvore, têm em seu processo iterativo ramificações que geralmente se assemelham a árvores”. Aponta Zanotto (2015, p. 37) que “Sua criação parte mediante de ângulo de bifurcação e uma escala de redução. A partir desse ângulo se tem a repetição da figura original [...] e a partir da escala de redução se determina o comprimento de cada nova ramificação”. Para exemplificar este tipo de construção, temos: a Árvore Bifurcada e a Árvore Pitagórica.

##### 3.3.1.4.1 Árvore Bifurcada

No fractal Árvore Bifurcada, de acordo com Mendonça (2016, p. 122), “[...] parte-se de um segmento vertical de dimensão conhecida, que corresponderá ao tronco, e através de um ângulo de bifurcação e uma escala de redução bem definidos, se ramificará seguindo

essas condições [...]”. Vale ressaltar que essa ramificação ocorrerá sempre dobrando a quantidade de segmentos em cada iteração que se fizer necessária. Nesse tipo de fractal, conforme indicado em Rabay (2013, p. 21), “[...] facilmente identificamos a semelhança com vários objetos e fenômenos da natureza, como árvores, rios, sistema venoso, raios, que podem ser modelados através da geometria fractal.”.

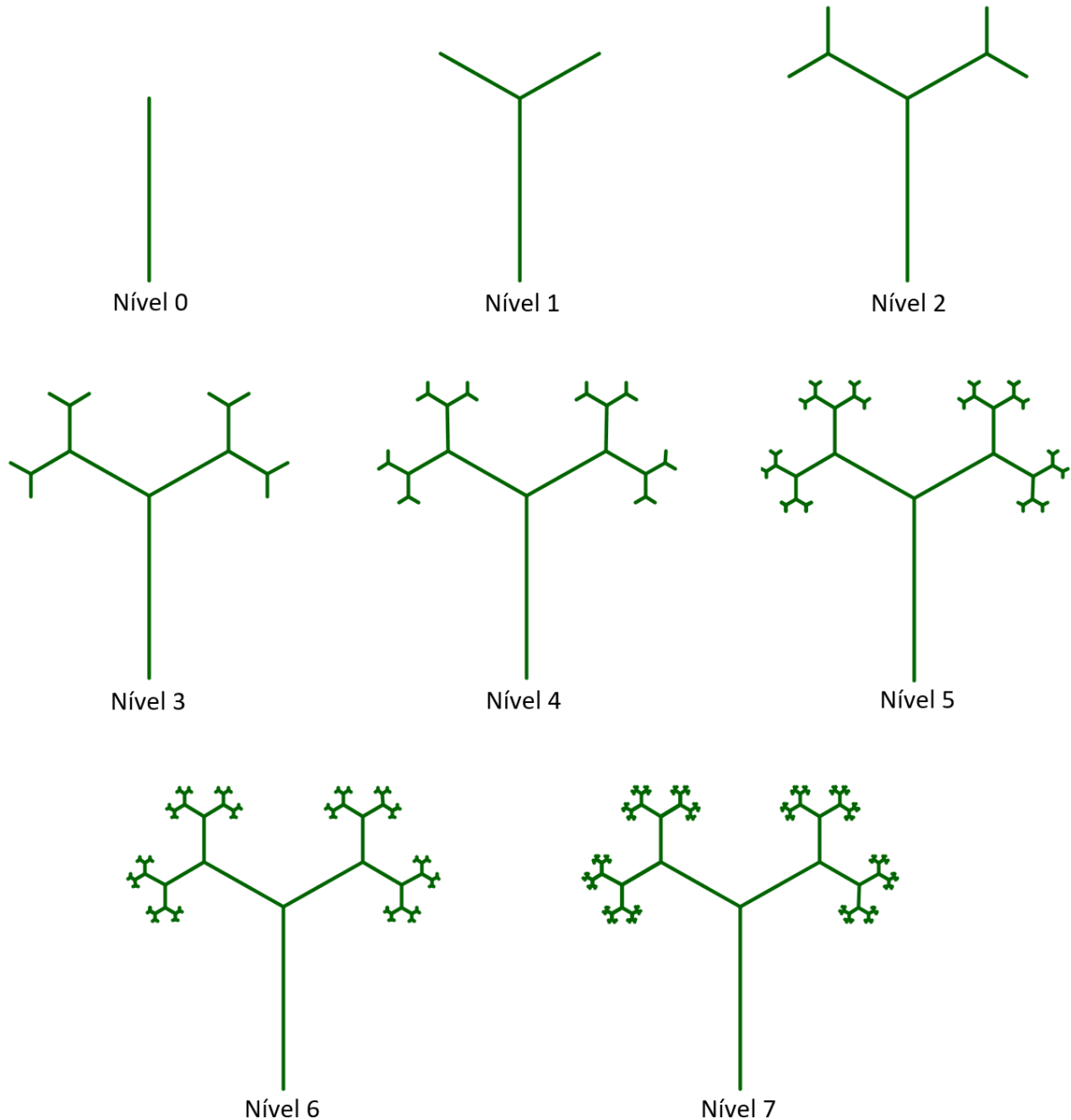


Figura 3.36 – Fractal Árvore Bifurcada com sete iterações, ângulo de bifurcação de  $120^\circ$  e fator de redução  $\frac{1}{2}$ .

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A figura Fig. 3.36 foi produzida utilizando o *software* GeoGebra e nela podemos observar a construção do fractal Árvore Bifurcada e seu comportamento em cada uma de suas sete iterações. Denotaremos  $x$  como sendo o comprimento do segmento inicial,  $n$  para o número de iteração,  $N_n$  como sendo a quantidade de novos segmentos gerados,

$N_{t_n}$  para a quantidade total de segmentos produzidos,  $\ell_n$  para o comprimento de cada novo segmento produzido e, finalmente,  $\ell_{t_n}$  como sendo a medida do comprimento total da curva. Na Tabela 3.2 encontram-se os dados retirados ao observarmos a Fig. 3.36, bem como a dedução de uma expressão geral em  $n$  iterações para este caso específico, lembrando que se trata de uma Árvore Bifurcada, com fator de redução de  $\frac{1}{2}$  e ângulo de bifurcação de  $120^\circ$ .

Iteração ( $n$ )	Segmentos Gerados ( $N_n$ )	Segmentos Totais ( $N_{t_n}$ )	Comprimento do Segmento ( $\ell_n$ )	Comprimento da Curva ( $\ell_{t_n}$ )
0	—	1	$x = x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0$	$1x = (0 + 1) \cdot x$
1	$2 = 2^1$	3	$\frac{x}{2} = x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1$	$2x = (1 + 1) \cdot x$
2	$4 = 2^2$	7	$\frac{x}{4} = x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$3x = (2 + 1) \cdot x$
3	$8 = 2^3$	15	$\frac{x}{8} = x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$	$4x = (3 + 1) \cdot x$
4	$16 = 2^4$	31	$\frac{x}{16} = x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$	$5x = (4 + 1) \cdot x$
5	$32 = 2^5$	63	$\frac{x}{32} = x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$	$6x = (5 + 1) \cdot x$
6	$64 = 2^6$	127	$\frac{x}{64} = x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$	$7x = (6 + 1) \cdot x$
7	$128 = 2^7$	225	$\frac{x}{128} = x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$	$8x = (7 + 1) \cdot x$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$2^n$	$2^{n+1} - 1$	$x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$	$(n + 1) \cdot x$

Tabela 3.2 – Árvore Bifurcada com fator de redução de  $\frac{1}{2}$  e ângulo de bifurcação de  $120^\circ$ : Segmentos (Gerados e Totais), Comprimento (Segmento e Curva) e Expressão Geral para cada iteração.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Na Fig. 3.37 temos a representação de Árvores Bifurcadas com 7 iterações, ângulos de bifurcação medindo exatamente  $20^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $150^\circ$  e  $180^\circ$ , para fator de redução medindo 1, 5.

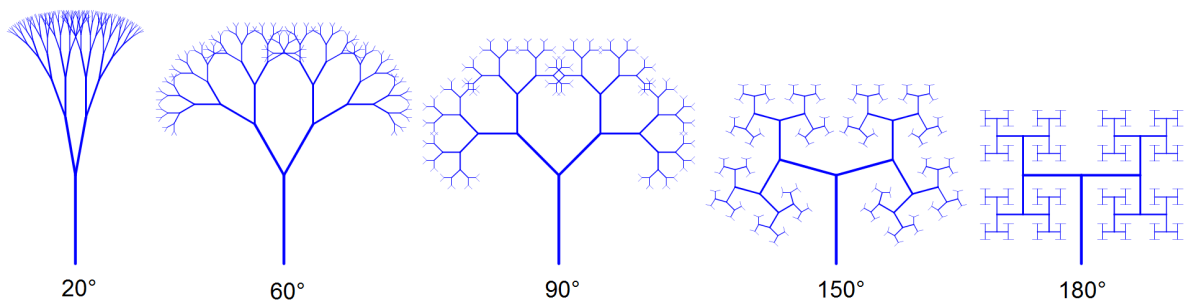


Figura 3.37 – Fractal Árvore Bifurcada com sete iterações, vários ângulos de bifurcação e fator de redução 1, 5.

Fonte: Adaptado de Rabay (2013, p. 22).

Uma das aplicações desse tipo de fractal é feita na construção de misturadores de fluidos, onde utiliza-se bifurcações em T de forma tridimensional. Utilizam, segundo Rabay (2013, p. 24), “[...] ângulo de bifurcação de  $180^\circ$ , e fator de redução menor que dois, reduzindo assim as turbulências e aumentando a capacidade de transporte (mistura) dos fluidos.”.

#### 3.3.1.4.2 *Árvore Pitagórica*

Segundo Mendonça (2016, p. 122, grifo do autor), “O fractal *Árvore Pitagórica* tem esse nome porque parte de um triângulo retângulo (preferencialmente de lados com medidas *inteiras*) e da construção de quadrados cujos lados pertencem a este triângulo, respeitado o disposto no consagrado Teorema de Pitágoras[...]”. Para sua construção, inicie com um quadrado inicial e siga os seguintes passos, conforme afirma Médice Júnior (2014, p. 22): “1) construir um triângulo retângulo com hipotenusa igual e adjacente a um dos lados do quadrado inicial. 2) construir quadrados adjacentes aos catetos do triângulo retângulo criado.”. Para as iterações seguintes, basta repetir os passos anteriores, aplicando em cada um dos quadrados construídos.

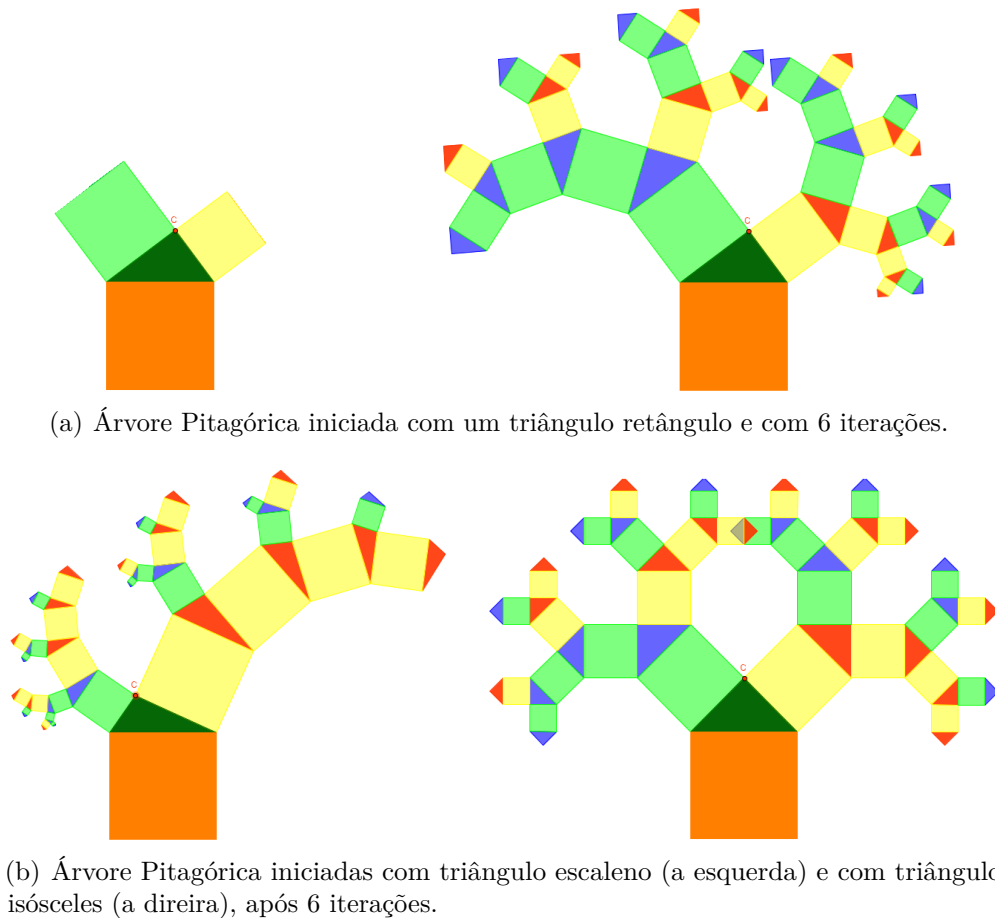


Figura 3.38 – Criação de *Árvores Pitagóricas* com 6 iterações.

Fonte: Adaptado de Rabay (2013, p. 25).

Na Fig. 3.38(a) temos a criação de uma Árvore Pitagórica em um triângulo retângulo de lados medindo 3, 4 e 5, apresentando a sua formação inicial (passos 1 e 2 citados anteriormente) e sua forma após ter passado por seis iterações. Na Fig. 3.38(b) temos Árvores Pitagóricas construídas com triângulos escaleno e isósceles. A seguir teremos a Fig. 3.39, onde uma das construções ocorre com um triângulo equilátero e a outra com um triângulo tendo um dos lados maior e o outro igual a base. Assim, perceberemos que na Árvore Pitagórica construída a partir de um triângulo equilátero, teremos a formação de uma sequência de ladrilhos.

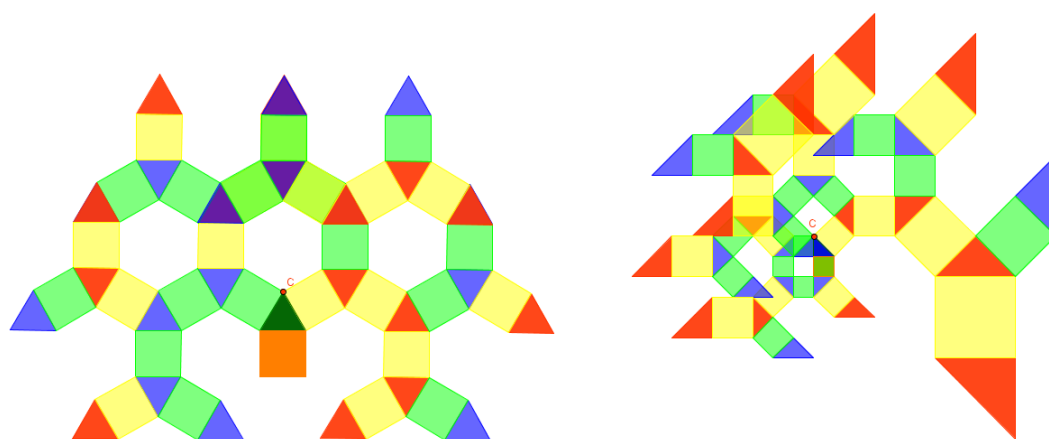


Figura 3.39 – Árvore Pitagórica com triângulo equilátero e Árvore Pitagórica com triângulo de lados  $\geq$  a base (fractal não limitado), ambas após 6 iterações.

Fonte: Adaptado de Rabay (2013, p. 25-26).

A figura Fig. 3.39 ainda nos mostra que ao aplicarmos os passos (algoritmo) para a construção da Árvore Pitagórica em um triângulo cuja base seja igual ou menor do que um dos lados (imagem à direita), teremos ramificações sempre maiores ou iguais ao tronco, descaracterizando-a, tornando-se visível que esse fractal não é limitado. Analisando as figuras anteriores (Fig. 3.38 e Fig. 3.39) podemos deduzir a expressão que nos fornecerá a quantidade de novos triângulos e novos quadrados formados em cada iteração. Denotando  $n$  como sendo a iteração,  $T_n$  a quantidade de novos triângulos formados e  $Q_n$  a quantidade de novos quadrados formados, teremos:  $T_n = 2^{n-1}$  e  $Q_n = 2^n$ , sendo que apenas para  $Q_n$  devemos considerar  $n \geq 2$ .

### 3.3.2 Fractais definidos por uma relação de recorrência

De acordo com Mendonça (2016, p. 55), “Estes fractais determinados por uma relação de recorrência são muito presentes nos estudos dos Sistemas Dinâmicos, onde temos relações aparentemente caóticas, variáveis em função do tempo.”. Também denominados de fractais de fuga de tempo, de acordo com Rabay (2013, p. 27) “[...] possuem uma forma mais livre de similaridade, definida como quase-auto-similaridade, o fractal apresenta pequenas cópias do fractal inteiro de maneira distorcida ou degenerada por isso não são

auto-similares exatamente.”. Dentre os principais fractais determinados por recorrência, estão o Fractal de Lyapunov, o Conjunto de Julia e o Conjunto de Mandelbrot.

Atualmente, por meio dos recursos computacionais, podemos reproduzir esses objetos fractais, que são de extrema beleza e complexidade. A aplicação desses fractais estão associadas a modelagem de sistemas dinâmicos, objetivando prever o seu comportamento para determinadas condições. Segundo Rabay (2013, p. 27), “[...] Quando o sistema tende a um conjunto fechado de resultados, chamamos estes resultados de atrator. Um exemplo, simples e de fácil compreensão, de um sistema dinâmico é um pêndulo, cujo atrator é a posição de repouso, na vertical.”. A autora ainda ressalta que o conjunto formado pelos movimentos que oscilam até o repouso desse pêndulo é definido como o conjunto atrator do pêndulo, que dependerá da condição inicial, ou seja, da altura que soltamos esse pêndulo.

### 3.3.2.1 Fractal de Lyapunov

Esses fractais são gerados a partir da recorrência, conforme afirma Rabay (2013, p. 34), “[...]  $x_{(n+1)} = r_n x_n (1 - x_n)$ , onde  $r_n$  assume valores  $a$  ou  $b$ , definido a partir de uma sequência periódica simples  $S = (r_1, r_2, r_3, \dots, r_p)$ , com período  $p$ , então a sequência  $R = (r_1, r_2, r_3, \dots)$  será:  $R = (r_1, r_2, r_3, \dots, r_p, r_{p+1}, r_{p+2}, \dots)$ , onde  $r_{kp+i} = r_i$ .” Para melhor compreender essa situação, vejamos os seguintes exemplos: (i)  $p = 1 : S = (a) \rightarrow r_1 = a, r_2 = a, r_n = a \Rightarrow R = (a, a, a, a, \dots)$ ; (ii)  $p = 2 : S = (a, b) \rightarrow r_1 = a, r_2 = b, r_{2n+1} = a, r_{2n} = b \Rightarrow R = (a, b, a, b, a, b, \dots)$  e (iii)  $p = 3 : S = (a, b, b) \rightarrow r_1 = a, r_2 = b, r_3 = b, r_{3n+1} = a, r_{3n+2} = b, r_{3n} = b \Rightarrow R = (a, b, b, a, b, b, a, b, b, \dots)$ .

A representação gráfica dos fractais de Lyapunov, segundo Rabay (2013, p. 34), “[...] utilizam o expoente de Lyapunov (sic), bastante utilizado para representação de Sistemas Dinâmicos Caóticos, que são sistemas que possuem pontos repulsores, podendo apresentar também pontos fixos e ponto atrator.” Para um sistema definido por uma recorrência do tipo  $x_{n+1} = f(x_n)$ , iniciando em  $x_0$ , teremos:  $x_1 = f(x_0)$ ,  $x_2 = f(x_1)$ ,  $x_3 = f(x_2)$ , ... e  $x_{n+1} = f(x_n)$ . De acordo com Mendonça (2016, p. 55), “Lyapunov atribuiu a  $x_n$  o quantitativo de indivíduos de uma espécie, ou seja, a sua população, com população inicial  $x_0 + \varepsilon$ , e admitindo-a como decrescente (semelhante às funções  $g(x) = 1/x$ , ou  $h(x) = e^{-x}$ ), mas se estabiliza em um número.”

Assim, para  $f(x_n) = y_n$ , o sistema anterior será reescrito como:  $y_1 = f(y_0) = f(y_{(x_0+\varepsilon)})$ ,  $y_2 = f(y_1)$ ,  $y_3 = f(y_2)$ , ... e  $y_{n+1} = f(y_n)$ . Usando  $y_n = x_n + \varepsilon e^{\lambda n}$ , pois satisfaz a condição  $y_0 = x_0 + \varepsilon$ , para  $n = 0$ , podemos perceber que de acordo com o valor de  $\lambda$ , que é chamado de expoente de Lyapunov, teremos as seguintes situações (Fig. 3.40), segundo Rabay (2013, p. 35): “ $\lambda > 0$  implica que os pontos se distanciam, então temos um comportamento caótico.  $\lambda < 0$  implica que os pontos estão se aproximando, e têm ponto atrator.  $\lambda = 0$  implica que os pontos são pontos fixos, e mantêm uma distância constante para  $n$  muito grande.”

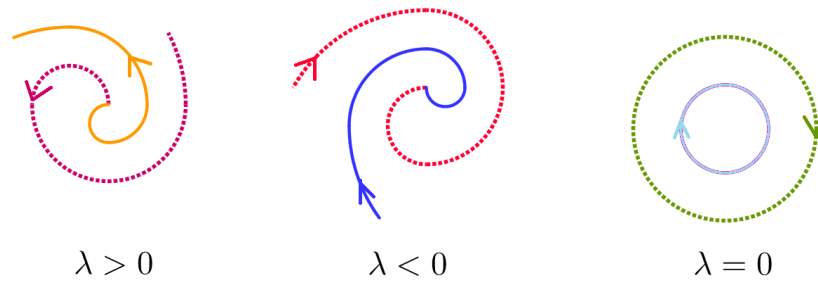
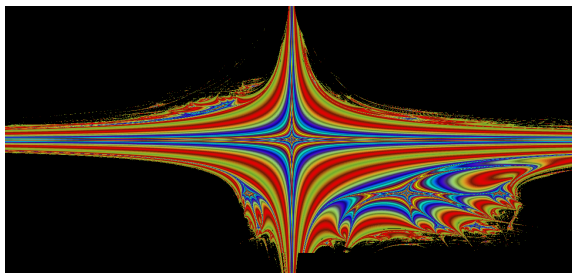


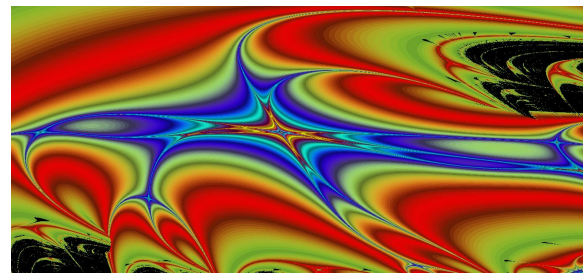
Figura 3.40 – Órbitas e o Expoente de Lyapunov.

Fonte: Adaptado de Rabay (2013, p. 35).

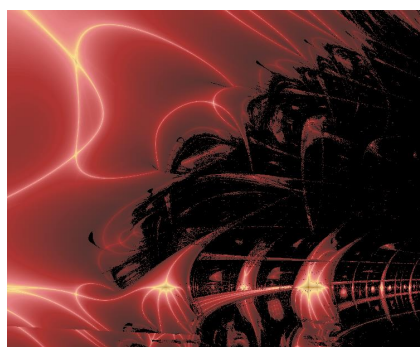
Na Fig. 3.40 podemos perceber que: para  $\lambda > 0$ , a função exponencial “cresce” muito, sendo divergente; para  $\lambda < 0$ , a função exponencial “decrece” muito, sendo convergente e, finalmente, para  $\lambda = 0$  a distância será constante e equivalente a  $\varepsilon$ , pois  $\forall n \in \mathbb{N}$ , temos que  $y_n - x_n = \varepsilon$ . Nas imagens contidas na Fig. 3.41, teremos alguns fractais de Lyapunov com características específicas.



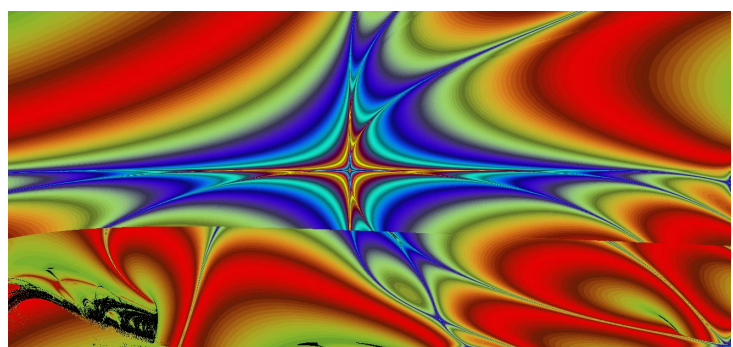
(a) Fractal de Lyapunov:  $-5 < a < 5$ ,  $-5 < b < 5$ ,  $x_0 = 0,1$  e com seqüência *bbaba* (seqüência Jelly Fish), renderizada em 3 minutos e 40 segundos.



(b) Fractal de Lyapunov:  $3 < a < 3,5$ ,  $3 < b < 3,5$ ,  $x_0 = 0,1$  e com seqüência *bbaba* (seqüência Jelly Fish), correspondendo à figura anterior vista numa janela menor.



(c) Fractal de Lyapunov:  $3,4 < a < 4$ ,  $2,5 < b < 3,4$ ,  $x_0 = 0,1$  e com seqüência *bbbbbaaaaa* (seqüência Zircon Zity).



(d) Fractal de Lyapunov:  $3 < a < 3,5$ ,  $3 < b < 3,5$ ,  $x_0 = 0,1$  e com seqüência *bbbbbaaaaa* (seqüência Zircon Zity), renderizada em 3 minutos e 45 segundos.

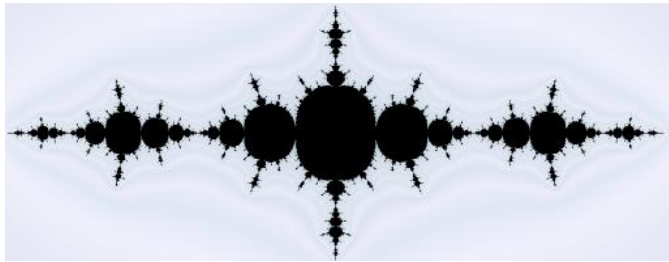
Figura 3.41 – Fractais de Lyapunov.

Fonte: Adaptado de Mendonça (2016, p. 56-58).

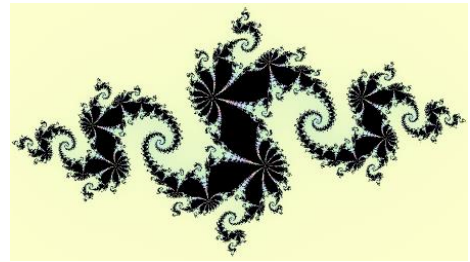
### 3.3.2.2 Conjunto de Julia

Conforme Mendonça (2016, p. 58), “[...] os conjuntos de Julia surgiram após vários estudos acerca de processos iterativos envolvendo números complexos. Essa iteração é da forma  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ , em que  $c$  é um ponto fixo no plano complexo, determinante na forma do conjunto.” De acordo com Rabay (2013, p. 30), nessa “[...] relação de recorrência  $z_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ , onde  $n \in \mathbb{N}$  e  $c \in \mathbb{C}$ , isto é,  $c = a + ib = (a, b)$  ou  $c = (a, b)$ .” A constante  $c$  atua como parâmetro das curvas geradas pelas  $n$  iterações sobre o ponto  $z_0 = x + iy$ .”

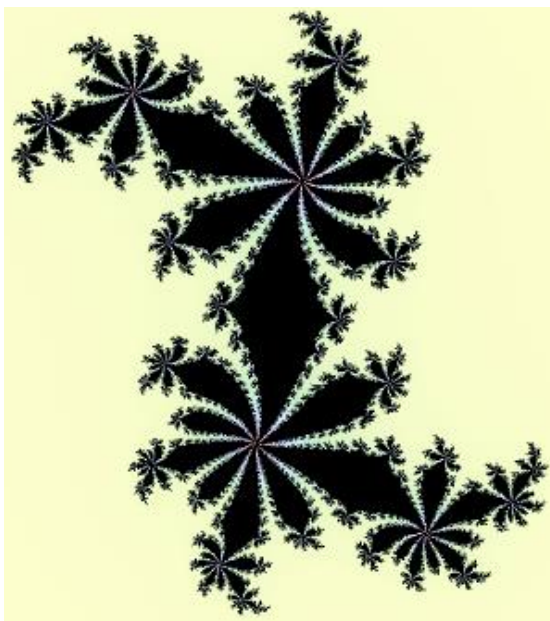
Segundo Rabay (2013, p. 30), “[...] Para um conjunto de valores de  $c$ , construído no plano complexo,  $z_n$  mantêm-se numa região fechada, região de ponto atrator, para outros distancia-se da origem infinitamente, região de ponto repulsor ou de fuga.” Para Mendonça (2016, p. 59), “[...] a região do plano complexo determinada por cada Conjunto de Julia denota uma autossemelhança aproximada, análoga aos pseudo-fractais.” A Fig. 3.42 apresenta algumas figuras do Conjunto de Julia, com variação nos valores de  $c$ .



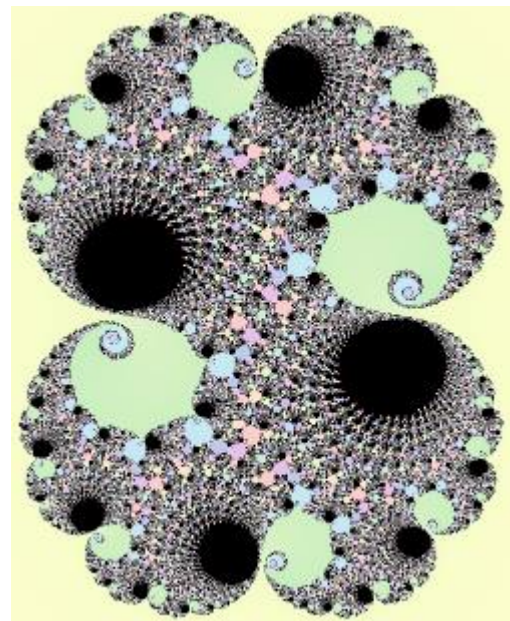
(a)  $c = -1,25 + 0i$ .



(b)  $c = 0,7961 + 0,1481i$ .



(c)  $c = 0,33 - 0,41i$ .



(d)  $c \cong 0,256 - 0,001i$ .

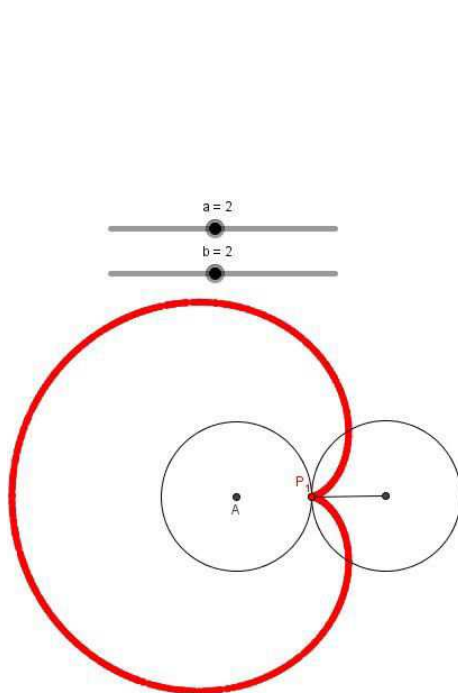
Figura 3.42 – Conjunto de Julia, com quatro valores distintos para  $c$ .

Fonte: Adaptado de Mendonça (2016, p. 58-59).

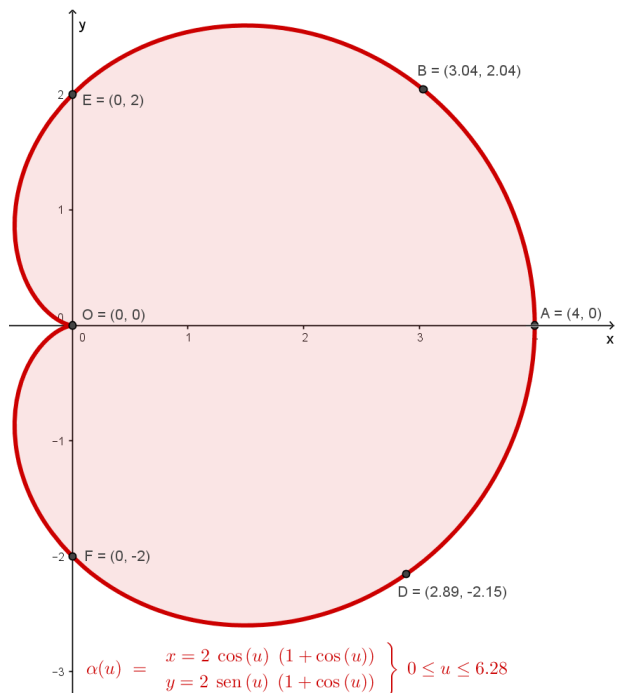
### 3.3.2.3 Conjunto de Mandelbrot

Para Rabay (2013, p. 30), “O Conjunto de Mandelbrot pode ser definido como o conjunto das constantes  $c$ , para um dado  $z_0$ , para os quais o Conjunto de Julia é limitado, representando-se no plano complexo os valores de  $c$ .” Um melhor entendimento pode ser obtido ao construirmos a sequência  $\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, \dots, z_n, \dots\}$  para  $z_0 = 0$ . Lembrando que  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  e substituindo na sequência anterior, teremos:  $\{0, c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c, \dots, z_{n-1}^2 + c, \dots\}$ . A representação gráfica no espaço do Conjunto de Mandelbrot pode ser dividido em um conjunto infinito de figuras ligadas uma as outras, sendo a maior delas um cardioide localizado ao centro do plano.

A definição de Cardioide é, segundo Bérti (2015, p. 46-47): “Dados os raios  $a$  e  $b$ , das circunferências diretriz e geratriz, respectivamente, chama-se de cardióide a epiciclóide tal que  $a = b$ . A curva cardióide tem único cúspide, no ponto que corresponde ao início da trajetória do ponto  $P$  que a descreve [...]”, conforme ilustra a Fig. 3.43(a). Como exemplo de outra curva cardioide, temos em  $\alpha(u) = (2\cos(u)(1 + \cos(u)), 2\text{sen}(u)(1 + \cos(u)))$ , com  $u \in (0, 2\pi)$ , construída no *software* GeoGebra, conforme Fig. 3.43(b). Segundo Bérti (2015, p. 47), “Utilizando as equações paramétricas de uma epiciclóide qualquer e o fato que os raios  $a$  e  $b$  são iguais, chega-se as seguintes equações paramétricas para a cardióide: 
$$\begin{cases} x = 2\cos(t) - a\cos(2t) \\ y = 2\text{sen}(t) - a\text{sen}(2t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$
”



(a) Exemplo de cardioide ilustrando a definição.

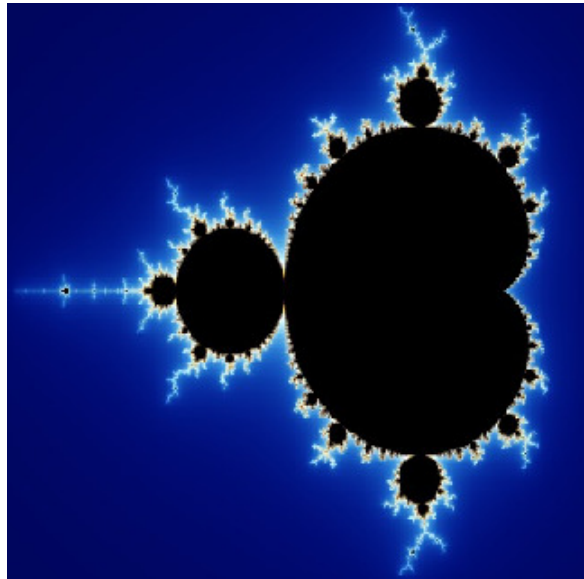


(b) Cardioide  $\alpha(u) = (2\cos(u)(1 + \cos(u)), 2\text{sen}(u)(1 + \cos(u)))$ , com  $u \in (0, 2\pi)$ .

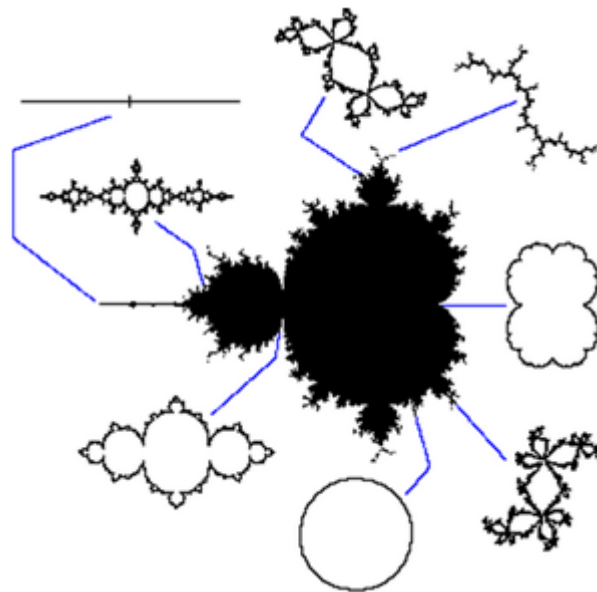
Figura 3.43 – Representação gráfica da Curva Cardioide.

Fonte: (a) Bérti (2015, p. 47). (b) Elaborado pelo autor (2020).

Segundo Dalpiaz (2016, p. 46), “Existe uma infinidade de quase-círculos que tangenciam o cardioide e variam de tamanho com raio tendendo a zero. Cada um desses círculos tem seu próprio conjunto infinito de pequenos círculos cujos raios também tendem a zero.”. Esse processo se repete infinitamente, gerando a Fig. 3.44(a). Como indicado em Rabay (2013, p. 32) “[...] Fazendo-se  $z_0 = 0$ , e uma faixa de parâmetros  $c$ , tal que  $a \in [2, \frac{1}{2}]$  e  $b \in [2, 2]$ , teremos um Conjunto de Mandelbrot, conhecido por Diagrama de Constelação de Fractais, que contém (sic) todos os conjuntos conectados de Julia.”, conforme ilustrado na Fig. 3.44(b).



(a) O conjunto de Mandelbrot.



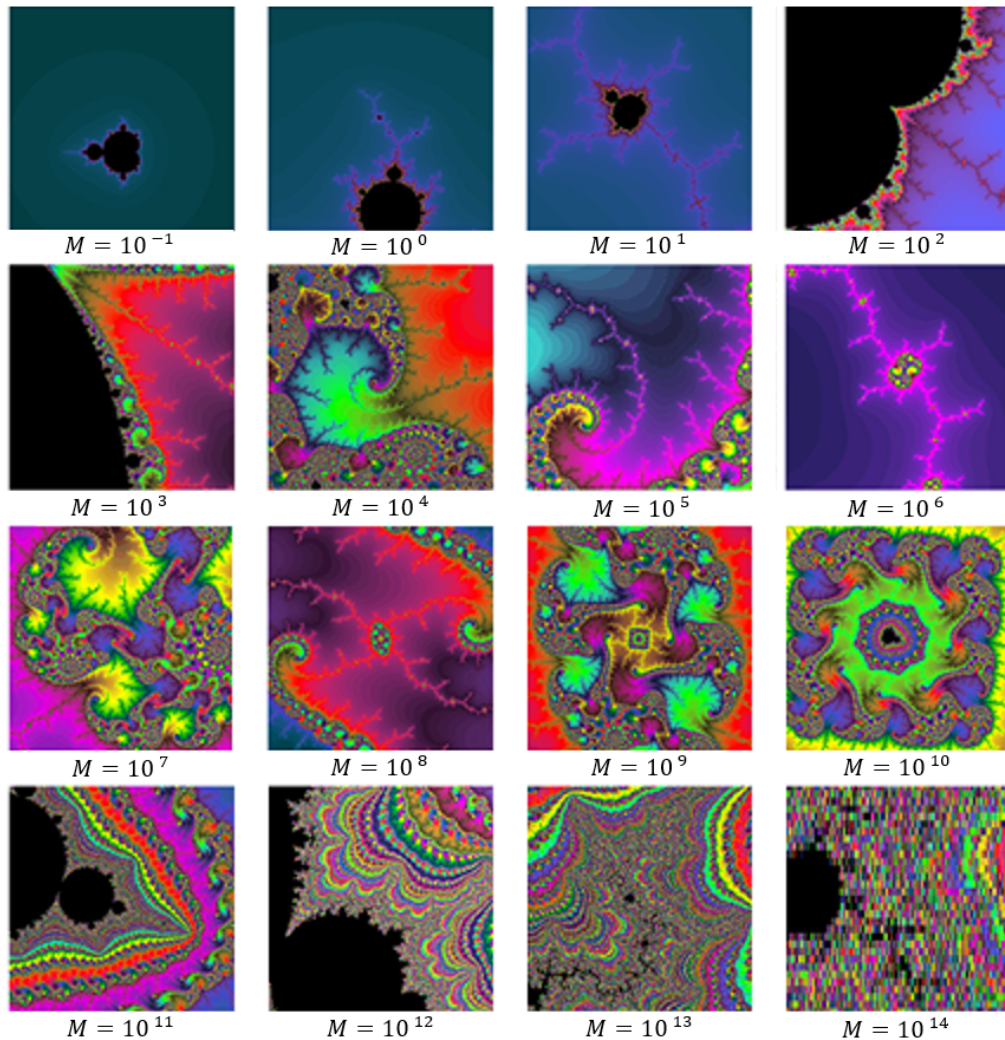
(b) Constelação de Mandelbrot.

Figura 3.44 – Conjunto de Mandelbrot.

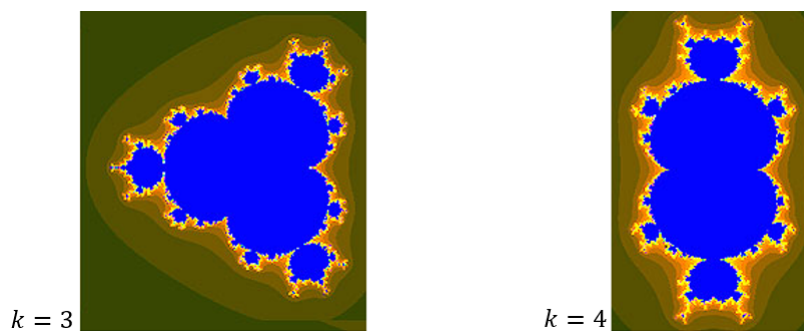
Fonte: (a) Dalpiaz (2016, p. 46). (b) Rabay (2013, p. 32).

A Fig. 3.45(a) apresenta o Conjunto de Mandelbrot, com ampliações sempre dos

pontos centrais e abaixo de cada figura ampliada consta o fator de ampliação  $M$  utilizado, sendo  $M = 10^x$  (com  $x \in \mathbb{Z}$  e  $-1 \leq x \leq 14$ ). Além desses conjuntos apresentados a partir da recorrência  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ , podem ser criados outros conjuntos de Mandelbrot a partir da recorrência  $z_{n+1} = z_n^k + c$ , mostrados na Fig. 3.45(b), com exemplos para  $k = 3$  e  $k = 4$ .



(a) Conjunto de Mandelbrot com fator de ampliação  $M = 10^x$ , com  $x \in \mathbb{Z}$  e  $-1 \leq x \leq 14$ .



(b) Conjunto de Mandelbrot para  $z_{n+1} = z_n^k + c$ , com  $k = 3$  e  $k = 4$ .

Figura 3.45 – Conjunto de Mandelbrot: (a) com fator de ampliação  $M = 10^x$ , com  $x \in \mathbb{Z}$  e  $-1 \leq x \leq 14$  e (b) para  $z_{n+1} = z_n^k + c$ , com  $k = 3$  e  $k = 4$ .

Fonte: Adaptado de Rabay (2013, p. 33).

### 3.3.3 Fractais aleatórios

Conforme Rabay (2013, p. 37), “[...] esses fractais são relacionados aos estudos da Teoria do Caos, aos fractais encontrados na natureza e associados às simulações de imagens na computação gráfica.”. Terrenos, costas e plantas são alguns exemplos desse grupo de fractais que podemos encontrar na natureza. Para Mendonça (2016, p. 62), “[...] os fractais aleatórios fascinam pela aparência caótica, mas com leis probabilísticas que determinam cada razão de ser desses fractais, cujo exemplo clássico é o Voo de Lévy.”. Assim, os fractais aleatórios possuem autossimilaridade estatística e sua similaridade está nas medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas em diferentes escalas, ocorrendo a preservação da dimensão fractal.

“[...] Na Geologia, por exemplo, fenômenos potencialmente perigosos, tais como falhas geológicas e terremotos apresentam distribuições de frequências baseadas em uma simetria de escala; no ramo da Astrofísica e da Cosmologia, busca-se aplicar a lógica fractal para a compreensão da distribuição das galáxias; na área da Medicina e da Biologia, fractais estão sendo utilizados no monitoramento de sinais fisiológicos, na estimativa de crescimento de colônias de fungos e bactérias, no dimensionamento de órgãos do corpo humano, como o cérebro e, inclusive, no diagnóstico individual de células cancerígenas.” (BARROS, 2017, p. 47).

Muitos de nossos órgãos e estruturas internas exibem propriedades fractais. A Fig.3.46(a) apresenta o molde de pulmão humano, mostrando os vasos sanguíneos em um de seus lados (Foto cedida por Ewald Weibel, Instituto de Anatomia, Universidade de Berna). Os pulmões são um excelente exemplo de órgão fractal natural, pois se olharmos sua imagem de cabeça para baixo, ou seja, invertido sob ângulo de  $180^\circ$  (Fig. 3.46)(b), perceberemos que os pulmões compartilham o mesmo padrão de ramificação das árvores.



(a) Molde de Pulmão Humano.

(b) Molde de Pulmão Humano (giro de  $180^\circ$ ).

Figura 3.46 – Molde de Pulmão Humano.

Fonte: <http://fractal.foundation.org/OFC/OFC-1-2.html> (2020).

O estudo desses fractais é utilizado para modelagem em diversas áreas, como: medicina, biologia, mercado financeiro, geologia, entre outras. Conforme Henriques (2008, p. 9, grifo do autor), “[...] O conceito movimento *Browniano* fracionário está intimamente ligado ao estudo em multirresolução, por ser o próprio movimento um fractal.”. Para esse autor, o movimento *Browniano* é um processo estocástico, possuindo uma universalidade que possibilita que seja modelado por outros processos mais simples, como o caminhante aleatório, do qual mostra-se uma boa aproximação sob certas condições. A Fig. 3.47 apresenta o movimento *Browniano* em 2 dimensões.

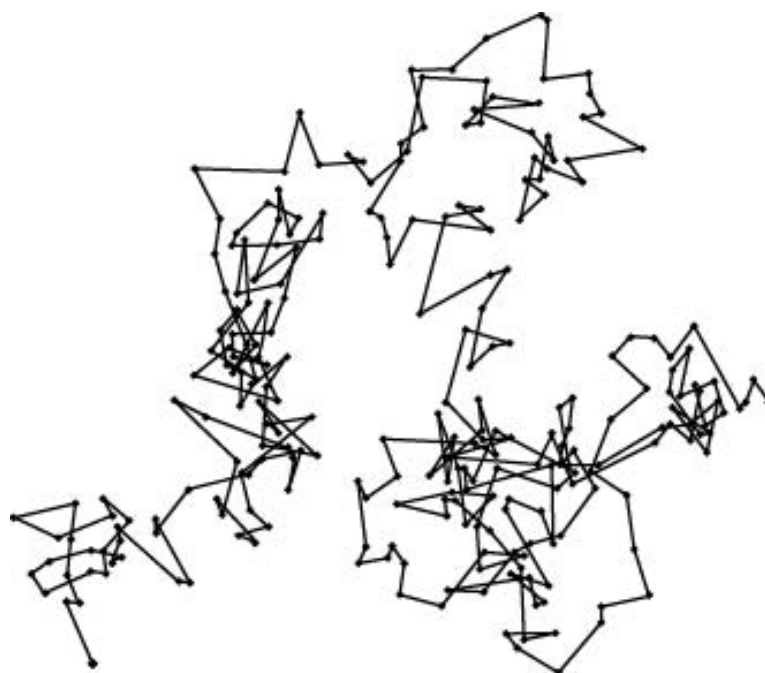


Figura 3.47 – Movimento *Browniano* em 2 dimensões.

Fonte: Henriques (2008, p. 9).

De acordo com Zanotto (2015, p. 54), “Na área computacional, utiliza-se de softwares que geram e simulam paisagens como montanhas, nuvens, mares, rios ou florestas, percebe-se que a aplicação dos fractais na área computacional vem revolucionando muito essa área.”. O fato é que com os fractais começou-se a criar imagens cada vez mais complexas e ricas em detalhes, podendo fazer uso das mesmas em filmes, jogos eletrônicos, animações, entre outros, sendo cada vez mais perceptível as melhorias e aproximação com a realidade.

Com conhecimentos básicos de botânica agregados aos da geometria fractal pode-se desenvolver modelos de arquiteturas de plantas e árvores, assim como simular seu crescimento computacionalmente. Segundo Bonfim e Castro (2006, p. 85), “Os sistemas de Lindenmayer, mais conhecidos como Sistemas-L (Lindenmayer, 1968), foram introduzidos pelo biólogo Aristid Lindenmayer como um formalismo matemático para descrever o desenvolvimento de plantas.”. Com esse sistema é possível criar as formas básicas da estrutura de uma planta, como as demonstradas na Fig. 3.48.

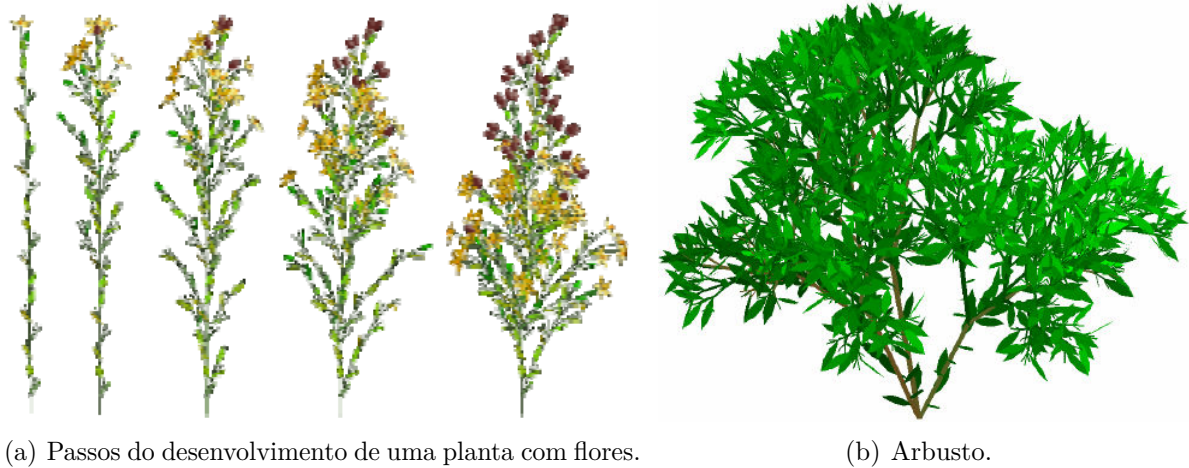
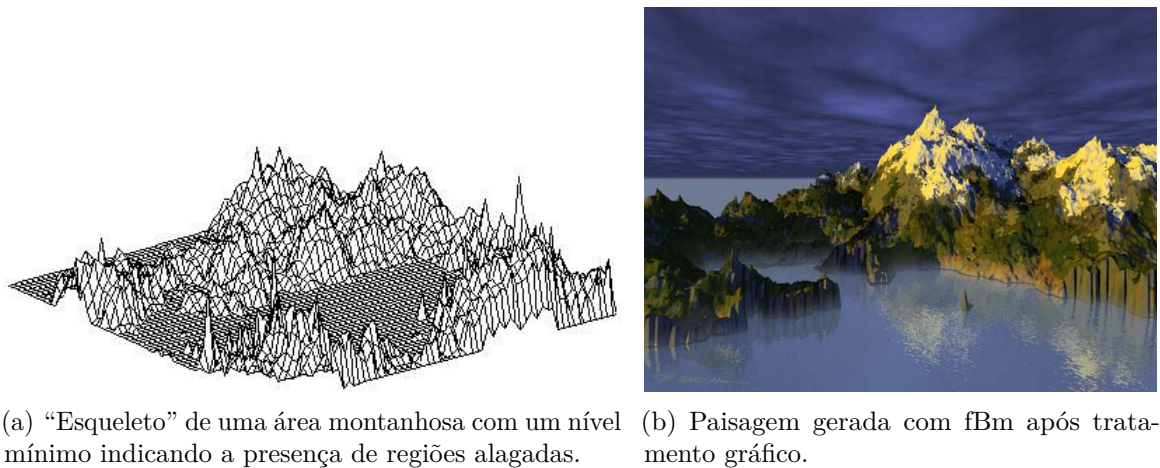


Figura 3.48 – Modelos de plantas gerados por Sistema-L.

Fonte: Bonfim e Castro (2006, p. 87).

De acordo com Bonfim e Castro (2006, p. 88, grifo do autor), “Mandelbrot & van Ness (1968) introduziram o termo *movimento Browniano fracionário* (fBm) para referenciar uma família de funções Gaussianas aleatórias capazes de fornecer modelos de diversas séries temporais encontradas na natureza.”. Esses mesmos autores ainda afirmam que a partir de então, muitas extensões e aproximações foram desenvolvidas para modelar fenômenos naturais, de paisagens a nuvens. A Fig. 3.49 ilustra a utilização de movimento *Browniano* fracionário para a geração de paisagens montanhosas.



(a) “Esqueleto” de uma área montanhosa com um nível mínimo indicando a presença de regiões alagadas.

(b) Paisagem gerada com fBm após tratamento gráfico.

Figura 3.49 – Exemplo de estruturas criadas utilizando movimento Browniano.

Fonte: Bonfim e Castro (2006, p. 89).

Na Fig. 3.49(a) encontra-se a geração de uma espécie de “esqueleto” de uma paisagem, enquanto a Fig. 3.49(b) mostra esse “esqueleto” submetido a um processo de tratamento gráfico, resultando em imagens com elevado grau de realismo. Para fenômenos naturais como fogo, explosões e cachoeiras, é necessária uma técnica que não leve em conta apenas a estrutura dos objetos, mas também sua dinâmica. Essa técnica de sistemas de

partículas é, conforme Reeves (1983, *apud* Bonfim e Castro, 2011, p. 89), “[...] uma técnica utilizada para simular fenômenos naturais que possuem uma determinada dinâmica, como água em movimento, fogo, chuva, neve, fogos de artifício, etc.”.

“Uma partícula é modelada através da definição de atributos, como peso, forma, tamanho, velocidade, cor, transparência e tempo de vida. Quando uma certa quantidade de partículas é inserida no sistema e uma dinâmica é determinada, o comportamento geral do sistema é capaz de simular diversos fenômenos. Por exemplo, considere um modelo de simulação de fogos de artifício. Ao lançarmos uma partícula com um determinado ângulo de inclinação em relação ao eixo vertical e com uma velocidade inicial pré-especificada, deveremos considerar a atuação de uma força gravitacional na partícula que promoverá um movimento parabólico da mesma. Depois de um certo tempo do lançamento, a partícula poderá ser substituída por um conjunto de partículas menores, também sujeitas a ação da gravidade, que representarão a explosão do fogo de artifício.” (BONFIM; CASTRO, 2006, p. 89).

Portanto, um sistema de partículas possui três características que o difere da maioria das abordagens para a síntese de imagens. Essas características são, segundo Bonfim e Castro (2006, p. 89): “*i*) um padrão ou forma é representado por uma coleção (enxame) de partículas; *ii*) as partículas são dinâmicas; e *iii*) um padrão representado pelas partículas não é determinístico, ou seja, sua forma não é completamente pré-especificada.”. A fig. 3.50 apresenta a ilustração de um sistema de partículas simulando um fogo de artifício.

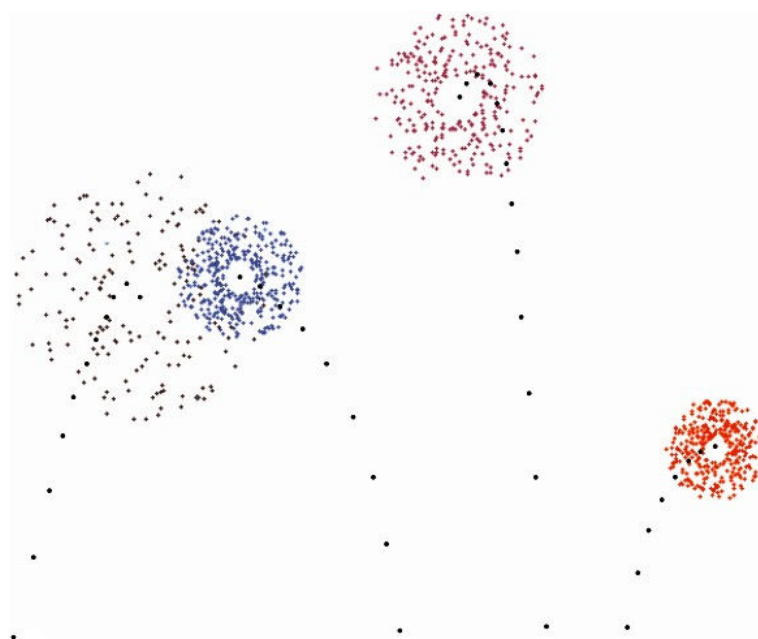


Figura 3.50 – Imagem congelada de todas as partículas geradas em uma simulação de fogos de artifício.

Fonte: Bonfim e Castro (2006, p. 90).

### 3.3.3.1 Voos e Caminhadas de Lévy

Para Barbosa (2016, p. 37), “Mandelbrot cunhou o termo *Lévy Flight* (voo de Lévy) no seu livro de geometria fractal, no contexto de poeira de Lévy, que é poeira fractal gerada por um voo de Lévy”. Esse autor ainda informa que voos e caminhadas de Lévy são aplicados em diversos fenômenos e sistemas, entre eles: finanças e economia, eletrodinâmica de cavidade quântica, clima e física atmosférica, cinemática de ions numa rede ótica, relaxação anômala de spin e superdifusão fotônica. Segundo Castro (2013, p. 26), “Um voo de Lévy possui a propriedade de que, para valores grandes de  $|x|$ , sua distribuição é dada por  $f(|x|, t) = |x|^{-\alpha}$ , ou seja, há uma lei de potência, o que significa que os Voos de Lévy não apresentam escala característica, que é indicativo de geometria fractal.”

Castro (2013, p. 26) ainda explica que voos de Lévy são estacionários<sup>4</sup>, possuem incrementos independentes e seu desvio-padrão é infinito, enfatizando que especificamente todos os momentos de ordem maior que dois são infinitos. Barbosa (2016, p. 37) aponta que: “Voos de Lévy aparecem quando a distribuição do tamanho dos saltos tem uma cauda lei de potência  $\lambda(\ell) \sim \ell^{-\mu}$  que leva a uma variância divergente em  $\mu < 3$ ”. Barbosa (2016, p. 37) ainda explica que: (i) Para  $0 < \alpha \leq 2$ : a função densidade de probabilidade do caminhante converge para uma distribuição de Lévy estável com índice de Lévy  $\alpha = \mu - 1$ ; (ii) Para  $\alpha = 2$ : há difusão normal e (iii) Para  $\alpha < 2$ : o comportamento é superdifusivo, com o limite  $\alpha \rightarrow 0$ , ou seja,  $\mu \rightarrow 1$  levando ao movimento balístico, conforme Fig. 3.51.

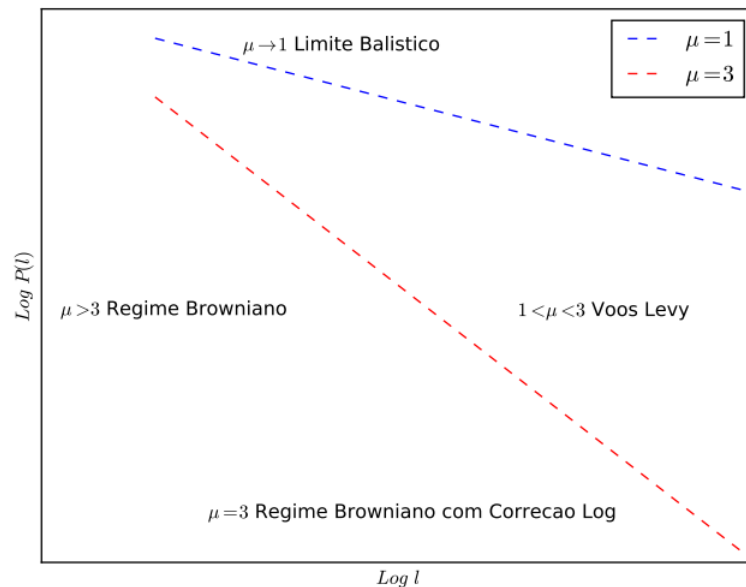


Figura 3.51 – Tipo de difusão dependente do valor de  $\mu$ , em  $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$ .

Fonte: Barbosa (2016, p. 38).

<sup>4</sup> Dizemos que um processo é estacionário se todas as características do comportamento desse processo não se alteram com o tempo, ou seja, o processo se desenvolve no tempo em torno da média. (<http://www.portalection.com.br/series-temporais/13-processos-estacionarios>, 2020).

As distribuições de Lévy, segundo Lima (2010, p. 2), “[...] exibem caráter fractal, geram comportamento anômalo superdifusivo, apresentam invariância de escala devido à auto-afinidade e não obedecem ao Teorema do Limite Central (TLC), implicando em uma diferença substancial no comportamento estatístico.” Na Fig. 3.51, para um caminhante aleatório que dá passos de tamanho  $\ell$  de acordo com a função densidade de probabilidade  $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$ , o tipo de difusão depende do valor de  $\mu$ , conforme depende-se da leitura de Lima (2010) e Barbosa (2016): (i) Para  $\mu > 3$ : o TLC garante a convergência para a difusão normal; (ii) Para  $\mu \rightarrow 1$ : tem-se o limite balístico corresponde; (iii) Para  $\mu \leq 1$ :  $P(\ell)$  não é normalizável e (iv) Para  $1 < \mu < 3$ : resultam em voos de Lévy superdifusivos.

Lima (2010, p.22 ) cita um exemplo de caminhada aleatória com 1000 passos em duas dimensões. Nesse exemplo, o caminhante inicia o movimento em  $[0, 0]$ , com direção angular uniformemente distribuída. A Fig. 3.52 ilustra a situação, sendo que à esquerda, ocorre uma aproximação do movimento *browniano* utilizando vôos de Lévy, onde os tamanhos dos passos são obtidos através de uma distribuição  $\alpha$ -estável de Lévy com  $\alpha = 2$  e  $\beta = 0$  (i.e. uma distribuição gaussiana) e à direita, tem-se um vôo de Lévy, onde os tamanhos dos passos são obtidos através de uma distribuição  $\alpha$ -estável de Lévy com  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$  (i.e. uma distribuição de Cauchy).

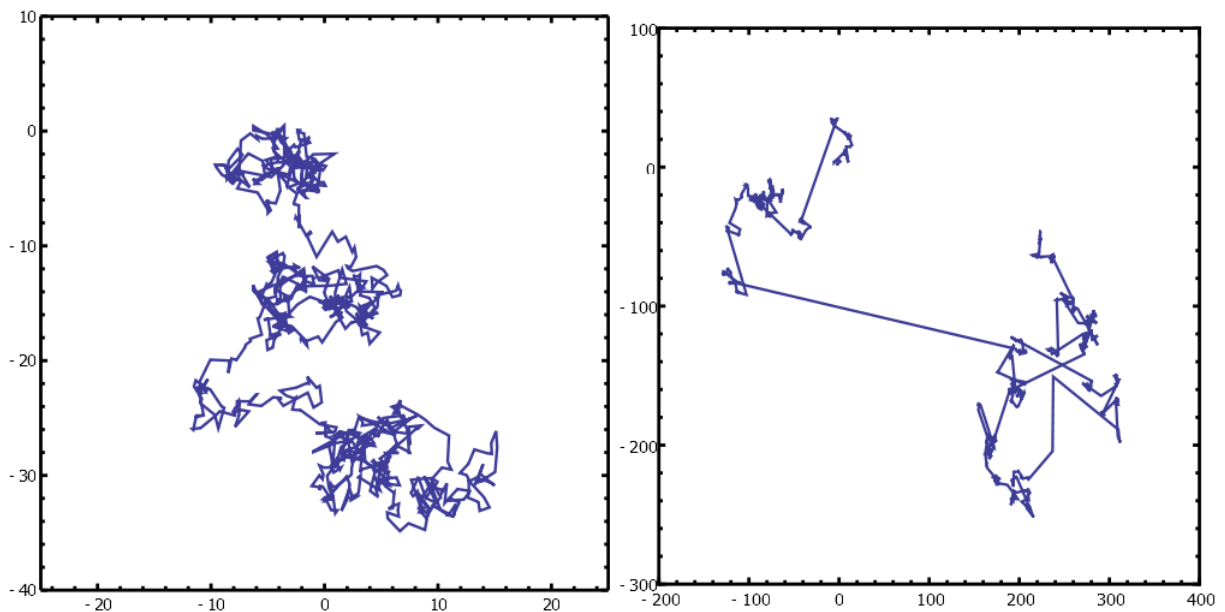


Figura 3.52 – Caminhada aleatória com 1000 passos em duas dimensões, com direção angular uniformemente distribuída.

Fonte: Lima (2010, p. 22).

Ao observar a Fig. 3.52 podemos notar a presença de grandes saltos na posição comparado com o movimento *browniano* ilustrado na figura à esquerda. Barbosa (2016, p. 42). A Fig. 3.53 apresenta voos e caminhadas de Lévy para diferentes expoentes  $\mu$  associados a um expoente de Hurst  $H$ . Nessa figura, Barbosa (2016, p. 42) explica que: (i) Para  $\mu > 3$ : a variância da distribuição de ruído é finita, e assim a caminhada

aleatória é difusiva com expoente de Hurst  $H = 1/2$  e (ii) Para  $\mu < 3$ : o comportamento é superdifusivo. Assim, a única diferença entre voos e caminhadas de Lévy é que os caminhantes movem-se com velocidade finita, o que pode ser evidenciado pelo declive finito no gráfico espaço-tempo da Fig. 3.53.

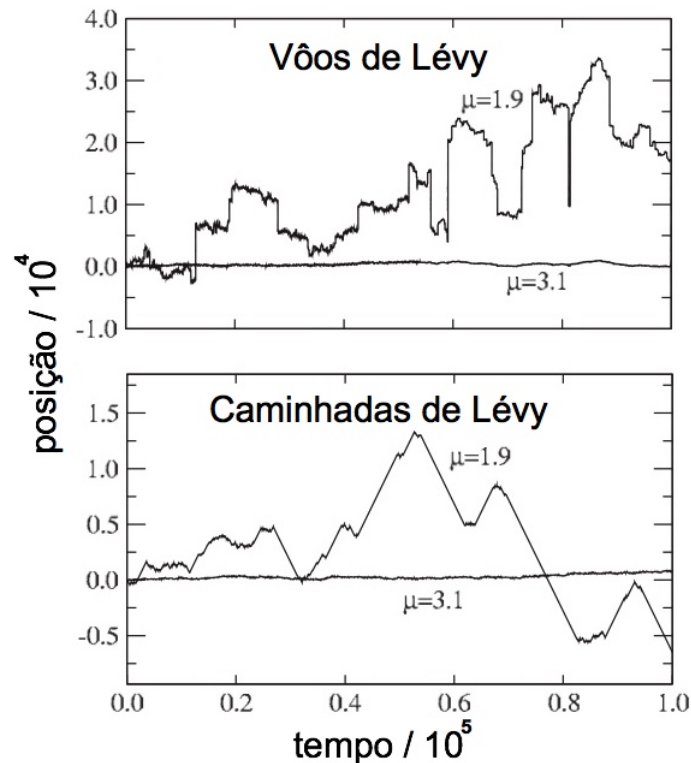


Figura 3.53 – Voos e caminhadas de Lévy para diferentes expoentes  $\mu$  associados a um expoente de Hurst  $H$ .

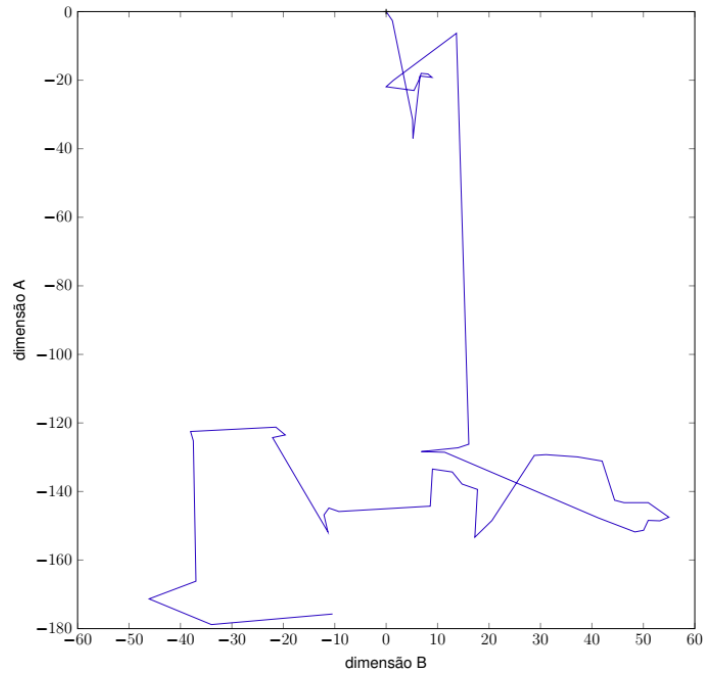
Fonte: Barbosa (2016, p. 42).

A diferença entre caminhadas e voos de Lévy é a natureza do tempo operacional, o que vai depender então de sua necessidade ou interesse, como indicado em Barbosa (2016):

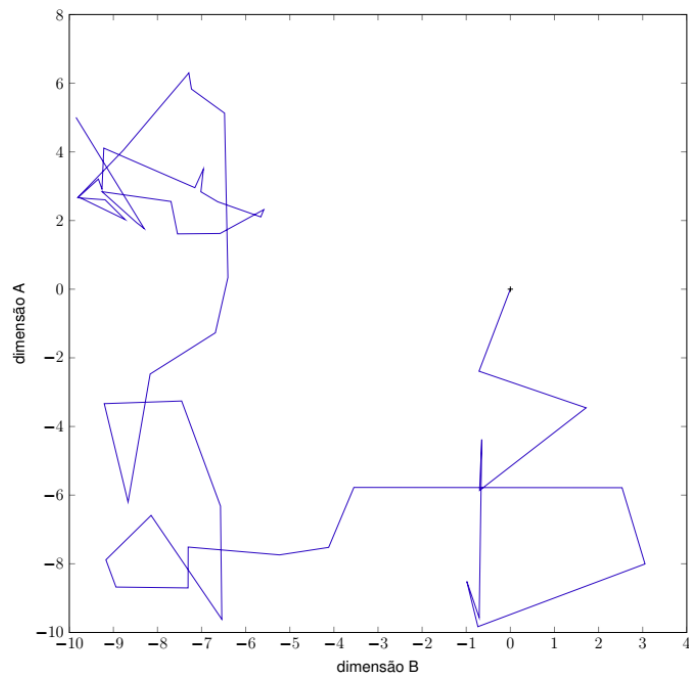
“[...] Se o interesse do estudo está como uma função do tempo real  $t$ , deve-se utilizar a expressão caminhada de Lévy. Entretanto, se o foco do estudo é expressar a escala em termos do número de passos  $j$  da caminhada aleatória, é apropriado utilizar o termo voo de Lévy porque  $j$  é proporcional ao tempo de ação para um voo de Lévy. Caminhadas de Lévy tornam-se semelhantes a voos de Lévy apenas para um período de tempo grande [...] caminhadas de Lévy não violam as leis físicas. Precisamente, nenhuma quantidade física mensurável diverge no tempo para uma caminhada de Lévy.” (BARBOSA, 2016, p. 43).

Para Barbosa (2016, p. 43-45), “A variância infinita do processo de Lévy torna-se uma questão de tempo infinito apenas porque um caminhante de Lévy pode percorrer uma distância máxima de  $vt$  em um tempo  $t$  [...] Em forrageamento e movimento animal, caminhadas de Lévy são mais plausíveis”. Para Humphries *et al.* (2010, *apud* SOUZA,

2014), “[...] Os tubarões, por exemplo, alternam entre o movimento browniano quando a caça é abundante em uma determinada região próxima e o movimento por voo de Lévy quando a caça está escassa nessa região.”. A fig. 3.54 apresenta um exemplo do voo de Lévy (fig. 3.54(a)) e outro de voo do tipo movimento browniano (fig. 3.54(b)), com 50 passos, em duas dimensões.



(a) Um voo de Lévy.



(b) Um voo do tipo movimento *browniano*.

Figura 3.54 – Exemplo de 50 passos, em duas dimensões, de: (a) um voo de Lévy e (b) um voo do tipo movimento *browniano*.

Fonte: Souza (2014, p. 41-42).

### 3.4 MECÂNICA CLÁSSICA NEWTONIANA

As leis de Newton formam o arcabouço do estudo do movimento dos corpos, sendo válida para descrever a maioria dos eventos que vemos em nosso cotidiano. No entanto, sabe-se que seu domínio de validade é restrito, deixando de serem apropriadas para se estudar corpos que se movem muito rapidamente - quando comparados à velocidade da luz - ou corpos de dimensões muito reduzidas - como elétrons ou prótons. Acontece que as leis de conservação que podem ser extraídas das leis de Newton, como as de energia e de quantidade de movimento, sobrevivem às quebras de paradigmas representadas pela teoria da Relatividade e pela Física Quântica e são diariamente usadas pelos cientistas desbravando as fronteiras do conhecimento atual.

A existência de simetria num movimento pode ser facilmente identificada num lançamento vertical para cima, de um objeto a partir do solo. Na educação básica convencionou-se que este movimento ocorre no vácuo, em apenas uma dimensão e, ainda, sob a influência unicamente da sua força peso. Para a melhor compreensão dessa situação, pode-se analisá-la em duas etapas: (i) subida - com um movimento retilíneo uniformemente retardado e (ii) descida - com um movimento retilíneo uniformemente acelerado. Vale ressaltar que a situação descrita não leva em consideração a resistência do ar, tratando-se de um movimento retilíneo uniformemente variado, que ocorre no sentido do eixo vertical (eixo  $y$ ), onde consideraremos o sentido positivo para cima e cuja função específica será:

$$\vec{v}_y = v_{0y} - \vec{g}t. \quad (3.1)$$

Na equação 3.1, tem-se  $\vec{v}_y$  sendo a velocidade final,  $v_{0y}$  a velocidade inicial, com  $v_{0y} \neq 0$ ,  $\vec{g}$  a aceleração da gravidade e  $t$  o tempo gasto no percurso. Para a subida usaremos a equação 3.1 com um pequeno ajuste, somente para identificar da etapa em questão, ficando:

$$\vec{v}_{y1} = v_{0y1} - \vec{g}t_s, \quad (3.2)$$

onde  $t_s$  representa o tempo de subida. Analisando essa etapa, teremos que quando o objeto lançado atingir a altura máxima, ocorrerá a inversão de sentido, ficando  $\vec{v}_{y1} = 0$ , substituindo esses dados na equação 3.2 e isolando  $t_s$ , teremos:

$$t_s = \frac{v_{0y1}}{\vec{g}}. \quad (3.3)$$

A equação 3.3 nos possibilita obter o tempo gasto para atingir a altura máxima num lançamento vertical para cima. Para a descida, usaremos novamente a equação 3.1 ajustada para a identificação dessa etapa, assim:

$$v_{y2}^{\vec{}} = v_{0y2}^{\vec{}} + \vec{g}t_d, \quad (3.4)$$

onde  $t_d$  representa o tempo de descida e  $\vec{g}$  teve inversão de sinal por estar em sentido favorável ao da velocidade, caracterizando essa etapa como um movimento retilíneo uniformemente acelerado. Portanto, agora esse corpo encontra-se em queda livre, onde  $v_{0y2}^{\vec{}} = 0$  (devido a inversão de sentido ocorrido ao final da etapa anterior), substituindo na equação 3.4 e isolando  $t_d$ , teremos que:

$$t_d = \frac{v_{y2}^{\vec{}}}{\vec{g}}. \quad (3.5)$$

Como o tempo de subida desse objeto é igual ao seu tempo de descida, o que segundo Young, Freedman e Ford (2008, p. 82, grifo do autor), “[...] é *sempre verdade* quando o ponto inicial e o ponto final da trajetória estão no mesmo nível e a resistência do ar pode ser desprezada.”, teremos que as equações 3.3 e 3.5 se equivalem, evidenciando a simetria axial entre elas, portanto:

$$t_s = t_d \Rightarrow \frac{v_{0y1}^{\vec{}}}{\vec{g}} = \frac{v_{y2}^{\vec{}}}{\vec{g}} \Rightarrow v_{0y1}^{\vec{}} = v_{y2}^{\vec{}}. \quad (3.6)$$

A Fig. 3.55 nos apresenta uma representação gráfica para um objeto lançado verticalmente a partir do solo, com velocidade inicial  $v_{0y}^{\vec{}}$  de 39,2 m/s e  $\vec{g}$  valendo 9,8 m/s<sup>2</sup>.

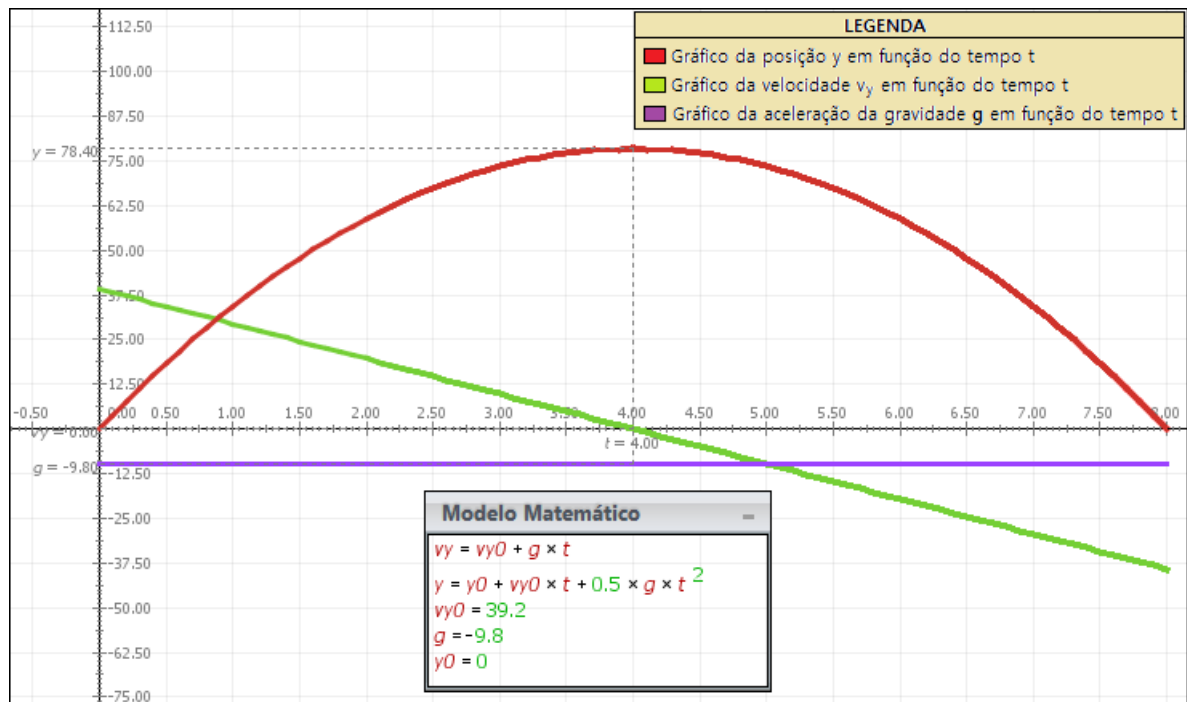


Figura 3.55 – Gráficos, em função do tempo, de um objeto lançado verticalmente para cima, a partir do solo: posição ( $\vec{y}$ ), velocidade ( $\vec{v}_y$ ) e aceleração ( $\vec{g}$ ).

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A equação 3.6 nos mostra que a velocidade inicial de lançamento desse objeto na subida  $v_{0_{y_1}}$  equivale a sua velocidade final de descida ou de retorno ao solo  $v_{y_2}$ , lembrando que também já se havia evidenciado uma outra equivalência de velocidades no ponto de altura máxima atingida, onde  $v_{y_1} = v_{0_{y_2}} = 0$ . Assim, podemos concluir que a variação da energia cinética do sistema na subida será o mesmo que na descida, verificando se tratar de um movimento simétrico por simetria temporal, pois a energia se manteve constante. Sendo assim, as velocidades de subida e de descida nesse tipo de lançamento, num mesmo ponto, possuem os mesmos módulos e mesmas direções, mas sentidos contrários.

Observando a Fig. 3.55, também podemos evidenciar a presença da simetria de reflexão em todos os três gráficos, sendo que o eixo de simetria da parábola (segmento de reta com origem no vértice dessa parábola e que passa pelo ponto  $(4, 0)$ ) age como a parte da reta por onde cada representação gráfica apresentada à esquerda será refletida à direita. De um ponto de vista moderno, a mecânica Newtoniana pode ser entendida como, segundo Antunes, Galhardi e Hernaski (2018, p. 1), “[...] um limite de baixas velocidades (comparadas com a velocidade da luz) e de grandes distâncias (comparadas com o comprimento de onda de de Broglie) de uma mecânica quântica e relativística [...] uma teoria de enorme sucesso fenomenológico.”

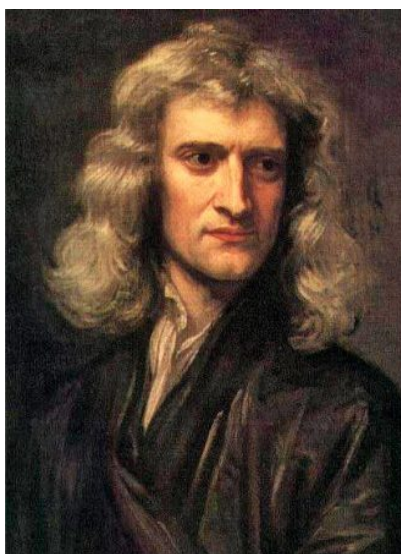
As três leis de conservação mais conhecidas na Física Clássica são, de acordo com Moreira (2019, p. 3): “[...] a da conservação da energia, [...] as leis de conservação do momentum (linear e angular) e a lei de conservação da carga elétrica.”. Portanto, a simetria de um sistema físico possui uma relação direta com as leis de conservação conhecidas da mecânica: *(i)* conservação de energia: numa translação no tempo, a lei de conservação evidenciada será na energia do sistema; *(ii)* conservação do momento linear: ocorrerá quando o sistema sofrer uma translação no espaço e *(iii)* conservação do momento angular: ocorrerá quando o sistema sofrer uma rotação em torno de um eixo.

### 3.4.1 Leis de Newton

Conforme depreende-se da leitura de Franco (2020), Isaac Newton nasceu na Inglaterra no dia 25 de dezembro de 1642 (segundo o calendário da época - calendário juliano), ou em 4 de janeiro de 1643 (segundo calendário usado hoje - calendário gregoriano). Ele é considerado um dos principais físicos, matemáticos, filósofos e alquimistas da história. De suas contribuições, merecem destaque: *(i)* o desenvolvimento das leis dos movimentos, lançando as bases da mecânica; *(ii)* o Binômio de Newton; *(iii)* a criação e o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral; *(iv)* a Teoria da Gravitação Universal, *(v)* o estudo sobre os fenômenos ópticos que possibilitaram a teoria sobre a cor dos corpos e, ainda, *(vi)* conceitos fundamentais na Física Moderna.

Sir Isaac Newton, segundo Bauer, Westfall e Dias (2012, p. 106), “[...] talvez tenha sido o cientista mais influente que já existiu, ele é geralmente creditado como sendo o

fundador da mecânica moderna, bem como do cálculo (junto com o matemático alemão Gottfried Leibniz)”. A Fig. 3.56 diz respeito a esse grande cientista, na Fig. 3.56(a) ele aparece numa pintura de Gootfried Kneller, em 1689, com 46 anos de idade, enquanto que na Fig. 3.56(b) podemos apreciar a famosa macieira no quintal da casa onde ele nasceu, a mesma narrada na história sobre a lei da gravidade, e atualmente ainda preservada, com mudas plantadas em diversas outras localidades no mundo como “parte” da história de Newton (FRANCO, 2020).



(a) Newton com 46 anos de idade.



(b) Macieira no quintal de casa onde Newton nasceu.

Figura 3.56 – Sir Isaac Newton: (a) Newton com 46 anos de idade e (b) Famosa macieira no quintal da casa onde ele nasceu.

Fonte: (a) [www.infoescola.com/wp-content/uploads/2008/09/isaac-newton-328x450.jpg](http://www.infoescola.com/wp-content/uploads/2008/09/isaac-newton-328x450.jpg) (2020).

(b) Adaptada de Franco (2020).

Um dos grandes marcos da história da ciência, para Leão (2003, p. 22, grifo do autor), “[...] senão o maior, ocorreu quando Sir Isaac Newton (1642-1727), publicou em 1687 o seu livro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* com o financiamento e incentivo do astrônomo inglês Edmond Halley (1656-1742)”. O nome desse livro vem do latim e significa Princípios Matemáticos da Física. Em sua obra, antes de enunciar as três leis que descrevem o movimento dos corpos materiais, Newton se preocupou com as seguintes definições: massa<sup>5</sup>, momentum linear<sup>6</sup>, tempo e espaço. Segundo Villar (2015, p. 16), “As três leis do movimento de Newton não parecem mesmo ‘leis’ gerais com *insight* profundo sobre a natureza do movimento, mas antes um conjunto autoconsistente de postulados embasados na experimentação e em conceitos intuitivos como tempo e espaço.”

<sup>5</sup> Massa ( $m$ ): trata-se da quantidade de matéria contida num corpo ou, ainda, da massa inercial desse corpo. Representa a medida de sua inércia, sendo resultante do produto da densidade  $\rho$  pelo volume  $V$  do corpo:  $m = \rho \cdot V$ .

<sup>6</sup> Momentum linear ( $\vec{p}$ ): é o produto da massa  $m$  de um corpo pela velocidade  $\vec{v}$  desse corpo, ( $\vec{p} = m\vec{v}$ ).

Segundo Aguiar (2019, p. 2), “As três leis de Newton formam a base da mecânica clássica. Embora tenham sido reformuladas por Lagrange, Hamilton e outros, essas leis são consideradas como fundamentais dentro do contexto não-relativístico e não-quântico até hoje.”. Na mecânica newtoniana usa-se intrinsecamente as seguintes hipóteses:

- “i) O tempo é *absoluto, homogêneo e isotrópico*. Newton ao dizer que o tempo é absoluto, significa que há uma independência entre o observador e o objeto observado ou fenômeno observado. Já quando Newton diz que o tempo *flui igualmente sem consideração por nada externo* ele está afirmando que ele é homogêneo. A questão da *isotropia do tempo*, isto é, a questão da reversibilidade temporal, só passou a ter significado com o advento da mecânica quântica. As leis de movimento da mecânica clássica são invariantes sob uma inversão temporal.
- ii) O espaço é *absoluto, homogêneo, isotrópico e euclidiano*. Quando Newton diz que o espaço é absoluto, por sua própria natureza, sem consideração por nada externo, ele está exprimindo o seu caráter absoluto enquanto ao afirmar que ele permanece sempre igual e imóvel ele está dizendo que o espaço é homogêneo. Apesar de não ter sido (sic) colocada de forma explícita por Newton, a idéia de que todas as direções são equivalentes no espaço, o espaço é isotrópico, está implícita na mecânica clássica. Por último, a métrica que usamos na mecânica clássica é a euclidiana, ou seja, na mecânica clássica, o teorema de Pitágoras é válido e a menor distância entre dois pontos é uma linha reta.” (LEÃO, 2003, p. 23, grifo do autor).

Em relação as três leis de Newton, a primeira lei já define sistemas de referência especiais, chamados de inerciais. Nos sistemas inerciais, conforme Aguiar (2019, p. 2), “[...] o movimento de corpos pode ser descrito em termos da segunda lei. A terceira lei, finalmente, acrescenta o importante ingrediente da ação e reação, que garante a conservação dos momentos linear e angular total de sistemas isolados.”. Numa formulação moderna, estas leis podem ser enunciadas da seguinte forma:

- “**Primeira Lei** *Todo corpo persiste em seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme a menos que seja compelido a modificar este estado pela ação de forças sobre ele.*
- Segunda Lei** *A soma das forças que atuam sobre um corpo é igual ao produto de seu coeficiente de inércia pela sua aceleração:  $\vec{F} = m\vec{a}$ .*
- Terceira Lei** *A toda ação que um corpo exerce sobre um segundo corpo, corresponde uma reação do segundo sobre o primeiro de mesma intensidade e sentido oposto.”* (ANTUNES; GALHARDI; HERNASKI, 2018, p. 2, grifo do autor).

Depreende-se da leitura de Leão (2003, p. 23-24) que existem duas formas diferentes

de interpretar o conjunto das três Leis de Newton. A primeira forma é que pode-se interpretar a primeira e a segunda lei de Newton apenas como uma definição de força, estando toda a física contida na terceira Lei. Na segunda forma, as três Leis de Newton são realmente leis no sentido em que seus enunciados implicam em fenômenos físicos que podem e devem ser questionados experimentalmente. Vamos, então, verificar cada uma delas individualmente.

### 3.4.1.1 Primeira lei de Newton

Young, Freedman e Ford (2008, p. 110, grifo do autor) enunciam a primeira lei de Newton da seguinte forma: “**Quando a força resultante sobre um corpo é igual a zero, ele se move com velocidade constante (que pode ser nula) e aceleração nula.**”. Essa lei coloca o estado de repouso e o movimento retilíneo uniforme na mesma condição, pois nenhuma força externa é necessária para manter o movimento retilíneo uniforme. De acordo com Bauer, Westfall e Dias (2012, p. 108, grifo do autor), “A primeira lei de Newton é, por vezes, também chamada de *lei da inércia*. [...] para mudar o movimento de um objeto, é preciso aplicar uma força externa resultante - o movimento não será alterado por si só, nem em módulo, nem em sentido.”.

Conforme Young, Freedman e Ford (2008, p. 110, grifo do autor), “Quando não existe nenhuma força atuando sobre um corpo ou quando existem diversas forças com uma soma vetorial (resultante) igual a zero, dizemos que o corpo está em **equilíbrio**.”. A primeira lei de Newton ou lei da inércia, segundo Bauer, Westfall e Dias (2012, p. 107, grifo do autor), “[...] diz que há dois estados possíveis para um objeto sem força resultante sobre ele: diz-se que um objeto em repouso está em **equilíbrio estático**. Já um objeto que se move com velocidade constante está em **equilíbrio dinâmico**.”. Assim, para um corpo em equilíbrio teremos:

$$\vec{F}_{res} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0. \quad (3.7)$$

É preciso ressaltar que a equação 3.7 terá validade se cada um dos componentes dessa força resultante também for igual a zero. Desse modo, no espaço tridimensional, tem-se três condições independentes de equilíbrio:

$$\vec{F}_{res,x} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,x} = \vec{F}_{1,x} + \vec{F}_{2,x} + \dots + \vec{F}_{n,x} = 0$$

$$\vec{F}_{res,y} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,y} = \vec{F}_{1,y} + \vec{F}_{2,y} + \dots + \vec{F}_{n,y} = 0$$

$$\vec{F}_{res,z} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,z} = \vec{F}_{1,z} + \vec{F}_{2,z} + \dots + \vec{F}_{n,z} = 0.$$

Para Leão (2003, p. 24), “Newton tornou esta lei precisa ao introduzir as definições dos conceitos de momentum e massa.”. Vimos que podemos obter o momentum linear por  $\vec{p} = m\vec{v}$  e conforme a equação 3.7, percebemos que a velocidade não sofrerá alteração devido a ausência de aceleração, o que nos leva a conclusão de que  $\vec{p}$  será constante e conservado. A primeira lei de Newton é dotada de simetria contínua e segundo o teorema de Noether, para cada simetria contínua das leis físicas corresponde uma lei de conservação. Assim, se a simetria for espacial (translacional) haverá conservação do momento, se ela for rotacional (como ocorre numa bola de bilhar) haverá conservação do momento angular e caso seja temporal (invariante com o tempo) haverá conservação de energia.

### 3.4.1.2 Segunda lei de Newton

O principal conteúdo físico da segunda lei de Newton é, conforme Villar (2015, p. 16), “[...] colocar o momento no centro da dinâmica e sua variação temporal, proporcional à aceleração da partícula, como consequência de uma grandeza única, a força, responsável por mudar a trajetória com relação àquela ‘padrão’ definida na primeira lei.”. É essa lei que nos fornecerá um significado mais físico do que vem a ser a força. Assim,

“A descoberta de Newton não foi de que a força é massa vezes aceleração, pois, isso é meramente definição operacional de uma força atuando numa partícula. Newton sabia da observação experimental que força, massa e aceleração estavam intimamente relacionadas. De suas observações ele constatou que a aceleração adquirida por uma partícula era inversamente proporcional à sua massa quando se aplica uma força de intensidade fixa. Por outro lado, se a massa fosse mantida fixa, a aceleração era diretamente proporcional à intensidade da força aplicada. Assim, era mais simples associar a força à variação da quantidade de movimento. Se a segunda lei de Newton fosse meramente uma definição de força, ela seria desprovida de qualquer conteúdo físico.” (LEÃO, 2003, p. 25).

Assim, conforme afirma Villar (2015, p. 17, grifo do autor), “[...] a grandeza física com papel central na dinâmica newtoniana é o **momento**, definido externamente ao postulado como o produto da massa do corpo por sua velocidade.”. Essa lei, de acordo com Bauer, Westfall e Dias (2012, p. 108), “[...] relaciona o conceito de aceleração para o qual usamos o símbolo  $\vec{a}$ , à força. A segunda lei de Newton nos diz o que causa essa aceleração.”. Voltemos na definição de momento como  $\vec{p} = m\vec{v}$ , podemos reescrever a segunda lei como:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}), \quad (3.8)$$

Newton sintetizou todas as relações e resultados experimentais em uma única formulação, chamando-a de segunda lei de Newton, na qual possui o seguinte enunciado:

**“Quando uma força resultante externa atua sobre um corpo, ele se acelera. A aceleração possui a mesma direção e o mesmo sentido da força resultante. O vetor força resultante é igual ao produto da massa do corpo pelo vetor aceleração do corpo.”** (YOUNG; FREEDMAN; FORD, 2008, p. 116, grifo do autor).

Em símbolos, essa lei será expressa como:

$$\vec{F}_{res} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{a}, \quad (3.9)$$

ou simplesmente,

$$\vec{F}_{res} = m\vec{a}. \quad (3.10)$$

Por se tratar de uma equação vetorial, a equação 3.9, segundo Bauer, Westfall e Dias (2012, p. 108), “[...] nos diz que o vetor aceleração sofrido pelo objeto com massa  $m$  está no mesmo sentido que o vetor foça exterior resultante que está atuando sobre o objeto para causar essa aceleração.”. Por ser uma equação vetorial, podemos escrever a equação 3.9 em termos de suas componentes espaciais:

$$\vec{F}_{res,x} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,x} = m\vec{a}_x; \quad \vec{F}_{res,y} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,y} = m\vec{a}_y; \quad \vec{F}_{res,z} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,z} = m\vec{a}_z. \quad (3.11)$$

Portanto, esses resultados significam que as equações 3.9 e 3.10 são válidas independentemente para cada componente cartesiana dos vetores força e aceleração.

Aponta Bauer, Westfall e Dias (2012, p. 44), que: “A aceleração é a derivada temporal da velocidade, e a velocidade é a derivada temporal do deslocamento. Portanto, a aceleração é a segunda derivada do deslocamento.”. Desse modo podemos escrever aceleração  $\vec{a}_x$  da seguinte forma:

$$\vec{a}_x = \frac{d}{dt}v_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}x\right) = \frac{d^2}{dt^2}x, \quad (3.12)$$

lembrando que a operação derivativa atua no sentido das componentes. Nesse sentido, a equação 3.10 pode ser reescrita em termos de suas componentes espaciais como:

$$\vec{F}_{res,x} = m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}; \quad \vec{F}_{res,y} = m\frac{d^2}{dt^2}\vec{y}; \quad \vec{F}_{res,z} = m\frac{d^2}{dt^2}\vec{z}. \quad (3.13)$$

Como indicado em Leão (2003, p. 25), “[...]  $\mathbf{a} \equiv d\mathbf{v}/dt \equiv \dot{\mathbf{v}}$  é a aceleração do corpo.”. Nesse caso ele representou a derivada usando a notação de Newton, também

conhecida como Notação em ponto de Newton ou até “excremento de mosca”. Esse tipo de representação é usada para representar derivadas temporais. Nesse sentido, a equação 3.10 também poderá ser reescrita em termos de suas componentes como:

$$\vec{F}_{res,x} = m\ddot{x}; \quad \vec{F}_{res,y} = m\ddot{y}; \quad \vec{F}_{res,z} = m\ddot{z}. \quad (3.14)$$

Segundo Leão (2003, p. 25, grifo do autor), “A equação diferencial de segunda ordem resultante de alguma lei de força que é fornecida para a segunda lei de Newton é chamada de *equações de movimento* para o corpo ou partícula.”. A segunda lei de Newton é simétrica em relação a transformação de translação, pois ela não muda quando fazemos uma translação das coordenadas, ou seja, pode-se transladar os eixos do sistema de coordenadas para outro lugar e essa lei continua válida. Outras duas simetrias evidentes nessa lei é a temporal e de rotação nos eixos, válidas, também, para qualquer conjunto de eixos variando seus ângulos.

#### 3.4.1.3 Terceira lei de Newton

De acordo com Aguiar (2019, p. 2), “A terceira lei, finalmente, acrescenta o importante ingrediente da ação e reação, que garante a conservação dos momentos linear e angular total de sistemas isolados.”. Mais do que postular padrões matemáticos gerais do movimento, segundo Villar (2015, p. 17-18) “[...] a terceira lei trata das interações físicas subjacentes ao mesmo. Ela estabelece que corpos sempre interagem aos *pares*, com a criação de duas forças (uma agindo em cada corpo) possuindo *mesma magnitude e sentidos opostos de uma mesma direção*.”.

A terceira lei de Newton pode ser enunciada da seguinte forma:

**“Quando um corpo A exerce uma força sobre um corpo B (uma ‘ação’), então, o corpo B exerce uma força sobre o corpo A (uma ‘reação’). Essas duas forças têm o mesmo módulo e a mesma direção, mas possuem sentidos contrários. Essas duas forças atuam em corpos diferentes.”** (YOUNG; FREEDMAN; FORD, 2008, p. 121, grifo do autor).

Assim, conforme o enunciado, matematicamente essa lei pode ser expressa como:

$$\vec{F}_{AemB} = -\vec{F}_{BemA}. \quad (3.15)$$

Observando a equação 3.15 podemos perceber que essas duas forças realmente não atuam no mesmo corpo, mas são forças com as quais esses dois corpos atuam entre si. A terceira lei de Newton parece apresentar um paradoxo, mas logo se consegue justificar a situação. Uma dessas situações é apontada a seguir:

“[...] se um cavalo puxa uma carroça com a mesma força com que a carroça o puxa, então como é possível que o cavalo e a carroça se movam para algum lugar? A resposta é que essas forças atuam sobre diferentes objetos no sistema. A carroça sofre a tração do cavalo e se move para frente. O cavalo sente a tração da carroça e empurra com força suficiente contra o solo para superar essa força e se mover para frente.” (BAUER; WESTFALL; DIAS, 2012, p. 108-109).

De acordo com Young, Freedman e Ford (2008, p. 124, grifo do autor), “[...] ao analisar um movimento de um corpo, você deve lembrar que somente as forças que atuam *sobre* o corpo determinam seu movimento.”. A terceira lei de Newton também se aplica para as forças de longo alcance que não necessitam de contato físico entre os corpos, como no caso da atração gravitacional evidenciada na existência das marés. Segundo Leão (2003, p. 26), “[...] a Terra mantém a Lua em órbita com um campo gravitacional, mas a Lua atua sobre a terra com uma força a qual (entre outras coisas) é a causa do fenômeno das marés alta e baixa nos oceanos.”.

A Terceira Lei de Newton pode ser enunciada de maneira a incorporar uma definição operacional de massa. Esse enunciado é apresentado por Leão (2003, p. 27, grifo do autor) da seguinte forma: “*Se dois corpos, que exercem força um sobre o outro, constituem um sistema isolado, então as acelerações desses corpos estão sempre em sentidos opostos e a razão dos módulos das acelerações é igual ao inverso da razão das massas.*”. Para a melhor compreensão desse enunciado, consideremos um sistema isolado formado pelos dois corpos e as equações 3.15 e 3.8, onde:

$$\vec{F}_{AemB} = -\vec{F}_{BemA} \Rightarrow \frac{d\vec{p}_A}{dt} = -\frac{d\vec{p}_B}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\vec{v}_A) = -\frac{d}{dt}(m\vec{v}_B).$$

Sendo a massa inercial<sup>7</sup> constante e optando por deixar em função da velocidade  $\vec{v}$ , teremos:

$$m \frac{d\vec{v}_A}{dt} = -m \frac{d\vec{v}_B}{dt}, \quad (3.16)$$

ou optando-se por deixar em função da aceleração  $\vec{a}$ ,

$$m\vec{a}_A = -m\vec{a}_B, \quad (3.17)$$

considerando os módulos das acelerações e calculando a razão entre eles, teremos finalmente que,

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{m_B}{m_A}, \quad (3.18)$$

<sup>7</sup> **Massa inercial:** aquela que determina a aceleração de um corpo quando sujeito à ação de uma força (a que aparece na Segunda lei de Newton) (LEÃO, 2003, p. 28).

verificando que realmente a razão dos módulos das acelerações equivale ao inverso da razão das massas. Com a equação 3.18 pode-se determinar a massa inercial de dois corpos que estejam interagindo.

Segundo Young, Freedman e Ford (2008, p. 119, grifo do autor), “O *peso* de um corpo é uma das forças mais familiares que a Terra exerce sobre o corpo [...] é a *força* de atração gravitacional exercida pela Terra sobre o corpo [...] é uma força, uma grandeza vetorial.”. A força gravitacional  $\vec{F}_g$ , conforme a equação 3.10, pode ser expressa como:

$$\vec{F}_g = m\vec{g}, \quad (3.19)$$

onde  $\vec{g}$  representa a aceleração da gravidade. De acordo com Bauer, Westfall e Dias (2012, p. 103-104, grifo do autor), “[...] O módulo de  $\vec{F}_g$  é chamado de **peso** do objeto [...] o módulo dessa força é  $F_g = mg$  [...] A massa nessa equação também é chamada de **massa gravitacional** para indicar que é responsável pela interação gravitacional.”.

Conforme Leão (2003, p. 28), “Uma outra interpretação da terceira lei de Newton é baseada no conceito de momentum.”. Nesse sentido, das equações 3.8 e 3.15, podemos escrever:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B) = 0, \quad (3.20)$$

ou ainda que

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = 0. \quad (3.21)$$

Portando, podemos observar que realmente o momentum de um sistema isolado constituído de duas partículas é conservado. Segundo Villar (2015, p. 18, grifo do autor), “[...] as leis de Newton são construídas para reconhecer que existe uma quantidade física invariante no meio de tantas outras coisas variando com o movimento: *a soma total dos momentos de partículas num sistema isolado é uma constante do movimento.*”.

### 3.4.2 Teoremas de conservação

Veremos agora alguns teoremas importantes sobre quantidades físicas que se conservam. Conforme Leão (2003, p. 54), “Estes teoremas de conservação são deduzidos como meras consequências das leis de Newton da dinâmica, e neste sentido estes não são caracterizados como novas leis da mecânica.”.

### 3.4.2.1 Conservação de Energia

A energia tem muitas formas e exige diversas abordagens diferentes para ser totalmente estudada. Em física, a energia tem significado fundamental e a importância de seu conceito reside no princípio da conservação de energia. A energia é uma grandeza que pode ser convertida de uma forma para outra, mas que não pode ser criada nem destruída. Esse fato pode ser evidenciado a seguir:

“[...] No motor de um automóvel, a energia química armazenada no combustível é convertida parcialmente em energia térmica e parcialmente em energia mecânica que acelera o automóvel. Em um forno microondas (sic), a energia eletromagnética obtida da companhia que fornece energia elétrica é convertida na energia térmica que cozinha o alimento. Nesses e em outros processos, a energia *total* permanece constante, ou seja, a soma de todas as formas de energia envolvidas permanecem a mesma. Nenhuma exceção à essa conclusão foi jamais encontrada.” (YOUNG; FREEDMAN; FORD, 2008, p. 181, grifo do autor).

Trabalho e potência estão relacionados a energia e, segundo Bauer, Westfall e Dias (2012, p. 142-143), “[...] Em muitos livros, energia é definida como a capacidade de realizar um trabalho [...] O conceito de energia e, em especial, a lei da conservação de energia, são ferramentas extremamente úteis para desvendar o comportamento de sistemas.”. Contudo, daremos continuidade concentrando nossa atenção na conservação da energia mecânica.

#### 3.4.2.1.1 Trabalho de uma Força Constante

Como indicado em Bauer, Westfall e Dias (2012, p. 145, grifo do autor): “**Trabalho** é a energia transferida para ou de um objeto pela ação de uma força. Trabalho positivo é uma transferência de energia ao objeto, e o trabalho negativo é uma transferência de energia do objeto.”. A Fig. 3.57 representa a situação do deslocamento de uma partícula de massa  $m$ , submetida a ação de uma força constante  $\vec{F}$ , que forma um ângulo  $\theta$  com o eixo horizontal.

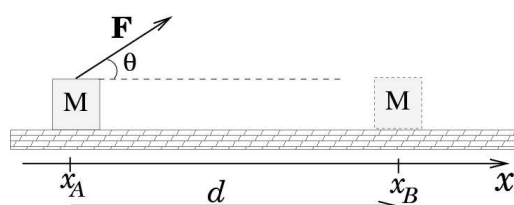


Figura 3.57 – Deslocamento de uma partícula de massa  $m$ , submetida a ação de uma força constante  $\vec{F}$ .

Fonte: Leão (2003, p. 55).

O trabalho  $W_{A \rightarrow B}$  realizado pela força constante  $\vec{F}$  atuando sobre um bloco de massa  $m$ , quando o mesmo é deslocado do ponto  $A$  ao ponto  $B$  sobre uma trajetória retilínea, cujo vetor deslocamento é  $\vec{d}$  será

$$W_{A \rightarrow B} = \vec{F} \bullet \vec{d} = F d \cos\theta. \quad (3.22)$$

Essa equação nos diz que o trabalho realizado por uma força constante  $\vec{F}$  para deslocar um objeto em  $\vec{d}$  é o produto escalar desses dois vetores.

É importante observar que se o deslocamento for perpendicular a força ou se esse deslocamento não existir, o produto escalar será zero e nenhum trabalho será realizado. Segundo Young, Freedman e Ford (2008, p. 183, grifo do autor), “É importante entender que o trabalho é uma grandeza *escalar*, embora seja obtido a partir do cálculo do produto escalar de duas grandezas vetoriais (força e deslocamento).”.

### 3.4.2.1.2 Trabalho de uma Força Variável

Consideremos agora um movimento retilíneo no qual uma força  $\vec{F}_x$  possui um componente paralelo ao deslocamento, entretanto o módulo dessa força é variável. Como indicado em Young, Freedman e Ford (2008, p. 192), “[...] Um exemplo do cotidiano é dirigir um carro por uma estrada retilínea com sinais de parada que fazem o motorista alternar entre pisar no acelerador e frear.”.

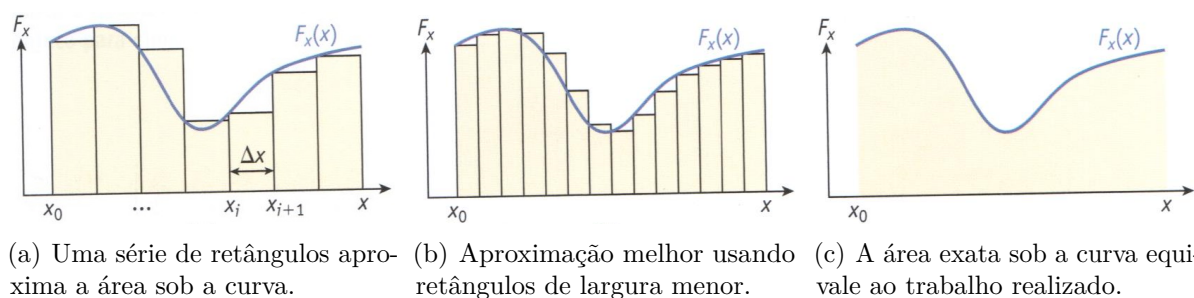


Figura 3.58 – Cálculo do trabalho  $W$  realizado por uma força  $\vec{F}_x$  na direção de  $x$  enquanto uma partícula se move de  $x_0$  para  $x$ .

Fonte: Adaptado de Bauer, Westfall e Dias (2012, p. 152).

A Fig. 3.58 mostra o gráfico do componente  $x$  da força  $\vec{F}_x$  em função da coordenada  $x$ . Para calcular o trabalho  $W$  realizado por essa força, divide-se o deslocamento total em pequenos segmentos ou pequenos retângulos. Segundo Young, Freedman e Ford (2008, p. 192, grifo do autor), “À medida que o número de segmentos aumenta e a largura de cada segmento torna-se cada vez menor, essa soma fornece (no limite) a *integral* de  $\vec{F}_x$ , de  $x_1$  a  $x_2$ .”. Assim, teremos que o trabalho apresentado pela força da Fig. 3.58 será

$$W = \int_{x_0}^x \vec{F}_x dx. \quad (3.23)$$

No caso particular em que o componente  $x$  da força  $F_x$  for constante, a equação 3.23 será:

$$W = \int_{x_0}^x \vec{F}_x dx = \vec{F}_x \int_{x_0}^x dx = \vec{F}_x [x]_{x_0}^x = \vec{F}_x (x - x_0). \quad (3.24)$$

Para esticar qualquer mola devemos realizar um trabalho. Na Fig. 3.59 podemos ver um bloco de massa  $m$  preso a uma mola de constante elástica  $k$ , inicialmente no ponto  $x_A$ , cuja força  $\vec{F}$  obedece a lei de Hooke, onde  $\vec{F} = -k x \hat{i}$ .

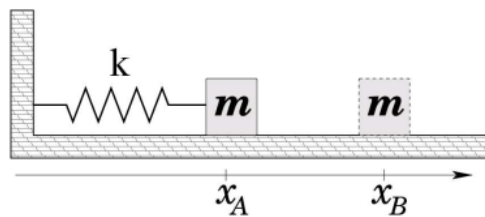


Figura 3.59 – Bloco de massa  $m$ , inicialmente em  $x_A$ , preso a uma mola.

Fonte: Leão (2003, p. 57).

Da equação 3.23 e levando em consideração que agora temos uma força elástica  $\vec{F} = -k x \hat{i}$ , teremos que o trabalho  $W_{AB}$  realizado por essa mola, ao deslocar o bloco do ponto  $x_A$  ao ponto  $x_B$  será:

$$W_{AB} = \int_{x_0}^x \vec{F} dx = \int_{x_A}^{x_B} -k x dx = -k \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x_A}^{x_B} = \frac{1}{2} k (x_A^2 - x_B^2). \quad (3.25)$$

Se chamarmos de  $\vec{r}(t)$  a trajetória de uma partícula de massa  $m$  que se move sob a ação da força externa  $\vec{F}$ . O trabalho realizado por  $\vec{F}$  entre os pontos  $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$  e  $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$  ao longo de sua trajetória será definido por

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}, \quad (3.26)$$

onde a integral acima é uma integral de linha feita ao longo da trajetória da partícula, isto é,  $d\vec{r} = \vec{v} dt$ . Desse modo, podemos reescrever o trabalho como sendo

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \vec{v} dt. \quad (3.27)$$

Retomando a equação 3.8, temos que  $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ , desse modo a equação 3.27 ficará reescrita como:

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} m \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} dt. \quad (3.28)$$

Lembrando que  $\frac{d\vec{v}}{dt} dt$  representa a variação da velocidade  $d\vec{v}$  durante o tempo  $dt$ , podemos substituir  $d\vec{v}$  por  $\frac{d\vec{v}}{dt} dt$ . Com isso, a variável de integração mudará de  $t$  para  $v$ , ficando os limites de integração trocados de  $t_1$  a  $t_2$  para os valores correspondentes de  $v_1$  a  $v_2$ . Isso nos fornecerá que:

$$W_{12} = \int_{v_1}^{v_2} m \vec{v} d\vec{v} = m \int_{v_1}^{v_2} \vec{v} d\vec{v}. \quad (3.29)$$

Calculando a integral de  $\vec{v} d\vec{v}$  teremos  $\frac{v^2}{2}$ . Substituindo os limites da integral, finalmente teremos:

$$W_{12} = m \left[ \frac{v^2}{2} \right]_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2. \quad (3.30)$$

De acordo com Young, Freedman e Ford (2008, p. 187, grifo do autor), “[...] A grandeza  $\frac{1}{2}mv^2$  representa a **energia cinética**  $K$  da partícula:  $K = \frac{1}{2}mv^2$  (definição de energia cinética)”. Assim, reescrevendo a equação 3.30, finalmente teremos:

$$W_{12} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = K_2 - K_1 = \Delta K. \quad (3.31)$$

Esse resultado é conhecido como teorema do trabalho-energia ou teorema do trabalho e energia cinética, sendo  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ . Para Bauer, Westfall e Dias (2012, p. 149, grifo do autor), “A relação entre a energia cinética de um objeto e o trabalho realizado pelas forças que atuam sobre ele, chamado de **teorema do trabalho e energia cinética**, é formalmente expresso como  $\Delta K \equiv K - K_0 = W$ ”.

#### 3.4.2.1.3 Trabalho Total

Para o caso de diversas forças atuando sobre um corpo, segundo Young, Freedman e Ford (2008, p. 185, grifo do autor), “[...] o trabalho *total*  $W_{tot}$  realizado por todas as forças sobre o corpo é a soma algébrica de todos os trabalhos realizados pelas forças individuais”. Esses mesmos autores ainda sugerem um método alternativo para o cálculo do  $W_{tot}$ , consistindo em se calcular a soma vetorial de todas as forças que atuam sobre o corpo (ou seja, a força resultante) e a seguir fazer uso dessa soma vetorial na equação 3.22.

#### 3.4.2.1.4 Teorema do Trabalho-Energia

Segundo Leão (2003, p. 59, grifo do autor), “[...] em muitas situações físicas a força tem a propriedade de que o trabalho realizado por ela sobre a partícula só depende dos pontos inicial e final, e não da trajetória. Chamaremos de forças conservativas as forças cujo trabalho independem da trajetória”. Consideremos agora a integral da equação 3.26,

entre os pontos  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  ao longo de um caminho arbitrário  $\gamma$ , supondo que  $\vec{F}$  seja uma força conservativa, dependendo apenas da posição  $\vec{r}$ . Portanto, se

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (3.32)$$

então o valor dessa integral ao longo do caminho fechado  $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$  deve se anular.

Conforme Leão (2003, p. 59, grifo do autor) afirma que: “O **teorema de Stokes** leva a integral de linha em uma integral de superfície [...]”. Assim, a equação 3.32 será reescrita como

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{S_{\gamma}} (\nabla \times \vec{F}) \cdot dA, \quad (3.33)$$

onde  $S_{\gamma}$  é qualquer superfície limitada pela curva  $\gamma$ . Sendo  $\vec{F}$  conservativa, então, ao longo de uma trajetória fechada, teremos que

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{S_{\gamma}} (\nabla \times \vec{F}) \cdot dA = 0. \quad (3.34)$$

Portanto, o rotacional da força deve ser nulo, ou seja,

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{F}_x & \vec{F}_y & \vec{F}_z \end{vmatrix} = 0. \quad (3.35)$$

Da análise vetorial, sabe-se que o rotacional do gradiente de uma função escalar  $\phi(x, y, z)$  qualquer é sempre nulo. Assim teremos que, segundo Leão (2003, p. 60), “[...]  $\nabla \times \nabla \phi = 0$ , já que  $\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$ . Nesse caso podemos associar à força uma função escalar da posição da partícula, chamada função energia potencial  $U(\vec{r}) = U(x, y, z)$ .”. Portanto, podemos escrever

$$\vec{F}_{\vec{r}} = -\nabla U(\vec{r}) = -\left( \frac{\partial U}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right). \quad (3.36)$$

A equação 3.36 apresenta o sinal de negativo e isso ocorre porque a força está direcionada no sentido oposto de seu gradiente, apontando para o ponto de mínimo da função energia potencial. Segundo Leão (2003, p. 60, grifo do autor), “[...] o sinal negativo quer dizer que a força está direcionada para a região de menor energia potencial. Como o gradiente é uma derivada direcional, então temos em sua definição que:  $dU = [\nabla U(\vec{r})] \cdot d\vec{r} = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$ .”. Assim, podemos reescrever a equação 3.26 como

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dU = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) \equiv U_1 - U_2. \quad (3.37)$$

Da equação 3.31 temos, finalmente, que

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2, \quad (3.38)$$

onde podemos concluir que  $\Delta K = -\Delta U$ .

#### 3.4.2.1.5 Conservação da Energia Mecânica

Segundo Aguiar (2019, p. 14), “Se as forças agindo sobre uma partícula forem independentes da velocidade e do tempo e forem conservativas, i.e., se  $\nabla \times \vec{F} = 0$ , então a energia total  $E = mv^2/2 + V(\vec{r})$  é constante ao longo do movimento.”, sendo que esse autor denota  $V$  como sendo a energia potencial. Isso significa que a energia mecânica total permanece constante no tempo (invariância temporal), podendo ser escrita como

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0, \quad (3.39)$$

ou, ainda, como

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1, \quad (3.40)$$

afirmando que as mudanças são exatamente compensatórias, contrabalanceando uma à outra.

#### 3.4.2.2 Conservação do momentum linear

Conforme Aguiar (2019, p. 12), “Se a força total agindo sobre uma partícula é nula, então  $\dot{\vec{p}}$  e seu momento linear permanece constante durante o movimento.”. Assim, da equação 3.8, quando  $\vec{F}$  é zero, temos que

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \implies \vec{p} = cte. \quad (3.41)$$

Se  $\vec{F}$  não for zero, mas se  $\vec{F} \cdot \vec{S} = 0$ , onde  $\vec{S}$  é um vetor cte (constante), então

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{S} = 0 \implies \vec{p} \cdot \vec{S} = cte. \quad (3.42)$$

De acordo com Leão (2003, p. 54) “Se a componente da força ao longo de uma dada direção  $\mathbf{S}$  for nula, então a componente do momentum ao longo desta direção é conservada ( $\mathbf{S}$  pode ser, por exemplo,  $\hat{\mathbf{i}}$ ,  $\hat{\mathbf{j}}$  ou  $\hat{\mathbf{k}}$ ). Portanto, na ausência de forças externas (sistema isolado), ou se a resultante das forças externas for nula, o momentum linear total se conserva (simetria de translação espacial).



Figura 3.60 – O pêndulo de Newton e a conservação do momentum linear.

Fonte:

[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e8/Newtons\\_cradle\\_animation\\_book.gif](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e8/Newtons_cradle_animation_book.gif)  
(2020).

A Fig. 3.60 nos mostra o dispositivo chamado de pêndulo de Newton, que servirá como exemplo para a conservação linear. Se elevarmos uma esfera e soltá-la, ocorrerá uma sequência de colisões e somente a última bolinha irá subir, sendo que o restante permanecerá em repouso. Quando a bola que subiu retornar, novamente ocorrerá novas colisões e a então última bolinha, aquela solta no início, subirá e assim o movimento se repetirá diversas vezes, ciclicamente, com a conservação do momentum linear por um período, mas não indefinidamente. Portanto, por existir forças dissipativas, na prática, a energia mecânica desse sistema somente é aproximadamente conservada.

### 3.4.2.3 Conservação do momentum angular

Conforme Bauer, Westfall e Dias (2012, p. 335, grifo do autor), “O **momento angular**,  $\vec{L}$ , de uma partícula pontual é o produto vetorial dos seus vetores posição e momento.”. Assim, podemos representar o momento angular como sendo

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (3.43)$$

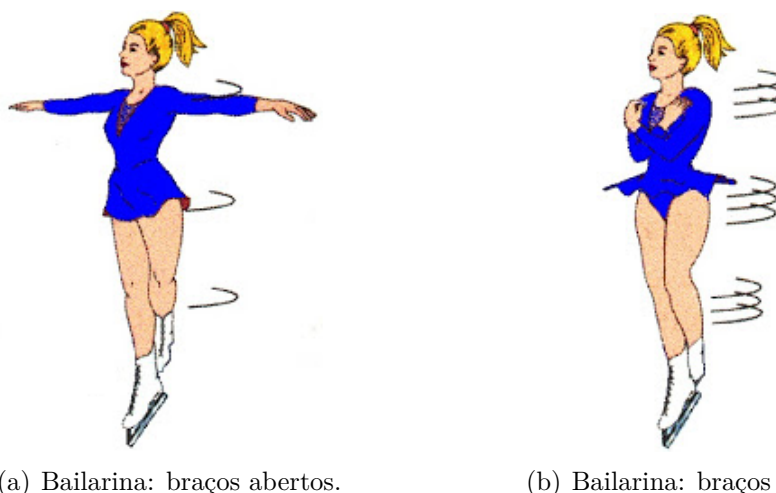
Segundo Young, Freedman e Ford (2008, p. 331, grifo do autor), “**A taxa de variação do momento angular de uma partícula é igual ao torque da força resultante que atua sobre ela.**”. Denotando  $\vec{N}$  como sendo o torque ou momento da força, podemos defini-lo como

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} \right) + \left( \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = (\vec{v} \times m\vec{v}) + (\vec{r} \times m\vec{a}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (3.44)$$

Conforme afirma Aguiar (2019, p. 14), “Se o torque total agindo sobre a partícula é nulo, então  $\dot{\vec{L}} = 0$  e seu momento angular permanece constante durante o movimento.”. Portanto, podemos escrever que

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = 0 \implies \vec{L} = cte. \quad (3.45)$$

Um sistema invariante por rotação em torno de qualquer eixo é chamado isotrópico e tal simetria indica que a física do problema não depende de sua orientação espacial. Para Villar (2015, p. 181) explica que: “Sistemas isotrópicos mantêm seu vetor momento angular  $\vec{L}$  como constante do movimento [...] O espaço newtoniano é considerado isotrópico, e por isso qualquer sistema isolado tem seu momento angular conservado.”.



(a) Bailarina: braços abertos.

(b) Bailarina: braços fechados.

Figura 3.61 – Rotação da bailarina e a conservação do momentum angular.

Fonte: Adaptado de [http://4.bp.blogspot.com/\\_5VcJ9iPsJ1M/TMJNH4ZQVvI/AAAAAAAAAHU/Dt1gSuH5qfQ/s1600/Figura+1.jpg](http://4.bp.blogspot.com/_5VcJ9iPsJ1M/TMJNH4ZQVvI/AAAAAAAAAHU/Dt1gSuH5qfQ/s1600/Figura+1.jpg) (2020).

Um exemplo de conservação do momentum angular encontra-se na Fig. 3.61. Essa figura nos ajuda a compreender o motivo pelo qual a velocidade de rotação da bailarina aumenta quando ela recolhe os braços e a perna direita. Isso acontece porque ao recuar os membros, haverá mais massa localizada perto do eixo de rotação, diminuindo o momento de inércia e, como o torque resultante na direção vertical (eixo do movimento) é zero, seu momentum angular se conservará, fazendo com que a velocidade de rotação da bailarina sofra um aumento.

### 3.5 MECÂNICA LAGRANGIANA

O estudo das simetrias não se restringe apenas ao formalismo newtoniano, agora veremos a construção da formulação Lagrangiana na Mecânica e, em seguida, as mesmas três leis de conservação apresentadas anteriormente, mas desta vez na conjuntura da Mecânica de Lagrange. Segundo Antunes, Galhardi e Hernaski (2018, p. 1-2, grifo do

autor), “[...] o formalismo Lagrangeano é singularmente adequado na conexão das simetrias do sistema com grandezas que se conservam durante sua evolução dinâmica (*constantes de movimento*), que se torna explícita no celebrado *Teorema de Noether*.”

A estrutura básica da formulação Lagrangiana para um sistema físico, conforme Oliveira (2014, p. 11), “[...] é baseada na utilização de  $n$  coordenadas generalizadas  $(q_1, \dots, q_n)$  na construção de uma função  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$  denominada Lagrangiana que depende destas coordenadas, de suas derivadas e possivelmente do tempo.” O formalismo Lagrangeano permite derivar as equações de movimento de um sistema a partir de um princípio variacional e usando coordenadas generalizadas, não necessariamente cartesianas, especificam a configuração ou estado do sistema, dadas por  $q_i$ , sendo  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , com  $n$  representando o número de graus de liberdade do sistema de partículas.

A investigação sistemática da relação entre as simetrias contínuas de um sistema físico e as grandezas conservadas nesse sistema torna-se mais evidente no formalismo Lagrangeano da mecânica. Assim,

“[...] Este formalismo pode ser visto como uma concepção independente da mecânica clássica com seus próprios princípios. Postula-se a existência de uma função escalar  $\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}, t)$  que contém toda informação dinâmica do sistema. Dentre todas as trajetórias possíveis entre pontos iniciais e finais,  $\vec{x}(t_0)$  e  $\vec{x}(t_f)$ , a que efetivamente se realiza fisicamente é aquela que extremiza o funcional ação  $S[\vec{x}(t)] = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_f} dt \mathcal{L}(\vec{x}(t), \dot{x}(t), t)$ .” (ANTUNES; GALHARDI; HERNASKI, 2018, p. 4).

Percebe-se, então, que a Lagrangiana é uma função escalar  $L$  do tipo

$$L = L(\vec{x}(t), \dot{x}(t), t). \quad (3.46)$$

Entretanto, na sua forma mais geral, a equação 3.46 será reescrita como

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (3.47)$$

Para finalmente o processo culminar nas equações de movimento no formalismo Lagrangeano:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (3.48)$$

As equações 3.48 de agora em diante, segundo Leão (2003, p. 216), “[...] serão chamadas de Equações de Lagrange. Observe que as equações de Lagrange são  $n$  equações diferenciais de segunda ordem para um sistema conservativo e com vínculos holônomos.” Vale ressaltar que vínculos holônomos: ( $i$ ) também são chamados de vínculos integráveis;

(ii) definem as configurações acessíveis (são compatíveis com as restrições impostas ao sistema); (iii) restringem as configurações possíveis, e, ainda, (iv) qualquer configuração compatível com os vínculos corresponde a um conjunto de coordenadas generalizadas convenientemente escolhidas.

Conforme Villar (2015, p. 176, grifo do autor), “As equações de Lagrange podem ser escritas como o par de equações diferenciais de primeira ordem  $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$  e  $\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$ , em que  $p_j$  é denominado momento generalizado ou momento canônico.”. Dessa forma, pode-se definir o momentum generalizado  $p_i$  correspondente a coordenada generalizada  $q_i$  como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (3.49)$$

Como indicado em Martins (1999, p. 34), “Se a lagrangeana  $L$  não depende explicitamente de uma coordenada  $q$ , dizemos que esta coordenada é cíclica ou ignorável.”. Portanto, para uma coordenada ignorável  $q_i$  teremos

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (3.50)$$

Assim, das equações 3.48, 3.49 e 3.50 teremos

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = cte. \quad (3.51)$$

Na equação 3.51,  $p_i$  é chamado de momentum generalizado conjugado a coordenada  $q_i$ , onde o sistema possui simetria de translação, e a equação 3.48 expressa a conservação do momentum generalizado. Portanto, como o espaço é homogêneo em um sistema inercial, a Lagrangeana do sistema fechado não será afetado por uma translação do sistema inteiro no espaço, ocorrendo a conservação do momentum linear. O sistema do Lagrangeano com respeito a uma coordenada está ligado à existência de uma lei de conservação, com  $p_i$  sendo o momentum associado a uma coordenada generalizada  $q_i$  qualquer (posição, ângulo, etc.).

Se a lagrangiana não depender da coordenada angular  $q_i$ , então

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (3.52)$$

Nesse caso, o sistema físico possui simetria de rotação em torno do eixo e o momento canônico  $p_i$ , fazendo com que a componente do momento angular  $\vec{L}$  seja conservada, indicando que a física do problema independe de sua orientação espacial. Portanto, como o espaço é isotrópico num sistema de referência inercial, a Lagrangeana de um sistema fechado não muda se o sistema for girado por um ângulo infinitesimal.

De acordo com Pessa (2017, p. 23), “[...] Uma vez estabelecida a Lagrangiana para uma situação física de interesse, as equações de Lagrange determinam as equações de movimento e, por conseguinte, a evolução dinâmica do sistema.”. Denotando nesse formalismo,  $T$  e  $V$  como sendo respectivamente as energias cinética e potencial de um sistema, escritas em função de  $q_i$  e  $\dot{q}_i$ , em que, para cada  $i$ ,  $q_i$  é uma coordenada generalizada. Chama-se lagrangiana desse sistema a função:

$$L = T - V. \quad (3.53)$$

Como indicado em Leão (2003, p. 216), “[...] o sistema será conservativo somente se  $V$  não depender explicitamente do tempo [...] um potencial  $V$  que não depende das velocidades generalizadas”. Assim, a equação 3.53 será reescrita como

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i, t) - V(q_i). \quad (3.54)$$

A energia cinética do sistema não será alterada sob variações nas coordenadas generalizadas que especificam o estado do sistema. De acordo com Pessa (2017, p. 24), “[...] O que irá garantir a preservação da energia cinética é o fato da dependência desta com o módulo quadrado da velocidade que é claramente constante tanto sob translações quanto rotações.”. Assim, dos argumentos anteriores e das equações 3.48 e 3.54 teremos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (3.55)$$

Como o tempo é homogêneo dentro de um sistema de referência inercial, a Lagrangeana descreverá um sistema fechado e a energia total  $E$  será uma constante do movimento para este caso. Segundo Leão (2003, p. 217, grifo do autor), “[...] tanto a energia cinética quanto a energia potencial devem ser ambas expressas em relação a um mesmo referencial inercial, pois este formalismo tem como ponto de partida as leis de Newton para o movimento, e as mesmas só são válidas em um referencial inercial.”.

## 4 TEORIA DE GRUPOS

Ao se falar de simetria e do conceito de grupo como estrutura algébrica, a Teoria de Grupos torna-se de extrema importância, pois formaliza essa ideia. A Teoria de Grupos, de acordo com Stewart (2012, p. 9 e 261), “[...] é usada tanto na matemática pura quanto na aplicada, na qual regula a formação dos padrões do mundo natural [...] Métodos de teoria de grupo passaram a dominar a mecânica quântica, dadas a influência e a onipresença da simetria.”. Tais grupos são usados geralmente para capturar simetrias internas de estruturas, associada com algumas propriedades invariantes que são preservadas por um conjunto de transformações que, juntamente com a sua operação de composição de transformação formam o grupo de simetrias.

“A importância do estudo da Teoria de Grupos em Física surgiu, basicamente, com o livro de Hermann Weyl intitulado **Gruppentheorie und Quantenmechanik**, publicado em 1928, no qual esse grande matemático alemão mostra que existe uma íntima relação entre as Leis Gerais da Teoria Quântica e a Teoria de Grupos ao observar que *todos os números quânticos, com exceção do número quântico principal  $n$ , são índices que caracterizam as representações de grupo*. Uma das grandes aplicações práticas da Teoria de Grupos em Física é vista no livro do físico húngaro-norte-americano Eugene Wigner intitulado **Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren**. Nesse livro, publicado em 1931, esse Prêmio Nobel de Física evidencia que todas as regras da Espectroscopia Atômica podem ser bem entendidas fazendo-se o estudo das simetrias observadas nos resultados espectroscópicos. Nesse estudo ele usou a Teoria criada pelo matemático francês Évariste Galois, em 1832.” (BASSALO; CATTANI, 2008, p. xi, grifo do autor).

Conforme depreende-se da leitura de Bassalo e Cattani (2008, p. xi-xii), os dois dos grandes momentos da aplicação em Física da Teoria de Grupos ocorreram respectivamente em 1961, com a publicação de dois artigos independentes, dos físicos Murray Gell-Mann e Yuval Ne’eman, admitindo que a Hamiltoniana de Interações Fortes fosse invariante pelo grupo  $SU(3)$ ; e no começo da década de 1970, quando os físicos Kenneth Wilson e Michael Fisher aplicaram o Grupo de Renormalização aos fenômenos críticos (transições de fases). Portanto, pode-se dizer que de modo geral a aplicação da Teoria de Grupos a problemas físicos é dividida em dois momentos: considerações sobre simetria e considerações sobre problemas de autovalores.

### 4.1 DEFINIÇÕES FUNDAMENTAIS

Ao se estudar sobre teoria de grupos, torna-se necessário conhecer algumas definições fundamentais para sua compreensão. Entre elas, vale destacar um resumo a respeito da

teoria dos conjuntos e algumas estruturas algébricas modernas.

#### 4.1.1 Conjuntos e Operações

**Definição 1** “Um **conjunto** é uma coleção de entidades bem definidas chamadas **elementos** ou **objetos**. Esses elementos podem ser números, pessoas, animais, países, rios, livros etc.” (FAZZIO; WATARI, 2009, p. 17, grifo do autor).

Um conjunto pode ser apresentado de duas formas: (i) forma tabular: onde todos os seus elementos estão presentes no conjunto, como em  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ; ou (ii) forma de construção: onde são descritas determinadas propriedades que devem ser satisfeitas pelos elementos, como em  $B = \{x/x \text{ é múltiplo natural de } 7\}$ . Vale ressaltar que se  $x$  pertencer ao conjunto  $C$ , teremos que  $x$  pertence a  $C$  ou  $x$  está em  $C$  e denotaremos  $x \in C$ ; mas se  $x$  não for um elemento  $C$ , teremos que  $x$  não pertence a  $C$ , denotando  $x \notin C$ .

**Definição 2** Seja um conjunto  $E = \{a, b, c, d, \dots\}$ . **Operações** entre dois elementos desse conjunto é definida e simbolizada como:  $ab = c$ ,  $ba = d$ . No primeiro caso, diz-se que ‘**a operando sobre b resulta c**’ e, no segundo, caso, ‘**b operando sobre a resulta b**’.” (FAZZIO; WATARI, 2009, p. 18, grifo do autor).

É preciso estar atento para o fato de que essas simbolizações não necessariamente significam multiplicações e nem que  $c = d$ . Para um conjunto finito, com uma quantidade pequena de elementos, pode se verificar essas operações por meio da tabela de operações que a define. Assim, para um conjunto de três elementos  $D = \{a, b, c\}$  teremos:

	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>
<b>a</b>	$b$	$c$	$a$
<b>b</b>	$a$	$b$	$c$
<b>c</b>	$c$	$a$	$b$

Tabela 4.1 – Tabela de operação entre dois elementos do conjunto  $D = \{a, b, c\}$ .

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Para a leitura da Tabela 4.1, devemos fazer (*linha*)  $\times$  (*coluna*), ou seja, na operação  $ba$ , procura-se o cruzamento da linha  $b$  com a coluna  $a$ , encontrando  $a$ . Da mesma forma encontramos todos os resultados dessas operações, assim:  $ab = ca = bc = c$ ,  $aa = bb = cc = b$  e  $ac = ba = cb = a$ .

**Definição 3** “Se uma operação  $ab = c$  for definida para qualquer elemento  $a$  e para todo elemento  $b$  do conjunto  $E$ , e se  $c$  sempre estiver em  $E$ , a operação é chamada **interna**.”

Se, ao contrário,  $c$  não estiver em  $E$ , diz-se que a operação é **não interna**.” (FAZZIO; WATARI, 2009, p. 19, grifo do autor).

Sendo  $F$  o conjunto dos números naturais, teremos as operações internas ocorrendo na adição ( $2+3 = 5$ ), na multiplicação ( $2 \cdot 3 = 6$ ) e na potenciação ( $3^2 = 9$ ), enquanto que as operações não internas aparecerão na subtração ( $2 - 3 = -1$ ), na divisão ( $2 \div 3 = 0,666\dots$ ) e na radiciação ( $\sqrt[3]{16} = 2,51984\dots$ ). Entretanto, se  $G$  for o conjunto de todos os vetores num espaço tridimensional, teremos as operações internas ocorrendo na adição de vetores e no produto vetorial, pois resultam em um vetor, enquanto que as operações não internas ocorrerão no produto escalar de dois vetores e no triplo produto escalar, por resultar em número.

**Definição 4** “Uma operação em  $E$  chama-se **associativa** se  $(a b) c = a(b c)$  para todos  $a, b, c \in E$ .” (FAZZIO; WATARI, 2009, p. 19, grifo do autor).

**Definição 5** “Diz-se que uma operação em  $E$  é **comutativa** se  $a b = b a$  para todos  $a, b \in E$ .” (FAZZIO; WATARI, 2009, p. 19, grifo do autor).

**Definição 6** “Seja uma operação  $a b = q$  em  $E$ . Se, para todos os elementos  $a, b, c \in E$ ,  $a b = a c$  implicar em  $b = c$ , então, diz-se que essa operação possui **propriedade de cancelamento à esquerda**. Por outro lado, se  $a b = c b$  implicar em  $a = c$ , então, diz-se que essa operação possui **propriedade de cancelamento à direita**. Se possuir ambas as propriedades de cancelamento, à esquerda e à direita, diz-se que essa operação possui **lei do cancelamento em  $E$** .” (FAZZIO; WATARI, 2009, p. 20, grifo do autor).

A tabela abaixo nos apresentará uma operação no conjunto  $H = \{a, b\}$ .

	<b>a</b>	<b>b</b>
<b>a</b>	$a$	$b$
<b>b</b>	$a$	$a$

Tabela 4.2 – Tabela de operações entre os dois elementos do conjunto  $H = \{a, b\}$ .

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Observe que as operações são:  $a a = a$ ,  $a b = b$ ,  $b a = a$  e  $b b = a$ . Atente-se que o resultado  $a$  ocorre na primeira, terceira e quarta, ou seja,  $a a = b a = b b = a$ . Se em  $a a = b a$  implicar em  $a = b$ , existirá um cancelamento à direita, e se em  $b a = b b$  implicar em  $a = b$  haverá um cancelamento à esquerda, fazendo com que nesse exemplo dado ocorra tanto um cancelamento à esquerda quanto um cancelamento à direita, ocorrendo, então, uma lei do cancelamento.

**Definição 7** “Seja  $E$  um conjunto não vazio. Se existir um elemento  $e_r \in E$  tal que  $a e_r = a$ , para todo  $a \in E$ , então,  $e_r$  é chamado de **elemento de identidade à direita** de  $E$  relativo a essa operação, ou simplesmente **identidade à direita** de  $E$ . Se existir  $e_\ell a = a$ , para todo  $a \in E$ , então,  $e_\ell$  é chamado elemento **identidade à esquerda** de  $E$  relativo a essa operação ou simplesmente **identidade à esquerda** de  $E$ .” (FAZZIO; WATARI, 2009, p. 19, grifo do autor).

No operação apresentada na Tabela 4.2, podemos verificar que ocorrem dois elementos identidades à esquerda, mostrado em  $a b = b$  e  $b a = a$ , mas nenhum à direita. Vale ressaltar que nas operações definidas em um conjunto, podem haver mais de um elemento de identidade ou não ocorrer nenhum.

**Definição 8** “Um elemento  $e$  de um conjunto  $E$  é chamado **elemento identidade** de  $E$  relativo a uma operação em  $E$  se  $a e = e a = a$  para todo  $a \in E$ .” (FAZZIO; WATARI, 2009, p. 21, grifo do autor).

No conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ , temos o zero como elemento identidade em relação à adição e subtração, enquanto que o número um é o elemento identidade em relação à multiplicação e divisão. Numa operação definida em um conjunto  $E$ , teremos: (i) se possuir um elemento identidade  $e$ , então,  $e$  será único; (ii) se possuir um elemento identidade à direita  $e_r$  e um elemento identidade à esquerda  $e_\ell$ , então,  $e_r = e_\ell$ ; e, ainda, (iii) se for comutativa e possuir elemento identidade à direita,  $e_r$ , então,  $e_r$  também será elemento identidade à esquerda, assim  $e_r = e_\ell = e$ .

**Definição 9** “Seja  $a \in E$ . Se para todo  $b, c \in E$  a igualdade  $a b = a c$  implicar em  $b = c$ , então,  $a$  é chamado **elemento regular à esquerda** de  $E$ . Se, para  $d \in E$ , a igualdade  $b c = c d$  resultar em  $b = c$ , o elemento  $d$  é dito **elemento regular à direita** de  $E$ . Se  $a b = a c$  implicar em  $b = c$  e  $b a = c a$  também implicar na mesma igualdade, então,  $a$  é **elemento regular** de  $E$ .” (FAZZIO; WATARI, 2009, p. 22, grifo do autor).

No conjunto dos números inteiros  $\mathbb{Z}$ , o número zero é o elemento regular com relação à operação de adição, mas não na operação de multiplicação. Se  $a$  e  $b$  são elementos regulares de  $E$  sob uma operação associativa, então,  $a b$  também será um elemento regular de  $E$ . Podemos evidenciar essa última afirmação na seguinte situação: sendo  $w, z \in E$  tal que  $(a b) w = (a b) z$ ; temos pela associatividade da operação que  $(a b) w = (a b) z$ , ou ainda, que  $w (a b) = z (a b)$ , verificando que  $a b$  é um elemento regular tanto à direita quanto à esquerda e, finalmente, demonstrando que  $a b$  é elemento regular de  $E$ .

**Definição 10** “Considere uma operação em  $E$ . Sejam  $e_r$  um elemento identidade à direita de  $E$  e  $e_\ell$  um elemento identidade à esquerda de

*E relacionados a essa operação. Se  $a \in E$  e existe  $a_r^{-1} \in E$  tal que  $aa_r^{-1} = e_r$ , então,  $a_r^{-1}$  é chamado **elemento inverso à direita** e  $a$  é dito **elemento invertível à direita** em  $E$ . Por outro lado, se existe  $a_\ell^{-1} \in E$ , tal que  $a_\ell^{-1}a = e_\ell$ , então,  $a_\ell^{-1}$  é chamado **elemento inverso à esquerda** e  $a$  é dito **elemento invertível à esquerda** em  $E$ .” (FAZZIO; WATARI, 2009, p. 22-23, grifo do autor).*

Desse modo, numa operação associativa em  $E$ , existindo  $a_\ell^{-1}$  e  $a_r^{-1}$  para  $a \in E$ , então,  $a_\ell^{-1} = a_r^{-1}$ . Essa afirmação pode ser demonstrada da seguinte forma:  $a_\ell^{-1} = a_\ell^{-1}e_r = a_\ell^{-1}(aa_r^{-1}) = (a_\ell^{-1}a)a_r^{-1} = e_\ell a_r^{-1} = a_r^{-1}$ .

**Definição 11** “Em um dado conjunto  $E$ , suponha que exista uma relação  $\alpha$ , denotado por  $a \alpha b$ , onde  $a \in E$  e  $b \in E$  (por exemplo: reta  $a \perp$  reta  $b$ ,  $5 < 7$  etc). a) Se, para todo  $x$  em  $E$ , a condição  $x \alpha x$  estiver verificada, então,  $\alpha$  é **reflexiva**. b) Se, para todo  $x$  e  $y$  em  $E$ ,  $x \alpha y$  implicar em  $y \alpha x$ , então,  $\alpha$  é **simétrica**. c) Se, para quaisquer  $x$ ,  $y$  e  $z$  em  $E$ ,  $x \alpha y$  e  $y \alpha z$  implicar em  $x \alpha z$ , então,  $\alpha$  é **transitiva**.” (FAZZIO; WATARI, 2009, p. 23, grifo do autor).

Sendo as retas  $m$ ,  $e$  e  $f$  num plano  $\Pi$ , teremos as seguintes relações entre essas retas: (i) a de paralelismo será reflexiva, simétrica e transitiva, pois valerá a relação:  $m \parallel m$ ;  $m \parallel e \implies e \parallel m$ ;  $m \parallel e$  e  $e \parallel f \implies m \parallel f$ ; e (ii) a de perpendicularismo será simétrica, mas não reflexiva nem transitiva, pois  $m \not\perp m$ ;  $m \perp e \implies e \perp m$ ;  $m \perp e$  e  $e \perp f \not\implies m \perp f$ . A relação de igualdade entre os números reais ou complexos será simétrica, reflexiva e transitiva, pois, se  $a, b, c \in \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , teremos que  $a = a$ ;  $a = b \implies b = a$ ;  $a = b$  e  $b = c \implies a = c$ . A relação de ordem ao compararmos dois números será transitiva, mas não será reflexiva nem simétrica, pois,  $3 \not< 3$ ;  $3 < 8 \not\implies 8 < 3$ ;  $3 < 8$  e  $8 < 9 \implies 3 < 9$ .

**Definição 12** “Uma relação  $\alpha$  sobre um conjunto  $E$  é dita **relação de equivalência** se, e somente se,  $\alpha$  for simultaneamente reflexiva, simétrica e transitiva. Se  $\alpha$  é uma relação de equivalência sobre um conjunto  $E$ , e se  $a$  e  $b$  são dois elementos de  $E$  tal que  $a \alpha b$ , diz-se que  $a$  é **equivalente a  $b$  módulo  $\alpha$**  e é denotada por  $a \equiv b \pmod{\alpha}$ . Se  $\alpha$  estiver fixada, a notação  $a \equiv b$  pode ser usada.” (FAZZIO; WATARI, 2009, p. 24, grifo do autor).

Para que se torne mais fácil a compreensão dessa congruência, veja o seguinte exemplo:  $15 \equiv 8 \pmod{7}$ , significa que os restos das divisões de 15 e 8 por 7 são os mesmos (iguais a 1). Dessa forma, para um conjunto  $E = \{0, 7, 14\}$ , percebe-se que qualquer elemento desse conjunto é divisível por 7, resultando em resto zero. Assim, é possível estabelecer uma relação de equivalência por meio da expressão  $a \equiv b \pmod{7}$  entre quaisquer dois elementos de  $E$ , verificando que  $0 \equiv 0$ ,  $0 \equiv 7$ ,  $0 \equiv 14$ ,  $7 \equiv 0$ ,  $7 \equiv 7$ ,  $7 \equiv 14$ ,  $14 \equiv 0$ ,  $14 \equiv 7$  e  $14 \equiv 14$ , pois são elementos que têm sempre a propriedade de ter zero como resto da divisão por 7.

**Definição 13** “Seja  $\alpha$  uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio  $E$ . Para todo  $a$  em  $E$ , o subconjunto  $C(a) = \{x \in E \mid x \equiv a \pmod{\alpha}\}$  é denominado **conjunto fatorado** de  $E$ . O conjunto  $C(a)$  é determinado pelo elemento  $a$  dito **representante** de  $C(a)$ .” (FAZZIO; WATARI, 2009, p. 24, grifo do autor).

Sendo o conjunto  $E = \{0, 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11\}$  e uma relação  $a \equiv b \pmod{3}$  entre dois elementos quaisquer desse. Assim, obtêm-se três conjuntos fatorados:  $C(0) = \{0, 3, 6, 9\}$ ,  $C(1) = \{1, 4, 7\}$  e  $C(8) = \{8, 11\}$ , constatando que nenhum desses conjuntos fatorados possui elementos em comum. Uma observação se faz necessário para o último conjuntos fatorado: o mesmo deveria ser expresso como  $C(2)$ , mas como  $2 \notin E$  e  $2 \equiv 8 \pmod{3}$ , utilizou-se o elemento mais próximo de 2 pertencente ao conjunto  $E$ .

#### 4.1.2 Aplicações

Em diversas ocasiões se torna necessário considerar o par ordenado  $(a, b)$ , para distinguir o primeiro elemento  $a$  do segundo elemento  $b$ , sendo que ambos podem ou não pertencer ao mesmo conjunto. Vale ressaltar que nessa situação,  $(a, b) = (u, v)$  se, e somente se,  $u = a$  e  $v = b$ , evidenciando que  $(a, b) = (b, a)$  se  $a = b$ .

**Definição 14** “Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos não vazios. O conjunto de pares ordenados cujo primeiro elemento pertence a  $A$  e o segundo elemento pertence a  $B$  é chamado **produto cartesiano**, denotado por  $A \times B$ . Na notação de conjunto,  $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ .” (FAZZIO; WATARI, 2009, p. 25, grifo do autor).

Sendo  $M = \{t, u, v\}$  e  $F = \{w, x, y, z\}$ , o produto cartesiano de  $M$  e  $F$  será o conjunto:

$$M \times F = \{(t, w), (t, x), (t, y), (t, z), (u, w), (u, x), (u, y), (u, z), (v, w), (v, x), (v, y), (v, z)\}.$$

**Definição 15** “Sejam  $E$  e  $F$  conjuntos não vazios. Uma **aplicação** (chamada de **função** no caso particular que os conjuntos envolvidos são numéricos)  $f$  de  $E$  em  $F$  é um subconjunto de  $E \times F$ , tal que, para cada  $x \in E$  existe um único  $y \in F$  tal que  $(x, y) \in f$ , e é denotado por  $y = f(x)$ . Às vezes é também escrito como  $f : E \rightarrow F$ . O conjunto  $E$  é chamado **domínio** de  $f$  e  $F$ , o **contradomínio** de  $f$ . Além disso,  $y$ , que é o elemento de  $F$  correspondendo a  $x$  de  $E$ , é chamado **imagem** de  $x$ .” (FAZZIO; WATARI, 2009, p. 25, grifo do autor).

Sendo  $E = \{e, f, m, n, p\}$  e  $F = \{f, i, s\}$  e uma aplicação  $f : E \rightarrow F$  dada por  $f(e) = f$ ,  $f(f) = i$ ,  $f(m) = s$ ,  $f(n) = i$  e  $f(p) = f$ . Nesse caso temos que o domínio da função é o próprio conjunto  $E$ , o contradomínio e a imagem da função é o próprio

conjunto  $F$ , e, ainda, podemos identificar a imagem de cada um dos elementos do domínio, como em  $f(f) = i$  mostrando que a imagem de  $f$  é  $i$ .

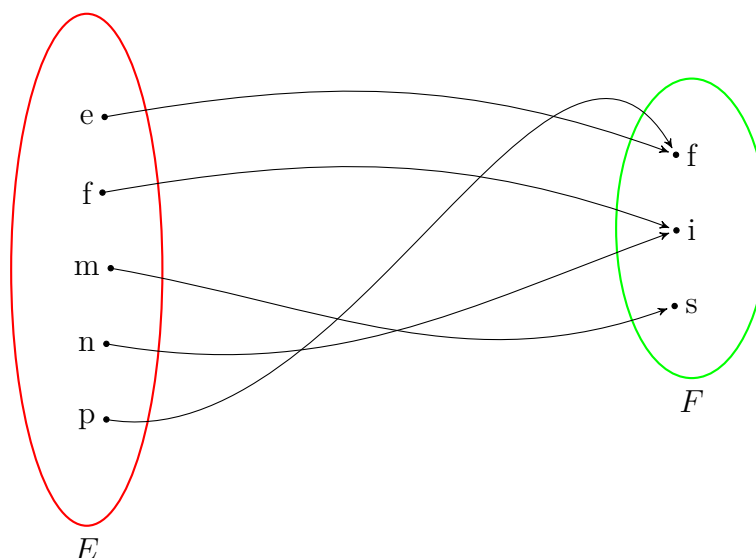


Figura 4.1 – Representação gráfica do exemplo de aplicação  $f : E \rightarrow F$  apresentado para a Definição 15.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

**Definição 16** “Sejam dois conjuntos  $E$  e  $F$ , não necessariamente distintos, com os elementos  $a, b, c \in E$  e  $a', b', c' \in F$ . Suponha uma aplicação  $f : E \rightarrow F$  com correspondência  $a' = f(a)$ ,  $b' = f(b)$  e  $c' = f(c)$ . Se uma operação  $c = ab$  em  $E$  corresponder à operação  $c' = a' b'$  em  $F$  (não necessariamente a mesma operação em  $E$ ), isto é,  $f(ab) = f(a) f(b)$ , então, essa aplicação é chamada **homomorfismo**. Aqui os elementos  $a'$ ,  $b'$  e  $c'$  são chamados **imagens homomórficas** de  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente. Por simplicidade de classificação, uma aplicação  $f$  com homomorfismo será chamada **aplicação regular**.” (FAZZIO; WATARI, 2009, p. 26, grifo do autor).

Num exemplo onde  $E$  representa o conjunto dos números reais positivos,  $F$  representa o conjunto dos números reais e uma aplicação  $f : E \rightarrow F$  dada por  $y = \log x$ , temos que a aplicação de  $f$  nesse caso é o  $\log$ . Portanto, a correspondência entre os elementos são:  $a' = \log a$ ,  $b' = \log b$  e  $c' = \log c$ . Numa operação de multiplicação em  $E$ ,  $c = ab$ , existe uma correspondência com operação de adição em  $F$ ,  $c' = a' + b'$ , devido a propriedade  $\log(ab) = \log a + \log b$ . Vale ressaltar que o conceito de homomorfismo é muito utilizado em cristalografia.

#### 4.1.2.1 Tipos de Aplicação Regular

- a) Epimorfismo ou homomorfismo sobrejetor: ocorre quando a aplicação  $f$  é sobrejetora. A aplicação  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ , definida por  $f(z) = |z|$  é um exemplo de epimorfismo;

- b) Monomorfismo ou homomorfismo injetor: ocorre quando a aplicação  $f$  é injetora. Como exemplo pode-se citar a aplicação  $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Q}_+$ , definida por  $f(x) = 3x$ ;
- c) Isomorfismo ou homomorfismo bijetor: é todo homomorfismo cuja aplicação  $f$  é bijetora. Segundo Fazzio e Watari (2009, p. 27, grifo do autor), “Se  $f$  for uma aplicação regular onde existe uma relação biunívoca entre  $x \in E$  e  $y \in F$ , então  $f$  é dito *isomorfismo* de  $E$  em  $F$  e também  $E$  é dito *isomórfico* a  $F$ .”. Como exemplos pode-se citar as seguintes aplicações: (i)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  definida por  $f(x) = 2^x$ , ou ainda, (ii)  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \log x$ ;
- d) Endomorfismo: é todo homomorfismo em que o domínio é igual ao contradomínio. A aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x$  é um exemplo de endomorfismo;
- e) Automorfismo: é todo endomorfismo cuja aplicação  $f$  seja bijetora, com domínio igual ao contradomínio. Segundo Fazzio e Watari (2009, p. 27, grifo do autor), “Se uma aplicação  $f$  for isomorfismo de  $E$  em  $F$  sob a mesma operação, e os elementos de  $E$  e  $F$  são idênticos, então,  $f$  é chamada *automorfismo* de  $E$ . É também dito que  $E$  é *automórfico*.”. Como exemplo, consideremos uma operação como sendo a multiplicação ordinária, ou seja,  $c = ab$  implica em  $c' = a'b'$ , com  $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ , a aplicação  $y = x^2$  do conjunto  $\{x\} = \{1, z, z^2\}$  será automórfica, pois  $\{y\} = \{1, z^2, z\}$ .

## 4.2 GRUPO

Grupo é definido por um conjunto não vazio para uma dada operação, onde seus elementos satisfazem as seguintes propriedades: fechamento, associatividade, existência dos elementos identidade e inverso.

### 4.2.1 Primeiras Definições

**Definição 17** “Um conjunto  $G$  consistindo dos elementos  $a, b, c, \dots$   $G = \{a, b, c, \dots\} \equiv \{G, *\}$  é chamado de **Grupo** para uma dada operação  $*$ , se seus elementos satisfazem às seguintes propriedades: a)  $\forall a, b \in G, a * b = c \in G$  (Condição de **Fechamento**); b)  $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$  (Condição de **Associatividade**); c)  $\exists e \in G$ , tal que:  $\forall a \in G, a * e = e * a = a$  ( $e$  é chamado o **Elemento Unidade**); d)  $\forall a \in G, \exists a^{-1}$  tal que:  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$  ( $a^{-1}$  é chamado o **Elemento Inverso** de  $a$ ).” (BASSALO; CATTANI, 2008, p. 1, grifo do autor).

Observe que  $a * b$  (lê-se:  $a$  estrela  $b$ ), trata-se de uma forma para indicar a função  $*(a, b)$  munida de uma operação  $*$ .

**Definição 18** “Se para  $\forall a, b \in G$  tem-se  $a * b = b * a$ , diz-se que o grupo é **Comutativo** ou **Abeliano**.” (BASSALO; CATTANI, 2008, p. 1, grifo do autor).

**Definição 19** “O número de elementos de um grupo é chamado de **ordem** do grupo. Os grupos podem ser **finitos** ou **infinitos**.” (BASSALO; CATTANI, 2008, p. 1, grifo do autor).

**Definição 20** “Um grupo cujos elementos são caracterizados por um número de parâmetros contínuos é chamado **Grupo Contínuo**.” (BASSALO; CATTANI, 2008, p. 1, grifo do autor).

## 4.2.2 Exemplos de Grupos

### 4.2.2.1 Conjunto $\mathbb{Z}$ ou em notação $(\mathbb{Z}, +)$

Segundo Bassalo e Cattani (2008, p. 2), “O conjunto dos inteiros positivos e negativos forma um grupo infinito Abelianos em relação à adição.”. De fato, mesmo incluindo o zero como elemento desse conjunto, seus elementos continuariam a satisfazer as propriedades citadas nas definições 17 e 18. Assim, dados  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , teremos:

- a)  $a + b = b + a$ ;
- b)  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ;
- c)  $\exists e \equiv 0 \in \mathbb{Z}; 0 + a = a + 0 = a$ ;
- d)  $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists (-a) \in \mathbb{Z}^*; a + (-a) = (-a) + a = 0$ .

Logo,  $(\mathbb{Z}, +)$  é um grupo infinito abeliano em relação à adição.

### 4.2.2.2 Conjunto $(\mathbb{Q}, +)$ , $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}, +)$

Analogamente ao exemplo 4.2.2.1, temos que  $(\mathbb{Q}, +)$ ,  $(\mathbb{R}, +)$  e  $(\mathbb{C}, +)$  são grupos aditivos abelianos, sendo zero o elemento neutro e, ainda,  $-a$  o inverso de  $a$ .

### 4.2.2.3 Conjunto $\mathbb{Q}^*$ ou em notação $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$

O conjunto dos números racionais com exceção do zero  $\mathbb{Q}^*$  munido da operação de multiplicação usual também representa um grupo. De fato as propriedades citadas nas definições 17 e 18 também são respeitadas. Assim, quaisquer que sejam  $a, b, c \in \mathbb{Q}^*$ , teremos que:

- a)  $a \cdot b = b \cdot a$ ;
- b)  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ;
- c)  $\exists 1 \in \mathbb{Q}^*$ , tal que  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ ;

d)  $\forall a \in \mathbb{Q}^*$ , com  $a \neq 1$ ,  $\exists a^{-1} \in \mathbb{Q}^*$ , tal que  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ .

Logo,  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$  é um grupo multiplicativo abeliano.

#### 4.2.2.4 Conjunto $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ e $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

Analogamente ao exemplo 4.2.2.3, teremos que  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$  e  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  são grupos multiplicativos abelianos, sendo 1 o elemento neutro e  $a^{-1}$  o inverso de  $a$ .

#### 4.2.2.5 O conjunto das matrizes $M_n(\mathbb{R})$ munido da operação de adição

O conjunto das matrizes quadradas de ordem  $n$ , com a operação de adição de matrizes em  $\mathbb{R}$ , constitui um grupo. Para verificar tal afirmação, recorreremos as definições 17 e 18 e consideraremos as matrizes  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  e  $O_n$ , sendo  $O_n$  a matriz nula. Assim,

- a)  $A_n + B_n = B_n + A_n$ ;
- b)  $A_n + (B_n + C_n) = (A_n + B_n) + C_n$ ;
- c)  $\exists O_n$ , tal que  $A_n + O_n = O_n + A_n = A_n$ ;
- d)  $\forall A_n, \exists(-A)$ , tal que  $A + (-A) = O$ .

Logo, o conjunto das matrizes quadradas de ordem  $n$ , munido da operação de adição de matrizes em  $\mathbb{R}$ , realmente constitui um grupo abeliano.

#### 4.2.2.6 Vetores no $\mathbb{R}^3$

Segundo Bassalo e Cattani (2008, p. 2), “O conjunto de vetores no espaço tridimensional forma um grupo infinito Abelianos em relação à adição vetorial.”. Verifica-se que realmente seus elementos também satisfazem as propriedades citadas nas definições 17 e 18, assim:

- a)  $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3; (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \in \mathbb{R}^3$ ;
- b)  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathbb{R}^3; (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$ ;
- c)  $\exists e \equiv \vec{0}; = \vec{A} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{A} = \vec{A}$ ;
- d)  $\forall \vec{A} \in \mathbb{R}^3, \exists (\vec{A})^{-1} \equiv -\vec{A}; \vec{A} + (-\vec{A}) = (-\vec{A}) + \vec{A} = \vec{0}$ .

Logo, o conjunto de vetores no espaço tridimensional forma um grupo infinito Abelianos em relação à adição vetorial.

#### 4.2.2.7 Reflexão Espacial

Segundo Bassalo e Cattani (2008, p. 2, grifo do autor), “O conjunto de reflexões espaciais em torno da origem forma um grupo. Seus elementos são definidos por:  $E(x, y, z) = (x, y, z) \rightarrow E(\vec{r}) = (\vec{r})$ , (**Identidade**), e  $P(x, y, z) = (-x, -y, -z) \rightarrow P(\vec{r}) = (-\vec{r})$ , (**Paridade**).”. Dessa forma,  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$  definem um grupo constituído pelas reflexões em relação à origem.

### 4.2.3 Isomorfismo e Homomorfismo de Grupos

#### 4.2.3.1 Isomorfismo

**Definição 21** “Sejam dois grupos  $G$  e  $G'$ , tal que: 1. A cada elemento  $g_i \in G$  corresponde a um e somente um elemento  $g_i \in G'$ , isto (sic)  $g_i \in G \Leftrightarrow \exists g'_i \in G'$ ; 1. Se  $g_i g_j = g_k$ , então  $g'_i g'_j = g'_k$ , para todos os elementos de  $G$  e  $G'$ . Deste modo:  $G$  e  $G'$ , são ditos **isomórficos**, ou seja  $G \approx G'$ . Portanto, eles têm a mesma tabela de multiplicação.” (BASSALO; CATTANI, 2008, p. 23, grifo do autor).

Os grupos  $(\mathbb{R}, +)$  e  $(\mathbb{R}, \cdot)$  são isomorfos. Assim, a aplicação  $f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, \cdot)$  em que  $x \mapsto f(x) = 2^x$  é um isomorfismo, pois a aplicação  $f$  é:

- a) um homomorfismo:  $f(x + y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y)$ ;
- b) injetora:  $\forall x, y \in G, f(x) = f(y) \Rightarrow 2^x = 2^y \Rightarrow x = y$ ;
- c) sobrejetora:  $\forall y \in (\mathbb{R}, \cdot) \Rightarrow \exists x = \log_2(y) \in G : f(x) = 2^{\log_2(y)} = y$ .

#### 4.2.3.2 Homomorfismo

**Definição 22** “Dois grupos  $G$  e  $G'$  são **homomórficos**, se os elementos de  $G$  podem ser postos em uma correspondência (não um a um) com os elementos de  $G'$  e desde que esta correspondência preserve as leis de multiplicação dos dois grupos.” (BASSALO; CATTANI, 2008, p. 23, grifo do autor).

Nos grupos  $(\mathbb{R}_+, \cdot)$  e  $(\mathbb{R}, +)$ , a aplicação  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  em que  $x \mapsto f(x) = \log(x)$  é um homomorfismo, pois  $\forall y, z \in \mathbb{R}_+^*$ , teremos que  $f(z \cdot y) = \log(z \cdot y) = \log(z) + \log(y) = f(z) + f(y)$ . Um outro exemplo pode ser encontrado na aplicação  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  dada por  $f(x) = |x|$ , sendo  $\mathbb{R}^*$  um grupo multiplicativo dos reais, onde teremos que  $f(x_1 x_2) = |x_1 x_2| = |x_1| |x_2| = f(x_1) f(x_2)$ .

## 4.3 GRUPOS DE SIMETRIAS E PERMUTAÇÕES

### 4.3.1 Operações de Simetria

Uma operação de simetria consiste em mover um corpo de tal maneira que a posição final não possa ser distinguível da inicial, deixando esse corpo numa configuração geométrica equivalente àquela que possuía antes de se aplicar tal operação. Conforme Fazzio e Watari (2009, p. 42, grifo do autor), “No estudo de sistemas finitos, tais como moléculas, aglomerados moleculares, sólidos com defeitos etc., existem somente quatro tipos de operações (ou elementos)”. Entretanto, esses mesmos autores ainda ressalvam que as operações de translação devem ser incluídas para um cristal, pois elas também deixam os átomos em posições equivalentes.

Nº	Elementos		Operações
1.	Plano de Simetria	$\longleftrightarrow$	Reflexão no plano.
2.	Centro de Simetria (ou Centro de Inversão)	$\longleftrightarrow$	Inversão de todos os átomos através de um centro.
3.	Eixo Próprio	$\longleftrightarrow$	Uma ou mais rotações ao redor do eixo.
4.	Eixo Impróprio	$\longleftrightarrow$	Sequência de rotação seguida de reflexão em um plano perpendicular ao eixo de rotação.

Tabela 4.3 – Os quatro tipos de Elementos de Simetrias e Operações (para Simetria Molecular).

Fonte: Adaptado de Fazzio e Watari (2009, p. 42).

### 4.3.2 Grupo Simétrico ou Grupo de Permutações

**Definição 23** “Seja  $X$  um conjunto qualquer. Uma bijeção  $f : X \rightarrow X$  chama-se uma **permutação**. Denote-se por  $S_X$  o conjunto de todas as permutações de  $X$ , isto é  $S_X := \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ é uma bijeção}\}$ .” (YARTEY, 2017, p. 56, grifo do autor).

Segundo Yartey (2017, p. 56, grifo do autor), “O conjunto  $S_X$  é um grupo com respeito a operação,  $\circ$ , a composição de funções. Chamamos este grupo  $(S_X, \circ)$  de **grupo simétrico de  $X$**  ou **o grupo de permutações de  $X$**  [...] O grupo  $S_X$  só será abeliano se o conjunto  $X$  tiver um ou dois elementos”. Sendo o conjunto  $X$  finito de  $n$  elementos, sendo  $n > 1$ , podemos formar  $n!$  permutações de grau  $n$  e, ainda, teremos que  $S_X$  será denotado por  $S_n$ .

Dado  $f \in S_n$ , a notação usual para representar  $f$  através de uma matriz  $2 \times n$  é, segundo Yartey (2017, p. 57):

$$“f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}”$$

Tem-se na primeira linha os elementos de  $\{1, 2, \dots, n\}$  e abaixo de cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$  temos a sua imagem  $f(i)$ . Para exemplificar essa representação, sejam  $f$  e  $g$  duas permutações do conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  dados por  $f(1) = 5$ ,  $f(2) = 4$ ,  $f(3) = 1$ ,  $f(4) = 2$ ,  $f(5) = 3$ ,  $g(1) = 2$ ,  $g(2) = 4$ ,  $g(3) = 3$ ,  $g(4) = 5$ ,  $g(5) = 1$ . A seguir teremos  $f$  e  $g$  expressos na notação matricial, bem como as operações  $(f \circ g)$  e  $(g \circ f)$ ,  $(f \circ f)$ ,  $(g \circ g)$ ,  $f^{-1}$  e  $g^{-1}$ .

Inicialmente expressaremos  $f$  e  $g$  na notação matricial, assim:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

e

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ g(1) & g(2) & g(3) & g(4) & g(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para a composição de permutações na notação matricial, deve-se sempre atentar que: (i) é realizada da direita para a esquerda, indo de cima para baixo e depois novamente de cima para baixo; (ii) inicia-se encontrando o número abaixo de 1 na permutação da direita e depois encontra-se este número na linha superior da permutação esquerda, sendo que o número a ser registrado será aquele abaixo dele; e, finalmente, (iii) repita os dois processos anteriores para o restante dos números inteiros de 2 a  $n$ . Denotaremos  $(f \circ g)$  por  $fg$ ,  $(g \circ f)$  por  $gf$ ,  $(f \circ f)$  por  $f^2$  e  $(g \circ g)$  por  $g^2$ .

Aplicando os processos citados anteriormente para a composição de permutações na notação matricial, expressaremos a operação  $fg$ , ou seja,  $(f \circ g)$ :

$$\begin{aligned} fg = (f \circ g) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & & & & \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & & & & \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ f(g(1)) & f(g(2)) & f(g(3)) & f(g(4)) & f(g(5)) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ f(2) & f(4) & f(3) & f(5) & f(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analogamente ao cálculo da operação  $fg$ , feita anteriormente, expressaremos  $gf$ ,  $f^2$  e  $g^2$ . Assim:

$$gf = (g \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$f^2 = (f \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$g^2 = (g \circ g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente vamos expressar as operações  $f^{-1}$  e  $g^{-1}$ , conhecidas como permutações inversas. Para encontrá-las, devemos inverter a segunda linha com a primeira e, em seguida, ajustar a nova primeira linha em ordem crescente. Assim:

$$f^{-1} = (f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$g^{-1} = (g)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

### 4.3.3 O Grupo $S_3$

**Definição 24** “Seja  $n \geq 1$ . O grupo das permutações  $S_n$  de grau  $n$  tem  $n!$  elementos.  $S_n$  não abeliano para  $n \geq 3$ .” (YARTEY, 2017, p. 58).

Seja  $S_3$  o conjunto das bijeções  $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ . De acordo com a Definição 24, temos que  $S_3$  será um grupo não abeliano com 6 elementos,  $\{I, \alpha, \beta, \gamma, \theta, \mu\}$ , com operação composição de funções, explicitado, respectivamente, como:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

sendo o primeiro elemento a identidade  $I$ .

Considerando  $\alpha$  e  $\gamma$  explicitados anteriormente, teremos:

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = I;$$

$$\alpha^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \alpha;$$

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \theta; \\ \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = I = \alpha^2; \\ \alpha\gamma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mu; \\ \gamma\alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \beta; \\ \alpha\gamma^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \beta = \gamma\alpha; \\ \gamma\alpha^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \gamma.\end{aligned}$$

Portanto,  $S_3 = \{I, \alpha, \beta, \gamma, \theta, \mu\}$  pode ser obtido por meio das permutações de  $\alpha$  e  $\gamma$ , sendo reescrito como  $S_3 = \{\alpha^2, \alpha, \gamma\alpha, \gamma, \gamma^2, \alpha\gamma\}$  e gerando a seguinte tabela de multiplicação:

	$\alpha^2$	$\alpha$	$\gamma\alpha$	$\gamma$	$\gamma^2$	$\alpha\gamma$
$\alpha^2$	$\alpha^2$	$\alpha$	$\gamma\alpha$	$\gamma$	$\gamma^2$	$\alpha\gamma$
$\alpha$	$\alpha$	$\alpha^2$	$\gamma^2$	$\alpha\gamma$	$\gamma\alpha$	$\gamma$
$\gamma\alpha$	$\gamma\alpha$	$\gamma$	$\alpha^2$	$\alpha$	$\alpha\gamma$	$\gamma^2$
$\gamma$	$\gamma$	$\gamma\alpha$	$\alpha\gamma$	$\gamma^2$	$\alpha^2$	$\alpha$
$\gamma^2$	$\gamma^2$	$\alpha\gamma$	$\alpha$	$\alpha^2$	$\gamma$	$\gamma\alpha$
$\alpha\gamma$	$\alpha\gamma$	$\gamma^2$	$\gamma$	$\gamma\alpha$	$\alpha$	$\alpha^2$

Tabela 4.4 – Tabela de multiplicação para as seis simetrias do grupo  $S_3$ .

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Observe que essa tabela de multiplicação para as seis simetrias do grupo  $S_3$  (Tabela 4.4) é a mesma que a tabela de multiplicação para as seis simetrias no triângulo equilátero (Tabela 2.1). Isto ocorre porque esses dois grupos são isomorfos e para diferenciá-los, basta perceber que um deles permuta seus elementos, enquanto o outro faz a permutação de seus vértices.

## 5 TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

A Teoria da Aprendizagem Significativa descreve o comportamento teórico do processo de aprendizagem cognitiva, a partir do raciocínio dedutivo do sujeito, baseado em seu conhecimento prévio. Essa Teoria originou-se a partir da insatisfação vivida por David Paul Ausubel (1918-2008) em sua escolarização, que foi caracterizada pela ausência de condições que contribuíssem para seu desenvolvimento profissional e para a aprendizagem de novos conhecimentos pelos demais alunos. Conforme Masini (2011, p. 17), “Essas experiências, pessoal e profissional, contribuíram para definir as linhas centrais da sua teoria: fazer da escola o local para uso da capacidade de compreender e atribuir significados; focalizar a relevância do processo relacional na aquisição de conhecimentos.”.

### 5.1 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

O conceito de aprendizagem significativa surge da corrente cognitivista que enfatiza o processo de cognição, através do qual a pessoa atribui significados à realidade em que se encontra. Conforme Jesus e Amorim (2019, p. 50-51), “Essa corrente preocupa-se com o processo de compreensão, transformação, armazenamento e uso da informação envolvido na cognição e procura regularidades nesse processo.”. De acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 137), “Se tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um só princípio, diria o seguinte: o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe.”. Ausubel destaca o processo de aprendizagem significativa como o mais importante na aprendizagem escolar.

A aprendizagem significativa caracteriza-se pela interação cognitiva entre o conhecimento prévio e o novo conhecimento, ou seja, só podemos adquirir ou aprender um novo conhecimento a partir daquilo que já conhecemos sobre o assunto em questão. Na aprendizagem significativa, o aprendiz, como indicado em Moreira (2000, p. 5), “[...] não é um receptor passivo [...] Ele deve fazer uso dos significados que já internalizou, de maneira substantiva e não arbitrária, para poder captar os significados dos materiais educativos [...] constrói seu conhecimento, produz seu conhecimento.”. Nesse tipo de aprendizagem, os significados vão sendo captados e internalizados de forma progressiva, num processo onde a linguagem e a interação pessoal são importantes e fundamentais.

Além da compreensão do que seja aprendizagem significativa, deve-se, também, conhecer os seus princípios programáticos facilitadores - como a diferenciação progressiva, a reconciliação integradora, a organização sequencial e a consolidação - e, ainda, algumas estratégias facilitadoras - como os organizadores prévios, os mapas conceituais e os diagramas V. A Fig. 5.1 apresenta um quadro contendo todos esses facilitadores de aprendizagem significativa, seguidos de suas devidas definições, para que sejam melhor compreendidos.

FACILITADORES DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA	
PRINCÍPIOS PROGRAMÁTICOS	<b>Diferenciação Progressiva:</b> princípio programático segundo o qual as ideias mais gerais e inclusivas da matéria de ensino devem ser apresentadas desde o início da instrução e, progressivamente, diferenciadas em termos de detalhes e especificidade, devendo ser retomadas periodicamente favorecendo assim sua progressiva diferenciação.
	<b>Reconciliação Integradora, ou Integrativa:</b> consiste em explorar, explicitamente, relações entre conceitos e proposições, chamando a atenção para diferenças e semelhanças e reconciliando inconsistências reais e aparentes.
	<b>Organização Sequencial:</b> princípio a ser observado na programação do conteúdo com fins instrucionais, consistindo em sequenciar os tópicos, ou unidades de estudo, de maneira tão coerente quando possível com as relações de dependência naturalmente existentes entre eles na matéria de ensino.
	<b>Consolidação:</b> leva a insistir no domínio (respeitada a progressividade da aprendizagem significativa) do que está sendo estudado antes de introduzir-se novos conhecimentos. É uma decorrência natural da premissa de que o conhecimento prévio é a variável que mais influencia a aprendizagem subsequente.
ALGUMAS ESTRATÉGIAS	<b>Organizadores Prévios:</b> materiais introdutórios apresentados antes do material de aprendizagem em si mesmo, em um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade, para servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que deveria saber para que esse material fosse potencialmente significativo ou, mais importante, para mostrar a relacionabilidade e a discriminabilidade entre o novo conhecimento e o conhecimento prévio.
	<b>Mapas Conceituais:</b> diagramas que indicam relações entre conceitos (apenas conceitos) e procuram refletir a estrutura conceitual de um certo conhecimento. Mais especificamente, podem ser vistos como diagramas conceituais hierárquicos. Construí-los, "negociá-los", apresentá-los, refazê-los, são processos altamente facilitadores de uma aprendizagem significativa.
	<b>Diagramas V:</b> instrumentos heurísticos para a análise da estrutura do processo de produção de conhecimento (entendido como as partes desse processo e a maneira como se relacionam) e para "desempacotar" conhecimentos documentados sob a forma de artigos de pesquisa, livros, ensaios, etc.. Assim como no caso dos mapas conceituais, sua construção, discussão e reconstrução são processos bastante favorecedores de aprendizagens significativas.

Figura 5.1 – Facilitadores da Aprendizagem Significativa: Princípios Programáticos e Estratégias.

Fonte: Adaptado de Moreira (2000, p. 5-6).

Como indicado em Tavares (2008, p. 2), “Em uma aprendizagem significativa não acontece apenas a retenção da estrutura do conhecimento, mas se desenvolve a capacidade de transferir esse conhecimento para a sua possível utilização em um contexto diferente daquele em que ela se concretizou.”. Moreira (2000, p. 6, grifo do autor) ressalta que “Outro aspecto fundamental da aprendizagem significativa, também de nosso conhecimento, é que o aprendiz deve apresentar uma *pré-disposição para aprender* [...]”.

## 5.2 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E O ENSINO DE CIÊNCIAS

O ensino de Ciências apresenta um papel muito importante independente do nível escolar em que se encontra, pois seu objetivo principal é fornecer aos alunos as condições necessárias à compreensão das relações entre homem, sociedade e natureza. Infelizmente estamos numa época em que a desmotivação assola discentes e docentes, onde os educandos não veem aplicabilidade dos conhecimentos que os docentes tentam

lhes transmitir, dificultando o interesse e a apreensão dos conteúdos postos nos currículos escolares; enquanto os professores ressentem-se pela falta de motivação desses alunos que, aliado aos “ambientes indisciplinados” das escolas, acabam também prejudicados, principalmente quanto a sua motivação em ensinar. (TRIVELATO, 2000, *apud* FONSECA NETO, 2015, p. 19).

Aponta Fonseca Neto (2015, p. 21), que “[...] o ensino de ciências não está desarticulado das questões cotidianas nas quais todos estão inseridos, sendo este um diferencial em relação a outras propostas de aprendizado”. Conforme depreende-se da leitura de Silva e Corazza (2011, p. 8), práticas educativas e suas implementações que permitam o direcionamento do olhar desse educando para os elementos do meio ambiente e para as relações que se estabelecem entre os seres vivos, são de fundamental importância para a formação de cidadãos que busquem tanto o exercício de seus direitos, quanto o entendimento da vida que os cerca, para a utilização adequada dos recursos ambientais.

### 5.3 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA NO ENSINO DE FÍSICA

Segundo Moreira (2018, p. 77-78). “[...] a Física está na base da tecnologia e o conhecimento físico é importante para a cidadania [...] tem conceitos, perguntas, modelos, teorias que não são definitivos, mas que geram asserções de conhecimento altamente relevantes para o mundo de hoje.”. Entretanto, o ensino de Física, na educação brasileira, vem passando por sérias dificuldades no aprendizado ao longo dos anos. Para Silva (2018, p. 17), “[...] Várias tentativas foram e estão sendo estudadas para encontrar uma solução que possa melhorar o aprendizado e o interesse dos alunos da educação básica. Não são poucos os relatos de alunos que acham a disciplina de Física complicada e difícil.”.

Esse trauma e medo do ensino de Física podem ser apontados como causas que dificultam a aprendizagem e, segundo Xavier (2003, *apud* SILVA, 2018, p. 17), “[...] Isso pode ser uma das inúmeras barreiras encontradas pelos alunos e também pelo professor, pois esse preconceito bloqueia o interesse, dificultando o aprendizado.”. Conforme Moreira (2018, p. 78), “Infelizmente, o ensino de Física, de um modo geral, leva a uma integração negativa de pensamentos, sentimentos e ações, na qual os alunos não gostam da Física e, quando possível, evitam-na, uma vez que apenas desejam passar nas provas.”.

De acordo com Gonçalves (2012, *apud* SILVA, 2018, p. 17), “[...] uma pesquisa realizada pelo site Seu Professor comprovou que Matemática e Física são responsáveis por 60% das dúvidas dos alunos dos Ensinos Fundamental e Médio.”. Desse modo, pode-se associar que as dificuldades dos alunos em Física também estão ligadas às equações matemáticas. Para Moreira (2018, p. 78), “[...] Aprender Física pode levar ao desenvolvimento de processos cognitivos, de uma consciência epistemológica e crítica.”. Nesse sentido, o professor tem um papel muito importante na aprendizagem do aluno e, para Libâneo (2011, *apud* SILVA, 2018, p. 17), “[...] o professor deve assumir o ensino com mediação; conhecer

estratégias de ensinar a pensar e ensinar a aprender e mediar os alunos a buscarem uma perspectiva crítica dos conteúdos.”

#### 5.4 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA CRÍTICA

Conforme afirma Moreira (2012, p. 22, grifo do autor), “*Aprendizagem significativa crítica* é aquela perspectiva que permite o sujeito formar parte de sua cultura e, ao mesmo tempo, estar fora dela.” Trata-se de uma perspectiva antropológica em relação às atividades de seu grupo social, na qual aprendizagem significativa dos conteúdos é indispensável, pois não tem sentido ser crítico de conhecimentos sem significado.

“[...] É através da aprendizagem significativa crítica que o aluno poderá fazer parte de sua cultura e, ao mesmo tempo, não ser subjugado por ela, por seus ritos, mitos e ideologias. É através dessa aprendizagem que ele poderá lidar construtivamente com a mudança sem deixar-se dominar por ela, manejar a informação sem sentir-se impotente frente a sua grande disponibilidade e velocidade de fluxo, usufruir e desenvolver a tecnologia sem tornar-se tecnófilo. Por meio dela, poderá trabalhar com a incerteza, a relatividade, a não-causalidade, a probabilidade, a não-dicotomização das diferenças, com a ideia de que o conhecimento é construção (ou invenção) nossa, que apenas representamos o mundo e nunca o captamos diretamente.” (MOREIRA, 2000, p. 7).

Para promover a aprendizagem significativa crítica, Moreira (2000) propõe 11 princípios norteadores de didáticas libertadoras para os professores desenvolverem em sala de aula, servindo como orientações para que as atividades educativas se tornem mais eficientes. São eles:

- 1º Princípio do conhecimento prévio: aprender que aprendemos a partir do que já sabemos;
- 2º Princípio da interação social e do questionamento: aprender/ensinar perguntas ao invés de respostas;
- 3º Princípio da não centralidade do livro texto: aprender a partir de distintos materiais educativos;
- 4º Princípio do aprendiz como perceptor/representador: aprender que somos perceptores e representadores do mundo;
- 5º Princípio do conhecimento da linguagem: aprender que a linguagem está totalmente implicada em qualquer e em todas as tentativas humanas de perceber a realidade;
- 6º Princípio da consciência semântica: aprender que o significado está nas pessoas, não nas palavras;



## 6 METODOLOGIA

Este capítulo expõe os procedimentos metodológicos da presente pesquisa, abordando a natureza da pesquisa, seu universo, sua população e constituição, bem como a metodologia a ser utilizada para a coleta e análise dos dados.

### 6.1 DA PESQUISA

A metodologia empregada neste estudo voltou-se para uma pesquisa com abordagem qualitativa, de natureza aplicada, com objetivo descritivo e exploratório. A escolha da pesquisa qualitativa foi devido a mesma não se preocupar com representatividade numérica, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, etc. Ludke e André (2007) relatam que a pesquisa qualitativa proporciona ao pesquisador uma fonte direta com os dados num ambiente natural, sendo que os dados coletados são predominantemente descritivos, despertando uma preocupação com o significado que os indivíduos dão às coisas.

Motta-Roth (2010) enfatiza que a pesquisa qualitativa requer critérios que possam ser usados para análise de dados, ou seja, é necessária a definição de materiais e métodos a serem adotados durante esse tipo de pesquisa, para melhor compreensão dos dados analisados. A investigação em sala de aula contou com três importantes instrumentos de pesquisa, tanto para a coleta dos dados como para a interpretação e discussão destes: observação, diário de campo e questionários.

- a) Observação: que permitirá recuperar e registrar o aspecto exterior das ações e não sua intencionalidade;
- b) Diário de campo: que registrará todas as informações, questionamentos e reflexões durante as aplicações das atividades;
- c) Questionários: que registrarão as respostas dos estudantes durante as atividades a serem desenvolvidas.

Para a obtenção do referencial teórico, optou-se pela pesquisa bibliográfica, que, segundo Fonseca (2012, p. 32), “[...] é feita a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites”. Como estratégias de obtenção de dados, fez-se necessário pesquisas e identificação de trabalhos correlatos em livros, artigos, monografias, dissertações e teses, sejam nas versões impressas ou obtidas por meios das principais bibliotecas digitais.

Das bibliotecas digitais consultadas, merecem destaque: dissertações MNPEF (Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física), Portal Domínio Público, Portal de

Periódicos CAPES/MEC, BDTD (Biblioteca digital brasileira de Teses e Dissertações), *Google Scholar* (Google Acadêmico), *Web of Science* (base de dados que disponibiliza acesso vários títulos de periódicos), scielo (biblioteca eletrônica que abrange uma coleção selecionada de periódicos científicos brasileiros) e scopus (base de dados de resumos e citações de literatura *peer-reviewed*<sup>1</sup>, abrangendo revistas científicas, livros e anais de eventos).

Essa proposta de pesquisa apresenta um produto educacional (PE) em forma de uma sequência didática (SD), composta por quatro vídeos instrucionais explicativos e uma apresentação disponibilizada no *Website* Prezi<sup>2</sup>, que permitirá, ao(a) estudante do 9º ano do Ensino Fundamental, um estudo e compreensão de que tanto as equações matemáticas como as leis da natureza podem apresentar características de simetrias com relação a certas transformações. De acordo com Zabala (1998, p. 18, grifos do autor), sequência didática é definida como “[...] *um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos.*”.

A construção e uso dos quatro vídeos instrucionais explicativos para a transposição do conteúdo/assunto a ser ensinado por meio da SD, bem como sua disponibilização no *Website* Prezi, não se limitou apenas a sua atratividade e contextualização, mas na capacidade que esses recursos audiovisuais possuem no que diz respeito à democratização da inclusão educacional e a popularização da tecnologia, mais especificamente dos recursos multimídia, motivando a aprendizagem dos conteúdos apresentados pelos professores, que os usam como suporte em suas práticas pedagógicas. Rosa (2000) afirma que a quebra de ritmo provocada pela apresentação de um audiovisual é saudável, pois altera a rotina da sala de aula, trazendo novo ânimo para a análise da teoria ministrada.

Schimdt (2006) cita que as potencialidades da televisão podem ser utilizadas em sala de aula auxiliando na “(re)construção do conhecimento”, onde

“Não podemos ignorar que a mídia entra na sala de aula pela porta da frente sem ser convidada, e não há como não dar ouvidos a ela. As crianças brasileiras passam uma média de cinco horas diárias na frente da televisão, ou seja, mais tempo que permanecem dentro da escola diariamente. Além disso, chegam à idade escolar impregnadas pela “cultura midiática”, o que já seria motivo suficiente para que dispensássemos uma atenção maior sobre os saberes ensinados seja pela telinha, nas páginas dos jornais ou mesmo na internet. Mas, antes de encarar a televisão e os outros meios de comunicação – tão mais atrativos, tão mais coloridos e sedutores –

<sup>1</sup> *Peer-reviewed* é a revisão por pares, tratando-se de uma avaliação do trabalho por uma ou mais pessoas de competência semelhante ao dos produtores do trabalho.

<sup>2</sup> Prezi é um *software* para criação de apresentações de *slides*, uma interface que permite criar, editar e exibir apresentações elaboradas a partir do navegador ou programa para computador ou celular.

como inimigos, há de se considerar a mídia como uma possível aliada na (re)construção do conhecimento.” (SCHMIDT, 2006, p. 6/7).

A SD tem como objetivo oferecer, ao(a) professor(a) de Ciências ou de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, uma proposta de trabalho que aborda a Simetria e Leis de Conservação na Física. Com isso, espera-se possibilitar, ao estudante dessa fase, um acesso inicial a esse ensino, fazendo com que a aprendizagem se desenvolva de forma interessante e prazerosa, despertando um maior interesse pela disciplina de Física e, ainda, servindo como um agente motivador, influenciando, de forma positiva, na escolha de prosseguimentos de estudos em áreas científicas.

Dessa forma, SD pode ser entendida como sendo um procedimento simples, que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e, conforme Oliveira (2013, p. 39), “[...] prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade para trabalhar os conteúdos disciplinares de forma integrada para uma melhor dinâmica no processo ensino-aprendizagem.”. A abordagem educacional pautou-se na teoria da aprendizagem significativa crítica, uma versão crítica da Teoria da Aprendizagem Significativa proposta por Moreira (2000).

## 6.2 DO CONTEXTO DA PESQUISA

A implementação do PE ocorreu em duas instituições públicas que ofertavam o ensino fundamental, uma municipal e outra estadual, ambas localizadas na cidade de Caldas Novas - GO. A intervenção em sala de aula se deu especificamente para as turmas de 9º ano, contando com a participação voluntária desses(as) estudantes. A predileção pelo último ano do Ensino Fundamental é justificada por seu contexto na educação básica, pois segundo a Base Nacional Curricular Comum<sup>3</sup> - BNCC,

“[...] à medida que se aproxima a conclusão do Ensino Fundamental, os alunos são capazes de estabelecer relações ainda mais profundas entre a ciência, a natureza, a tecnologia e a sociedade, o que significa lançar mão do conhecimento científico e tecnológico para compreender os fenômenos e conhecer o mundo, o ambiente, a dinâmica da natureza.” (BRASIL, 2018, p. 343).

A escolha dessas instituições de ensino baseou-se, primordialmente, pelo fato de serem locais onde sou professor efetivo de matemática e, principalmente, por poder utilizar minhas aulas para aplicação do produto educacional e coleta de dados para a

<sup>3</sup> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) trata-se de um documento com caráter normativo, que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. (BRASIL, 2018, p. 7)

pesquisa. Uma das instituições de ensino foi a Escola Municipal Orozina Maria Martins (INEP<sup>4</sup>: 52058743), (64) 3454 3815, localizada na Rua Serra Dourada, s/n, Jardim Serrano, que possui duas turmas de 9º anos (9º A e 9º B), no turno matutino, totalizando 59 alunos(as) matriculados(as). A outra instituição foi o Colégio Estadual Dom Pedro II (INEP: 52058492), (64) 3453-7305, localizado na Rua Ciro Palmerston, 660, Setor Oeste, contando com três turmas de 9º anos (9º B, 9º C e 9º D), no turno vespertino, totalizando 102 alunos(as) matriculados(as).

Por meio da Resolução CEE/CP nº 18/2020 (ANEXO B), o Conselho Estadual de Educação de Goiás autorizou as Instituições do Sistema Educativo do Estado de Goiás a adotarem o Regime Especial de Aulas Não Presenciais (REANP) enquanto perdurar o isolamento social no ano letivo de 2021. O atual governador do estado de goiás, sr. Ronaldo Ramos Caiado, filiado ao democratas (DEM), divulgou que existe a previsão de retorno as aulas presenciais nas escolas já no início de agosto deste ano, mas ainda não é algo certo e provavelmente o retorno ocorrerá de forma gradativa, priorizando aqueles estudantes considerados mais “vulneráveis”, por estarem sem acesso as aulas desde o início dessa pandemia.

Segundo o Decreto Municipal nº 1329/2021 (ANEXO C), fica autorizada e determinada a retomada das aulas presenciais nas escolas públicas no âmbito do município de Caldas Novas - GO, na modalidade híbrida, a partir do primeiro dia letivo de agosto desse de 2021. Esse retorno também ocorrerá de forma gradativa, iniciando com 12,5% na primeira semana e finalizando o mês com 50% da capacidade total dos alunos da série em questão. Para a escolha e decisão de quais alunos(as) retornarão nesse primeiro momento, também se obedecerá o critério de priorização daqueles estudantes considerados mais “vulneráveis”.

Devido a essa incerteza quanto ao retorno das aulas presenciais, associado a ainda estarmos vivendo um período atípico devido à pandemia em virtude do novo coronavírus, bem como pensando no bem estar e na segurança de todos os envolvidos na aplicação do produto educacional, inicialmente optou-se por recorrer as orientações para procedimentos em pesquisas com qualquer epata em ambiente virtual, disponibilizada pela Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (ANEXO A), em 24 de fevereiro de 2021 (CONEP, 2021). Desse modo, a implementação do PE ocorreria em horários pré-estabelecidos com as devidas coordenações pedagógicas de cada instituição de ensino, acordado com os(as) participantes da pesquisa, fazendo uso de três ferramentas digitais:

- *WhatsApp*: um aplicativo multiplataforma de mensagens instantâneas e chamadas de voz para *smartphones*, para a inserção de todos os participantes num grupo específico e a comunicação imediata entre os envolvidos;

---

<sup>4</sup> INEP é um código que permite identificar, de maneira unificada, cada uma das escolas do Brasil, de acordo com o cadastro junto ao Ministério da Educação.

- *Google Meet*: um serviço de comunicação em vídeo oficial do *Google*, grátis e disponível no Android, iOS e navegadores *web*, para as aulas;
- *Google Forms*: *Google Forms* é uma ferramenta de formulários do *Google*, gratuito, de facilidade em seu manuseio, muito útil para a criação de formulários e questionários diversos, coleta e análise de dados estatísticos, para aplicação dos questionários e coleta dos dados.

A pesquisa não se restringiu apenas ao PE em forma de SD e sua implementação, mas houve também a necessidade de mais três questionários para finalizar a coleta de dados:

- QUESTIONÁRIO V (APÊNDICE L): uma Avaliação Diagnóstica para levantar os conhecimentos prévios dos(as) estudantes referentes aos assuntos a serem abordados e, ainda, analisar seu respectivo nível socioeconômico;
- QUESTIONÁRIO VI (APÊNDICE M): um *Feedback* do(a) aluno(a) participante, para evidenciar a eficácia do PE ofertado;
- QUESTIONÁRIO VII (APÊNDICE N): um *Feedback* do(a) professor(a) de Matemática e/ou Ciências de Educação Básica, para que pudessem apreciar e dar um parecer, na visão deles, quanto à significância desse material.

Vale enfatizar que a participação dos(as) professores(as) ocorreu de forma não presencial, por meio de um convite enviado para: (i) a coordenação pedagógica da Secretaria Municipal de Educação de Caldas Novas - GO; (ii) nove grupos específicos da rede social *Facebook* (Física, Física para todos, Ensino de Física, Sou de Exatas, Grupo de Estudos de Matemática, Matemática e Física, Física e Matemática, Grupo de estudos de Ciências Exatas e Ensino de Física - Brasil); (iii) os(as) professores(as) das duas instituições onde fora aplicado o PE e, ainda, (iv) o grupo de *WhatsApp* da OBMEP NA ESCOLA<sup>5</sup>, chamado de ONE SP01, onde sou integrante desde 2020. O PE fora disponibilizado por meio do *link* dos arquivos no *Google Drive*<sup>6</sup> e *link* da SD no *Website Prezi*, além da disponibilização do *link* para realização do questionário por meio do *Google Forms*.

<sup>5</sup> OBMEP NA ESCOLA: programa voltado para os(as) professores(as) de Matemática das escolas públicas municipais e estaduais, tendo como um dos objetivos contribuir para a formação de professores em Matemática estimulando estudos mais aprofundados e a adoção de novas práticas didáticas em suas salas de aula. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/na-escola.htm>. Acesso em: 05 jan. 2022.

<sup>6</sup> Google Drive: Drive que oferece acesso seguro e criptografado aos seus arquivos, nativo da nuvem e onde os itens compartilhados com você são verificados automaticamente e removidos quando há *malware*, *spam*, *ransomware* ou *phishing*.

Aproveitando que o governo de Goiás se organizara para que as escolas/colégios no âmbito do estado de Goiás retornassem com o seu ensino presencial, a partir agosto de 2021, com a volta de quase 100% dos estudantes do 9º ano do ensino fundamental e da 3ª série do ensino médio, devido a prova do Ideb<sup>7</sup>, que ocorreria ao final do mesmo ano, não houve necessidade de realizar a aplicação do PE e coleta de dados da pesquisa de forma remota. Desse modo, a implementação do PE para os(as) estudantes ocorreu de forma presencial, com os(as) alunos(as) ali presentes, no período de 04 à 08 de outubro de 2021. É importante ressaltar que a intervenção em sala de aula somente ocorreu após o consentimento dos alunos e/ou responsáveis.

---

<sup>7</sup> Ideb: Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (criado em 2007), que reúne, em um só indicador, os resultados de dois conceitos igualmente importantes para a qualidade da educação: o fluxo escolar e as médias de desempenho nas avaliações. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/pesquisas-estatisticas-e-indicadores/ideb>. Acesso em: 06 jan. 2022.

## 7 PRODUTO EDUCACIONAL

Esse PE apresenta uma SD, composta por quatro vídeos instrucionais explicativos referente ao conteúdo a ser estudado, quatro questionários, sendo um para cada vídeo em questão e, ainda, sua disponibilização em forma de apresentação no *website* Prezi. O principal objetivo dessa SD é oferecer, ao(a) professor(a) de Ciências ou de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, uma proposta de trabalho que aborda a Simetria e Leis de Conservação na Física. Com isso, espera-se possibilitar, ao estudante dessa fase, um acesso inicial a esse ensino, fazendo com que a aprendizagem se desenvolva de forma interessante e prazerosa, despertando um maior interesse pela disciplina de Física e, ainda, servindo como um agente motivador, influenciando, de forma positiva, na escolha de prosseguimentos de estudos em áreas científicas.

Ao todo somam-se 146 min e 20 s de vídeos instrucionais produzidos. Cada vídeo instrucional possui um questionário específico, sendo que as respostas esperadas podem ser consultadas pelo(a) professor(a) nos apêndices. Quanto aos questionários, caberá ao(a) professor(a) estabelecer o melhor momento para sua aplicação, levando em consideração as orientações disponibilizadas e o tempo necessário para que o mesmo possibilite realizar o seu propósito: (i) de reflexão sobre os assuntos abordados, (ii) de promover a discussão de tópicos relevantes para que possa ser respondido com maior segurança e, ainda, (iii) de verificar a aprendizagem e aceitação dos participantes.

Assim, o primeiro vídeo (VÍDEO 1 - CONTEXTO HISTÓRICO DA SIMETRIA, ÉVARISTE GALOIS E EMMY NOETHER) é usado tanto para se entender o contexto histórico referente ao conceito da simetria, cujo início data-se por volta de 9000 anos Antes da Era Comum, quanto para se enfatizar dois importantes personagens que tanto contribuíram para nossos conhecimentos de hoje: (1) Évariste Galois e a Teoria de Grupos e (2) Emmy Noether e seu Teorema que liga as Leis de Conservação com as Simetrias. Nesse vídeo são apresentados os seguintes conteúdos:

- PARTE I - CONTEXTO HISTÓRICO DA SIMETRIA: nascimento da agricultura, invenções das cidades, revolução da agricultura, contribuições significativas dos antigos babilônicos em muitos aspectos atuais (as 12 constelações do zodíaco, os 360° do círculo, o minuto sendo composto por 60 segundos e a hora tendo 60 minutos), início da história escrita, compreensão inicial da simetria pela humanidade, sistema sexagesimal, início da compreensão de resolução de equações, simetria como um tipo especial de transformação e seu papel central nas fronteiras da física, no mundo quântico e na teoria da relatividade;
- PARTE II - ÉVARISTE GALOIS E A TEORIA DE GRUPOS: biografia, contribuições e Teoria de Grupos com ênfase nas seis simetrias no triângulo equilátero e na multiplicação de simetrias;

- PARTE III - AMALIE EMILY NOETHER E SEU TEOREMA QUE LIGA AS LEIS DE CONSERVAÇÃO COM AS SIMETRIAS: biografia, contribuições, simetrias e leis de conservação e o Teorema de Noether.

No segundo vídeo (VÍDEO 2 - SIMETRIAS NA NATUREZA E NA MATEMÁTICA), é apresentando tanto as Simetrias na Natureza (por escala - fractal, esférica, radial e bilateral), quanto as Simetrias na Matemática (translação, rotação, reflexão e reflexão transladada). Nesse vídeo são apresentados os seguintes conteúdos:

- PARTE I - SIMETRIAS NA NATUREZA: padrões numéricos, números poligonais (triangulares e quadrados), homem vitruviano e a razão áurea, sequência de Fibonacci, retângulo de ouro, espiral de Fibonacci, simetria por escala (fractal), simetria esférica, simetria radial (birradial, tetrarradial, pentarradial e multirradial) e simetria bilateral;
- PARTE II - SIMETRIAS NA MATEMÁTICA: simetria por reflexão, simetria por rotação, simetria por translação e simetria por reflexão transladada.

O terceiro vídeo (VÍDEO 3 - FÍSICA, ENERGIA, TRABALHO E ENERGIA E ENERGIA MECÂNICA), é destinado à apresentação da Física como construção humana, da Energia com suas formas e utilização, da relação entre Trabalho e Energia e, ainda, da Energia Mecânica. Nesse vídeo são apresentados os seguintes conteúdos:

- PARTE I - FÍSICA – UMA CONSTRUÇÃO HUMANA: Física, objetivos esperados a partir do estudo da Física e suas divisões;
- PARTE II - ENERGIA: FORMAS E UTILIZAÇÃO: energia, o Sol, formas e tipos de energia, o conceito de energia do dicionário, trabalho, transformação de energia e impactos ambientais;
- PARTE III - TRABALHO E ENERGIA: conceito de energia na Física, Princípio da Conservação da Energia, Lei da Conservação da Energia, energia e trabalho medidos em Joule, o físico inglês James Prescott Joule e cálculo do trabalho a partir de uma força constante;
- PARTE IV - ENERGIA MECÂNICA: A energia que nos cerca, energia potencial, energia cinética, energia potencial gravitacional e energia mecânica.

Finalmente, o quarto e último vídeo (VÍDEO 4 - CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA), é destinado, exclusivamente, à apresentação da conservação da energia mecânica. Nesse vídeo são apresentados os seguintes conteúdos:

- PARTE I - CONSERVAÇÃO DA ENERGIA: definição de conservação na Física, grandezas conservativas na Física, grandezas que se conservam na mecânica (energia, momento linear e momento angular), energia total de um sistema e energia dissipada;

- PARTE II - CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA: condição, cálculo do trabalho da força peso, cálculo do trabalho da força resultante, dedução da fórmula da conservação da energia mecânica, sistema (aberto, fechado e isolado), sistemas físicos (objeto, fronteira, interfaces e ambiente), conservação da energia usada para descrever o movimento de objetos e aplicações da fórmula da conservação de energia.

Todos esses quatro vídeos instrucionais explicativos podem ser encontrados na *Playlist* disponível em:

[https://www.youtube.com/playlist?list=PLJeE3YjrgaXHM-hYGPBc8QFW\\_NgCcEDtI](https://www.youtube.com/playlist?list=PLJeE3YjrgaXHM-hYGPBc8QFW_NgCcEDtI)

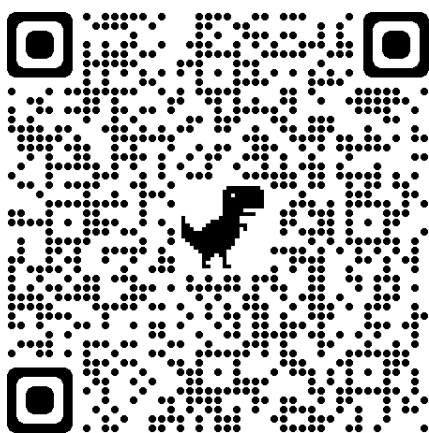
Caso prefira, pode-se localizá-los isoladamente, por meio de seus respectivos endereços eletrônicos:

- VÍDEO 1 - CONTEXTO HISTÓRICO DA SIMETRIA, ÉVARISTE GALOIS E EMMY NOETHER (34 min 03 s): <https://youtu.be/5jmBrhchUBE>
- VÍDEO 2 - SIMETRIAS NA NATUREZA E NA MATEMÁTICA (34 min 35 s): <https://youtu.be/KUHRY9mYVWg>
- VÍDEO 3 - FÍSICA, ENERGIA, TRABALHO E ENERGIA E ENERGIA MECÂNICA (37 min 08 s): <https://youtu.be/4C0m6SKx8Dg>
- VÍDEO 4 - CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA (40 min 34 s): <https://youtu.be/cNSHwDzVuSw>

Essa SD pode ser encontrada em forma de apresentação no *website* do Prezi, disponível em

<https://prezi.com/p/tlem4vfnq9z5/sequencia-didatica-simetria-e-leis-de-conservacao-na-fisica/>,

ou pelo *QR Code*<sup>1</sup> abaixo:



<sup>1</sup> *QR Code* ou código QR, é um código de barras estilizado, facilmente reconhecido por uma câmera presente em um celular, que o converte num endereço da *internet*.

Portanto, essa SD pode ser aplicada utilizando tanto essa versão impressa ou por meio da apresentação da mesma no *software* Prezi. Para fazer a leitura do código QR, em *smartphone* ou *tablet Android* compatível, abra o aplicativo de câmera integrado, aponte a câmera para o código QR e toque no *banner* que aparecerá. Espero que este material seja muito significativo e, principalmente, que possa contribuir no exercício de sua profissão.

## 8 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A aplicação do PE ocorreu no segundo semestre de 2021, especificamente na primeira semana letiva de outubro (de 04 à 08/10/2021), tanto na Escola Municipal Orozina Maria Martins, quanto no Colégio Estadual Dom Pedro II. A pesquisa foi realizada com as turmas dos nonos anos do Ensino Fundamental dessas respectivas instituições, por meio da análise das respostas dos(as) estudantes registradas nas atividades da SD, das observações e das anotações no diário de campo durante sua aplicação. Também houve o convite e a participação de professores(as) de Ciências e/ou Matemática de nonos anos do Ensino Fundamental, com o intuito de avaliar esse material quanto a sua eficácia e possível inclusão em suas práticas pedagógicas. Dessa maneira, formou-se todo um material com considerações e interpretações que serão apresentados a seguir, detalhadamente, com as descrições e os resultados da análise de cada uma das etapas.

O Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) enviado para os(as) Professores(as) participantes encontra-se no APÊNDICE A, enquanto o TCLE enviado para os(as) Alunos(as) encontra-se no APÊNDICE B. O Termo de Consentimento e Anuência (TCA) devidamente carimbado e assinado pelo representante legal de cada uma das instituições de ensino participantes dessa pesquisa encontra-se no ANEXO A e no ANEXO B. Ao todo tivemos a participação de 124 alunos(as) nessa pesquisa. A Escola Municipal Orozina Maria Martins contava com dois nonos anos no turno matutino (9º A e 9º B), tendo 54 participantes, ou seja, 43,5% do total da amostra. O Colégio Estadual Dom Pedro II contava com três nonos anos no turno vespertino (9º B, 9º C e 9º D), contribuindo com 70 participantes, ou seja, 56,5% do restante da amostra.

### 8.1 DA AULA 1 (AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA E EXIBIÇÃO DO VÍDEO 1)

A aula 1 (50 min) destinou-se à aplicação da AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA (QUESTIONÁRIO V - APÊNDICE I) com duração de 12,5 min e, ainda, à exibição do VÍDEO 1 (CONTEXTO HISTÓRICO DA SIMETRIA, ÉVARISTE GALOIS E EMMY NOETHER), com duração de 34 min 03 s. Os 3,45 min iniciais foram usados para informar aos(as) estudantes sobre a programação e orientações iniciais dessa aula e, ainda, sobre o questionário (Avaliação Diagnóstica - QUESTIONÁRIO V - APÊNDICE I) que deveriam responder e devolver ao final do tempo destinado, mas sem a obrigatoriedade da identificação.

#### 8.1.1 Da Avaliação Diagnóstica - QUESTIONÁRIO V (APÊNDICE I)

A Avaliação Diagnóstica visava levantar os conhecimentos prévios dos(as) estudantes, referentes aos assuntos a serem abordados e, ainda, analisar seu respectivo nível socioeconômico. Nela pudemos observar que a maioria dos(as) participantes: (i) eram do

sexo feminino (52,4%); (ii) não apresentavam nenhuma necessidade especial (96,0%); (iii) declararam ser da cor parda (62,1%), seguida da branca (17,7%) e da preta (10,5%); (iv) nasceram no ano de 2006 (52,4%), seguido de 2007 (24,2%) e de 2005 (18,5%); e, ainda, (v) eram nascidos(as) no mês de outubro (13,7%), seguido de junho (12,9%) e de março (11,3%), conforme Fig. 8.1 abaixo.

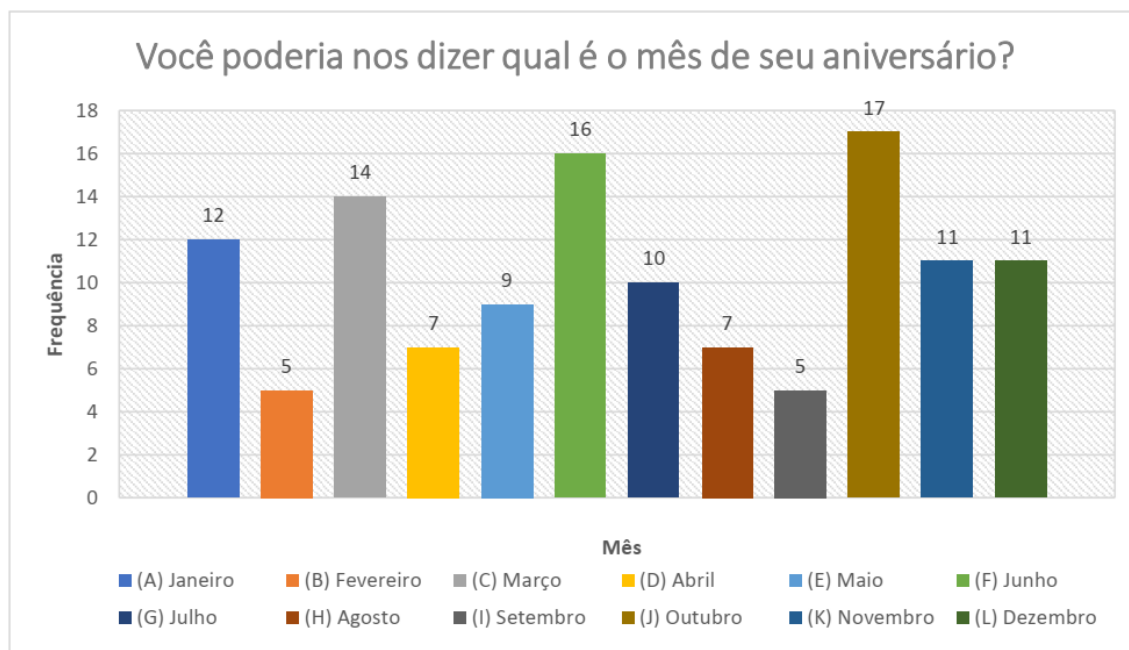


Figura 8.1 – Mês de aniversário dos participantes da pesquisa.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A pesquisa ainda mostrou que a maioria dos pais ou responsáveis desses(as) estudantes os(as) incentivam: (i) a estudar (97,6%); (ii) a fazer o dever de casa e/ou os trabalhos da escola (91,9%); (iii) a ler (82,3%); e, ainda, (iv) a ir à escola e/ou não faltar às aulas (97,6%). Vale ressaltar que apenas 62,9% desses pais ou responsáveis conversam com os(as) estudantes sobre o que acontece na escola. Em dias de aula, a maioria dos(as) estudantes responderam que gastam: (i) mais de três horas assistindo à TV, navegando na internet ou jogando jogos eletrônicos (32,3%), seguido de entre uma e duas horas (28,2%) e de menos de uma hora (18,5%); e, ainda, (ii) entre uma e duas horas fazendo trabalhos domésticos (ex.: lavando louça, limpando o quintal etc.) (41,9%), seguido de menos de uma hora (34,7%) e mais de duas até três horas (13,7%).

Atualmente, 22,6% desses(as) estudantes trabalham fora de casa (recebendo ou não salário). Perguntados(as) se já haviam sido reprovados: (i) 80,6% afirmaram que nunca; (ii) 16,9% disseram ter reprovado uma única vez; e (iii) 2,4% confirmaram terem sido reprovados duas ou mais vezes. A maioria dos estudantes afirmaram gostar de estudar: (i) Ciências (79,8%); e (ii) Matemática (81,5%). Perguntados se sabiam o que era Física ou o que se estudava nesta disciplina, 53,2% disseram não saber. Sobre qual a diferença entre a Física e a Matemática, 54% afirmaram não saber, seguido de 29% que alegaram ser a

teoria e de 15,3% que disseram ser as fórmulas. Quando terminarem o 9º ano do Ensino Fundamental, a maioria dos(as) participantes (79,8%) pretendem continuar a estudar e trabalhar, seguido de 15,3% que afirmaram continuar somente a estudar.

A figura a seguir (Fig. 8.2) nos apresenta a ideia inicial do conceito de Simetria na visão dos(as) estudantes participantes dessa pesquisa. Percebe-se que para os(as) estudantes consultados, o conceito de simetria ainda não está claro, pois somente 10,8% deles(as) conseguiram acertar a resposta, sendo evidente que: (i) a maioria (31,2%) ainda não sabem o seu significado; (ii) 29,0% acreditam ser qualquer figura ou forma geométrica; (iii) 21,5% pensam ser uma característica observada somente em obras de arte; e (iv) para 7,5% trata-se apenas de reflexões nos espelhos.

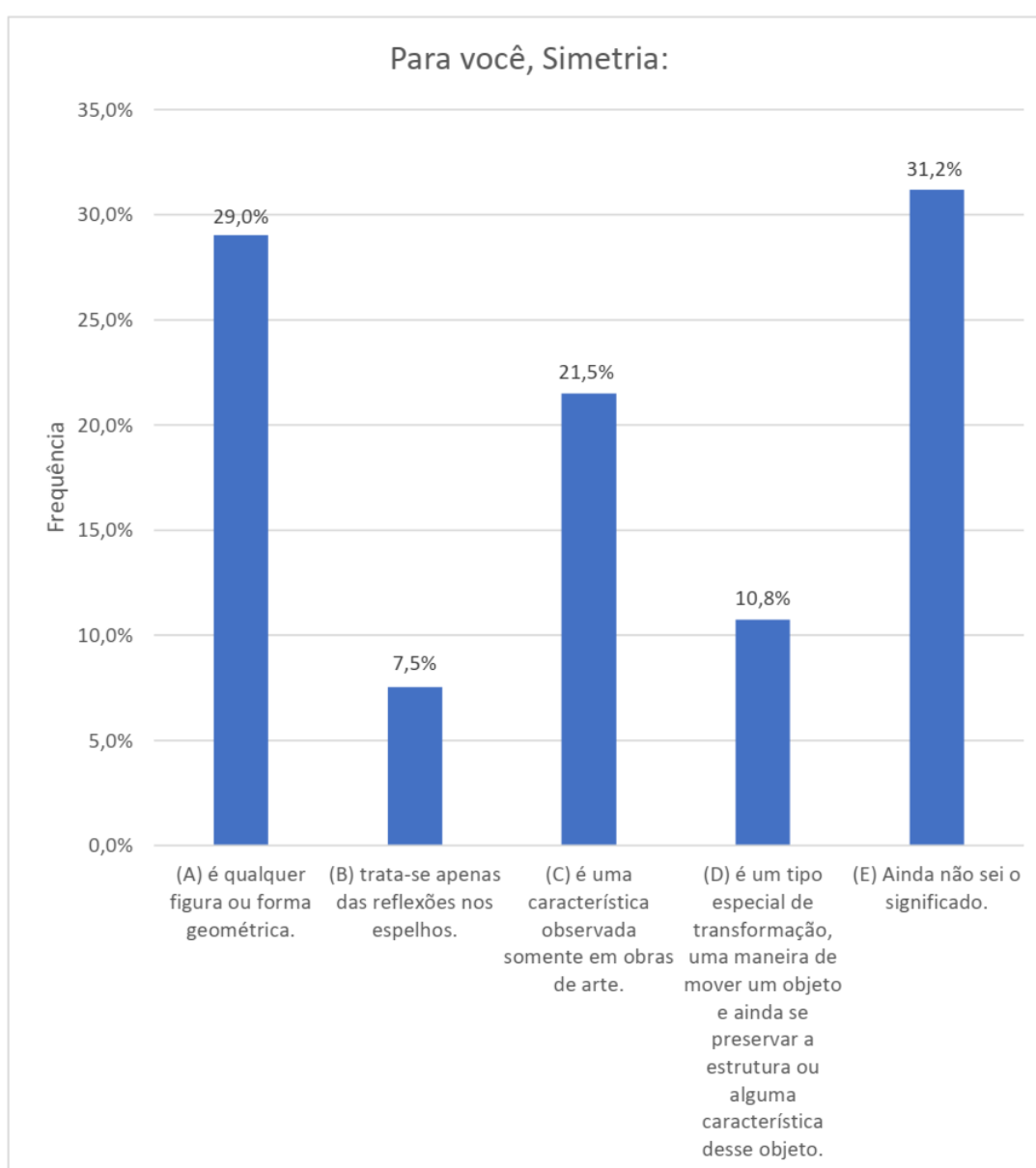


Figura 8.2 – Verificação sobre o conceito inicial de Simetria para os(as) participantes da pesquisa.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Perguntados sobre Évariste Galois e Emmy Noether, todos (100,0%) afirmaram nunca terem ouvido falar sobre eles. A questão nº 23 procurou verificar a percepção quanto as transformações de rotação, reflexão e translação ocorrida em imagens; nessa questão, apenas 42,0% conseguiram sucesso. Na questão nº 24 procurou-se verificar a capacidade dos(as) pesquisados(as) em identificar a correta reflexão de um objeto em relação ao eixo de simetria  $y$ , em relação ao centro de simetria  $O$  e em relação ao eixo de simetria  $x$ ; nessa questão, somente 34,5% conseguiram acertar a resposta. Já na questão nº 25 houve uma breve explicação sobre o conceito de energia e energia mecânica, no intuito de orientar os(as) estudantes quanto ao contexto ali presente e, assim, poder verificar o conhecimento sobre o princípio da conservação da energia mecânica; onde o resultado constatou que apenas 34,5% conseguiram êxito.

### 8.1.2 Da exibição do Vídeo 1 (Contexto Histórico da Simetria, Évariste Galois e Emmy Noether)

Após o recolhimento da Avaliação Diagnóstica devidamente preenchida e no tempo destinado à mesma, iniciou-se a exibição do VÍDEO 1, a fim de: (i) fazer com que os(as) estudantes percebam que as equações matemáticas e as leis da natureza também podem apresentar característica de simetria com relação a certas operações de transformações; (ii) destacar as contribuições importantes e significativas de Évariste Galois e Emmy Noether, que revolucionaram a compreensão da simetria e suas aplicabilidades numa melhor compreensão do mundo físico e, ainda, (iii) ressaltar que a conexão formal entre simetrias e leis de conservação é dado pelo teorema de Noether. A maioria dos(as) estudantes se mantiveram concentrados e realizando anotações de fatos importantes para comentários posteriores, sendo que o cronograma estabelecido para essa aula fora cumprido em sua íntegra.

## 8.2 DA AULA 2 (QUESTIONÁRIO I - APÊNDICE E)

Na aula 2 (50 min), os primeiros 10 min foram destinados à uma revisão/resumo e discussão dos principais pontos referentes ao conteúdo do vídeo apresentado na aula anterior (VÍDEO 1). Na sequência, os próximos 30 min foram destinados à entrega, a cada participante, do QUESTIONÁRIO I (APÊNDICE E), sua resolução e devolução para correção, com a finalidade de verificar os conhecimentos adquiridos até aquele momento. Para resolverem esse questionário, os(as) participantes foram orientados(as) quanto à possibilidade de se reunirem em grupos compostos por até quatro integrantes, onde poderiam promover a interação, discussão e reflexão conjunta das questões ali presentes. Mesmo essa atividade podendo ser feita em grupo, ao final dessa aula, cada integrante respondeu o seu e o entregou de forma individual.

Os 10 min finais foram destinados à correção e discussão das respostas esperadas.

Como o questionário impresso havia sido respondido e recolhido para verificação de aprendizagem, um questionário em branco foi transmitido pela televisão conectada ao *notebook*. O momento de correção foi marcado por muito interesse, ansiedade e interação dos(as) participantes, que demonstraram envolvimento com a atividade e, ainda, compreensão de novos conceitos e aplicações. Esse questionário era composto por 10 questões e, após a apreciação das respostas entregues pelos(as) estudantes e a interação dos(as) mesmos(as) durante a correção, pudemos apresentar os resultados referentes a cada uma das perguntas feitas.

Quando perguntados(as) (Questão 01) sobre o nome da região que deu origem a várias civilizações da Antiguidade e que possuía uma terra fecunda, apenas 12 participantes (9,7%) responderam de forma correta ((B) Crescente Fértil), embora haviam evidenciado o motivo do erro durante a correção, alegando falta de atenção ao confundir com a Acádia Babilônica, que recebera a maioria das respostas assinaladas (59,7%). Já na segunda questão (Questão 2) era solicitado o nome da quem desenvolveu a escrita cuneiforme, desenvolvida cerca de 3500 a.C.. Nessa questão, apenas 34 participantes (27,4%) conseguiram êxito, respondendo ser os Sumérios (D), mas para a maioria (53,3%), a resposta foi que eram os Babilônicos (B). Novamente o equívoco foi evidenciado na correção, onde os(as) participantes justificaram sua confusão devido ao assunto ter sido tratado no início do vídeo e estarem ainda desatentos, mas que haviam percebido o descuido e compreendido.

A terceira questão (Questão 3) perguntava sobre o local responsável tanto pelo início da história escrita, quanto da compreensão inicial da simetria pela humanidade, com profundas implicações em se ver o mundo físico. Nessa questão, 85 participantes (68,5%) responderam de forma correta ((C) Babilônia). Nas questões seguintes (Questões 4 e 5), a intenção foi: (i) informar as características específicas de dois grandes nomes que revolucionaram a compreensão da simetria e suas aplicabilidades numa melhor compreensão do mundo físico e, ainda, (ii) verificar, com este questionário, se realmente ficaram conhecidos. Na Questão 4, as características diziam se tratar de um revolucionário político e matemático obsessivo, sendo responsável por criar uma linguagem que descreve a simetria nas estruturas matemáticas, deduzindo as suas consequências. Nessa questão, 59,7% (74 participantes) acertaram ao assinalar que seria Évariste Galois (A).

Já na Questão 5, as características mencionavam um grande algebrista, que provou dois teoremas que são essenciais para a teoria da relatividade, resolvendo o problema da conservação da energia, e que, ainda, era considerado, por Albert Einstein, como o gênio matemático criativo mais significativo já produzido naquele contexto. Nessa questão, 79 participantes (63,7%) tiveram êxito em sua resposta apresentada, assinalando ser Amalie Emily Nöther (Emmy Noether) (B). Portanto, nas questões 4 e 5 pudemos perceber que tanto Évariste Galois quanto Emmy Noether saíram do desconhecimento por parte dos(as) estudantes, como havia sido evidenciado na análise e discussão das questões nº 21 e nº

22 da Avaliação Diagnóstica, feita anteriormente, onde 100,0% afirmaram nunca terem ouvido falar sobre eles.

A sexta questão (Questão 6) apresentava as afirmações de que a simetria não deve estar apenas relacionada à beleza e perfeição, mas: (i) que seu conceito permeia também as ciências, sendo considerada um conceito-chave na Física; (ii) que ela possui um papel central nas fronteiras da Física, no Mundo Quântico e na Relatividade, podendo promover uma unificação matemática dos principais campos da Física Moderna; e, ainda, (iii) que sua compreensão é básica na atual compreensão científica do Universo e suas origens. Após essas afirmações, os participantes foram levados a refletir e responder onde estaria melhor apresentado o conceito de simetria, dentre as quatro opções de resposta disponíveis. A figura a seguir (Fig. 8.3) nos mostra que 92 participantes (74,2%) conseguiram compreender seu real conceito, superando, assim, os 10,8% que acertaram esse mesmo questionamento na questão nº 20, da Avaliação Diagnóstica feita anteriormente, demonstrado na (Fig. 8.2).

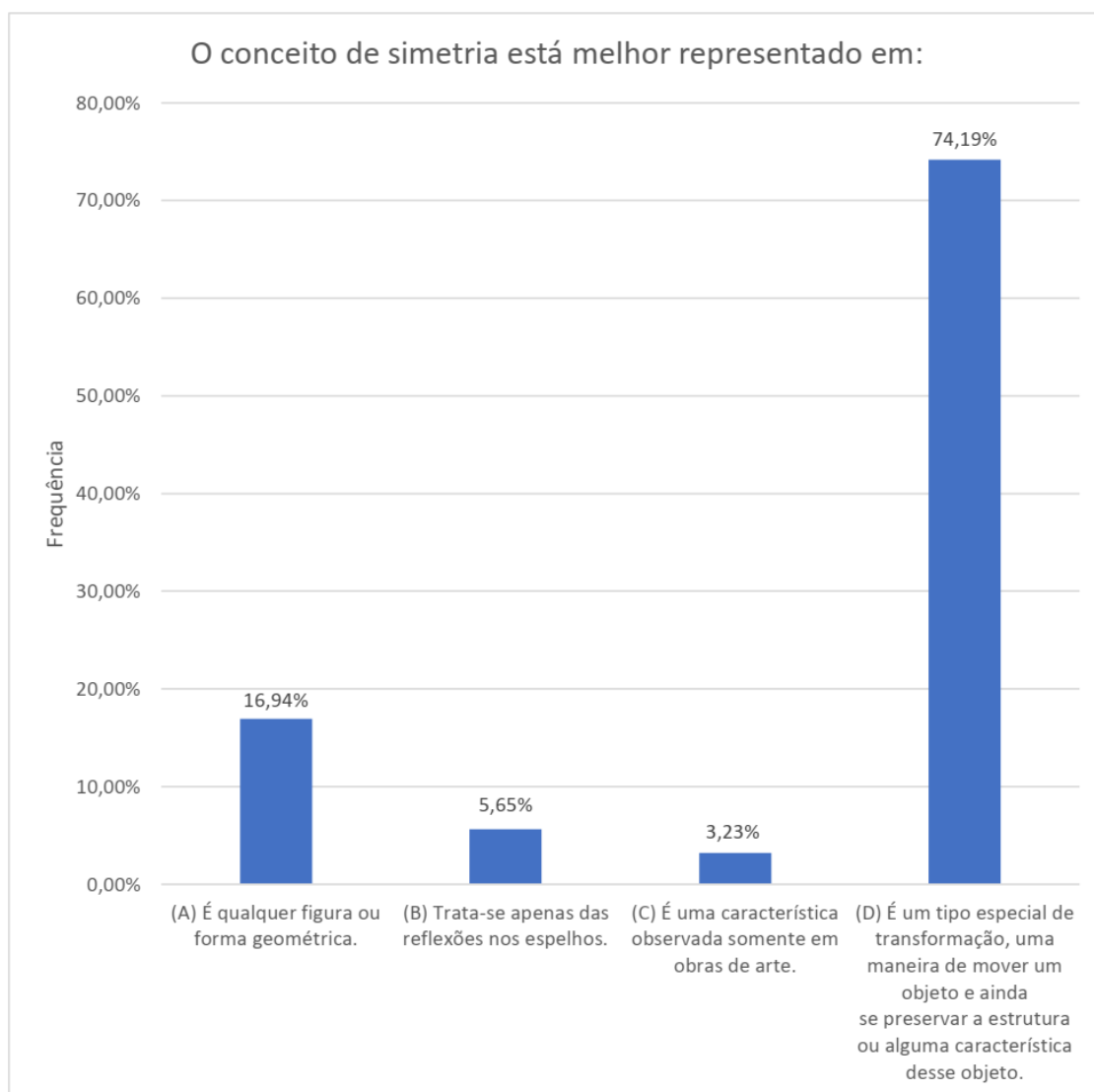


Figura 8.3 – Questão nº 6 (Questionário I): respostas obtidas sobre o conceito de simetria.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Na sétima questão (Questão 7) apresentou-se o conceito e exemplos de palíndromo ou capicua, considerado como um tipo de simetria na matemática, e, ao final, era solicitado que o(a) participante informasse a quantidade de capicuas de três algarismos que poderiam ser formadas usando-se apenas os algarismos 6, 7 e 8. Nessa questão, 49 participantes (39,5%) conseguiram responder corretamente, afirmando ser nove capicuas formadas, seguidos de 25,0% que afirmaram ser 16 e 16,1% que pensaram que seriam apenas seis. Na correção, compreenderam o erro e alegaram que haviam se confundido quanto a interpretação correta da questão. A oitava questão (Questão 8) apresentava o conceito de simetria intimamente ligado a equilíbrio, afirmando que uma equação poderia ser representada por meio de uma balança de dois pratos que está em equilíbrio, onde a quantidade apresentada no prato da esquerda é a mesma que a quantidade no prato da direita.

Essa questão apresentava três balanças em equilíbrio contendo triângulos, quadrados e círculos, sendo que as duas primeiras balanças estavam com seus dois pratos devidamente preenchidos e, assim, poderiam ser usadas como referências para se resolver o problema da terceira balança, que estava apenas com seu prato esquerdo contendo triângulos e círculos e, no outro, encontrava-se uma interrogação que esconderia quantos quadrados deveriam ser colocados no prato direito da balança, para que ela também ficasse equilibrada. Nessa questão, 42 participantes (33,9%) responderam corretamente, afirmando serem necessários 10 quadrados para que a terceira balança ficasse em equilíbrio (B), seguidos de 32,3% que acreditaram ser apenas nove e 18,5% que marcaram que seriam 11 quadrados.

A nona questão (Questão 9) solicitava o devido julgamento de quatro afirmações a respeito do conceito de simetria, sua importância e implicações na maneira de se ver o mundo físico, tratados no Vídeo 1. Nessa questão, 122 participantes (98,4%) responderam-na corretamente, demonstrando que o conteúdo abordado no vídeo instrucional vem de encontro a aprendizagem significativa dos conteúdos, pois não tem sentido ser crítico de conhecimentos sem significado. Na décima e última questão (Questão 10), era apresentado o papel da simetria na Física, sendo o teorema de Noether a conexão formal entre simetrias e leis de conservação, onde, segundo o teorema de Noether, para cada simetria contínua das leis físicas corresponde uma lei de conservação.

A questão solicitava inicialmente que o(a) participante observasse atentamente as três figuras disponíveis: (i) Pêndulo de Newton (Conservação do Momento Linear por Simetria de Espaço); (ii) Rotação da Bailarina (Conservação do Momento Angular por Simetria de Rotação); e, ainda, (iii) Lançamento de um Foguete (Conservação da Energia por Simetria Temporal). Na sequência, era pedido para que refletissem sobre cada situação mencionada e fizessem o devido julgamento das cinco afirmações apresentadas, onde apenas uma estaria correta. Dos(as) participantes, 33,1% (41 participantes) conseguiram responder corretamente essa questão, ao afirmarem que se a simetria for espacial (translacional)

haverá conservação do momento linear, se ela for rotacional (como ocorre numa bola de bilhar) haverá conservação do momento angular e caso seja temporal (invariante com o tempo) haverá conservação de energia.

### 8.3 DA AULA 3 (EXIBIÇÃO E DISCUSSÃO DO VÍDEO 2)

Esta aula foi destinada à exibição e discussão do VÍDEO 2 (SIMETRIAS NA NATUREZA E NA MATEMÁTICA), com duração de 34 min 35 s e, ainda, com o objetivo de: (i) identificar as principais simetrias encontradas na natureza e em objetos construídos pelo homem; (ii) verificar as transformações por reflexão, rotação, translação e reflexão transladada de figuras planas; (iii) construir figuras simétricas a partir das transformações por reflexão, translação e rotação; e, ainda (iv) reconhecer figuras simétricas, bem como seus eixos de simetria, quando houver.

Os 5 min iniciais foram usados para informar os(as) estudantes sobre a programação e orientações iniciais dessa aula, enfatizando a importância em se fazer anotações de conteúdos do vídeo que considerassem importantes, como se fossem notas de aula, pois posteriormente seria realizado a discussão de pontos relevantes e, também, uma verificação de aprendizagem. Durante a exibição desse vídeo instrucional (Vídeo 2), houve alguns momentos de pausa na transmissão para que pudéssemos aprofundar alguns conceitos e praticar alguns exemplos. Essa exibição e discussão durou todo o restante dessa aula e foi de muito proveito.

### 8.4 DA AULA 4 (QUESTIONÁRIO II - APÊNDICE F)

Na aula 4 (50 min), os primeiros 10 min foram destinados à uma revisão/resumo e discussão dos principais pontos referentes ao conteúdo do vídeo apresentado na aula anterior (VÍDEO 2). Na sequência, os próximos 30 min foram destinados à entrega, a cada participante, do QUESTIONÁRIO II (APÊNDICE F), sua resolução e devolução para correção, com a finalidade de verificar os conhecimentos adquiridos até aquele momento. Para resolverem esse questionário, os(as) participantes foram orientados(as) quanto à possibilidade de se reunirem em grupos compostos por até quatro integrantes, onde poderiam promover a interação, discussão e reflexão conjunta das questões ali presentes. Mesmo essa atividade podendo ser feita em grupo, ao final dessa aula, cada integrante respondeu o seu e o entregou de forma individual.

Assim como na aula 2, os 10 min finais foram destinados à correção e discussão das respostas esperadas. Como o questionário impresso havia sido respondido e recolhido para verificação de aprendizagem, um questionário em branco foi transmitido pela televisão conectada ao *notebook*. O momento de correção foi, novamente, marcado por muito interesse, ansiedade e interação dos(as) participantes, que demonstraram envolvimento

com a atividade e, ainda, compreensão de novos conceitos e aplicações. Esse questionário era composto por 10 questões e, após a apreciação das respostas entregues pelos(as) estudantes e a interação dos(as) mesmos(as) durante a correção, pudemos apresentar os resultados referentes a cada uma das perguntas feitas.

A primeira questão (Questão 1) solicitava inicialmente que os(as) estudantes observassem atentamente as quatro imagens disponibilizadas ((a) estrela-do-mar de 5 pontas, (b) hidra, (c) anêmona-do-mar e (d) estrela-do-mar de 9 pontas), e, na sequência, respondessem a classificação correta de cada uma delas em relação a sua simetria radial (birradial, tetrarradial, pentarradial ou multirradial). Nessa questão, a maioria dos participantes (58,3%) responderam de forma correta ((C) (a) pentarradial, (b) tetrarradial, (c) birradial e (d) multirradial.), sendo que as dúvidas ainda existentes foram esclarecidas durante a correção. Na segunda questão (Questão 2) também era solicitado a observação atenta de três figuras disponibilizadas, para que na sequência respondessem qual transformação/simetria (reflexão, rotação ou translação) ocorria em cada uma delas. Nessa questão, 88 participantes (70,9%) conseguiram êxito, e na correção reforçaram que o vídeo estava bem esclarecedor.

A terceira questão (Questão 3) solicitava que observassem, atentamente, o molde do Pulmão Humano na malha quadriculada no primeiro quadrante de um plano cartesiano. A seguir, deveriam identificar a correta representação da reflexão desse Pulmão em relação ao eixo de simetria  $y$ , em relação ao centro de simetria  $O$  e em relação ao eixo de simetria  $x$ . Nessa questão, 61 participantes (48,6%) responderam de forma correta, sendo que as dúvidas ainda restantes foram discutidas e extintas na correção.

Na quarta questão (Questão 4), era apresentado o problema da reprodução dos coelhos, relacionado a uma das mais importantes descobertas da matemática, a Sequência de Fibonacci. Nessa questão, era solicitado que o(a) participante se baseasse nas informações contidas ali e, somente depois, informasse quantos casais de coelhos teriam ao final de um ano (12 meses). Metade dos(as) participantes (50,0%) erraram ao responder que seriam 144 casais de coelhos (B), sendo que apenas 15,3% (19 alunos(as)) acertaram essa questão ao afirmarem ser 233 casais (C). Durante a correção houve a identificação, compreensão e justificativa do erro. Alegaram ser devido à falta de atenção quanto à interpretação dessa situação-problema e, conseqüentemente, erro em sua resolução, pois haviam calculado apenas até o 11<sup>o</sup> mês.

A Questão 5 apresentava, inicialmente, uma imagem conhecida por Espiral de Fibonacci, e, na sequência, dizia que essa imagem correspondia a uma sequência de números (Sequência de Fibonacci) que resulta num referencial para conceitos usados em artes plásticas, arquitetura, *design* e diagramação, sendo que a figura geométrica resultante é considerada agradável à contemplação humana. Nessa questão, os(as) participantes deveriam identificar o nome correto dessa representação, dentre as quatro opções de

respostas disponíveis. Conforme apresentado na figura a seguir (Fig. 8.4), a maioria dos(as) participantes (52,8%) tiveram êxito em sua resposta apresentada, quando afirmaram se tratar da proporção áurea (B).

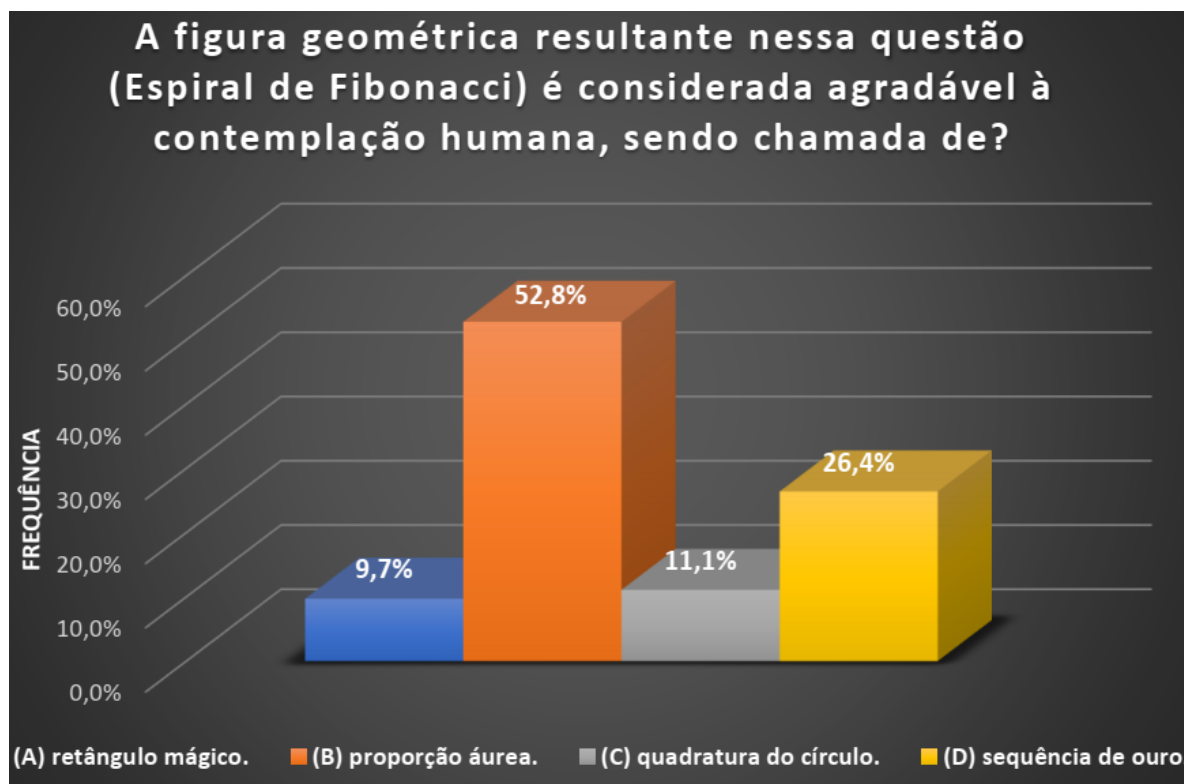


Figura 8.4 – Questão nº 5 (Questionário II): respostas obtidas sobre o nome correto da representação geométrica identificada na Espiral de Fibonacci, considerada agradável à contemplação humana.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A sexta questão (Questão 6) apresentava um texto informativo seguido de uma conhecida imagem do pintor italiano Leonardo Da Vinci, o homem vitruviano, associando às dimensões de um homem circunscrito em um círculo e um quadrado, um símbolo da simetria básica do corpo humano e para o universo como um todo. Nessa questão, os(as) participantes deveriam levar em consideração o texto e a imagem, e, posteriormente, decidir em qual das afirmações disponíveis, como opção de resposta, este projeto da modernidade ilustrado na imagem do homem vitruviano poderia ser melhor compreendido. 104 participantes (83,8%) conseguiram compreender bem o enunciado e responder corretamente ao identificarem que a resposta correta seria: (D) a busca pela perfeição humana através de medidas perfeitas.

Na sétima questão (Questão 7) deveriam observar as cinco figuras disponibilizadas, cada uma representando um elemento da sequência dos números triangulares, obtido pela somatória da quantidade de bolinhas que a formava, para depois informarem o número de bolinhas da 9ª figura dessa sequência. Nessa questão, 75 participantes (60,5%) conseguiram responder corretamente, ao informarem ser 45 bolinhas (C). Na correção, quem acertou

demonstrou certa facilidade, alegando que havia compreendido bem quando esse assunto foi ensinado e discutido no vídeo instrucional (Vídeo 2). Após a correção, todos(as) identificaram seus erros e compreenderam bem o assunto em questão, uns(as) preferindo fazer uso da equação para a resolução desse problema, enquanto outros(as) optando pela própria lógica de formação das figuras.

A oitava questão (Questão 8) solicitava a identificação, dentre quatro opções apresentadas ((a) Platão, (b) Aristóteles, (c) Galileu Galilei e (d) Pitágoras) do responsável pela introdução da ideia de simetria e por ampliar seu entendimento, tanto em uma noção primitiva inicial do que seria o eixo de simetria, quanto no sentido de proporção e equilíbrio entre as partes. Nessa questão, 78 participantes (62,9%) conseguiram responder corretamente, ao afirmarem ser: (B) Aristóteles, um importante filósofo grego, um dos pensadores com maior influência na cultura ocidental. Discípulo do filósofo Platão, elaborou um sistema filosófico que abordou sobre praticamente todos os assuntos existentes, como a geometria, física, metafísica, botânica, zoologia, astronomia, medicina, psicologia, ética, drama, poesia, retórica, matemática e principalmente lógica.

A Questão 9 tratava-se de uma das questões do ENEM de 2013, referente a construção de uma figura a partir da original, onde a nova figura deveria apresentar simetria em relação ao ponto  $O$ . Dentre as cinco opções de resposta, 50% dos(as) participantes demonstraram êxito ao afirmarem ser a letra (E). Na correção, os erros e descuidos foram identificados e a questão compreendida. Na décima e última questão (Questão 10), era apresentado duas figuras formadas por cinco quadrados iguais, com seus respectivos eixos de simetria. A seguir, dispunha-se de outras 10 figuras, também formadas por cinco quadrados iguais. Os(As) participantes deveriam responder quantas delas possuíam pelo menos um eixo de simetria. Nessa questão, 40,3% conseguiram obter sucesso em suas respostas. Na correção, quem havia errado conseguiu identificar o seu erro e/ou descuido, fazendo com que obtivesse a compreensão correta da situação descrita.

## 8.5 DA AULA 5 (EXIBIÇÃO E DISCUSSÃO DO VÍDEO 3)

Essa aula teve a duração de 50 min, sendo que os 5 min iniciais foram usados para informar aos(as) estudantes sobre a programação e orientações iniciais necessárias, enfatizando a importância em se fazer anotações de conteúdos do vídeo que considerassem importantes, pois posteriormente seria realizado a discussão de pontos relevantes e, também, uma verificação de aprendizagem. A seguir, iniciou-se a exibição e discussão do VÍDEO 3 (FÍSICA, ENERGIA, TRABALHO E ENERGIA E ENERGIA MECÂNICA), com duração de 37 min 08 s. Durante a exibição desse vídeo instrucional (Vídeo 3), houve alguns momentos de pausa na transmissão para que pudéssemos aprofundar conceitos e praticar alguns exemplos. Essa exibição e discussão durou todo o restante dessa aula e foi de muito proveito.

O objetivo dessa aula foi de: (i) reconhecer a Física enquanto construção humana; (ii) compreender, utilizar e associar os conceitos de energia cinética e potencial a situações reais; (iii) conhecer e utilizar conceitos físicos; (iv) reconhecer e exemplificar diferentes tipos de energia em situações reais; (v) identificar movimentos, reconhecendo fontes e transformações de energia envolvidas; (vi) identificar conversões ou transformações de energia de um tipo em outro, em fenômenos naturais e em equipamentos; (vii) obter o trabalho de uma força por meio de relações algébricas; (viii) reconhecer e associar a energia cinética à presença do movimento e a energia potencial à posição de um corpo segundo uma referência; (ix) compreender e calcular a energia potencial gravitacional; (x) identificar energia potencial e energia cinética como componentes da energia mecânica; e, ainda, (xi) obter a energia mecânica de um corpo ou sistema.

## 8.6 DA AULA 6 (QUESTIONÁRIO III - APÊNDICE G)

Na aula 6 (50 min), os primeiros 10 min foram destinados à uma revisão/resumo e discussão dos principais pontos referentes ao conteúdo do vídeo apresentado na aula anterior (VÍDEO 3). Na sequência, os próximos 30 min foram destinados à entrega, a cada participante, do QUESTIONÁRIO III (APÊNDICE G), sua resolução e devolução para correção, com a finalidade de verificar os conhecimentos adquiridos até aquele momento. Para resolverem esse questionário, os(as) participantes foram orientados(as) quanto à possibilidade de se reunirem em grupos compostos por até quatro integrantes, onde poderiam promover a interação, discussão e reflexão conjunta das questões ali presentes. Mesmo essa atividade podendo ser feita em grupo, ao final dessa aula, cada integrante respondeu o seu e o entregou de forma individual.

Assim como nas aulas 2 e 4, os 10 min finais foram destinados à correção e discussão das respostas esperadas. Como o questionário impresso havia sido respondido e recolhido para verificação de aprendizagem, um questionário em branco foi transmitido pela televisão conectada ao *notebook*. O momento de correção foi, novamente, marcado por muito interesse, ansiedade e interação dos(as) participantes, que demonstraram envolvimento com a atividade e, ainda, compreensão de novos conceitos e aplicações. Esse questionário era composto por 10 questões e, após a apreciação das respostas entregues pelos(as) estudantes e a interação dos(as) mesmos(as) durante a correção, pudemos apresentar os resultados referentes a cada uma das perguntas feitas.

A Questão 1, elaborada pelo Instituto Federal do Ceará (IFCE) no ano de 2012, solicitava que o estudante estivesse atento a situação-problema evidenciada e identificasse a afirmação que mostrasse o que ocorreria com o trabalho realizado quando a pessoa que subiu um lance de escada, com velocidade constante, em 1,0 min, fizesse o mesmo lance, com a mesma velocidade, em 2,0 min. Nessa questão, 93 participantes (75,0%) conseguiram sucesso, afirmando ser igual ao primeiro (E). Já a Questão 2, adaptada do

ENEM 2012, continha um texto informativo referente a um carrinho movido a corda, em que uma mola em seu interior é comprimida quando a criança puxa o carrinho para trás e, ao ser solto, ele entra em movimento enquanto a mola volta à sua forma inicial. Em seguida, era solicitado que o(a) participante identificasse onde mais o processo de conversão de energia que ocorre no carrinho era verificado.

Na Questão 2, a maioria (92,0%) dos(as) participantes conseguiram êxito ao responderem que seria em uma atiradeira (estilingue), letra (E), entendendo que o processo de conversão de energia no caso mencionado é o da transformação de energia potencial elástica em energia cinética, também usado pelo estilingue. A Questão 3, adaptada do Instituto Federal de São Paulo (IFSP) - 2012, apresentava uma situação-problema onde um trabalhador, num de seus serviços, subiu uma escada com velocidade escalar constante. Considerando esse movimento, era solicitado a identificação da correta afirmação do que ocorreria com o centro de massa desse trabalhador, em relação ao nível horizontal do solo. Nessa questão, 79,0% responderam corretamente, afirmando que ele havia ganhado energia potencial gravitacional (D).

Na quarta questão (Questão 4), era informado que determinado atleta usava 25,0% da sua energia cinética obtida na corrida para realizar um salto em altura sem vara, tendo atingido a velocidade de  $10 \text{ m/s}$ . Era solicitado a altura atingida em razão da conversão de energia cinética em potencial gravitacional, considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Nessa questão, apenas 60 participantes (48,4%) responderam de forma correta, ao afirmarem ser  $1,25 \text{ m}$  (B). Já a Questão 5 apresentava uma situação-problema onde um objeto de massa  $500 \text{ g}$  possuía energia cinética de  $2000 \text{ J}$ . Era solicitado a determinação da velocidade desse objeto, em  $\text{m/s}$ , adotando  $\sqrt{5} = 2,23$ . Nessa questão, 46,0% dos(as) participantes conseguiram sucesso. Como para se resolver as questões 4 e 5 era necessário que se fizesse o devido cálculo, os(as) participantes que não conseguiram respondê-las corretamente, justificaram que a dificuldade estaria nesse cálculo, mas que as dúvidas foram identificadas e resolvidas durante a correção.

Na Questão 6, elaborada pelo ENEM de 2010, desejava-se instalar uma estação de geração de energia elétrica em um município localizado no interior de um pequeno vale cercado de altas montanhas de difícil acesso, onde a cidade era cruzada por um rio, que seria a fonte de água para consumo, irrigação das lavouras de subsistência e pesca. Nessa região, que possuía pequena extensão territorial, a incidência solar é alta o ano todo. A estação em questão deveria abastecer apenas o município apresentado. A seguir, era solicitado ao(a) participante que identificasse qual forma de obtenção de energia, entre as cinco apresentadas, seria a mais indicada para ser implantada nesse município de modo a causar o menor impacto ambiental. Conforme apresentado na figura a seguir (Fig. 8.5), a maioria dos(as) participantes (81,5%) tiveram êxito em sua resposta apresentada, entendendo que como o enunciado exigia o menor impacto ambiental e que a incidência solar na região era

alta, a melhor forma para obtenção de energia é a fotovoltaica (D).

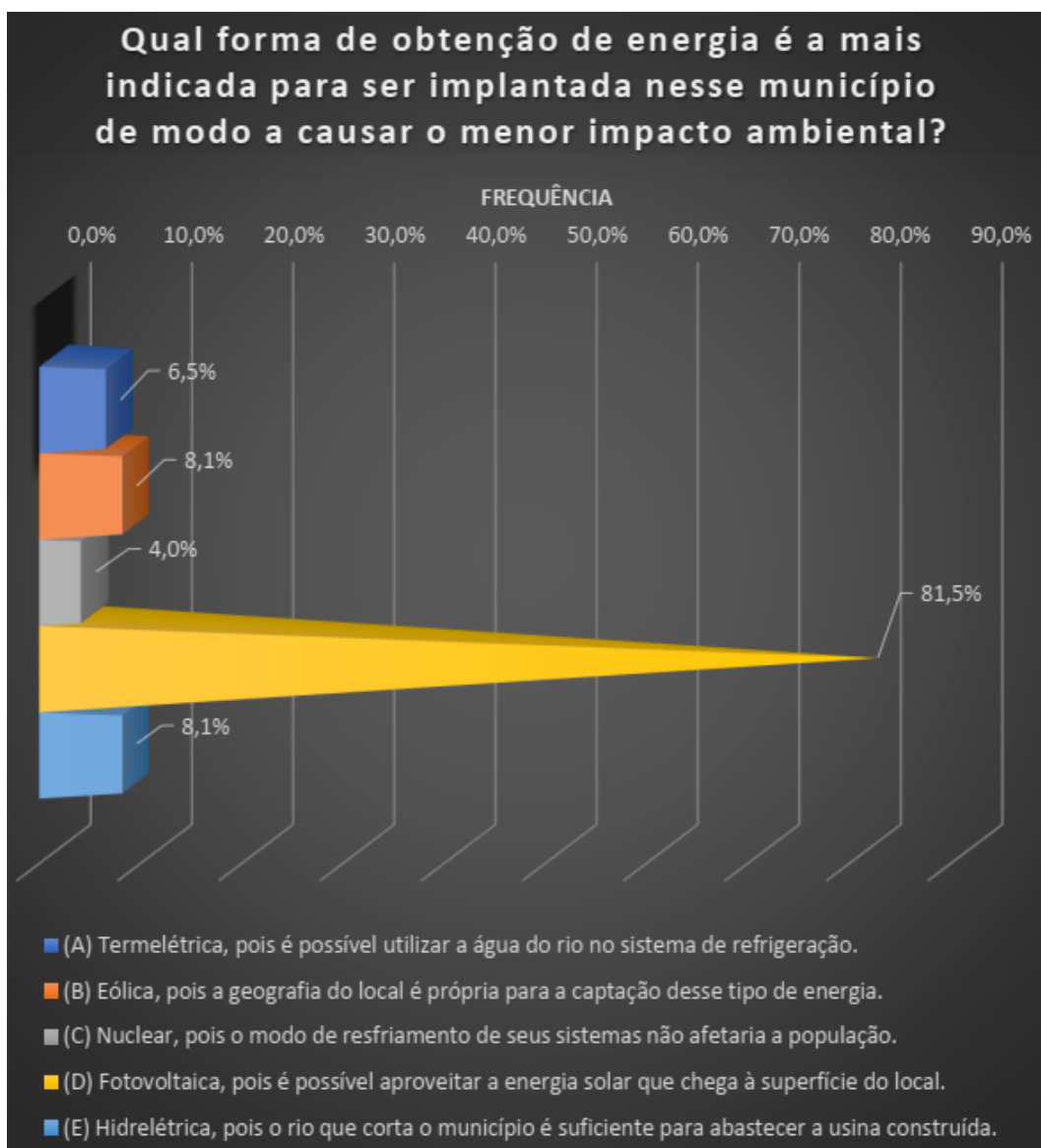


Figura 8.5 – Questão nº 6 (Questionário III): respostas obtidas sobre qual a forma de obtenção de energia seria a mais indicada para ser implantada no município em questão, de modo a causar o menor impacto ambiental.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A sétima questão (Questão 7), elaborada pela Universidade Federal Fluminense (UFF-RJ), apresentava duas situações onde um motorista empurrava um carro, sem combustível, até o posto mais próximo. Na primeira metade do trajeto, o motorista empurrava o carro por trás, enquanto que na segunda metade do trajeto, ele empurrava pelo lado. Nas imagens disponibilizadas, também estava representada a força  $\vec{F}$ , com que o motorista fazia sobre o carro, em cada caso, sendo que sua intensidade era constante e a mesma nas duas situações. Nessa questão, o(a) participante deveria identificar a afirmação correta, dentre cinco disponibilizadas. 93 participantes (75,0%) acertaram ao afirmarem que a energia transferida para o carro pelo motorista é maior na situação I, letra (C),

compreendendo que na situação I teríamos  $W_{F_I} = F d$ , enquanto na situação II teríamos  $W_{F_{II}} = F d \cos \theta$ , e, finalmente, concluindo que como  $\cos \theta < 1$ , teríamos que  $W_{F_I} > W_{F_{II}}$ .

A oitava questão (Questão 8) apresentava o Edifício Martinelli, projetado pelo arquiteto húngaro William Fillinger, sendo o primeiro arranha-céu brasileiro, construído na cidade de São Paulo. Informava que a construção foi iniciada em 1924, indo até 1934, contendo 30 andares e 130 metros de altura e, ainda, que um turista, ao admirar a beleza arquitetônica do edifício, havia percebido que do topo desse prédio alguém abandonou um objeto. Com base no texto, deveria-se identificar qual das quatro afirmações estava correta. Nessa questão, 90 participantes (72,6%) conseguiram responder corretamente, ao afirmarem que após descer 65 m, a energia potencial do corpo é igual à energia cinética (A), entendendo que como o prédio possuía 130 m, na metade da altura da queda, 65 m, o objeto teria a metade da energia potencial gravitacional e, conseqüentemente, a metade da energia cinética.

A Questão 9 apresentava o conceito de Física e seu campo de estudo, solicitando o correto julgamento de três afirmações referente aos objetivos esperados a partir do estudo da Física e suas divisões e, posteriormente, a correta associação dos objetivos esperados a partir do estudo da Física e suas divisões, com suas respectivas definições. Dentre as cinco opções de resposta, 91,0% dos(as) participantes demonstraram êxito ao afirmarem ser a letra (B): I - Objetivo Especulativo, II - Objetivo Esclarecedor e III - Objetivo Prático. Na décima e última questão (Questão 10), era informado que, didaticamente, a Física se dividia em seis ramos, solicitando o nome, dentre os citados, do ramo mais antigo da Física, que estuda os fenômenos que são decorrentes dos movimentos dos corpos, ou seja, aqueles que se relacionam com a queda dos corpos, colisão de automóveis, movimentos dos planetas, dentre outros exemplos. Nessa questão, 95,1% (118 participantes) conseguiram obter sucesso em suas respostas.

## 8.7 DA AULA 7 (EXIBIÇÃO E DISCUSSÃO DO VÍDEO 4)

Esta aula teve a duração de 50 min, sendo os primeiros 5 min destinados às orientações iniciais referentes à programação da mesma, enfatizando, novamente, da importância em se fazer anotações de conteúdos do vídeo que considerassem importantes, pois posteriormente seria realizado a discussão de pontos relevantes e, também, uma verificação de aprendizagem. Em seguida, iniciou-se a exibição do VÍDEO 4 (CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA), com duração de 40 min 34 s. Durante a exibição desse vídeo instrucional, houve alguns momentos de pausa na transmissão para que pudessemos aprofundar conceitos e praticar alguns exemplos. Essa exibição e discussão durou todo o restante dessa aula e foi de muito proveito.

O objetivo dessa aula foi de: (i) identificar situações em que há conservação da energia mecânica; (ii) reconhecer as transformações de energia e a conservação que dá

sentido a essas transformações; *(iii)* reconhecer e exemplificar sistemas conservativos e não conservativos; *(iv)* utilizar a conservação de energia mecânica para prever movimento; *(v)* reconhecer e exemplificar a conservação da energia total em um fenômeno ou sistema; *(vi)* identificar as transformações de energia e a conservação que dá sentido a elas; e, ainda, *(vii)* associar formas de energia mecânica a movimentos reais.

## 8.8 DA AULA 8 (QUESTIONÁRIO IV (APÊNDICE H) E QUESTIONÁRIO VI (APÊNDICE J))

Nessa última aula (Aula 8), com duração de 50 min, os primeiros 5 min foram destinados à uma revisão/resumo e discussão dos principais pontos referentes ao conteúdo do vídeo apresentado na aula anterior (VÍDEO 4). Na sequência, os próximos 30 min foram destinados à entrega, a cada participante, do QUESTIONÁRIO IV (APÊNDICE H), sua resolução e devolução para correção, com a finalidade de verificar os conhecimentos adquiridos até aquele momento. Para resolverem esse questionário, novamente os(as) participantes foram orientados(as) quanto à possibilidade de se reunirem em grupos compostos por até quatro integrantes, onde poderiam promover a interação, discussão e reflexão conjunta das questões ali presentes. Mesmo essa atividade podendo ser feita em grupo, ao final dessa aula, cada integrante respondeu o seu e o entregou de forma individual.

Assim como nas aulas 2, 4 e 6, após o término da aplicação do QUESTIONÁRIO IV, os 10 min seguintes foram destinados à correção e discussão das respostas esperadas. Os últimos 5 min foram reservados para a aplicação, resolução e recolhimento do QUESTIONÁRIO VI, referente ao *feedback* do(a) aluno(a) sobre o Produto Educacional que ele(a) acabara de participar. Como o QUESTIONÁRIO IV havia sido respondido e recolhido para verificação de aprendizagem, para sua correção foi transmitido, pela televisão conectada, ao *notebook*, um questionário em branco para que todos(as) pudessem aproveitar esse momento. O momento de correção foi, novamente, marcado por muito interesse, ansiedade e interação dos(as) participantes, que demonstraram envolvimento com a atividade e, ainda, compreensão de novos conceitos e aplicações.

### 8.8.1 Do QUESTIONÁRIO IV (APÊNDICE H)

Esse questionário era composto por 10 questões e, após a apreciação das respostas entregues pelos(as) estudantes e a interação dos(as) mesmos(as) durante a correção, pudemos apresentar os resultados referentes a cada uma das perguntas feitas. Sua primeira questão (Questão 1), adaptada da questão elaborada pela Universidade Estadual de Maringá (UEM) - 2012, solicitava que o(a) estudante julgasse corretamente as cinco afirmações sobre a energia mecânica e a conservação de energia e, posteriormente, identificasse a falsa. Nessa questão, 115 participantes (92,7%) conseguiram sucesso, afirmando que a afirmação

incorreta seria: (C) A energia mecânica total de um corpo é conservada, mesmo com a ocorrência de atrito. Os(as) participantes conseguiram entender que a força de atrito pode atuar tanto como força dissipativa (transformando energia mecânica em térmica) ou como força incrementativa (transferindo energia mecânica ao corpo).

A Questão 2, adaptada da questão elaborada pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) - 2013, continha um texto informativo referente a um ônibus de massa  $m$  que andava por uma estrada de montanha e descia uma altura  $h$ , onde o motorista mantinha os freios acionados, de modo que a velocidade era mantida constante em módulo durante todo o trajeto. Em seguida, era solicitado que o(a) participante julgasse corretamente as três afirmações referente à conservação de energia e, posteriormente, identificasse a única alternativa que continha o julgamento corretamente, dentre as cinco apresentadas. Nessa questão, 73,4% dos(as) participantes conseguiram êxito ao responderem que seria em: (B) I - V, II - F, III - V; identificando estar falsa somente a afirmação II, compreendendo que a energia mecânica do sistema diminuiu, pois a energia potencial está diminuindo e a energia cinética é constante.

Na terceira questão (Questão 3), elaborada pelo Centro Federal de Educação e Tecnologia de Minas Gerais (CFTMG) - 2012, apresentava uma situação-problema onde um carrinho era lançado sobre os trilhos de uma montanha russa, no ponto A, com uma velocidade inicial  $V_0$  conforme ilustrado na figura disponível e, ainda, fornecendo os valores das alturas  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$ . Nessa questão, o(a) participante deveria informar/calcular o menor valor de  $V_0$ , em  $m/s$ , para esse carrinho atingir o ponto C, desprezando o atrito e adotando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . 56 participantes (45,2%) conseguiram sucesso ao identificarem que a resposta correta seria: (C) 18. A Questão 4 informava que um motociclista deslocava-se a  $72 \text{ km/h}$  em uma via retilínea, mas que em dado momento, a velocidade foi alterada para  $108 \text{ km/h}$  e, ainda, que a massa do conjunto (moto + motociclista) era de  $350 \text{ kg}$ .

Ainda, na quarta questão, o(a) participante deveria determinar a variação de energia cinética sofrida pelo motociclista, adotando: (i)  $72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$  e (ii)  $108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$ . Como resultado, tivemos que 78 participantes (62,9%) conseguiram sucesso em suas respostas, ao afirmarem ser: (B)  $E_c = 87,5 \text{ kJ} = 87500 \text{ J}$ . Como as questões 3 e 4 exigiam interpretação e cálculo para serem resolvidas, alguns(as) alunos(as) apresentaram dificuldades nesse momento, mas que com a ajuda da equipe/grupo e correção posterior desse questionário, todos(as) compreenderam de forma bem satisfatória. Na Questão 5, elaborada pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), existia a situação onde um goleiro havia chutado uma bola que descreveu um arco de parábola, como ilustrado na figura disponibilizada. No ponto em que a bola atingia a altura máxima, era solicitado que o(a) estudante identificasse a única afirmação correta dentre as cinco apresentadas.

Após apuração das respostas nessa quinta questão, tivemos que 114 participantes

(91,9%) conseguiram êxito, afirmando ser: (A) a energia potencial é máxima. Logo, entenderam que no ponto de altura máxima a energia cinética é mínima e a energia potencial gravitacional é máxima. Na Questão 6 procurou-se, assim como feito na questão nº 25 do QUESTIONÁRIO V (APÊNDICE I), apresentar o conceito de energia e, em seguida, a energia mecânica e suas componentes. Na sequência o(a) participante deveria identificar a única afirmação correta dentre as cinco apresentadas, referente ao princípio da conservação da energia mecânica. Nessa questão, 118 participantes (95,2%) conseguiram sucesso ao afirmarem ser: (C) a energia total de um sistema isolado é constante.

Logo, os(as) participantes conseguiram entender que o princípio de conservação de energia nos diz que em um movimento em que só atuam forças conservativas, a energia mecânica (energia cinética + energia potencial gravitacional + energia potencial elástica) permanece constante. Ou seja, se não houver forças dissipativas, como o atrito, a energia se manterá constante em qualquer ponto do caminho percorrido. Conforme a seguinte figura (Fig. 8.6), percebemos uma elevação de 60,7% na compreensão do princípio da conservação de energia mecânica quando comparado às respostas obtidas na questão nº 24 do QUESTIONÁRIO V (subseção 8.1.1), tal aumento é muito significativo, o que vem a reforçar que o conteúdo abordado no vídeo instrucional vem, realmente, de encontro à aprendizagem significativa dos crítica, uma versão crítica da Teoria da Aprendizagem Significativa proposta por Moreira (2000).

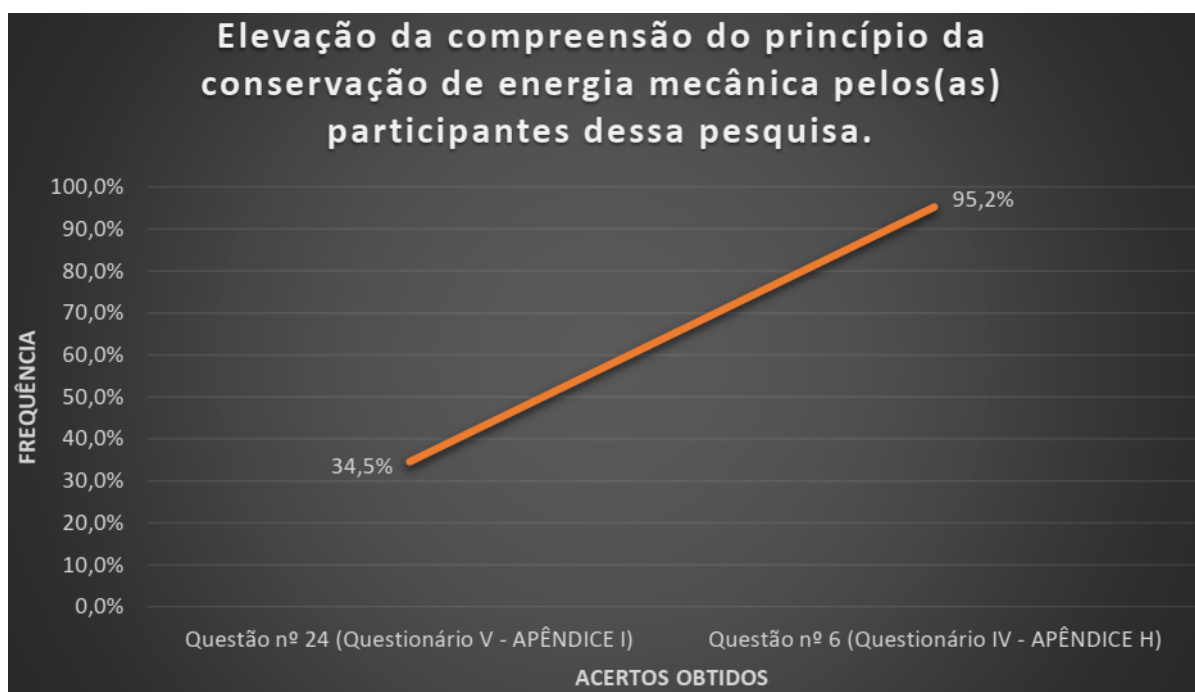


Figura 8.6 – Questão nº 6 (Questionário IV): Elevação da compreensão do princípio da conservação de energia mecânica pelos(as) participantes dessa pesquisa.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A sétima questão (Questão 7), solicitava que o(a) participante identificasse a única afirmação correta dentre cinco disponíveis, a respeito da energia mecânica de um sistema

conservativo. Nessa questão, 120 participantes (96,8%) acertaram ao afirmarem ser: (B) A energia mecânica de um corpo que se move livre da ação de quaisquer forças dissipativas mantém-se constante. Os(as) participantes conseguiram compreender que: (i) na presença de forças dissipativas, a energia mecânica diminui; (ii) caso ocorra aumento da energia cinética, a energia potencial deverá diminuir, para que a energia mecânica permaneça constante; (iii) a energia cinética é a parte da energia mecânica relacionada ao movimento; e, ainda, (iv) a energia cinética sofrerá decréscimos por conta das forças dissipativas.

A oitava questão (Questão 8), elaborada pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR), informava que um sistema de partículas encontrava-se sujeito à ação exclusiva de forças conservativas e, na sequência, solicitava que identificassem qual das cinco afirmações disponíveis, sobre essa situação, estaria correta. 110 participantes (88,7%) conseguiram êxito em suas respostas, ao afirmar ser: (E) a energia mecânica do sistema não varia. Compreendendo que a energia mecânica equivale à soma das energias cinética e potencial de um sistema físico, pois em sistemas conservativos, ou seja, sem atrito, a energia mecânica permanece constante.

A Questão 9, adaptada da questão elaborada pela Fundação Universitária para o Vestibular do estado de São Paulo (Fuvest-SP), informava que uma pedra com massa  $m = 0,10 \text{ kg}$  havia sido lançada verticalmente para cima, com energia cinética  $E_c = 20 \text{ Joules}$ . Em seguida, solicitava a altura máxima atingida pela pedra, adotando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Nessa questão, 87 participantes (70,2%) conseguiram sucesso, ao afirmarem ser: (C) 20 m. Compreendendo que como não foi dada nenhuma informação sobre forças dissipativas, trata-se então de um sistema conservativo e, ainda, que pela Lei da Conservação da Energia, a energia mecânica de um sistema conservativo permanece constante, logo, a energia mecânica no ponto A (solo) tem que ser igual à energia mecânica no ponto B (altura máxima).

Na décima e última questão (Questão 10), adaptada da questão elaborada pelo Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná (Cefet-PR), atualmente Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), informava que uma bola de 200 g de massa havia sido lançada verticalmente para cima, de modo a possuir uma energia cinética de 50 J no instante do lançamento. Considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e desprezando a resistência do ar, era solicitado a velocidade da bola ao atingir a altura de 20 m. Nessa questão, 68,6% (85 participantes) conseguiram obter sucesso em suas respostas, ao afirmarem ser: (B) 10 m/s. Compreenderam que sendo o ponto A como o ponto inicial de lançamento (solo) e o ponto B situado a 20 m do solo, teriam que em A a energia mecânica era somente a energia cinética, pois não possui altura relativa ao solo; enquanto que no ponto B, a energia mecânica seria composta pela energia cinética (pois a bola ainda encontra-se em movimento) e, ainda, pela energia potencial gravitacional (pois encontra-se a 20 m do solo).

### 8.8.2 Do QUESTIONÁRIO VI - *FEEDBACK* DO(A) ALUNO(A) REFERENTE AO PRODUTO EDUCACIONAL (APÊNDICE J)

Após a aplicação, recolhimento e correção do QUESTIONÁRIO IV (APÊNDICE H), foi entregue, nos últimos 5 min da Aula 8, o QUESTIONÁRIO VI (APÊNDICE J), referente ao *feedback* dos(as) alunos(as) em relação ao PE no qual participaram, com a finalidade de verificar sua eficácia e, ainda, poderem deixar algumas contribuições. Nele, pudemos observar, pelas respostas apresentadas nas questões de 1 a 7, que a maioria dos(as) estudantes concordaram plenamente que: (i) o conteúdo foi apresentado de forma clara e objetiva (95,2%); (ii) o conteúdo é aplicável no dia a dia (100,0%); (iii) houve clareza na exposição (88,7%); (iv) houve estímulo à participação dos(as) alunos(as) (96,8%); (v) atendeu minhas expectativas (83,9%); (vi) cumpriu os objetivos propostos (100,0%); e, ainda, (vii) tive um bom nível de aproveitamento (100,0%).

A Questão 8 solicitava que o(a) estudante informasse qual seria a ciência que estuda os fenômenos da natureza, que está muito presente em nosso cotidiano, sendo uma das áreas das Ciências Naturais, que estudava os fenômenos que acontecem com a matéria no decorrer do espaço e do tempo e, ainda, que tratava-se da área do conhecimento responsável pela explicação de fenômenos que relacionam diferentes formas de energia com a matéria. Nessa questão, 110 participantes (88,7%) conseguiram sucesso ao responderem ser: (B) Física. Este resultado mostra que o objetivo (v) dessa pesquisa conseguiu ser atendido de forma satisfatória, pois a maioria dos(as) participantes reconheceram a Física como ciência e compreenderam seu campo de atuação. Texto do objetivo (v): despertar, no(a) estudante do último ano do ensino fundamental, um maior interesse pela disciplina de Física, servindo como um agente motivador, influenciando, de forma positiva, na escolha de prosseguimentos de estudos em áreas científicas.

A nona questão (Questão 9) informava que a simetria não deve estar apenas relacionada à beleza e perfeição, pois seu conceito permeia também as ciências, sendo considerada um conceito-chave na Física, possuindo um papel central nas fronteiras da Física, no Mundo Quântico e na Relatividade, podendo promover uma unificação matemática dos principais campos da Física Moderna, sendo uma ideia básica na atual compreensão científica do Universo e suas origens. Em seguida, foi solicitado que o(a) estudante identificasse a melhor representação do conceito de simetria dentre as cinco afirmações disponibilizadas. Nessa questão, 100,0% dos(as) participantes conseguiram sucesso ao afirmarem ser: (D) é um tipo especial de transformação, uma maneira de mover um objeto e ainda se preservar a estrutura ou alguma característica desse objeto.

A figura a seguir (Fig. 8.7) mostra uma comparação sobre a compreensão do conceito de simetria pelos(as) participantes, demonstrando a evolução na aquisição desse conhecimento, desde o QUESTIONÁRIO V (Questão nº 20 - Avaliação Diagnóstica - APÊNDICE E), tendo seus resultados apresentados na Fig. 8.2, até o QUESTIONÁRIO

I (Questão nº 6 - APÊNDICE I) com resultados disponíveis na Fig. 8.3. A Fig. 8.7 nos mostra que esse PE conseguiu fazer com que se conseguisse atingir os objetivos (iii) e (iv) dessa pesquisa, sendo eles: (iii) oferecer, ao(a) professor(a) de Ciências ou de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, uma proposta de trabalho que aborde a Simetria e Leis de Conservação na Física; (iv) possibilitar, ao estudante dessa fase, um acesso inicial ao ensino de simetria com relação a certas operações de transformações, fazendo com que a aprendizagem se desenvolva de forma interessante e prazerosa.

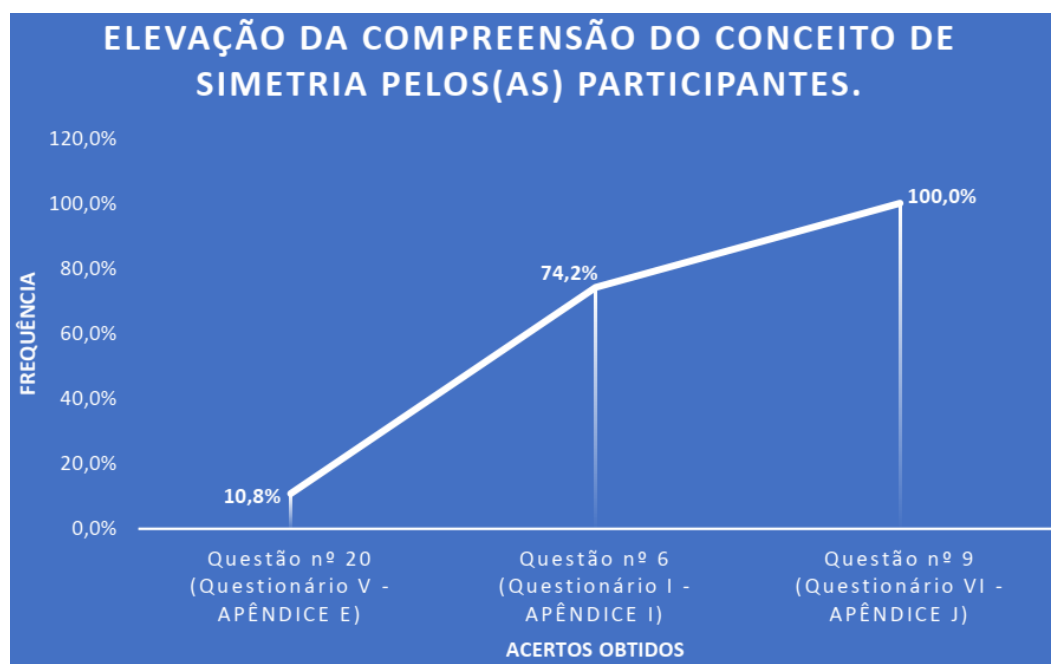


Figura 8.7 – Questão nº 9 (Questionário VI): Elevação da compreensão do conceito de simetria pelos(as) participantes.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

As quatro últimas questões eram discursivas. A Questão 10 informava que realizamos, no decorrer dos nossos encontros, uma sequência de atividades. Em seguida, solicitava o registro de qual(is) dessas atividades foi(foram) a(s) mais interessante(s) e porquê. Em geral, gostaram de: (i) como a SD foi desenvolvida e elogiaram muito os vídeos instrucionais, principalmente por ficarem muito atentos e poderem interagir durante as pausas para comentários e discussões; (ii) contar com a disponibilidade desses vídeos no *Youtube*, pois poderiam rever a aula sempre que necessário; (iii) aprender um pouco sobre os dois grandes importantes cientistas (Galois e Noether), até então desconhecidos por eles(as); (iv) entender sobre Física e seu campo de atuação; (v) aprender que as equações matemáticas também apresentam características de simetria; (vi) aprender sobre as simetrias na natureza e na Física; (vii) estudar sobre energia e a conservação da energia, pois conseguiram entender e desenvolver os cálculos necessários.

Na 11ª questão (Questão 11) o questionamento era sobre os quatro vídeos explicativos que foram produzidos e fizeram parte dessa sequência didática. Perguntados se

gostaram e o motivo, 88,7% (110 participantes) registraram que sim. De um modo geral, os motivos foram que ensinam muita coisa, contendo diversos exemplos, principalmente em relação aos cálculos necessários, esclarecendo as dúvidas e fazendo com que consigam aprender e, ao mesmo tempo, gostar do conteúdo. Alguns relataram que cada vídeo possui muita informação, o que as vezes o torna cansativo e "pesado", mas que mesmo assim gostaram bastante. Inclusive, houve o registro de oito participantes que estavam revendo e estudando esses quatro vídeos a fim de se prepararem para a 2ª fase da Olimpíada Brasileira de Física das Escolas Públicas (OBFEP), agendada para dezembro de 2022. Na Questão 12, deveriam escrever 3 qualidades que considerassem indispensáveis a um(a) bom(oa) professor(a).

A figura a seguir (Fig. 8.8) mostra as sete qualidades que mais foram registradas pelos(as) estudantes. Nela, podemos perceber que as três mais votadas, por ordem de incidência, foram que o(a) professor(a) precisa: (i) saber explicar o conteúdo (21,5%); (ii) gostar de ensinar (17,2%); e (iii) ter paciência (15,9%). Apesar de essas serem atribuições de um(a) professor(a), nem sempre é o que se encontra em sala de aula. Tendo por base o resultado da apuração das respostas nessa questão e conforme discutido tanto por Moreira (2018), quanto por Libâneo (2011), nota-se a importância do(a) professor(a) na aprendizagem do(a) aluno(a). Nesse sentido, o(a) professor(a) deve assumir o ensino como mediação, buscando estratégias para ensinar o(a) estudante a pensar, a aprender e a desenvolver uma perspectiva crítica do conteúdos, tornando a aprendizagem envolvente e prazerosa, por meio da promoção de um ambiente propício a aprendizagem, visando o desenvolvimento de processos cognitivos e consciência crítica e epistemológica.

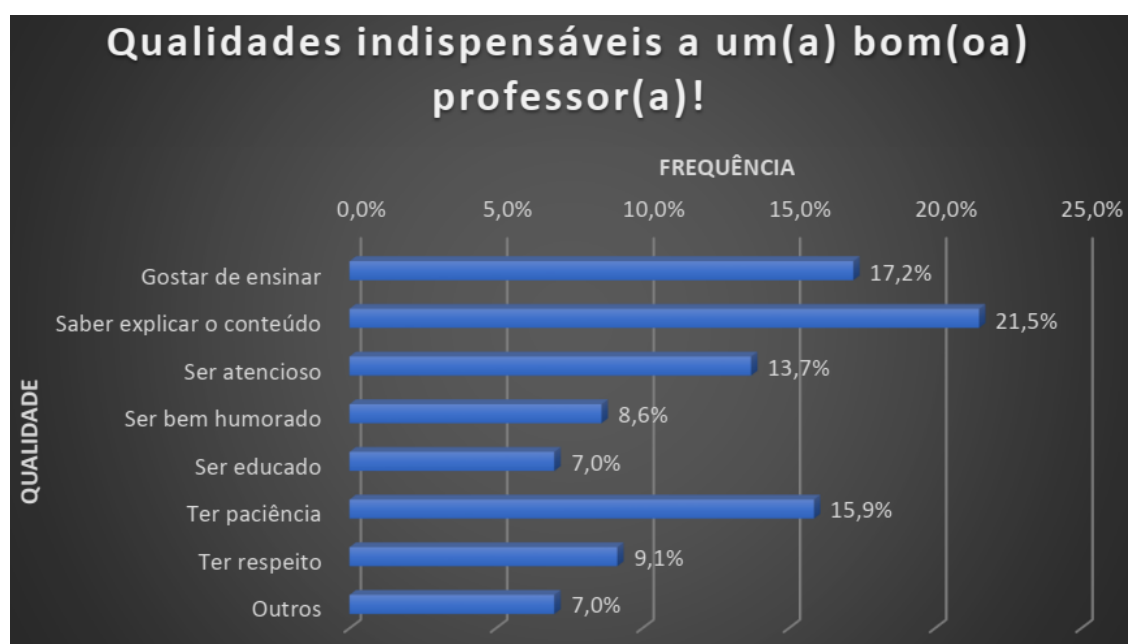
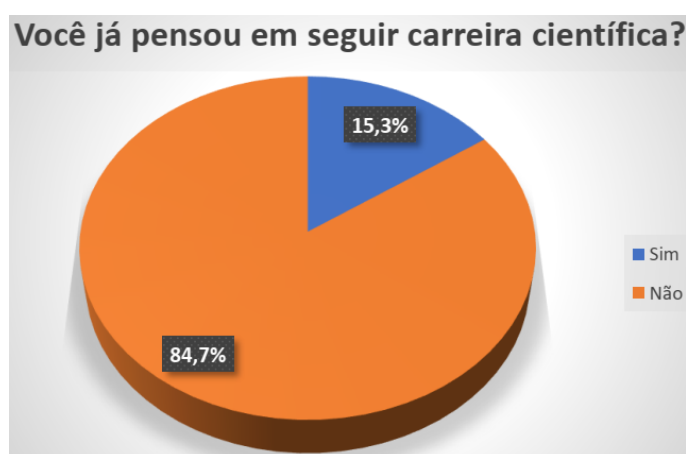


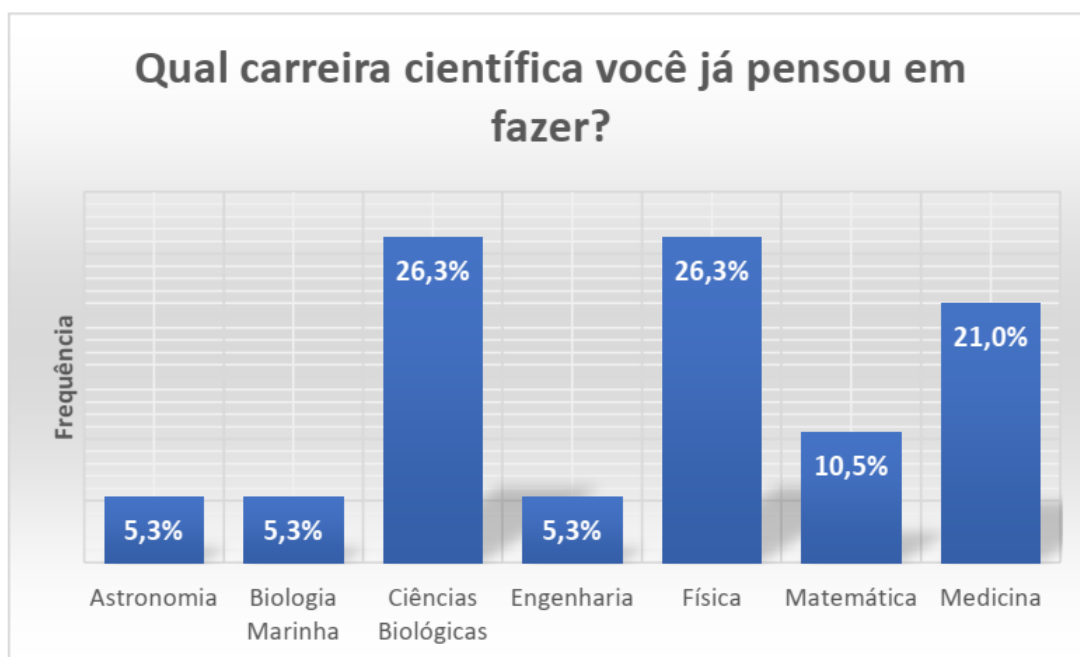
Figura 8.8 – Questão nº 11 (Questionário VI): Qualidades indispensáveis a um(a) bom(oa) professor(a).

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A 13ª e última questão (Questão 13) informava que a profissão de cientista exige uma dedicação na vida em prol de pesquisas, de encontrar soluções para tornar o dia a dia da sociedade mais prático e, ainda, de desenvolver estudos que explicam fenômenos da natureza, comportamento de seres vivos, entre outros assuntos. A área da ciência é uma das mais promissoras e necessárias para o mundo, pois é por meio dela que medicamentos e tratamentos para várias doenças surgem, que formas de viver em sociedade são estudadas e aprimoradas, que aspectos da natureza são compreendidos e que novos dispositivos eletrônicos são criados. Ao final, foi perguntado ao(a) estudante se ele(a) já havia pensado em seguir carreira científica, qual(is) e a justificativa. A figura a seguir (Fig. 8.9) mostra o resultado, após a apuração, das respostas obtidas.



(a) Você já pensou em seguir carreira científica?



(b) Quais?

Figura 8.9 – Questão nº 13 (Questionário VI): (a) Você já pensou em seguir carreira científica? (b) Quais?

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Conforme a Fig. 8.9(a), temos que 84,7% (105 participantes) não pensaram em seguir carreira científica, enquanto que apenas 19 estudantes (15,3%) responderam sim. Dos(as) alunos(as) que já pensaram em seguir carreira científica, a Fig. 8.9(b) nos apresenta quais foram as carreiras científicas citadas. Pode-se perceber que as mais votadas foram Ciências Biológicas e Física, empatadas com 26,3%, seguido de Medicina (21,0%) e Matemática (10,5%). Os(as) alunos(as) do 9º ano do Ensino Fundamental associam Ciências à Biologia, sendo que a compreensão da Física e seu campo de atuação, para a grande maioria, só se concretiza mesmo é no ensino médio. Ter Física como uma das mais votadas, demonstra que esse PE conseguiu atingir o objetivo (*v*) dessa pesquisa: (*v*) despertar, no(a) estudante do último ano do ensino fundamental, um maior interesse pela disciplina de Física, servindo como um agente motivador, influenciando, de forma positiva, na escolha de prosseguimentos de estudos em áreas científicas.

## 8.9 DO QUESTIONÁRIO VII - *FEEDBACK* DO(A) PROFESSOR(A) DE MATEMÁTICA E/OU CIÊNCIAS DE EDUCAÇÃO BÁSICA REFERENTE AO PRODUTO EDUCACIONAL (APÊNDICE K)

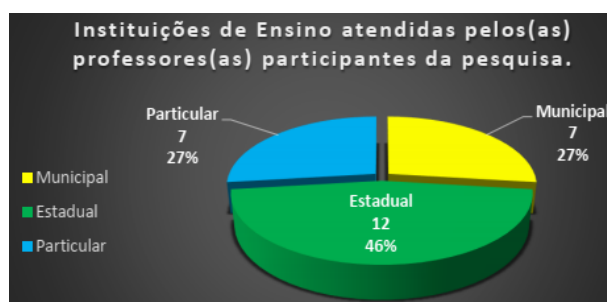
Conforme dito anteriormente (subseção 6.2), a participação dos(as) professores(as) ocorreu de forma não presencial, por meio de um convite enviado para: (*i*) a coordenação pedagógica da Secretaria Municipal de Educação de Caldas Novas - GO; (*ii*) nove grupos específicos da rede social *Facebook* (Física, Física para todos, Ensino de Física, Sou de Exatas, Grupo de Estudos de Matemática, Matemática e Física, Física e Matemática, Grupo de estudos de Ciências Exatas e Ensino de Física - Brasil); (*iii*) os(as) professores(as) das duas instituições onde fora aplicado o PE; e, ainda, (*iv*) o grupo de *WhatsApp* da OBMEP NA ESCOLA, chamado de ONE SP01, onde sou integrante desde 2020. O PE fora disponibilizado por meio do *link* dos arquivos no *Google Drive* e *link* da SD no *Website* Prezi, além da disponibilização do *link* para que esses(as) professores(as) pudessem responder a este QUESTIONÁRIO VII, por meio do *Google Forms*.

Esse questionário foi disponibilizado no dia 04 de outubro e ficou aberto para aceite de respostas até o dia 17 de dezembro de 2021, totalizando 74 dias. Com o término do período de aceite e participação, bem como a finalização da apuração dos dados coletados, pudemos observar que aceitaram e participaram dessa pesquisa um total de 20 professores(as), sendo que: (*i*) homens e mulheres representam a mesma quantidade (50% de cada sexo); (*ii*) apesar de a maioria (40,0%) possuir idade de 30 a 39 anos, nenhum(a) participante possui idade inferior a 30 anos; e, ainda, (*iii*) a maioria (50,0%) declarou ser da cor parda, seguida da branca (40,0%) e havendo empate entre as cores preta e amarela (5,0% cada). A figura a seguir (Fig. 8.10) mostra o resultado, após a apuração das respostas obtidas, da atuação dos(as) professores(as) por rede de ensino (Fig. 8.10)(a), das instituições de ensino atendidas pelos(as) professores(as) participantes da pesquisa

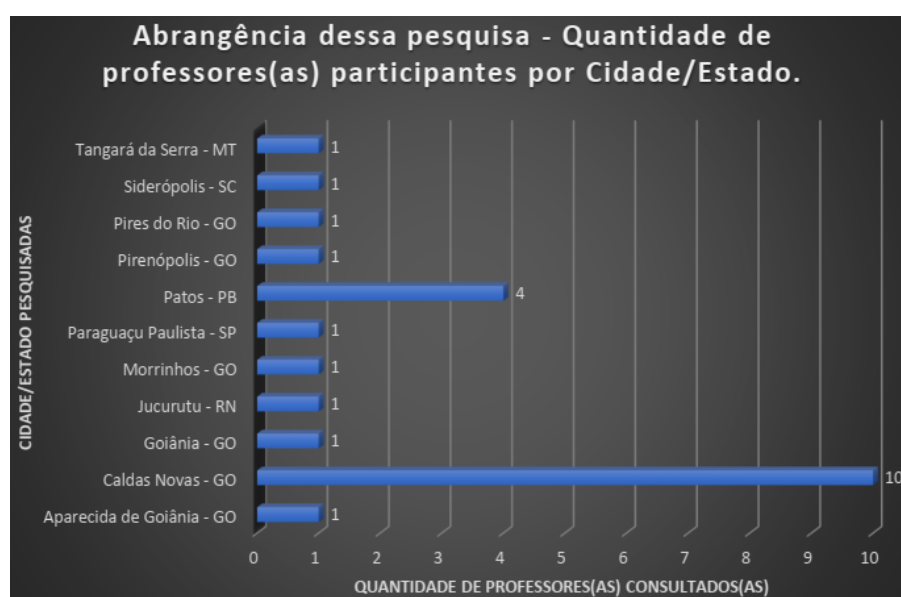
(Fig. 8.10)(b) e, ainda, da abrangência dessa pesquisa - quantidade de professores(as) participantes por Cidade/Estado (Fig. 8.10)(c).



(a) Atuação dos(as) professores(as) por rede de ensino.



(b) Instituições de Ensino atendidas pelos(as) professores(as) participantes da pesquisa.



(c) abrangência dessa pesquisa - quantidade de professores(as) participantes por Cidade/Estado.

Figura 8.10 – Atuação dos(as) professores(as) por rede de ensino, instituições de ensino atendidas e abrangência dessa pesquisa.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Na Fig. 8.10(a) pudemos verificar que a maioria dos(as) professores(as) (40,0%) trabalham exclusivamente na rede estadual de educação, 35,0% exercem sua profissão concomitantemente em duas redes de ensino e que 90,0% atuam em instituições públicas de educação básica. Pela Fig. 8.10(b) notamos que a amostra de professores(as) representam 26 instituições de ensino, sendo que a maioria são estaduais (46,0%), ficando as municipais e particulares com a mesma representatividade (27,0% cada). Já a Fig. 8.10(c) nos informa que ao todo foram abrangidas 11 cidades diferentes, distribuídas em seis estados distintos, sendo que a maioria dos(as) participantes (43,5%) encontra-se na cidade de Caldas Novas - GO, valendo ressaltar que Goiás contou com 65,2% da amostra nacional.

A apuração dos dados, nesse questionário, ainda nos mostrou que dos(as) professores(as) pesquisados(as): (i) a maioria possui licenciatura em Matemática (60,0%), seguida de licenciatura em Ciências Biológicas (20,0%), licenciatura em Física (15,0%) e Pedagogia (5%); (ii) apenas 5,0% obteve sua licenciatura a 2 ou menos anos, sendo que a maioria concluiu de 15 a 20 anos (35,0%), seguidos de 8 a 14 anos (30,0%), de 3 a 7 anos (20,0%) e há mais de 20 anos (10,0%); (iii) 65,0% são especialistas (mínimo de 360 horas), 20,0% são mestres e 15,0% possuem apenas a graduação; (iv) a maioria (45,0%) leciona há mais de 20 anos, 25,0% de 10 a 15 anos, 25,0% de 16 a 20 anos e 5,0% de 6 a 9 anos, evidenciando que nenhum(a) leciona há menos de 6 anos; e, ainda, (v) 55,0% trabalham em duas escolas, 35,0% em apenas uma e os demais (10,0%) trabalham em pelo menos 3 escolas. A Fig. 8.11 nos apresenta um gráfico comparativo sobre qual(is) disciplina(s) ministradas, por esses(as) professores(as), antes do ano de 2021 e em 2021.



Figura 8.11 – Gráfico comparativo sobre quais disciplinas ministradas, pelos(as) professores(as) pesquisados, antes de 2021 e em 2021.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Pelo gráfico anterior (Fig. 8.11), percebe-se que mesmo tendo convidado diversos(as) professores(as) de Ciências da Natureza (Matemática, Física e Química), a maior participação nessa pesquisa veio mesmo dos(as) professores(as) de Matemática e, ainda, que em 2021 essa diferença se elevou, pois 5,0% dos(as) professores(as) de Ciências do Ensino Fundamental e 5,0% dos professores de Química do Ensino Médio não ministraram nenhuma disciplina. Perguntados(as) sobre há quantos anos lecionavam na mesma instituição de ensino, 40,0% registraram ser de 3 a 5 anos, seguidos de 20,0% que afirmaram ser de 10 a 15 anos, empatando com os que marcaram ter mais de 20 anos (20,0%), 15,0% informaram ser de 6 a 9 anos e, finalmente, 5,0% que garantiram ser de 1 a 2 anos.

Quando questionados(as) sobre os materiais instrucionais apresentados, todos(as) (100,0%) responderam que:

- os conteúdos são propostos e abordados, nos quatro vídeos instrucionais, de forma que sejam significativos e funcionais para os(as) alunos(as);
- pode-se inferir que o tema proposto e a transposição didática dos conteúdos apresentados são adequados ao nível de desenvolvimento dos(as) alunos(as) aos quais se destinam;
- as atividades propostas representam um desafio alcançável para o(a) aluno(a), levando em conta suas competências atuais e permitindo que possam avançar com a aprendizagem;
- existem atividades que evoquem um conflito cognitivo e promovam a atividade mental do(a) aluno(a), necessária para que estabeleça relações entre os novos conteúdos e os conhecimentos prévios;
- existem atividades que promovem uma atitude favorável, servindo como agentes motivadores em relação à aprendizagem dos novos conteúdos;
- as atividades propostas estimulam a autoestima e o autoconhecimento em relação às aprendizagens que se propõem, fazendo com que o(a) aluno(a) sinta que aprendeu e que seu esforço foi recompensado;
- esse material instrucional ajuda o(a) aluno(a) a adquirir habilidades que lhe permitam ser cada vez mais autônomo(a) em suas aprendizagens;
- essa sequência didática, juntamente com os quatro vídeos instrucionais criados e disponibilizados, contribuem, de forma significativa, para o seu desenvolvimento profissional e/ou para o exercício de sua profissão, enquanto professor(a).

Na penúltima pergunta (Questão nº 20), o(a) participante deveria avaliar o seu grau de satisfação com esse material instrucional, dentre três opções (ótimo, bom e regular);

resultando em 85,0% atribuindo grau máximo (ótimo) e 15,0% avaliando como bom. A última questão (Questão nº 21) destinou-se ao espaço para maiores considerações como: críticas, comentários ou sugestões para melhorar a qualidade do trabalho. A Fig. 8.12 nos apresenta as respostas obtidas.

21.  
20 respostas

Trabalho com ótima qualidade.

Gostei

Excelente trabalho!

Bom Trabalho!

Excelente material

Parabéns professor! Excelente trabalho, de grande relevância às abordagens. Aguardo a publicação.

Antes de mais nada, parabéns pela organização em todos os sentidos: desde a sequência pelo grau de dificuldade quanto a escolha das atividades. Imagens muito bem trabalhadas e construídas. Acredito que além de divertido será muito proveitoso para nossos alunos! Parabéns.

Sem comentários adicionais.

Muito bom o questionário. Parabéns!

Cursos para qualificação na área de matemática

O material apresentado é muito bem elaborado e de extrema valia aos professores, como facilitador do ensino aprendizagem no ensino da disciplina.

O trabalho está muito adequado. Possui diversas situações que agregam a aprendizagem de tal conteúdo. Excelente.

Excelente trabalho

BEM ORGANIZADO

Parabéns pelo trabalho de relevância contribuição no processo de ensino aprendizagem!

Em algumas questões deste formulário poderia haver a possibilidade de assinalar mais de uma opção. Por exemplo, leciono matemática no fundamental e no EM e ciências no fundamental.

Assisti aos vídeos produzidos e achei fantástica a abordagem, o conteúdo, a forma didática como foi feito.

Parabéns pelo material produzido. Com certeza utilizarei em minhas aulas.

Nada a declarar

Ótimo trabalho, que vai servir de instrumento para muitos profissionais que buscam novos métodos de ensino ou abordagem de determinado conteúdo.

Parabéns! Pela maneira como foi exposto o conteúdo apresentado, prazerosa leitura, faz com que tenhamos gosto em assistir os vídeos e possamos assim responder os questionários propostos.

O áudio tem q ser melhorado, pois há eco dando uma sonoridade desconfortável.

Figura 8.12 – Considerações finais dos(as) professores(as) participantes.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Conforme a Fig. 8.12, podemos perceber que esse PE atendeu às expectativas, agradando significativamente os(as) professores(as) participantes. Em uma das respostas, houve até um pedido para que se ofereça mais cursos de qualificação na área de matemática, mesmo não sendo esta a proposta oferecida; o que deve ter ocorrido, provavelmente, pela aprovação do material apresentado e interesse em prosseguimentos de estudos e aprimoramentos futuros. Ocorreu apenas uma reclamação quanto a ecos em determinados momentos do áudio nos vídeos iniciais, mas que foram corrigido nos vídeos posteriores, enquanto se avançava nas gravações e se obtinha mais experiência em lidar com o *software* de gravação utilizado, o *TechSmith Camtasia 2020*. Tal reclamação do eco no áudio, provavelmente, justifica os 15,0% que avaliaram o grau de satisfação apenas como bom, vistos na questão n<sup>o</sup> 20.

## 9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na presente dissertação encontra-se um vasto referencial teórico, um produto educacional (PE), o relato da descrição, a discussão e as análises de todas as atividades desenvolvidas nessa pesquisa. Como o trabalho foi sobre simetrias na natureza e as leis de conservação na Física, procurou-se disponibilizar, aos(as) professores(as) de Ciências da Natureza e\ou de Matemática da educação básica e, até mesmo, para demais pesquisadores que tenham interesse, um significativo referencial teórico, associado à produção de quatro vídeos instrucionais criados a partir dessa pesquisa e, ainda, uma sequência didática (SD) já alinhada às competências gerais e específicas da BNCC, bem como às habilidades solicitadas pelo nosso DC-GO, para que esses(as) profissionais tenham um material disponibilizado, com todo um amparo pedagógico, e, assim, possam inserir em suas práticas pedagógicas ou rotinas acadêmicas.

Percebe-se, da SD, que as atividades propostas conseguiram proporcionar interações entre os(as) estudantes, tanto de forma individual, quanto no desenvolvimento em grupo, promovendo: (i) discussões significativas, elevando a aprendizagem; (ii) uma maior aproximação com o ambiente científico por meio da construção de argumentos; (iii) o surgimento de potencialidades entre eles(as); (iv) o estímulo do raciocínio; (v) o desenvolvimento do senso crítico; e, ainda, (vi) um maior interesse e gosto pela área científica, especialmente pela Física. A programação sugerida pela própria SD se mostrou muito eficaz, sendo: (i) orientações iniciais; (ii) vídeo instrucional sobre o assunto da aula; (iii) pausas durante a passagem do vídeo para discutir conceitos relevantes; (iv) revisão de conteúdo antes da entrega do questionário; (v) aplicação do questionário; (vi) possibilidade de resolverem de forma individual ou em grupos\equipes; (vii) recolhimento dos questionários para verificação da aprendizagem; e, finalmente, (viii) correção do questionário após seu recolhimento. Entretanto cabe ao(a) professor(a) que se interessar em reproduzir nossa SD, a necessidade de moldá-la à sua realidade.

Enquanto respondiam aos questionários, os(as) estudantes puderam interagir e externalizar seus conhecimentos prévios a respeito dos conceitos\assuntos relevantes para o tema em que se fazia necessário, tanto para interpretação, quanto para resolução das situações-problemas apresentadas, contribuindo para o processo de uma aprendizagem significativa crítica, onde a apresentação dos subsunçores provenientes de sua experiência vivida no ambiente escolar e no dia a dia, bem como dos conhecimentos adquiridos devido aos vídeos instrucionais, de tal forma incorporados e disponíveis na estrutura cognitiva de cada indivíduo, se tornaram importante não apenas para facilitar novas aprendizagens, mas também para determinar respostas às demandas necessárias. Vale ressaltar que o processo de ensino-aprendizagem de Ciências da Natureza é essencial para que o(a) estudante possa analisar crítica e plenamente a realidade do mundo em que vive.

Quanto aos(as) professores(as) de Ciências da Natureza e Matemática, que aceitaram o convite e participaram dessa pesquisa: (i) são licenciados e com significativa experiência profissional devido ao tempo de serviço informado e instituições em que atuam; (ii) todos(as) aprovaram com o melhor grau de avaliação, os materiais instrucionais apresentados; (iii) demonstraram satisfação com esse material instrucional disponibilizado; e, ainda, (iv) a maioria irá inseri-los em suas práticas pedagógicas. É importante ressaltar que essa pesquisa também evidenciou, durante as observações e anotações no diário de campo, que muitos(as) professores(as) farão uso desse material, inclusive, para se aprimorar, devido a alguma limitação que existe quanto ao assunto a ser trabalhando, seja na parte conceitual ou mesmo na parte de cálculos necessários, visando facilitar sua vida profissional, ensinando-o(a) ou sugerindo que façam uso de estratégias adequadas para promoção do ensino-aprendizagem.

Desta forma foi possível perceber que produtos educacionais, como o produzido nessa pesquisa, podem representar um caminho muito promissor, principalmente no ensino de Ciências da Natureza, pois a tecnologia aproxima e, em muitos casos, até democratiza esse ensino, possibilitando um melhor acesso ao conhecimento, desmistificando muitos fenômenos e, assim, fazendo com que a aprendizagem se desenvolva de forma interessante e prazerosa, despertando um maior interesse pela disciplina de Física e, ainda, servindo como um agente motivador, influenciando, de forma positiva, na escolha de prosseguimentos de estudos em áreas científicas. Assim, torna-se importante que o(a) docente incorpore, em suas práticas pedagógicas, as tecnologias de informação e comunicação, bem como aspectos epistemológicos, históricos, sociais e culturais.

Também é necessário que se tenha mais atenção ao conceito de simetria na Física, seja pelo ensino ou pela divulgação, pois esse conceito está associado à existência das leis de conservação, sendo que a física moderna admite, entre outras, as seguintes leis de conservação (para as quais nunca se observou uma violação): (i) lei da conservação de energia (invariância temporal); (ii) lei da conservação do momento linear (invariância linear); (iii) lei da conservação do momento angular (invariância rotacional); e, ainda, (iv) lei da conservação de carga elétrica (invariância de gauge). Como sugestão de trabalhos futuros, o(a) professor(a) pode fazer novas transposições didáticas para as séries finais da educação básica, almejando dar prosseguimento ao PE apresentado nessa pesquisa, procurando evidenciar cada vez mais o teorema de Noether e sua importância na Física. Vale, ainda, sugerir a ampliação da atuação dessa SD, inserindo a simetria de autossimilaridade dos fractais e a teoria de grupos e grupos de simetria, assim como evidenciados no referencial teórico dessa pesquisa, mas não sendo disponibilizados na SD devido a inviabilidade ocasionada pelo pouco tempo de duração do mestrado.

## REFERÊNCIAS

- [1] AGUIAR, Marcus Aloizio Martinez de. *Tópicos de Mecânica Clássica*. Instituto de Física (IF) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), São Paulo, 2019. Disponível em: <<https://sites.ifi.unicamp.br/aguiar/files/2014/10/top-mec-clas.pdf>>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [2] AMARAL, Felipe Filgueira. *Estudo de aglomerados obtidos com seda de teias de aranha*. Orientador: Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes. 2012. 71 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2012. Disponível em: <<https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/20010/1/2012-Dissertacao-FelipeAmaral.pdf>>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [3] ANTUNES, Camila A.; GALHARDI, Vinícius B.; HERNASKI, Carlos A. *As leis de Newton e a estrutura Espaço-temporal da Mecânica Clássica*. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 40, nº 3, e3311 (2018). Disponível em: <<https://www.scielo.br/pdf/rbef/v40n3/1806-9126-RBEF-40-3-e3311.pdf>>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [4] AREAS, Roberta; BARBOSA, Marcia C.; SANTANA, Ademir E. *Teorema de Emmy Nöther, 100 anos: Alegoria da Misoginia em Ciência*. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 41, nº 4, e20190017, 2019. Disponível em: <[https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1806-11172019000400406](https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172019000400406)>. Acesso em: 20 ago. 2020.
- [5] ASSIS, Thiago Albuquerque *et al.* *Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais*. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 30, nº 2, 2304, 2008. Disponível em: <[http://www.fecilcam.br/nupem/anais\\_iv\\_epct/PDF/ciencias\\_exatas/10\\_FUZZO\\_REZENDE\\_SANTOS.pdf](http://www.fecilcam.br/nupem/anais_iv_epct/PDF/ciencias_exatas/10_FUZZO_REZENDE_SANTOS.pdf)>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [6] AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. *Psicologia educacional*. 2 ed., Rio de Janeiro: Interamericana. 625p, 1980.
- [7] BARBOSA, Mateus Bruno. *Análise de caminhadas de Lévy em trajetórias curvas 2D*. Orientador: Prof. Dr. Madras Viswanathan Gandhi Mohan. 2016. 109 f. Tese (Doutorado em Física) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, 2017. Disponível em: <[https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/23513/1/MateusBrunoBarbosa\\_TESE.pdf](https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/23513/1/MateusBrunoBarbosa_TESE.pdf)>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [8] BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrendo a Geometria Fractal para a Sala de Aula*. Coleção Tendências em Educação Matemática. Autêntica Editora, 3ª ed. 2007.

- [9] BARROS, Vitor Fernandes de. *Aplicação de Curvas Fractais em Elementos Convolucionados para o Projeto de FSS Miniaturizada e com Estabilidade Angular*. Orientador: Prof. Dr. Sandro Gonçalves da Silva. Coorientador: Prof. Dr. Antonio Luis Pereira de Siqueira Campos. 2017. 113 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica e de Computação) - Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2017. Disponível em: <<https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/23951>>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [10] BASSALO, José Maria Filardo; CATTANI, Mauro Sérgio Dorsa. *Teoria de Grupos*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008.
- [11] BAUER, Wolfgang; WESTFALL, Gary D.; DIAS, Helio. *Física para Universitários: Mecânica*. Tradução de Iuri Duquia Abrel e Manuel Almeida Andrade Neto; revisão técnica de Hélio Dias. Porto Alegre : AMGH, 2012. xxvi, 458 p.
- [12] BÉRTI, Gustavo Camargo. *CURVAS DESCRITAS MECANICAMENTE E GEOGEBRA: UMA PROPOSTA DESTINADA AO ENSINO MÉDIO*. Orientador: Prof. Dr. Edson Sidney Figueiredo. 2015. 134 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Centro de Ciências Naturais e Exatas, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, 2015. Disponível em: <<https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/10943/BERTI%2c%20GUSTAVO%20CAMARGO.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [13] BONFIM, Danilo Mattos; CASTRO, Leandro Nunes de. *SÍNTESE COMPUTACIONAL DE FENÔMENOS NATURAIS: GEOMETRIA FRACTAL E VIDA ARTIFICIAL*. **Cadernos de História da Ciência**, Instituto Butantã, v. 2, pp. 77-100, 2006. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/261295714\\_SINTESE\\_COMPUTACIONAL\\_DE\\_FENOMENOS\\_NATURAIS\\_GEOMETRIA\\_FRACTAL\\_E\\_VIDA\\_ARTIFICIAL\\_PARTE\\_2\\_SINTESE\\_DE\\_FORMAS](https://www.researchgate.net/publication/261295714_SINTESE_COMPUTACIONAL_DE_FENOMENOS_NATURAIS_GEOMETRIA_FRACTAL_E_VIDA_ARTIFICIAL_PARTE_2_SINTESE_DE_FORMAS)>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [14] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF, 2018. Disponível em: <[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf)>. Acesso em: 20 mar. 2021.
- [15] BRUM, Wanderley Pivatto. *APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA: REVISÃO TEÓRICA E APRESENTAÇÃO DE UM INSTRUMENTO PARA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA*. **Revista Itinerarius Reflectionis**, v. 9, n. 2, Universidade Federal de Jataí, Goiás, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.5216/rir.v2i15.27795>>. Acesso em: 07 fev. 2021.
- [16] BRUSCA, Richard C.; BRUSCA, Gary J. *Invertebrados*. 2. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2007.

- [17] CASTRO, Márcio Tavares de. *Processos estocásticos e equações de difusão: uma abordagem via o formalismo de Paul Lévy para funções características*. Orientador: Prof. Annibal Dias de Figueiredo Neto. 2013. xiii, 116 f. Tese (Doutorado em Física) - Instituto de Física, Universidade de Brasília, Brasília, 2013. Disponível em: <<https://repositorio.unb.br/handle/10482/14737>>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [18] CHAVES, Diego Romeira Cigaran. *A Matemática é uma Arte: Uma proposta de explorando ligações entre arte e matemática*. Orientadora: Profa. Dra. Marilaine de Fraga Sant'ana. 2013. 46 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <<https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/23721>>. Acesso em: 25 ago. 2020.
- [19] CONEP. Comissão Nacional de Ética em Pesquisa. *ORIENTAÇÕES PARA PROCEDIMENTOS EM PESQUISAS COM QUALQUER ETAPA EM AMBIENTE VIRTUAL*. Brasília, DF, 2021. Disponível em: <[https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1059/o/SEI\\_MS\\_-\\_Comunicado\\_2021.pdf?1614339243](https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1059/o/SEI_MS_-_Comunicado_2021.pdf?1614339243)>. Acesso em: 05 jul. 2021.
- [20] DALPIAZ, Marcos Roberto. *UM ESTUDO SOBRE FRACTAIS: ORIGEM E PROPOSTA DIDÁTICA PARA APLICAÇÃO EM AULA*. Orientador: Márcio Rostirolla Adames. 2016. 72 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016. Disponível em: <[http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/2698/1/CT\\_PROFMAT\\_M\\_Dalpiazz%2C%20Marcos%20Roberto\\_2016.pdf](http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/2698/1/CT_PROFMAT_M_Dalpiazz%2C%20Marcos%20Roberto_2016.pdf)>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [21] DIANA, Daniela. *Homem Vitruviano*. **TodaMatéria**, Artes, 27 nov. 2018. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/homem-vitruviano/>>. Acesso em: 24 ago. 2020.
- [22] DOM, Everton Em. *Emmy Noether*. **Instituto de Física - Universidade Federal da Bahia**, 24 mar. 2019. Disponível em: <<http://www.fis.ufba.br/emmy-noether>>. Acesso em: 25 ago. 2020.
- [23] EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução de: Hygino H. Domingues. 5ª ed. - Campinas. São Paulo: Editora Unicamp, 2011.
- [24] FAZZIO, Adalberto; WATARI, Kazunori. *Introdução à teoria de grupos aplicada em moléculas e sólidos*. 2. ed.. Santa Maria: Ed. da UFSM, 2009.
- [25] FONSECA NETO, Sebastião Nogueira da. *Educar pela pesquisa: as percepções de alunos de graduação sobre as temáticas energia e sustentabilidade em um curso*

- de extensão*. Orientador: Prof. Dr. João Manoel da Silva Malheiro. Coorientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Nádia Magalhães da Silva Freitas. 2015. 107 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém, 2015. Disponível em: <<http://repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/8576>>. Acesso em: 07 jan. 2021.
- [26] FONSECA, J. J. S. *Metodologia da pesquisa científica*. Fortaleza: UEC, 2012. Apostila.
- [27] FRANCO, Giullya. *Isaac Newton*. **Brasil Escola**, [2020]. Disponível em: <<https://brasilecola.uol.com.br/fisica/um-fisico-chamado-isaac-newton.htm>>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [28] FREITAS, Sérgio Paulo Ribeiro de. *Da “Grande Teoria da Beleza”: harmonia como ordem, proporção, número e medida objetiva*. **Revista Música Hodie**, v. 12, n. 1, 10 dez. 2012. Disponível em: <<https://www.revistas.ufg.br/musica/article/view/21548/12655>>. Acesso em: 11 ago. 2020.
- [29] GNIPPER, Patrícia. *Mulheres Históricas: Emmy Noether, a “mais importante da história da matemática”*. **Canaltech**, 08 set. 2016. Disponível em: <<https://canaltech.com.br/internet/mulheres-historicas-emmy-noether-a-mais-importante-da-historia-da-matematica-79463/>>. Acesso em: 23 ago. 2020.
- [30] GOIÁS. Secretaria Estadual de Educação. *Documento Curricular de Goiás - Ampliado*, V.3 - Ensino Fundamental - anos finais, Goiânia: SEDUC; CONSED; UNDIME, 2020. Disponível em: <<https://cee.go.gov.br/wp-content/uploads/2016/02/Doc.-Curricular-para-Goias-Ampliado-Vol.-II.pdf>>. Acesso em: 20 mar. 2021.
- [31] HENRIQUES, Marcos Vinícius Cândido. *Ondaletas e movimento browniano fracionário: aplicação à caracterização de poços de petróleo*. Orientador: Liacir dos Santos Lucena. 2008. 92 f. Dissertação (Mestrado em Física da Matéria Condensada; Astrofísica e Cosmologia; Física da Ionosfera) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2008. Disponível em: <<https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/16545/1/MarcosVCH.pdf>>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [32] HORNES, Andréia; GALLERA, Joscely Maria Bassetto; SILVA, Sani de Carvalho Rutz da. *A Aprendizagem Significativa no Ensino de Física*. **I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia**, ISBN: 978-85-7014-048-7, 2009. Publicada nos Anais desse Encontro, pp. 488-502. Disponível em: <[http://www.sinect.com.br/anais2009/artigos/7%20Ensinodefisica/Ensinodefisica\\_Artigo1.pdf](http://www.sinect.com.br/anais2009/artigos/7%20Ensinodefisica/Ensinodefisica_Artigo1.pdf)>. Acesso em: 05 jan. 2021.

- [33] JESUS, Rafael Tereso de; AMORIM, Geraldo Gomes de. *Uma Proposta de Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para Ensinar Física de Partículas por meio de Jogos de Cartas*. **Revista do Professor de Física**, v. 3, n. 1, p. 47-84, Instituto de Física - Universidade de Brasília, Brasília, 2019. Disponível em: <file:///C:/Users/Pessoal/Desktop/22573-Texto%20do%20artigo-45869-1-10-20190417.pdf>. Acesso em: 08 jan. 2021.
- [34] LEÃO, Salviano A. *Notas de Aulas: Mecânica Clássica*. Instituto de Física (IF) da Universidade Federal de Goiás (UFG), Goiânia, [2003]. Disponível em: <https://www.docsity.com/pt/mecanica-classica-45/4780997/>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [35] LIMA, Tiago Aécio Grangeiro de Souza Barbosa. *Estudos de eficiência em buscas aleatórias unidimensionais*. Orientador: Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo. 2010. 80 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Departamento de Física - CCEN, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/16645>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [36] LUDKE, M.; ANDRÉ, E. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: Epu, 2007.
- [37] MANDELBROT, Benoît B. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman and Company, 1982.
- [38] MARCOLIN, Neldson. *Obsessões Algébricas: Há 200 anos nasce Évariste Galois, criador da teoria de grupos e figura trágica da história da ciência*. **Revista da Pesquisa FAPESP**, ed. 186, ago. 2011. Disponível em: <https://revistapesquisa.fapesp.br/obsess%C3%B5es-alg%C3%A9bricas/>. Acesso em: 14 maio 2020.
- [39] MARTINS, Adriano de Souza. *Simetrias e Leis de Conservação na Mecânica Clássica*. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 21, nº 1, Março, 1999. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v21\_33.pdf>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [40] MARTINS, Simone. *O HOMEM VITRUVIANO, LEONARDO DA VINCI*. **História das Artes**, 19 nov. 2017. Disponível em: <https://www.historiadasartes.com/sala-dos-professores/o-homem-vitruviano-leonardo-da-vinci/>. Acesso em: 24 ago. 2020.
- [41] MASINI, Elcie F. Salzano. *Aprendizagem significativa: condições para ocorrência e lacunas que levam a comprometimentos*. **Aprendizagem Significativa em Revista/Meaningful Learning Review**, V1(1), pp. 16-24, São Paulo, Brasil, 2011. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo\_ID2/v1\_n1\_a2011.pdf>. Acesso em: 08 jan. 2021.

- [42] MÉDICE JÚNIOR, Fábio. *Fractais: motivando a Matemática no ensino médio*. Orientador: Duilio Tadeu da Conceição Junior. 2014. 67 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2014. Disponível em: <<https://tede.ufrrj.br/jspui/handle/jspui/3071>>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [43] MELLO, Hilton Andrade de. *GEOMETRIA NAS ARTES*. 2010. Disponível em: <[http://www.hamello.com/PDF/livro\\_pt.pdf](http://www.hamello.com/PDF/livro_pt.pdf)>. Acesso em: 27 ago. 2020.
- [44] MENDONÇA, Fernando Antônio Cavalcante. *Aplicações da Geometria Fractal: uma proposta didática para o Ensino Médio*. Orientador: Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra. 2016. 158 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2016. Disponível em: <[http://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/2412/1/Aplica%C3%A7%C3%B5es%20da%20geometria%20fractal\\_%20uma%20proposta%20did%C3%A1tica%20para%20o%20ensino%20m%C3%A9dio.pdf](http://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/2412/1/Aplica%C3%A7%C3%B5es%20da%20geometria%20fractal_%20uma%20proposta%20did%C3%A1tica%20para%20o%20ensino%20m%C3%A9dio.pdf)>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [45] MOREIRA, Marco Antonio. *Aprendizagem significativa crítica*. **Conferência proferida no III Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa**, Peniche, Lisboa, 11 a 15 de setembro de 2000. Publicada nas Atas desse Encontro, pp. 33-45, com o título original de *Aprendizagem significativa subversiva*. Disponível em: <<https://www.if.ufrgs.br/~moreira/apsigcritport.pdf>>. Acesso em: 04 jan. 2021.
- [46] MOREIRA, Marco Antonio. *APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA, CAMPOS CONCEITUAIS E PEDAGOGIA DA AUTONOMIA: IMPLICAÇÕES PARA O ENSINO*. **Periódico Aprendizagem Significativa em Revista** - Publicado em espanhol, 2(1): 44-65, (2012). Disponível em: <[http://educonse.com.br/ixcoloquio/Artigo\\_Aprendizagem.pdf](http://educonse.com.br/ixcoloquio/Artigo_Aprendizagem.pdf)>. Acesso em: 09 jan. 2021.
- [47] MOREIRA, Marco Antonio. *Aprendizaje significativo crítico*. **Indivisa**, Boletín de Estudios e Investigación, México, n. 6, p. 83-101, 2005. Disponível em: <<https://www.if.ufrgs.br/~moreira/apsigcritport.pdf>>. Acesso em: 15 jan. 2021.
- [48] MOREIRA, Marco Antonio. *O conceito de simetria na Física*. **Revista do Professor de Física**, v. 3, n. 2, p. 1-8, Brasília, 2019. Disponível em: <<https://periodicos.unb.br/index.php/rpf/article/view/26849/23373>>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [49] MOREIRA, Marco Antonio. *Uma análise crítica do ensino de Física*. **SciELO Brasil**, Estud. Av., vol. 32, nº 94, São Paulo, set./dez. (2018). Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/s0103-40142018.3294.0006>>. Acesso em: 03 jan. 2021.

- [50] MOTTA-ROTH, G. R. H. D. *Produção textual na universidade*. 1ª ed. São Paulo, SP: Parábola, 2010.
- [51] MUCHERONI, Laís Fernandes. *Dimensão de Hausdorff e algumas aplicações*. Orientadora: Profª. Drª. Alice Kimie Miwa Libardi. Coorientadora: Profª. Drª. Tatiana Miguel Rodrigues de Souza. 2017. 61 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2017. Disponível em: <[https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/151653/mucheroni\\_lf\\_me\\_rcla.pdf?sequence=3&isAllowed=y](https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/151653/mucheroni_lf_me_rcla.pdf?sequence=3&isAllowed=y)>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [52] MUSEU DO AMANHÃ. *A BELEZA ESCONDIDA DA MATEMÁTICA*. **Museu do Amanhã**, Rio de Janeiro, Brasil, 2018. Disponível em: <[https://artsandculture.google.com/exhibit/\\_wJyHxByw1SoIw?hl=pt-BR](https://artsandculture.google.com/exhibit/_wJyHxByw1SoIw?hl=pt-BR)>. Acesso em: 10 set. 2020.
- [53] NADAI, Nathália De. *Celebrando Emmy Noether: a mulher que quebrou regras e foi estudar matemática*. **CIÊNCIAS PELOS OLHOS DELAS - UNICAMP**, 12 dez. 2019. Disponível em: <<https://www.blogs.unicamp.br/cienciapelosolhosdelas/2019/12/12/celebrando-emmy-noether-a-mulher-que-quebrou-regras-e-foi-estudar-matematica/>>. Acesso em: 27 ago. 2020.
- [54] NASSER, Lilian; SOUSA, Geneci A. de; PEREIRA, José Alexandre. *EXPLORANDO A GEOMETRIA DO ENSINO FUNDAMENTAL POR MEIO DE REFLEXÕES, TRANSLAÇÕES E ROTAÇÕES*. **VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2004. Disponível em: <<http://sbem.com.br/files/viii/pdf/02/MC03386978703.pdf>>. Acesso em: 15 set. 2020.
- [55] NOETHER, E. *Invariance Variationsproblem*. Nachr. D. Kronig. Gesellsch. Akad. D. Wissensch, zu Göttingen, Math-Phys. Klasse II, S.235-257, 1918.
- [56] NUSSENZVEIG, H. M. (Organizador). *Complexidade e Caos*. Rio de Janeiro : Editora UFRJ/COPEA, 1999.
- [57] OLIVEIRA, Gelson Manzonni de. *Simetria de moléculas e cristais : fundamentos da espectroscopia vibracional*. Porto Alegre : Bookman, 2009.
- [58] OLIVEIRA, Genilton José Cavalcante de. *Ensaio Fractais à Luz do Ensino Médio*. Orientador: Gregório Manoel da Silva Neto. 2016. 145 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2016. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/6205/1/Ensaio%20Fractais%20c3%a0%20Luz%20do%20Ensino%20M%20c3%a9dio.pdf>>. Acesso em: 28 set. 2020.

- [59] OLIVEIRA, Maria Marly. *Sequência didática interativa no processo de formação de professores*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.
- [60] PASQUINI, Regina Célia Guapo; BORTOLOSSI, Humberto José. *O QUE É SIMETRIA? DIFERENTES USOS DA PALAVRA AO LONGO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA*. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 3, n. 9, p. 6-17, 1 jun. 2018. Disponível em: <<https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/50/41>>. Acesso em: 12 set. 2020.
- [61] PEREIRA, Alceu Sergio. *Fractais circulares: algumas considerações e atividades*. Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Luci Harue Fatori. 2013. 82 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013. Disponível em: <[https://sca.profmat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=27745](https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=27745)>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [62] PESSA, Arthur Augusto Barizon. *Leis de conservação nas mecânicas newtoniana e lagrangiana e uma introdução ao Teorema de Noether*. Orientador: Prof. Dr. César Canesin Colucci. 2017. 63 f. Monografia (Bacharelado em Física) - Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2017. Disponível em: <<http://site.dfi.uem.br/wp-content/uploads/2018/01/TCC-Bacharelado-Arthur-Augusto-Barizon-Pessa.pdf>>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [63] PIMENTEL, Spensy. *Simetria: lógica na natureza*. **SUPER INTERESSANTE - Ciência**, atualizada em 31 out. 2016, publicado em 14 nov. 1999. Disponível em: <<https://super.abril.com.br/ciencia/simetria-logica-na-natureza/>>. Acesso em: 28 set. 2019.
- [64] PLANETA. *Hubble mostra galáxia incrivelmente simétrica*. **Revista Planeta**, 10 maio 2020. Disponível em: <<https://www.revistaplaneta.com.br/hubble-mostra-galaxia-incrivelmente-simetrica/>>. Acesso em: 10 set. 2020.
- [65] PORTO, Claudio Maia; PORTO, Maria Beatriz Dias da Silva Maia. *Uma visão do espaço na mecânica newtoniana e na teoria da relatividade de Einstein*. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 30, nº 1, 1603 (2008). Disponível em: <<https://www.scielo.br/pdf/rbef/v30n1/a17v30n1.pdf>>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [66] RABAY, Yara Silvia Freire. *ESTUDO E APLICAÇÕES DA GEOMETRIA FRAC-TAL*. Orientador: Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza. 2013. 101 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Centro

- de Ciências Exatas e da Natureza (CCEN - UFPB) da Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013. Disponível em: <<https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/7651/2/arquivototal.pdf>>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [67] RIBEIRO, Marco Antonio da Silva. *Transformações Geométricas Planas: um Estudo Experimental e Dinâmico*. Orientadora: Profa. Dra. Ana Paula Jahn. 2016. 233 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016. Disponível em: <[https://www.ime.usp.br/images/arquivos/pos/posmpemat/marco\\_ana.pdf](https://www.ime.usp.br/images/arquivos/pos/posmpemat/marco_ana.pdf)>. Acesso em: 12 set. 2020.
- [68] ROHDE, G. *Simetria*. São Paulo: Hemus, 1982.
- [69] ROSA, Carlos Augusto de Proença. *História da Ciência: A Ciência Moderna*. Lisboa, Portugal: Gradativa, 1989. 2. ed. - Brasília: FUNAG, 2012.
- [70] ROSA, Paulo Ricardo da Silva. *O uso dos recursos audiovisuais e o ensino de ciências*. Cad. Cat. Ens. Fís., v. 17, n. 1: p. 33-49, abr. 2000. Disponível em: <<file:///C:/Users/Pessoal/Desktop/Dialnet-0UsoDosRecursosAudiovisuaisE0EnsinoDeCiencias-5165491.pdf>>. Acesso em: 06 jan. 2022.
- [71] SANTOS, Marcia Boiko dos. *A geometria na arquitetura: uma abordagem dos estilos arquitetônicos da antiguidade clássica, do renascimento e da modernidade*. Orientador: Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco. 2013. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, Belo Horizonte, 2013. Disponível em: <<http://repositorio.uem.br:8080/jspui/handle/1/4372>>. Acesso em: 11 jul. 2020.
- [72] SCHMIDT, Sarai. *Em pauta: a aliança mídia e educação*. **UNirevista**, v. 1, nº 3, julho, 2006. Disponível em: <<file:///C:/Users/Pessoal/Desktop/Dialnet-0UsoDosRecursosAudiovisuaisE0EnsinoDeCiencias-5165491.pdf>>. Acesso em: 20 dez. 2021.
- [73] SILVA, Allyson de Sousa Alexandre da. *O ensino de Física na educação básica como motivação a determinação da aceleração gravitacional*. Orientador: Prof. Dr. Nildo Loiola Dias. 2018. 119 f. Dissertação (Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física) - Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/35878>>. Acesso em: 04 jan. 2021.
- [74] SILVA, Joelma Maria da; MASSARANDUBA, Dayane Marques da Silva; DUARTE, Vânia de Moura Barbosa. *HOMEM DE VITRUVIUS - PROPORÇÃO ÁUREA*

- NO ENSINO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS. ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática*, São Paulo - SP, 13 a 16 jul. 2016. Disponível em: <[http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/7219\\_3760\\_ID.pdf](http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/7219_3760_ID.pdf)>. Acesso em: 24 ago. 2020.
- [75] SILVA, Josemy Brito da. *FRACTAL – A GEOMETRIA DA NATUREZA APLICADA NO ENSINO MÉDIO NO ENSINO DE FÍSICA*. Orientador: Prof. Dr. Sergio Roberto de Paulo. 2016. 63 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais) - Instituto de Física da Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2016. Disponível em: <[https://fisica.ufmt.br/pgecn/index.php/dissertacoes-e-produtos-educacionais/banco-de-dissertacoes/doc\\_download/217-josemy-brito-da-silva](https://fisica.ufmt.br/pgecn/index.php/dissertacoes-e-produtos-educacionais/banco-de-dissertacoes/doc_download/217-josemy-brito-da-silva)>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [76] SILVA, R. R. P. G.; CORAZZA, M. J. O. R. *A criação de insetos como recurso didático nas series iniciais do Ensino Fundamental. VI EPCT - ENCONTRO DE PRODUÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA*, 2011, Campo Mourão. Anais [...]. Campo Mourão: Faculdade Estadual de Ciências e Letras, 2011. Disponível em: <[http://www.fecilcam.br/nupem/anais\\_vi\\_epct/PDF/ciencias\\_humanas/01.pdf](http://www.fecilcam.br/nupem/anais_vi_epct/PDF/ciencias_humanas/01.pdf)>. Acesso em: 03 jan. 2021.
- [77] SILVEIRA, Eliane Fraga da; GALLAS, Moisés. *Zoologia dos Invertebrados I*. Organizado pela Universidade Luterana do Brasil - ULBRA, Canoas, Rio Grande do Sul, 2017. Disponível em: <<https://www.passeidireto.com/arquivo/78976163/zoologia-de-invertebrados-i>>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [78] SOUZA, Daniel Kaminski de. *Estimação de Parâmetros por Busca de Cuco via voos de Lévy*. Orientador: Prof. Gideon Villar Leandro. Coorientador: Prof. Gustavo Henrique da Costa Oliveira. 2014. 100 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014. Disponível em: <<https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/37084>>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [79] STEWART, Ian. *Uma história da simetria na matemática*. Tradução de: Why beauty is truth: a history of simmetry, por Claudio Carina; Revisão técnica Samuel Jurkiewicz. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- [80] STRUIK, D. J. *História concisa das matemáticas*. Lisboa, Portugal: Gradativa, 1989.
- [81] TAVARES, Romero. *Aprendizagem significativa e o ensino de ciências*. **Revista Científica: Ciências & Cognição**, Vol 13 (1): 94-100, 2008. Disponível em: <<http://pepsic.bvsalud.org/pdf/cc/v13n1/v13n1a10.pdf>>. Acesso em: 04 jan. 2021.
- [82] VILLAR, Alessandro S. *Notas de Aula de Mecânica Clássica*. Departamento de Física (DF) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), 2015. Disponível em: <<http://>>

[//fep.if.usp.br/~villar/2015mecanica1/mecclassica.pdf](http://fep.if.usp.br/~villar/2015mecanica1/mecclassica.pdf)>. Acesso em: 28 set. 2020.

- [83] WEYL, H. *Simetria*. Trad. Victor Baranauskas - São Paulo: Edusp, 1997.
- [84] YARTEY, Joseph Nee Anyah. *Álgebra II*. - Salvador: UFBA, Instituto de Matemática e Estatística; Superintendência de Educação a Distância, 2017. 244p. : il. Disponível em: <[https://repositorio.ufba.br/ri/bitstream/ri/25396/1/eBook\\_Algebra\\_II-Licenciatura\\_Matematica\\_UFBA.pdf](https://repositorio.ufba.br/ri/bitstream/ri/25396/1/eBook_Algebra_II-Licenciatura_Matematica_UFBA.pdf)>. Acesso em: 20 out. 2020.
- [85] YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A; FORD, A. Lewis (Colab.). *Sears e Zemansky : Física I : Mecânica : Young & Freedman*. Tradução de Sonia Midori Yamamoto; revisão técnica de Adir Moysés Luiz. 12. ed. São Paulo : Addison Wesley, 2008. xviii, 403 p., 12.ed. v.1. Título original: *Sears and Zemansky's university physics*.
- [86] ZABALA, Antoni. *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 1998.
- [87] ZANOTTO, Ricardo Anselmo. *Estudo da geometria fractal clássica*. Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Luciana Aparecida Elias. 2015. 67 f. Dissertação (PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Goiás - Regional de Jataí, Jataí, 2015. Disponível em: <<http://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/6058>>. Acesso em: 15 set. 2020.

# APÊNDICE A – ORIENTAÇÕES PARA PROCEDIMENTOS EM PESQUISAS COM QUALQUER ETAPA EM AMBIENTE VIRTUAL

26/02/2021

SEI/MS - 0019229966 - Comunicado



Ministério da Saúde  
Secretaria-Executiva do Conselho Nacional de Saúde  
Comissão Nacional de Ética em Pesquisa

## ORIENTAÇÕES PARA PROCEDIMENTOS EM PESQUISAS COM QUALQUER ETAPA EM AMBIENTE VIRTUAL

Brasília, 24 de fevereiro de 2021.

A Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (Conep) orienta pesquisadores e Comitês de Ética em Pesquisa em relação a procedimentos que envolvam o contato com participantes e/ou coleta de dados em qualquer etapa da pesquisa, em ambiente virtual. Tais medidas visam preservar a proteção, segurança e os direitos dos participantes de pesquisa.

Estas orientações quando aplicadas aos participantes de pesquisa em situação de vulnerabilidade devem estar em conformidade com as Resoluções do Conselho Nacional de Saúde – CNS – nº 466 de 2012 e a de nº 510 de 2016.

Entende-se por:

- 0.1. Meio ou ambiente virtual: aquele que envolve a utilização da internet (como e-mails, sites eletrônicos, formulários disponibilizados por programas, etc.), do telefone (ligação de áudio, de vídeo, uso de aplicativos de chamadas, etc.), assim como outros programas e aplicativos que utilizam esses meios.
- 0.2. Forma não presencial: contato realizado por meio ou ambiente virtual, inclusive telefônico, não envolvendo a presença física do pesquisador e do participante de pesquisa.
- 0.3. Dados pessoais: informação relacionada à pessoa natural identificada ou identificável (artigo 5º da Lei Geral de Proteção de Dados – LGPD – nº 13.709, de 14 de agosto de 2018), tais como números de documentos, de prontuário, etc.
- 0.4. Dados pessoais sensíveis - dados sobre origem racial ou étnica, religião, opinião política, filiação a sindicato ou a organização de caráter religioso, filosófico ou político, dado referente à saúde ou a vida sexual, dado genético ou biométrico, quando vinculado a uma pessoa natural (artigo 5º da LGPD nº 13.709, de 14 de agosto de 2018).

Nesse sentido, aplicam-se as seguintes orientações nas pesquisas com seres humanos que envolvam essas ferramentas:

**1. EM RELAÇÃO À SUBMISSÃO DO PROTOCOLO AO SISTEMA CEP/CONEP:**

- 1.1. O pesquisador deverá apresentar na metodologia do projeto de pesquisa a explicação de todas as etapas/fases não presenciais do estudo, enviando, inclusive, os modelos de formulários, termos e outros documentos que serão apresentados ao candidato a participante de pesquisa e aos participantes de pesquisa.
- 1.2. O pesquisador deverá descrever e justificar o procedimento a ser adotado para a obtenção do consentimento livre e esclarecido, bem como, o formato de registro ou assinatura do termo que será utilizado.
  - 1.2.1. Caberá ao pesquisador destacar, além dos riscos e benefícios relacionados com a participação na pesquisa, aqueles riscos característicos do ambiente virtual, meios eletrônicos, ou atividades não presenciais, em função das limitações das tecnologias utilizadas. Adicionalmente, devem ser informadas as limitações dos pesquisadores para assegurar total confidencialidade e potencial risco de sua violação.
- 1.3. Quando os Registros de Consentimento Livre e Esclarecido / Termos de Consentimento Livre e Esclarecido forem documentais, devem ser apresentados, preferencialmente, na mesma formatação utilizada para visualização dos participantes da pesquisa.

**2. EM RELAÇÃO AOS PROCEDIMENTOS QUE ENVOLVEM CONTATO ATRAVÉS DE MEIO VIRTUAL OU TELEFÔNICOS COM OS POSSÍVEIS PARTICIPANTES DE PESQUISA:**

- 2.1. O convite para participação na pesquisa não deve ser feito com a utilização de listas que permitam a identificação dos convidados nem a visualização dos seus dados de contato (e-mail, telefone, etc) por terceiros.
  - 2.1.1. Qualquer convite individual enviado por e-mail só poderá ter um remetente e um destinatário, ou ser enviado na forma de lista oculta.
  - 2.1.2. Qualquer convite individual deve esclarecer ao candidato a participantes de pesquisa, que antes de responder às perguntas do pesquisador disponibilizadas em ambiente não presencial ou virtual (questionário/formulário ou entrevista), será apresentado o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (ou Termo de Assentimento, quando for o caso) para a sua anuência.
- 2.2. Quando a coleta de dados ocorrer em ambiente virtual (com uso de programas para coleta ou registro de dados, e-mail, entre outros), na modalidade de consentimento (Registro ou TCLE), o pesquisador deve enfatizar a importância do participante de pesquisa guardar em seus arquivos uma cópia do documento eletrônico.
  - 2.2.1. Deve-se garantir ao participante de pesquisa o direito de não responder qualquer questão, sem necessidade de explicação ou justificativa para tal, podendo também se retirar da pesquisa a qualquer momento.
  - 2.2.2. Caso tenha pergunta obrigatória deve constar no TCLE o direito do participante de não responder a pergunta.
  - 2.2.3. Deve-se garantir ao participante de pesquisa o direito de acesso ao teor do conteúdo do instrumento (tópicos que serão abordados) antes de responder as perguntas, para uma tomada de decisão informada.

- 2.2.4. O participante de pesquisa terá acesso às perguntas somente depois que tenha dado o seu consentimento.
- 2.3. Quando a pesquisa em ambiente virtual envolver a participação de menores de 18 anos, o primeiro contato para consentimento deve ser com os pais e/ou responsáveis, e a partir da concordância, deverá se buscar o assentimento do menor de idade.
- 2.4. Caberá ao pesquisador responsável conhecer a política de privacidade da ferramenta utilizada quanto a coleta de informações pessoais, mesmo que por meio de robôs, e o risco de compartilhamento dessas informações com parceiros comerciais para oferta de produtos e serviços de maneira a assegurar os aspectos éticos.
- 2.5. Deve ficar claro ao participante da pesquisa, no convite, que o consentimento será previamente apresentado e, caso, concorde em participar, será considerado anuência quando responder ao questionário/formulário ou entrevista da pesquisa.
- 2.5.1. Ficam excetuados os processos de consentimento previstos no Art. 4º da Resolução CNS nº 510 de 2016.
- 2.6. Caberá ao pesquisador explicar como serão assumidos os custos diretos e indiretos da pesquisa, quando a mesma se der exclusivamente com a utilização de ferramentas eletrônicas sem custo para o seu uso ou já de propriedade do mesmo.

### 3. COM RELAÇÃO À SEGURANÇA NA TRANSFERÊNCIA E NO ARMAZENAMENTO DOS DADOS:

- 3.1. É da responsabilidade do pesquisador o armazenamento adequado dos dados coletados, bem como os procedimentos para assegurar o sigilo e a confidencialidade das informações do participante da pesquisa.
- 3.2. Uma vez concluída a coleta de dados, é recomendado ao pesquisador responsável fazer o *download* dos dados coletados para um dispositivo eletrônico local, apagando todo e qualquer registro de qualquer plataforma virtual, ambiente compartilhado ou "nuvem".
- 3.3. O mesmo cuidado deverá ser seguido para os registros de consentimento livre e esclarecido que sejam gravações de vídeo ou áudio. É recomendado ao pesquisador responsável fazer o *download* dos dados, não sendo indicado a sua manutenção em qualquer plataforma virtual, ambiente compartilhado ou "nuvem".
- 3.4. Em consonância ao disposto na Resolução CNS nº 510 de 2016, artigo 9 inciso V), para os participantes de pesquisas que utilizem metodologias próprias das Ciências Humanas e Sociais, deve haver a manifestação expressa de sua concordância ou não quanto à divulgação de sua identidade e das demais informações coletadas.

### 4. QUANTO AO CONTEÚDO DOS DOCUMENTOS TRAMITADOS:

- 4.1. Os documentos em formato eletrônico relacionados à obtenção do consentimento devem apresentar todas as informações necessárias para o adequado esclarecimento do participante, com as garantias e direitos previstos nas Resoluções CNS nº 466 de 2012 e 510 de 2016 e, de acordo com as particularidades da pesquisa.

26/02/2021

SEI/MS - 0019229966 - Comunicado

- 4.2. O convite para a participação na pesquisa deverá conter, obrigatoriamente, *link* para endereço eletrônico ou texto com as devidas instruções de envio, que informem ser possível, a qualquer momento e sem nenhum prejuízo, a retirada do consentimento de utilização dos dados do participante da pesquisa. Nessas situações, o pesquisador responsável fica obrigado a enviar ao participante de pesquisa, a resposta de ciência do interesse do participante de pesquisa retirar seu consentimento
- 4.3. Nos casos em que não for possível a identificação do questionário do participante, o pesquisador deverá esclarecer a impossibilidade de exclusão dos dados da pesquisa durante o processo de registro / consentimento.
- 4.4. Durante o processo de consentimento, o pesquisador deverá esclarecer o participante de maneira clara e objetiva, como se dará o registro de seu consentimento para participar da pesquisa.
- 4.5. Quando a pesquisa na área biomédica exigir necessariamente a presença do participante de pesquisa junto à equipe, o TCLE deverá ser obtido na sua forma física, de acordo com o previsto na Resolução CNS nº 466 de 2012, item IV.5.d. Esse consentimento deverá ser obtido ainda que o participante de pesquisa já tenha registrado o seu consentimento de forma eletrônica em etapa anterior da pesquisa. Os casos não contemplados neste documento, conflitantes ou ainda não previstos nas resoluções disponíveis, serão avaliados pelos colegiados do Sistema CEP/Conep.

JORGE ALVES DE ALMEIDA VENANCIO  
Coordenador da Comissão Nacional de Ética em Pesquisa



Documento assinado eletronicamente por **Jorge Venâncio, Administrador(a)**, em 24/02/2021, às 18:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#); e art. 8º, da [Portaria nº 900 de 31 de Março de 2017](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.saude.gov.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.saude.gov.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0019229966** e o código CRC **0523ABC3**.

Referência: Processo nº 25000.026908/2021-15

SEI nº 0019229966

Comissão Nacional de Ética em Pesquisa - CONEP  
SRTV 701, Via W 5 Norte, lote D Edifício PO 700, 3º andar - Bairro Asa Norte, Brasília/DF, CEP 70719-040  
Site - [saude.gov.br](http://saude.gov.br)

## APÊNDICE B – RESOLUÇÃO CEE/CP Nº 18/2020

Secretaria-Geral  
da Governadoria



ESTADO DE GOIÁS  
SECRETARIA-GERAL DA GOVERNADORIA  
COORDENAÇÃO DO CONSELHO PLENO

### RESOLUÇÃO CEE/CP Nº 18, DE 06 DE NOVEMBRO DE 2020.

Autoriza as instituições do Sistema Educativo do Estado de Goiás a adotarem o regime especial de aulas não presenciais e dá outras providências.

**O CONSELHO ESTADUAL DE EDUCAÇÃO DE GOIÁS**, no uso de suas atribuições legais e regimentais, especialmente a do Art. 14, inciso VII, da Lei Complementar n. 26/98, ao deliberar sobre o Processo n. 202018037002244,

#### RESOLVE:

**Art. 1º** - Autorizar as instituições jurisdicionadas ao Sistema Educativo do Estado de Goiás a adotarem o Regime Especial de Aulas não Presenciais e/ou presenciais mediadas por tecnologia – REANP para o ano letivo de 2021, enquanto durarem as medidas de isolamento social impostas pela pandemia.

**Art. 2º** - A presente Resolução entra em vigor na data de sua aprovação.

**Flávio Roberto de Castro – Presidente**  
**Marcos Elias Moreira – Vice-Presidente**  
Brandina Fátima Mendonça de Castro Andrade  
Eduardo de Oliveira Silva  
Eduardo Mendes Reed  
Eduardo Vieira Mesquita  
Elcivan Gonçalves França  
Eliana Maria França Carneiro  
Gláucia Maria Teodoro Reis  
Guaraci Silva Martins Gidrão  
Izekson José da Silva  
Jaime Ricardo Ferreira  
Jorge de Jesus Bernardo  
José Leopoldo da Veiga Jardim Filho  
José Teodoro Coelho  
Júlia Lemos Vieira  
Luciana Barbosa Cândido Carniello  
Manoel Barbosa dos Santos Neto

Márcia Rocha de Souza Antunes  
Maria do Rosário Cassimiro  
Maria Ester Galvão de Carvalho  
Maria Euzébia de Lima  
Orestes dos Reis Souto  
Raflton Nascimento Souza  
Sebastião Lázaro Pereira

**PRESIDÊNCIA DO CONSELHO ESTADUAL DE EDUCAÇÃO DE GOIÁS**, em Goiânia, aos 06 dias do mês de novembro de 2020.



Documento assinado eletronicamente por **FLAVIO ROBERTO DE CASTRO, Presidente do Conselho**, em 06/11/2020, às 22:25, conforme art. 2º, § 2º, III, "b", da Lei 17.039/2010 e art. 3ºB, I, do Decreto nº 8.808/2016.



A autenticidade do documento pode ser conferida no site [http://sei.go.gov.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=1](http://sei.go.gov.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=1) informando o código verificador **000016393819** e o código CRC **CCAA7F6E**.

COORDENAÇÃO DO CONSELHO PLENO  
RUA 23 63 - Bairro SETOR CENTRAL - CEP 74015-120 - GOIANIA - GO - S/C (62)3201-9821



Referência: Processo nº 202018037002244



SEI 000016393819

## APÊNDICE C – DECRETO MUNICIPAL Nº 1329/2021



Decreto Municipal nº. 1.329/2021

Caldas Novas, 14 de Junho de 2021.

***“Dispõe sobre a retomada das aulas nas escolas públicas no âmbito do Município de Caldas Novas.”***

O **PREFEITO DE CALDAS NOVAS**, no uso de suas atribuições legais previstas na Lei Orgânica do Município Caldas Novas; o disposto na Lei Federal nº 13.979, de 6 de fevereiro de 2020 e Lei Complementar 173/2020; e

### CONSIDERANDO:

- a retomada das atividades essenciais no âmbito do Município de Caldas Novas-GO.
- que as escolas particulares no âmbito da municipalidade retomaram suas atividades, com 50% (cinquenta) por cento, na modalidade híbrida.
- observada a isonomia entre os alunos da rede particular e pública, que deve pautar o tratamento da administração aos administrados.
- que os dados epidemiológicos demonstram que é possível permitir flexibilizações em relação a algumas atividades;
- a Portaria nº 188/GM/MS, de 4 de fevereiro de 2020, que declara a Emergência em Saúde Pública de Importância Nacional (ESPIN) pelo Ministério da Saúde, em decorrência da Infecção causada pelo novo Coronavírus;

### DECRETA:

**Art. 1º.** Reconhece que a Educação e a Atividade de Ensino são de natureza essencial.

**Art. 2º.** Autoriza e determina, expressamente, a retomada das aulas nas escolas públicas municipais, na modalidade híbrida, a partir do primeiro dia do segundo semestre letivo, com a observância, nos seguintes percentuais:

- I. 12,5% (doze e meio) por cento, no dia 02 de Agosto de 2021;
- II. 25,5% (vinte e cinco) por cento, no dia 09 de Agosto de 2021;
- III. 37,5% (trinta e sete meio) por cento, no dia 26 de Agosto de 2021;
- IV. 50% (cinquenta) por cento, no dia 23 de Agosto de 2021.





**Art. 3º.** As creches (CMEIS) e pré-escola deverão iniciar suas atividades no dia 02 de Agosto de 2021, com 50% (cinquenta por cento), na modalidade híbrida, a ser publicada, via portaria, mediante critérios técnicos da Secretaria Municipal de Educação.

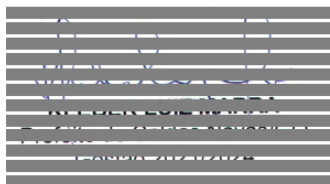
I. Os critérios técnicos também serão adotados nas escolas públicas municipais.

**Art. 4º.** Que a Secretaria Municipal de Saúde, na campanha de imunização continuará a cargo de referida Secretaria e da Central de Imunização e Rede de Frio, com determinação expressa de cumprimento integral do Plano Nacional de Imunização, sob pena de responsabilização pessoal daquele que não atender as exigências contidas em referido plano.

**Art. 5º.** Revogam-se as disposições em contrário previstas em decretos anteriores.

**Art. 6º.** Registra-se, cumpra-se, publique-se.

**GABINETE DO PREFEITO DE CALDAS NOVAS, ESTADO DE GOIÁS**, aos quatorze dias do mês de Junho do ano de dois mil e vinte e um (14/06/2021).



**APÊNDICE D – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E  
ESCLARECIDO - TCLE (PROFESSORES(AS))**



Universidade Federal de Goiás  
Unidade Acadêmica Especial de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Polo 02: UFG - Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão

**TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TCLE  
(PROFESSORES(AS))**

Você/Sr./Sra. (ou o/a seu filho/filha) está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), da pesquisa intitulada “**SIMETRIAS NA NATUREZA E LEIS DE CONSERVAÇÃO NA FÍSICA: abordagens relevantes e significativas para o 9º ano do ensino fundamental**”. Meu nome é **José Neto de Oliveira**, sou discente do **Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física**, na Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, orientado pela **Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ana Rita Pereira**, serei o pesquisador responsável por essa pesquisa e minha área de atuação é a Educação Básica. Após receber os esclarecimentos e as informações a seguir, se você aceitar fazer parte do estudo, assine ao final deste documento, que está impresso em duas vias, sendo que uma delas é sua e a outra pertence ao pesquisador responsável. Esclareço que em caso de recusa na participação você não será penalizado(a) de forma alguma. Mas se aceitar participar, as dúvidas *sobre a pesquisa* poderão ser esclarecidas pelo pesquisador responsável, via e-mail (**profnetomatfis@gmail.com**) e, inclusive, sob forma de ligação a cobrar, através do seguinte contato telefônico: (64) 9 9221 5554. Ao persistirem as dúvidas *sobre os seus direitos* como participante desta pesquisa, você também poderá fazer contato com o **Comitê de Ética em Pesquisa** da Universidade Federal de Goiás, pelo telefone (64) 3441-7609.

**1. Informações Importantes sobre a Pesquisa**

**1.1 Título**

SIMETRIAS NA NATUREZA E LEIS DE CONSERVAÇÃO NA FÍSICA: abordagens relevantes e significativas para o 9º ano do ensino fundamental

## 1.2 Justificativa

Apesar da simetria possuir um papel fundamental no entendimento das leis de conservação na Física, seu ensino não faz parte do currículo escolar da educação básica e raramente é abordado nos anos iniciais dos cursos superiores de ciências exatas. Para um estudante da educação básica, não é evidente que além dos objetos, também as equações matemáticas e as leis da natureza possam apresentar característica de simetria com relação a certas transformações. Com isso, essa pesquisa visa a aplicação e confirmação ou não da eficácia de uma sequência didática sobre Simetria e Leis de Conservação na Física, tratando-se de meu produto educacional composto tanto da sequência didática, seus questionários e, ainda, dois vídeos produzidos referentes a explicação desses conteúdos.

## 1.3 Objetivos

- Oferecer, ao professor de Ciências ou de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, uma proposta de trabalho que aborde a Simetria e Leis de Conservação na Física;
- Possibilitar, ao estudante dessa fase, um acesso inicial ao ensino de simetria com relação a certas transformações, fazendo com que a aprendizagem se desenvolva de forma interessante e prazerosa;
- Despertar, no(a) estudante do último ano do ensino fundamental, um maior interesse pela disciplina de Física, servindo como um agente motivador, influenciando, de forma positiva, na escolha de prosseguimentos de estudos em áreas científicas.

## 1.4 Procedimentos utilizados da pesquisa ou descrição detalhada dos métodos

Essa proposta de pesquisa apresenta um produto educacional (PE) em forma de sequência didática (SD), com duração de 5 horas-aulas de 50 min, totalizando 250 min, que permitirá, ao(a) estudante do 9º ano do Ensino Fundamental, um estudo e compreensão de que tanto as equações matemáticas como as leis da natureza podem apresentar características de simetrias com relação a certas transformações. A abordagem educacional pautou-se na Teoria da Aprendizagem Significativa Crítica, de Marco Antônio Moreira, uma perspectiva antropológica em relação às atividades de seu grupo social, na qual aprendizagem significativa dos conteúdos é indispensável, pois não tem sentido ser crítico de conhecimentos sem significado.

Esse PE é composto da SD, cinco questionários e dois vídeos explicativos de conteúdo, com duração aproximada de 34 min cada um deles. O primeiro vídeo (Vídeo 1 - Contexto Histórico, Évariste Galois e Emmy Noether) é usado tanto para se entender o contexto histórico da simetria, cujo início data-se por volta de 9000 anos AEC, quanto

para se enfatizar dois importantes personagens que tanto contribuíram para nossos conhecimentos de hoje: (1) Évariste Galois e a Teoria de Grupos e (2) Emmy Noether e seu Teorema que liga as Leis de Conservação com as Simetrias. No segundo vídeo (Vídeo 2 - Simetrias na Natureza e Simetrias na Matemática), é apresentando tanto as Simetrias na Natureza (esférica, radial e bilateral), quanto as Simetrias na Matemática (translação, rotação, reflexão e reflexão transladada).

Devido a essa incerteza quanto ao retorno das aulas presenciais, associado a ainda estarmos vivendo um período atípico devido à pandemia em virtude do novo coronavírus, bem como pensando no bem estar e na segurança de todos os envolvidos na aplicação do produto educacional, recorro as orientações para procedimentos em pesquisas com qualquer epata em ambiente virtual, disponibilizada pela Comissão Nacional de Ética em Pesquisa, em 24 de fevereiro de 2021, disponível em: [https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1059/o/SEI\\_MS\\_-\\_Comunicado\\_2021.pdf?1614339243](https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1059/o/SEI_MS_-_Comunicado_2021.pdf?1614339243).

Desse modo, desenvolverei a aplicação do PE em horários pré-estabelecidos com as devidas coordenações pedagógicas de cada instituição de ensino, acordado com os(as) participantes da pesquisa. Para que o produto seja aplicado de forma eficaz, farei uso de três ferramentas digitais: *WhatsApp* para a inserção de todos os participantes num grupo específico e a comunicação imediata entre os envolvidos, *Google Meet* para as aulas e *Google Forms* para aplicação dos questionários e coleta dos dados.

Por fim, estimo que de cada instituição de ensino ter-se-á um grupo de aproximadamente 15 alunos(as) participantes. Quanto aos(as) docentes, estimo a participação de quatro professores(as) de Matemática e quatro professores(as) de Ciências, da última série do Ensino Fundamental, para que se possa ter um parecer, na visão deles(as), quanto à significância desse material. É importante ressaltar que a intervenção em sala de aula somente ocorrerá após o consentimento dos alunos e/ou responsáveis.

### 1.5 Informações Gerais

É garantido a liberdade do(a) participante de se recusar a responder questões que lhe causem desconforto emocional e/ou constrangimento em entrevistas e questionários que forem aplicados na pesquisa. Do mesmo modo fica garantido, ao participante, o direito de negar a divulgação dos dados obtidos, em caso de não haver conforto em permitir a utilização desses.

A participação é voluntária e não obrigatória, não havendo nenhum tipo de pagamento ou gratificação financeira pela participação dos sujeitos. Todas as despesas referentes ao processo serão custeadas pelo pesquisador, o qual assume, também, os riscos e danos que porventura vierem a acontecer com os equipamentos e incidentes com os(as) alunos(as) em sua companhia, durante o processo.

Fica assegurada a privacidade dos sujeitos quanto aos dados confidenciais envolvidos

na pesquisa. Os resultados da pesquisa serão tornados públicos, sejam eles favoráveis ou não. Toda divulgação do material será restritamente para fins acadêmicos e utilizados somente em eventos científicos, sem o uso de nomes pessoais, resguardando pelo sigilo e anonimato. Terão acesso a essas informações apenas o pesquisador responsável pela investigação e sua orientadora, prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ana Rita Pereira.

É garantido a liberdade do/a participante de se recusar a participar ou retirar o seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma. Caso queira desistir durante o processo, basta sinalizar ao pesquisador por meio do telefone/WhatsApp (64) 9 9221 5554 ou e-mail profnetomatfis@gmail.com. Fica garantido o direito de pleitear indenização em casos de eventuais danos, garantida em lei, comprovadamente decorrentes da participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial.

## 2. Consentimento da Participação na Pesquisa (Professores(as))

Eu, \_\_\_\_\_, inscrito(a) sob o RG/CPF \_\_\_\_\_, abaixo assinado, concordo em participar do estudo intitulado “**SIMETRIAS NA NATUREZA E LEIS DE CONSERVAÇÃO NA FÍSICA: abordagens relevantes e significativas para o 9º ano do ensino fundamental**”. Informo ter mais de 18 anos de idade e destaco que minha participação nesta pesquisa é de caráter voluntário. Fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) pelo pesquisador responsável **José Neto de Oliveira** sobre a pesquisa, os procedimentos e métodos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes de minha participação no estudo. Foi-me garantido que posso retirar meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade. Declaro, portanto, que concordo com a minha participação no projeto de pesquisa acima descrito.

Catalão, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2021.

---

Assinatura por extenso do(a) participante

---

Assinatura por extenso do(a) pesquisador(a) responsável

**APÊNDICE E – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E  
ESCLARECIDO - TCLE (ALUNOS(AS))**



Universidade Federal de Goiás  
Unidade Acadêmica Especial de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Polo 02: UFG - Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão

**TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TCLE  
(ALUNOS(AS))**

Você/Sr./Sra. (ou o/a seu filho/filha) está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), da pesquisa intitulada “**SIMETRIAS NA NATUREZA E LEIS DE CONSERVAÇÃO NA FÍSICA: abordagens relevantes e significativas para o 9º ano do ensino fundamental**”. Meu nome é **José Neto de Oliveira**, sou discente do **Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física**, na Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, orientado pela **Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ana Rita Pereira**, serei o pesquisador responsável por essa pesquisa e minha área de atuação é a Educação Básica. Após receber os esclarecimentos e as informações a seguir, se você aceitar fazer parte do estudo, assine ao final deste documento, que está impresso em duas vias, sendo que uma delas é sua e a outra pertence ao pesquisador responsável. Esclareço que em caso de recusa na participação você não será penalizado(a) de forma alguma. Mas se aceitar participar, as dúvidas *sobre a pesquisa* poderão ser esclarecidas pelo pesquisador responsável, via e-mail (**profnetomatfis@gmail.com**) e, inclusive, sob forma de ligação a cobrar, através do seguinte contato telefônico: (64) 9 9221 5554. Ao persistirem as dúvidas *sobre os seus direitos* como participante desta pesquisa, você também poderá fazer contato com o **Comitê de Ética em Pesquisa** da Universidade Federal de Goiás, pelo telefone (64) 3441-7609.

**1. Informações Importantes sobre a Pesquisa**

**1.1 Título**

SIMETRIAS NA NATUREZA E LEIS DE CONSERVAÇÃO NA FÍSICA: abordagens relevantes e significativas para o 9º ano do ensino fundamental

## 1.2 Justificativa

Apesar da simetria possuir um papel fundamental no entendimento das leis de conservação na Física, seu ensino não faz parte do currículo escolar da educação básica e raramente é abordado nos anos iniciais dos cursos superiores de ciências exatas. Para um estudante da educação básica, não é evidente que além dos objetos, também as equações matemáticas e as leis da natureza possam apresentar característica de simetria com relação a certas transformações. Com isso, essa pesquisa visa a aplicação e confirmação ou não da eficácia de uma sequência didática sobre Simetria e Leis de Conservação na Física, tratando-se de meu produto educacional composto tanto da sequência didática, seus questionários e, ainda, dois vídeos produzidos referentes a explicação desses conteúdos.

## 1.3 Objetivos

- Oferecer, ao professor de Ciências ou de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, uma proposta de trabalho que aborde a Simetria e Leis de Conservação na Física;
- Possibilitar, ao estudante dessa fase, um acesso inicial ao ensino de simetria com relação a certas transformações, fazendo com que a aprendizagem se desenvolva de forma interessante e prazerosa;
- Despertar, no(a) estudante do último ano do ensino fundamental, um maior interesse pela disciplina de Física, servindo como um agente motivador, influenciando, de forma positiva, na escolha de prosseguimentos de estudos em áreas científicas.

## 1.4 Procedimentos utilizados da pesquisa ou descrição detalhada dos métodos

Essa proposta de pesquisa apresenta um produto educacional (PE) em forma de sequência didática (SD), com duração de 5 horas-aulas de 50 min, totalizando 250 min, que permitirá, ao(a) estudante do 9º ano do Ensino Fundamental, um estudo e compreensão de que tanto as equações matemáticas como as leis da natureza podem apresentar características de simetrias com relação a certas transformações. A abordagem educacional pautou-se na Teoria da Aprendizagem Significativa Crítica, de Marco Antônio Moreira, uma perspectiva antropológica em relação às atividades de seu grupo social, na qual aprendizagem significativa dos conteúdos é indispensável, pois não tem sentido ser crítico de conhecimentos sem significado.

Esse PE é composto da SD, cinco questionários e dois vídeos explicativos de conteúdo, com duração aproximada de 34 min cada um deles. O primeiro vídeo (Vídeo 1 - Contexto Histórico, Évariste Galois e Emmy Noether) é usado tanto para se entender o contexto histórico da simetria, cujo início data-se por volta de 9000 anos AEC, quanto

para se enfatizar dois importantes personagens que tanto contribuíram para nossos conhecimentos de hoje: (1) Évariste Galois e a Teoria de Grupos e (2) Emmy Noether e seu Teorema que liga as Leis de Conservação com as Simetrias. No segundo vídeo (Vídeo 2 - Simetrias na Natureza e Simetrias na Matemática), é apresentando tanto as Simetrias na Natureza (esférica, radial e bilateral), quanto as Simetrias na Matemática (translação, rotação, reflexão e reflexão transladada).

Devido a essa incerteza quanto ao retorno das aulas presenciais, associado a ainda estarmos vivendo um período atípico devido à pandemia em virtude do novo coronavírus, bem como pensando no bem estar e na segurança de todos os envolvidos na aplicação do produto educacional, recorro as orientações para procedimentos em pesquisas com qualquer epata em ambiente virtual, disponibilizada pela Comissão Nacional de Ética em Pesquisa, em 24 de fevereiro de 2021, disponível em: [https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1059/o/SEI\\_MS\\_-\\_Comunicado\\_2021.pdf?1614339243](https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1059/o/SEI_MS_-_Comunicado_2021.pdf?1614339243).

Desse modo, desenvolverei a aplicação do PE em horários pré-estabelecidos com as devidas coordenações pedagógicas de cada instituição de ensino, acordado com os(as) participantes da pesquisa. Para que o produto seja aplicado de forma eficaz, farei uso de três ferramentas digitais: *WhatsApp* para a inserção de todos os participantes num grupo específico e a comunicação imediata entre os envolvidos, *Google Meet* para as aulas e *Google Forms* para aplicação dos questionários e coleta dos dados.

Por fim, estimo que de cada instituição de ensino ter-se-á um grupo de aproximadamente 15 alunos(as) participantes. Quanto aos(as) docentes, estimo a participação de quatro professores(as) de Matemática e quatro professores(as) de Ciências, da última série do Ensino Fundamental, para que se possa ter um parecer, na visão deles(as), quanto à significância desse material. É importante ressaltar que a intervenção em sala de aula somente ocorrerá após o consentimento dos alunos e/ou responsáveis.

### 1.5 Informações Gerais

É garantido a liberdade do(a) participante de se recusar a responder questões que lhe causem desconforto emocional e/ou constrangimento em entrevistas e questionários que forem aplicados na pesquisa. Do mesmo modo fica garantido, ao participante, o direito de negar a divulgação dos dados obtidos, em caso de não haver conforto em permitir a utilização desses.

A participação é voluntária e não obrigatória, não havendo nenhum tipo de pagamento ou gratificação financeira pela participação dos sujeitos. Todas as despesas referentes ao processo serão custeadas pelo pesquisador, o qual assume, também, os riscos e danos que porventura vierem a acontecer com os equipamentos e incidentes com os(as) alunos(as) em sua companhia, durante o processo.

Fica assegurada a privacidade dos sujeitos quanto aos dados confidenciais envolvidos

na pesquisa. Os resultados da pesquisa serão tornados públicos, sejam eles favoráveis ou não. Toda divulgação do material será restritamente para fins acadêmicos e utilizados somente em eventos científicos, sem o uso de nomes pessoais, resguardando pelo sigilo e anonimato. Terão acesso a essas informações apenas o pesquisador responsável pela investigação e sua orientadora, prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ana Rita Pereira.

É garantido a liberdade do/a participante de se recusar a participar ou retirar o seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma. Caso queira desistir durante o processo, basta sinalizar ao pesquisador por meio do telefone/WhatsApp (64) 9 9221 5554 ou e-mail profnetomatfis@gmail.com. Fica garantido o direito de pleitear indenização em casos de eventuais danos, garantida em lei, comprovadamente decorrentes da participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial.

## 2. Consentimento da Participação na Pesquisa (Alunos(as))

Eu, \_\_\_\_\_, inscrito(a) sob o RG/CPF \_\_\_\_\_, abaixo assinado, na condição de responsável pelo(a) aluno(a) \_\_\_\_\_, concordo em participar do estudo intitulado “**SIMETRIAS NA NATUREZA E LEIS DE CONSERVAÇÃO NA FÍSICA: abordagens relevantes e significativas para o 9º ano do ensino fundamental**”. Informo ter mais de 18 anos de idade e destaco que a participação nesta pesquisa é de caráter voluntário. Fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) pelo pesquisador responsável **José Neto de Oliveira** sobre a pesquisa, os procedimentos e métodos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da participação nesse estudo. Foi-me garantido a possibilidade de retirar esse consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade. Declaro, portanto, que concordo com a participação no projeto de pesquisa acima descrito.

Catalão, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2021.

\_\_\_\_\_  
Assinatura por extenso do(a) responsável pelo participante

\_\_\_\_\_  
Assinatura por extenso do(a) pesquisador(a) responsável

**APÊNDICE F – TERMO DE CONSENTIMENTO E ANUÊNCIA  
(ESCOLA MUNICIPAL OROZINA MARIA MARTINS)**

**TERMO DE CONSENTIMENTO E ANUÊNCIA**

Eu, José Neto de Oliveira, discente do Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF), na Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, com pesquisa intitulada “SIMETRIAS NA NATUREZA E LEIS DE CONSERVAÇÃO NA FÍSICA: abordagens relevantes e significativas para o 9º ano do ensino fundamental”, orientado pela Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Ana Rita Pereira, estarei desenvolvendo parte dessa pesquisa e aplicação do produto educacional (sequência didática) na Escola Municipal Orozina Maria Martins, localizada na Rua Serra Dourada, s/n, Jardim Serrano, Caldas Novas - GO.

A sequência didática pode ser entendida como sendo um procedimento simples, mas que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si. Desse modo, o objetivo será oferecer, ao(a) professor(a) de Ciências ou de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, uma proposta de trabalho que aborda a Simetria e Leis de Conservação na Física, possibilitando, ao estudante dessa fase, um acesso inicial a esse ensino, fazendo com que a aprendizagem se desenvolva de forma interessante e prazerosa, despertando um maior interesse pela disciplina de Física e, ainda, servindo como um agente motivador para prosseguimentos de estudos em áreas científicas.

Caso necessite esclarecer alguma dúvida em relação ao estudo, estou à disposição para prestar quaisquer esclarecimentos via *e-mail* (profnetomatfis@gmail.com) ou, inclusive, sob forma de ligação a cobrar, através do seguinte contato telefônico/ *WhatsApp*: (64) 9 9221 5554. Se vossa senhoria estiver de acordo, posso garantir que as informações fornecidas serão confidenciais, e os dados utilizados apenas para fins de análises científicas.

Eu, Wanderson Martins Ferreira, diretor da Escola Municipal Orozina Maria Martins, fui esclarecido sobre a pesquisa citada acima e concordo que estes dados sejam utilizados na realização da mesma, considerando seu mérito e caráter científico. Portanto declaro, para os devidos fins, o aceite para que essa pesquisa seja desenvolvida nessa instituição de ensino.

Caldas Novas, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2021.

---

Assinatura e carimbo do diretor

**APÊNDICE G – TERMO DE CONSENTIMENTO E ANUÊNCIA  
(COLÉGIO ESTADUAL DOM PEDRO II)**

**TERMO DE CONSENTIMENTO E ANUÊNCIA**

Eu, José Neto de Oliveira, discente do Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF), na Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, com pesquisa intitulada “SIMETRIAS NA NATUREZA E LEIS DE CONSERVAÇÃO NA FÍSICA: abordagens relevantes e significativas para o 9º ano do ensino fundamental”, orientado pela Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Ana Rita Pereira, estarei desenvolvendo parte dessa pesquisa e aplicação do produto educacional (sequência didática) no Colégio Estadual Dom Pedro II, localizado na Rua Ciro Palmerston, 660, Setor Oeste, Caldas Novas - GO.

A sequência didática pode ser entendida como sendo um procedimento simples, mas que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si. Desse modo, o objetivo será oferecer, ao(a) professor(a) de Ciências ou de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, uma proposta de trabalho que aborda a Simetria e Leis de Conservação na Física, possibilitando, ao estudante dessa fase, um acesso inicial a esse ensino, fazendo com que a aprendizagem se desenvolva de forma interessante e prazerosa, despertando um maior interesse pela disciplina de Física e, ainda, servindo como um agente motivador para prosseguimentos de estudos em áreas científicas.

Caso necessite esclarecer alguma dúvida em relação ao estudo, estou à disposição para prestar quaisquer esclarecimentos via *e-mail* (profnetomatfis@gmail.com) ou, inclusive, sob forma de ligação a cobrar, através do seguinte contato telefônico/ *WhatsApp*: (64) 9 9221 5554. Se vossa senhoria estiver de acordo, posso garantir que as informações fornecidas serão confidenciais, e os dados utilizados apenas para fins de análises científicas.

Eu, Lindomar Marques de Oliveira, diretor do Colégio Estadual Dom Pedro II, fui esclarecido sobre a pesquisa citada acima e concordo que estes dados sejam utilizados na realização da mesma, considerando seu mérito e caráter científico. Portanto declaro, para os devidos fins, o aceite para que essa pesquisa seja desenvolvida nessa instituição de ensino.

Caldas Novas, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2021.

---

Assinatura e carimbo do diretor

**APÊNDICE H – QUESTIONÁRIO I (SIMETRIAS: CONTEXTO HISTÓRICO, ÉVARISTE GALOIS E EMMY NOETHER)**

**Colégio/Escola:** \_\_\_\_\_ **Data:** \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_\_

**Ano:** 9º ano do Ensino Fundamental **Turma:** \_\_\_\_\_ **Turno:** \_\_\_\_\_

**Professor(a):** \_\_\_\_\_ **Disciplina:** \_\_\_\_\_

**Aluno(a):** \_\_\_\_\_

**QUESTIONÁRIO I (SIMETRIAS: CONTEXTO HISTÓRICO, ÉVARISTE GALOIS E EMMY NOETHER)**

1. O nome da região que deu origem a várias civilizações da Antiguidade e que possuía uma terra fértil era
 

(A) Acádia Babilônica.	(C) Foz do rio Nilo.
(B) Crescente Fértil.	(D) Jardins da Babilônia.
  
2. A mais antiga língua escrita, chamada de escrita cuneiforme, foi desenvolvida cerca de 3500 a.C. pelos
 

(A) Acádios.	(B) Babilônios.	(C) Fenícios.	(D) Sumérios.
--------------	-----------------	---------------	---------------
  
3. Qual foi o local responsável tanto pelo início da história escrita, quanto da compreensão inicial da simetria pela humanidade, com profundas implicações em se ver o mundo físico?
 

(A) Acádia.	(B) Babel.	(C) Babilônia.	(D) Nínive.
-------------	------------	----------------	-------------
  
4. Considerado como um dos grandes nomes que revolucionaram a compreensão da simetria e suas aplicabilidades numa melhor compreensão do mundo físico. Era considerado como um revolucionário político e matemático obsessivo, sendo responsável por criar uma linguagem que descreve a simetria nas estruturas matemáticas, deduzindo as suas consequências. Essas características citadas se referem a:
 

(A) Évariste Galois.	(C) Isaac Newton.
(B) Amalie Emily Nöther (Emmy Noether).	(D) Galileu Galilei.
  
5. Grande algebrista, que provou dois teoremas que são essenciais para a teoria da relatividade, resolvendo o problema da conservação da energia. Considerado, por Albert Einstein, como o gênio matemático criativo mais significativo já produzido naquele contexto.

Essas características citadas se referem a:

- |   |                      |
|---|----------------------|
| (A) Évariste Galois.                    | (C) Isaac Newton.    |
| (B) Amalie Emily Nöther (Emmy Noether). | (D) Galileu Galilei. |

6. A simetria não deve estar apenas relacionada à beleza e perfeição, seu conceito permeia também as ciências, sendo considerada um conceito-chave na Física. Ela possui um papel central nas fronteiras da Física, no Mundo Quântico e na Relatividade, podendo promover uma unificação matemática dos principais campos da Física Moderna. Essa ideia é básica na atual compreensão científica do Universo e suas origens. Assim, o conceito de simetria está melhor representado em:
- (A) É qualquer figura ou forma geométrica.  
 (B) Trata-se apenas das reflexões nos espelhos.  
 (C) É uma característica observada somente em obras de arte.  
 (D) É um tipo especial de transformação, uma maneira de mover um objeto e ainda se preservar a estrutura ou alguma característica desse objeto.
7. Um palíndromo ou capicua é um número, que se lê da mesma maneira nos dois sentidos, ou seja, da esquerda para a direita ou ao contrário, como 666, 1771 e 39493. Capicua é considerado como um tipo de simetria na matemática. Uma curiosidade interessante é que usando apenas o algarismo 1, conseguimos obter todos os demais. Primeiro, faz-se  $1 \times 1$  e escreve-se o resultado. Em seguida,  $11 \times 11$ ,  $111 \times 111$  e assim por diante, até que o registro dos resultados nos forneça todos os algarismos de 1 a 9, conforme destaque realizado abaixo.

$$1 \times 1 = \mathbf{1}$$

$$11 \times 11 = \mathbf{121}$$

$$111 \times 111 = \mathbf{12321}$$

$$1111 \times 1111 = \mathbf{1234321}$$

$$11111 \times 11111 = \mathbf{123454321}$$

$$111111 \times 111111 = \mathbf{12345654321}$$

$$1111111 \times 1111111 = \mathbf{1234567654321}$$

$$11111111 \times 11111111 = \mathbf{123456787654321}$$

$$111111111 \times 111111111 = \mathbf{12345678987654321}$$

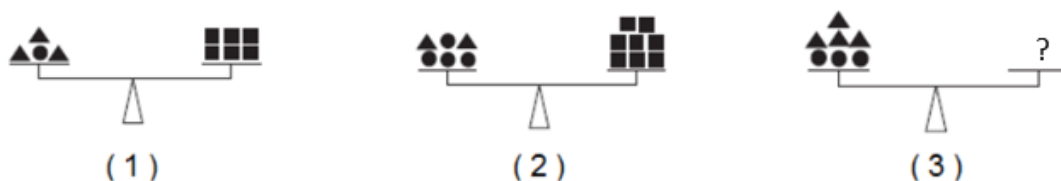
Dispondo somente os produtos (resultados) de forma centralizada, teremos:

$$\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{121} \\ \mathbf{12321} \\ \mathbf{1234321} \\ \mathbf{123454321} \\ \mathbf{12345654321} \\ \mathbf{1234567654321} \\ \mathbf{123456787654321} \\ \mathbf{12345678987654321} \end{array}$$

A quantidade de capicuas de três algarismos que podem ser formadas usando-se apenas os algarismos 6, 7 e 8 é igual a:

- (A) 6.
- (B) 8.
- (C) 9.
- (D) 16.
- (E) 20.

8. Em matemática, o conceito de simetria está intimamente ligado a equilíbrio. Ao se falar em equilíbrio, uma primeira imagem que geralmente temos é de uma balança de dois pratos. Uma equação pode ser representada por uma balança de dois pratos que está em equilíbrio, onde a quantidade apresentada no prato da esquerda é a mesma que a quantidade no prato da direita. As balanças (1) e (2) da imagem abaixo estão em equilíbrio. Sabe-se que figuras com mesma forma representam objetos de mesma massa.



Fonte: <http://clubes.obmep.org.br/blog/probleminha-equilibrio-com-quadrados/>. (05/jul./2021).

Quantos quadrados devem ser colocados no prato direito da balança (3) para que ela também fique equilibrada?

- (A) 9 quadrados.
  - (B) 10 quadrados.
  - (C) 11 quadrados.
  - (D) 12 quadrados.
9. A simetria é definida como um tipo especial de transformação, uma maneira de mover um objeto e ainda se preservar a estrutura ou alguma outra característica desse objeto. Sobre simetria, observe atentamente cada afirmação a seguir.
- I - A simetria possui um papel central nas fronteiras da Física, no mundo quântico e na relatividade, podendo promover uma unificação matemática dos principais campos da Física Moderna.
  - II - Na Teoria da Relatividade, do físico Albert Einstein, encontra-se o princípio de que as leis da física devem ser as mesmas em todos os lugares e tempos. Nesse sentido, as leis devem ser simétricas em relação ao movimento e a passagem do tempo.

III - A Física Quântica diz que tudo no Universo é construído a partir de uma coleção de partículas fundamentais, com comportamentos regidos por equações matemáticas (leis da natureza) que também estão associadas a uma simetria. Mesmo que partículas se transformem em outras diferentes, essas transformações também não alteram as leis da física.

IV - Até onde a história escrita nos revela, foram os matemáticos babilônicos que puseram a humanidade no caminho da simetria, com profundas implicações na maneira de se ver o mundo físico.

É **CORRETO** apenas o que se afirma em:

(A) I e II.

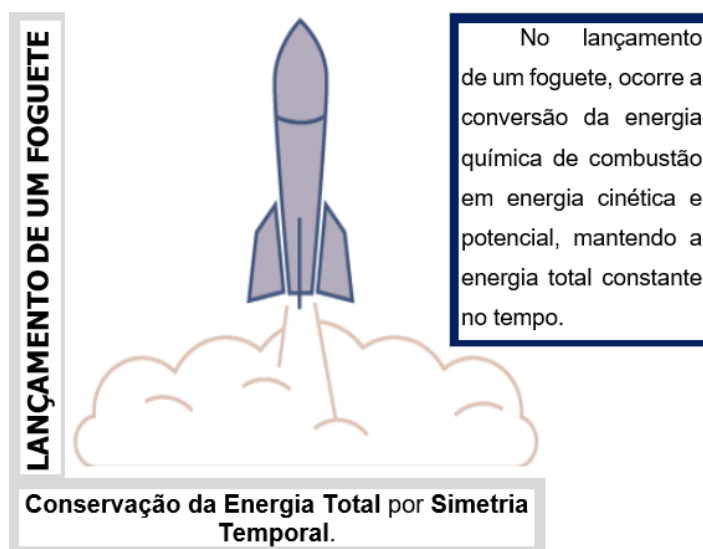
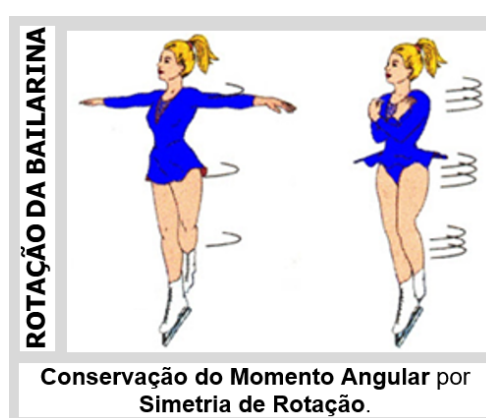
(C) II, III e IV.

(E) I, II, III e IV.

(B) I, II e III.

(D) I, III e IV.

10. O papel da simetria na Física é revelar as transformações que levam as invariâncias de seus objetos de estudo, para que se possa entender as leis de conservação, sendo o teorema de Noether a conexão formal entre simetrias e leis de conservação. Segundo o teorema de Noether, para cada simetria contínua das leis físicas corresponde uma lei de conservação. Observe atentamente as figuras a seguir, refletindo sobre cada situação mencionada.



Assim, está correto o que se afirma em:

- (A) Se a simetria for espacial (translacional) haverá conservação do momento linear, se ela for rotacional (como ocorre numa bola de bilhar) haverá conservação do momento angular e caso seja temporal (invariante com o tempo) haverá conservação de energia.
- (B) Se a simetria for espacial (translacional) haverá conservação do momento angular, se ela for rotacional (como ocorre numa bola de bilhar) haverá conservação do momento linear e caso seja temporal (invariante com o tempo) haverá conservação de energia.
- (C) Se a simetria for espacial (translacional) haverá conservação de energia, se ela for rotacional (como ocorre numa bola de bilhar) haverá conservação do momento linear e caso seja temporal (invariante com o tempo) haverá conservação do momento angular.
- (D) Se a simetria for espacial (translacional) haverá conservação de energia, se ela for rotacional (como ocorre numa bola de bilhar) haverá conservação do momento angular e caso seja temporal (invariante com o tempo) haverá conservação do momento linear.

## APÊNDICE I – QUESTIONÁRIO II (SIMETRIAS NA NATUREZA E NA MATEMÁTICA)

Colégio/Escola: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_

Ano: 9º ano do Ensino Fundamental Turma: \_\_\_\_\_ Turno: \_\_\_\_\_

Professor(a): \_\_\_\_\_ Disciplina: \_\_\_\_\_

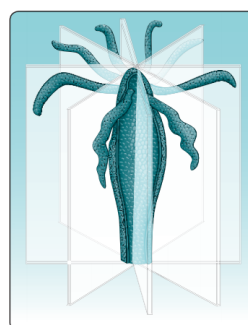
Aluno(a): \_\_\_\_\_

### QUESTIONÁRIO II (SIMETRIAS NA NATUREZA E NA MATEMÁTICA)

1. Existe um tipo de simetria que é observada em alguns seres vivos, como na anêmona-do-mar, água-viva (medusa), hidra e estrela-do-mar. Trata-se da simetria radial, onde um corpo pode ser dividido em partes com  $n$  raios em volta do eixo central, preservando sua forma original com rotações ao longo desse eixo. A simetria radial pode ser classificada como birradial (dois planos de simetria), tetrarradial (quatro planos de simetria), pentarradial (cinco planos de simetria) ou multirradial (acima de cinco planos de simetria). Observando atentamente as seguintes imagens, pode-se concluir que a classificação correta das simetrias radiais encontra-se em:



(a) Estrela-do-mar.



(b) Hidra.



(c) Anêmona-do-mar.



(d) Estrela-do-mar de 9 pontas.

- (A) (a) birradial, (b) tetrarradial, (c) pentarradial e (d) multirradial.  
 (B) (a) multirradial, (b) birradial, (c) tetrarradial e (d) pentarradial.  
 (C) (a) pentarradial, (b) tetrarradial, (c) birradial e (d) multirradial.  
 (D) (a) tetrarradial, (b) multirradial, (c) birradial e (d) pentarradial.

2. Observe atentamente as seguintes figuras.



(a) Emmy Noether (1882-1935).



(b) Isaac Newton (1642-1727).



(c) Évariste Galois (1811-1832).

Considerando as figuras (a), (b) e (c), podemos dizer que as transformações (simetrias) ocorridas em cada uma delas, respectivamente, foram:

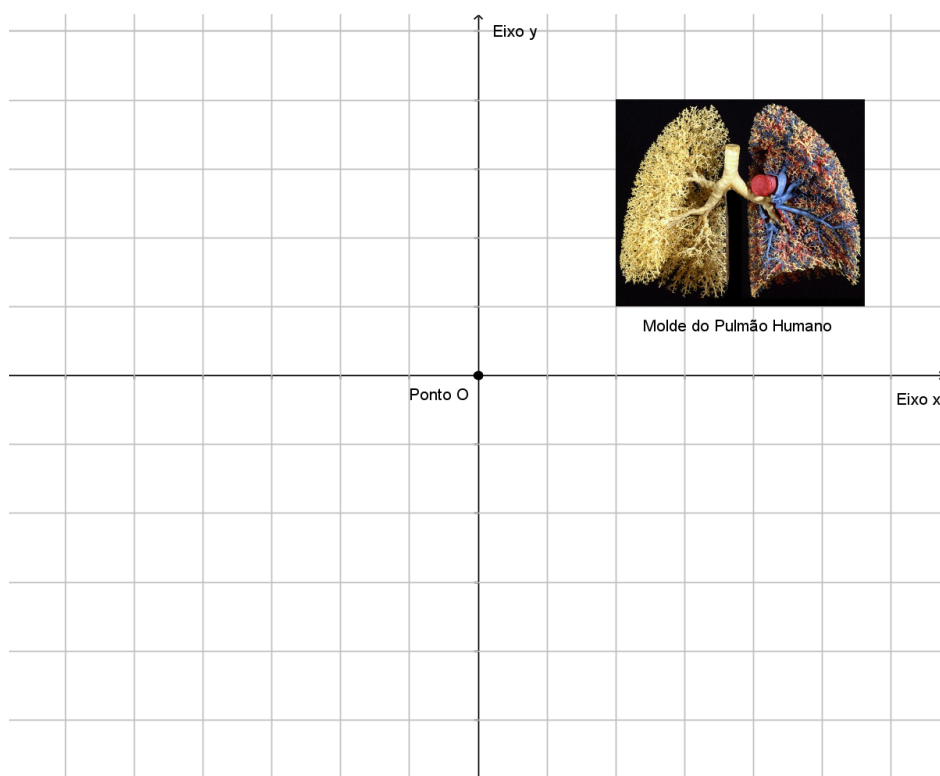
(A) rotação, translação e reflexão.

(C) reflexão, rotação e translação.

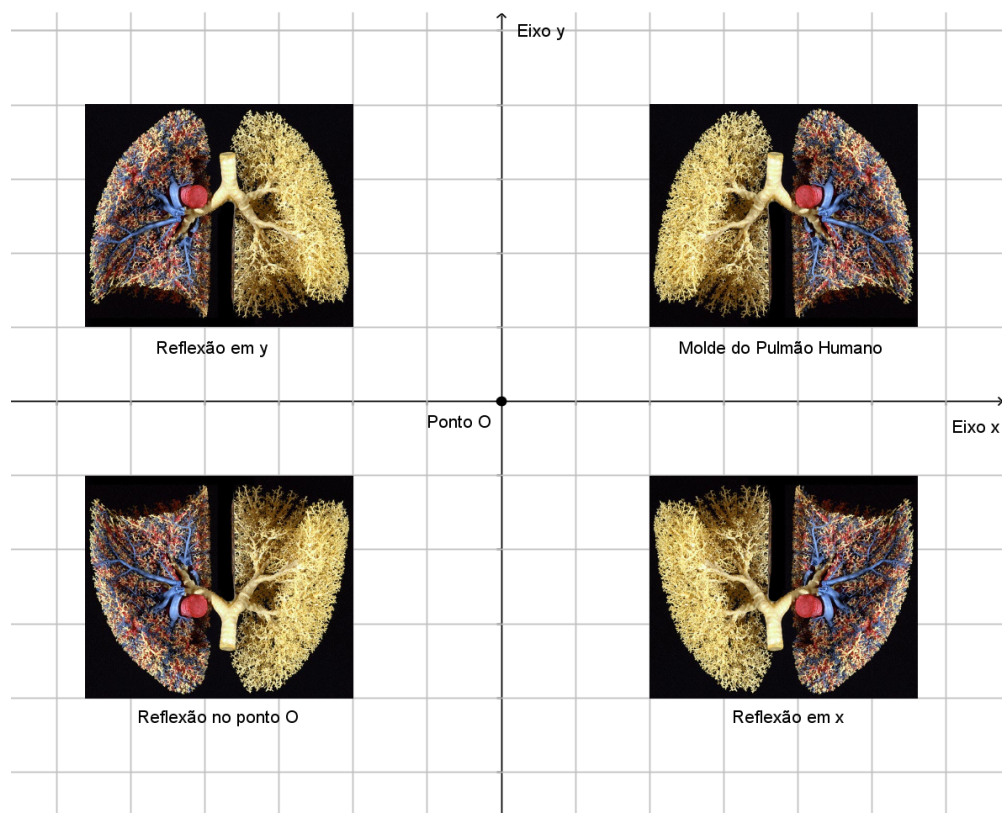
(B) translação, reflexão e rotação.

(D) translação, rotação e reflexão.

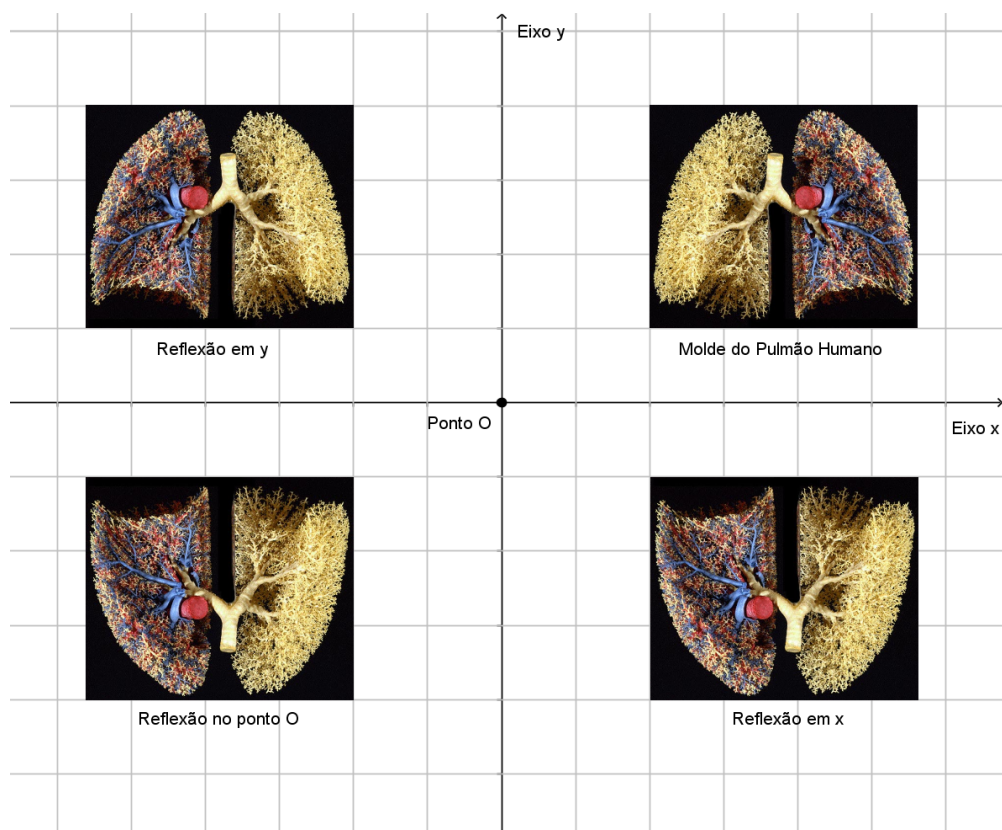
3. Observe o molde do Pulmão Humano na malha quadriculada a seguir.



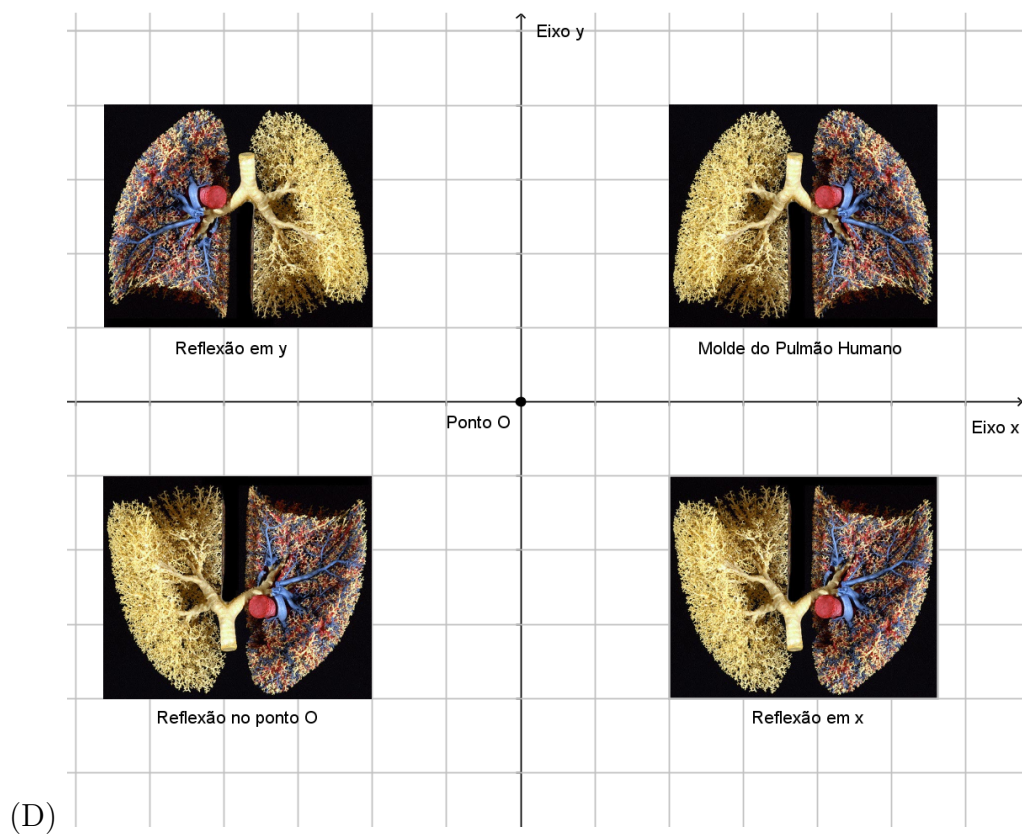
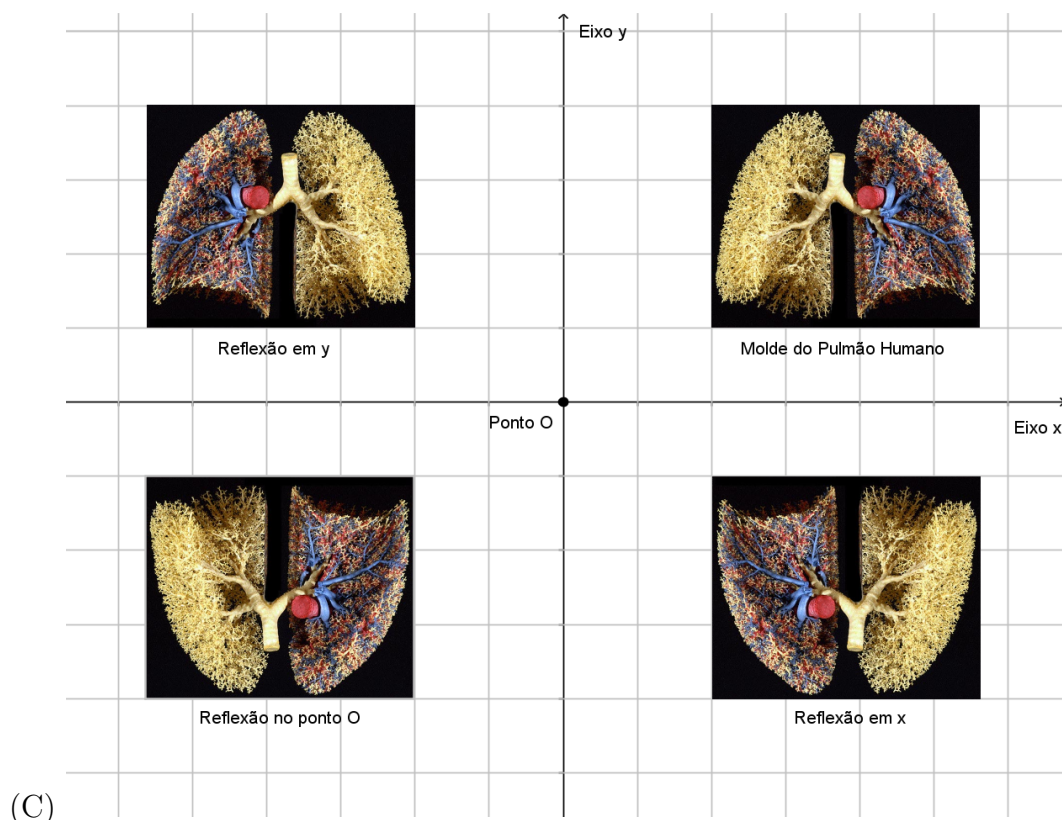
A representação correta da reflexão desse Pulmão em relação ao **eixo de simetria y**, em relação ao **centro de simetria O** e em relação ao **eixo de simetria x** está representado em:



(A)

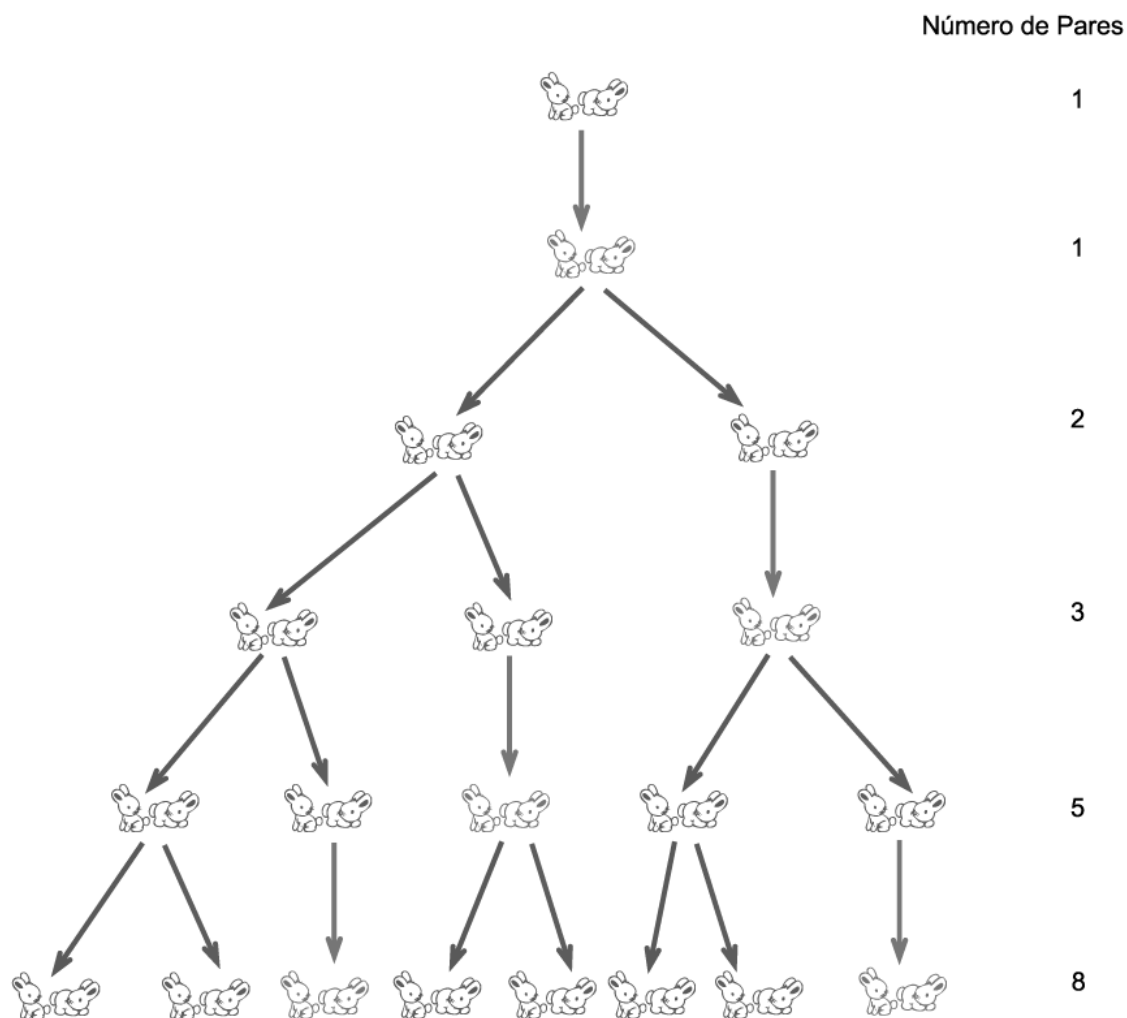


(B)



4. José Neto ganhou um casal de coelhos recém-nascidos. Imagine que os coelhos chegam à idade de acasalar um mês depois de nascer e que as fêmeas demoram

um mês para parir, gerando apenas outro casal de coelhos. Este problema está relacionado a uma das mais importantes descobertas da matemática, a Sequência de Fibonacci.



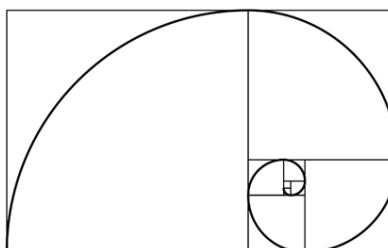
Fonte: <https://sites.google.com/site/leonardofibonacci7/o-problema-dos-coelhos>. (04/jul./2021).

Assim,  $\{1^{\circ} \text{ mês}, 2^{\circ} \text{ mês}, 3^{\circ} \text{ mês}, 4^{\circ} \text{ mês}, 5^{\circ} \text{ mês}, 6^{\circ} \text{ mês}, \dots\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$ .

Com base nessas informações, ao final de um ano (12 meses), José Neto terá:

- (A) 89 casais de coelhos.
- (B) 144 casais de coelhos.
- (C) 233 casais de coelhos.
- (D) 377 casais de coelhos.

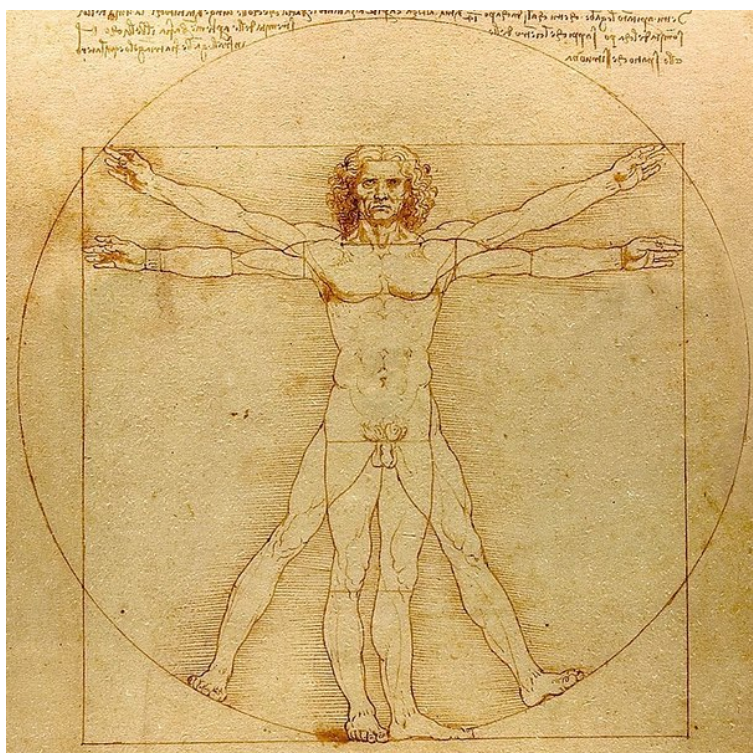
5. Observe a seguinte imagem.



Essa representação é conhecida por Espiral de Fibonacci e corresponde a uma sequência de números (Sequência de Fibonacci) que resulta num referencial para conceitos usados em artes plásticas, arquitetura, design e diagramação. Percebe-se que a figura geométrica resultante é considerada agradável à contemplação humana, sendo chamada de

- (A) retângulo mágico. (C) quadratura do círculo.  
(B) proporção áurea. (D) sequência de ouro.

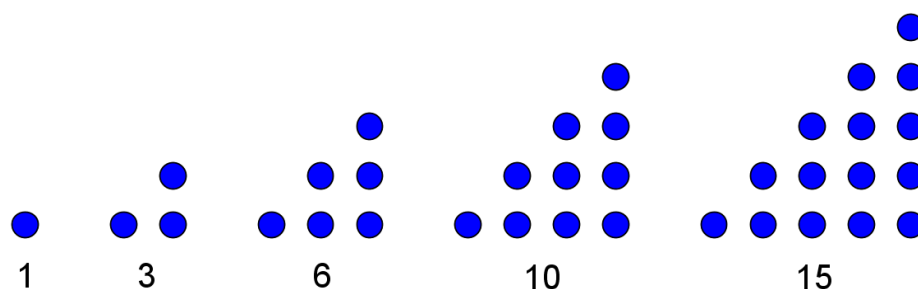
6. Uma conhecida imagem do pintor italiano Leonardo Da Vinci, o homem vitruviano, é associado às dimensões de um homem circunscrito em um círculo e um quadrado, um símbolo da simetria básica do corpo humano e para o universo como um todo. Largamente utilizada como representação da saúde física e mental do ser humano, esta imagem representa o ideal clássico de beleza, equilíbrio, harmonia das formas e perfeitas proporções. Produzido em 1490, refere-se originalmente aos estudos e escritos do arquiteto romano Marcus Vitruvius Pollio. O homem vitruviano, de Da Vinci, era considerado o desenho anatomicamente mais correto da sua época e tornou-se um ícone da cultura moderna.



O projeto da modernidade é ilustrado na imagem do homem vitruviano. Levando em consideração o texto e a imagem, este projeto pode ser compreendido como

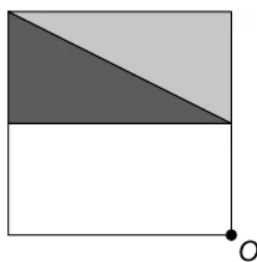
- (A) a busca da arte como fundamento para a existência humana.  
(B) a subordinação do homem em relação à Deus.  
(C) o resultado da busca do homem de se igualar a Deus.  
(D) a busca pela perfeição humana através de medidas perfeitas.

7. Observe a sequência dos números triangulares abaixo.

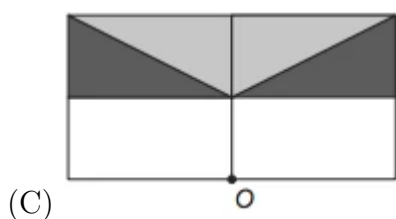
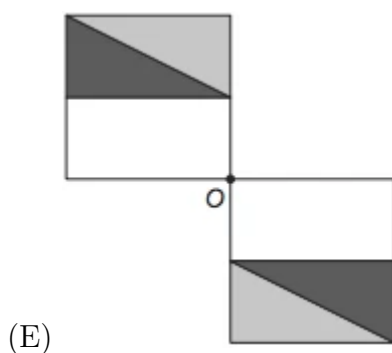
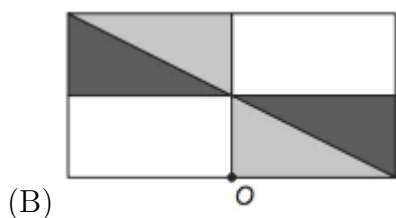
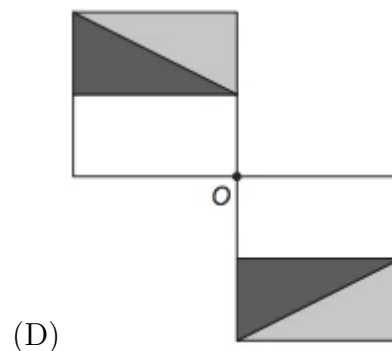
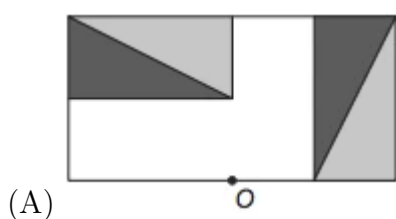


Qual será o número de bolinas da 9ª figura dessa sequência?

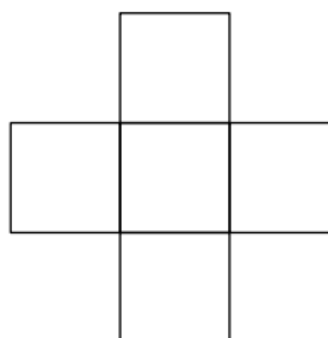
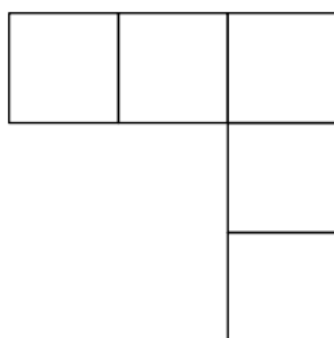
- (A) 28  
 (B) 36  
 (C) 45  
 (D) 55
8. O responsável pela introdução da ideia de simetria e por ampliar seu entendimento, tanto em uma noção primitiva inicial do que seria o eixo de simetria, quanto no sentido de proporção e equilíbrio entre as partes foi
- (A) Platão, um filósofo grego da antiguidade, considerado um dos principais pensadores da história da filosofia. Sua filosofia é baseada na teoria de que o mundo que percebemos com nossos sentidos é um mundo ilusório, confuso. O mundo espiritual é mais elevado, eterno, onde o que existe verdadeiramente são as ideias, que só a razão pode conhecer.
- (B) Aristóteles, um importante filósofo grego, um dos pensadores com maior influência na cultura ocidental. Discípulo do filósofo Platão, elaborou um sistema filosófico que abordou sobre praticamente todos os assuntos existentes, como a geometria, física, metafísica, botânica, zoologia, astronomia, medicina, psicologia, ética, drama, poesia, retórica, matemática e principalmente lógica.
- (C) Galileu Galilei, um matemático, físico, astrônomo e filósofo italiano. Fundamentou cientificamente a Teoria Heliocêntrica de Copérnico. Desmitificou lendas, estabeleceu princípios e causou uma renovação na história da Ciência. Sempre afirmava ser a Matemática a linguagem da natureza.
- (D) Pitágoras, um matemático e filósofo grego. Autor do famoso “Teorema de Pitágoras”, cujo enunciado diz que em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Desenvolveu trabalhos na área da filosofia, música, moral, geografia e medicina.
9. (ENEM 2013) Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto O.



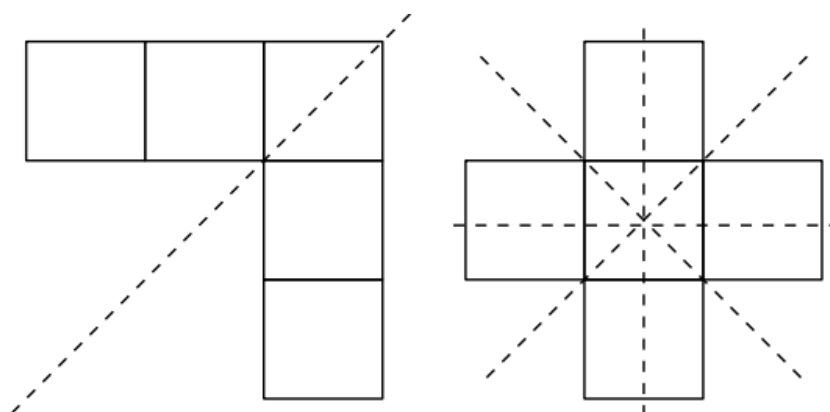
A imagem que representa a nova figura é:



10. (OBMEP 2005) As duas figuras a seguir são formadas por cinco quadrados iguais.



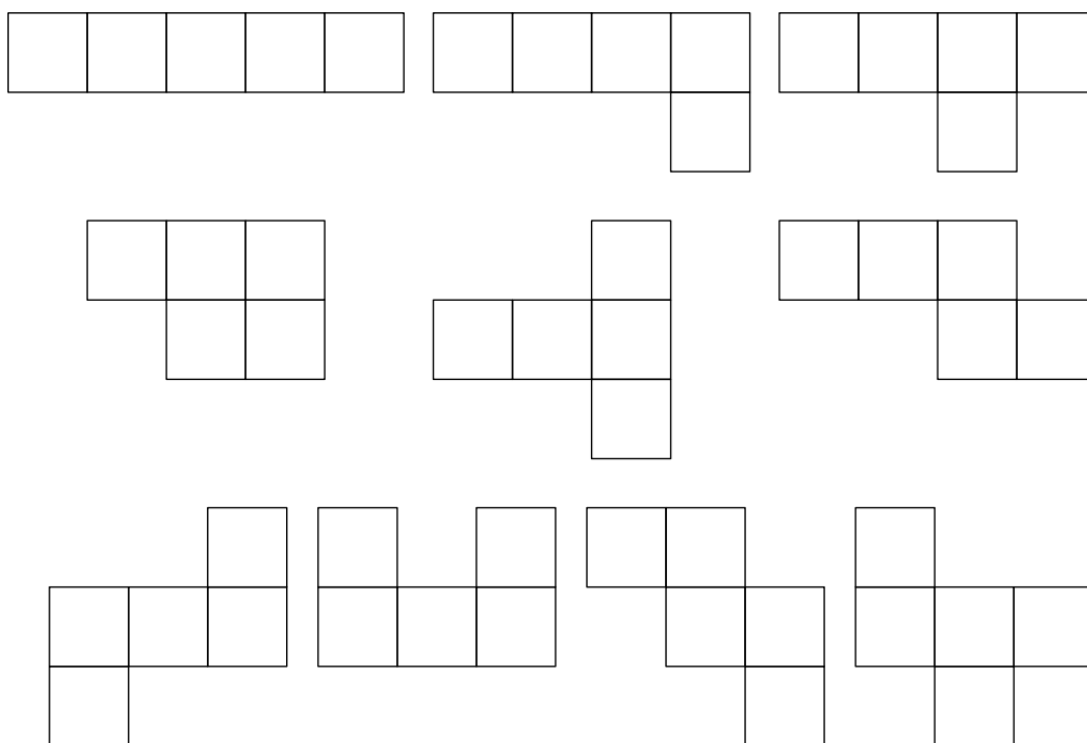
Observe que elas possuem eixos de simetria, conforme assinalado a seguir.



1 eixo de  
simetria

4 eixos de  
simetria

As figuras a seguir também são formadas por cinco quadrados iguais.



Quantas delas possuem pelo menos um eixo de simetria?

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 5
- (D) 6
- (E) 7

**CALMA, ATENÇÃO E SUCESSO EM SUAS RESOLUÇÕES!**

## APÊNDICE J – QUESTIONÁRIO III (FÍSICA, ENERGIA, TRABALHO E ENERGIA MECÂNICA)

Colégio/Escola: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

Ano: 9º ano do Ensino Fundamental Turma: \_\_\_\_\_ Turno: \_\_\_\_\_

Professor(a): \_\_\_\_\_ Disciplina: \_\_\_\_\_

Aluno(a): \_\_\_\_\_

### QUESTIONÁRIO III (FÍSICA, ENERGIA, TRABALHO E ENERGIA MECÂNICA)

1. (G1 - IFCE 2012) Uma pessoa sobe um lance de escada, com velocidade constante, em 1,0 min. Se a mesma pessoa subisse o mesmo lance, também com velocidade constante em 2,0 min, ela realizaria um trabalho
 

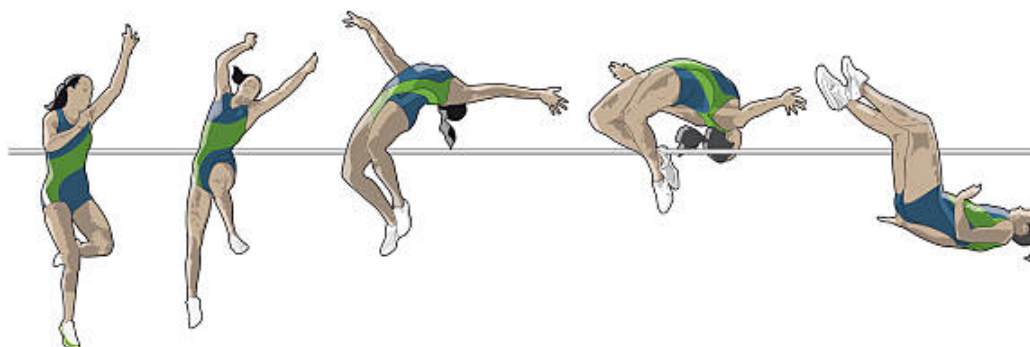
(A) duas vezes maior que o primeiro.                      (D) quatro vezes menor que o primeiro.  
 (B) duas vezes menor que o primeiro.                      (E) igual ao primeiro.  
 (C) quatro vezes maior que o primeiro.
  
2. (ENEM 2012 - Adaptada) Os carrinhos de brinquedo podem ser de vários tipos. Dentre eles, há os movidos a corda, em que uma mola em seu interior é comprimida quando a criança puxa o carrinho para trás. Ao ser solto, o carrinho entra em movimento enquanto a mola volta à sua forma inicial. O processo de conversão de energia que ocorre no carrinho descrito também é verificado em
 

(A) um freio de automóvel.                                      (D) uma usina hidroelétrica.  
 (B) um motor a combustão.                                      (E) uma atiradeira (estilingue).  
 (C) uma usina eólica.
  
3. (G1 - IFSP 2012 - Adaptada) Arlindo é um trabalhador dedicado. Passa grande parte do tempo de seu dia subindo e descendo escadas, pois trabalha fazendo manutenção em edifícios, muitas vezes no alto. Considere que, ao realizar um de seus serviços, ele tenha subido uma escada com velocidade escalar constante. Nesse movimento, pode-se afirmar que, em relação ao nível horizontal do solo, o centro de massa (ponto que se comporta como se toda a massa do corpo estivesse concentrada sobre ele) do corpo de Arlindo



- (A) perdeu energia cinética.  
 (B) ganhou energia cinética.  
 (C) perdeu energia potencial gravitacional.  
 (D) ganhou energia potencial gravitacional.  
 (E) perdeu energia mecânica.

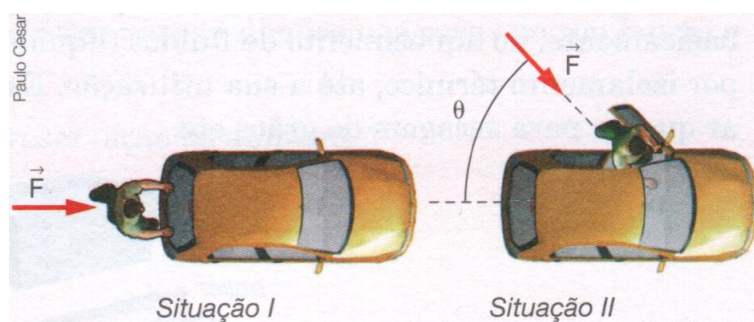
4. Determinado atleta usa 25% da energia cinética obtida na corrida para realizar um salto em altura sem vara. Se ele atingiu a velocidade de  $10 \text{ m/s}$ , considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , a altura atingida em razão da conversão de energia cinética em potencial gravitacional será de:



Fonte: <https://www.gettyimages.pt/detail/ilustra%C3%A7%C3%A3o/different-stages-of-athlete-performing-ilustra%C3%A7%C3%A3o-royalty-free/82106440>. (30/set./2021).

- (A) 1,12 m.  
 (B) 1,25 m.  
 (C) 2,5 m.  
 (D) 3,75 m.  
 (E) 5 m.
5. Um objeto de massa 500 g possui energia cinética de 2000 J. Determine a velocidade desse objeto em m/s. Adote  $\sqrt{5} = 2,23$ .
- (A)  $v = 36,6 \text{ m/s}$ .  
 (B)  $v = 44,7 \text{ m/s}$ .  
 (C)  $v = 50,4 \text{ m/s}$ .  
 (D)  $v = 62,8 \text{ m/s}$ .  
 (E)  $v = 89,2 \text{ m/s}$ .
6. (Enem 2010) Deseja-se instalar uma estação de geração de energia elétrica em um município localizado no interior de um pequeno vale cercado de altas montanhas de difícil acesso. A cidade é cruzada por um rio, que é fonte de água para consumo, irrigação das lavouras de subsistência e pesca. Na região, que possui pequena extensão territorial, a incidência solar é alta o ano todo. A estação em questão irá abastecer apenas o município apresentado.
- Qual forma de obtenção de energia, entre as apresentadas, é a mais indicada para ser implantada nesse município de modo a causar o menor impacto ambiental?
- (A) Termelétrica, pois é possível utilizar a água do rio no sistema de refrigeração.  
 (B) Eólica, pois a geografia do local é própria para a captação desse tipo de energia.

- (C) Nuclear, pois o modo de resfriamento de seus sistemas não afetaria a população.
- (D) Fotovoltaica, pois é possível aproveitar a energia solar que chega à superfície do local.
- (E) Hidrelétrica, pois o rio que corta o município é suficiente para abastecer a usina construída.
7. (UFF-RJ) Um motorista empurra um carro sem combustível até o posto mais próximo. Na primeira metade do trajeto, o motorista empurra o carro por trás (situação I) e na segunda metade do trajeto ele empurra pelo lado (situação II).



Nas figuras está também representada a força  $\vec{F}$ , que o motorista faz sobre o carro, em cada caso. Sabendo que a intensidade dessa força é constante e a mesma nas duas situações, é correto afirmar:

- (A) O trabalho realizado pelo motorista é maior na situação II.
- (B) O trabalho realizado pelo motorista é o mesmo nas duas situações.
- (C) A energia transferida para o carro pelo motorista é maior na situação I.
- (D) A energia transferida para o carro pelo motorista é menor na situação I.
- (E) O trabalho realizado pelo motorista é maior na situação I e é menor do que a energia por ele transferida para o carro na situação II.
8. O primeiro arranha-céu brasileiro foi construído na cidade de São Paulo. A construção foi iniciada em 1924, indo até 1934. Com 30 andares e 130 metros de altura, o Edifício Martinelli foi projetado pelo arquiteto húngaro William Fillinger.

Ao admirar a beleza arquitetônica do edifício, um turista percebeu que do topo do prédio alguém abandonou um objeto. Com base no texto, verifique qual afirmação está correta.



- (A) Após descer 65 m, a energia potencial do corpo é igual à energia cinética.
- (B) Ao atingir o solo, a energia potencial do corpo é máxima.
- (C) No ponto mais alto do edifício, a energia cinética do objeto é máxima.
- (D) No ponto mais alto do edifício, a energia cinética do objeto é metade da energia potencial.

9. A Física é o campo da ciência que investiga os fenômenos e as estruturas mais fundamentais da natureza, procurando sua compreensão e descrição em termos de leis mais gerais possíveis. Com essas leis, a Física estuda desde partículas subatômicas e sua estruturação em átomos e moléculas, até a descrição do Sistema Solar, das estrelas e das galáxias bem como do Universo como um todo, além da criação de modelos para a sua evolução. Em relação aos objetivos esperados a partir do estudo da Física e suas divisões, leia atentamente cada afirmação a seguir.

- I - Neste objetivo, procura-se desvendar os mistérios da natureza a fim de nos fazer entender mais sobre a nossa relação com o mundo e o universo, de forma a mostrar que não existem teorias, postulados, paradigmas ou modelos absolutos sobre essa relação, sendo todos relativos e suscetíveis a novas descobertas e entendimentos.
- II - Com este objetivo, leva-se as pessoas a analisarem causa e efeito de determinado fenômeno como uma relação e não se referindo a tudo como algo voltado as suas crenças e superstições, mas fazendo-as entender que existe uma diferença entre ambos.
- III - Tal objetivo visa melhorar as condições de vida do homem através da tecnologia, pois com ela pode-se realizar trabalhos de forma mais práticas; obtendo, assim, uma melhor qualidade de vida.

A correta associação dos objetivos esperados a partir do estudo da Física e suas divisões, com suas respectivas definições encontra-se em

- (A) I - Objetivo Especulativo, II - Objetivo Prático e III - Objetivo Esclarecedor.
  - (B) I - Objetivo Especulativo, II - Objetivo Esclarecedor e III - Objetivo Prático.
  - (C) I - Objetivo Esclarecedor, II - Objetivo Especulativo e III - Objetivo Prático.
  - (D) I - Objetivo Prático, II - Objetivo Esclarecedor e III - Objetivo Especulativo.
  - (E) I - Objetivo Prático, II - Objetivo Especulativo e III - Objetivo Esclarecedor.
10. Didaticamente, a Física é dividida em seis ramos: Acústica, Eletricidade, Física Moderna, Mecânica, Óptica e Termologia. Destes, o ramo mais antigo da Física, que estuda os fenômenos que são decorrentes dos movimentos dos corpos, ou seja, aqueles que se relacionam com a queda dos corpos, colisão de automóveis, movimentos dos planetas, dentre outros exemplos, é chamado de
- (A) Acústica.
  - (B) Eletricidade.
  - (C) Física Moderna.
  - (D) Mecânica.
  - (E) Termologia.

**CALMA, ATENÇÃO E SUCESSO EM SUAS RESOLUÇÕES!**

## APÊNDICE K – QUESTIONÁRIO IV (CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA)

Colégio/Escola: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_

Ano: 9º ano do Ensino Fundamental Turma: \_\_\_\_\_ Turno: \_\_\_\_\_

Professor(a): \_\_\_\_\_ Disciplina: \_\_\_\_\_

Aluno(a): \_\_\_\_\_

### QUESTIONÁRIO IV (CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA)

1. (UEM 2012 - Adaptada) Sobre a energia mecânica e a conservação de energia, julgue corretamente cada afirmação a seguir e assinale a **INCORRETA**.

- (A) Denomina-se energia cinética a energia que um corpo possui, por este estar em movimento.
- (B) Pode-se denominar de energia potencial gravitacional a energia que um corpo possui por se situar a uma certa altura acima da superfície terrestre.
- (C) A energia mecânica total de um corpo é conservada, mesmo com a ocorrência de atrito.
- (D) A energia total do universo é sempre constante, podendo ser transformada de uma forma para outra; entretanto, não pode ser criada e nem destruída.
- (E) Quando um corpo possui energia cinética, a força que ele aplica é capaz de realizar trabalho.

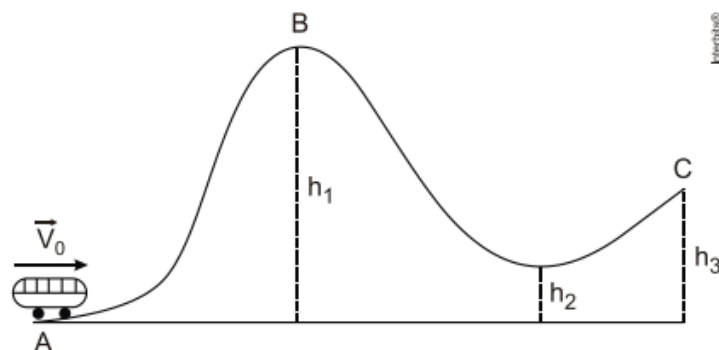
2. (UFMS 2013 - Adaptada) Um ônibus de massa  $m$  anda por uma estrada de montanha e desce uma altura  $h$ . O motorista mantém os freios acionados, de modo que a velocidade é mantida constante em módulo durante todo o trajeto. Considerando as afirmativas a seguir, julgue-as corretamente, identificando se são verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**).

- I - ( ) A variação da energia cinética do ônibus é nula.
- II - ( ) A energia mecânica do sistema ônibus-Terra se conserva, pois a velocidade do ônibus é constante.
- III - ( ) A energia total do sistema ônibus-Terra se conserva, embora parte da energia mecânica se transforme em energia interna.

O julgamento correto encontra-se em

- (A) I - V, II - V, III - F.      (C) I - F, II - F, III - V.      (E) I - F, II - V, III - F.
- (B) I - V, II - F, III - V.      (D) I - V, II - V, III - V.

3. (G1 - CFTMG 2012) Um carrinho é lançado sobre os trilhos de uma montanha russa, no ponto A, com uma velocidade inicial  $V_0$  conforme mostra a figura. As alturas  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$  valem, respectivamente,  $16,2\text{ m}$ ,  $3,4\text{ m}$  e  $9,8\text{ m}$ . Para o carrinho atingir o ponto C, desprezando o atrito e adotando  $g = 10\text{ m/s}^2$ , o menor valor de  $V_0$ , em  $\text{m/s}$ , deverá ser igual a



- (A) 10.  
 (B) 14.  
 (C) 18.  
 (D) 20.
4. Um motociclista desloca-se a  $72\text{ km/h}$  em uma via retilínea. Em dado momento, a velocidade é alterada para  $108\text{ km/h}$ . Sendo a massa do conjunto (moto + motociclista) de  $350\text{ kg}$ , determine a variação de energia cinética sofrida pelo motociclista. Adote:  $72\text{ km/h} = 20\text{ m/s}$  e  $108\text{ km/h} = 30\text{ m/s}$ .
- (A)  $\Delta E_c = 50\text{ kJ} = 50000\text{ J}$ .  
 (B)  $\Delta E_c = 87,5\text{ kJ} = 87500\text{ J}$ .  
 (C)  $\Delta E_c = 90\text{ kJ} = 90000\text{ J}$ .  
 (D)  $\Delta E_c = 97,5\text{ kJ} = 97500\text{ J}$ .  
 (E)  $\Delta E_c = 107,5\text{ kJ} = 107500\text{ J}$ .
5. (UFRRJ) Um goleiro chuta uma bola que descreve um arco de parábola, como mostra a figura abaixo. No ponto em que a bola atinge a altura máxima, pode-se afirmar que:



- (A) a energia potencial é máxima.
  - (B) a energia mecânica é nula.
  - (C) a energia cinética é nula.
  - (D) a energia cinética é máxima.
  - (E) nada se pode afirmar sobre as energias, pois não conhecemos a massa da bola.
6. O conceito de energia foi de suma importância para o desenvolvimento da ciência, em particular da Física. A energia mecânica é a energia produzida pelo trabalho de um corpo que pode ser transferida entre os corpos, correspondendo a soma da energia cinética ( $E_c$ ), produzida pelo movimento dos corpos, com a energia potencial elástica ( $E_{p_e}$ ) ou gravitacional ( $E_{p_g}$ ), produzida por meio da interação dos corpos relacionada com a posição dos mesmos. Sendo assim, podemos dizer que o princípio da conservação da energia mecânica diz que:
- (A) nada se perde, nada se cria, tudo se transforma.
  - (B) que a energia pode ser gastada e perdida.
  - (C) a energia total de um sistema isolado é constante.
  - (D) que a energia jamais pode ser transferida de um corpo a outro.
  - (E) a energia cinética de um corpo está relacionada com a força da gravidade.
7. A respeito da energia mecânica de um sistema conservativo, livre de forças dissipativas, assinale a alternativa correta:
- (A) Na presença de atrito, ou de outras forças dissipativas, a energia mecânica de um corpo em movimento aumenta.
  - (B) A energia mecânica de um corpo que se move livre da ação de quaisquer forças dissipativas mantém-se constante.
  - (C) Para que a energia mecânica de um corpo permaneça constante, é necessário que, quando houver aumento de energia cinética, também haja aumento de energia potencial.
  - (D) A energia potencial é a parte da energia mecânica relacionada à velocidade com o que o corpo desloca-se.
  - (E) A energia cinética de um corpo que se move livre da ação de quaisquer forças dissipativas mantém-se constante.
8. (PUC-PR) Um sistema de partículas está sujeito à ação exclusiva de forças conservativas. Então, é correto afirmar que:
- (A) a energia cinética do sistema permanece constante.
  - (B) não há variação da energia potencial do sistema.
  - (C) a trajetória das partículas é obrigatoriamente curvilínea.

- (D) um aumento na energia cinética do sistema implica obrigatoriamente em um aumento de sua energia mecânica.
- (E) a energia mecânica do sistema não varia.
9. (Fuvest-SP - Adaptada) Uma pedra com massa  $m = 0,10$  kg é lançada verticalmente para cima com energia cinética  $E_c = 20$  Joules. Qual a altura máxima atingida ela pedra? Adote:  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.
- (A) 10 m.
- (B) 15 m.
- (C) 20 m.
- (D) 1 m.
- (E) 0,2 m.
10. (Cefet-PR - Adaptada) Uma bola de 200 g de massa é lançada verticalmente para cima, de modo a possuir uma energia cinética de 50 J no instante do lançamento. Considerando  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> e desprezando a resistência do ar, a velocidade da bola ao atingir uma altura de 20 m será:
- (A) 22 m/s.
- (B) 10 m/s.
- (C) 5 m/s.
- (D) 3 m/s.
- (E) 0 m/s.

**APÊNDICE L – QUESTIONÁRIO V - AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA  
(PRODUTO EDUCACIONAL)**

**Colégio/Escola:** \_\_\_\_\_ **Data:** \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_\_

**Ano:** 9º ano do Ensino Fundamental **Turma:** \_\_\_\_\_ **Turno:** \_\_\_\_\_

**Aluno(a):** \_\_\_\_\_

**QUESTIONÁRIO V (AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA)**

1. Qual é o seu sexo?  
(A) Masculino. (B) Feminino.
2. Qual é a sua cor ou raça?  
(A) Branca. (C) Parda. (E) Indígena.  
(B) Preta. (D) Amarela. (F) Não quero declarar.
3. Você poderia nos dizer qual é o mês de seu aniversário?  
(A) Janeiro. (D) Abril. (G) Julho. (J) Outubro.  
(B) Fevereiro. (E) Maio. (H) Agosto. (K) Novembro.  
(C) Março. (F) Junho. (I) Setembro. (L) Dezembro.
4. Em que ano você nasceu?  
(A) 2009 ou depois. (C) 2007. (E) 2005. (G) 2003.  
(B) 2008. (D) 2006. (F) 2004. (H) 2002 ou antes.
5. Você tem alguma necessidade especial?  
(A) Não. (C) Sim, de ordem visual. (E) Sim, de ordem mental.  
(B) Sim, de ordem física. (D) Sim, de ordem auditiva.
6. Seus pais ou responsáveis incentivam você a estudar?  
(A) Sim. (B) Não.
7. Seus pais ou responsáveis incentivam você a fazer o dever de casa e/ou os trabalhos da escola?  
(A) Sim. (B) Não.
8. Seus pais ou responsáveis incentivam você a ler?  
(A) Sim. (B) Não.

9. Seus pais ou responsáveis incentivam você a ir à escola e/ou não faltar às aulas?  
(A) Sim. (B) Não.
10. Seus pais ou responsáveis conversam com você sobre o que acontece na escola?  
(A) Sim. (B) Não.
11. Em dias de aula, quanto tempo você gasta assistindo à TV, navegando na *internet* ou jogando jogos eletrônicos?  
(A) Menos de 1 hora. (D) Mais de 3 horas.  
(B) Entre 1 e 2 horas. (E) Mais de 2 horas, até 3 horas.  
(C) Não vejo TV, não navego na *internet* e não jogo jogos eletrônicos.
12. Em dias de aula, quanto tempo você gasta fazendo trabalhos domésticos (ex.: lavando louça, limpando o quintal etc.)?  
(A) Menos de 1 hora. (D) Mais de 3 horas.  
(B) Entre 1 e 2 horas. (E) Não faço trabalhos domésticos.  
(C) Mais de 2 horas, até 3 horas.
13. Atualmente você trabalha fora de casa (recebendo ou não salário)?  
(A) Sim. (B) Não.
14. Você já foi reprovado?  
(A) Não. (B) Sim, uma vez. (C) Sim, duas vezes ou mais.
15. Você gosta de estudar Ciências?  
(A) Sim. (B) Não.
16. Você gosta de estudar Matemática?  
(A) Sim. (B) Não.
17. Você sabe o que é Física ou o que se estuda nesta disciplina?  
(A) Sim. (B) Não.
18. Qual a diferença entre a Física e a Matemática?  
(A) Não sei. (B) Não tem. (C) As fórmulas. (D) A teoria.
19. Quando você terminar o 9º ano do Ensino Fundamental, você pretende:  
(A) Somente continuar estudando. (C) Continuar estudando e trabalhar.  
(B) Somente trabalhar. (D) Ainda não sei.

20. Para você, Simetria:

- (A) é qualquer figura ou forma geométrica.
- (B) trata-se apenas das reflexões nos espelhos.
- (C) é uma característica observada somente em obras de arte.
- (D) é um tipo especial de transformação, uma maneira de mover um objeto e ainda se preservar a estrutura ou alguma característica desse objeto.
- (E) Ainda não sei o significado.

21. Você conhece ou já ouviu falar sobre Évariste Galois?

- (A) Sim.
- (B) Não.

22. Você conhece ou já ouviu falar sobre Amalie Emmily Nöether, conhecida carinhosamente por Emmy Noether?

- (A) Sim.
- (B) Não.

23. Observe atentamente as seguintes figuras.



(a) Emmy Noether (1882-1935).



(b) Isaac Newton (1642-1727).



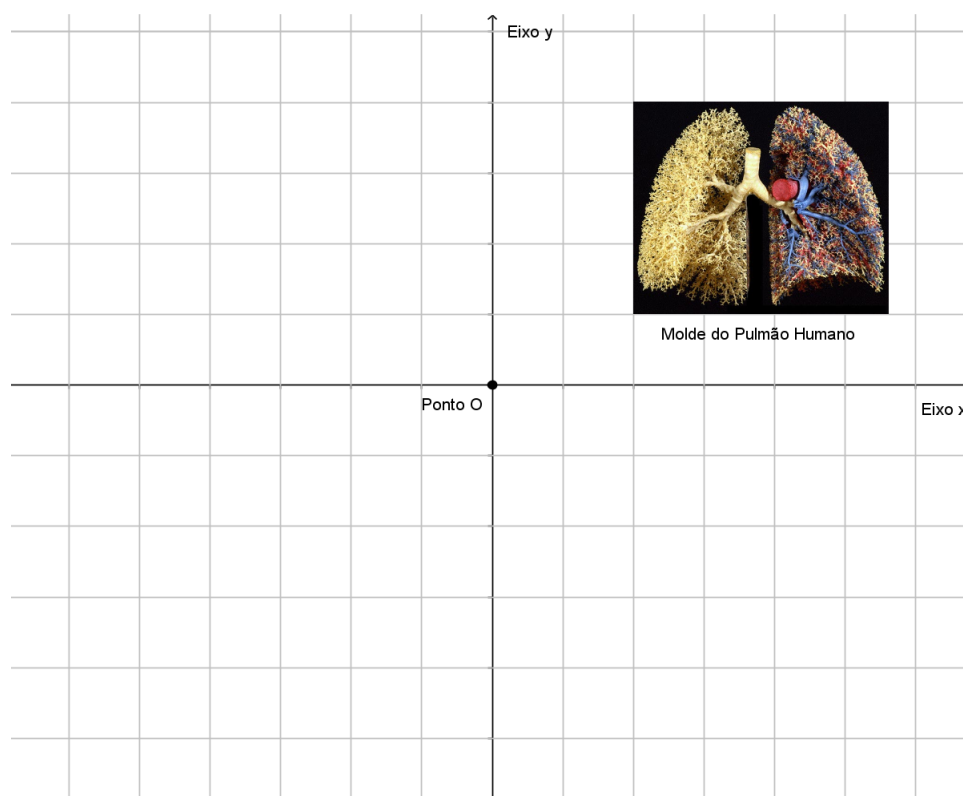
(c) Évariste Galois (1811-1832).



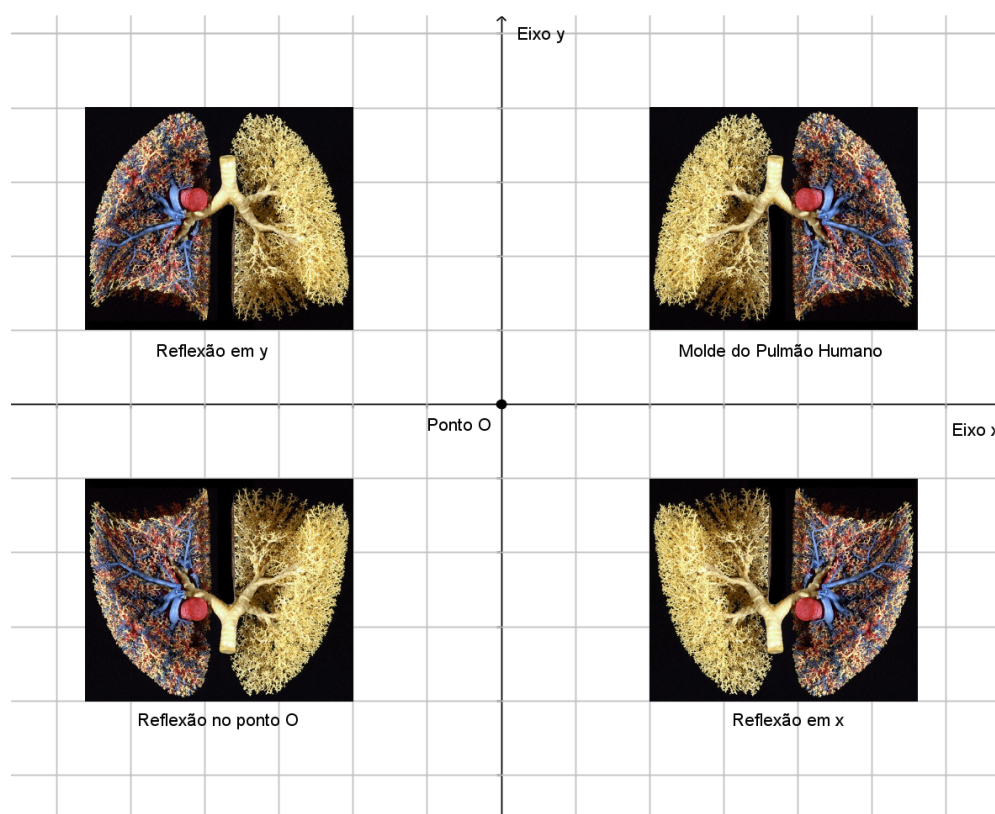
Considerando as figuras (a), (b) e (c), podemos dizer que as transformações ocorridas em cada uma delas, respectivamente, foram:

- (A) rotação, translação e reflexão.
- (B) translação, reflexão e rotação.
- (C) reflexão, rotação e translação.
- (D) translação, rotação e reflexão.

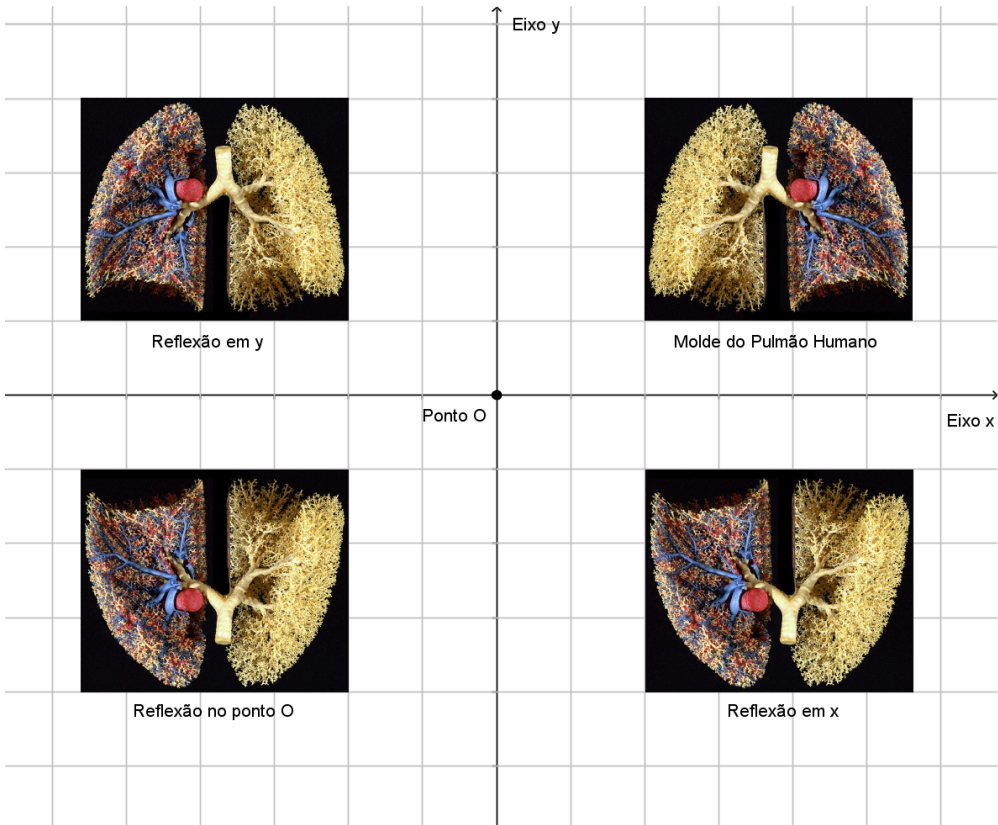
24. Observe o molde do Pulmão Humano na malha quadriculada a seguir.



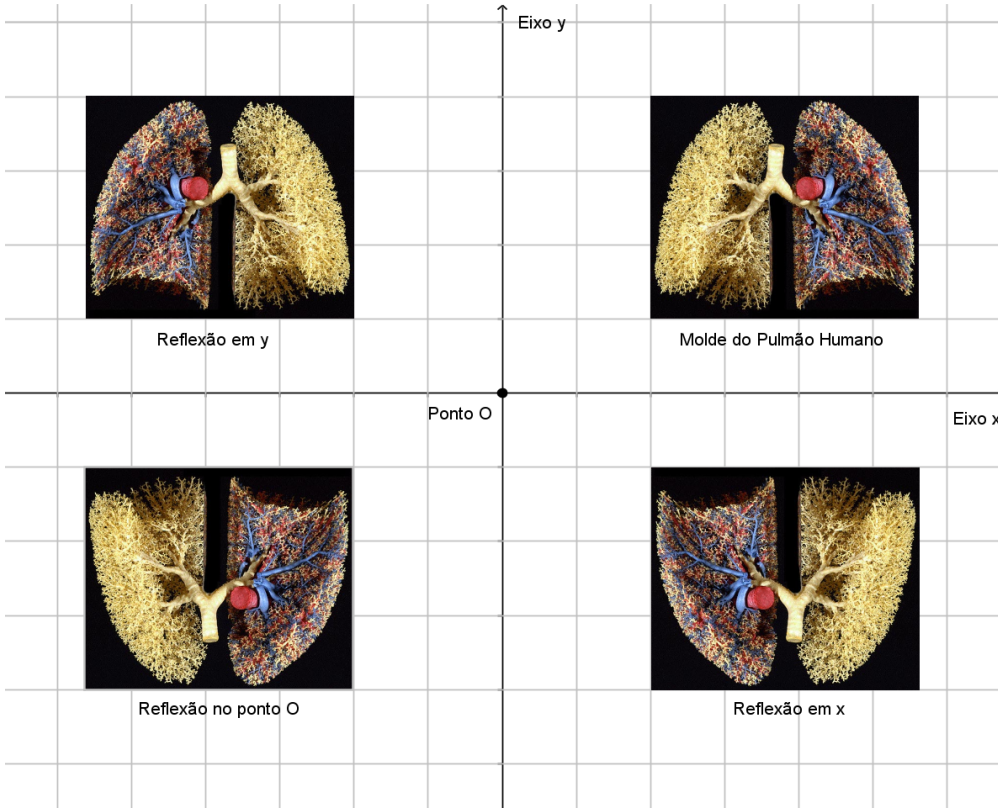
A representação correta da reflexão desse Pulmão em relação ao **eixo de simetria y**, em relação ao **centro de simetria O** e em relação ao **eixo de simetria x** está representado em:



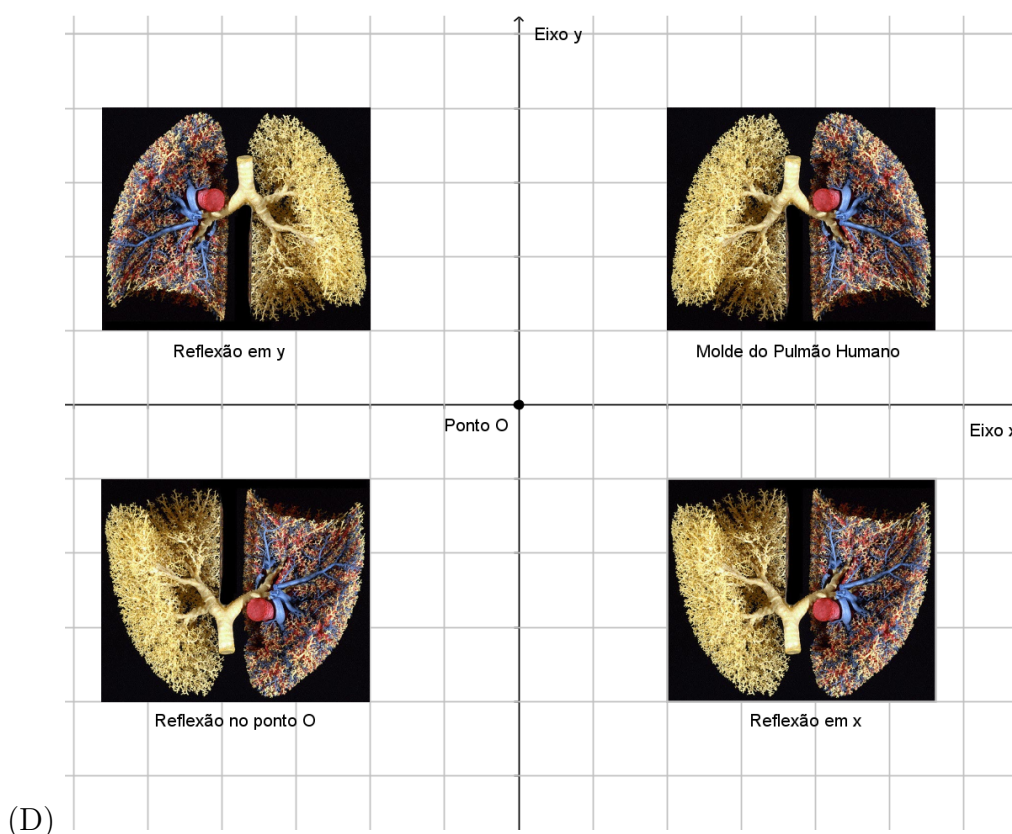
(A)



(B)



(C)



25. O conceito de energia foi de suma importância para o desenvolvimento da ciência, em particular da Física. A energia mecânica é a energia produzida pelo trabalho de um corpo que pode ser transferida entre os corpos, correspondendo a soma da energia cinética ( $E_c$ ), produzida pelo movimento dos corpos, com a energia potencial elástica ( $E_{p_e}$ ) ou gravitacional ( $E_{p_g}$ ), produzida por meio da interação dos corpos relacionada com a posição dos mesmos. Sendo assim, podemos dizer que o princípio da conservação da energia mecânica diz que:
- (A) nada se perde, nada se cria, tudo se transforma.
  - (B) que a energia pode ser gastada e perdida.
  - (C) a energia total de um sistema isolado é constante.
  - (D) que a energia jamais pode ser transferida de um corpo a outro.
  - (E) a energia cinética de um corpo está relacionada com a força da gravidade.

**AGRADEÇO PELA PRESTEZA E ATENÇÃO DISPENSADA!**

**APÊNDICE M – QUESTIONÁRIO VI - *FEEDBACK* DO(A) ALUNO(A)  
(PRODUTO EDUCACIONAL)**

**Colégio/Escola:** \_\_\_\_\_ **Data:** \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

**Ano:** 9º ano do Ensino Fundamental **Turma:** \_\_\_\_\_ **Turno:** \_\_\_\_\_

**Aluno(a):** \_\_\_\_\_

**QUESTIONÁRIO VI - *FEEDBACK* DO(A) ALUNO(A)**

**SOBRE O CONTEÚDO APRESENTADO**

1. O conteúdo foi apresentado de forma clara e objetiva?
 

(A) Concordo Totalmente.	(C) Discordo Parcialmente.
(B) Concordo Parcialmente.	(D) Concordo Totalmente.
  
2. O conteúdo é aplicável no dia a dia?
 

(A) Concordo Totalmente.	(C) Discordo Parcialmente.
(B) Concordo Parcialmente.	(D) Concordo Totalmente.

**SOBRE A METODOLOGIA APLICADA**

3. Houve clareza na exposição?
 

(A) Concordo Totalmente.	(C) Discordo Parcialmente.
(B) Concordo Parcialmente.	(D) Concordo Totalmente.
  
4. Houve estímulo à participação dos(as) alunos(as)?
 

(A) Concordo Totalmente.	(C) Discordo Parcialmente.
(B) Concordo Parcialmente.	(D) Concordo Totalmente.

**SOBRE A AVALIAÇÃO GERAL DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA**

5. Atendeu minhas expectativas?
 

(A) Concordo Totalmente.	(C) Discordo Parcialmente.
(B) Concordo Parcialmente.	(D) Concordo Totalmente.
  
6. Cumpriu os objetivos propostos?
 

(A) Concordo Totalmente.	(C) Discordo Parcialmente.
(B) Concordo Parcialmente.	(D) Concordo Totalmente.

7. Tive um bom nível de aproveitamento?

- (A) Concordo Totalmente. (C) Discordo Parcialmente.  
 (B) Concordo Parcialmente. (D) Concordo Totalmente.

PRA DEIXAR CLARO

8. Qual é a ciência que estuda os fenômenos da natureza, está muito presente em nosso cotidiano, é uma das áreas das Ciências Naturais, estuda os fenômenos que acontecem com a matéria no decorrer do espaço e do tempo e, ainda, é a área do conhecimento responsável pela explicação de fenômenos que relacionam diferentes formas de energia com a matéria?

- (A) Biologia (B) Física (C) Matemática (D) Química

9. A simetria não deve estar apenas relacionada à beleza e perfeição, seu conceito permeia também as ciências, sendo considerada um conceito-chave na Física. Ela possui um papel central nas fronteiras da Física, no Mundo Quântico e na Relatividade, podendo promover uma unificação matemática dos principais campos da Física Moderna. Essa ideia é básica na atual compreensão científica do Universo e suas origens. Assim, o conceito de simetria está melhor representado em:

- (A) é qualquer figura ou forma geométrica.  
 (B) trata-se apenas das reflexões nos espelhos.  
 (C) é uma característica observada somente em obras de arte.  
 (D) é um tipo especial de transformação, uma maneira de mover um objeto e ainda se preservar a estrutura ou alguma característica desse objeto.  
 (E) Ainda não sei o significado.

QUESTÕES DISCURSIVAS

10. Realizamos, no decorrer dos nossos encontros, uma sequência de atividades. Qual(is) foi(foram) a(s) mais interessante(s)? Por quê?

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



**APÊNDICE N – QUESTIONÁRIO VII - *FEEDBACK* DO(A)  
PROFESSOR(A) DE MATEMÁTICA E/OU CIÊNCIAS DE EDUCAÇÃO  
BÁSICA (PRODUTO EDUCACIONAL)**

**Colégio/Escola:** \_\_\_\_\_ **Data:** \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_  
**Professor(a):** \_\_\_\_\_

**QUESTIONÁRIO VII (*FEEDBACK* DO(A) PROFESSOR(A) DE  
MATEMÁTICA E/OU CIÊNCIAS DE EDUCAÇÃO BÁSICA)**

1. SEXO?  
(A) Masculino.                      (B) Feminino.
  
2. IDADE?  
(A) Até 24 anos.                      (C) De 30 a 39 anos.                      (E) De 50 a 54 anos.  
(B) De 25 a 29 anos.                      (D) De 40 a 49 anos.                      (F) 55 ou mais.
  
3. COMO VOCÊ SE CONSIDERA?  
(A) Branco(a).      (B) Pardo(a).      (C) Preto(a).      (D) Amarelo(a).      (E) Indígena.
  
4. QUAL O SEU NÍVEL DE ESCOLARIDADE (ATÉ A GRADUAÇÃO)?  
(A) Ensino Médio – Magistério (antigo 2º grau).  
(B) Ensino Médio – Outros (antigo 2º grau).  
(C) Ensino Superior – Licenciatura em Ciências Biológicas.  
(D) Ensino Superior – Licenciatura em Física.  
(E) Ensino Superior – Licenciatura em Matemática.  
(F) Ensino Superior – Licenciatura em Química.  
(G) Ensino Superior – Pedagogia.  
(H) Ensino Superior – Outros.
  
5. HÁ QUANTOS ANOS VOCÊ OBTEVE O NÍVEL DE ESCOLARIDADE ASSINALADO ANTERIORMENTE?  
(A) Há 2 anos ou menos.                      (C) De 8 a 14 anos.                      (E) Há mais de 20 anos.  
(B) De 3 a 7 anos.                      (D) De 15 a 20 anos.
  
6. INDIQUE A MODALIDADE DE CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE MAIS ALTA TITULAÇÃO QUE VOCÊ POSSUI.  
(A) Atualização (mínimo de 180 horas).                      (D) Mestrado.  
(B) Especialização (mínimo de 360 horas).                      (E) Doutorado.  
(C) Não fiz ou ainda não completei curso de pós-graduação.

7. HÁ QUANTOS ANOS VOCÊ ESTÁ LECIONANDO?
- (A) Há menos de 1 ano. (D) De 6 a 9 anos. (G) Há mais de 20 anos.  
(B) De 1 a 2 anos. (E) De 10 a 15 anos.  
(C) De 3 a 5 anos. (F) De 16 a 20 anos.
8. HÁ QUANTOS ANOS VOCÊ TRABALHA NESTA ESCOLA?
- (A) Há menos de 1 ano. (D) De 6 a 9 anos. (G) Há mais de 20 anos.  
(B) De 1 a 2 anos. (E) De 10 a 15 anos.  
(C) De 3 a 5 anos. (F) De 16 a 20 anos.
9. EM QUANTAS ESCOLAS VOCÊ TRABALHA?
- (A) Apenas nesta escola. (B) 2 escolas. (C) 3 escolas. (D) 4 ou mais.
10. QUAL(IS) DISCIPLINA(S) VOCÊ JÁ MINISTROU ANTES DO ANO DE 2021?
- (A) Ciências (Ensino Fundamental).  
(B) Matemática (Ensino Fundamental).  
(C) Física (Ensino Médio).  
(D) Matemática (Ensino Médio).  
(E) Química (Ensino Médio).  
(F) Não ministrei nenhuma das disciplinas citadas anteriormente.
11. QUAL(IS) DISCIPLINA(S) VOCÊ ESTÁ MINISTRANDO EM 2021?
- (A) Ciências (Ensino Fundamental).  
(B) Matemática (Ensino Fundamental).  
(C) Física (Ensino Médio).  
(D) Matemática (Ensino Médio).  
(E) Química (Ensino Médio).  
(F) Não estou ministrando nenhuma das disciplinas citadas anteriormente.

**SOBRE OS MATERIAIS INSTRUCIONAIS APRESENTADOS**

12. OS CONTEÚDOS SÃO PROPOSTOS E ABORDADOS NOS QUATRO VÍDEOS INSTRUCIONAIS DE FORMA QUE SEJAM SIGNIFICATIVOS E FUNCIONAIS PARA OS(AS) ALUNOS(AS)?
- (A) Sim. (B) Não.
13. PODE-SE INFERIR QUE O TEMA PROPOSTO E A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DOS CONTEÚDOS APRESENTADOS SÃO ADEQUADOS AO NÍVEL DE DESENVOLVIMENTO DOS(AS) ALUNOS(AS) AOS QUAIS SE DESTINAM?
- (A) Sim. (B) Não.

14. AS ATIVIDADES PROPOSTAS REPRESENTAM UM DESAFIO ALCANÇÁVEL PARA O(A) ALUNO(A), LEVANDO EM CONTA SUAS COMPETÊNCIAS ATUAIS E PERMITINDO QUE POSSAM AVANÇAR COM A APRENDIZAGEM?  
(A) Sim. (B) Não.
15. EXISTEM ATIVIDADES QUE EVOQUEM UM CONFLITO COGNITIVO E PROMOVAM A ATIVIDADE MENTAL DO(A) ALUNO(A), NECESSÁRIA PARA QUE ESTABELEÇA RELAÇÕES ENTRE OS NOVOS CONTEÚDOS E OS CONHECIMENTOS PRÉVIOS?  
(A) Sim. (B) Não.
16. EXISTEM ATIVIDADES QUE PROMOVEM UMA ATITUDE FAVORÁVEL, SERVINDO COMO AGENTES MOTIVADORES EM RELAÇÃO À APRENDIZAGEM DOS NOVOS CONTEÚDOS?  
(A) Sim. (B) Não.
17. AS ATIVIDADES PROPOSTAS ESTIMULAM A AUTOESTIMA E O AUTOCONHECIMENTO EM RELAÇÃO ÀS APRENDIZAGENS QUE SE PROPÕEM, FAZENDO COM QUE O(A) ALUNO(A) SINTA QUE APRENDEU E QUE SEU ESFORÇO FOI RECOMPENSADO?  
(A) Sim. (B) Não.
18. ESSE MATERIAL INSTRUCIONAL AJUDA O(A) ALUNO(A) A ADQUIRIR HABILIDADES QUE LHE PERMITAM SER CADA VEZ MAIS AUTÔNOMO(A) EM SUAS APRENDIZAGENS?  
(A) Sim. (B) Não.
19. ESSA SEQUÊNCIA DIDÁTICA JUNTAMENTE COM OS QUATRO VÍDEOS INSTRUCIONAIS CRIADOS E DISPONIBILIZADOS CONTRIBUEM, DE FORMA SIGNIFICATIVA, PARA O SEU DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL E/OU PARA O EXERCÍCIO DE SUA PROFISSÃO, ENQUANTO PROFESSOR(A)?  
(A) Sim. (B) Não.
20. PROFESSOR(A), AVALIE O SEU GRAU DE SATISFAÇÃO COM ESSE MATERIAL INSTRUCIONAL.  
(A) Ótimo. (B) Bom. (C) Regular.
21. UTILIZE O ESPAÇO ABAIXO PARA MAIORES CONSIDERAÇÕES COMO: CRÍTICAS, COMENTÁRIOS OU SUGESTÕES PARA MELHORAR A QUALIDADE DO TRABALHO.
- 
- 
-



## APÊNDICE O – PRODUTO EDUCACIONAL - ACESSOS

### O.1 *Link* de Acesso (Versão Completa)

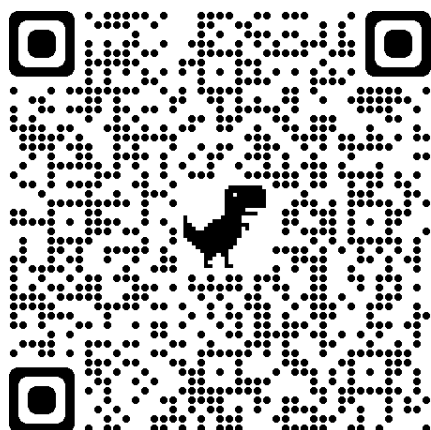
[https://drive.google.com/file/d/1MRehUbDdy0\\_kUNXjpbvjmHq3YxwndA3/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/1MRehUbDdy0_kUNXjpbvjmHq3YxwndA3/view?usp=sharing)

### O.2 *Website* PREZI

Esse produto Educacional encontra-se disponível por meio de apresentação no *software* Prezi.

<https://prezi.com/p/tlem4vfnq9z5/sequencia-didatica-simetria-e-leis-de-conservacao-na-fisica/>,

ou pelo *QR Code* abaixo:



Para fazer a leitura do código QR acima, em *smartphone* ou *tablet Android* compatível, abra o aplicativo de câmera integrado, aponte a câmera para o código QR e toque no *banner* que aparecerá. Espero que este material seja muito significativo e, principalmente, que possa contribuir no exercício de sua profissão.

### O.3 O Produto Educacional em Anexo

A versão completa, do Produto Educacional mencionado, ainda pode ser encontrado no ANEXO C dessa dissertação.

**ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO E ANUÊNCIA  
DEVIDAMENTE CARIMBADO E ASSINADO (ESCOLA MUNICIPAL  
OROZINA MARIA MARTINS)**

**APÊNDICE C – TERMO DE CONSENTIMENTO E ANUÊNCIA  
(ESCOLA MUNICIPAL OROZINA MARIA MARTINS)**

**TERMO DE CONSENTIMENTO E ANUÊNCIA**

Eu, José Neto de Oliveira, discente do Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF), na Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, com pesquisa intitulada “SIMETRIAS NA NATUREZA E LEIS DE CONSERVAÇÃO NA FÍSICA: abordagens relevantes e significativas para o 9º ano do ensino fundamental”, orientado pela Profª. Drª. Ana Rita Pereira, estarei desenvolvendo parte dessa pesquisa e aplicação do produto educacional (sequência didática) na Escola Municipal Orozina Maria Martins, localizada na Rua Serra Dourada, s/n, Jardim Serrano, Caldas Novas - GO.

A sequência didática pode ser entendida como sendo um procedimento simples, mas que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si. Desse modo, o objetivo será oferecer, ao(a) professor(a) de Ciências ou de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, uma proposta de trabalho que aborda a Simetria e Leis de Conservação na Física, possibilitando, ao estudante dessa fase, um acesso inicial a esse ensino, fazendo com que a aprendizagem se desenvolva de forma interessante e prazerosa, despertando um maior interesse pela disciplina de Física e, ainda, servindo como um agente motivador para prosseguimentos de estudos em áreas científicas.

Caso necessite esclarecer alguma dúvida em relação ao estudo, estou à disposição para prestar quaisquer esclarecimentos via *e-mail* (profnetomatfis@gmail.com) ou, inclusive, sob forma de ligação a cobrar, através do seguinte contato telefônico/*WhatsApp*: (64) 9 9221 5554. Se vossa senhoria estiver de acordo, posso garantir que as informações fornecidas serão confidenciais, e os dados utilizados apenas para fins de análises científicas.

Eu, Wanderson Martins Ferreira, diretor da Escola Municipal Orozina Maria Martins, fui esclarecido sobre a pesquisa citada acima e concordo que estes dados sejam utilizados na realização da mesma, considerando seu mérito e caráter científico. Portanto declaro, para os devidos fins, o aceite para que essa pesquisa seja desenvolvida nessa instituição de ensino.

Caldas Novas, 04 de outubro de 2021.



  
 Assinatura e carimbo do diretor
 

Figura A.1 – Termo de Consentimento e Anuência devidamente carimbado e assinado pelo diretor da Escola Municipal Orozina Maria Martins.

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

**ANEXO B – TERMO DE CONSENTIMENTO E ANUÊNCIA  
DEVIDAMENTE CARIMBADO E ASSINADO (COLÉGIO ESTADUAL  
DOM PEDRO II)**



**TERMO DE CONSENTIMENTO E ANUÊNCIA**

Eu, José Neto de Oliveira, discente do Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF), na Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, com pesquisa intitulada “SIMETRIAS NA NATUREZA E LEIS DE CONSERVAÇÃO NA FÍSICA: abordagens relevantes e significativas para o 9º ano do ensino fundamental”, orientado pela Profª. Drª. Ana Rita Pereira, estarei desenvolvendo parte dessa pesquisa e aplicação do produto educacional (sequência didática) no Colégio Estadual Dom Pedro II, localizado na Rua Ciro Palmerston, 660, Setor Oeste, Caldas Novas - GO.

A sequência didática pode ser entendida como sendo um procedimento simples, mas que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si. Desse modo, o objetivo será oferecer, ao(a) professor(a) de Ciências ou de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, uma proposta de trabalho que aborda a Simetria e Leis de Conservação na Física, possibilitando, ao estudante dessa fase, um acesso inicial a esse ensino, fazendo com que a aprendizagem se desenvolva de forma interessante e prazerosa, despertando um maior interesse pela disciplina de Física e, ainda, servindo como um agente motivador para prosseguimentos de estudos em áreas científicas.

Caso necessite esclarecer alguma dúvida em relação ao estudo, estou à disposição para prestar quaisquer esclarecimentos via *e-mail* (profnetomatfis@gmail.com) ou, inclusive, sob forma de ligação a cobrar, através do seguinte contato telefônico/ *WhatsApp*: (64) 9 9221 5554. Se vossa senhoria estiver de acordo, posso garantir que as informações fornecidas serão confidenciais, e os dados utilizados apenas para fins de análises científicas.

Eu, Lindomar Marques de Oliveira, diretor do Colégio Estadual Dom Pedro II, fui esclarecido sobre a pesquisa citada acima e concordo que estes dados sejam utilizados na realização da mesma, considerando seu mérito e caráter científico. Portanto declaro, para os devidos fins, o aceite para que essa pesquisa seja desenvolvida nessa instituição de ensino.

Caldas Novas, 04 de outubro de 2021.

Assinatura e carimbo do diretor

Figura B.1 – Termo de Consentimento e Anuência devidamente carimbado e assinado pelo diretor do Colégio Estadual Dom Pedro II.

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

**ANEXO C – O PRODUTO EDUCACIONAL**



**Regional  
Catalão**



**SIMETRIAS NA NATUREZA E LEIS DE CONSERVAÇÃO NA FÍSICA:  
abordagens relevantes e significativas para o 9º ano do ensino fundamental**

**José Neto de Oliveira**

Produto Educacional composto por uma sequência didática, quatro vídeos instrucionais explicativos e uma apresentação disponibilizada no *website* Prezi, associado a dissertação de mestrado de José Neto de Oliveira, apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Prof. Dr. Julio Santiago Espinoza Ortiz

CATALÃO - GO  
Junho de 2021



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA DE TRABALHO . . . . .</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>SEQUÊNCIA DIDÁTICA . . . . .</b>	<b>11</b>
2.1	IDENTIFICAÇÃO . . . . .	11
2.2	COMPETÊNCIAS GERAIS DA BNCC . . . . .	11
2.3	COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DA BNCC . . . . .	11
2.4	HABILIDADES DO DC-GO . . . . .	12
2.5	OBJETO DO CONHECIMENTO (CONTEÚDOS) . . . . .	12
2.6	DESENVOLVIMENTO, DESCRIÇÃO OU ETAPAS . . . . .	14
2.6.1	<b>Aula 1 - 50 min (VÍDEO 1 - CONTEXTO HISTÓRICO DA SIMETRIA, ÉVARISTE GALOIS E EMMY NOETHER) . . .</b>	<b>14</b>
2.6.1.1	Objetivos . . . . .	14
2.6.1.2	Metodologia ou Descrição . . . . .	14
2.6.1.3	Recursos Necessários . . . . .	14
2.6.1.4	Proposta de Avaliação . . . . .	15
2.6.2	<b>Aula 2 - 50 min (QUESTIONÁRIO I - SIMETRIAS: CON- TEXTO HISTÓRICO, ÉVARISTE GALOIS E EMMY NO- ETHER) . . . . .</b>	<b>15</b>
2.6.2.1	Objetivos . . . . .	15
2.6.2.2	Metodologia ou Descrição . . . . .	15
2.6.2.3	Recursos Necessários . . . . .	15
2.6.2.4	Proposta de Avaliação . . . . .	16
2.6.3	<b>Aula 3 - 50min (VÍDEO 2 - SIMETRIAS NA NATUREZA E NA MATEMÁTICA) . . . . .</b>	<b>16</b>
2.6.3.1	Objetivos . . . . .	16
2.6.3.2	Metodologia ou Descrição . . . . .	16
2.6.3.3	Recursos Necessários . . . . .	17
2.6.3.4	Proposta de Avaliação . . . . .	17
2.6.4	<b>Aula 4 - 50 min (QUESTIONÁRIO II - SIMETRIAS NA NA- TUREZA E NA MATEMÁTICA) . . . . .</b>	<b>17</b>
2.6.4.1	Objetivos . . . . .	17
2.6.4.2	Metodologia ou Descrição . . . . .	17
2.6.4.3	Recursos Necessários . . . . .	18
2.6.4.4	Proposta de Avaliação . . . . .	18
2.6.5	<b>Aula 5 - 50min (VÍDEO 3 - FÍSICA, ENERGIA, TRABALHO E ENERGIA E ENERGIA MECÂNICA) . . . . .</b>	<b>18</b>

2.6.5.1	Objetivos . . . . .	18
2.6.5.2	Metodologia ou Descrição . . . . .	19
2.6.5.3	Recursos Necessários . . . . .	19
2.6.5.4	Proposta de Avaliação . . . . .	19
2.6.6	<b>Aula 6 - 50 min (QUESTIONÁRIO III - FÍSICA, ENERGIA, TRABALHO E ENERGIA E ENERGIA MECÂNICA)</b> . . . . .	20
2.6.6.1	Objetivos . . . . .	20
2.6.6.2	Metodologia ou Descrição . . . . .	20
2.6.6.3	Recursos Necessários . . . . .	20
2.6.6.4	Proposta de Avaliação . . . . .	20
2.6.7	<b>Aula 7 - 50 min (VÍDEO 4 - CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA)</b> . . . . .	21
2.6.7.1	Objetivos . . . . .	21
2.6.7.2	Metodologia ou Descrição . . . . .	21
2.6.7.3	Recursos Necessários . . . . .	21
2.6.7.4	Proposta de Avaliação . . . . .	22
2.6.8	<b>Aula 8 - 50 min (QUESTIONÁRIO IV - SIMETRIAS NA NATUREZA E NA MATEMÁTICA)</b> . . . . .	22
2.6.8.1	Objetivos . . . . .	22
2.6.8.2	Metodologia ou Descrição . . . . .	22
2.6.8.3	Recursos Necessários . . . . .	22
2.6.8.4	Proposta de Avaliação . . . . .	22
<b>3</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>24</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>27</b>
	<b>APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO I (SIMETRIAS: CONTEXTO HISTÓRICO, ÉVARISTE GALOIS E EMMY NOETHER)</b> . . . . .	<b>28</b>
	<b>APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO II (SIMETRIAS NA NATUREZA E NA MATEMÁTICA)</b> . . . . .	<b>35</b>
	<b>APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO III (FÍSICA, ENERGIA, TRABALHO E ENERGIA MECÂNICA)</b> . . . . .	<b>46</b>
	<b>APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO IV (CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA)</b> . . . . .	<b>52</b>

## 1 APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA DE TRABALHO

Caro(a) professor(a),

Este material foi elaborado em função de uma exigência louvável do programa Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF) para aquisição do grau de mestre em Ensino de Física. Trata-se do chamado Produto Educacional (PE), um instrumento independente da dissertação de mestrado, destinado a você, professor(a) de Ciências e/ou Matemática do último ano do Ensino Fundamental ou professor(a) de Física e/ou Matemática do Ensino Médio, com o propósito de auxiliá-lo(a) em sua prática docente cotidiana. Iniciaremos discutindo os aspectos referentes ao conceito de simetrias em física.

Desde os primórdios da civilização ocidental atual, na Grécia antiga, associamos as noções de beleza e harmonia ao conceito da simetria, mas é importante perceber que as equações matemáticas e as leis da natureza também podem apresentar característica de simetria com relação a certas operações de transformações. Um exemplo pode ser observado na carambola, por preservar sua forma original após rotações feitas em múltiplos inteiros de um ângulo mínimo de  $72^\circ$ , por apresentar uma simetria pentarradial, como mostrado na seguinte figura (Fig. 1.1).



Figura 1.1 – A beleza e simetria da Carambola.

Fonte: Adaptada de <https://opas.org.br/carambola-conheca-seus-beneficios/>, (2020).

Segundo Moreira (2019, p. 2, grifo do autor), “[...] um sistema físico tem simetria se for feita uma mudança nesse sistema tal que após essa mudança o mesmo continue exatamente como era antes [...] *simetria é uma invariância de um objeto ou sistema frente a uma transformação*”. O papel da simetria na Física é revelar as transformações que levam as invariâncias de seus objetos de estudo, para que se possa entender as leis de conservação, sendo o teorema de Noether a conexão formal entre simetrias e leis de conservação das grandezas físicas.

Física é uma ciência experimental, pois o físico observa fenômenos naturais na tentativa de encontrar padrões e os princípios que relacionam esses fenômenos. Tais padrões são denominados teorias, leis ou princípios físicos. É uma ciência sobre a qual todas as outras ciências naturais e de engenharia são construídas. Todos os avanços

tecnológicos modernos têm sua origem direta na física básica. A boa compreensão de seus conceitos essenciais oferece uma base sólida para o desenvolvimento de conhecimentos avançados em todas as ciências. As leis de conservação e os princípios de simetria da física também são válidos para todos os fenômenos científicos e para muitos aspectos da vida cotidiana.

Uma lei de conservação estabelece que determinada propriedade mensurável de um sistema físico isolado é invariante no tempo. Cada lei de conservação é uma identidade matemática que se aplica ao sistema. A física moderna admite, entre outras, as seguintes leis de conservação (para as quais nunca se observou uma violação): lei da conservação de energia, lei da conservação do momento linear, lei da conservação do momento angular e lei da conservação de cargas. Na matemática, o termo lei de conservação, por analogia, é usado para indicar qualquer quantidade que se mantenha inalterada com o tempo em modelo matemático.

A teoria de grupos é um ramo da matemática que estuda as estruturas algébricas, conhecidas como grupos, e deve ser considerada ao se lidar com simetrias e leis de conservação. Sua linguagem, segundo Stewart (2012, p. 9 e 261), “[...] é usada tanto na matemática pura quanto na aplicada, na qual regula a formação dos padrões do mundo natural [...] Métodos de teoria de grupo passaram a dominar a mecânica quântica, dadas a influência e a onipresença da simetria.”. Tais grupos são usados geralmente para capturar simetrias internas de estruturas (caracterizadas pelo spin), associada com algumas propriedades invariantes que são preservadas por um conjunto de transformações que, juntamente com a sua operação de composição de transformação, formam o grupo de simetrias.

Apesar da simetria possuir um papel fundamental no entendimento das leis de conservação na Física, seu ensino não faz parte do currículo escolar da educação básica e raramente é abordado nos anos iniciais dos cursos superiores de ciências exatas. Para um estudante da educação básica, não é evidente que além dos objetos, também as equações matemáticas e as leis da natureza possam apresentar característica de simetria com relação a certas transformações.

Neste sentido, esse PE apresenta uma sequência didática (SD), composta por quatro vídeos instrucionais explicativos e uma apresentação disponibilizada no *website* Prezi, tendo como objetivo oferecer, ao(a) professor(a) de Ciências ou de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, uma proposta de trabalho que aborda a Simetria e Leis de Conservação na Física. Com isso, espera-se possibilitar, ao estudante dessa fase, um acesso inicial a esse ensino, fazendo com que a aprendizagem se desenvolva de forma interessante e prazerosa, despertando um maior interesse pela disciplina de Física e, ainda, servindo como um agente motivador, influenciando, de forma positiva, na escolha de prosseguimentos de estudos em áreas científicas.

A indicação desse material para o contexto da educação básica, especificamente no último ano do ensino fundamental, se enquadra nas orientações contidas na própria Base Nacional Comum Curricular<sup>1</sup> (BNCC) e no Documento Curricular para Goiás<sup>2</sup> (DC-GO - Ampliado). Segundo a BNCC,

“[...] à medida que se aproxima a conclusão do Ensino Fundamental, os alunos são capazes de estabelecer relações ainda mais profundas entre a ciência, a natureza, a tecnologia e a sociedade, o que significa lançar mão do conhecimento científico e tecnológico para compreender os fenômenos e conhecer o mundo, o ambiente, a dinâmica da natureza.” (BRASIL, 2018, p. 343).

A abordagem educacional para elaboração desse PE pautou-se na teoria da aprendizagem significativa crítica, uma versão crítica da Teoria da Aprendizagem Significativa proposta por Moreira (2000). Conforme afirma Moreira (2012, p. 22, grifo do autor), “*Aprendizagem significativa crítica* é aquela perspectiva que permite o sujeito formar parte de sua cultura e, ao mesmo tempo, estar fora dela.” Trata-se de uma perspectiva antropológica em relação às atividades de seu grupo social, na qual a aprendizagem significativa dos conteúdos é indispensável, pois não tem sentido ser crítico de conhecimentos sem significado.

De acordo com Gonçalves (2012, apud SILVA, 2018, p. 17), “[...] uma pesquisa realizada pelo site Seu Professor comprovou que Matemática e Física são responsáveis por 60% das dúvidas dos alunos dos Ensinos Fundamental e Médio.”. Desse modo, pode-se associar que as dificuldades dos alunos em Física também estão ligadas às equações matemáticas. Para Moreira (2018, p. 78), “[...] Aprender Física pode levar ao desenvolvimento de processos cognitivos, de uma consciência epistemológica e crítica.”. Nesse sentido, o professor tem um papel muito importante na aprendizagem do aluno e, para Libâneo (2011, apud SILVA, 2018, p. 17), “[...] o professor deve assumir o ensino com mediação; conhecer estratégias de ensinar a pensar e ensinar a aprender e mediar os alunos a buscarem uma perspectiva crítica dos conteúdos.”.

Especificamente, essa SD é composta por quatro vídeos instrucionais explicativos referente ao conteúdo a ser estudado e quatro questionários, sendo um para cada vídeo em questão. Ao todo somam-se 146 min e 20 s de vídeos instrucionais produzidos. Cada vídeo

<sup>1</sup> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) trata-se de um documento com caráter normativo, que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. (BRASIL, 2018, p. 7).

<sup>2</sup> O DC-GO Ampliado foi elaborado a partir da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) da Educação Infantil e do Ensino Fundamental, aprovada em 2017 e tem por objetivo explicitar as aprendizagens essenciais que todas as crianças e estudantes têm o direito de se apropriarem ao longo da Educação Básica. (GOIÁS, 2020, p. 37).

instrucional possui um questionário específico, sendo que as respostas esperadas podem ser consultadas pelo(a) professor(a) nos apêndices. Quanto aos questionários, cabe ao(a) professor(a) estabelecer o melhor momento para sua aplicação, levando em consideração as orientações disponibilizadas e o tempo necessário para que o mesmo possibilite realizar o seu propósito: (i) de reflexão sobre os assuntos abordados, (ii) de promover a discussão de tópicos relevantes para que possa ser respondido com maior segurança e, ainda, (iii) de verificar a aprendizagem e aceitação dos participantes.

Assim, o primeiro vídeo (VÍDEO 1 - CONTEXTO HISTÓRICO DA SIMETRIA, ÉVARISTE GALOIS E EMMY NOETHER) é usado tanto para se entender o contexto histórico referente ao conceito da simetria, cujo início data-se por volta de 9000 anos Antes da Era Comum, quanto para se enfatizar dois importantes personagens que tanto contribuíram para nossos conhecimentos de hoje: (1) Évariste Galois e a Teoria de Grupos e (2) Emmy Noether e seu Teorema que liga as Leis de Conservação com as Simetrias. Nesse vídeo são apresentados os seguintes conteúdos:

- PARTE I - CONTEXTO HISTÓRICO DA SIMETRIA: nascimento da agricultura, invenções das cidades, revolução da agricultura, contribuições significativas dos antigos babilônicos em muitos aspectos atuais (as 12 constelações do zodíaco, os 360° do círculo, o minuto sendo composto por 60 segundos e a hora tendo 60 minutos), início da história escrita, compreensão inicial da simetria pela humanidade, sistema sexagesimal, início da compreensão de resolução de equações, simetria como um tipo especial de transformação e seu papel central nas fronteiras da física, no mundo quântico e na teoria da relatividade;
- PARTE II - ÉVARISTE GALOIS E A TEORIA DE GRUPOS: biografia, contribuições e Teoria de Grupos com ênfase nas seis simetrias no triângulo equilátero e na multiplicação de simetrias;
- PARTE III - AMALIE EMILY NOETHER E SEU TEOREMA QUE LIGA AS LEIS DE CONSERVAÇÃO COM AS SIMETRIAS: biografia, contribuições, simetrias e leis de conservação e o Teorema de Noether.

No segundo vídeo (VÍDEO 2 - SIMETRIAS NA NATUREZA E NA MATEMÁTICA), é apresentando tanto as Simetrias na Natureza (por escala - fractal, esférica, radial e bilateral), quanto as Simetrias na Matemática (translação, rotação, reflexão e reflexão transladada). Nesse vídeo são apresentados os seguintes conteúdos:

- PARTE I - SIMETRIAS NA NATUREZA: padrões numéricos, números poligonais (triangulares e quadrados), homem vitruviano e a razão áurea, sequência de Fibonacci, retângulo de ouro, espiral de Fibonacci, simetria por escala (fractal), simetria esférica, simetria radial (birradial, tetrarradial, pentarradial e multirradial) e simetria bilateral;

- PARTE II - SIMETRIAS NA MATEMÁTICA: simetria por reflexão, simetria por rotação, simetria por translação e simetria por reflexão transladada.

O terceiro vídeo (VÍDEO 3 - FÍSICA, ENERGIA, TRABALHO E ENERGIA E ENERGIA MECÂNICA), é destinado à apresentação da Física como construção humana, da Energia com suas formas e utilização, da relação entre Trabalho e Energia e, ainda, da Energia Mecânica. Nesse vídeo são apresentados os seguintes conteúdos:

- PARTE I - FÍSICA – UMA CONSTRUÇÃO HUMANA: Física, objetivos esperados a partir do estudo da Física e suas divisões;
- PARTE II - ENERGIA: FORMAS E UTILIZAÇÃO: energia, o Sol, formas e tipos de energia, o conceito de energia do dicionário, trabalho, transformação de energia e impactos ambientais;
- PARTE III - TRABALHO E ENERGIA: conceito de energia na Física, Princípio da Conservação da Energia, Lei da Conservação da Energia, energia e trabalho medidos em Joule, o físico inglês James Prescott Joule e cálculo do trabalho a partir de uma força constante;
- PARTE IV - ENERGIA MECÂNICA: A energia que nos cerca, energia potencial, energia cinética, energia potencial gravitacional e energia mecânica.

Finalmente, o quarto e último vídeo (VÍDEO 4 - CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA), é destinado, exclusivamente, à apresentação da conservação da energia mecânica. Nesse vídeo são apresentados os seguintes conteúdos:

- PARTE I - CONSERVAÇÃO DA ENERGIA: definição de conservação na Física, grandezas conservativas na Física, grandezas que se conservam na mecânica (energia, momento linear e momento angular), energia total de um sistema e energia dissipada;
- PARTE II - CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA: condição, cálculo do trabalho da força peso, cálculo do trabalho da força resultante, dedução da fórmula da conservação da energia mecânica, sistema (aberto, fechado e isolado), sistemas físicos (objeto, fronteira, interfaces e ambiente), conservação da energia usada para descrever o movimento de objetos e aplicações da fórmula da conservação de energia.

Todos esses quatro vídeos instrucionais explicativos podem ser encontrados na *Playlist* disponível em:

[https://www.youtube.com/playlist?list=PLJeE3YjrgaXHM-hYGPBc8QFW\\_NgCcEDtI](https://www.youtube.com/playlist?list=PLJeE3YjrgaXHM-hYGPBc8QFW_NgCcEDtI)

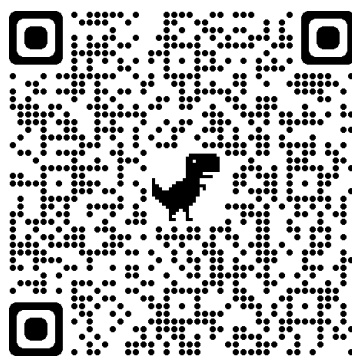
Caso prefira, pode-se localizá-los isoladamente, por meio de seus respectivos endereços eletrônicos:

- VÍDEO 1 - CONTEXTO HISTÓRICO DA SIMETRIA, ÉVARISTE GALOIS E EMMY NOETHER (34 min 03 s): <https://youtu.be/5jmBrhchUBE>

- VÍDEO 2 - SIMETRIAS NA NATUREZA E NA MATEMÁTICA (34 min 35 s): <https://youtu.be/KUHRY9mYVWg>
- VÍDEO 3 - FÍSICA, ENERGIA, TRABALHO E ENERGIA MECÂNICA (37 min 08 s): <https://youtu.be/4C0m6SKx8Dg>
- VÍDEO 4 - CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA (40 min 34 s): <https://youtu.be/cNSHwDzVuSw>

Essa SD pode ser encontrada em forma de apresentação no *website* do Prezi<sup>3</sup>, disponível em

<https://prezi.com/p/tlem4vfnq9z5/sequencia-didatica-simetria-e-leis-de-conservacao-na-fisica/>,  
ou pelo *QR Code*<sup>4</sup> abaixo:



Portanto, essa SD pode ser aplicada utilizando tanto essa versão impressa ou por meio da apresentação da mesma no *software* Prezi. Para fazer a leitura do código QR acima, em *smartphone* ou *tablet Android* compatível, abra o aplicativo de câmera integrado, aponte a câmera para o código QR e toque no *banner* que aparecerá. Espero que este material seja muito significativo e, principalmente, que possa contribuir no exercício de sua profissão.

---

<sup>3</sup> Prezi é um *software* para criação de apresentações de *slides*, uma interface que permite criar, editar e exibir apresentações elaboradas a partir do navegador ou programa para computador ou celular.

<sup>4</sup> *QR Code* ou código QR, é um código de barras estilizado, facilmente reconhecido por uma câmera presente em um celular, que o converte num endereço da *internet*.

## 2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

### 2.1 IDENTIFICAÇÃO

**Nível:** Educação Básica    **Etapa:** Ensino Fundamental    **Fase:** Anos Finais    **Ano:** 9º  
**Modalidade:** Presencial    **Tema:** Simetrias na Natureza e Leis de Conservação na Física  
**Área do Conhecimento 1:** Ciências da Natureza    **Componente Curricular:** Ciências  
**Área do Conhecimento 2:** Matemática    **Componente Curricular:** Matemática  
**Duração:** 400 min = 8 horas-aulas (8 h/a)

### 2.2 COMPETÊNCIAS GERAIS DA BNCC

- Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (BRASIL, 2018, p. 9);
- Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. (BRASIL, 2018, p. 9).

### 2.3 COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DA BNCC

- Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. (BRASIL, 2018, p. 267);
- Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p. 267);
- Analisar, compreender e explicar características, fenômenos e processos relativos ao mundo natural, social e tecnológico (incluindo o digital), como também as relações que se estabelecem entre eles, exercitando a curiosidade para fazer perguntas, buscar

respostas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das Ciências da Natureza. (BRASIL, 2018, p. 324);

- Compreender as Ciências da Natureza como empreendimento humano, e o conhecimento científico como provisório, cultural e histórico. (BRASIL, 2018, p. 324).

#### 2.4 HABILIDADES DO DC-GO

- (EF07CI06-A) Identificar e discutir mudanças econômicas, culturais e sociais, tanto na vida cotidiana quanto no mundo do trabalho, decorrentes do desenvolvimento de novos materiais e tecnologias, como automação e informatização, avaliando os impactos socioambientais. (GOIÁS, 2020, p. 129);
- (EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas. (GOIÁS, 2020, p. 391);
- (EF07MA14-A) Explorar e relacionar diferentes sequências recursivas em situações como a construção do conjunto dos números naturais, a construção de sequências numéricas aditivas e multiplicativas, a construção dos números poligonais e a construção da sequência de Fibonacci. (GOIÁS, 2020, p. 397);
- (EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros. (GOIÁS, 2020, p. 397);
- (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas. (GOIÁS, 2020, p. 399);
- (EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem. (GOIÁS, 2020, p. 399);
- (EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica. (GOIÁS, 2020, p. 406).

#### 2.5 OBJETO DO CONHECIMENTO (CONTEÚDOS)

- CONTEXTO HISTÓRICO DA SIMETRIA: nascimento da agricultura, invenções das cidades, revolução da agricultura, contribuições significativas dos antigos babilônicos em muitos aspectos atuais (as 12 constelações do zodíaco, os 360° do círculo, o

minuto sendo composto por 60 segundos e a hora tendo 60 minutos), início da história escrita, compreensão inicial da simetria pela humanidade, sistema sexagesimal, início da compreensão de resolução de equações, simetria como um tipo especial de transformação e seu papel central nas fronteiras da física, no mundo quântico e na relatividade;

- ÉVARISTE GALOIS E A TEORIA DE GRUPOS: biografia, contribuições e Teoria de Grupos com ênfase nas seis simetrias no triângulo equilátero e na multiplicação de simetrias;
- AMALIE EMILY NOETHER E SEU TEOREMA QUE LIGA AS LEIS DE CONSERVAÇÃO COM AS SIMETRIAS: biografia, contribuições, simetrias e leis de conservação e o Teorema de Noether;
- SIMETRIAS NA NATUREZA: padrões numéricos, números poligonais (triangulares e quadrados), homem vitruviano e a razão áurea, sequência de Fibonacci, retângulo de ouro, espiral de Fibonacci, simetria por escala (fractal), simetria esférica, simetria radial (birradial, tetrarradial, pentarradial e multirradial) e simetria bilateral;
- SIMETRIAS NA MATEMÁTICA: simetria por reflexão, simetria por rotação, simetria por translação e simetria por reflexão transladada;
- FÍSICA – UMA CONSTRUÇÃO HUMANA: Física, objetivos esperados a partir do estudo da Física e suas divisões;
- ENERGIA: FORMAS E UTILIZAÇÃO: energia, o Sol, formas e tipos de energia, o conceito de energia do dicionário, trabalho, transformação de energia e impactos ambientais;
- TRABALHO E ENERGIA: conceito de energia na Física, Princípio da Conservação da Energia, Lei da Conservação da Energia, energia e trabalho medidos em Joule, o físico inglês James Prescott Joule e cálculo do trabalho de uma força constante;
- ENERGIA MECÂNICA: A energia que nos cerca, energia potencial, energia cinética, energia potencial gravitacional e energia mecânica;
- CONSERVAÇÃO DA ENERGIA: definição de conservação na Física, grandezas conservativas na Física, grandezas que se conservam na mecânica (energia, momento linear e momento angular), energia total de um sistema e energia dissipada;
- CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA: condição, cálculo do trabalho da força peso, cálculo do trabalho da força resultante, dedução da fórmula da conservação da energia mecânica, sistema (aberto, fechado e isolado), sistemas físicos (objeto, fronteira, interfaces e ambiente), conservação da energia usada para descrever o movimento de objetos e aplicações da fórmula da conservação de energia.

## 2.6 DESENVOLVIMENTO, DESCRIÇÃO OU ETAPAS

### 2.6.1 Aula 1 - 50 min (VÍDEO 1 - CONTEXTO HISTÓRICO DA SIMETRIA, ÉVARISTE GALOIS E EMMY NOETHER)

#### 2.6.1.1 Objetivos

- Promover um ensino de Física contextualizado, primando a construção conjunta do conhecimento entre os envolvidos;
- Tornar o estudo de simetria e leis de conservação na Física mais acessível;
- Perceber que as equações matemáticas e as leis da natureza também podem apresentar característica de simetria com relação a certas transformações, levando, assim, às invariâncias dos objetos de estudo da Física, para que se possa entender as leis de conservação;
- Destacar as contribuições importantes e significativas de dois grandes nomes que revolucionaram a compreensão da simetria e suas aplicabilidades numa melhor compreensão do mundo físico: Évariste Galois (1811-1832) e Amalie Emily Nöther (1882-1935);
- Ressaltar que a conexão formal entre simetrias e leis de conservação é dado pelo teorema de Noether.

#### 2.6.1.2 Metodologia ou Descrição

Esta aula é destinada à exibição do VÍDEO 1 (CONTEXTO HISTÓRICO DA SIMETRIA, ÉVARISTE GALOIS E EMMY NOETHER), com duração de 34 min 03 s, disponível em: <<https://youtu.be/5jmBrhchUBE>>. No início da aula o(a) professor(a) deverá informar aos(as) estudantes que será feito a exibição desse vídeo e, ainda, orientá-los(as) da importância em se fazer anotações de conteúdos do vídeo que considerarem importantes, como se fossem notas de aula, pois posteriormente farão a discussão de pontos relevantes e, também, uma verificação de aprendizagem. Sempre que o(a) professor(a) julgar necessário, orienta-se que faça pausas para enfatizar alguns momentos ou mesmo para discussões/mediações referente aos conteúdos abordados, visando o seu melhor aproveitamento.

#### 2.6.1.3 Recursos Necessários

- Sala de aula;
- Computador com *internet* para acesso ao VÍDEO 1;

- *Data Show* ou televisão com cabo HDMI;
- VÍDEO 1 (CONTEXTO HISTÓRICO DA SIMETRIA, ÉVARISTE GALOIS E EMMY NOETHER), disponível em: <<https://youtu.be/5jmBrhchUBE>>.

#### 2.6.1.4 Proposta de Avaliação

- Observação dos(as) estudantes durante a exposição do vídeo, principalmente quanto ao interesse, participação e interação.

### 2.6.2 Aula 2 - 50 min (QUESTIONÁRIO I - SIMETRIAS: CONTEXTO HISTÓRICO, ÉVARISTE GALOIS E EMMY NOETHER)

#### 2.6.2.1 Objetivos

- Verificar a aprendizagem dos(as) alunos(as) referente aos assuntos abordados no VÍDEO 1 (CONTEXTO HISTÓRICO DA SIMETRIA, ÉVARISTE GALOIS E EMMY NOETHER);
- Promover, entre os(as) estudantes, a interação, discussão e reflexão conjunta das questões contidas nesse questionário (QUESTIONÁRIO I - APÊNDICE A), para o sucesso dessa etapa, sendo o(a) professor(a) apenas o(a) mediador(a).

#### 2.6.2.2 Metodologia ou Descrição

Iniciar a aula com o(a) professor(a) orientando sobre as atividades a serem realizadas naquela aula, deixando claro o seu papel apenas como mediador(a), para o sucesso dessa etapa. Cada estudante deverá receber um QUESTIONÁRIO I - SIMETRIAS: CONTEXTO HISTÓRICO, ÉVARISTE GALOIS E EMMY NOETHER (APÊNDICE A), mas devem ser orientados(as) que o objetivo é que demonstrem conhecimentos adquiridos, portanto podem se reunir em grupos na quantidade de componentes indicada pelo(a) professor(a) mediador(a), para que possam discutir as questões e pontos relevantes observados por cada um(a) dos(as) integrantes, mas que no final da aula, cada aluno(a) consiga concluir o seu próprio questionário e esteja apto a entregá-lo, caso seja solicitado. Os primeiros 35 min são destinados à resolução do questionário e os 15 min finais à sua discussão/correção.

#### 2.6.2.3 Recursos Necessários

- Sala de aula;
- QUESTIONÁRIO I (APÊNDICE A) impresso na quantidade de alunos(as) da série/turma, para que possam ser respondidos individualmente e de acordo com a dinâmica da aula em questão.

#### 2.6.2.4 Proposta de Avaliação

- Avaliação referente aos conteúdos abordados no VÍDEO 1, por meio do QUESTIONÁRIO I (APÊNDICE A);
- Observação dos(as) estudantes durante a realização desta avaliação, principalmente quanto a interação, discussão e reflexão conjunta.

### 2.6.3 Aula 3 - 50min (VÍDEO 2 - SIMETRIAS NA NATUREZA E NA MATEMÁTICA)

#### 2.6.3.1 Objetivos

- Promover um ensino de Física contextualizado, primando a construção conjunta do conhecimento entre os envolvidos;
- Tornar o estudo de simetria e leis de conservação na Física mais acessível;
- Perceber que as equações matemáticas e as leis da natureza também podem apresentar característica de simetria com relação a certas transformações, levando, assim, às invariâncias dos objetos de estudo da Física, para que se possa entender as leis de conservação;
- Reconhecer figuras simétricas, bem como seus eixos de simetria, quando houver;
- Identificar as principais simetrias encontradas na natureza e em objetos construídos pelo homem: padrões numéricos, números poligonais, proporção áurea, simetria por escala - fractal, simetria esférica, simetria radial e simetria bilateral;
- Verificar as transformações por reflexão, rotação, translação e reflexão transladada de figuras planas;
- Construir figuras simétricas a partir das transformações por reflexão, translação e rotação.

#### 2.6.3.2 Metodologia ou Descrição

Esta aula é destinada à exibição do VÍDEO 2 - SIMETRIAS NA NATUREZA E NA MATEMÁTICA, com duração de 34 min 35 s, disponível em: <<https://youtu.be/KUHR9mYVWg>>. Novamente, ao iniciar a aula, o(a) professor(a) deverá informar aos(as) estudantes que será feito a exibição desse novo vídeo e, ainda, orientá-los(as) da importância em se fazer anotações de conteúdos do vídeo que considerarem importantes, como se fossem notas de aula, pois posteriormente farão a discussão de pontos relevantes e, também, uma verificação de aprendizagem. Sempre que o(a) professor(a) julgar necessário, orienta-se

que faça pausas para enfatizar alguns momentos ou mesmo para discussões/mediações referente aos conteúdos abordados, visando o seu melhor aproveitamento.

#### 2.6.3.3 Recursos Necessários

- Sala de aula;
- Computador com *internet* para acesso ao VÍDEO 2;
- *Data Show* ou televisão com cabo HDMI;
- VÍDEO 2 (SIMETRIAS NA NATUREZA E SIMETRIAS NA MATEMÁTICA), disponível em: <<https://youtu.be/KUHR9mYVWg>>.

#### 2.6.3.4 Proposta de Avaliação

- Observação dos(as) estudantes durante a exposição do vídeo, principalmente quanto ao interesse, participação e interação.

### 2.6.4 Aula 4 - 50 min (QUESTIONÁRIO II - SIMETRIAS NA NATUREZA E NA MATEMÁTICA)

#### 2.6.4.1 Objetivos

- Verificar a aprendizagem dos(as) alunos(as) referente aos assuntos abordados no VÍDEO 2 (SIMETRIAS NA NATUREZA E NA MATEMÁTICA);
- Promover, entre os(as) estudantes, a interação, discussão e reflexão conjunta das questões contidas nesse questionário (QUESTIONÁRIO II - APÊNDICE B), para o sucesso dessa etapa, sendo o(a) professor(a) apenas o(a) mediador(a).

#### 2.6.4.2 Metodologia ou Descrição

Iniciar a aula com o(a) professor(a) orientando sobre as atividades a serem realizadas naquela aula, deixando claro o seu papel apenas como mediador(a), para o sucesso dessa etapa. Cada estudante deverá receber um QUESTIONÁRIO II (SIMETRIAS NA NATUREZA E NA MATEMÁTICA - APÊNDICE B), mas novamente devem ser orientados(as) que o objetivo é que demonstrem conhecimentos adquiridos, portanto podem se reunir em grupos na quantidade de componentes indicada pelo(a) professor(a) mediador(a), para que possam discutir as questões e pontos relevantes observados por cada um(a) dos(as) integrantes, mas que no final da aula, cada aluno(a) consiga concluir o seu próprio questionário e esteja apto a entregá-lo, caso seja solicitado. Os primeiros 35 min são destinados à resolução do questionário e os 15 min finais à sua discussão/correção.

#### 2.6.4.3 Recursos Necessários

- Sala de aula;
- QUESTIONÁRIO II (APÊNDICE B) impresso na quantidade de alunos(as) da série/turma, para que possam ser respondidos individualmente e de acordo com a dinâmica da aula em questão.

#### 2.6.4.4 Proposta de Avaliação

- Avaliação referente aos conteúdos abordados no VÍDEO 2, por meio do QUESTIONÁRIO II (APÊNDICE B);
- Observação dos(as) estudantes durante a realização desta avaliação, principalmente quanto a interação, discussão e reflexão conjunta.

### 2.6.5 Aula 5 - 50min (VÍDEO 3 - FÍSICA, ENERGIA, TRABALHO E ENERGIA MECÂNICA)

#### 2.6.5.1 Objetivos

- Promover um ensino de Física contextualizado, primando a construção conjunta do conhecimento entre os envolvidos;
- Tornar o estudo de simetria e leis de conservação na Física mais acessível;
- Perceber que as equações matemáticas e as leis da natureza também podem apresentar característica de simetria com relação a certas transformações, levando, assim, às invariâncias dos objetos de estudo da Física, para que se possa entender as leis de conservação;
- Reconhecer a Física enquanto construção humana;
- Compreender e associar os conceitos de energia cinética e potencial a situações reais;
- Conhecer e utilizar conceitos físicos;
- Reconhecer e exemplificar diferentes tipos de energia em situações reais;
- Identificar movimentos reconhecendo fontes e transformações de energia envolvidas;
- Identificar conversões ou transformações de energia de um tipo em outro, em fenômenos naturais e em equipamentos;
- Obter o trabalho de uma força por meio de relações algébricas;
- Compreender e utilizar o conceito de energia cinética;

- Associar a energia cinética à presença do movimento;
- Compreender e utilizar o conceito de energia potencial;
- Reconhecer e associar energia potencial à posição de um corpo segundo uma referência;
- Compreender e calcular a energia potencial gravitacional;
- Identificar energia potencial e energia cinética como componentes da energia mecânica;
- Obter a energia mecânica de um corpo ou sistema.

#### 2.6.5.2 Metodologia ou Descrição

Esta aula é destinada à exibição do VÍDEO 3 (FÍSICA, ENERGIA, TRABALHO E ENERGIA E ENERGIA MECÂNICA), com duração de 37 min 08 s, disponível em: <<https://youtu.be/4C0m6SKx8Dg>>. No início da aula o(a) professor(a) deverá informar aos(as) estudantes que será feito a exibição desse vídeo e, ainda, reforçar a orientação da importância em se fazer anotações de conteúdos do vídeo que considerarem importantes, como se fossem notas de aula, pois posteriormente farão a discussão de pontos relevantes e, também, uma verificação de aprendizagem. Sempre que o(a) professor(a) julgar necessário, orienta-se que faça pausas para enfatizar alguns momentos ou mesmo para discussões/mediações referente aos conteúdos abordados, visando o seu melhor aproveitamento.

#### 2.6.5.3 Recursos Necessários

- Sala de aula;
- Computador com *internet* para acesso ao VÍDEO 3;
- *Data Show* ou televisão com cabo HDMI;
- VÍDEO 3 (FÍSICA, ENERGIA, TRABALHO E ENERGIA E ENERGIA MECÂNICA), disponível em: <<https://youtu.be/4C0m6SKx8Dg>>.

#### 2.6.5.4 Proposta de Avaliação

- Observação dos(as) estudantes durante a exposição do vídeo, principalmente quanto ao interesse, participação e interação.

## 2.6.6 Aula 6 - 50 min (QUESTIONÁRIO III - FÍSICA, ENERGIA, TRABALHO E ENERGIA E ENERGIA MECÂNICA)

### 2.6.6.1 Objetivos

- Verificar a aprendizagem dos(as) alunos(as) referente aos assuntos abordados no VÍDEO 3 (FÍSICA, ENERGIA, TRABALHO E ENERGIA E ENERGIA MECÂNICA);
- Promover, entre os(as) estudantes, a interação, discussão e reflexão conjunta das questões contidas nesse questionário (QUESTIONÁRIO III - APÊNDICE C), para o sucesso dessa etapa, sendo o(a) professor(a) apenas o(a) mediador(a).

### 2.6.6.2 Metodologia ou Descrição

Iniciar a aula com o(a) professor(a) orientando sobre as atividades a serem realizadas naquela aula, deixando claro o seu papel apenas como mediador(a), para o sucesso dessa etapa. Cada estudante deverá receber um QUESTIONÁRIO III - FÍSICA, ENERGIA, TRABALHO E ENERGIA E ENERGIA MECÂNICA (APÊNDICE C), mas devem ser orientados(as) que o objetivo é que demonstrem conhecimentos adquiridos, portanto podem se reunir em grupos na quantidade de componentes indicada pelo(a) professor(a) mediador(a), para que possam discutir as questões e pontos relevantes observados por cada um(a) dos(as) integrantes, mas que no final da aula, cada aluno(a) consiga concluir o seu próprio questionário e esteja apto a entregá-lo, caso seja solicitado. Os primeiros 35 min são destinados à resolução do questionário e os 15 min finais à sua discussão/correção.

### 2.6.6.3 Recursos Necessários

- Sala de aula;
- QUESTIONÁRIO III (APÊNDICE C) impresso na quantidade de alunos(as) da série/turma, para que possam ser respondidos individualmente e de acordo com a dinâmica da aula em questão.

### 2.6.6.4 Proposta de Avaliação

- Avaliação referente aos conteúdos abordados no VÍDEO 3, por meio do QUESTIONÁRIO III (APÊNDICE C);
- Observação dos(as) estudantes durante a realização desta avaliação, principalmente quanto a interação, discussão e reflexão conjunta.

## 2.6.7 Aula 7 - 50 min (VÍDEO 4 - CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA)

### 2.6.7.1 Objetivos

- Promover um ensino de Física contextualizado, primando a construção conjunta do conhecimento entre os envolvidos;
- Tornar o estudo de simetria e leis de conservação na Física mais acessível;
- Identificar situações em que há conservação da energia mecânica;
- Reconhecer as transformações de energia e a conservação que dá sentido a essas transformações;
- Reconhecer e exemplificar sistemas conservativos e não conservativos;
- Utilizar a conservação de energia mecânica para prever movimento;
- Reconhecer e exemplificar a conservação da energia total em um fenômeno ou sistema;
- Identificar as transformações de energia e a conservação que dá sentido a elas;
- Associar formas de energia mecânica a movimentos reais.

### 2.6.7.2 Metodologia ou Descrição

Esta aula é destinada à exibição do VÍDEO 4 - CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA, com duração de 40 min 34 s, disponível em: <<https://youtu.be/cNSHwDzVuSw>>. Novamente, ao iniciar a aula, o(a) professor(a) deverá informar aos(as) estudantes que será feita a exibição desse novo vídeo e, ainda, orientá-los(as) da importância em se fazer anotações de conteúdos do vídeo que considerarem importantes, como se fossem notas de aula, pois posteriormente farão a discussão de pontos relevantes e, também, uma verificação de aprendizagem. Sempre que o(a) professor(a) julgar necessário, orienta-se que faça pausas para enfatizar alguns momentos ou mesmo para discussões/mediações referente aos conteúdos abordados, visando o seu melhor aproveitamento.

### 2.6.7.3 Recursos Necessários

- Sala de aula;
- Computador com *internet* para acesso ao VÍDEO 4;
- *Data Show* ou televisão com cabo HDMI;
- VÍDEO 4 (CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA), disponível em: <<https://youtu.be/cNSHwDzVuSw>>.

#### 2.6.7.4 Proposta de Avaliação

- Observação dos(as) estudantes durante a exposição do vídeo, principalmente quanto ao interesse, participação e interação.

### 2.6.8 Aula 8 - 50 min (QUESTIONÁRIO IV - SIMETRIAS NA NATUREZA E NA MATEMÁTICA)

#### 2.6.8.1 Objetivos

- Verificar a aprendizagem dos(as) alunos(as) referente aos assuntos abordados no VÍDEO 4 (CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA);
- Promover, entre os(as) estudantes, a interação, discussão e reflexão conjunta das questões contidas nesse questionário (QUESTIONÁRIO IV - APÊNDICE D), para o sucesso dessa etapa, sendo o(a) professor(a) apenas o(a) mediador(a).

#### 2.6.8.2 Metodologia ou Descrição

Iniciar a aula com o(a) professor(a) orientando sobre as atividades a serem realizadas naquela aula, deixando claro o seu papel apenas como mediador(a), para o sucesso dessa etapa. Cada estudante deverá receber um QUESTIONÁRIO IV (CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA - APÊNDICE D), mas novamente devem ser orientados(as) que o objetivo é que demonstrem conhecimentos adquiridos, portanto podem se reunir em grupos na quantidade de componentes indicada pelo(a) professor(a) mediador(a), para que possam discutir as questões e pontos relevantes observados por cada um(a) dos(as) integrantes, mas que no final da aula, cada aluno(a) consiga concluir o seu próprio questionário e esteja apto a entregá-lo, caso seja solicitado. Os primeiros 35 min são destinados à resolução do questionário e os 15 min finais à sua discussão/correção.

#### 2.6.8.3 Recursos Necessários

- Sala de aula;
- QUESTIONÁRIO IV (APÊNDICE D) impresso na quantidade de alunos(as) da série/turma, para que possam ser respondidos individualmente e de acordo com a dinâmica da aula em questão.

#### 2.6.8.4 Proposta de Avaliação

- Avaliação referente aos conteúdos abordados no VÍDEO 4, por meio do QUESTIONÁRIO IV (APÊNDICE D);

- Observação dos(as) estudantes durante a realização desta avaliação, principalmente quanto a interação, discussão e reflexão conjunta.

### 3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A implementação desse PE ocorreu em duas instituições públicas que ofertavam o ensino fundamental, uma municipal e outra estadual, ambas localizadas na cidade de Caldas Novas - GO. A intervenção em sala de aula se deu especificamente para as turmas de 9º ano, contando com a participação voluntária desses(as) estudantes. Ao todo tivemos a participação de 124 alunos(as) nessa pesquisa, sendo que 54 eram alunos(as) da escola municipal (turno matutino), enquanto 70 eram estudantes do colégio estadual (turno vespertino). Quanto aos(as) professores(as), 20 aceitaram e participaram dessa pesquisa, sendo que a mesma ocorreu de forma não presencial, tendo o PE disponibilizado por meio do *link* dos arquivos no *Google Drive* e *link* da SD no *Website Prezi*, além da disponibilização do *link* para que esses(as) professores(as) pudessem responder a um questionário específico, por meio do *Google Forms*. Quanto a esses(as) professores(as): (i) a maioria possui licenciatura em Matemática (60,0%), seguida de licenciatura em Ciências Biológicas (20,0%), licenciatura em Física (15,0%) e Pedagogia (5,0%); e (ii) abrangem 11 cidades diferentes, distribuídas em seis estados distintos, sendo que Goiás contou com 65,2% da amostra nacional.

Percebe-se, da aplicação dessa SD, que as atividades propostas conseguiram proporcionar interações entre os(as) estudantes, tanto de forma individual, quanto no desenvolvimento em grupo, promovendo: (i) discussões significativas, elevando a aprendizagem; (ii) uma maior aproximação com o ambiente científico por meio da construção de argumentos; (iii) o surgimento de potencialidades entre eles(as); (iv) o estímulo do raciocínio; (v) o desenvolvimento do senso crítico; e, ainda, (vi) um maior interesse e gosto pela área científica, especialmente pela Física. A programação sugerida pela própria SD se mostrou muito eficaz, sendo: (i) orientações iniciais; (ii) vídeo instrucional sobre o assunto da aula; (iii) pausas durante a passagem do vídeo para discutir conceitos relevantes; (iv) revisão de conteúdo antes da entrega do questionário; (v) aplicação do questionário; (vi) possibilidade de resolverem de forma individual ou em grupos\equipes; (vii) recolhimento dos questionários para verificação da aprendizagem; e, finalmente, (viii) correção do questionário após seu recolhimento. Entretanto cabe ao(a) professor(a) que se interessar em reproduzir nossa SD, a necessidade de moldá-la à sua realidade.

Enquanto respondiam aos questionários, os(as) estudantes puderam interagir e externalizar seus conhecimentos prévios a respeito dos conceitos\assuntos relevantes para o tema em que se fazia necessário, tanto para interpretação, quanto para resolução das situações-problemas apresentadas, contribuindo para o processo de uma aprendizagem significativa crítica, onde a apresentação dos subsunçores provenientes de sua experiência vivida no ambiente escolar e no dia a dia, bem como dos conhecimentos adquiridos devido aos vídeos instrucionais, de tal forma incorporados e disponíveis na estrutura cognitiva de cada indivíduo, se tornaram importante não apenas para facilitar novas aprendizagens, mas

também para determinar respostas às demandas necessárias. Vale ressaltar que o processo de ensino-aprendizagem de Ciências da Natureza é essencial para que o(a) estudante possa analisar crítica e plenamente a realidade do mundo em que vive.

Quanto aos(as) professores(as) de Ciências da Natureza e Matemática, que aceitaram o convite e participaram dessa pesquisa: (i) são licenciados e com significativa experiência profissional devido ao tempo de serviço informado e instituições em que atuam; (ii) todos(as) aprovaram com o melhor grau de avaliação, os materiais instrucionais apresentados; (iii) demonstraram satisfação com esse material instrucional disponibilizado; e, ainda, (iv) a maioria irá inseri-los em suas práticas pedagógicas. É importante ressaltar que essa pesquisa também evidenciou, durante as observações e anotações no diário de campo, que muitos(as) professores(as) farão uso desse material, inclusive, para se aprimorar, devido a alguma limitação que existe quanto ao assunto a ser trabalhando, seja na parte conceitual ou mesmo na parte de cálculos necessários, visando facilitar sua vida profissional, ensinando-o(a) ou sugerindo que façam uso de estratégias adequadas para promoção do ensino-aprendizagem.

Desta forma foi possível perceber que produtos educacionais, como o produzido nessa pesquisa, podem representar um caminho muito promissor, principalmente no ensino de Ciências da Natureza, pois a tecnologia aproxima e, em muitos casos, até democratiza esse ensino, possibilitando um melhor acesso ao conhecimento, desmistificando muitos fenômenos e, assim, fazendo com que a aprendizagem se desenvolva de forma interessante e prazerosa, despertando um maior interesse pela disciplina de Física e, ainda, servindo como um agente motivador, influenciando, de forma positiva, na escolha de prosseguimentos de estudos em áreas científicas. Assim, torna-se importante que o(a) docente incorpore, em suas práticas pedagógicas, as tecnologias de informação e comunicação, bem como aspectos epistemológicos, históricos, sociais e culturais.

Também é necessário que se tenha mais atenção ao conceito de simetria na Física, seja pelo ensino ou pela divulgação, pois esse conceito está associado à existência das leis de conservação, sendo que a física moderna admite, entre outras, as seguintes leis de conservação (para as quais nunca se observou uma violação): (i) lei da conservação de energia (invariância temporal); (ii) lei da conservação do momento linear (invariância linear); (iii) lei da conservação do momento angular (invariância rotacional); e, ainda, (iv) lei da conservação de carga elétrica (invariância de gauge). Como sugestão de trabalhos futuros, o(a) professor(a) pode fazer novas transposições didáticas para as séries finais da educação básica, almejando dar prosseguimento ao PE apresentado nessa pesquisa, procurando evidenciar cada vez mais o teorema de Noether e sua importância na Física. Vale, ainda, sugerir a ampliação da atuação dessa SD, inserindo a simetria de autossimilaridade dos fractais e a teoria de grupos e grupos de simetria, assim como evidenciados no referencial teórico dessa pesquisa, mas não sendo disponibilizados na SD

devido a inviabilidade ocasionada pelo pouco tempo de duração do mestrado.

## REFERÊNCIAS

- [1] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF, 2018. Disponível em: <[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf)>. Acesso em: 20 mar. 2021.
- [2] GOIÁS. Secretaria Estadual de Educação. *Documento Curricular de Goiás - Ampliado*, V.3 - Ensino Fundamental - anos finais, Goiânia: SEDUC; CONSED; UNDIME, 2020. Disponível em: <<https://cee.go.gov.br/wp-content/uploads/2016/02/Doc.-Curricular-para-Goiias-Ampliado-Vol.-II.pdf>>. Acesso em: 20 mar. 2021.
- [3] MOREIRA, Marco Antonio. *Aprendizagem significativa crítica. Conferência proferida no III Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa*, Peniche, Lisboa, 11 a 15 de setembro de 2000. Publicada nas Atas desse Encontro, pp. 33-45, com o título original de *Aprendizagem significativa subversiva*. Disponível em: <<https://www.if.ufrgs.br/~moreira/apsigcritport.pdf>>. Acesso em: 04 jan. 2021.
- [4] MOREIRA, Marco Antonio. *APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA, CAMPOS CONCEITUAIS E PEDAGOGIA DA AUTONOMIA: IMPLICAÇÕES PARA O ENSINO. Periódico Aprendizagem Significativa em Revista* - Publicado em espanhol, 2(1): 44-65, (2012). Disponível em: <[http://educonse.com.br/ixcoloquio/Artigo\\_Aprendizagem.pdf](http://educonse.com.br/ixcoloquio/Artigo_Aprendizagem.pdf)>. Acesso em: 09 jan. 2021.
- [5] MOREIRA, Marco Antonio. *O conceito de simetria na Física. Revista do Professor de Física*, v. 3, n. 2, p. 1-8, Brasília, 2019. Disponível em: <<https://periodicos.unb.br/index.php/rpf/article/view/26849/23373>>. Acesso em: 28 set. 2020.
- [6] MOREIRA, Marco Antonio. *Uma análise crítica do ensino de Física. SciELO Brasil*, Estud. Av., vol. 32, nº 94, São Paulo, set./dez. (2018). Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/s0103-40142018.3294.0006>>. Acesso em: 03 jan. 2021.
- [7] SILVA, Allyson de Sousa Alexandre da. *O ensino de Física na educação básica como motivação a determinação da aceleração gravitacional*. Orientador: Prof. Dr. Nildo Loiola Dias. 2018. 119 f. Dissertação (Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física) - Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/35878>>. Acesso em: 04 jan. 2021.
- [8] STEWART, Ian. *Uma história da simetria na matemática*. Tradução de: Why beauty is truth: a history of simmetry, por Claudio Carina; Revisão técnica Samuel Jurkiewicz. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

PRODUTO EDUCACIONAL - APÊNDICES



6. A simetria não deve estar apenas relacionada à beleza e perfeição, seu conceito permeia também as ciências, sendo considerada um conceito-chave na Física. Ela possui um papel central nas fronteiras da Física, no Mundo Quântico e na Relatividade, podendo promover uma unificação matemática dos principais campos da Física Moderna. Essa ideia é básica na atual compreensão científica do Universo e suas origens. Assim, o conceito de simetria está melhor representado em:
- (A) É qualquer figura ou forma geométrica.  
 (B) Trata-se apenas das reflexões nos espelhos.  
 (C) É uma característica observada somente em obras de arte.  
 (D) um tipo especial de transformação, uma maneira de mover um objeto e ainda se preservar a estrutura ou alguma característica desse objeto.
7. Um palíndromo ou capicua é um número, que se lê da mesma maneira nos dois sentidos, ou seja, da esquerda para a direita ou ao contrário, como 666, 1771 e 39493. Capicua é considerado como um tipo de simetria na matemática. Uma curiosidade interessante é que usando apenas o algarismo 1, conseguimos obter todos os demais. Primeiro, faz-se  $1 \times 1$  e escreve-se o resultado. Em seguida,  $11 \times 11$ ,  $111 \times 111$  e assim por diante, até que o registro dos resultados nos forneça todos os algarismos de 1 a 9, conforme destaque realizado abaixo.

$$1 \times 1 = \mathbf{1}$$

$$11 \times 11 = \mathbf{121}$$

$$111 \times 111 = \mathbf{12321}$$

$$1111 \times 1111 = \mathbf{1234321}$$

$$11111 \times 11111 = \mathbf{123454321}$$

$$111111 \times 111111 = \mathbf{12345654321}$$

$$1111111 \times 1111111 = \mathbf{1234567654321}$$

$$11111111 \times 11111111 = \mathbf{123456787654321}$$

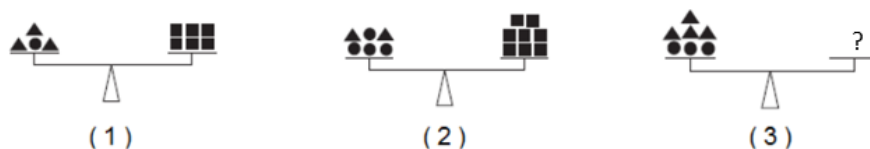
$$111111111 \times 111111111 = \mathbf{12345678987654321}$$

Dispondo somente os produtos (resultados) de forma centralizada, teremos:

$$\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{121} \\ \mathbf{12321} \\ \mathbf{1234321} \\ \mathbf{123454321} \\ \mathbf{12345654321} \\ \mathbf{1234567654321} \\ \mathbf{123456787654321} \\ \mathbf{12345678987654321} \end{array}$$

A quantidade de capicuas de três algarismos que podem ser formadas usando-se apenas os algarismos 6, 7 e 8 é igual a:

- (A) 6.  
 (B) 8.  
 (C) 9.  
 (D) 16.  
 (E) 20.
8. Em matemática, o conceito de simetria está intimamente ligado a equilíbrio. Ao se falar em equilíbrio, uma primeira imagem que geralmente temos é de uma balança de dois pratos. Uma equação pode ser representada por uma balança de dois pratos que está em equilíbrio, onde a quantidade apresentada no prato da esquerda é a mesma que a quantidade no prato da direita. As balanças (1) e (2) da imagem abaixo estão em equilíbrio. Sabe-se que figuras com mesma forma representam objetos de mesma massa.



Fonte: <http://clubes.obmep.org.br/blog/probleminha-equilibrio-com-quadrados/>. (05/jul./2021).

Quantos quadrados devem ser colocados no prato direito da balança (3) para que ela também fique equilibrada?

- (A) 9 quadrados.  
 (B) 10 quadrados.  
 (C) 11 quadrados.  
 (D) 12 quadrados.
9. A simetria é definida como um tipo especial de transformação, uma maneira de mover um objeto e ainda se preservar a estrutura ou alguma outra característica desse objeto. Sobre simetria, observe atentamente cada afirmação a seguir.
- I - A simetria possui um papel central nas fronteiras da Física, no mundo quântico e na relatividade, podendo promover uma unificação matemática dos principais campos da Física Moderna.
- II - Na Teoria da Relatividade, do físico Albert Einstein, encontra-se o princípio de que as leis da física devem ser as mesmas em todos os lugares e tempos. Nesse sentido, as leis devem ser simétricas em relação ao movimento e a passagem do tempo.

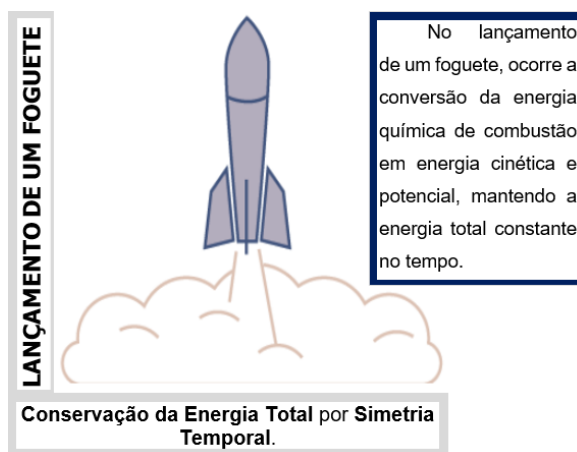
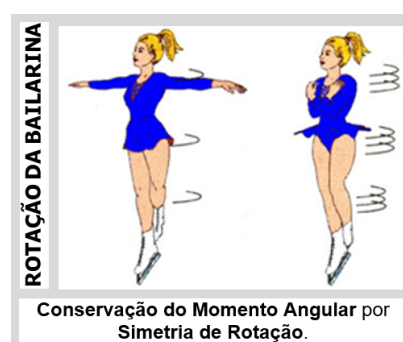
III - A Física Quântica diz que tudo no Universo é construído a partir de uma coleção de partículas fundamentais, com comportamentos regidos por equações matemáticas (leis da natureza) que também estão associadas a uma simetria. Mesmo que partículas se transformem em outras diferentes, essas transformações também não alteram as leis da física.

IV - Até onde a história escrita nos revela, foram os matemáticos babilônicos que puseram a humanidade no caminho da simetria, com profundas implicações na maneira de se ver o mundo físico.

É **CORRETO** apenas o que se afirma em:

- (A) I e II. (C) II, III e IV. (E) I, II, III e IV.  
 (B) I, II e III. (D) I, III e IV.

10. O papel da simetria na Física é revelar as transformações que levam as invariâncias de seus objetos de estudo, para que se possa entender as leis de conservação, sendo o teorema de Noether a conexão formal entre simetrias e leis de conservação. Segundo o teorema de Noether, para cada simetria contínua das leis físicas corresponde uma lei de conservação. Observe atentamente as figuras a seguir, refletindo sobre cada situação mencionada.



Assim, está correto o que se afirma em:

- (A) Se a simetria for espacial (translacional) haverá conservação do momento linear, se ela for rotacional (como ocorre numa bola de bilhar) haverá conservação do momento angular e caso seja temporal (invariante com o tempo) haverá conservação de energia.
- (B) Se a simetria for espacial (translacional) haverá conservação do momento angular, se ela for rotacional (como ocorre numa bola de bilhar) haverá conservação do momento linear e caso seja temporal (invariante com o tempo) haverá conservação de energia.
- (C) Se a simetria for espacial (translacional) haverá conservação de energia, se ela for rotacional (como ocorre numa bola de bilhar) haverá conservação do momento linear e caso seja temporal (invariante com o tempo) haverá conservação do momento angular.
- (D) Se a simetria for espacial (translacional) haverá conservação de energia, se ela for rotacional (como ocorre numa bola de bilhar) haverá conservação do momento angular e caso seja temporal (invariante com o tempo) haverá conservação do momento linear.

**CALMA, ATENÇÃO E SUCESSO EM SUAS RESOLUÇÕES!**

**RESPOSTAS ESPERADAS (QUESTIONÁRIO I)**

1. B

Vídeo 1: Intervalo de tempo ( $t$ )  $\Rightarrow 2 \text{ min } 28 \text{ s} \leq t \leq 2 \text{ min } 25 \text{ s}$ .

2. D

Vídeo 1: Intervalo de tempo ( $t$ )  $\Rightarrow 5 \text{ min } 04 \text{ s} \leq t \leq 5 \text{ min } 21 \text{ s}$ .

3. C

Vídeo 1: Intervalo de tempo ( $t$ )  $\Rightarrow 6 \text{ min } 03 \text{ s} \leq t \leq 6 \text{ min } 53 \text{ s}$ .

4. A

Vídeo 1: Intervalo de tempo ( $t$ )  $\Rightarrow 8 \text{ min } 12 \text{ s} \leq t \leq 8 \text{ min } 51 \text{ s}$ .

5. B

Vídeo 1: Intervalo de tempo ( $t$ )  $\Rightarrow (8 \text{ min } 52 \text{ s} \leq t \leq 9 \text{ min } 12 \text{ s}) \cup 2(7 \text{ min } 53 \text{ s} \leq t \leq 28 \text{ min } 13 \text{ s})$ .

6. D

Vídeo 1: Intervalo de tempo ( $t$ )  $\Rightarrow 9 \text{ min } 36 \text{ s} \leq t \leq 10 \text{ min } 11 \text{ s}$ .

7. C

Usando apenas os algarismos 6, 7 e 8 pode-se formar nove capicuas: **666, 676, 686, 767, 777, 787, 868, 878 e 888**.

8. B

Usando  $T$  para o triângulo,  $C$  para o círculo e  $Q$  para o quadrado, teremos:

Da balança (1), temos que:  $3T + 1C = 6Q$ . Isolando  $C$ , teremos:

$$C = 6Q - 3T.$$

Da balança (2), obtemos:  $2T + 4C = 8Q$ . Substituindo  $C = 6Q - 3T$ , teremos:

$$2T + 4C = 8Q$$

$$2T + 4 \cdot C = 8Q$$

$$2T + 4 \cdot (6Q - 3T) = 8Q$$

$$2T + 24Q - 12T = 8Q.$$

Isolando  $T$ , teremos:

$$2T - 12T = 8Q - 24Q$$

$$-10T = -16Q$$

$$T = \frac{-16Q}{-10}$$

$$T = 1,6Q.$$

Retornando à equação obtida na balança (1), substituindo  $T = 1,6Q$  e isolando  $C$ , para encontrarmos  $C$  em função apenas de  $Q$ , teremos:

$$\begin{aligned}C &= 6Q - 3T \\C &= 6Q - 3 \cdot T \\C &= 6Q - 3 \cdot (1,6Q) \\C &= 6Q - 4,8Q \\C &= 1,2Q.\end{aligned}$$

Na balança (3), temos que:  $4T + 3C = ?$ .

Substituindo  $C = 1,2Q$  e  $T = 1,6Q$ , nessa expressão algébrica, teremos finalmente que:

$$4T + 3C = 4 \cdot T + 3 \cdot C = 4 \cdot (1,6Q) + 3 \cdot (1,2Q) = 6,4Q + 3,6Q = 10Q.$$

Logo, serão necessários 10 quadradinhos para que a balança (3) fique equilibrada.

9. E

Todas são verdadeiras.

Vídeo 1: Intervalo de tempo ( $t$ )  $\Rightarrow (6 \text{ min } 40 \text{ s} \leq t \leq 6 \text{ min } 53 \text{ s}) \cup (9 \text{ min } 36 \text{ s} \leq t \leq 10 \text{ min } 58 \text{ s})$ .

10. A

Vídeo 1: Intervalo de tempo ( $t$ )  $\Rightarrow 29 \text{ min } 23 \text{ s} \leq t \leq 30 \text{ min } 17 \text{ s}$ .

**APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO II (SIMETRIAS NA NATUREZA E NA MATEMÁTICA)**

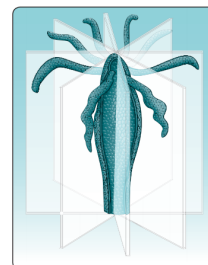
Colégio/Escola: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_  
 Ano: 9º ano do Ensino Fundamental Turma: \_\_\_\_\_ Turno: \_\_\_\_\_  
 Professor(a): \_\_\_\_\_ Disciplina: \_\_\_\_\_  
 Aluno(a): \_\_\_\_\_

**QUESTIONÁRIO II (SIMETRIAS NA NATUREZA E NA MATEMÁTICA)**

1. Existe um tipo de simetria que é observada em alguns seres vivos, como na anêmona-do-mar, água-viva (medusa), hidra e estrela-do-mar. Trata-se da simetria radial, onde um corpo pode ser dividido em partes com  $n$  raios em volta do eixo central, preservando sua forma original com rotações ao longo desse eixo. A simetria radial pode ser classificada como birradial (dois planos de simetria), tetrarradial (quatro planos de simetria), pentarradial (cinco planos de simetria) ou multirradial (acima de cinco planos de simetria). Observando atentamente as seguintes imagens, pode-se concluir que a classificação correta das simetrias radiais encontra-se em:



(a) Estrela-do-mar.



(b) Hidra.



(c) Anêmona-do-mar.



(d) Estrela-do-mar de 9 pontas.

- (A) (a) birradial, (b) tetrarradial, (c) pentarradial e (d) multirradial.  
 (B) (a) multirradial, (b) birradial, (c) tetrarradial e (d) pentarradial.  
 (C) (a) pentarradial, (b) tetrarradial, (c) birradial e (d) multirradial.  
 (D) (a) tetrarradial, (b) multirradial, (c) birradial e (d) pentarradial.

2. Observe atentamente as seguintes figuras.



(a) Emmy Noether (1882-1935).



(b) Isaac Newton (1642-1727).



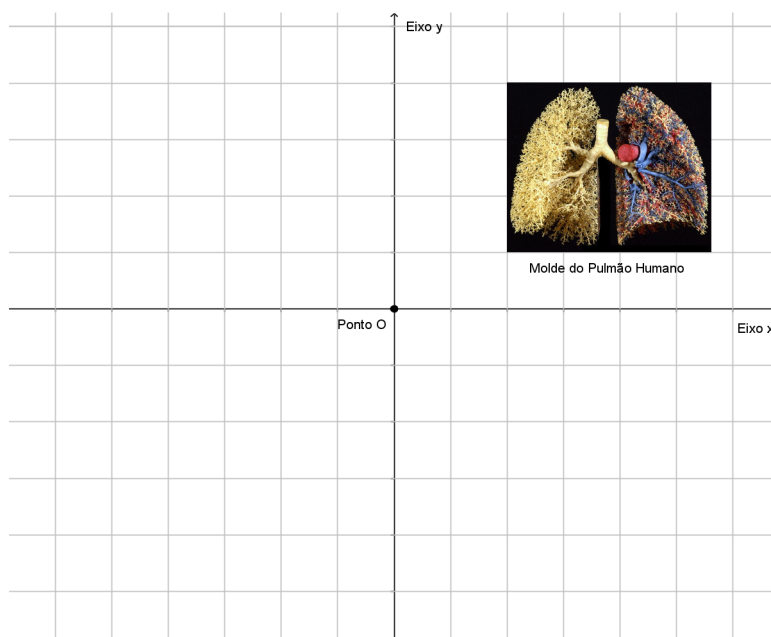
(c) Évariste Galois (1811-1832).



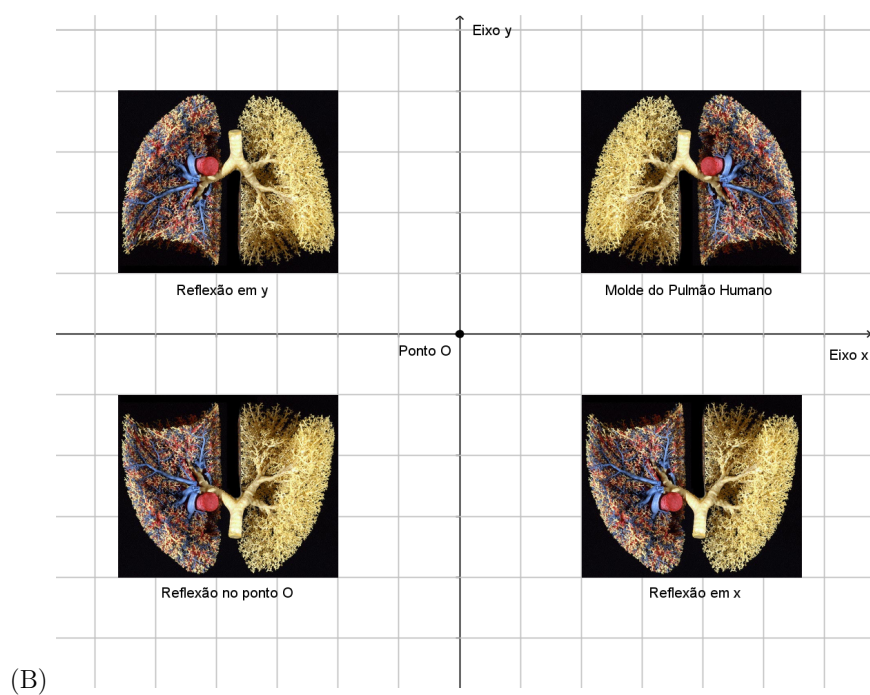
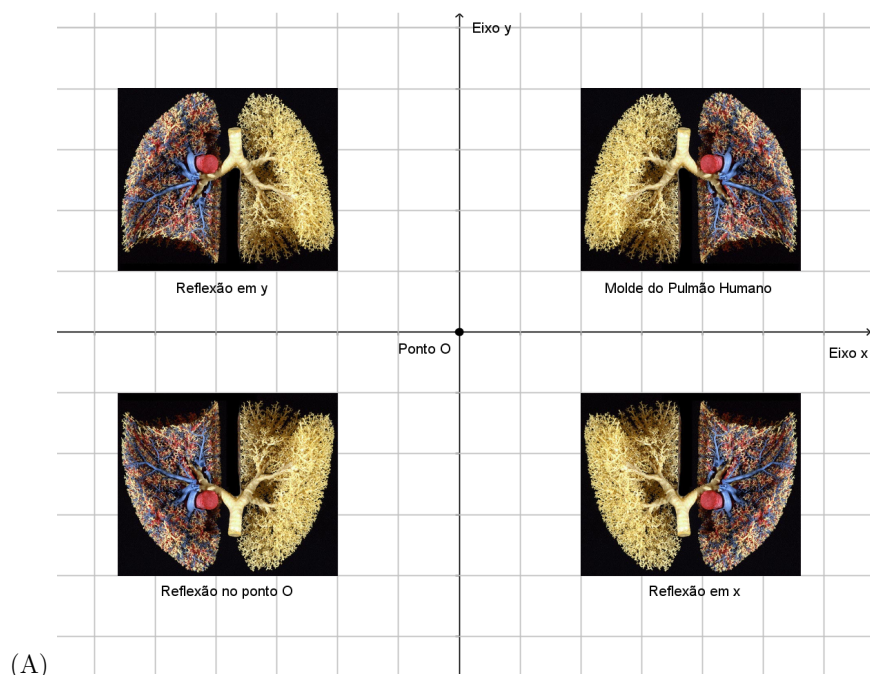
Considerando as figuras (a), (b) e (c), podemos dizer que as transformações (simetrias) ocorridas em cada uma delas, respectivamente, foram:

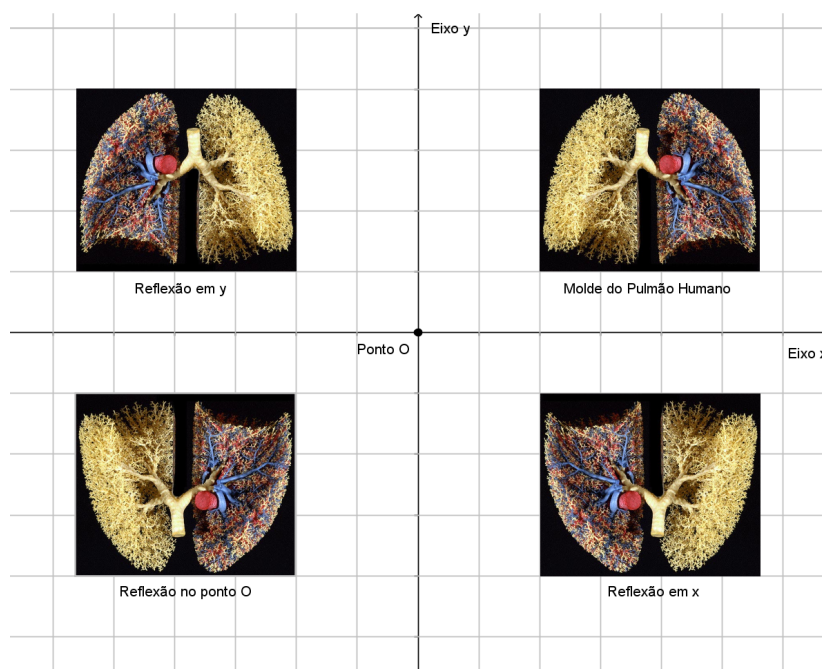
- (A) rotação, translação e reflexão.                      (C) reflexão, rotação e translação.  
 (B) translação, reflexão e rotação.                      (D) translação, rotação e reflexão.

3. Observe o molde do Pulmão Humano na malha quadriculada a seguir.

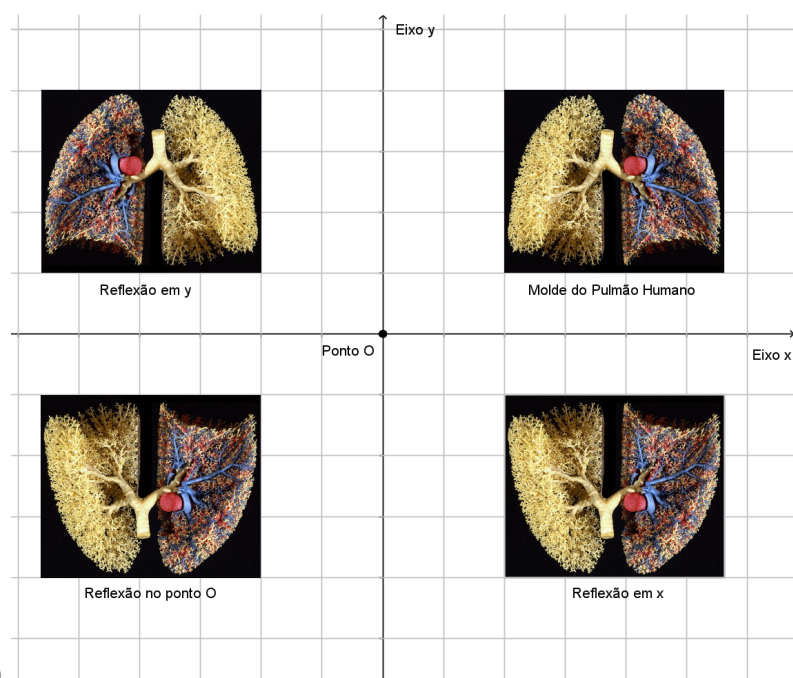


A representação correta da reflexão desse Pulmão em relação ao **eixo de simetria y**, em relação ao **centro de simetria O** e em relação ao **eixo de simetria x** está representado em:





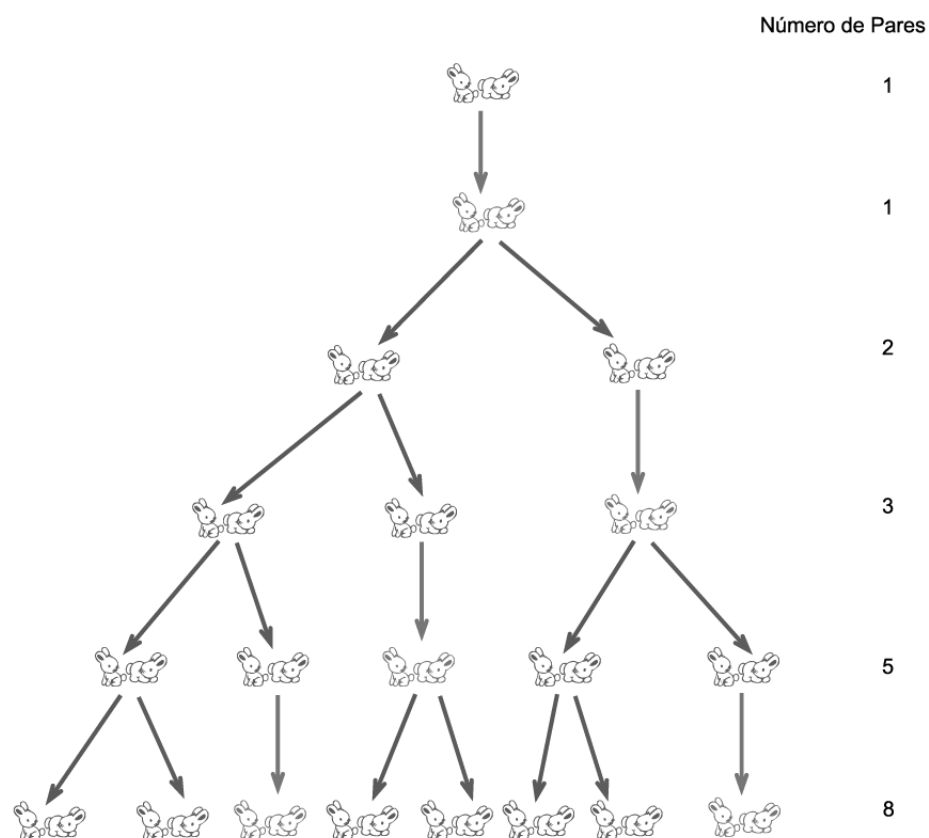
(C)



(D)

4. José Neto ganhou um casal de coelhos recém-nascidos. Imagine que os coelhos chegam à idade de acasalar um mês depois de nascer e que as fêmeas demoram

um mês para parir, gerando apenas outro casal de coelhinhos. Este problema está relacionado a uma das mais importantes descobertas da matemática, a Sequência de Fibonacci.



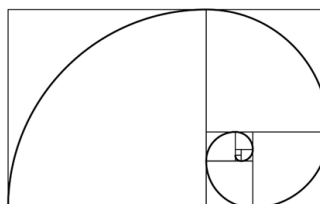
Fonte: <https://sites.google.com/site/leonardofibonacci7/o-problema-dos-coelhos>. (04/jul./2021).

Assim,  $\{1^{\circ} \text{ mês}, 2^{\circ} \text{ mês}, 3^{\circ} \text{ mês}, 4^{\circ} \text{ mês}, 5^{\circ} \text{ mês}, 6^{\circ} \text{ mês}, \dots\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$ .

Com base nessas informações, ao final de um ano (12 meses), José Neto terá:

- (A) 89 casais de coelhos.
- (B) 144 casais de coelhos.
- (C) 233 casais de coelhos.
- (D) 377 casais de coelhos.

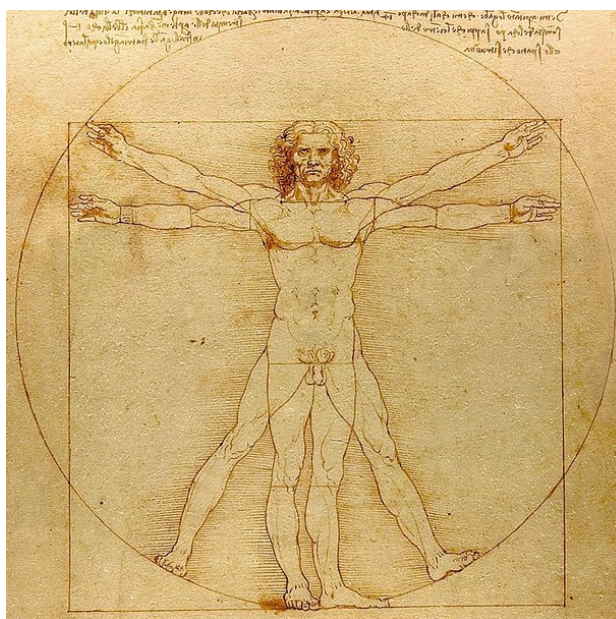
5. Observe a seguinte imagem.



Essa representação é conhecida por Espiral de Fibonacci e corresponde a uma sequência de números (Sequência de Fibonacci) que resulta num referencial para conceitos usados em artes plásticas, arquitetura, design e diagramação. Percebe-se que a figura geométrica resultante é considerada agradável à contemplação humana, sendo chamada de

- (A) retângulo mágico. (C) quadratura do círculo.  
(B) proporção áurea. (D) sequência de ouro.

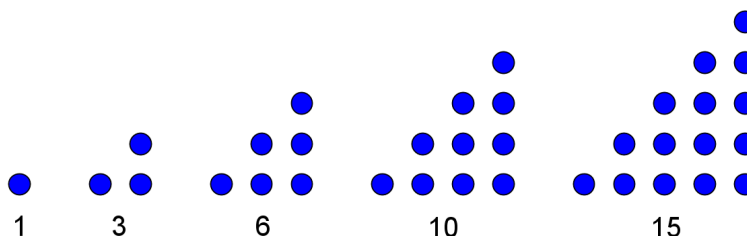
6. Uma conhecida imagem do pintor italiano Leonardo Da Vinci, o homem vitruviano, é associado às dimensões de um homem circunscrito em um círculo e um quadrado, um símbolo da simetria básica do corpo humano e para o universo como um todo. Largamente utilizada como representação da saúde física e mental do ser humano, esta imagem representa o ideal clássico de beleza, equilíbrio, harmonia das formas e perfeitas proporções. Produzido em 1490, refere-se originalmente aos estudos e escritos do arquiteto romano Marcus Vitruvius Pollio. O homem vitruviano, de Da Vinci, era considerado o desenho anatomicamente mais correto da sua época e tornou-se um ícone da cultura moderna.



O projeto da modernidade é ilustrado na imagem do homem vitruviano. Levando em consideração o texto e a imagem, este projeto pode ser compreendido como

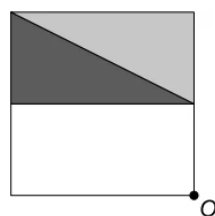
- (A) a busca da arte como fundamento para a existência humana.  
(B) a subordinação do homem em relação à Deus.  
(C) o resultado da busca do homem de se igualar a Deus.  
(D) a busca pela perfeição humana através de medidas perfeitas.

7. Observe a sequência dos números triangulares abaixo.

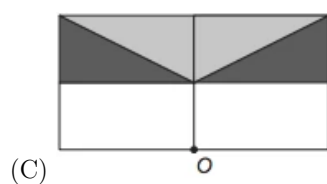
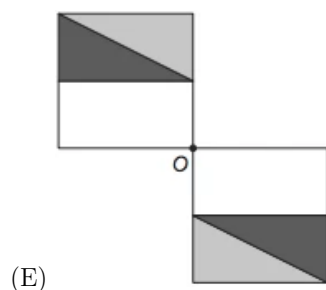
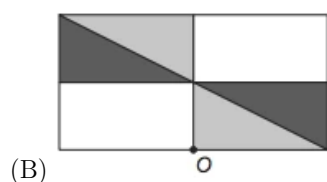
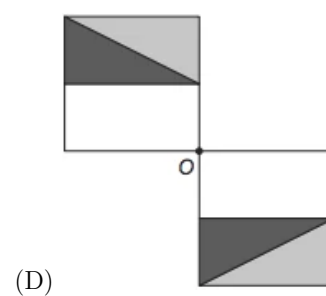
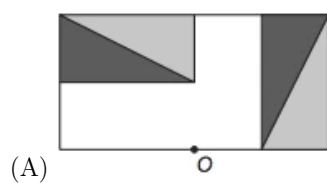


Qual será o número de bolinas da 9ª figura dessa sequência?

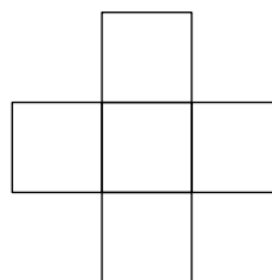
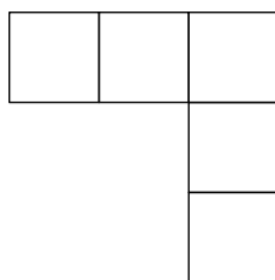
- (A) 28  
 (B) 36  
 (C) 45  
 (D) 55
8. O responsável pela introdução da ideia de simetria e por ampliar seu entendimento, tanto em uma noção primitiva inicial do que seria o eixo de simetria, quanto no sentido de proporção e equilíbrio entre as partes foi
- (A) Platão, um filósofo grego da antiguidade, considerado um dos principais pensadores da história da filosofia. Sua filosofia é baseada na teoria de que o mundo que percebemos com nossos sentidos é um mundo ilusório, confuso. O mundo espiritual é mais elevado, eterno, onde o que existe verdadeiramente são as ideias, que só a razão pode conhecer.
- (B) Aristóteles, um importante filósofo grego, um dos pensadores com maior influência na cultura ocidental. Discípulo do filósofo Platão, elaborou um sistema filosófico que abordou sobre praticamente todos os assuntos existentes, como a geometria, física, metafísica, botânica, zoologia, astronomia, medicina, psicologia, ética, drama, poesia, retórica, matemática e principalmente lógica.
- (C) Galileu Galilei, um matemático, físico, astrônomo e filósofo italiano. Fundamentou cientificamente a Teoria Heliocêntrica de Copérnico. Desmitificou lendas, estabeleceu princípios e causou uma renovação na história da Ciência. Sempre afirmava ser a Matemática a linguagem da natureza.
- (D) Pitágoras, um matemático e filósofo grego. Autor do famoso “Teorema de Pitágoras”, cujo enunciado diz que em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Desenvolveu trabalhos na área da filosofia, música, moral, geografia e medicina.
9. (ENEM 2013) Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto O.



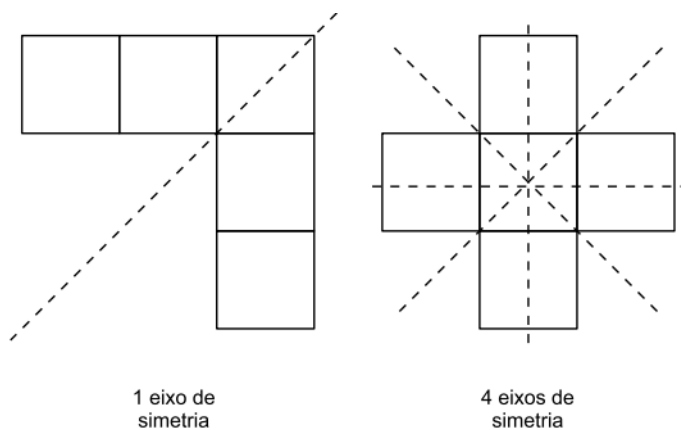
A imagem que representa a nova figura é:



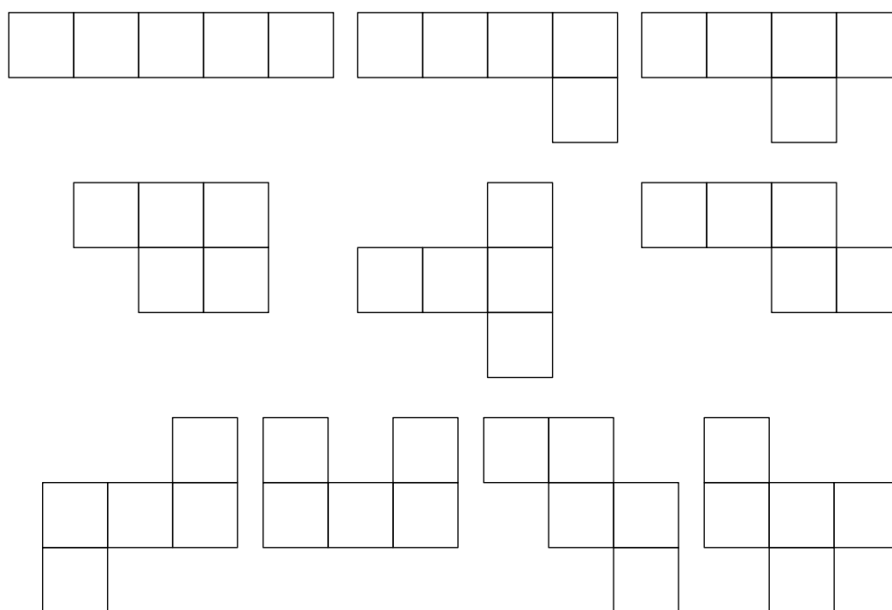
10. (OBMEP 2005) As duas figuras a seguir são formadas por cinco quadrados iguais.



Observe que elas possuem eixos de simetria, conforme assinalado a seguir.



As figuras a seguir também são formadas por cinco quadrados iguais.



Quantas delas possuem pelo menos um eixo de simetria?

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 5
- (D) 6
- (E) 7

**CALMA, ATENÇÃO E SUCESSO EM SUAS RESOLUÇÕES!**

**RESPOSTAS ESPERADAS (QUESTIONÁRIO II)**

1. C

(a) pentarradial, (b) tetrarradial, (c) birradial e (d) multirradial.

Vídeo 2: Intervalo de tempo ( $t$ )  $\Rightarrow 26 \text{ min } 15 \text{ s} \leq t \leq 28 \text{ min } 02 \text{ s}$ .

2. D

(a) translação, (b) rotação e (d) reflexão.

Vídeo 2: Intervalo de tempo ( $t$ )  $\Rightarrow 28 \text{ min } 58 \text{ s} \leq t \leq 32 \text{ min } 47 \text{ s}$ .

3. A

Vídeo 2: Intervalo de tempo ( $t$ )  $\Rightarrow 29 \text{ min } 50 \text{ s} \leq t \leq 30 \text{ min } 34 \text{ s}$ .

4. C

Vídeo 2: Intervalo de tempo ( $t$ )  $\Rightarrow 18 \text{ min } 17 \text{ s} \leq t \leq 23 \text{ min } 52 \text{ s}$ .

Atente-se que ao final do 1º mês, o casal de coelhos recém-nascidos chegarão a idade de acasalar. Observe, ainda, que trata-se da Sequência de Fibonacci, onde:

{**recém-nascido**, 1º mês, 2º mês, 3º mês, 4º mês, 5º mês, 6º mês, ..., 12º mês}

{**recém-nascido**,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $a_5$ ,  $a_6$ ,  $a_7$ ,  $a_8$ ,  $a_9$ ,  $a_{10}$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ }

{1, 1, 2, 3, 5, 8,  $a_6$ ,  $a_7$ ,  $a_8$ ,  $a_9$ ,  $a_{10}$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ }

{1, 1, 2, 3, 5, 8, **8 + 5**,  $a_7$ ,  $a_8$ ,  $a_9$ ,  $a_{10}$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ }

{1, 1, 2, 3, 5, 8, **13**, **13 + 8**,  $a_8$ ,  $a_9$ ,  $a_{10}$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ }

{1, 1, 2, 3, 5, 8, **13**, **21**, **21 + 13**,  $a_9$ ,  $a_{10}$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ }

{1, 1, 2, 3, 5, 8, **13**, **21**, **34**, **34 + 21**,  $a_{10}$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ }

{1, 1, 2, 3, 5, 8, **13**, **21**, **34**, **55**, **55 + 34**,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ }

{1, 1, 2, 3, 5, 8, **13**, **21**, **34**, **55**, **89**, **89 + 55**,  $a_{12}$ }

{1, 1, 2, 3, 5, 8, **13**, **21**, **34**, **55**, **89**, **144**, **144 + 89**}

{1, 1, 2, 3, 5, 8, **13**, **21**, **34**, **55**, **89**, **144**, **233**}

Logo, ao final do 12º mês, José Neto terá 233 casais de coelhos.

5. B

Vídeo 2: Intervalo de tempo ( $t$ )  $\Rightarrow 17 \text{ min } 26 \text{ s} \leq t \leq 17 \text{ min } 53 \text{ s}$ .

6. D

Vídeo 2: Intervalo de tempo ( $t$ )  $\Rightarrow 16 \text{ min } 00 \text{ s} \leq t \leq 17 \text{ min } 35 \text{ s}$ .

7. C

Vídeo 2: Intervalo de tempo ( $t$ )  $\Rightarrow 6 \text{ min } 28 \text{ s} \leq t \leq 11 \text{ min } 19 \text{ s}$ .

$$T_9 = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} = \frac{9 \cdot (9 + 1)}{2} = \frac{9 \cdot (10)}{2} = \frac{90}{2} = 45.$$

8. B

Aristóteles.

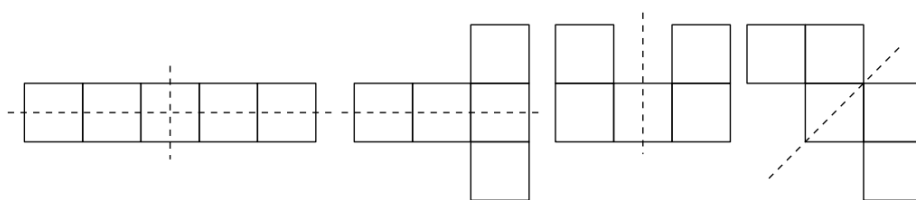
Vídeo 2: Intervalo de tempo ( $t$ )  $\Rightarrow 4 \text{ min } 41 \text{ s} \leq t \leq 5 \text{ min } 36 \text{ s}$ .

9. E

Vídeo 2: Intervalo de tempo ( $t$ )  $\Rightarrow 30 \text{ min } 20 \text{ s} \leq t \leq 30 \text{ min } 33 \text{ s}$ .

10. B

Abaixo estão indicadas as 4 figuras que possuem um ou mais eixos de simetria.



**APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO III (FÍSICA, ENERGIA,  
TRABALHO E ENERGIA MECÂNICA)**

Colégio/Escola: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_  
 Ano: 9º ano do Ensino Fundamental Turma: \_\_\_\_\_ Turno: \_\_\_\_\_  
 Professor(a): \_\_\_\_\_ Disciplina: \_\_\_\_\_  
 Aluno(a): \_\_\_\_\_

**QUESTIONÁRIO III (FÍSICA, ENERGIA, TRABALHO E ENERGIA  
MECÂNICA)**

1. (G1 - IFCE 2012) Uma pessoa sobe um lance de escada, com velocidade constante, em 1,0 min. Se a mesma pessoa subisse o mesmo lance, também com velocidade constante em 2,0 min, ela realizaria um trabalho
 

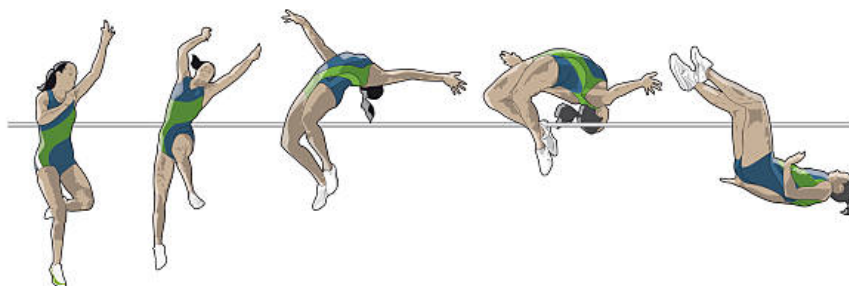
(A) duas vezes maior que o primeiro.      (D) quatro vezes menor que o primeiro.  
 (B) duas vezes menor que o primeiro.      (E) igual ao primeiro.  
 (C) quatro vezes maior que o primeiro.
2. (ENEM 2012 - Adaptada) Os carrinhos de brinquedo podem ser de vários tipos. Dentre eles, há os movidos a corda, em que uma mola em seu interior é comprimida quando a criança puxa o carrinho para trás. Ao ser solto, o carrinho entra em movimento enquanto a mola volta à sua forma inicial. O processo de conversão de energia que ocorre no carrinho descrito também é verificado em
 

(A) um freio de automóvel.      (D) uma usina hidroelétrica.  
 (B) um motor a combustão.      (E) uma atiradeira (estilingue).  
 (C) uma usina eólica.
3. (G1 - IFSP 2012 - Adaptada) Arlindo é um trabalhador dedicado. Passa grande parte do tempo de seu dia subindo e descendo escadas, pois trabalha fazendo manutenção em edifícios, muitas vezes no alto. Considere que, ao realizar um de seus serviços, ele tenha subido uma escada com velocidade escalar constante. Nesse movimento, pode-se afirmar que, em relação ao nível horizontal do solo, o centro de massa (ponto que se comporta como se toda a massa do corpo estivesse concentrada sobre ele) do corpo de Arlindo



- (A) perdeu energia cinética.  
 (B) ganhou energia cinética.  
 (C) perdeu energia potencial gravitacional.  
 (D) ganhou energia potencial gravitacional.  
 (E) perdeu energia mecânica.

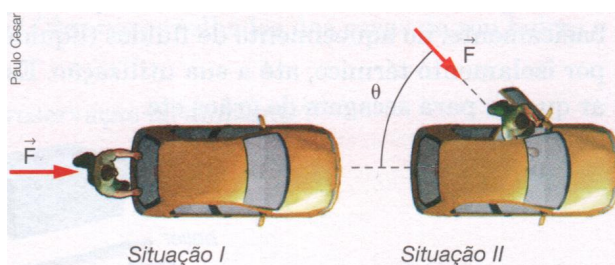
4. Determinado atleta usa 25% da energia cinética obtida na corrida para realizar um salto em altura sem vara. Se ele atingiu a velocidade de  $10 \text{ m/s}$ , considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , a altura atingida em razão da conversão de energia cinética em potencial gravitacional será de:



Fonte: <https://www.gettyimages.pt/detail/ilustra%C3%A7%C3%A3o/different-stages-of-athlete-performing-ilustra%C3%A7%C3%A3o-royalty-free/82106440>. (30/set./2021).

- (A)  $1,12 \text{ m}$ .  
 (B)  $1,25 \text{ m}$ .  
 (C)  $2,5 \text{ m}$ .  
 (D)  $3,75 \text{ m}$ .  
 (E)  $5 \text{ m}$ .
5. Um objeto de massa  $500 \text{ g}$  possui energia cinética de  $2000 \text{ J}$ . Determine a velocidade desse objeto em  $\text{m/s}$ . Adote  $\sqrt{5} = 2,23$ .
- (A)  $v = 36,6 \text{ m/s}$ .  
 (B)  $v = 44,7 \text{ m/s}$ .  
 (C)  $v = 50,4 \text{ m/s}$ .  
 (D)  $v = 62,8 \text{ m/s}$ .  
 (E)  $v = 89,2 \text{ m/s}$ .
6. (Enem 2010) Deseja-se instalar uma estação de geração de energia elétrica em um município localizado no interior de um pequeno vale cercado de altas montanhas de difícil acesso. A cidade é cruzada por um rio, que é fonte de água para consumo, irrigação das lavouras de subsistência e pesca. Na região, que possui pequena extensão territorial, a incidência solar é alta o ano todo. A estação em questão irá abastecer apenas o município apresentado.
- Qual forma de obtenção de energia, entre as apresentadas, é a mais indicada para ser implantada nesse município de modo a causar o menor impacto ambiental?
- (A) Termelétrica, pois é possível utilizar a água do rio no sistema de refrigeração.  
 (B) Eólica, pois a geografia do local é própria para a captação desse tipo de energia.

- (C) Nuclear, pois o modo de resfriamento de seus sistemas não afetaria a população.
- (D) Fotovoltaica, pois é possível aproveitar a energia solar que chega à superfície do local.
- (E) Hidrelétrica, pois o rio que corta o município é suficiente para abastecer a usina construída.
7. (UFF-RJ) Um motorista empurra um carro sem combustível até o posto mais próximo. Na primeira metade do trajeto, o motorista empurra o carro por trás (situação I) e na segunda metade do trajeto ele empurra pelo lado (situação II).



Nas figuras está também representada a força  $\vec{F}$ , que o motorista faz sobre o carro, em cada caso. Sabendo que a intensidade dessa força é constante e a mesma nas duas situações, é correto afirmar:

- (A) O trabalho realizado pelo motorista é maior na situação II.
- (B) O trabalho realizado pelo motorista é o mesmo nas duas situações.
- (C) A energia transferida para o carro pelo motorista é maior na situação I.
- (D) A energia transferida para o carro pelo motorista é menor na situação I.
- (E) O trabalho realizado pelo motorista é maior na situação I e é menor do que a energia por ele transferida para o carro na situação II.
8. O primeiro arranha-céu brasileiro foi construído na cidade de São Paulo. A construção foi iniciada em 1924, indo até 1934. Com 30 andares e 130 metros de altura, o Edifício Martinelli foi projetado pelo arquiteto húngaro William Fillinger.

Ao admirar a beleza arquitetônica do edifício, um turista percebeu que do topo do prédio alguém abandonou um objeto. Com base no texto, verifique qual afirmação está correta.



- (A) Após descer 65 m, a energia potencial do corpo é igual à energia cinética.
- (B) Ao atingir o solo, a energia potencial do corpo é máxima.
- (C) No ponto mais alto do edifício, a energia cinética do objeto é máxima.
- (D) No ponto mais alto do edifício, a energia cinética do objeto é metade da energia potencial.

9. A Física é o campo da ciência que investiga os fenômenos e as estruturas mais fundamentais da natureza, procurando sua compreensão e descrição em termos de leis mais gerais possíveis. Com essas leis, a Física estuda desde partículas subatômicas e sua estruturação em átomos e moléculas, até a descrição do Sistema Solar, das estrelas e das galáxias bem como do Universo como um todo, além da criação de modelos para a sua evolução. Em relação aos objetivos esperados a partir do estudo da Física e suas divisões, leia atentamente cada afirmação a seguir.

- I - Neste objetivo, procura-se desvendar os mistérios da natureza a fim de nos fazer entender mais sobre a nossa relação com o mundo e o universo, de forma a mostrar que não existem teorias, postulados, paradigmas ou modelos absolutos sobre essa relação, sendo todos relativos e suscetíveis a novas descobertas e entendimentos.
- II - Com este objetivo, leva-se as pessoas a analisarem causa e efeito de determinado fenômeno como uma relação e não se referindo a tudo como algo voltado as suas crenças e superstições, mas fazendo-as entender que existe uma diferença entre ambos.
- III - Tal objetivo visa melhorar as condições de vida do homem através da tecnologia, pois com ela pode-se realizar trabalhos de forma mais práticas; obtendo, assim, uma melhor qualidade de vida.

A correta associação dos objetivos esperados a partir do estudo da Física e suas divisões, com suas respectivas definições encontra-se em

- (A) I - Objetivo Especulativo, II - Objetivo Prático e III - Objetivo Esclarecedor.
  - (B) I - Objetivo Especulativo, II - Objetivo Esclarecedor e III - Objetivo Prático.
  - (C) I - Objetivo Esclarecedor, II - Objetivo Especulativo e III - Objetivo Prático.
  - (D) I - Objetivo Prático, II - Objetivo Esclarecedor e III - Objetivo Especulativo.
  - (E) I - Objetivo Prático, II - Objetivo Especulativo e III - Objetivo Esclarecedor.
10. Didaticamente, a Física é dividida em seis ramos: Acústica, Eletricidade, Física Moderna, Mecânica, Óptica e Termologia. Destes, o ramo mais antigo da Física, que estuda os fenômenos que são decorrentes dos movimentos dos corpos, ou seja, aqueles que se relacionam com a queda dos corpos, colisão de automóveis, movimentos dos planetas, dentre outros exemplos, é chamado de
- (A) Acústica.
  - (B) Eletricidade.
  - (C) Física Moderna.
  - (D) Mecânica.
  - (E) Termologia.

**CALMA, ATENÇÃO E SUCESSO EM SUAS RESOLUÇÕES!**

**RESPOSTAS ESPERADAS (QUESTIONÁRIO III)**

1. (E)  
Como a velocidade é constante, o trabalho da força muscular exercida pela pessoa é  $m \cdot g \cdot h$  nos dois casos.
2. (E)  
O processo de conversão de energia no caso mencionado é o da transformação de energia potencial elástica em energia cinética. O estilingue também usa esse mesmo processo de transformação de energia.
3. (D)  
A expressão da energia potencial é:  $E_{p_g} = m \cdot g \cdot h$ . Se ele está subindo, a altura está aumentando, portanto, o centro de massa do corpo do Arlindo está ganhando energia potencial.
4. (B)  
A porcentagem de 25% da energia cinética foi completamente transformada em energia potencial gravitacional. Sendo assim, podemos escrever que:

$$25\% \text{ de } E_c = E_{p_g}$$

$$0,25 \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h$$

$$0,25 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 10^2 = 10 \cdot h$$

$$0,25 \cdot 0,5 \cdot 100 = 10 \cdot h$$

$$12,5 = 10 \cdot h$$

$$10 \cdot h = 12,5$$

$$h = \frac{12,5}{10}$$

$$h = 1,25 \text{ m.}$$

5. (E)  
Massa:  $m = 500 \text{ g} \Rightarrow 0,5 \text{ kg}$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$2000 = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot v^2$$

$$2000 = 0,5 \cdot 0,5 \cdot v^2$$

$$2000 = 0,25 \cdot v^2$$

$$0,25 \cdot v^2 = 2000$$

$$v^2 = \frac{2000}{0,25} = 8000$$

$$v = \sqrt{8000} = \sqrt{2^6 \cdot 5^3} = 2^3 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} = 40 \cdot \sqrt{5} = 40 \cdot 2,23 = 89,2 \text{ m/s.}$$

6. (D)

O enunciado exige menor impacto ambiental. Já que a incidência solar na região é alta, a melhor forma para obtenção de energia é a fotovoltaica.

7. (C)

Situação I:  $W_{FI} = F \cdot d \cdot \cos \theta = F \cdot d \cdot \cos 0^\circ = F \cdot d \cdot 1 = F \cdot d$ .

Situação II:  $W_{FII} = F \cdot d \cdot \cos \theta$ .

Como  $\cos \theta < 1$ , teremos que  $W_{FI} > W_{FII}$ .

8. (A)

Como o prédio tem 130 m, na metade da altura da queda, 65 m, o objeto terá metade da energia potencial gravitacional e conseqüentemente metade da energia cinética.

9. (B)

Vídeo 3: Intervalo de tempo ( $t$ )  $\Rightarrow 0 \text{ min } 30 \text{ s} \leq t \leq 2 \text{ min } 25 \text{ s}$ .

10. (D)

A Mecânica é o ramo da Física que estuda os fenômenos que são decorrentes dos movimentos dos corpos, tratando-se do estudo dos fenômenos mecânicos.

Vídeo 3: Intervalo de tempo ( $t$ )  $\Rightarrow 2 \text{ min } 25 \text{ s} \leq t \leq 6 \text{ min } 40 \text{ s}$ .

**APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO IV (CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA)**

---

**Colégio/Escola:** \_\_\_\_\_ **Data:** \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_  
**Ano:** 9º ano do Ensino Fundamental **Turma:** \_\_\_\_\_ **Turno:** \_\_\_\_\_  
**Professor(a):** \_\_\_\_\_ **Disciplina:** \_\_\_\_\_  
**Aluno(a):** \_\_\_\_\_

---

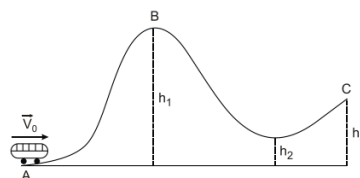
**QUESTIONÁRIO IV (CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA)**

1. (UEM 2012 - Adaptada) Sobre a energia mecânica e a conservação de energia, julgue corretamente cada afirmação a seguir e assinale a **INCORRETA**.
  - (A) Denomina-se energia cinética a energia que um corpo possui, por este estar em movimento.
  - (B) Pode-se denominar de energia potencial gravitacional a energia que um corpo possui por se situar a uma certa altura acima da superfície terrestre.
  - (C) A energia mecânica total de um corpo é conservada, mesmo com a ocorrência de atrito.
  - (D) A energia total do universo é sempre constante, podendo ser transformada de uma forma para outra; entretanto, não pode ser criada e nem destruída.
  - (E) Quando um corpo possui energia cinética, a força que o corpo aplica é capaz de realizar trabalho.
  
2. (UFSM 2013 - Adaptada) Um ônibus de massa  $m$  anda por uma estrada de montanha e desce uma altura  $h$ . O motorista mantém os freios acionados, de modo que a velocidade é mantida constante em módulo durante todo o trajeto. Considerando as afirmativas a seguir, julgue-as corretamente, identificando se são verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**).
  - I - ( ) A variação da energia cinética do ônibus é nula.
  - II - ( ) A energia mecânica do sistema ônibus-Terra se conserva, pois a velocidade do ônibus é constante.
  - III - ( ) A energia total do sistema ônibus-Terra se conserva, embora parte da energia mecânica se transforme em energia interna.

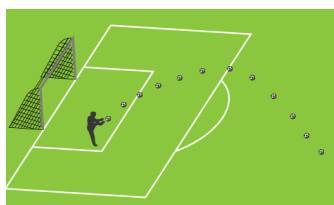
O julgamento correto encontra-se em

- (A) I - V, II - V, III - F.      (C) I - F, II - F, III - V.      (E) I - F, II - V, III - F.  
 (B) I - V, II - F, III - V.      (D) I - V, II - V, III - V.

3. (G1 - CFTMG 2012) Um carrinho é lançado sobre os trilhos de uma montanha russa, no ponto A, com uma velocidade inicial  $V_0$  conforme mostra a figura. As alturas  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$  valem, respectivamente,  $16,2\text{ m}$ ,  $3,4\text{ m}$  e  $9,8\text{ m}$ . Para o carrinho atingir o ponto C, desprezando o atrito e adotando  $g = 10\text{ m/s}^2$ , o menor valor de  $V_0$ , em  $\text{m/s}$ , deverá ser igual a



- (A) 10.  
 (B) 14.  
 (C) 18.  
 (D) 20.
4. Um motociclista desloca-se a  $72\text{ km/h}$  em uma via retilínea. Em dado momento, a velocidade é alterada para  $108\text{ km/h}$ . Sendo a massa do conjunto (moto + motociclista) de  $350\text{ kg}$ , determine a variação de energia cinética sofrida pelo motociclista. Adote:  $72\text{ km/h} = 20\text{ m/s}$  e  $108\text{ km/h} = 30\text{ m/s}$ .
- (A)  $\Delta E_c = 50\text{ kJ} = 50000\text{ J}$ .  
 (B)  $\Delta E_c = 87,5\text{ kJ} = 87500\text{ J}$ .  
 (C)  $\Delta E_c = 90\text{ kJ} = 90000\text{ J}$ .  
 (D)  $\Delta E_c = 97,5\text{ kJ} = 97500\text{ J}$ .  
 (E)  $\Delta E_c = 107,5\text{ kJ} = 107500\text{ J}$ .
5. (UFRRJ) Um goleiro chuta uma bola que descreve um arco de parábola, como mostra a figura abaixo. No ponto em que a bola atinge a altura máxima, pode-se afirmar que:



- (A) a energia potencial é máxima.  
(B) a energia mecânica é nula.  
(C) a energia cinética é nula.  
(D) a energia cinética é máxima.  
(E) nada se pode afirmar sobre as energias, pois não conhecemos a massa da bola.
6. O conceito de energia foi de suma importância para o desenvolvimento da ciência, em particular da Física. A energia mecânica é a energia produzida pelo trabalho de um corpo que pode ser transferida entre os corpos, correspondendo a soma da energia cinética ( $E_c$ ), produzida pelo movimento dos corpos, com a energia potencial elástica ( $E_{p_e}$ ) ou gravitacional ( $E_{p_g}$ ), produzida por meio da interação dos corpos relacionada com a posição dos mesmos. Sendo assim, podemos dizer que o princípio da conservação da energia mecânica diz que:
- (A) nada se perde, nada se cria, tudo se transforma.  
(B) que a energia pode ser gastada e perdida.  
(C) a energia total de um sistema isolado é constante.  
(D) que a energia jamais pode ser transferida de um corpo a outro.  
(E) a energia cinética de um corpo está relacionada com a força da gravidade.
7. A respeito da energia mecânica de um sistema conservativo, livre de forças dissipativas, assinale a alternativa correta:
- (A) Na presença de atrito, ou de outras forças dissipativas, a energia mecânica de um corpo em movimento aumenta.  
(B) A energia mecânica de um corpo que se move livre da ação de quaisquer forças dissipativas mantém-se constante.  
(C) Para que a energia mecânica de um corpo permaneça constante, é necessário que, quando houver aumento de energia cinética, também haja aumento de energia potencial.  
(D) A energia potencial é a parte da energia mecânica relacionada à velocidade com o que o corpo desloca-se.  
(E) A energia cinética de um corpo que se move livre da ação de quaisquer forças dissipativas mantém-se constante.
8. (PUC-PR) Um sistema de partículas está sujeito à ação exclusiva de forças conservativas. Então, é correto afirmar que:
- (A) a energia cinética do sistema permanece constante.  
(B) não há variação da energia potencial do sistema.  
(C) a trajetória das partículas é obrigatoriamente curvilínea.

- (D) um aumento na energia cinética do sistema implica obrigatoriamente em um aumento de sua energia mecânica.
- (E) a energia mecânica do sistema não varia.
9. (Fuvest-SP - Adaptada) Uma pedra com massa  $m = 0,10$  kg é lançada verticalmente para cima com energia cinética  $E_c = 20$  Joules. Qual a altura máxima atingida ela pedra? Adote:  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.
- (A) 10 m.
- (B) 15 m.
- (C) 20 m.
- (D) 1 m.
- (E) 0,2 m.
10. (Cefet-PR - Adaptada) Uma bola de 200 g de massa é lançada verticalmente para cima, de modo a possuir uma energia cinética de 50 J no instante do lançamento. Considerando  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> e desprezando a resistência do ar, a velocidade da bola ao atingir uma altura de 20 m será:
- (A) 22 m/s.
- (B) 10 m/s.
- (C) 5 m/s.
- (D) 3 m/s.
- (E) 0 m/s.

**CALMA, ATENÇÃO E SUCESSO EM SUAS RESOLUÇÕES!**

**RESPOSTAS ESPERADAS (QUESTIONÁRIO IV)**

1. (C)

- (A) CORRETA. Energia cinética é energia mecânica associada ao movimento.
- (B) CORRETA. Energia potencial gravitacional é energia mecânica de posição, dependendo, portanto, da altura em relação ao plano horizontal de referência.
- (C) INCORRETA. A força de atrito pode atuar tanto como força dissipativa (transformando energia mecânica em térmica) ou como força incrementativa (transferindo energia mecânica ao corpo).
- (D) CORRETA. É o que afirma o princípio da conservação da energia.
- (E) CORRETA. De acordo com o teorema da energia cinética, o trabalho da resultante é igual à variação da energia cinética.

2. (B)

- I - (V) Para um dado corpo, a energia cinética só depende da velocidade. Como a velocidade tem módulo constante, a energia cinética também é constante e, conseqüentemente, sua variação é nula.
- II - (F) A energia mecânica do sistema diminui, pois a energia potencial está diminuindo e a energia cinética é constante.
- III - (V) A energia mecânica dissipada é transformada em energia térmica provocando aquecimento dos equipamentos de frenagem, sendo armazenada como energia interna do sistema.

**Observação:** Foi desprezada a parcela de energia térmica dissipada para o meio ambiente.

3. (C)

Para atingir o ponto C, tem que passar pelo ponto B. Tratando-se de um sistema conservativo, pela conservação da energia mecânica:

$$E_{m(A)} = E_{m(B)}$$

$$E_{c(A)} = E_{pg(B)}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 = m \cdot g \cdot h_B$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot V_0^2 = 1 \cdot 10 \cdot 16,2$$

$$\frac{1 \cdot V_0^2}{2} = 162$$

$$1 \cdot V_0^2 = 162 \cdot 2$$

$$V_0^2 = 324$$

$$V_0 = \sqrt{324} = 18 \text{ m/s.}$$

**Observação:** Rigorosamente,  $V_0 > 18$  m/s.

4. (B)

Dados:  $m = 350$  kg,  $v_i = 20$  m/s e  $v_f = 30$  m/s.

$$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i}$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2$$

$$\Delta E_c = 0,5 \cdot 350 \cdot 30^2 - 0,5 \cdot 350 \cdot 20^2$$

$$\Delta E_c = 157500 - 70000$$

$$\Delta E_c = 87500 \text{ J ou } 87,5 \text{ kJ.}$$

5. (A)

No ponto de altura máxima a energia cinética é mínima e a energia potencial gravitacional é máxima.

6. (C)

O princípio de conservação de energia nos diz que em um movimento em que só atuam forças conservativas, a energia mecânica (energia cinética + energia potencial gravitacional + energia potencial elástica) permanece constante. Ou seja, se não houver forças dissipativas, como o atrito, a energia se manterá constante em qualquer ponto do caminho percorrido.

7. (B)

- (A) FALSO – na presença de forças dissipativas, a energia mecânica diminui.
- (B) VERDADEIRO.
- (C) FALSO – caso ocorra aumento da energia cinética, a energia potencial deverá diminuir, para que a energia mecânica permaneça constante.
- (D) FALSO – a energia cinética é a parte da energia mecânica relacionada ao movimento.
- (E) FALSO – nesse caso, a energia cinética sofrerá decréscimos por conta das forças dissipativas.

8. (E)

A energia mecânica equivale à soma das energias cinética e potencial de um sistema físico. Em sistemas conservativos, ou seja, sem atrito, a energia mecânica permanece constante.

9. (C)

Como não foi dada nenhuma informação sobre forças dissipativas, trata-se então de um sistema conservativo. Pela Lei da Conservação da Energia, a energia mecânica de um sistema conservativo permanece constante, logo, a energia mecânica no ponto A (solo) tem que ser igual à energia mecânica no ponto B (altura máxima).

Temos que no ponto A, a energia mecânica é somente cinética, pois não possui altura relativa ao solo; enquanto que no ponto B, a energia será somente potencial gravitacional, pois na altura máxima a velocidade é nula. Assim,

$$\begin{aligned}
 E_{m_A} &= E_{m_B} \\
 E_{C_A} + E_{P_{g_A}} &= E_{C_B} + E_{P_{g_B}} \\
 E_{C_A} + \cancel{E_{P_{g_A}}} &= \cancel{E_{C_B}} + E_{P_{g_B}} \\
 E_{C_A} &= E_{P_{g_B}} \\
 E_{C_A} &= m \cdot g \cdot h_B \\
 20 &= 0,10 \cdot 10 \cdot h_B \\
 20 &= 1 \cdot h_B \Rightarrow h_B = 20 \text{ m.}
 \end{aligned}$$

Logo, a altura máxima foi de 20 metros.

10. (B)

Massa:  $m = 200 \text{ g} \Rightarrow 0,2 \text{ kg}$ .

Sendo o ponto A como o ponto inicial de lançamento (solo) e o ponto B situado a 20 m do solo, teremos que em A a energia mecânica é somente cinética, pois não possui altura relativa ao solo; enquanto que no ponto B, a energia mecânica será composta pela energia cinética (pois a bola ainda encontra-se em movimento) e energia potencial gravitacional (pois encontra-se a 20 m do solo). Assim,

$$\begin{aligned}
 E_{m_A} &= E_{m_B} \\
 E_{C_A} + E_{P_{g_A}} &= E_{C_B} + E_{P_{g_B}} \\
 E_{C_A} + \cancel{E_{P_{g_A}}} &= E_{C_B} + E_{P_{g_B}} \\
 E_{C_A} &= E_{C_B} + E_{P_{g_B}} \\
 E_{C_A} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 + m \cdot g \cdot h_B \\
 50 &= \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot v_B^2 + 0,2 \cdot 10 \cdot 20 \\
 50 &= 0,1 \cdot v_B^2 + 40 \\
 50 - 40 &= 0,1 \cdot v_B^2 \\
 10 &= 0,1 \cdot v_B^2 \\
 0,1 \cdot v_B^2 &= 10 \Rightarrow v_B^2 = \frac{10}{0,1} = 100 \\
 v_B &= \sqrt{100} = 10 \text{ m/s.}
 \end{aligned}$$

Logo, a velocidade da bola ao atingir a altura de 20 m será de 10 m/s.