



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CATALÃO (UFCAT)
FACULDADE DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

IVAN DOURADO MARIANO LOPES

INVESTIGAÇÃO DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE
CONCRETOS COM RESÍDUOS DA CONSTRUÇÃO CIVIL: ANÁLISE
EXPERIMENTAL E MODELAGEM DE HOMOGENEIZAÇÃO
COMPUTACIONAL VIA MEC

CATALÃO (GO)

2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CATALÃO

FACULDADE DE ENGENHARIA

Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, número 1120, - Bairro Setor Universitário, Catalão/GO, CEP 75704-020
Telefone: - - <https://www.ufcat.edu.br>

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA)

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DE TESES E DISSERTAÇÕES DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE CATALÃO (UFCAT)

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Catalão (UFCAT) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFCAT), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFCAT é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o(a) autor(a) e o(a) orientador(a) Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação ou Tese? **Dissertação**

2. Nome completo do autor: **IVAN DOURADO MARIANO LOPES**

Nome completo do(a) orientador(a): **GABRIELA REZENDE FERNANDES**

3. Título do trabalho

Título: **INVESTIGAÇÃO DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE CONCRETOS COM RESÍDUOS DA CONSTRUÇÃO CIVIL: ANÁLISE EXPERIMENTAL E MODELAGEM DE HOMOGENEIZAÇÃO COMPUTACIONAL VIA MEC**

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento: [X] SIM [] NÃO¹

[¹] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs.: Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor



Documento assinado eletronicamente por **GABRIELA REZENDE FERNANDES, Orientador(a)**, em 28/08/2025, às 15:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ivan Dourado Mariano Lopes, Usuário Externo**, em 05/09/2025, às 16:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufcat.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0229548** e o código CRC **FC756147**.

IVAN DOURADO MARIANO LOPES

INVESTIGAÇÃO DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE
CONCRETOS COM RESÍDUOS DA CONSTRUÇÃO CIVIL: ANÁLISE
EXPERIMENTAL E MODELAGEM DE HOMOGENEIZAÇÃO
COMPUTACIONAL VIA MEC

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Faculdade de Engenharia da Universidade Federal de Catalão (UFCAT), como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas e Construção Civil. Linha de pesquisa: Mecânica das Estruturas e dos Materiais.

Orientadora: Professora Doutora Gabriela Rezende Fernandes

Coorientador: Professor Doutor José Júlio de Cerqueira Pituba

CATALÃO (GO)

2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFCAT.

Lopes, Ivan Dourado Mariano
Investigação do comportamento mecânico de concretos com resíduos da construção civil [manuscrito] : análise experimental e modelagem de homogeneização computacional via MEC / Ivan Dourado Mariano Lopes. - 2025.
177 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Gabriela Rezende Fernandes; co orientador Dr. José Júlio de Cerqueira Pituba.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Catalão, Faculdade de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Catalão, 2025.

Bibliografia. Apêndice.
Inclui siglas, abreviaturas, símbolos, gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Concreto reciclado. 2. Método dos Elementos de Contorno. 3. Homogeneização multiescala. 4. Elemento de Volume Representativo. 5. Zona de Transição Interfacial. I. Fernandes, Gabriela Rezende, orient. II. Pituba, José Júlio de Cerqueira, coorient. III. Título.

CDU 624



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CATALÃO
Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, número 1120, - Bairro Setor Universitário, Catalão/GO, CEP 75704-020
Telefone: - - <https://www.ufcat.edu.br>

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 2 de 2025 da sessão de Defesa de Dissertação de **IVAN DOURADO MARIANO LOPES**, que confere o título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração em Estruturas e Construção Civil.

Aos dezessete dias do mês de junho de dois mil e vinte e cinco a partir das 15 horas e 15 minutos, na sala virtual do *Google Meet*, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada “**INVESTIGAÇÃO DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE CONCRETOS COM RESÍDUOS DA CONSTRUÇÃO CIVIL: ANÁLISE EXPERIMENTAL E MODELAGEM DE HOMOGENEIZAÇÃO COMPUTACIONAL VIA MEC**”. Os trabalhos foram instalados pela Orientadora, **Professora Doutora GABRIELA REZENDE FERNANDES (PPGEC/UFCAT)**, com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: **Professor Doutor RODRIGO GUERRA PEIXOTO (PROPEEs/UFGM)**, membro titular externo; e do **Professor Doutor JORGE LUIS AKASAKI (PPGCM/UNESP)**, membro titular externo. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **APROVADO** pelos seus membros. Proclamados os resultados pela **Professora Doutora GABRIELA REZENDE FERNANDES**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **GABRIELA REZENDE FERNANDES, Orientador(a)**, em 17/06/2025, às 18:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Guerra Peixoto, Usuário Externo**, em 17/06/2025, às 18:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **JORGE LUIS AKASAKI, Usuário Externo**, em 17/06/2025, às 18:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufcat.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0206057** e o código CRC **1C1CAE79**.

Dedico esse trabalho à minha mãe, sem ela não seria possível.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à professora Gabriela Rezende Fernandes por toda a paciência e dedicação a mim dispensada para que a conclusão desse trabalho fosse possível. Não poupou esforços em me acompanhar nos mínimos detalhes e me ensinou os caminhos da pesquisa científica com maestria. Ao professor José Júlio de Cerqueira Pituba por dedicar várias horas coletando material e em laboratório para que pudéssemos realizar os experimentos, pelos conselhos que muito ajudaram na minha formação acadêmica.

À minha mãe, Nerilda Caixeta Mariano, e meu irmão, Gilvan Dourado Mariano Lopes, por serem o esteio que preciso nos momentos de dificuldades. À minha mãe, agradeço ainda por sempre incentivar os estudos e nunca medir esforços para que sempre tivéssemos uma educação de qualidade. Ao meu pai, Alan Dourado, e os demais familiares por cada palavra de incentivo.

Ao amigo e professor que me despertou o gosto para engenharia de estruturas, José Eduardo Tannus Reis. Ao meu amigo Santos, que sempre me incentivou nos estudos dos diversos tipos de concreto. À Leidiana, que esteve ao meu lado nesse período com seu companheirismo, dividindo comigo bons momentos e aconselhando nas horas difíceis.

Aos colegas do mestrado, principalmente à Lorena Peixoto, com a qual foi possível a troca de vários conhecimentos sobre o MEC.

À RNV Gestão de Resíduos por ter fornecido gentilmente os materiais com os quais foram realizados os experimentos. À direção e técnicos do Aterro Sanitário da cidade de Catalão.

Ao laboratório de solos da Geografia (GEOSOLOS) e ao técnico, Cleomar, que muito ajudou no teste de granulometria do material e pelas conversas que tivemos, um profundo conhecedor do cerrado brasileiro.

Aos integrantes do Grupo de Pesquisa e Estudos em Engenharia (GPEE), com os quais compartilhei a sala nesse período final do mestrado, obrigado pelas conversas que serviram para aliviar as tensões de alguns dias. Aos integrantes do GPEE que auxiliaram na mistura e moldagem dos CPs, a ajuda foi de extrema importância para que a parte experimental do trabalho fosse concluída.

Aos integrantes do Núcleo de Pesquisa em Modelagem de Materiais e Estruturas (NP2ME), do qual orgulhosamente faço parte. À Michele e à Ana Vitória que me auxiliaram na parte experimental e na edição de alguns EVRs, respectivamente. Ao Matheus Calaça que me auxiliou no entendimento no arquivo do EVR.

Aos professores Wellington e Romes pelas sugestões e comentários propostos na qualificação, ajudaram a desenvolver um trabalho melhor e com toda a certeza ajudaram a ajustar a vela para que eu conseguisse navegar com mais tranquilidade nesse mar revolto que é o

mestrado. Agradeço aos demais professores do PPGEC que tanto contribuíram para minha formação.

À Dourado Engenharia que patrocinou esse mestrado e auxiliou com o fornecimento de equipamentos para os experimentos.

Enfim, agradeço a todos que passaram por minha vida e deixaram um conselho, uma palavra amiga ou uma troca de ideia que fizessem com que eu me tornasse uma pessoa melhor.

RESUMO

LOPES, I. D. M. **Investigação do comportamento mecânico de concretos com resíduos da construção civil: análise experimental e modelagem de homogeneização computacional via MEC.** Catalão. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia, Universidade Federal de Goiás, 2025.

Esse trabalho investiga o comportamento mecânico de concretos com substituição parcial ou total de agregados naturais por agregados reciclados provenientes de resíduos da construção civil (RCC). A pesquisa combina ensaios experimentais e modelagem numérica com foco em abordagem multiescala, utilizando o Método dos Elementos de Contorno (MEC) para representar a microestrutura do concreto por meio do Elemento de Volume Representativo (EVR). A formulação utilizada considera matriz com comportamento elasto-plástico modelado via critério de Mohr-Coulomb, agregados com comportamento elástico e elementos de contato e fratura coesiva para modelar a fissuração na Zona de Transição Interfacial (ZTI). Foram realizadas substituições de 0%, 13,96%, 27,02%, 49,68% e 100% de agregado graúdo convencional por agregado graúdo reciclado. Os resultados experimentais demonstraram redução de resistência com o aumento do teor de substituição, coerente com os dados da literatura. A modelagem numérica apresentou boa concordância com os ensaios físicos, validando a abordagem adotada. A partir da calibração dos modelos, foram simuladas outras proporções de substituição, permitindo prever o comportamento do concreto reciclado sem necessidade de novos ensaios. O estudo destaca o potencial técnico e ambiental do uso de RCC em concretos estruturais, aliando sustentabilidade e desempenho mecânico confiável.

Palavras-chave: Concreto reciclado, Método dos Elementos de Contorno, Homogeneização multiescala, Elemento de Volume Representativo, Zona de Transição Interfacial, Mecânica da Fratura, Sustentabilidade.

ABSTRACT

LOPES, I. D. M. **Investigation of the Mechanical Behavior of Concrete with Construction and Demolition Waste: Experimental Analysis and Computational Homogenization Modeling via BEM.** Catalão. Dissertation (Master's) – School of Engineering, Federal University of Catalão, 2025.

This study investigates the mechanical behavior of concrete in which natural aggregates are partially or fully replaced by recycled aggregates derived from construction and demolition waste (CDW). The research combines experimental testing and numerical modeling with a multiscale approach, using the Boundary Element Method (BEM) to represent the concrete microstructure through the Representative Volume Element (RVE). The formulation adopted considers a matrix with elastoplastic behavior modeled by the Mohr-Coulomb criterion, aggregates with elastic behavior, and cohesive contact and fracture elements to model cracking in the Interfacial Transition Zone (ITZ). Replacements of 0%, 13.96%, 27.02%, 49.68%, and 100% of conventional coarse aggregate with recycled coarse aggregate were analyzed. Experimental results showed a reduction in strength as the replacement level increased, in agreement with existing literature. The numerical modeling closely matched the physical test results, validating the adopted approach. Once calibrated, the models were used to simulate other replacement ratios, allowing the prediction of recycled concrete behavior without the need for additional physical tests. The study highlights the technical and environmental potential of using CDW in structural concrete, combining sustainability with reliable mechanical performance.

Keywords: Recycled concrete, Boundary Element Method, Multiscale homogenization, Representative Volume Element, Interfacial Transition Zone, Fracture mechanics, Sustainability.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 – RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DE CONCRETOS COM AGREGADOS RECICLÁVEIS	24
FIGURA 1.2 – MICROESTRUTURA DO CONCRETO	24
FIGURA 2.1 – CONCEITO DE HOMOGENEIZAÇÃO DA ANÁLISE MULTIESCALA.....	36
FIGURA 2.2 – EVR COM INCLUSÕES E VAZIOS	37
FIGURA 2.3 – ILUSTRAÇÃO CAMPO DE DEFORMAÇÕES	40
FIGURA 2.4 – DEFINIÇÃO DE DOIS EVRS DISTINTOS PARA MEIOS PERIÓDICOS	46
FIGURA 3.1 – MODELOS DE PLASTICIDADE	51
FIGURA 3.2 – ELEMENTO FINITO DE FRATURA E CONTATO DEFINIDO SOBRE A INTERFACE MATRIZ/AGREGADO	58
FIGURA 4.1 – SOLUÇÃO FUNDAMENTAL.....	60
FIGURA 4.2 – MICROESTRUTURA HETEROGÊNEA COM DUAS INCLUSÕES.....	63
FIGURA 4.3 – TRATAMENTO DE SINGULARIDADE	71
FIGURA 4.4 – DISCRETIZAÇÃO EVR EM ELEMENTOS RETOS	77
FIGURA 4.5 – ELEMENTO RETO EM COORDENADAS HOMOGÊNEAS.....	77
FIGURA 4.6 – CÉLULAS TRIANGULAR COM COORDENADAS HOMOGÊNEAS	80
FIGURA 4.7 – SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS	81
FIGURA 6.1 – MATERIAL RECICLADO COM PRÉ-LIMPEZA	92
FIGURA 6.2 – MATERIAL RECICLADO DESCARTADO	93
FIGURA 6.3 – CURVAS GRANULOMÉTRICAS	97
FIGURA 6.4 – PESAGEM MATERIAL PENEIRADO	97
FIGURA 6.5 – SEPARAÇÃO DO MATERIAL PENEIRADO	98
FIGURA 6.6 – MATERIAL APÓS PESAGEM	98
FIGURA 6.7 – MOLDAGEM DOS CPS	99
FIGURA 6.8 – CURA DOS CPS	99
FIGURA 6.9 – PRENSA ENSAIO	100
FIGURA 6.10 – ENSAIO DE ABATIMENTO.....	101
FIGURA 6.11 – PESO CPS.....	102
FIGURA 6.12 – PESO CPS PARA ENSAIO DE COMPRESSÃO UNIAXIAL AOS 89 DIAS.....	103
FIGURA 6.13 – PESO CPS PARA ENSAIO DE COMPRESSÃO DIAMETRAL AOS 35 DIAS	104
FIGURA 6.14 – ILUSTRAÇÃO DISPOSITIVO	105
FIGURA 6.15 – DESENHO CHAPAS CPS.....	106
FIGURA 6.16 – CP POSICIONADO PARA ROMPIMENTO.....	106
FIGURA 6.17 – RESISTÊNCIAS COMPRESSÃO AXIAL	108

FIGURA 6.18 – RESISTÊNCIAS COMPRESSÃO DIAMETRAL.....	108
FIGURA 6.19 – CURVA TENSÃO X DEFORMAÇÃO	110
FIGURA 6.20 – CURVA TENSÃO X DEFORMAÇÃO	111
FIGURA 6.21 – CURVA TENSÃO X DEFORMAÇÃO	111
FIGURA 6.22 – CURVA TENSÃO X DEFORMAÇÃO.....	112
FIGURA 6.23 – CURVA TENSÃO X DEFORMAÇÃO.....	112
FIGURA 6.24 – CURVA TENSÃO X DEFORMAÇÃO.....	113
FIGURA 6.25 – CURVA TENSÃO X DEFORMAÇÃO	113
FIGURA 6.26 – CURVA TENSÃO X DEFORMAÇÃO	114
FIGURA 6.27 – CURVA TENSÃO X DEFORMAÇÃO	114
FIGURA 6.28 – CURVA TENSÃO X DEFORMAÇÃO	115
FIGURA 6.29 – FOTO ROMPIMENTO COMPRESSÃO AXIAL.....	115
FIGURA 6.30 – FOTO ROMPIMENTO COMPRESSÃO DIAMETRAL.....	116
FIGURA 6.31 – FOTO CP ROMPIDO COM EXTENSÔMETRO	116
FIGURA 6.32 – FOTO CP ROMPIDO COMPRESSÃO AXIAL.....	117
FIGURA 6.33 – FOTO CP ROMPIDO COMPRESSÃO DIAMETRAL.....	117
FIGURA 6.34 – TIPOS DE RUPTURA	118
FIGURA 6.35 – RUPTURA ENSAIO 2.10	121
FIGURA 6.36 – RUPTURA ENSAIO 3.02	121
FIGURA 6.37 – RUPTURA ENSAIO 3.03	122
FIGURA 6.38 – RUPTURA ENSAIO 4.03	122
FIGURA 6.39 – RUPTURA ENSAIO 5.01	123
FIGURA 7.1 – EVR 1116 CÉLULAS	124
FIGURA 7.2 – RESULTADOS EXPERIMENTAIS DO TRAÇO 1 E RESULTADO NUMÉRICO PARA COMPRESSÃO DO EVR-Tr1-G-T1, CONSIDERANDO DESCOLAMENTO DE FASE APENAS NAS INTERFACES DOS AGREGADOS MAIORES	126
FIGURA 7.3 – RESULTADOS EXPERIMENTAIS DO TRAÇO 1 E RESULTADO NUMÉRICO PARA COMPRESSÃO DOS EVR-Tr1-G-T2, EVR-Tr1-G-T3, EVR-Tr1-G-T4, CONSIDERANDO DESCOLAMENTO DE FASE APENAS NAS INTERFACES DOS AGREGADOS MAIORES	127
FIGURA 7.4 – RESULTADOS EXPERIMENTAIS DO TRAÇO 1 E RESULTADO NUMÉRICO PARA COMPRESSÃO DOS EVR-Tr1-G-T5, EVR-Tr1-G-T6, EVR-Tr1-G-T7, EVR-Tr1-G-T8, EVR-Tr1-G-T9, CONSIDERANDO DESCOLAMENTO DE FASE APENAS NAS INTERFACES DOS AGREGADOS MAIORES	129
FIGURA 7.5 – RESULTADOS EXPERIMENTAIS DO TRAÇO 1 E RESULTADO NUMÉRICO PARA COMPRESSÃO DOS EVR-Tr1-G-T8, EVR-Tr1-GM-T8, EVR-Tr1-G-T9, EVR-Tr1-GM- T9, EVR-Tr1-G-T10, EVR-Tr1-GM-T10, CONSIDERANDO DIFERENTES CONFIGURAÇÕES DE DESCOLAMENTO DE FASE MATRIZ/INCLUSÃO	130

FIGURA 7.6 – RESULTADOS EXPERIMENTAIS DO TRAÇO 1 E RESULTADO NUMÉRICO PARA COMPRESSÃO DOS EVR-Tr1-G-T8, EVR-Tr1-GM-T8, CONSIDERANDO DIFERENTES CONFIGURAÇÕES DE DESCOLAMENTO DE FASE MATRIZ/INCLUSÃO	131
FIGURA 7.7 – RESULTADOS EXPERIMENTAIS DO TRAÇO 1 E RESULTADO NUMÉRICO PARA COMPRESSÃO DOS EVR-Tr1-G-T9, EVR-Tr1-GM-T9, CONSIDERANDO DIFERENTES CONFIGURAÇÕES DE DESCOLAMENTO DE FASE MATRIZ/INCLUSÃO	131
FIGURA 7.8 – RESULTADOS EXPERIMENTAIS DO TRAÇO 1 E RESULTADO NUMÉRICO PARA COMPRESSÃO DOS EVR-Tr1-G-T10, EVR-Tr1-GM-T10, CONSIDERANDO DIFERENTES CONFIGURAÇÕES DE DESCOLAMENTO DE FASE MATRIZ/INCLUSÃO	132
FIGURA 7.9 – RESULTADOS EXPERIMENTAIS DO TRAÇO 1 E RESULTADO NUMÉRICO PARA COMPRESSÃO DOS EVR-Tr1-G-T10, EVR-Tr1-G-T11, EVR-Tr1-G-T12 E EVR-Tr1-G-T13, CONSIDERANDO DESCOLAMENTO DE FASE APENAS NAS INTERFACES DOS AGREGADOS MAIORES	133
FIGURA 7.10 – RESULTADO NUMÉRICO DO EVR-Tr1-G-T10, SUBMETIDO À COMPRESSÃO E À TRAÇÃO	134
FIGURA 7.11 – RESULTADO NUMÉRICO EM TRAÇÃO DOS EVR-Tr1-G-T10, EVR-Tr1-GM-T10, EVR-Tr1-GM-T11, EVR-Tr1-GM-T12, CONSIDERANDO DIFERENTES CONFIGURAÇÕES DE DESCOLAMENTO DE FASE	135
FIGURA 7.12 – EVR-Tr2	136
FIGURA 7.13 – RESULTADOS EXPERIMENTAIS DO TRAÇO 2 E RESULTADO NUMÉRICO PARA COMPRESSÃO DOS EVR-Tr2-G-T1, EVR-Tr2-G-T2, EVR-Tr2-G-T3 E EVR-Tr2-G-T4, CONSIDERANDO DESCOLAMENTO DE FASE APENAS NAS INTERFACES DOS AGREGADOS MAIORES	137
FIGURA 7.14 – RESULTADOS EXPERIMENTAIS DO TRAÇO 2 COMPARANDO OS ENSAIOS DE COMPRESSÃO UNIAXIAL (C) E DIAMETRAL (T)	138
FIGURA 7.15 – RESULTADO NUMÉRICO DO EVR-Tr2-G-T1, SUBMETIDO À COMPRESSÃO E À TRAÇÃO	139
FIGURA 7.16 – RESULTADOS EXPERIMENTAIS DO TRAÇO 2 E RESULTADO NUMÉRICO EM TRAÇÃO DOS EVR-Tr2-GM-T1, EVR-Tr2-GM-T2, EVR-Tr2-GM-T3 E EVR-Tr2-GM-T4, CONSIDERANDO FRATURAMENTO AO REDOR DAS INCLUSÕES GRANDES E MÉDIAS	140
FIGURA 7.17 – EVR-Tr3	141
FIGURA 7.18 – RESULTADOS EXPERIMENTAIS DO TRAÇO 3 E RESULTADO NUMÉRICO PARA COMPRESSÃO DOS EVR-Tr3-G-T1, EVR-Tr3-G-T2, EVR-Tr3-G-T3 E EVR-Tr3-G-T4 CONSIDERANDO DESCOLAMENTO DE FASE APENAS NAS INTERFACES DOS AGREGADOS MAIORES	142
FIGURA 7.19 – RESULTADO NUMÉRICO DO EVR-Tr3-G-T3, SUBMETIDO À COMPRESSÃO E À TRAÇÃO	143

FIGURA 7.20 – RESULTADOS EXPERIMENTAIS DO TRAÇO 3 E RESULTADO NUMÉRICO EM TRAÇÃO DOS EVR-Tr3-G-T1 E EVR-Tr3-G-T3, CONSIDERANDO DESCOLAMENTO DE FASE NAS INTERFACES DOS AGREGADOS GRANDES	144
FIGURA 7.21 – EVR-Tr4.....	145
FIGURA 7.22 – RESULTADOS EXPERIMENTAIS DO TRAÇO 4 E RESULTADO NUMÉRICO PARA COMPRESSÃO DOS EVR-Tr4-G-T1, EVR-Tr4-G-T2, EVR-Tr4-G-T3 E EVR-Tr4-G-T4, CONSIDERANDO DESCOLAMENTO DE FASE APENAS NAS INTERFACES DOS AGREGADOS MAIORES	146
FIGURA 7.23 – RESULTADOS EXPERIMENTAIS DO TRAÇO 4 COMPARANDO OS ENSAIOS DE COMPRESSÃO UNIAXIAL (C) E DIAMETRAL (T)	147
FIGURA 7.24 – RESULTADO NUMÉRICO DO EVR-Tr4-G-T3, SUBMETIDO À COMPRESSÃO E À TRAÇÃO	148
FIGURA 7.25 – RESULTADOS EXPERIMENTAIS DO TRAÇO 4 E RESULTADO NUMÉRICO EM TRAÇÃO DOS EVR-Tr4-G-T1, EVR-Tr4-G-T2 E EVR-Tr4-G-T3, CONSIDERANDO DESCOLAMENTO DE FASE NAS INTERFACES DOS AGREGADOS GRANDES.....	149
FIGURA 7.26 – EVR-Tr5	150
FIGURA 7.27 – RESULTADOS EXPERIMENTAIS DO TRAÇO 5 E RESULTADO NUMÉRICO PARA COMPRESSÃO DOS EVR-Tr5-G-T1, EVR-Tr5-G-T2, EVR-Tr5-G-T3 E EVR-Tr5-G-T4, CONSIDERANDO DESCOLAMENTO DE FASE APENAS NAS INTERFACES DOS AGREGADOS MAIORES	150
FIGURA 7.28 – RESULTADOS EXPERIMENTAIS DO TRAÇO 5 COMPARANDO OS ENSAIOS DE COMPRESSÃO UNIAXIAL (C) E DIAMETRAL (T)	151
FIGURA 7.29 – RESULTADO NUMÉRICO DO EVR-Tr5-G-T3, SUBMETIDO À COMPRESSÃO E À TRAÇÃO	152
FIGURA 7.30 – RESULTADOS EXPERIMENTAIS DO TRAÇO 4 E RESULTADO NUMÉRICO EM TRAÇÃO DOS EVR-Tr5-G-T1, EVR-Tr5-G-T2 E EVR-Tr5-G-T3, CONSIDERANDO DESCOLAMENTO DE FASE NAS INTERFACES DOS AGREGADOS GRANDES.....	153
FIGURA 7.31 – RESULTADOS NUMÉRICOS PARA COMPRESSÃO DOS EVR-Tr1-G-T12, EVR-Tr6-G-T1, EVR-Tr2-G-T3, EVR-Tr3-G-T3, EVR-Tr4-G-T3, EVR-Tr7-G-T1, EVR-Tr8-G-T1 E EVR-Tr5-G-T3, CONSIDERANDO DESCOLAMENTO DE FASE APENAS NAS INTERFACES DOS AGREGADOS MAIORES.....	154
FIGURA 7.32 – RESULTADOS NUMÉRICOS EM TRAÇÃO DOS EVR-Tr1-G-T12, EVR-Tr6-G-T1, EVR-Tr2-G-T3, EVR-Tr3-G-T3, EVR-Tr4-G-T3, EVR-Tr7-G-T1, EVR-Tr8-G-T1 E EVR-Tr5-G-T3, CONSIDERANDO DESCOLAMENTO DE FASE APENAS NAS INTERFACES DOS AGREGADOS MAIORES	155
FIGURA 7.33 – LINHA DE TENDÊNCIA FCK X SUBSTITUIÇÃO.....	156

LISTA DE TABELAS

TABELA 6.1 – PROPRIEDADES MATERIAIS	94
TABELA 6.2 – PROPRIEDADES CONCRETO	94
TABELA 6.3 – CONSUMO MATERIAIS	94
TABELA 6.4 – APRESENTAÇÃO TRAÇO	94
TABELA 6.5 – PENEIRAS	95
TABELA 6.6 – LIMITES DA COMPOSIÇÃO GRANULOMÉTRICA	95
TABELA 6.7 – GRANULOMETRIA ENSAIO 01	96
TABELA 6.8 – GRANULOMETRIA ENSAIO 02	96
TABELA 6.9 – ESPECIFICAÇÕES ENSAIOS	100
TABELA 6.10 – TIPOS DE RUPTURA TRAÇO 1	118
TABELA 6.11 – TIPOS DE RUPTURA TRAÇO 2	119
TABELA 6.12 – TIPOS DE RUPTURA TRAÇO 3	119
TABELA 6.13 – TIPOS DE RUPTURA TRAÇO 4	119
TABELA 6.14 – TIPOS DE RUPTURA TRAÇO 5	120
TABELA 7.1 – PROPRIEDADES ELÁSTICAS E PARÂMETROS DO MODELO DE MOHR-COULOMB PARA EVR-TR1-G-T1	126
TABELA 7.2 – PARÂMETROS FRATURA EVR-TR1-G-T1	126
TABELA 7.3 – PROPRIEDADES ELÁSTICAS E PARÂMETROS DO MODELO DE MOHR-COULOMB PARA OS EVRS EVR-TR1-T2, EVR-TR1-T3 E EVR-TR1-T4	127
TABELA 7.4 – PROPRIEDADES ELÁSTICAS E PARÂMETROS DO MODELO DE MOHR-COULOMB PARA OS EVRS EVR-TR1-T5, EVR-TR1-T6, EVR-TR1-T7, EVR-TR1-T8, EVR-TR1-T9 E EVR-TR1-T10	129
TABELA 7.5 – PROPRIEDADES ELÁSTICAS E PARÂMETROS DO MODELO DE MOHR-COULOMB PARA OS EVRS EVR-TR1-T11, EVR-TR1-T12 E EVR-TR1-T13	133
TABELA 7.6 – CURVA DE PLASTICIDADE DO MODELO DE MOHR COULOMB NA MATRIZ, PARA OS DIFERENTES TRAÇOS	136

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABCP – Associação Brasileira de Cimento Portland

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas

ABREMA – Associação Brasileira de Resíduos e Meio Ambiente

ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos
Especiais

ANEPAC – Associação Nacional das Entidades de Produtores de Agregados para
Construção

AGR – Agregado Graúdo Reciclado

AR – Agregado Reciclado

ARC – Agregados de Resíduos de Concreto

ARM – Agregados de Resíduos Misto

BEASY – Boundary Element Analysis System

CONAMA – Conselho Nacional do Meio Ambiente

CPs – Corpos-de-prova

EDP – Equação Diferencial Parcial

EVR – Elemento de Volume Representativo

MEC – Método dos Elementos de Contorno

MEF – Método dos Elementos Finitos

MDF – Método das Diferenças Finitas

RCC – Resíduo da Construção Civil

RCD – Resíduo de Construção e Demolição

SINIR+ – Sistema Nacional de Informações sobre a Gestão dos Resíduos Sólidos

ZTI – Zona de Transição Interfacial

LISTA DE SÍMBOLOS

- V_μ – Volume do EVR
 Ω_μ – Domínio do EVR
 $\partial\Omega_\mu$ – Contorno do EVR
 Ω_μ^V – Parte do domínio que representa os vazios
 Ω_μ^S – Parte do domínio que representa os sólidos
 Ω^i – Domínio inclusão
 Ω_n – Representação de um domínio qualquer n
 Γ_j – Representação de um contorno qualquer j
 Γ_{jn} – Representação de uma interface entre os domínios j e n
 σ_μ – Tensão na micro-escala
 f_y – Tensor constitutivo
 ε_μ – Deformação no EVR
 σ – Tensão normal
 ε – Deformação
 V_μ – Volume EVR
 u_μ – Deslocamento microscópico
 C^{ep} – Tensor Constitutivo Homogeneizado
 \tilde{u}_μ – Campo de deslocamento
 * - Termos referentes à Solução Fundamental
 k – Direção da carga fundamental
 u_i – Equação ponto interno
 p_i – Forças de superfície
 u_{ki}^* - Equação fundamental em termos de deslocamentos
 p_{ki}^* - Equação fundamental em termos de forças de superfícies
 ε_{ij}^e – Deformações Elásticas
 ε_{ij}^p – Deformações Plásticas
 σ_{ij}^t – Tensões elásticas
 σ_{ij} – Tensões verdadeiras
 σ_{ij}^0 – Tensões plásticas
 E – Módulo de *Young*
 ν – Coeficiente de Poisson
 G – Módulo de Elasticidade Transversal

δ_{ij} – Delta de Kroncher

N_{ij}^t – Forças normais elásticas

N_{ij} – Forças normais verdadeiras

N_{ij}^0 – Forças normais plásticas

b_i – Forças de massa

σ_y – Tensão de escoamento

$\dot{\varepsilon}^p$ – Taxa de deformação plástica

$\dot{\lambda}$ – Valor absoluto da velocidade de deformação plástica

K – Módulo plástico

α – Variável interna associada ao encruamento

σ_{vM} – Critério de von Mises

\bar{u}_d – Energia de distorção

τ – Resistência ao cisalhamento

c – Coesão do material

ϕ – Ângulo de atrito interno

$\delta(q, p)$ – Delta de Dirac

$[H]$ – Matriz H

$[G]$ – Matriz G

$[A]$ – Matriz A

$\{U\}$ – Vetor deslocamento

$\{P\}$ – Vetor de forças de superfície

$\{b\}$ – Vetor deslocamentos devido à forças de volume

$\{N^0\}$ – Vetor do termo responsável pela não-linearidade do material

$\{X\}$ – Vetor das incógnitas

Sumário

RESUMO	iv
ABSTRACT	v
LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE TABELAS	x
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	xi
LISTA DE SÍMBOLOS	xii
Sumário	xiv
1 APRESENTAÇÃO	17
1.1 INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA.....	17
1.2 ESTADO DA ARTE.....	20
1.2.1 Revisão Bibliográfica Sobre o Concreto com agregados reciclados	20
1.2.2 Revisão Bibliográfica Sobre o Concreto e sua caracterização como compósito	24
1.2.3 Revisão Bibliográfica sobre Modelagem numérica do comportamento constitutivo de compósitos	25
1.2.4 Histórico do MEC	30
1.3 OBJETIVOS.....	32
1.4 METODOLOGIA E FORMA DE ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	32
2 ANÁLISE NUMÉRICA DO EVR, SEGUNDO UMA ABORDAGEM MULTIESCALA	35
2.1 DEFINIÇÃO DO EVR.....	36
2.2 PROCESSO DE HOMOGENEIZAÇÃO	38
2.3 CAMPO DE DESLOCAMENTO NO EVR	39
2.4 PRINCÍPIO DE HILL-MANDEL.....	40
2.5 PROBLEMA DE EQUILÍBRIO DO EVR	41
2.6 MATRIZ TANGENTE CONSISTENTE	43
2.7 FLUTUAÇÃO DE DESLOCAMENTOS PERIÓDICAS SOBRE O CONTORNO	45
2.8 VALORES HOMOGENEIZADOS DO VETOR DE TENSÃO E DO TENSOR CONSTITUTIVO	47
3 MODELOS CONSTITUTIVOS	50
3.1 MODELOS DE PLASTICIDADE.....	50
3.1.1 Decomposição da Deformação e Relações Constitutivas.....	52

3.1.2	Cr�terios de Plastifica�o e Condi�es de Carregamento	53
3.1.3	Atualiza�o Incremental das Tens�es e Deforma�es	54
3.2	MODELOS BASEADOS NA MEC�NICA DA FRATURA	54
3.2.1	Modelos de contato e fratura coesiva	55
4	FORMULA�O DO M�TODOS DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	
	PARA O EVR	59
4.1	EQUA�OES B�SICAS PARA O PROBLEMA N�O-LINEAR.....	60
4.2	EQUA�O INTEGRAL DO DESLOCAMENTO NO EVR PARA UM	
	PONTO INTERNO	63
4.3	DEMAIS EQUA�OES INTEGRAIS DO EVR	69
4.3.1	Equa�o integral dos deslocamentos para pontos sobre o contorno ou	
	interface da microestrutura	69
4.3.2	Equa�o integral da derivada dos deslocamentos uk para os pontos do	
	dom�nio	74
4.4	APLICA�O DO MEC �S EQUA�OES INTEGRAIS	75
4.4.1	Discretiza�o do EVR em elementos e c�lulas	76
4.4.2	Transforma�o das equa�es integrais em equa�es alg�bricas	85
4.5	SISTEMA DE EQUA�OES	86
5	ALGORITMO PARA OBTER A RESPOSTA HOMOGENEIZADA	
	DO EVR	90
6	MODELAGEM EXPERIMENTAL DO CONCRETO COM	
	AGREGADOS RECICLADOS.....	92
6.1	COLETA DO MATERIAL PARA ENSAIOS F�SICOS	92
6.2	TRA�O CONCRETO.....	93
6.3	ENSAIO GRANULOM�TRICO DO MATERIAL RECICLADO.....	95
6.4	MOLDAGEM E CURA DOS CORPOS DE PROVA CIL�NDRICOS	98
6.5	ROMPIMENTO DOS CORPOS DE PROVA CIL�NDRICOS	105
6.6	TIPO DE RUPTURA	117
7	MODELAGEM NUM�RICA DO CONCRETO COM AGREGADOS	
	RECICLADOS	124
7.1	DEFINI�O DA MICROESTRUTURA DOS EVRS	124
7.2	CONCRETO COM SUBSTITUI�O DE 0% (TRA�O 1).....	125
7.3	CONCRETO COM SUBSTITUI�O DE 13,96% (TRA�O 2).....	135
7.4	CONCRETO COM SUBSTITUI�O DE 27,02% (TRA�O 3).....	140
7.5	CONCRETO COM SUBSTITUI�O DE 49,68% (TRA�O 4).....	144

7.6	CONCRETO COM SUBSTITUIÇÃO DE 100% (TRAÇO 5).....	149
7.7	PARAMETRIZAÇÃO OUTRAS PROPORÇÕES DE SUBSTITUIÇÃO.	153
7.8	EQUAÇÃO DE FCK X SUBSTITUIÇÃO.....	156
8	CONCLUSÕES	158
8.1	SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS.....	159
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	161
	APÊNDICE A – SOLUÇÃO FUNDAMENTAL	168

1 APRESENTAÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

O desenvolvimento da sociedade também impulsiona o avanço de materiais compósitos, que são amplamente utilizados em diversos setores industriais. Esses materiais são formados por duas ou mais fases com propriedades distintas, separadas por uma interface de ligação, e suas características finais são diferentes das propriedades de cada fase individualmente. Exemplos de compósitos incluem fibra de carbono reforçada com plástico, concreto, concreto armado e duralumínio.

Na construção civil, o concreto destaca-se como o compósito mais utilizado. De acordo com VENTURA (2009), isso se deve a diversas razões, entre as quais MEHTA & MONTEIRO (2014) salientam a resistência à água, a capacidade de ser moldado em diferentes formas e o baixo custo combinado com a rápida disponibilidade dos materiais para obra.

Além de ser amplamente utilizado, o concreto é composto de cimento e água, que forma a pasta, agregados (grãos e miúdos) e ar, podendo incorporar adições de cinza, sílica e aditivos químicos para melhorar o desempenho. Devido a essa mistura, a microestrutura do concreto apresenta grande heterogeneidade e complexidade, dificultando a elaboração de modelos realistas da microestrutura e que reproduzam o comportamento com confiabilidade.

Apesar das vantagens técnicas do concreto, sua produção e o crescente uso no setor da construção civil, associado ao crescimento urbano, resultam em desafios ambientais significativos. A indústria da construção gera grandes volumes de resíduos sólidos. Segundo a Associação Brasileira de Resíduos e Meio Ambiente – ABREMA (2023), em 2022 foram coletados mais de 45 milhões de toneladas de Resíduo de Construção e Demolição (RCD), uma redução de 1,8% em comparação com o ano anterior. Esses resíduos são extremamente

volumosos, o que dificulta o seu descarte em locais adequados, além de causar poluição visual e proliferação de vetores, conforme elucida KARPINSKI (2009). Para mitigar esses problemas, a Resolução 307 do Conselho Nacional do Meio Ambiente (CONAMA) classifica os resíduos de construção civil de acordo com as seguintes classes:

- Classe A: resíduos que podem ser reciclados ou reutilizados na forma de agregados, como por exemplo, resíduos de demolição de edificações ou do processo de fabricação de peças pré-moldadas em concreto;
- Classe B: resíduos cuja reciclagem tem outras finalidades, como o vidro, plástico, gesso, metais e madeira;
- Classe C: resíduos que não são passíveis de reciclagem ou recuperação;
- Classe D: resíduos perigosos, como tintas óleos, solventes e telhas de amianto, por exemplo.

A composição de RCC no Brasil possui 63% de argamassa, 29% de concreto e blocos, 7% de outros e 1% de material orgânico, totalizando 92% de material que são classificados com Classe A. Essa porcentagem demonstra o potencial para a reciclagem de materiais em concretos.

Embora as jazidas de agregados minerais sejam abundantes, a exploração de novas áreas enfrenta desafios econômicos e ambientais, incentivando a busca por alternativas sustentáveis, como a reciclagem de agregados provenientes de resíduos Classe A. O crescimento populacional e a expansão das cidades têm intensificado as atividades de construção civil e infraestrutura urbana, resultando em um aumento significativo na geração desses resíduos. De acordo com o Panorama da ABRELPE de 2022, o Brasil produziu, em 2021, uma média de 227 kg/hab/ano de Resíduos de Construção e Demolição (RCD), o que reforça a necessidade de aproveitamento desses materiais.

Com a expansão urbana, a demanda por agregados também cresce, exigindo soluções tanto para suprir a necessidade quanto para reduzir o impacto ambiental. A Associação Nacional das Entidades de Produtores de Agregados para Construção (ANEPAC) estima que a demanda em 2022 foi de 640 milhões de toneladas de agregados, incluindo 266 milhões de toneladas de brita, o que indica o significativo potencial de uso de materiais reciclados para atender a essa demanda.

As reservas de areia e rocha são abundantes, mas alguns fatores inviabilizam algumas jazidas. O fato do material extraído ser de baixo valor inviabiliza a extração quando se tem que percorrer distâncias maiores que 100 km, como destacam LA SERNA & REZENDE (2009). Outro fator que pode impedir a extração são os Planos Diretores das cidades, que definem uso e ocupação do solo urbano.

Diante dos desafios de extração mineral e das crescentes pressões ambientais, a substituição de agregados naturais por reciclados oferece uma alternativa sustentável e economicamente viável, reduzindo a degradação ambiental causada pelas extrações de rocha.

Já existem autores que abordaram o tema da substituição do agregado graúdo por resíduo Classe A. AL-AZZAWI (2016) pesquisou sobre as propriedades mecânicas com várias proporções de substituição, LYE et al. (2016) verificaram o módulo de elasticidade do concreto com agregado reciclado, PENG et al. (2016) trataram sobre as propriedades mecânicas do concreto com agregado reciclado com variação da relação água/cimento.

Diante desses desafios ambientais, a busca por novas soluções e melhorias no uso de materiais reciclados torna-se essencial. Nesse contexto, o avanço nas técnicas de modelagem, como a teoria multiescala, se apresenta como uma ferramenta fundamental para entender o comportamento do concreto em diferentes escalas. Segundo BORGES (2015), a teoria multiescala foi desenvolvida para modelar o material considerando as diferentes fases presentes na microestrutura. Essa teoria integra o comportamento que ocorre na macroescala com a microescala, gerando respostas constitutivas mais precisas do material. O modelo multiescala permite que as propriedades elásticas de cada fase do compósito tenham valores diferentes, cada uma tendo um modelo constitutivo próprio. A teoria permite ainda a definição de imperfeições e vazios na microestrutura.

Para a realização da modelagem numérica, é necessário definir o Elemento de Volume Representativo (EVR), que deve ter tamanho suficiente para englobar toda a heterogeneidade do material. O EVR é submetido a um vetor incremental de deformações, o qual gera tensões no seu domínio. Após resolver o problema de equilíbrio do EVR em um determinado incremento, é possível obter as tensões homogeneizadas e o tensor constitutivo, que representam a resposta constitutiva do material cuja microestrutura é definida pelo EVR.

O concreto é um compósito composto por três fases e vazios, sendo as fases: matriz, agregados e Zona de Transição Interfacial (ZTI) entre os agregados e a matriz. A matriz é composta da pasta de cimento hidratada. Embora essa complexidade possa dificultar a modelagem numérica, muitas pesquisas que envolvem o concreto o consideram como um material homogêneo na escala macroscópica, especialmente quando o objetivo da análise não é focado na microestrutura. Nesses casos, modelos de plasticidade macroscópicos são frequentemente utilizados e podem oferecer respostas eficazes para simulações estruturais, mesmo sem capturar fenômenos específicos da microescala, como a plastificação da matriz e fissuras na ZTI.

A modelagem da microestrutura do concreto apresenta desafios significativos devido à dificuldade em medir experimentalmente as propriedades mecânicas da ZTI. Além disso, adotar como modelo constitutivo do concreto a resposta homogeneizada do EVR em uma análise estrutural em multi-escala tem um custo computacional elevado devido ao acoplamento entre as

escalas (a estrutura e o EVR). Contudo, avanços recentes na compreensão da composição química, espessura e resistência da ZTI, juntamente com desenvolvimentos na área da Mecânica Computacional, têm possibilitado simulações mais precisas do comportamento micro mecânico do concreto. MALEKI et al. (2020) verificou a distribuição de espessura e resistência da ZTI para melhorar a precisão das simulações computacionais do comportamento do concreto e GAO et al. (2024) que detalha a modelagem da ZTI utilizando Método dos Elementos Discretos, incluindo avanços na representação da microestrutura da ZTI. Tais simulações podem abordar uma variedade de características da microestrutura, incluindo tamanho e a distribuição dos agregados, a fração volumétrica da porosidade e as propriedades mecânicas de cada fase da microestrutura do material.

A relevância deste estudo reside em seu potencial para aprimorar a precisão da análise de estruturas compostas por materiais heterogêneos, especialmente aquelas que incorporam Resíduos da Construção Civil (RCC) como substituição parcial de agregados convencionais. A metodologia inovadora adotada confere ao trabalho um caráter de inovação, respondendo a uma crescente demanda por soluções sustentáveis no setor de construção civil e contribuindo para mitigar o impacto ambiental associado à extração de matérias-primas naturais. O Método dos Elementos de Contorno (MEC) destaca-se neste contexto por sua eficiência computacional, evidenciada em estudos conduzidos sob orientação da Profa. Gabriela R. Fernandes, como FERNANDES et al. (2018), FERNANDES et al. (2019a, 2019b) e FERNANDES et al. (2020). Espera-se que as modelagens numéricas desenvolvidas repliquem de maneira precisa os comportamentos observados experimentalmente, permitindo avaliar com rigor o potencial de uso dos materiais reciclados, como o RCC, em concretos estruturais de forma eficaz e segura.

1.2 ESTADO DA ARTE

Foi realizada um levantamento de trabalhos que auxiliassem na compreensão do comportamento do concreto como um material compósito, do comportamento de concretos com materiais de construção civil reciclados e também trabalhos que tratassem de modelagem numérica da microestrutura do concreto utilizando o MEC. Assim, a seguir faz-se uma revisão bibliográfica, em itens separados, considerando os temas listados anteriormente.

1.2.1 Revisão Bibliográfica Sobre o Concreto com agregados reciclados

A primeira utilização significativa de resíduos de construção e demolição data da época do fim da Segunda Guerra Mundial, devido à necessidade emergente de encontrar uma aplicação viável para os resíduos decorrentes do conflito LEVY (2001). No final da década de 1990, nações como Bélgica, Holanda, Alemanha e Inglaterra desempenharam papéis

proeminentes no avanço do tema. Destaca-se, particularmente, a contribuição do Instituto de Pesquisa de Construção da Bélgica, que desempenhou um papel crucial na condução de pesquisas que viabilizaram a inauguração da primeira usina de reciclagem belga em 1986 VYNCKE & VRIJDERS (2010).

Após os avanços observados em países europeus, o Brasil também iniciou pesquisas sobre a aplicação de resíduos de construção e demolição (RCD) em concretos. As primeiras pesquisas datam de ZORDAN (1997). A partir de 2000, foram desenvolvidas pesquisas experimentais referentes à utilização de RCD em concretos pré-moldados realizada por (SOUZA 2001; BUTTLER, 2003) e concretos em geral (LEITE, 2001; ALTHEMAN, 2002; ANGULO, 2005). Em 2002 foi promulgada a Resolução nº 307, estabelecendo diretrizes e responsabilidades para a gestão de RCD. Em consonância com essas diretrizes, a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) publicou normas pertinentes ao tema em 2004, notadamente a NBR 15115:2004, que aborda a execução de camadas de pavimentação com agregados reciclados de resíduos sólidos da construção civil, e a NBR 15116:2021, que trata da utilização desses agregados para uso em argamassas e concretos de cimento Portland.

A norma NBR 15116:2021 apresenta os procedimentos para a aplicabilidade de agregados reciclados a serem empregados em argamassas e concretos. Tal norma estabelece requisitos gerais, classificando os agregados utilizados em agregados reciclados constituídos predominantemente por materiais cimentícios diversos, podendo incluir teores reduzidos de cerâmica vermelha (ARCI), agregado reciclado constituído predominantemente por resíduos de concreto (ARCO) ou agregados de resíduos misto (ARM). Esses agregados são obtidos através do beneficiamento de resíduo Classe A. Enquanto o ARC contém 90% de fração graúdo proveniente de resíduos que incluem cimento Portland ou rochas, o ARM apresenta uma fração menor que 90%.

No que concerne aos requisitos específicos da NBR 15116:2021, é mencionado que a substituição do agregado graúdo convencional por ARC ou ARM pode ser total ou parcial em concreto sem função estrutural. Tais requisitos incluem teor de fragmentos à base de cimento e rochas, absorção de água, contaminantes e teor de material passante na peneira 75 mm. Além disso, a norma aborda a granulometria do ARC/ARM, fazendo referência à NBR 7211:2022 como diretriz. Quanto ao preparo, é essencial que haja uma pré-molhagem, conforme estipulado pela NBR 15116:2021, que deve corresponder a cerca de 80% do teor de absorção do agregado utilizado.

Em 2021, a NBR 15116:2021 sofreu uma atualização, permitindo a incorporação do ARC em concreto com função estrutural, desde que em uma proporção máxima de 20% na substituição do agregado graúdo, aplicável apenas a concretos com resistência máxima de 20 MPa e destinados exclusivamente a zonas de classe de agressividade I ou II, ou seja, para aplicação em obras residenciais de pequeno porte. Apesar das normativas, ensaios conduzidos

demonstram que a substituição do agregado convencional por reciclado já produziu concretos com resistência de até 45 MPa, conforme informações disponíveis no site da (CIMENTO ITAMBÉ, 2021).

Além das considerações normativas, é fundamental analisar as características físicas dos agregados reciclados. Segundo ANGULO & FIGUEIREDO (2011), a porosidade no concreto convencional está primariamente relacionada à pasta cimentícia, a qual influencia tanto a resistência quanto a durabilidade. Entretanto, agregados provenientes de reciclagem apresentam porosidade substancialmente maior que os convencionais, que pode ultrapassar dos 10%. Nesse contexto, a durabilidade e resistência do concreto com agregados reciclados estão diretamente ligadas à porosidade tanto dos agregados quanto da pasta cimentícia.

O trabalho de CHEN et al. (2021) explora tratamentos para aprimorar o desempenho de agregados reciclados de concreto (RCA) visando mitigar problemas relacionados à alta porosidade e absorção de água. Um dos principais desafios identificados é a presença de argamassa aderida nos agregados, que aumenta a porosidade, reduz a densidade e prejudica a resistência mecânica do concreto reciclado. Métodos como a remoção de argamassa por moagem e pré-tratamento com polímeros ou soluções pozolânicas, como cinzas volantes e sílica ativa, mostraram ser eficazes na redução da porosidade e no fortalecimento das ZTIs. Esses tratamentos promovem reações que preenchem os vazios e geram compostos hidratados, melhorando significativamente as propriedades mecânicas e de durabilidade do concreto com RCA.

Além disso, o estudo enfatiza a importância da carbonatação acelerada como uma técnica promissora para o tratamento de RCA. Esse método utiliza dióxido de carbono para reagir com os componentes da argamassa aderida, formando géis de silicato de cálcio hidratado (C-S-H), que reduzem a porosidade e aumentam a resistência da ZTI. Os resultados mostram que o concreto produzido com RCA tratado apresentou redução de até 14,6% na absorção de água e aumento de 19,8% na resistência à compressão em comparação ao concreto reciclado sem tratamento. Tais avanços reforçam o potencial do uso de agregados reciclados tratados em aplicações estruturais, promovendo sustentabilidade e eficiência no setor da construção civil.

Considerando tanto a porosidade quanto as reações químicas envolvidas, o uso de RCD em concretos demanda rigoroso controle de qualidade, limitando o teor de contaminantes a menos de 1%, a absorção de água a menos de 7% e o teor de finos a menos de 10%, conforme recomendações da ABNT NBR 15116:2004 e da DIN 4226-100:2002.

Para garantir agregados reciclados com características adequadas, é possível obter esses materiais por meio da lavagem das centrais dosadoras de concreto, onde se encontra pasta cimentícia não hidratada remanescente do processo de usinagem. Na NBR 12655:2022 permite-se que esses agregados sejam reintegrados ao processo de usinagem de concreto após sua

lavagem, desde que em teores inferiores ou iguais a 5%. Contudo, se os agregados obtidos forem peneirados e classificados conforme a NBR 7211:2022, a incorporação pode exceder 5%.

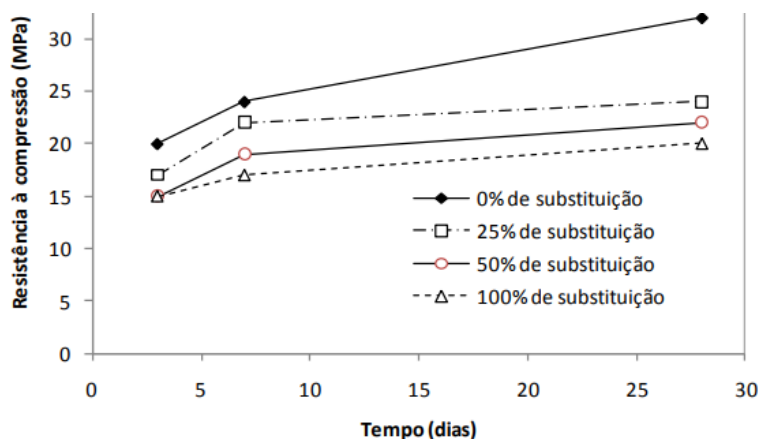
Para uso em concreto com função estrutural, que é o foco deste estudo, destaca-se que o resíduo de concreto armado proveniente de demolição apresenta maior resistência e menor porosidade, sendo, portanto, ideal para tal aplicação. Assim, esse resíduo pode ser segregado e ter o aço separado por meio de separação magnética ou manual, uma vez que este será indesejado para tal finalidade.

Subsequentemente, a parte a ser utilizada passa por fragmentação preliminar e britagem. ANGULO & FIGUEIREDO (2011) salientam que o processo de cominuição, ou britagem, pode ser realizado por britadores de compressão (mandíbula) ou de impacto, dependendo do tamanho do agregado desejado. Para a produção de concreto, o britador de mandíbula é o mais adequado, visto que o material produzido atinge diâmetro de 19 mm e requer menos manutenção. Todavia, o produto obtido ainda conterà pasta cimentícia junto ao agregado. Para separar e obter o agregado natural, pode-se aplicar reciclagem por tratamento térmico e moagem por abrasão. Os autores relatam que o material passa por um forno com temperatura de até 300 °C, fazendo com que o concreto sofra dilatações e a pasta cimentícia desidrate, tornando-se mais frágil e criando fissuras. Posteriormente, ao passar pela moagem, obtém-se o agregado graúdo em sua forma natural com porosidade entre 0% e 3%. Esse processo tem um alto custo energético. Os autores destacam ainda fatores como retração, porosidade e perda de consistência dos concretos com agregado reciclado. Entretanto, como o objetivo desta dissertação é o comportamento estrutural, o foco deste tópico será direcionado para este aspecto.

No entanto, a porosidade também afeta a resistência, pois é necessário adicionar mais água na usinagem, aumentando a relação água/cimento, o que faz com que todo concreto com agregado reciclado apresente resistência inferior ao convencional de referência. Assim, observa-se que a substituição deve ser realizada em teores controlados e que o tratamento térmico e a cominuição por abrasão contribuem para a melhora das condições do agregado, impactando na resistência final do produto.

ANGULO E FIGUEIREDO (2011) alertam ainda que, quando a porosidade do agregado é inferior a 7%, é possível substituir 20% do agregado convencional com uma perda de resistência de cerca de 10% em comparação ao concreto sem substituição. Observa-se na Figura 1.1 que, à medida que se aumenta o teor de substituição, a resistência decresce:

Figura 1.1 – Resistência à compressão de concretos com agregados recicláveis

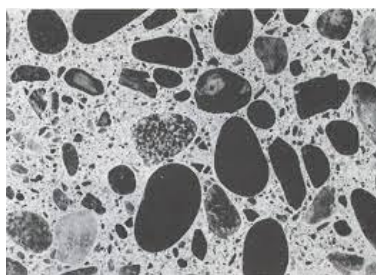


Fonte: Angulo e Figueiredo (2011)

1.2.2 Revisão Bibliográfica Sobre o Concreto e sua caracterização como compósito

O concreto é um material compósito composto por pasta cimentícia e agregado graúdo em proporções específicas. A pasta é produzida pela mistura de cimento, agregado miúdo e água, podendo conter aditivos químicos para que o concreto tenha propriedades particulares. Na figura 2.1 mostra-se as características do concreto.

Figura 1.2 – Microestrutura do concreto



Fonte: Mehta e Monteiro (2014)

Conforme destacado pela Portland Cement Association (2024), o concreto moldado no local é o material estrutural mais utilizado no mundo. Sua resistência o tornou um material utilizado em civilizações antigas na construção de aquedutos. Além disso, o concreto é facilmente manipulável e pode ser moldado em diversas formas enquanto está em seu estado fresco.

As propriedades mecânicas do concreto são influenciadas pela sua dosagem, incluindo o teor de cimento, a relação água/cimento, o tipo de cimento utilizado e a quantidade de agregado

gráudo. Esses parâmetros de dosagem impactam tanto o estado fresco quanto o estado endurecido do concreto.

O concreto, como mencionado, é um material compósito composto por três fases: a pasta cimentícia, o agregado e as ZTI. A pasta cimentícia atua como fase dispersa ou matriz, sendo constituída por um material plástico com menor módulo de elasticidade, responsável por solidificar e unir a fase mais rígida, conhecida como reforço, que possui módulo de elasticidade superior. A ZTI é a ligação da matriz e os agregados, que é uma região propícia a sofrer fissuração, principalmente ao redor das inclusões maiores (MEHTA E MONTEIRO, 2014).

O objetivo do concreto é obter um material com propriedades mecânicas superiores às dos materiais individuais, combinando alta resistência, baixo peso, resistência ao desgaste e resistência à fluência AZIZI (2012) e ANDRADE (2017). No entanto, é importante observar que o volume ocupado pelo concreto compactado é maior do que o volume dos agregados compactados nele contidos, devido à fina camada de pasta de cimento entre as fases, caracterizando a zona de interface, que resulta em uma diferença de cerca de 3% nesse volume, segundo NEVILLE (2013).

Embora essa configuração proporcione boas propriedades mecânicas, AZIZI (2012) destaca que existem evidências de que a interface entre reforço e matriz é propensa ao descolamento entre as fases, à formação de fissuras e ao crescimento de vazios. Portanto, é crucial estudar os diferentes fenômenos dissipativos e suas evoluções em compósitos, pois a resistência do material pode ser comprometida pela danificação, plastificação e/ou fissuração e pela redução do módulo de elasticidade nas fases da microestrutura.

Diante do exposto, torna-se evidente a importância de estudar a fissuração na interface entre reforço e matriz em compósitos, especialmente no concreto, devido à sua ampla aplicação em estruturas diversas. Destaca-se que, devido à heterogeneidade desse material, teorias multi-escala devem ser aplicadas, a fim de obter um modelo constitutivo mais preciso. Os conceitos referentes à plasticidade, fissuração e análise em multi-escala serão abordados nos próximos itens.

1.2.3 Revisão Bibliográfica sobre Modelagem numérica do comportamento constitutivo de compósitos

Devido às heterogeneidades da microestrutura dos compósitos, um conceito importante para a análise de estruturas feitas com compósitos é o de homogeneização. Os primeiros trabalhos referentes a esse tema datam da década de 1960, podendo citar o trabalho de HASHIN & SHTRIKMAN (1963) que introduz a teoria de métodos variacionais, muito utilizados na teoria da homogeneização de materiais compostos por multi-fases. Um outro artigo importante é o de HILL (1965) que estima os módulos elásticos macroscópicos de compósitos de duas fases,

utilizando um método que leva em conta a não homogeneidade de tensão e deformação. Um grande marco para a teoria da homogeneização foi a publicação do livro *Asymptotic analysis for periodic structures*, escrito por PAPANICOLAU et al. (1978) tratando de uma ampla gama de técnicas de homogeneização.

Na década de 1990, com o desenvolvimento dos computadores pessoais, os métodos numéricos se popularizam como poderosas ferramentas de cálculos e com isso a abordagem multiescala se consolida como uma ferramenta essencial na ciência dos materiais. Cita-se aqui o trabalho de ALLAIRE (1992) que trata da convergência de processos de homogeneização de duas escalas. KRÄTZIG et al. (1995) desenvolvem métodos de modelagem multiescala para prever o comportamento de danos em estruturas de cascas, muito utilizadas na construção civil.

SOUZA (2005) desenvolve simulações numéricas utilizando o MEF para estudar o comportamento mecânico de Areia Asfáltica Usinada a Quente (AAUQ) formada por agregados pétreos elásticos distribuídos em uma matriz viscoelástica denominada mastique. Nesse trabalho verifica-se que o dano observado na escala global é consequência da formação e propagação de fissuras e deformações permanentes na escala local.

Continuando com a aplicação de formulações multiescala, SOUZA NETO E FEIJÓO (2006) apresentaram uma formulação variacional cinemática de modelos constitutivos sólidos multiescala considerando-se pequenas e grandes deformações. Esse estudo se baseia em definir as deformações e tensões da macro-estrutura como sendo a média volumétrica dos campos de deformação e tensão microscópicos sobre um EVR.

Em PERIĆ et al. (2007) apresenta-se um procedimento de homogeneização em multiescala para o cálculo da resposta constitutiva do material, considerando-se micro-estruturas sujeitas a não-linearidade física e submetidas à pequenas deformações.

Utilizando o Princípio de Macro-Homogeneidade de Hill-Mandel, GIUSTI (2009) desenvolve uma análise de sensibilidade topológica em modelos constitutivos multiescala. Esse trabalho trata de dois problemas clássicos da modelagem computacional, sendo: condução estacionária de calor e elasticidade linear.

Seguindo essa linha de análise numérica, através do MEF, KIM & AL-RUB (2011) modelaram a heterogeneidade do concreto, verificando a contribuição de cada fase na resistência do modelo. Foram realizadas modelagens 2D e 3D de EVRs representando o concreto, os mesmos tendo dimensões de 10x10 cm. Enquanto os agregados foram modelados através da Lei de Hooke, a matriz e as ZTIs foram modeladas usando modelo de plasticidade-dano acoplado. Consideraram a influência e a forma do agregado, da sua distribuição e da fração de volume, além disso o efeito da resistência da ZTI e da matriz também foram avaliadas.

QUARESMA (2016) também utiliza o MEF para fazer análise do comportamento mecânico do concreto, procurando estabelecer uma relação entre as propriedades geométricas dos materiais constituintes do concreto e o seu comportamento macro mecânico. Nesse trabalho,

avaliou-se a forma, distribuição e fração volumétrica dos agregados, assim como a influência da espessura da ZTI. Considerou-se EVRs formados por inclusões de várias formas e distribuídas aleatoriamente.

Em SANTOS & PITUBA (2017) os autores tratam da simulação numérica do comportamento mecânico de materiais porosos, utilizando também uma abordagem multiescala e efeitos plásticos na matriz. Realizou-se a análise de EVRs contendo diferentes distribuições e proporções de vazios. Eles concluíram que quanto maior o volume de vazios menor o valor da superfície de escoamento, como esperado, já que o aumento de vazios diminui a resistência do material.

Na tese de BETANCUR (2018) desenvolve uma metodologia para homogeneização multiescala para problemas de viscoelasticidade. Nota-se que a análise multiescala acoplada ao MEC mostra ser uma metodologia numérica eficiente para problemas de micromecânica de materiais heterogêneos.

DA SILVA (2020) utiliza uma abordagem multiescala baseada em MEF, técnicas de Inteligência Artificial e conceitos da Mecânica do Dano para verificar a resistência mecânica de materiais compósitos cimentícios. Os modelos apresentados permitem avaliar a evolução do dano, o processo de propagação de fissuras e o comportamento global da estrutura com a relação carga-deslocamento até a ruptura.

FRANÇA (2021) faz análises experimentais de concreto de ultra-alto desempenho reforçado com fibras metálicas para a coleta de dados para realização de modelagens numéricas da microestrutura do concreto utilizando elementos finitos. Na modelagem numérica foi utilizado o modelo constitutivo Concrete Damaged Plasticity (CDP) do software ABAQUS.

O trabalho de SILVA et al. (2024) desenvolve uma metodologia multiescala avaliando a precisão de modelos bifásicos e modelos de múltiplas fases com ensaios experimentais encontrados na literatura.

Além das aplicações no campo da engenharia civil, a abordagem multiescala também foi explorada em outras áreas, como a biomecânica, como o trabalho de KLANHR (2022) que apresenta uma formulação de uma abordagem multiescala poromecânica submetida a deformações finitas, visando investigar o comportamento macro e micromecânico de tecidos conectivos fibrosos.

Agora serão detalhados os trabalhos orientados pela Prof. Gabriela R. Fernandes, que tratam da formulação do EVR por meio do MEC utilizada nesse trabalho. São eles: FERNANDES et al. (2018), FERNANDES et al. (2019a), FERNANDES et al. (2019b) e SILVA et al. (2024). O trabalho de FERNANDES et al. (2018) apresenta uma formulação baseada no MEC para modelar o EVR como uma placa em sub-regiões, composta por uma matriz e inclusões ou vazios. Cada sub-região da placa é caracterizada por propriedades específicas, como o módulo de Young e o coeficiente de Poisson, possibilitando a definição de

diferentes materiais dentro do EVR. A formulação do modelo utiliza a abordagem de flutuação de deslocamento proposta por de SOUZA NETO & FEIJÓ (2006), a qual considera que as propriedades efetivas do material podem ser calculadas apenas após obter o equilíbrio interno da microestrutura heterogênea. O trabalho de FERNANDES et al. (2018) limita-se ao comportamento elástico das fases do EVR, mas abre caminho para o desenvolvimento de formulações mais avançadas que incorporem fenômenos dissipativos. Além disso, o trabalho introduz técnicas de homogeneização para a transição micro-macro, permitindo calcular os valores homogeneizados de tensão e do tensor constitutivo a partir dos valores nodais das células do EVR. Os resultados apresentados incluem exemplos numéricos que demonstram a precisão e a eficiência do modelo quando comparado ao MEF. No trabalho subsequente, FERNANDES et al. (2019a) os autores expandem o trabalho de FERNANDES et al. (2018) para abordar fenômenos dissipativos em microestruturas heterogêneas. Os exemplos são aplicados a materiais compósitos de matriz metálica (MMC, *metal matrix composites*), onde inserem, na matriz, inclusões metálicas mais resistentes que o material da matriz. A matriz do EVR é modelada como um material elasto-plástico, utilizando modelo elasto-plástico de von Mises, e a inclusão foi adotada em alguns exemplos com comportamento elástico, e em outros com comportamento elasto-plástico regida pelo modelo de von Mises com encruamento linear. Nos exemplos são considerados diferentes modelos multi-escala, em função da condição de contorno adotada para flutuação de deslocamentos ao longo do contorno do EVR: i) flutuações nulas no contorno; ii) flutuações periódicas no contorno; iii) forças uniformes no contorno. A formulação introduzida se destaca por sua capacidade de modelar com precisão as não-linearidades presentes na resposta mecânica dos compósitos, representando um avanço significativo em relação ao trabalho anterior, que se restringia ao comportamento elástico. Os resultados numéricos apresentados no estudo validam a eficácia da formulação, mostrando concordância com métodos alternativos. Além disso, a inclusão de fenômenos dissipativos no modelo permite uma compreensão mais detalhada dos mecanismos que influenciam a resistência e durabilidade dos compósitos, tornando esta abordagem particularmente relevante para aplicações que envolvem materiais sujeitos a cargas que excedem o limite elástico do material. O trabalho demonstra que o MEC pode ser uma ferramenta poderosa para análises multiescala, integrando efeitos microestruturais diretamente na resposta macroscópica. O terceiro trabalho, desenvolvido nesse contexto, FERNANDES et al. (2019b), apresenta uma formulação ainda mais abrangente, considerando dois fenômenos dissipativos principais: plasticidade na matriz do EVR e propagação de fissuras coesivas nas interfaces entre matriz e agregados. Essa abordagem utiliza modelos de contato e fratura coesiva para descrever o comportamento mecânico dos elementos finitos adicionados nas interfaces entre matriz e agregados. Uma das contribuições importantes do trabalho é a análise da necessidade de refinamento da malha no modelo. Os autores demonstram que malhas muito refinadas não são

essenciais para obter resultados confiáveis, o que otimiza o custo computacional sem comprometer a precisão. Embora os exemplos numéricos apresentados no estudo sejam aplicados a compósitos de matriz metálica, a metodologia proposta é adaptável para EVRs de concreto ou de materiais cimentícios reciclados. Essa formulação proporciona contribuições valiosas sobre a interação entre fenômenos dissipativos em microestruturas heterogêneas e sua influência na resposta global do material. No quarto trabalho, SILVA et al. (2024), os autores utilizam a formulação desenvolvida em FERNANDES et al. (2019b), para modelar o comportamento mecânico do concreto. O concreto é tratado como uma microestrutura heterogênea composta por uma matriz cimentícia, agregados e vazios, considerando a influência da fissuração das ZTIs. Para capturar o comportamento não-linear do concreto, considera-se a matriz com comportamento elasto-plástico e definem-se os elementos finitos nas interfaces matriz-agregado, que são governados por modelos de fratura coesiva ou de contato, para simular a propagação de fissuras nas ZTIs. O estudo destaca a importância de uma caracterização detalhada da microestrutura, incluindo a distribuição, o tamanho e a proporção de agregados, elementos que afetam significativamente a resposta global do concreto. A análise paramétrica conduzida revelou que a modelagem da fissuração das ZTIs apenas ao redor dos agregados maiores é suficiente para reproduzir com precisão os resultados experimentais de corpos de prova sujeitos a compressão simples. Os autores demonstram a capacidade da metodologia em prever o comportamento do concreto em compressão, contribuindo significativamente para o avanço da modelagem microscópica de materiais cimentícios. O EVR proposto em SILVA et al. (2024) é utilizado no presente trabalho, sendo esse EVR composto por 25 inclusões, de três diferentes tamanhos, e 12 vazios. Além disso, os elementos de contato e fratura são definidos apenas ao redor das 5 inclusões maiores.

Os trabalhos de FERNANDES descritos anteriormente formam uma progressão lógica e complementam diretamente a pesquisa em desenvolvimento, sendo o primeiro trabalho, FERNANDES et al. (2018), oferece uma base sólida para a modelagem do EVR com propriedades elásticas, estabelecendo técnicas de homogeneização para a transição micro-macro. Já o segundo trabalho, FERNANDES et al. (2019a), avança ao incluir fenômenos dissipativos, como elasto-plasticidade, aspecto importante para a análise de concretos. O terceiro trabalho, FERNANDES et al. (2019b), se alinha ao objetivo de modelar o comportamento mecânico do concreto reciclado, pois considera além da plasticidade, a modelagem de descolamento de fases entre matriz e agregado, que é essencial para modelar a propagação de fissuras na ZTI do concreto. Por fim, o trabalho de SILVA et al. (2024) utiliza a formulação desenvolvida em FERNANDES et al. (2019b) para modelar o comportamento mecânico de um concreto. Esses estudos fornecem a fundamentação teórica e numérica necessária para explorar os desafios da pesquisa, contribuindo para o desenvolvimento de uma

formulação robusta e eficiente, capaz de prever o comportamento do concreto reciclado em diferentes escalas.

1.2.4 Histórico do MEC

O avanço da matemática tem impulsionado o desenvolvimento tecnológico, abrindo novas possibilidades para cálculos complexos. Em engenharia, muitos problemas exigem abordagens numéricas sofisticadas devido à complexidade de suas condições de contorno, da geometria da estrutura e da modelagem do comportamento do material. O surgimento de computadores com um poder computacional elevado e softwares avançados permitiu a popularização de métodos numéricos de aproximação que fornecem soluções altamente precisas. Esses métodos são fundamentais em simulações de engenharia, destacando-se o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Este trabalho se concentrará no MEC, um método eficiente e preciso que tem demonstrado grande potencial para resolver problemas de engenharia complexos.

Segundo CHENG & CHENG (2005), o desenvolvimento do MEC remonta ao século XVIII, quando Euler desenvolveu o cálculo das variações, uma área da matemática que busca otimizar funções de múltiplas variáveis. Essa teoria é essencial para formular problemas onde se busca minimizar ou maximizar quantidades físicas, como energia potencial, que são fundamentais no estudo de problemas de contorno. Após os avanços de Euler no século XVIII, no século XIX George Green desenvolveu o Teorema de Green, que relaciona integrais de volume a integrais de superfície. Esse conceito foi crucial para a formulação de problemas de contorno, permitindo converter problemas definidos em domínios tridimensionais complexos para contornos bidimensionais, reduzindo a complexidade da modelagem matemática. Na virada do século XX, Volterra e Fredholm estabeleceram a teoria das equações integrais, base para converter problemas diferenciais em problemas de contorno que podem ser resolvidos ao longo de superfícies. Essa abordagem tornou-se o pilar para a resolução de problemas de fronteira usando integrais, abrindo caminho para o MEC. Em 1969, Carlos A. Brebbia combinou os avanços em equações integrais e métodos numéricos, criando a base do MEC como o conhecemos. Brebbia aplicou o método para resolver problemas de engenharia estruturais e térmicos, contribuindo para sua aceitação como um método preciso e aplicável a problemas com condições de contorno complexas. Em 1978 a publicação do livro de Brebbia marcou a disseminação do método para uma ampla gama de aplicações de engenharia. Hoje, o MEC é uma ferramenta poderosa para resolver problemas complexos de engenharia, incluindo análise de tensões, transferência de calor, mecânica dos fluidos.

BRADY & BRAY (1978) utilizam o MEC para a determinação de tensões e deslocamentos em torno de aberturas longas em um campo de tensões triaxial. NAKAGUMBA (1979) utiliza as soluções fundamentais de Kelvin, Mindlin e Boussinesq-Cerruti no MEC, utilizando o método para resolver problemas elásticos lineares tridimensionais e para análise da iteração solo-estrutura.

Ainda no final da década de 1970, três pesquisadores brasileiros e um britânico radicado no Brasil realizaram estudos pioneiros sobre o MEC sob a orientação do Prof. Carlos A. Brebbia, figura central no desenvolvimento moderno do método, são eles:

TELLES (1981), desenvolveu formulações inovadoras para o Método dos Elementos de Contorno (MEC) voltadas à análise de problemas de materiais não-lineares. Sua contribuição permitiu expandir o uso do MEC para problemas que envolvem materiais elastoplásticos, com processos incrementais e iterativos, problemas de fluência que dependem do tempo de materiais sujeitos à carga constante.

VENTURINI (1982) destaca-se pela aplicação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) em problemas complexos da engenharia estrutural, com foco na análise de estruturas sob condições de contorno intrincadas e na simulação de fraturas em materiais. Suas contribuições foram essenciais para aprimorar a precisão do MEC, especialmente em questões relacionadas à resistência de materiais e mecânica dos sólidos. As formulações desenvolvidas por Venturini ampliaram as possibilidades de uso do MEC, consolidando-o como uma ferramenta robusta e versátil para a modelagem de sistemas estruturais complexos.

MANSUR (1983), contribuiu significativamente para o avanço do MEC, desenvolvendo formulações para a análise de problemas elásticos bidimensionais e tridimensionais. Sua pesquisa se destacou pela inclusão de tensões iniciais e pela capacidade de modelar materiais com comportamento não linear, permitindo maior precisão e aplicabilidade em problemas de engenharia estrutural. As contribuições dele com o MEC possibilitaram a ampliação de sua aplicação em sistemas complexos, sendo fundamentais para o estudo de materiais heterogêneos e fenômenos de fratura.

Outro pesquisador importante é PARTRIDGE (1990) que publicou um livro abordando o tema do método de Reciprocidade Dual, que é uma técnica aprimorada do MEC que permite a solução de problemas complexos sem a necessidade de dividir o domínio do problema em elementos internos, aumentando a eficiência das simulações numéricas.

As teses desses pesquisadores contribuíram significativamente para o desenvolvimento teórico e prático do MEC no Brasil, expandindo sua aplicabilidade a uma ampla gama de problemas de engenharia. Eles também ajudaram a estabelecer o Brasil como um centro de pesquisa em MEC, atraindo estudantes e pesquisadores de todo o mundo.

O MEC, apesar de ainda requerer o desenvolvimento matemático para algumas áreas, já se encontra difundido em várias áreas do conhecimento e já se encontram alguns pacotes de

software comercial que utiliza o MEC, como o BEASY (Boundary Element Analysis SYstem) desenvolvido por Brebbia, Danson e Baynham em 1984, ou o ANSYS (ANalysis SYStems) que utiliza o MEC em problemas de acústica. Assim, o MEC se mantém como uma ferramenta essencial na resolução de problemas complexos de engenharia, com grande potencial para evoluções futuras.

1.3 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é verificar o comportamento mecânico do concreto com agregados reciclados Classe A, a fim de determinar a viabilidade de utilização de resíduos de construção coletado na RNV Gestão de Resíduos em operação no Aterro Sanitário na cidade de Catalão-GO. Para isso, é usada uma modelagem numérica pelo MEC utilizando uma abordagem multiescala, e foram realizados ensaios experimentais de compressão uniaxial e de tração por compressão diametral.

Como objetivos específicos, tem-se:

- Apresentar a formulação do MEC utilizada no trabalho que foi desenvolvida por Fernandes et al. (2019b), abordando os conceitos de homogeneização da formulação;
- Obter as curvas tensão *versus* deformação referentes aos ensaios realizados, considerando-se diferentes proporções de substituição dos agregados convencionais pelos reciclados;
- Elaborar EVRs com as diferentes proporções de substituição dos agregados adotadas nos ensaios e realizar as análises numéricas;
- Comparar as respostas numéricas dos EVRs com os resultados experimentais realizados no Laboratório de Estruturas da FENG da UFCAT para validar a formulação;
- Considerar outras substituições de agregados reciclados, apenas com o modelo numérico do EVR.

1.4 METODOLOGIA E FORMA DE ANÁLISE DOS RESULTADOS

A pesquisa busca avaliar o comportamento mecânico de concretos com diferentes teores de substituição de agregado graúdo por resíduos da construção civil (RCC), visando compreender o impacto dessa substituição na resistência mecânica do material. Os percentuais de substituição, definidos com base na microestrutura do Elemento de Volume Representativo (EVR) proposta por SILVA et al. (2024), são: 0% (referência), 13,96%, 27,02%, 49,68% e 100%.

Os ensaios foram realizados em corpos de prova cilíndricos de 100 mm de diâmetro e 200 mm de altura, moldados conforme a NBR 5738:2016. Para cada teor de substituição, foram moldados 12 corpos de prova, sendo: 4 para compressão axial aos 28 dias, 4 para tração por compressão diametral aos 28 dias e 4 para os dois ensaios em idades posteriores aos 28 dias. Esse delineamento experimental, totalizou 60 corpos de prova. A moldagem e a cura seguiram as prescrições normativas, sendo utilizada cura submersa em água. Após o período de cura, os ensaios físicos foram conduzidos de acordo com as normas NBR 5739:2018 e NBR 7222:2011.

Os agregados reciclados foram obtidos na usina RNV Gestão de Resíduos, localizada em Catalão-GO, e caracterizados por meio de ensaios granulométricos conforme a NBR 7211:2019. Esses ensaios definiram a curva granulométrica e verificaram a conformidade com as especificações normativas.

Os resultados das análises experimentais foram aproveitados àqueles com melhor ajuste entre as curvas tensão x deformação, de modo a descartar os resultados que apresentassem discrepância no comportamento. Adicionalmente, em função do teor de substituição, foram gerados resultados de curva granulométrica dos agregados graúdos provenientes da reciclagem, resultados de peso dos corpos de prova, teste de slump, modos de ruptura, além das curvas tensão x deformação dos ensaios. Por fim, com a utilização da modelagem multiescala, os resultados numéricos foram calibrados em relação aos resultados experimentais para as substituições realizadas de agregados reciclados e, posteriormente, várias outras substituições foram realizadas numericamente de modo a gerar curvas tensão x deformação e, assim, estimar as resistências de acordo com ampla gama de valores de substituições para os agregados reciclados provenientes da região de Catalão-GO, sem a necessidade de custos adicionais com mais análises experimentais.

Este trabalho modela o comportamento constitutivo do concreto utilizando uma abordagem multiescala, onde a microestrutura é representada pelo EVR, com base na metodologia de FERNANDES et al. (2019b) e nas definições paramétricas do trabalho de SILVA et al. (2024). O EVR proposto por SILVA et al. (2024) simula o fraturamento apenas ao redor dos agregados maiores. Nesse trabalho, o EVR foi adaptado para considerar fraturas também ao redor das inclusões médias, a fim de determinar qual estratégia produz melhores resultados. E foi realizada uma análise paramétrica para calibrar os parâmetros que melhor reproduzem os resultados experimentais. Cada EVR é composto por uma matriz cimentícia modelada como material elasto-plástico, descrito pelo modelo de Mohr-Coulomb; os agregados como inclusões rígidas com comportamento elástico e os vazios. A ZTI foi representada por elementos de fratura coesiva, permitindo a simulação do processo de microfissuração e descolamento nos limites das fases constituintes.

A solução numérica é obtida através da discretização do contorno em elementos e do domínio em células. São impostas ao contorno do EVR um vetor de macro deformações

constantes, na forma de deslocamentos lineares ao longo do contorno. O campo de deslocamentos no EVR contém duas partes que são: a macro deformação imposta e o campo de flutuação dos deslocamentos; sendo necessário encontrar o campo de flutuação que satisfaz a equação de equilíbrio do EVR. Encontrando o equilíbrio do EVR, utiliza-se de técnicas de homogeneização, resultando assim em tensão e tensores homogeneizados que é a resposta constitutiva do material representado.

Não é realizada análise estrutural em multiescala, isto é, as análises são feitas apenas no nível da microestrutura do material, a fim de obter sua resposta constitutiva, quando um vetor de deformações é imposto ao EVR. Esse vetor de deformações é dividido em incrementos, sendo a resposta constitutiva do material obtida para cada um desses incrementos. Com isso, obtém-se a curva tensão *versus* deformação do material. Essas deformações, em uma análise estrutural em multiescala, seriam as deformações referentes ao ponto da estrutura (macrocontínuo) cujo EVR está sendo analisado.

A modelagem numérica via MEC analisa o comportamento mecânico dos concretos recicláveis, utilizando EVRs parametrizados com os teores de substituição do agregado graúdo definidos experimentalmente (0%, 13,96%, 27,02%, 49,68% e 100%). Os resultados numéricos, como tensões e deformações homogeneizadas, são comparados aos dados experimentais para validar o modelo.

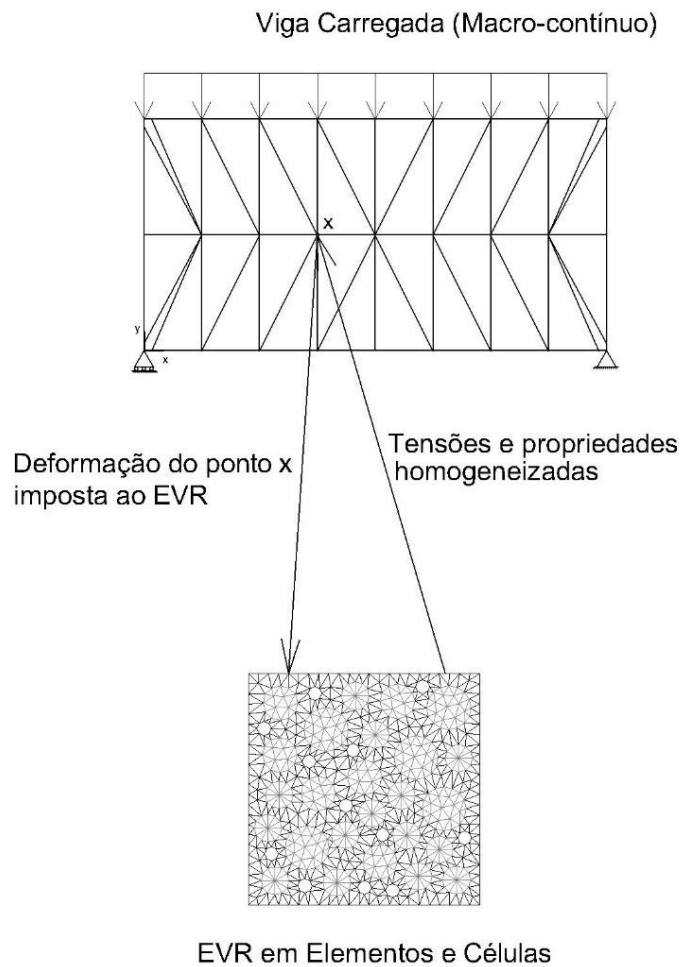
As condições de contorno são definidas impondo deslocamentos lineares no contorno do EVR, que é calculado a partir das macrodeformações constantes impostas ao EVR. Mas para resolver o problema de equilíbrio do EVR deve-se impor também condições de contorno em termos de flutuação de deslocamentos. Nesse trabalho, é adotado o modelo de flutuações periódicas sobre o contorno do EVR. O equilíbrio interno é obtido quando se encontra o campo de flutuação de deslocamentos que satisfaz a equação de equilíbrio do EVR.

Nesse trabalho não é feita nenhuma implementação computacional, apenas faz-se uso de um código computacional já desenvolvido de acordo com a formulação do MEC descrita em FERNANDES et al. (2019b).

2 ANÁLISE NUMÉRICA DO EVR, SEGUNDO UMA ABORDAGEM MULTIESCALA

De acordo com SANTOS et al. (2017), um ponto x do macrocontínuo pode ser representado por um EVR. No caso do EVR a ser modelado pelo MEC, este deve ser discretizado em elementos de contorno e células, a fim de obter a resposta numérica. Nesse tipo de modelagem, impõe-se uma deformação macroscópica ao EVR, que gera tensões em todos os pontos do volume do elemento. As tensões em um ponto específico do EVR são obtidas a partir do modelo constitutivo adotado para representar o comportamento da fase do EVR na qual o ponto está contido. Para a obtenção das informações atualizadas no ponto da macro escala, como tensões, tensor constitutivo e propriedades do material modificadas pela não-linearidade física, emprega-se o processo de homogeneização das tensões e do tensor constitutivo. Para uma melhor visualização, a Figura 2.1 ilustra o conceito da análise em multi-escala. Nota-se ainda na Figura 2.1 que o EVR é todo discretizado em células. No contexto do MEC é necessário discretizar células quando ocorrem fenômenos dissipativos, como é o caso da plasticidade presente na matriz do concreto. Mas nesse caso, mesmo as inclusões elásticas são discretizadas em células. Isso se justifica pelo fato de que o problema governante do EVR é formulado em termos de flutuações de deslocamento. Como essas flutuações devem ser representadas em todo o domínio, torna-se necessário aproximar os deslocamentos em todas as fases do material heterogêneo, inclusive nas inclusões elásticas. Dessa forma, a discretização integral do EVR em células assegura a correta representação do campo de deslocamentos e possibilita o emprego da formulação multiescala adotada nesse trabalho.

Figura 2.1 – Conceito de homogeneização da análise multiescala



Fonte: Elaboração própria

SOUZA NETO & FEIJÓ (2006) elaboraram uma descrição da modelagem constitutiva multiescala baseada em formulações variacionais. Os princípios adotados por esses autores incluem: a média volumétrica dos tensores de deformação e tensão, o princípio de macro-homogeneidade de Hill-Mandel, o equilíbrio do EVR e a definição do espaço das flutuações de deslocamentos no EVR. Esses princípios definem o modelo multi-escala usado nesse trabalho e também estão presentes em FERNANDES et al. (2015 a, b). Eles estão detalhados nos subtópicos a seguir.

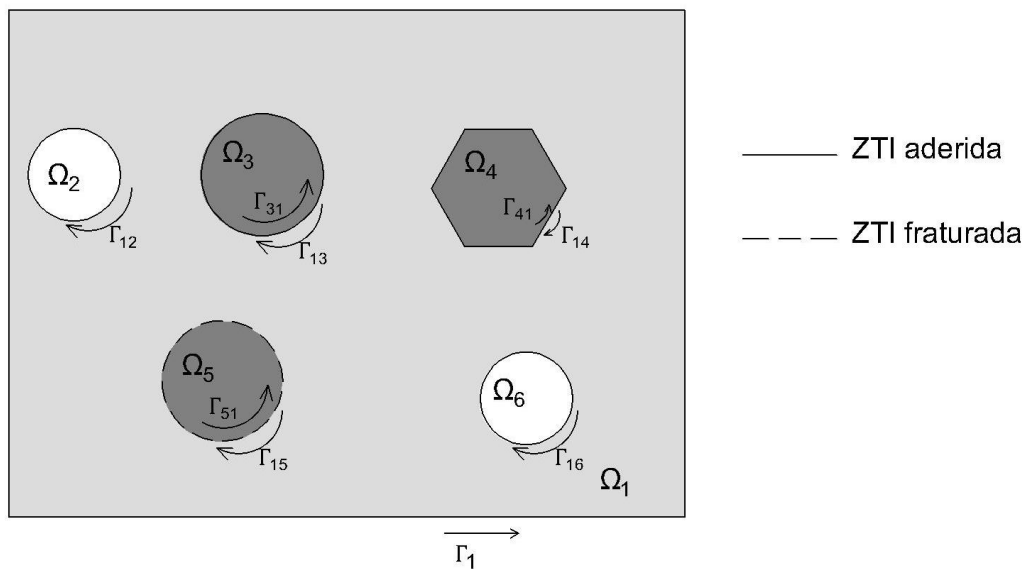
2.1 DEFINIÇÃO DO EVR

Seja o macro-contínuo representado pela Figura 2.1, que pode ser qualquer estrutura, e onde x é um ponto qualquer do macro-contínuo e y é um ponto qualquer da microestrutura.

Apesar de no presente trabalho a análise ficar restrita apenas ao EVR, a formulação do EVR é apresentada no contexto de análise em multi-escala, pois isso facilita no futuro acoplar a presente formulação com uma formulação do macro-contínuo, a fim de realizar análise multi-escala totalmente acoplada. Cada ponto da estrutura do macro-contínuo é representado por um EVR, que deve ser grande o suficiente para capturar a heterogeneidade do material, que nesse trabalho é o concreto reciclado. Define-se V_μ como o volume do EVR, Ω_μ como seu domínio e $\partial\Omega_\mu$ como seu contorno.

O EVR é a representação do material a ser estudado. O concreto reciclável estudado nesse trabalho é composto por matriz, uma porcentagem de agregado comercializado, outra porcentagem de agregado reciclável e vazios. Inicialmente é suposto que os dois tipos de agregados tenham um comportamento elástico, sendo apenas a matriz com comportamento plástico. A fissuração na ZTI será modelada definindo elementos finitos adicionais ao redor das inclusões nas quais se deseja modelar o fenômeno. Considerando isso, o domínio é composto por Ω_μ^V (que representa os vazios) e Ω_μ^S (que representa os sólidos), sendo $\Omega_\mu = \Omega_\mu^V \cup \Omega_\mu^S$. A parte sólida pode ser composta por diferentes fases com propriedades mecânicas diferentes. Ao inserir vazios e outras fases dentro da matriz, introduzimos a heterogeneidade do material, ou seja, no caso do EVR ser composto apenas pela matriz, ele estaria representando um material homogêneo constituído por apenas uma fase. E no caso do material ser homogêneo, não haveria necessidade de se ter um processo iterativo para resolver o problema de equilíbrio do EVR, já que ele seria automaticamente satisfeito. A Figura 2.4 exemplifica a modelagem do EVR:

Figura 2.2 – EVR com inclusões e vazios



Elementos de contato e fratura podem ser definidos sobre as interfaces, caso queira modelar a abertura de fissuras que ocorrem nas ZTI. Caso, não se defina esses elementos, a interface é considerada perfeitamente aderida. Na Figura 2.2) o domínio Ω_5 tem a sua ZTI modelada com esses elementos, sendo a modelagem desses elementos realizada através do MEF. Na Figura 2.4 temos que: Ω_1 é a matriz; Ω_2 e Ω_6 os vazios; Ω_3, Ω_4 e Ω_5 as inclusões; Γ_{12} e Γ_{16} as interfaces dos vazios; $\Gamma_{13}, \Gamma_{31}, \Gamma_{14}$ e Γ_{41} as interfaces dos agregados perfeitamente aderidos e Γ_{15} e Γ_{51} as interfaces dos agregados com elemento de fratura e contato.

A definição de vazios ou inclusões com diferentes propriedades dentro da matriz afeta diretamente a rigidez e a resistência do material, alterando as quantidades macroscópicas e modificando significativamente os resultados numéricos.

A mecânica do contínuo é válida para o EVR, e, portanto, o conceito de tensão permanece válido a nível microscópico. Com isso, a tensão microscópica pode ser escrita em termos de deformação como $\sigma_\mu(y, t) = f_y(\varepsilon_\mu(y, t))$, sendo f_y o tensor constitutivo, que é definido de acordo com o critério adotado na fase em que o ponto y está inserido. As fases elásticas são as que tem o modelo mais simples, sendo o comportamento do material representado pela Lei de Hooke.

O EVR pode representar materiais em várias áreas do conhecimento, até mesmo na área biomédica, com simulação de estados uniaxiais de tensão em tecidos biológicos, conforme KLAHR et al. (2017).

2.2 PROCESSO DE HOMOGENEIZAÇÃO

Devido à heterogeneidade do EVR, que pode conter vazios ou inclusões dentro da matriz, é necessário utilizar técnicas de homogeneização para avaliar a tensão e o tensor constitutivo referentes ao ponto do macrocontínuo representado pelo EVR. Na Figura 5.1, apresentada anteriormente, a letra x representa um ponto qualquer do macro-contínuo, enquanto y denota um ponto qualquer do EVR.

A deformação no ponto x do macro-contínuo é dada pela média volumétrica da deformação no EVR, ou seja:

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \varepsilon_\mu(y) dV \dots\dots\dots (2.1)$$

Analogamente, tem-se que a tensão de um ponto x do macro-contínuo é dado por:

$$\sigma(x) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu(y) dV \dots\dots\dots (2.2)$$

As Eq. (2.1) e (2.2) representam o processo de homogeneização, que é a transformação de uma unidade microscópica em uma unidade macroscópica. Sendo assim, as equações anteriores representam a deformação e a tensão macroscópica ou homogeneizadas.

Pode-se escrever a deformação microscópica em termos de deslocamento microscópico u_μ :

$$\varepsilon_\mu(y) = \nabla^S u_\mu(y) \dots\dots\dots (2.3)$$

sendo ∇^S o operador gradiente simétrico, que garante a compatibilidade cinemática no EVR.

Ainda pelo processo de homogeneização, se define o tensor constitutivo homogeneizado C^{ep} :

$$C^{ep}(x) = \frac{\partial \sigma(x)}{\partial \varepsilon(x)} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^S} \frac{\partial \sigma_\mu(y) dV}{\partial \varepsilon(x)} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^S} \frac{\partial f_y(\varepsilon_\mu(y)) dV}{\partial \varepsilon(x)} \dots\dots\dots (2.4)$$

A consistência do processo é garantida pelo Princípio de Hill-Mandel (apresentado no item 2.4), que assegura a equivalência energética.

2.3 CAMPO DE DESLOCAMENTO NO EVR

O campo de deslocamentos no EVR é dado por:

$$u_\mu(y) = \varepsilon(x)y + \tilde{u}_\mu(y) \dots\dots\dots (2.5)$$

Na Eq. (2.5) $\varepsilon(x)$ é a deformação que atua no ponto x do macro-contínuo e que é imposta de forma constante ao contorno do EVR, y são as coordenadas de um ponto qualquer do EVR, e $\tilde{u}_\mu(y)$ a flutuação dos deslocamentos necessária para satisfazer a equação de equilíbrio do EVR. Se a deformação no EVR for constante, isto é, se ele for homogêneo, o termo \tilde{u}_μ é nulo.

A deformação microscópica $\varepsilon_\mu(y)$ é obtida a partir do gradiente simétrico do campo de deslocamentos microscópico. Considerando a Eq. (2.5), é possível escrever a deformação microscópica nos seguintes termos:

$$\varepsilon_\mu(y) = \varepsilon(x) + \tilde{\varepsilon}_\mu(y) \dots\dots\dots (2.6)$$

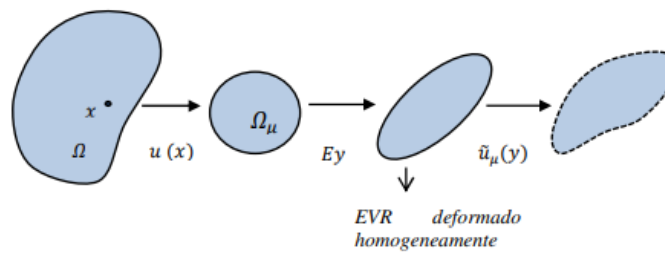
A flutuação da deformação $\tilde{\varepsilon}_\mu(y)$ está diretamente ligada ao gradiente simétrico da flutuação dos deslocamentos $\tilde{u}_\mu(y)$:

$$\tilde{\varepsilon}_\mu(y) = \nabla^S \tilde{u}_\mu(y) = \frac{1}{2} (\nabla \tilde{u}_\mu + (\nabla \tilde{u}_\mu)^T) \dots\dots\dots (2.7)$$

Essa relação é fundamental para assegurar que as deformações microscópicas sejam derivadas de um campo de deslocamentos fisicamente admissível, respeitando a continuidade do meio. Mais detalhes podem ser encontrados no trabalho de CROZARIOL (2017).

Par a melhor entender o conceito de flutuação de deslocamentos, seja a figura a seguir:

Figura 2.3 – Ilustração campo de deformações



Fonte: Santos, Pituba e Fernandes (2017)

Na Figura 2.3) x é um ponto do macro contínuo $u(x)$ é o deslocamento aplicado ao EVR, representado pelo Ω_μ . Se o EVR fosse de um mesmo material, a deformação ocorreria de forma homogênea, e a flutuação dos deslocamentos, $\tilde{u}_\mu(y)$, seria nula. Se houver heterogeneidade, surge o campo de flutuação dos deslocamentos ($\tilde{u}_\mu(y)$) e o corpo se deforma de forma não homogênea.

2.4 PRINCÍPIO DE HILL-MANDEL

O Princípio da macro-homogeneidade de Hill-Mandel foi proposto pelos físicos HILL (1965) e MANDEL (1971) e possibilita estabelecer uma relação entre os domínios micro e macro. Para qualquer EVR associado a um determinado ponto do macro-contínuo, a média volumétrica das potências das tensões microscópicas sobre esse EVR deve ser igual a potência das tensões macroscópicas. Isso garante a equivalência energética entre as escalas micro e

macro. A partir dessa condição, obtém-se a equação de equilíbrio do EVR. Assim, o campo de tensões ou forças no EVR resulta apenas das reações à deformação macroscópica imposta. A representação matemática disso é escrita da seguinte forma:

$$\sigma : \varepsilon = \frac{1}{\Omega_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu : \varepsilon_\mu dV_\mu \dots\dots\dots(2.8)$$

Em termos de tensões e deformações homogeneizados a Eq. (2.8) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sigma : \varepsilon = \overline{\sigma}_\mu : \overline{\varepsilon}_\mu \dots\dots\dots(2.9)$$

Sendo $\overline{\sigma}_\mu$ e $\overline{\varepsilon}_\mu$ são os tensores de tensão e deformação homogeneizados na microescala, respectivamente. Para maiores detalhes desse princípio, ver SOUZA NETO & FEIJOÓ (2006).

2.5 PROBLEMA DE EQUILÍBRIO DO EVR

Resolver o problema de equilíbrio do EVR é uma etapa central na análise multiescala, pois garante que o campo de tensões no EVR esteja auto-equilibrado. Assim, o equilíbrio é estabelecido quando o somatório das tensões ou das forças nodais em todas as células é nulo. A equação de equilíbrio do EVR, em termos de tensões, é apresentada da seguinte forma:

$$R = \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu(y) dV = 0 \dots\dots\dots(2.10)$$

sendo $\sigma_\mu(y)$ o tensor de tensões microscópicas no ponto y pertencente ao domínio microscópico Ω_μ .

Para expressar a Eq. (2.9) em função de flutuação dos deslocamentos, parte-se da relação constitutiva que descreve a tensão microscópica como função da deformação microscópica:

$$\sigma_\mu(y, t) = f_y \left(\varepsilon_\mu(y, t) \right) \dots\dots\dots(2.11)$$

Considerando a decomposição da deformação microscópica em termos da deformação macroscópica e da flutuação, conforme a Eq. (2.6):

$$\sigma_\mu(y, t) = f_y \left(\varepsilon(x) + \tilde{\varepsilon}_\mu(y) \right) \dots\dots\dots (2.12)$$

A flutuação de deformação ($\tilde{\varepsilon}_\mu(y)$) está relacionada ao gradiente simétrico da flutuação de deslocamentos ($\tilde{u}_\mu(y)$), tornando:

$$\sigma_\mu(y, t) = f_y \left(\varepsilon(x) + \nabla^S \tilde{u}_\mu(y) \right) \dots\dots\dots (2.13)$$

sendo: f_y função constitutiva definida por um critério adotado.

Para converter a integral de domínio definida na Eq. (2.10) em termos algébricos, o domínio do EVR é subdividido em N_{cel} células triangulares, onde cada célula representa uma pequena fração do material heterogêneo. Para cada célula, a deformação microscópica (ε_μ) é aproximada como a soma da deformação macroscópica imposta ($\varepsilon(x)$) e da flutuação de deformação ($\tilde{\varepsilon}_\mu$), obtida a partir dos deslocamentos nodais de flutuação ($\Delta\tilde{u}$) via matriz de compatibilidade $[B_\mu]_e$:

$$\{\varepsilon_\mu\} = \varepsilon(x) + [B_\mu]_e \{\Delta\tilde{u}\}_e \dots\dots\dots (2.14)$$

sendo: $\{\Delta\tilde{u}\}_e$ o vetor de flutuação de deslocamentos nos nós da célula e e $[B_\mu]_e$ a matriz de compatibilidade definida, adotando aproximação linear para os deslocamentos, como:

$$[B_\mu]_{cel} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.15)$$

sendo: $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ definidos da seguinte forma:

$$a_\alpha = X_1^k - X_1^j \dots\dots\dots \alpha = 1,2,3; j = 2,3,1; k = 3,1,2 \dots\dots\dots (2.16)$$

$$b_\alpha = X_2^k - X_2^j \dots\dots\dots \alpha = 1,2,3; j = 2,3,1; k = 3,1,2 \dots\dots\dots (2.17)$$

Assim, adotando aproximação linear para os deslocamentos e as forças, a expressão de equilíbrio (2.10) pode ser reescrita em termos das forças nodais:

$$\{R_F\} = \sum_{e=1}^{N_{cel}} [B_\mu]_e^T \{N\}_e A_e \cong 0 \dots\dots\dots (2.18)$$

sendo: A_e a área da célula.

Observe que no EVR, as forças nodais no contorno são reações devido à deformação imposta. O problema de equilíbrio é satisfeito quando o campo de força também está em equilíbrio. Substituindo a Eq. (2.13) e a Eq. (2.14) na Eq. (2.18) e sabendo que $\{N\}_e = \Delta\sigma_\mu t$, é possível escrever a Eq. (2.18) em função de flutuação de deslocamentos. O problema de equilíbrio do EVR é resolvido quando é satisfeita a equação a seguir:

$$\{R_F\} = \sum_{e=1}^{N_{cel}} [B_\mu]_e^T [C_\mu^{ep}]^e (\{\Delta\varepsilon\} + [B_\mu]_e \{\Delta\tilde{u}\})_e A_e t \cong 0 \dots\dots\dots (2.19)$$

sendo t a espessura da chapa.

Quando se definem os elementos finitos adicionais à malha do MEC, a fim de modelar o fraturamento na ZTI, deve-se acrescentar à Eq. (2.19) o termo referente a esses elementos, ou seja, a equação de equilíbrio passa a ser definida como:

$$\{R_F\} = \sum_{e=1}^{N_{cel}} [B_\mu]_e^T [C_\mu^{ep}]^e (\{\Delta\varepsilon\} + [B_\mu]_e \{\Delta\tilde{u}\})_e A_e t + \sum_{ef=1}^{N_f} [K_{ef}]_n^{k-1} t \cong 0. (2.20)$$

sendo: $[C_N^{ep}]$ o tensor constitutivo da célula; A_e área da célula; $\{\Delta\varepsilon\}$ o vetor do incremento de deformação imposto pelo macro-contínuo; $\{\Delta\tilde{u}\}$ o incremento de flutuação dos deslocamentos, N_f , número de elementos de contato e fratura; $[K_{ef}]$ a matriz de rigidez tangente dos elementos de fratura.

Para se obter $\{\Delta\varepsilon\}$, primeiro se calcula $\{\Delta K\}$ (definido adiante), que é devido aos deslocamentos com variação linear no contorno imposto pela deformação constante do macro nos nós do contorno. Então, por meio da inversa da lei de Hooke, se obtém $\{\Delta\varepsilon\}$ nos nós internos. Observe, que pelo fato da microestrutura ser heterogênea, a deformação constante imposta nos nós de contorno irá gerar já de início um campo de flutuações $\{\tilde{u}\}$ dentro do EVR. Mas esse campo de flutuações inicial não é suficiente para satisfazer a equação de equilíbrio do EVR. Assim, o objetivo é encontrar o incremento de flutuações $\{\Delta\tilde{u}\}$ que satisfaça a Eq.(2.19).

2.6 MATRIZ TANGENTE CONSISTENTE

Conforme FERNANDES et al. (2019b), caso a condição estabelecida pela Eq. (2.20) não seja atendida após a imposição do campo de deslocamento linear ao contorno do EVR, é necessário utilizar o método de Newton-Raphson para encontrar o campo de flutuação de deslocamento:

$$\tilde{u}_\mu^{k+1} = \tilde{u}_\mu^k + \delta\tilde{u}_\mu^{k+1} \dots\dots\dots (2.21)$$

sendo $\delta\tilde{u}_\mu^{k+1}$ as correções das flutuações impostas à iteração $k + 1$, que é calculada pelo operador tangente. Esse operador é obtido linearizando-se a Eq. (2.19), ou seja:

$$\{R_F\}_n^{k-1} + \frac{\partial\{R_F\}_n^{k-1}}{\partial\{\Delta\tilde{u}\}_n^{k-1}}\{\delta\Delta\tilde{u}\}_n^k = 0 \dots\dots\dots (2.22)$$

sendo $\{R_F\}_n^{k-1}$ o vetor de resíduos em forças da iteração anterior conforme definido na Eq. (2.19).

Conforme CROZARIOL & FERNANDES (2020), derivando-se a Eq. (2.19) em relação a flutuação de deslocamentos, se obtém a matriz tangente do problema:

$$\left[-\frac{\partial\{R_F\}_n^k}{\partial\{\Delta\tilde{u}\}_n^k}\right] = [K]_n^k = \sum_{e=1}^{N_{cel}} [B]_e^T [C_\mu^{ep(e)}]_n^k [B_e]_e t A_e \dots\dots\dots (2.23)$$

sendo $[K]_n^k = \frac{\partial\{R_F\}_n^k}{\partial\{\Delta\tilde{u}\}_n^k}$ denominada matriz tangente consistente e relaciona a correção no estado de flutuação dos deslocamentos $\{\delta\Delta\tilde{u}\}_n^k$ com os resíduos da iteração anterior $\{R\}_n^{k-1}$. A matriz definida em Eq. (2.19) é referente às células triangulares definidas na matriz e agregados. Porém, tem-se também a modelagem da propagação de fissuras coesivas nas ZTIs, por meio dos elementos finitos de contato adicionados nas interfaces. Assim, deve-se adicionar à Eq. (2.23) a parcela referente a esses elementos, ou seja:

$$[K]_n^k = \sum_{e=1}^{N_{cel}} [B]_e^T [C_\mu^{ep(e)}]_n^k [B_e]_e t A_e + \sum_{ef=1}^{N_f} [K_{ef}]_n^k t \dots\dots\dots (2.24)$$

sendo $[K]_n^k$, a matriz tangente consistente global do EVR; $[B]_e$, matriz de deformação, relaciona deslocamentos nodais com as deformações dentro da célula e ; $[C_\mu^{ep}]_n^k$, matriz constitutiva

elastoplástica, relaciona forças normais e deformações na célula e ; $[K_{ef}]$, matriz de rigidez do elemento finito; A_e , área da célula; N_{cel} , número de células; N_f , número de elementos de contato e fratura; t , espessura.

Portanto, a correção do estado de flutuação do deslocamento ($\delta\Delta\tilde{u}_n^k$) é dado por:

$$\{\delta\Delta\tilde{u}_n^k\} = [[K]_n^{k-1}]^{-1}\{R_F\}_n^{k-1} \dots\dots\dots (2.25)$$

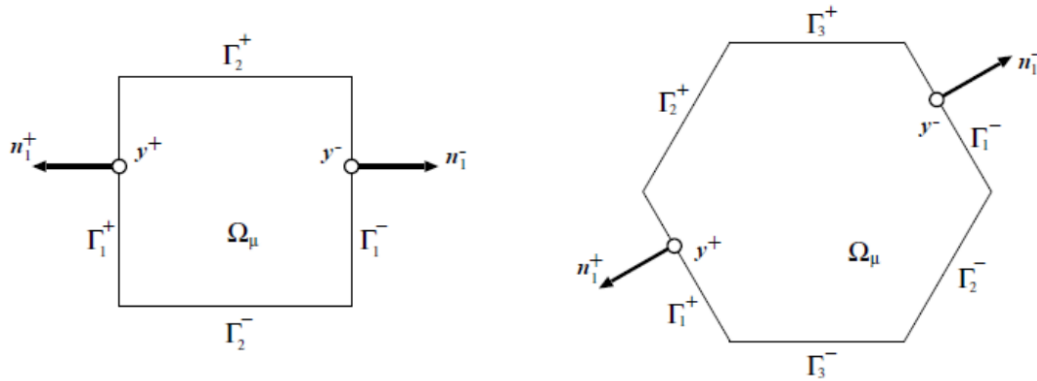
2.7 FLUTUAÇÃO DE DESLOCAMENTOS PERIÓDICAS SOBRE O CONTORNO

No modelo proposto nesse trabalho a macro deformação $\varepsilon(x)$ é imposta como condição de contorno aos nós do contorno do EVR. Isso é feito por meio da imposição de deslocamentos lineares no contorno do EVR, calculados com essa deformação constante. A partir desses deslocamentos, obtêm-se as forças no contorno, além dos deslocamentos e deformações nos pontos internos. Então, a partir dos modelos constitutivos adotados nas fases do EVR, obtêm-se as tensões nos nós das células do EVR. Mas para resolver o problema de equilíbrio do EVR, que é definido em termos de flutuação de deslocamentos, é necessário impor também condições de contorno em termos de flutuação de deslocamentos. Isso pode ser feito impondo flutuações nulas no contorno, ou adotando forças de superfície uniformes sobre o contorno ou, a que é utilizada neste trabalho, adotando flutuação dos deslocamentos periódicas sobre o contorno. Para mais informações sobre essas condições, verificar o trabalho de CROZARIOL (2017). A seguir será detalhado apenas o modelo multi-escala adotado aqui, que é aquele obtido impondo-se flutuações periódicas sobre o contorno. A flutuação de deslocamentos periódicas são dadas por:

$$\tilde{u}_\mu(y^+) = \tilde{u}_\mu(y^-) \forall y \in \Gamma_\mu \dots\dots\dots (2.26)$$

onde y^+ e y^- , representam pontos em faces opostas, como ilustrado na Figura 2.4) que mostra um EVR retangular e outro hexagonal:

Figura 2.4 – Definição de dois EVRs distintos para meios periódicos



Fonte: Fernandes (2012)

Para satisfazer o Princípio de Hill-Mandel, a força de superfície t^e deve ser anti-periódica em $\partial\Omega_\mu = \Gamma_\mu$:

$$t^e(y^+) = -t^e(y^-) \forall y \in \Gamma_\mu \dots\dots\dots (2.27)$$

Para uma iteração k , a Eq. (2.22) é decomposta em parcelas devido às características periódicas da condição de contorno, ou seja, o sistema de equações é escrito como:

$$\begin{Bmatrix} R_{F_p} \\ R_{F_m} \\ R_{F_i} \end{Bmatrix}^{k-1} + \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{pm} & K_{pi} \\ K_{mp} & K_{mm} & K_{mi} \\ K_{ip} & K_{im} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\tilde{u}_p \\ \delta\tilde{u}_m \\ \delta\tilde{u}_i \end{Bmatrix}_\mu^k = 0 \dots\dots\dots (2.28)$$

sendo os subíndices i, p e m relativos aos nós internos e pares de pontos y^+ e y^- respectivamente, definidos no contorno, sem coincidir com canto; R_p, R_m, R_i as forças nos pontos p, m, i . Considerando que $\delta\tilde{u}_m = \delta\tilde{u}_p$, a Eq. (2.22) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\{\bar{R}_F\}^{k-1} + [K_R]\{\delta\Delta\tilde{u}_R\}^k = 0 \dots\dots\dots (2.29)$$

sendo: $\{\bar{R}_F\}^{k-1} = \begin{Bmatrix} R_p + R_m \\ R_i \end{Bmatrix}^{k-1}$, $\{\delta\Delta\tilde{u}_R\}^k = \begin{Bmatrix} \delta\tilde{u}_p \\ \delta\tilde{u}_i \end{Bmatrix}_\mu^k$ e $[K_R]$ dada por:

$$[K_R] = \begin{bmatrix} K_{pp} + K_{pm} + K_{mp} + K_{mm} & K_{pi} + K_{mi} \\ K_{ip} + K_{im} & K_{ii} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.30)$$

Portanto, o sistema da Eq. (2.29) resulta na seguinte expressão para os deslocamentos incrementais:

$$\{\delta\Delta\tilde{u}_R\}_n^k = -[[K_R]_n^{k-1}]^{-1}\{\bar{R}_F\}_n^{k-1} \dots\dots\dots (2.31)$$

2.8 VALORES HOMOGENEIZADOS DO VETOR DE TENSÃO E DO TENSOR CONSTITUTIVO

A tensão macroscópica $\sigma(x)$ de um ponto x do macrorcontínuo é obtida pela média volumétrica das tensões microscópicas no EVR associado, conforme Eq. ((2.2). Considerando a presença de vazios (Ω_μ^V) e sólidos (Ω_μ^S), têm-se:

$$\{\sigma(x)\} = \frac{1}{V_\mu} \left(\int_{\Omega_\mu^S} \sigma_\mu dV + \int_{\Omega_\mu^V} \sigma_\mu dV \right) \dots\dots\dots (2.32)$$

Como os vazios não contribuem para tensões ($\sigma_\mu = 0$ em Ω_μ^V), a Eq. (2.32) se reduz a:

$$\{\sigma(x)\} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^S} \sigma_\mu dV \dots\dots\dots (2.33)$$

Aplicando o teorema de Green, como detalhado em CROZARIOL (2017), a tensão homogeneizada pode ser reescrita em termos das forças de superfície t^e do contorno Γ_μ :

$$\{\sigma(x)\} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Gamma_\mu} t^e \otimes_s y dA \dots\dots\dots (2.34)$$

sendo \otimes_s o produto tensorial simétrico e y as coordenadas dos pontos do contorno. Após a discretização do EVR em elementos (conforme formulação do MEC no Capítulo 4), a tensão homogeneizada é aproximada por:

$$\{\sigma(x)\} = \frac{1}{2V_\mu} (\{\bar{\sigma}\} + \{\bar{\sigma}^T\}) \dots\dots\dots (2.35)$$

com:

$$\bar{\sigma} = \sum_{i=1}^{N_b} \{F_c^i\} \{y^i\}^T \dots\dots\dots (2.36)$$

sendo F_c^i as forças calculadas a partir das forças nodais do contorno P_c^i . No incremento n , as forças ΔP_c^N são as forças devido ao deslocamento imposto nesse incremento, obtidas do vetor $\{\Delta X\} = \left\{ \begin{matrix} \Delta P_c \\ \Delta U_i \end{matrix} \right\}$ resolvido pelo sistema do MEC (Eq. 4.107). Essas forças P_c^i ou ΔP_c^N são dadas por unidade de comprimento, por isso para se obter F_c^i ou ΔF_c^N deve-se multiplicar P_c ou ΔP_c^N pelo comprimento de influência do respectivo nó, conforme Eq. (2.37).

$$\{\Delta F_c^N\} = \{\Delta P_c^N\} \frac{1}{2} (L_{e-1} + L_e) \dots\dots\dots (2.37)$$

sendo L_{e-1} o comprimento do elemento anterior ao nó N e L_e o comprimento do elemento seguinte ao nó N .

Porém, após resolver o problema de equilíbrio do EVR, os deslocamentos nos nós do contorno devem ser atualizados para incluir o campo de flutuação de deslocamentos conforme a Eq. (2.5), pois os deslocamentos combinam a resposta à deformação macroscópica imposta ($\{\Delta U_c^\varepsilon\}$) e às flutuações periódicas ($\Delta \tilde{U}_c$). Com isso, essas forças ΔP_c precisam ser recalculadas, considerando esse campo de deslocamento atualizado dos nós de contorno. Além disso, como o carregamento é incremental, a força nodal do incremento atual n é obtida somando-se a força obtida no incremento anterior ($n-1$) com seu incremento em n . Assim, a força nodal, por unidade de comprimento, no incremento n é dada por:

$$\{P_c^N\}_n = \{P_c^N\}_{n-1} + \{\Delta P_c^N\} \dots\dots\dots (2.38)$$

O tensor constitutivo homogeneizado $[\bar{C}^{ep}]$, que relaciona incrementos de tensão e deformação macroscópicos ($\{\Delta \bar{\sigma}\} = [\bar{C}^{ep}]:\{\Delta \bar{\varepsilon}\}$), é calculado a partir da matriz tangente consistente definida no item (2.6). Para um incremento $n + 1$, tem-se:

$$\{\bar{\sigma}_{n+1}\} = \{\bar{\sigma}\}_n + [\bar{C}_{n+1}^{ep}]:\{\Delta \bar{\varepsilon}\}_{n+1} \dots\dots\dots (2.39)$$

O tensor constitutivo homogeneizado é obtido derivando a tensão homogeneizada em relação à deformação macroscópica:

$$[\bar{C}_{n+1}^{ep}] = \frac{\partial \{\bar{\sigma}\}_{n+1}}{\partial \{\bar{\varepsilon}\}_{n+1}} = \frac{1}{V_\mu} \frac{\partial}{\partial \{\bar{\varepsilon}\}} \left[\int_{\Omega_\mu} f_y(\{\varepsilon(x)\} + \nabla^S \{\tilde{u}_\mu\}) dV \right] \dots\dots\dots (2.40)$$

Segundo SOUZA NETO & FEIJÓ (2006), o tensor homogeneizado pode ser decomposto em duas parcelas:

$$[\bar{C}_{n+1}^{ep}] = [\bar{C}_{n+1}^{ep(Taylor)}] + [\tilde{C}_{n+1}^{ep}] \dots\dots\dots (2.41)$$

sendo $\bar{C}_{n+1}^{ep(Taylor)}$ o Modelo de Taylor, que assume flutuações nulas ($\tilde{u}_\mu = 0$), resultando na média volumétrica do tensor constitutivo microscópico:

$$[\bar{C}_{n+1}^{ep(Taylor)}] = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} [C_\mu^{ep}] dV = \sum_{i=1}^{N_{cel}} \frac{V_i}{V_\mu} [C_{\mu,i}^{ep}] \dots\dots\dots (2.42)$$

Da Eq. (2.41) têm-se ainda a parcela de contribuição das flutuações (\tilde{C}_{n+1}^{ep}) que captura o efeito das heterogeneidades via matriz reduzida $[K_R]$ (derivada da matriz tangente global $[K]$ da Eq. (2.24)):

$$[\tilde{C}_{n+1}^{ep}] = \frac{1}{V_\mu} [G_R][K_R]^{-1}[G_R]^T \dots\dots\dots (2.43)$$

A matriz $[K_R]$ para condição de contorno de flutuações periódicas é dada na Eq. (2.27), com $[G_R]$ obtida de:

$$[G] = \sum_{e=1}^{N_e} [C_{\mu,e}^{ep}] [B]_e V_e \dots\dots\dots (2.44)$$

sendo $[B]_e$ a matriz de compatibilidade definida na Eq. (2.15).

3 MODELOS CONSTITUTIVOS

Modelos constitutivos são formulações matemáticas que descrevem o comportamento mecânico dos materiais sob diferentes condições de carregamento, considerando suas propriedades intrínsecas. Eles estabelecem relações entre tensões, deformações e variáveis internas, permitindo prever como um material responde a esforços externos, como tração, compressão e cisalhamento. Esses modelos são fundamentais para análises estruturais e podem variar desde abordagens elásticas simples até representações mais complexas que envolvem plasticidade, fratura, viscoelasticidade, dano ou outras características não lineares. Sua aplicação é essencial no campo da engenharia civil para entender e projetar materiais e estruturas de forma segura e eficiente. Aqui serão apresentados Modelos de Plasticidade e de Mecânica da fratura.

3.1 MODELOS DE PLASTICIDADE

Quando se modela uma estrutura com comportamento plástico, a carga não pode ser aplicada de uma só vez, ela deve ser repartida em incrementos de cargas. No início, a deformação da estrutura tem comportamento puramente elástico, sendo assim, quando da retirada da carga o elemento volta à sua forma original. Após atingida a tensão de escoamento, o material entra no regime plástico, onde ocorre uma deformação permanente, mesmo após a remoção da carga. Nesse estágio, as tensões no material não aumentam proporcionalmente às deformações, e a capacidade de carga adicional depende da redistribuição das tensões na estrutura. Eventualmente, com o aumento contínuo das cargas, o material pode atingir a sua tensão última, levando à falha ou colapso da estrutura. Assim, é fundamental utilizar incrementos de carga na análise numérica para capturar adequadamente o comportamento não linear, garantindo uma modelagem precisa do processo de deformação.

Para modelar o comportamento elasto-plástico é necessário estabelecer relações explícitas entre tensão e deformação. Na fase elástica, essa relação é descrita pela lei de Hooke. Mas, ao entrar na fase plástica, a relação deve ser definida por um modelo constitutivo apropriado. É fundamental ter uma lei de evolução para o tensor de deformações plásticas, que estabelece o limite do comportamento elástico sob qualquer combinação de tensões, incluindo o ponto de escoamento. Para modelos com encruamento, é necessária também uma regra de endurecimento, que regula a variação de tensão de escoamento em função das deformações plásticas. FERNANDES (1998), apresenta diversos tipos de modelos elasto-plásticos.

Os critérios de escoamento utilizados para modelar o comportamento plástico variam conforme o material analisado. Materiais frágeis, como rochas e cerâmicas, frequentemente são descritos pela Teoria de Rankine ou pela Teoria de Coulomb, que assumem resistências à tração e à compressão iguais. Já para materiais cuja resistência à tração e compressão diferem, como o

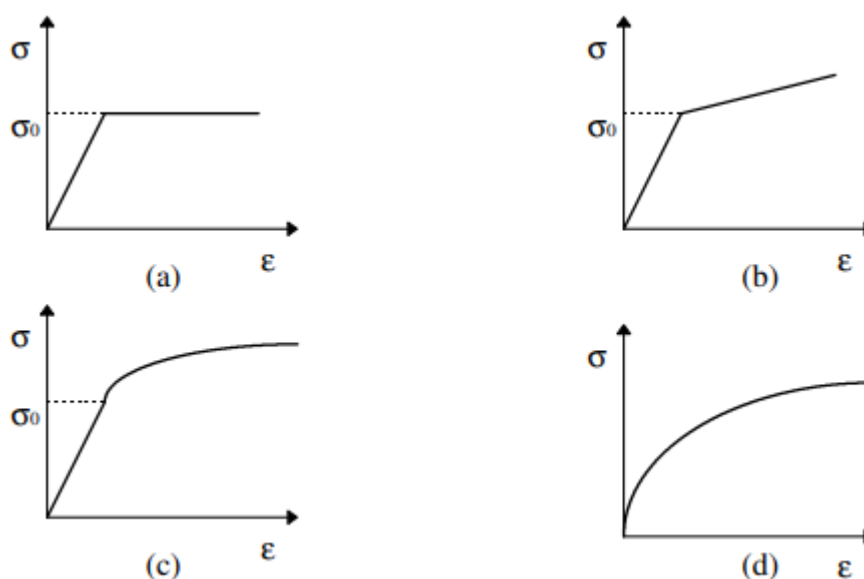
concreto, o critério de Mohr-Coulomb ou de Drucker-Prague são mais apropriados. Para materiais dúcteis, como metais, os critérios mais utilizados incluem o critério de Tresca, baseado na máxima tensão cisalhante, e o critério de von Mises, que considera a máxima energia de distorção. Esses critérios fornecem uma base sólida para identificar o início do escoamento plástico e a redistribuição das tensões no material, sendo essenciais para análises avançadas de estruturas.

Nas análises com não linearidade física, é fundamental conhecer o modelo constitutivo do material, que fornece a tensão correspondente a um dado valor de deformação. Para cada incremento de carga é obtida uma solução, onde a deformação total resulta da soma da deformação no incremento anterior com o incremento de deformação relacionado ao último incremento de carga. Então, uma análise plástica, necessita da história de carregamento.

A atualização da tensão em análises com comportamento plástico é realizada de forma incremental, acompanhando o processo de aplicação da carga. Para cada incremento de carga, a tensão é calculada com base na relação constitutiva do material, levando em consideração as deformações totais acumuladas até aquele instante. Durante a fase elástica, a atualização segue a relação linear definida pela lei de Hooke. Após o início da fase plástica, a tensão é ajustada com base no regime plástico, utilizando as deformações plásticas incrementais e respeitando as condições de consistência impostas pelo critério de escoamento adotado. Este procedimento garante que o estado de tensão permaneça em conformidade com a superfície de escoamento ao longo de toda a análise, garantindo uma representação precisa do comportamento material.

Os modelos do comportamento plástico podem ser representados de diferentes formas, os gráficos que representam esses modelos podem ser representados da seguinte forma:

Figura 3.1 – Modelos de plasticidade



Fonte: Foltran (1999)

Na Figura 3.1) onde aparece σ_0 é a tensão de escoamento, que nesse trabalho é denominada de σ_y . O modelo de plasticidade representado pela Figura 3.1a é o caso denominado elasto-plástico perfeito, o qual o material deforma-se elasticamente até σ_y , após atingir essa tensão o material acumula apenas deformações, sem que haja acréscimo de tensões. Na Figura 3.1b é o modelo elasto-plástico com encruamento linear, que mostra que mesmo após atingir a tensão σ_y , ainda ocorre um ganho de tensão, conforme a deformação plástica vai aumentando. Na Figura 3.1c representa um modelo com encruamento não-linear, porém essa não-linearidade ocorre apenas depois que a tensão σ_y é atingida. Já na Figura 3.1d apresenta um modelo que apresenta comportamento não-linear desde o início do carregamento, não sendo muito clara a separação entre as fases elástica e plástica.

3.1.1 Decomposição da Deformação e Relações Constitutivas

Quando há plasticidade, a deformação total (ε) é decomposta em parte elástica (ε^e) e parte plástica (ε^p). Como a carga é dividida em incrementos, as equações são escritas em taxas:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dots \dots \dots i, j = 1, 2 \dots \dots \dots (3.1)$$

Na fase elástica $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0$, logo a tensão segue a Lei de Hooke:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \dots \dots \dots (3.2)$$

sendo C_{ijkl} o tensor de constantes elásticas, dado pela Lei de Hooke, ou seja:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}^e + \frac{2G\nu}{1-\nu} \varepsilon_{kk}^e \delta_{ij} \dots \dots \dots (3.3)$$

O incremento ou taxa da tensão de tentativa $\dot{\sigma}_{ij}^t$ ou elástica $\dot{\sigma}_{ij}^e$ está relacionada com a deformação total por meio da lei de Hooke ($\Delta\sigma_{ij}^e = C_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}$), enquanto a taxa da tensão plástica $\dot{\sigma}_{ij}^p$ está relacionada com a taxa da deformação plástica. Sendo assim, considerando a Eq. (3.1), tem-se:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^t - \dot{\sigma}_{ij}^p \dots\dots\dots (3.4)$$

3.1.2 Critérios de Plastificação e Condições de Carregamento

O critério de plastificação para materiais com encruamento linear é dado por:

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - (\sigma_y + K\alpha) \leq 0 \dots\dots\dots (3.5)$$

sendo K módulo plástico, ou parâmetro de endurecimento, dado pela tangente da curva $(\sigma \times \epsilon^p)$; α a variável interna associada ao encruamento que é dada por $\dot{\alpha} = |\dot{\epsilon}^p|$, ou seja, $\dot{\alpha} = \dot{\lambda}$. Admitindo $f(\sigma)_{t+\Delta t} \leq 0$, tem-se as seguintes possibilidades:

$$\dot{\lambda} = 0 \text{ se } f(\sigma)_{t+\Delta t} < 0 \dots\dots\dots (3.6)$$

$$\dot{\lambda} > 0 \text{ se } f(\sigma)_{t+\Delta t} = 0 \dots\dots\dots (3.7)$$

Na condição da Eq. (3.6) mostra-se que quando a tensão aplicada é menor do que o limite elástico, não há evolução da deformação plástica. Na condição da Eq. (3.7) mostra-se que quando a tensão aplicada é maior que o limite elástico atual, a tensão deve ser corrigida e haverá evolução da deformação plástica de tal forma que satisfação a condição de complementaridade, dada pela equação a seguir:

$$\dot{\lambda} f(\sigma) = 0 \dots\dots\dots (3.8)$$

Considerando inicialmente um instante t , onde $f(\sigma)_t = 0$:

$$\dot{\lambda} = 0 \text{ se } f \leq 0 \text{ e } \dot{f} < 0 \dots\dots\dots (3.9)$$

$$\dot{\lambda} > 0 \text{ se } f = 0 \text{ e } \dot{f} = 0 \dots\dots\dots (3.10)$$

Assim, tem-se a condição de consistência:

$$\dot{\lambda} \dot{f} = 0 \dots\dots\dots (3.11)$$

3.1.3 Atualização Incremental das Tensões e Deformações

A deformação total acumula-se iterativamente:

$$\Delta \varepsilon_n^k = \Delta \varepsilon_n^{k-1} + \delta \varepsilon_n^k \dots\dots\dots (3.12)$$

$$\varepsilon_n^k = \varepsilon_{n-1} + \Delta \varepsilon_n^k \dots\dots\dots (3.13)$$

Antes de verificar o modelo constitutivo, tem-se:

$$\sigma_n^{e^k} = E(\varepsilon_n^k - \varepsilon_{n-1}^p) = \sigma_{n-1} + \Delta \sigma_n^{e^k} \dots\dots\dots (3.14)$$

$$\bar{\varepsilon}_n^{p(k)} = \varepsilon_{n-1}^p \dots\dots\dots (3.15)$$

$$\alpha_n^k = \alpha_{n-1} \dots\dots\dots (3.16)$$

Verifica-se o critério:

$$f_n^k = |\sigma_n^{e^k}| - (\sigma_y + K\alpha_n^k) \leq 0 \dots\dots\dots (3.17)$$

se a inequação (3.17) é satisfeita $\sigma_n^k = \sigma_n^{e^k}$. Se não satisfeita, corrige-se com:

$$\Delta \lambda = \frac{f_n^k}{E+K} \dots\dots\dots (3.18)$$

$$\Delta \sigma_{ij} = C_{ijkl}(\Delta \varepsilon_{kl} - \Delta \varepsilon_{kl}^p) = C_{ijkl}^ep \Delta \varepsilon_{kl} \dots\dots i, j, k, l = 1, 2 \dots\dots\dots (3.19)$$

ou

$$\Delta \sigma_{ij} = \Delta \sigma_{ij}^e - \Delta \lambda C_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dots\dots\dots (3.20)$$

Então o estado de tensão na iteração k, fica definido como: $\sigma_n^k = \sigma_{n-1} + \Delta \sigma_n^k$

3.2 MODELOS BASEADOS NA MECÂNICA DA FRATURA

A fratura, conceitualmente, refere-se à separação de um corpo em duas ou mais partes quando submetido a um esforço mecânico. A Mecânica da Fratura estabelece se uma trinca resultará ou não na falha do material sob tensões normais de serviço, permitindo também determinar o grau de segurança efetivo de um componente com trincas.

Segundo MEHTA & MONTEIRO (2014), a aplicação da mecânica da fratura no projeto de concreto proporciona uma melhor compreensão sobre propagação de fissuras no material. Esse trabalho adotará um critério de resistência que preveja a propagação de fissura quando as tensões atingirem o valor último suportado pelo material. A teoria da elasticidade não consegue capturar o comportamento de propagação de fissuras.

Para representar as microfissuras que ocorrem no concreto algumas ZTI serão modeladas através de modelos de fratura em MEF, sendo que LENS (2009) diz que a representação das fraturas via MEF podem ter três formas distintas:

- Modelo de fraturas distribuídas;
- Modelo de fraturas discretas;
- Modelo de fraturas incorporado.

O modelo a ser utilizado nesse trabalho é o modelo de fraturas discretas (fratura coesiva), que, entre os modelos de fratura, consegue capturar melhor o comportamento do concreto simples. Um aprofundamento sobre os modelos de fratura e contato usados nesse trabalho encontra-se no trabalho de PITUBA et al. (2016), que mostra todo o desenvolvimento teórico de tais modelos.

3.2.1 Modelos de contato e fratura coesiva

O modelo de fratura coesiva descrito nesse trabalho é proposto por PITUBA et al. (2016), que estende a formulação de CIRAK et al. (2005) ao incorporar um fator de penalidade para contato fechado e critérios de dano mais robustos. Esse modelo representa as fissuras quando capazes de transmitir cargas entre superfícies, essa capacidade é reduzida até não transmitir mais tensão entre as superfícies.

Na modelagem do EVR, os agregados convencionais e reciclados seguem regime elástico, e a pasta cimentícia segue a lei de evolução elastoplástica pelo critério de Mohr-Coulomb, sendo cada fase com propriedades elásticas diferentes. A ZTI é discretizada por elementos finitos de contato e fratura coesiva para simular abertura ou fechamento de fraturas nessa região. A energia coesiva liberada ϕ é dada pela equação a seguir:

$$\phi = \phi(\delta_n, \delta_s, q) \dots \dots \dots (3.21)$$

sendo δ_n a abertura devido à normal (modo I), δ_s a abertura devido ao escorregamento (modo II) e q é a variável que descreve os processos inelásticos da coesão.

A deformação por escorregamento pode assumir como um valor escalar independente da direção de sua fissura: $\delta_s = |\delta_s|$, dando característica isotrópica para o comportamento. Para modos mistos, é feito um deslocamento de abertura efetiva:

$$\delta = \sqrt{\beta^2 \delta_s^2 + \delta_n^2} \dots\dots\dots (3.22)$$

sendo β um fator de peso que leva em consideração o escorregamento entre as bordas da fissura, variando de 0 a 1.

Assume-se que a energia potencial liberada ϕ depende de δ , a lei coesiva é escrita tal qual:

$$\{t\} = \frac{t}{\delta} (\beta^2 \{\delta_s\} + \delta_n \{n\}) \dots\dots\dots (3.23)$$

sendo $\{n\}$ o vetor normal à fissura e $\{t\}$ o vetor de tensão coesiva ao longo da fissura. As relações propostas são descritas a seguir:

$$t = \sigma_c e^{-\delta/\delta_c} \dots\dots\dots \text{se } \delta = \delta_{max} \text{ e } \dot{\delta} \geq 0 \dots\dots\dots (3.24)$$

$$t = \frac{t_{max}}{\delta_{max}} \delta \dots\dots\dots \text{se } \delta < \delta_{max} \text{ e } \dot{\delta} < 0 \dots\dots\dots (3.25)$$

sendo e o exponencial (Número de Euler), σ_c a máxima tensão de tração normal coesiva, $\dot{\delta}$ velocidade de abertura e δ_c a abertura crítica.

Antes do aparecimento da fratura, existe uma rigidez entre os elementos finitos retangulares, chamada de fator de penalidade (λ_p), esse fator é um parâmetro de valor escalar. Altos valores são adotados a fim de obter uma aproximação precisa, tal procedimento garante que a possível fratura permaneça fechada até atingir o critério de separação e, ao mesmo tempo, garante a admissibilidade física do processo.

De modo geral esta estratégia cria rigidez nos nós dos pares com o contato de elementos finitos coesivos, a fim de não permitir a penetração das superfícies de fissura. No regime de abertura, este fator de penalidade efetivamente substitui a porção rígida inicial da lei coesiva por

uma resposta linear rígida. Para detectar o fenômeno de contato coesivo, é adotado o conceito das diferenças entre os pontos de Gauss do elemento finito de contato e fratura coesiva.

$$t = \lambda_p \delta \dots \dots \dots \text{se } \lambda_p \delta < \sigma_c \dots \dots \dots (3.26)$$

Para cada relação proposta, têm-se um valor de rigidez tangente, das Eq. 3.24, 3.25 e 3.26 têm se os seguintes valores, respectivamente:

$$\frac{\partial t}{\partial \delta} = \left(-\frac{\sigma_c}{\delta_c} e^{-\frac{\delta}{\delta_c}} \right) \dots \dots \dots (3.27)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \delta} = \frac{t_{max}}{\delta_{max}} \dots \dots \dots (3.28)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \delta} = \lambda_p \dots \dots \dots (3.29)$$

As forças internas coesivas (F_{cf}^{int}) e a rigidez tangente (K_{cf}) são calculadas por:

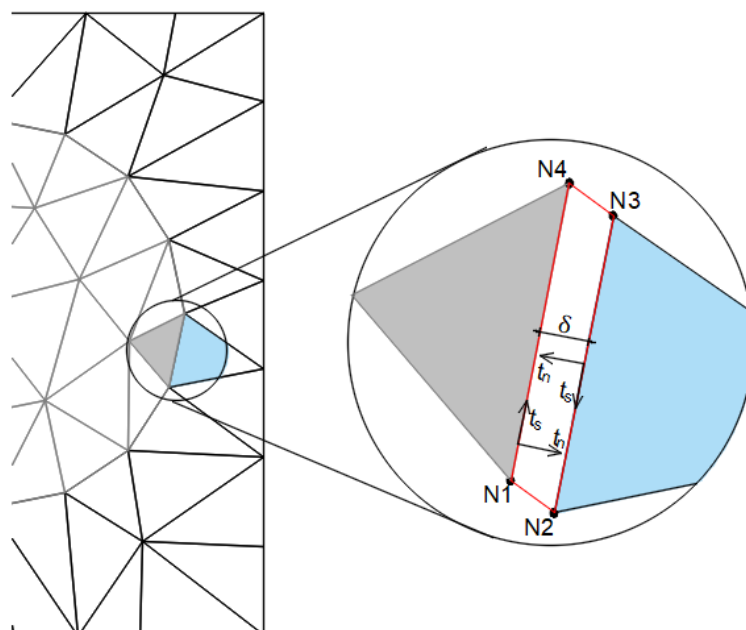
$$\{F_{cf}^{int}\} = \int_{\Gamma_{cf}} N_e^T \{t\} d\Gamma \dots \dots \dots (3.30)$$

$$\{K_{cf}\} = \frac{d\{F_{cf}^{int}\}}{d\{u_e\}} \dots \dots \dots (3.31)$$

sendo N_e a matriz de forma do elemento coesivo e o termo $\frac{\partial \{t\}}{\partial \{\delta\}}$ depende do estado da fratura (fechada, carregamento, descarregamento).

Duas superfícies coincidentes na configuração indeformada do EVR são consideradas. O elemento finito de contato e fratura coesiva é definido como um elemento de quatro nós sendo sua geometria compatível com duas células triangulares usadas para modelar a matriz e a inclusão, conforme figura abaixo. A formulação mais detalhada pode ser encontrada em PITUBA & SOUZA NETO (2015) e PITUBA et al. (2016).

Figura 3.2 – Elemento finito de fratura e contato definido sobre a interface matriz/agregado



Fonte: Elaboração própria (2025)

O elemento finito de contato/fratura é retangular e tem 4 nós (N1, N2, N3 e N4 representados na Figura 3.2)). Esse elemento é colocado coincidente com o elemento de interface da malha do MEC (ver mais detalhes no capítulo 4, Figura 4.4)). Assim, os nós desses elementos são os mesmos dos nós de interface da malha do MEC, mas os modelos de contato e fratura são monitorados apenas nesses elementos finitos retangulares. No presente trabalho, o descolamento de fases implica que o campo de deslocamento na interface matriz/inclusão não é mais contínuo. Para representar essa descontinuidade, que é feita via MEF, os nós da malha do MEC sobre as interfaces são duplicados, mantendo-se inicialmente coincidentes, mas permitindo deslocamentos independentes após o descolamento. Para o exemplo da Figura 3.2), antes da abertura de fratura os nós N1 e N2 são coincidentes e os nós N3 e N4 também são coincidentes.

4 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA O EVR

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é uma técnica numérica que vem ganhando destaque há mais de quatro décadas, tanto em pesquisas teóricas quanto em aplicações práticas de engenharia. BREBBIA & DOMINGUEZ (1994) apresentam os conceitos básicos do MEC, explorando aplicações para problemas potenciais, de elasticidade e de mecânica da fratura, além de analisar o uso combinado de MEC/MEF. Entre diversos pesquisadores que contribuíram para a evolução do método, tem-se, por exemplo, os trabalhos de GRAY & PAULINO (1997) que fez a utilização MEC em problemas elasto-plástico com fraturas. GAO & DAVIES (2002) que produziram avanços em técnicas de integração em elasticidade não-linear. ALIABADI (2002), que ampliou a aplicação do MEC para elasticidade, placas e cascas, mecânica do contato, mecânica da fratura. FERNANDES (2003) estudou a não-linearidade em pavimentos de edifícios utilizando o MEC. PETTRES et al. (2015) desenvolveram uma formulação para o estudo da difusão de calor em meios isotrópicos e homogêneos.

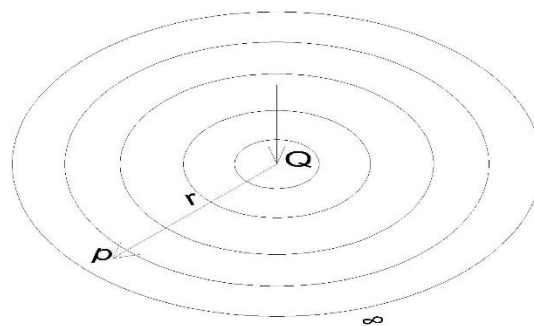
O MEC resolve problemas discretizando apenas o contorno da estrutura em elementos e nós, reduzindo a dimensão do problema e permitindo uma modelagem mais eficiente. Em problemas envolvendo não-linearidade física surgem integrais de domínio envolvendo as forças inelásticas. No caso do EVR, também aparecem integrais de interface e/ou de domínio envolvendo os deslocamentos. Nesses casos se faz necessário também discretizar as interfaces em elementos e o domínio em células.

No contexto do Elemento de Volume Representativo (EVR), que modela a microestrutura heterogênea do concreto, o MEC oferece um poderoso recurso para capturar a interação entre as diferentes fases do material, como a matriz cimentícia, inclusões e vazios. Este trabalho adota uma abordagem bidimensional com o Estado Plano de Tensões, onde as inclusões e vazios são representados no interior da matriz, enquanto a não-linearidade física é limitada à matriz cimentícia e aos elementos finitos de contato e fratura. Essa abordagem permite um estudo detalhado do comportamento mecânico do concreto reciclado, conectando as propriedades microestruturais com a resposta macroscópica do material.

O algoritmo básico do MEC pode ser descrito nos seguintes passos: 01 – definição do problema físico e suas variáveis, identificando as condições de contorno e as propriedades físicas do material; 02 – dedução da equação integral do deslocamento para um ponto interno, utilizando o Teorema de Reciprocidade de Betti; 03 – dedução da equação integral para pontos sobre o contorno, resolvendo problemas de singularidades, que são as equações usadas na montagem do sistema; 04 – transformação das equações integrais em equações algébricas aproximadas; 05 – montagem do sistema de equações, e solução do mesmo, organizando as equações algébricas e isolando as variáveis desconhecidas.

A formulação do MEC baseia-se na solução fundamental da equação governante do problema, que é derivada ao considerar uma carga concentrada aplicada em um ponto específico de um meio elástico infinito. Essa solução, conhecida como Identidade de Somigliana, serve como ponto de partida para deduzir as equações integrais que descrevem os deslocamentos e forças no domínio. A Identidade de Somigliana é a base para a formulação do MEC, permitindo calcular as variáveis de interesse em qualquer ponto da estrutura, com precisão e eficiência. A representação conceitual dessa solução fundamental, conforme ilustrado, evidencia sua importância no desenvolvimento das equações integrais e no avanço das aplicações práticas do método.

Figura 4.1 – Solução Fundamental



Fonte: Adaptado de Fontran (1999)

4.1 EQUAÇÕES BÁSICAS PARA O PROBLEMA NÃO-LINEAR

A não-linearidade física é quando o carregamento gera tensões que ultrapassam o limite elástico do material. Existem diversos modelos constitutivos que representam a plasticidade, alguns deles são von Mises, Tresca, Mohr-Coulomb, Drucker-Prague, Johnson-Cook. No presente trabalho, se faz a análise apenas da micro-estrutura do concreto, onde adota-se um modelo constitutivo para cada fase do EVR. Os agregados são considerados elásticos e será adotado o modelo de Mohr-Coulomb para representar o comportamento mecânico da argamassa (matriz do EVR). Além disso será considerado abertura de fraturas coesivas ao redor dos agregados grandes e médios para representar a fissuração que ocorre na ZTI (Zona de Transição Interfacial). O tensor constitutivo e as tensões no concreto, referentes a uma deformação imposta, são dados pelo tensor constitutivo homogeneizado e pelo tensor das tensões homogeneizado do EVR, conforme mostrado anteriormente.

Nas análises que consideram a não linearidade física, a deformação total é composta pela soma da deformação elástica-linear ε_{ij}^e (que o obedece a lei de Hooke) e a deformação residual ε_{ij}^0 (que corresponde à deformação inelástica que surge quando a tensão ultrapassa o

limite elástico do material). Para capturar a evolução do comportamento mecânico ao longo do tempo, as equações são expressas em termos de taxas, representando a variação das grandezas (como tensões e deformações) em relação ao tempo ou ao incremento de carregamento. Assim, a deformação total, considerando a não linearidade física, pode ser expressa pela seguinte equação:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dots\dots\dots i, j = 1, 2 \dots\dots\dots (4.1)$$

sendo $\varepsilon_{ij}^0 = \varepsilon_{ij}^p$, no caso de plasticidade, onde ε_{ij}^p é a deformação plástica.

No entanto, como esse trabalho considera a abertura de fratura coesiva ao redor de alguns agregados, tem-se que a deformação total é dividida da seguinte maneira:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{cf} \dots\dots\dots (4.2)$$

sendo $\bar{\varepsilon}_{ij}$ a deformação contínua e ε_{ij}^{cf} a deformação referente à fratura.

Fazendo a Eq. (4.1) igual a Eq. (4.2), temos:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{cf} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dots\dots\dots (4.3)$$

Quando o material ultrapassa seu limite elástico, a tensão σ_{ij} é relacionada à deformação total ε_{ij} por meio do tensor constitutivo definido de acordo com o modelo constitutivo definido para governar o comportamento mecânico do material (tensor elasto-plástico C_{ijkl}^{ep} , no caso de modelos de plasticidade, pois $\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{ep} \varepsilon_{kl}$). No entanto, aplicando a Lei de Hooke à parcela elástica da deformação, a tensão σ_{ij} também pode ser definida como:

$$\sigma_{ij} = 2G\dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{2G\nu'}{1-2\nu'} \dot{\varepsilon}_{kk}^e \delta_{ij} \dots\dots\dots i, j, k = 1, 2 \dots\dots\dots (4.4)$$

sendo G o módulo de elasticidade transversal, δ_{ij} o delta de Kroncher e ν o coeficiente de Poisson e $\nu' = \frac{\nu}{1+\nu}$, pois se trata de estado plano de tensão; t é a espessura do macro-contínuo.

Por outro lado, as tensões elásticas (ou de tentativa), podem ser determinadas pela Lei de Hooke a partir das deformações totais, conforme descrito na equação:

$$\dot{\sigma}_{ij}^t = 2G\dot{\epsilon}_{ij} + \frac{2G\nu'}{1-2\nu'}\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} \dots\dots\dots(4.5)$$

Seguindo o mesmo princípio, ao aplicar a Lei de Hooke à equação (4.3), chega-se à relação que considera a decomposição das tensões elásticas em suas parcelas associadas ao comportamento contínuo e à fratura coesiva:

$$\dot{\sigma}_{ij}^t + \dot{\sigma}_{ij}^{cf} = \dot{\sigma}_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}^P \dots\dots\dots i, j = 1, 2 \dots\dots\dots(4.6)$$

Após aplicar as tensões $\dot{\sigma}_{ij}^t$ ao critério de plasticidade, obtém-se o tensor de tensão σ_{ij} . As forças de membrana também podem ser expressas pela Lei de Hooke:

$$\dot{N}_{ij} = \frac{\bar{E}}{1-\nu^2} [\nu\delta_{ij}\dot{\epsilon}_{kk}^e + (1-\nu)\dot{\epsilon}_{ij}^e] \dots\dots\dots i, j, k = 1, 2 \dots\dots\dots(4.7)$$

$$\bar{N}_{ij} = \frac{\bar{E}}{1-\nu^2} [\nu\delta_{ij}\dot{\epsilon}_{kk} + (1-\nu)\dot{\epsilon}_{ij}] \dots\dots\dots(4.8)$$

$$N_{ij}^{cf} = \frac{\bar{E}}{1-\nu^2} [\nu\delta_{ij}\dot{\epsilon}_{kk}^{cf} + (1-\nu)\dot{\epsilon}_{ij}^{cf}] \dots\dots\dots(4.9)$$

onde $\bar{E} = Et$, t é a espessura da chapa. Pode-se então, escrever a força de membrana devido às deformações contínuas da seguinte forma:

$$\dot{\bar{N}}_{ij} = \dot{N}_{ij} + \dot{N}_{ij}^p - \dot{N}_{ij}^{cf} \dots\dots\dots(4.10)$$

Ou

$$\dot{\bar{N}}_{ij} = \dot{N}_{ij} + \dot{N}_{ij}^0 \dots\dots\dots(4.11)$$

sendo \bar{N}_{ij} as forças associadas às deformações contínuas, N_{ij}^{cf} as forças associadas à deformação de fratura e N_{ij}^0 as forças inelásticas, que são compostas por duas parcelas: as forças plásticas e aquelas devido à fratura ou contato:

$$\dot{N}_{ij}^0 = \dot{N}_{ij}^p - \dot{N}_{ij}^{cf} \dots\dots\dots(4.12)$$

Da teoria da elasticidade, temos o equilíbrio de tensões do cubo infinitesimal que resulta na seguinte equação, para o caso tridimensional:

$$\dot{\sigma}_{j,i}(p) + b_i(p) = 0 \dots\dots\dots i, j = 1,2,3 \dots\dots\dots(4.13)$$

Multiplicando pela espessura, no caso de estado plano de tensão, pode-se reescrever a (Eq. 21) da seguinte maneira:

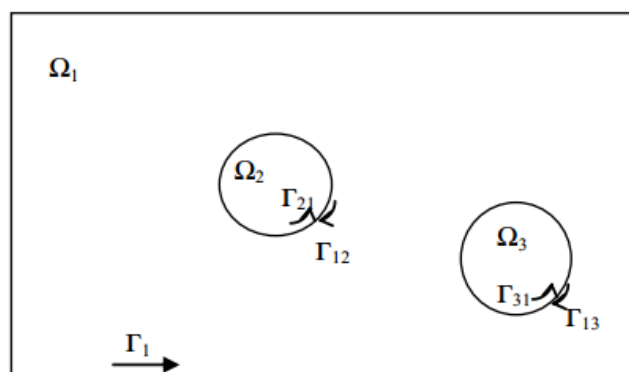
$$\dot{N}_{ij,j}(p) + \bar{b}_i(p) = 0 \dots\dots\dots i, j = 1,2 \dots\dots\dots(4.14)$$

sendo $\bar{b}_i(p) = b_i t$ as forças de massa ou de corpo, que no caso do EVR é nula.

4.2 EQUAÇÃO INTEGRAL DO DESLOCAMENTO NO EVR PARA UM PONTO INTERNO

A fim de simplificar a dedução da equação, será considerado um EVR apenas com duas inclusões, conforme Figura 4.2:

Figura 4.2 – Microestrutura heterogênea com duas inclusões



Fonte: Fernandes (2016)

Para o EVR, o Teorema de Betti, é definido da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega \dots\dots\dots i, j, k = 1,2 \dots\dots\dots(4.15)$$

sendo os termos com *, referentes ao problema fundamental, k , a direção da carga fundamental e \bar{N}_{ij} , o esforço normal associado às deformações contínuas.

Considerando as sub-regiões da Figura 4.2) e a Eq. (4.15), o primeiro termo pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega = \int_{\Omega_1} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega_2 + \int_{\Omega_3} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega_3 \dots\dots\dots i, j, k = 1, 2 \dots\dots\dots (4.16)$$

sendo a solução fundamental ε_{kij}^* função de \bar{E} da sub-região onde está o ponto de colocação. Considerando Eq. (4.8), para uma sub-região Ω_S , a equação de $N_{ij}(\Omega_S)$, para estado plano de tensão, é dada por:

$$\bar{N}_{ij}(\Omega_S) = \frac{\bar{E}_S}{1-\nu_S^2} [\nu_S \delta_{ij} \bar{\varepsilon}_{kk} + (1 - \nu_S) \bar{\varepsilon}_{ij}] \dots\dots\dots (4.17)$$

Considerando Eq. (4.17), para uma sub-região Ω_S qualquer, tem:

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega_S = \int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* \frac{\bar{E}_S}{1-\nu_S^2} [\nu_S \delta_{ij} \varepsilon_{ll} + (1 - \nu_S) \varepsilon_{ij}] d\Omega_S \dots\dots\dots (4.18)$$

Multiplicando a Eq. (4.18) por $\frac{\bar{E}}{1-\nu^2} \frac{1-\nu^2}{\bar{E}} \frac{\nu}{\nu}$, o que não alterará o valor da mesma e reescrevendo a equação, têm-se:

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega_S = \frac{\bar{E}_S}{1-\nu_S^2} \frac{1-\nu^2}{\bar{E}} \frac{\nu_S}{\nu} \int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} \frac{\bar{E}}{1-\nu^2} \left[\nu \delta_{ij} \varepsilon_{kl}^* + \left(-\nu + \frac{\nu}{\nu_S} \right) \varepsilon_{kij}^* \right] d\Omega_S \dots\dots\dots (4.19)$$

Fazendo $\bar{\bar{E}}_S = \frac{\bar{E}_S}{1-\nu_S^2}$, a Eq. (4.19) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega_S = \frac{\bar{\bar{E}}_S \nu_S}{\bar{E}} \frac{\nu}{\nu} \left[\int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega + \bar{\bar{E}} \left(\frac{\nu}{\nu_S} - 1 \right) \int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega_S \right] \dots\dots\dots (4.20)$$

Ou ainda:

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega_S = \frac{\bar{E}_S \nu_S}{\bar{E}} \left[\int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega \right] + \bar{E}_S \left(1 - \frac{\nu_S}{\nu} \right) \int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega_S \dots\dots\dots (4.21)$$

A Eq. (4.21) representa o Teorema de Betti para o domínio em sub-regiões. Quando o ponto de colocação pertence à sub-região que está integrando, os termos \bar{E}_S e ν_S ficam igual a \bar{E} e ν , respectivamente. Assim, no caso de se ter apenas um domínio, a Eq. (4.21) resulta na equação conhecida do Teorema de Betti:

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega_S = \int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega \dots\dots\dots i, j, k = 1, 2 \dots\dots\dots (4.22)$$

Generalizando para uma placa composta de N_S sub-regiões, tem-se:

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* \bar{N}_{ij} d\Omega_S = \sum_{S=1}^{N_S} \frac{\bar{E}_S \nu_S}{\bar{E}} \left[\int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega \right] + \sum_{S=1}^{N_S} \bar{E}_S \left(1 - \frac{\nu_S}{\nu} \right) \left[\int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega_S \right] \quad (4.23)$$

Sabendo que $\bar{N}_{ij} = N_{ij} + N_{ij}^0$ (Eq. (4.11)) pode-se escrever a Eq. (4.23) da seguinte forma:

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* (N_{ij} + N_{ij}^0) d\Omega_S = \sum_{S=1}^{N_S} \frac{\bar{E}_S \nu_S}{\bar{E}} \left[\int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega \right] + \sum_{S=1}^{N_S} \bar{E}_S \left(1 - \frac{\nu_S}{\nu} \right) \left[\int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega_S \right] \dots\dots\dots (4.24)$$

A Eq. (4.24) será integrada por partes, para se obter a equação integral dos deslocamentos no plano do EVR. Considere inicialmente o termo I_1 , definido como, para duas subregiões:

$$I_1 = \sum_{S=1}^2 \bar{E}_S \left(1 - \frac{\nu_S}{\nu} \right) \int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega_S \dots\dots\dots (4.25)$$

Integrando a Eq. (4.25) por partes em relação à x_j e aplicando o Teorema da divergência, tem-se:

$$I_1 = \sum_{S=1}^2 \bar{\bar{E}}_S \left(1 - \frac{\nu_S}{\nu}\right) \left[\int_{\Gamma} u_i n_j \varepsilon_{kij}^* d\Gamma - \int_{\Omega} u_i \varepsilon_{kij,j}^* d\Omega \right] \dots\dots\dots (4.26)$$

Fazendo a expansão do índice $S = 1,2$ e reescrevendo a equação:

$$I_1 = \bar{\bar{E}}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \left[\int_{\Gamma_1 + \Gamma_{12}} u_i n_j \varepsilon_{kij}^* d\Gamma - \int_{\Omega_1} u_i \varepsilon_{kij,j}^* d\Omega \right] +$$

$$+ \bar{\bar{E}}_2 \left(1 - \frac{\nu_2}{\nu}\right) \left[\int_{\Gamma_{21}} u_i n_j \varepsilon_{kij}^* d\Gamma - \int_{\Omega_2} u_i \varepsilon_{kij,j}^* d\Omega \right] \dots\dots\dots (4.27)$$

Mas temos que $\int_{\Gamma_{12}} d\Gamma_{12} = \int_{\Gamma_{21}} d\Gamma_{21}$, $u_i(\Gamma_{12}) = u_i(\Gamma_{21})$ e $n_j(\Gamma_{12}) = -n_j(\Gamma_{21})$, pode-se então, reescrever a equação da seguinte forma:

$$I_1 = \bar{\bar{E}}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \left[\int_{\Gamma_1} u_i \varepsilon_{ki}^* d\Gamma - \int_{\Omega_1} u_i \varepsilon_{kij,j}^* d\Omega \right] - \bar{\bar{E}}_2 \left(1 - \frac{\nu_2}{\nu}\right) \left[\int_{\Omega_2} u_i \varepsilon_{kij,j}^* d\Omega \right] +$$

$$+ \left[\bar{\bar{E}}_2 \left(1 - \frac{\nu_2}{\nu}\right) - \bar{\bar{E}}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \right] \int_{\Gamma_{21}} u_i \varepsilon_{ki}^* d\Gamma \dots\dots\dots i, j, k = 1,2 \dots\dots\dots (4.28)$$

Generalizando a Eq. (4.28) para N_S sub-regiões e N_{inc} inclusões:

$$I_1 = \bar{\bar{E}}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \left[\int_{\Gamma_1} u_i \varepsilon_{ki}^* d\Gamma \right] + \sum_{j=1}^{N_{inc}} \left[\bar{\bar{E}}_j \left(1 - \frac{\nu_j}{\nu}\right) - \bar{\bar{E}}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \right] \int_{\Gamma_{j1}} u_i \varepsilon_{ki}^* d\Gamma +$$

$$- \sum_{S=1}^{N_S} \bar{\bar{E}}_S \left(1 - \frac{\nu_S}{\nu}\right) \int_{\Omega_S} u_i \varepsilon_{kij,j}^* d\Omega_S \dots\dots\dots (4.29)$$

Na Eq. (4.24) tem-se o seguinte termo:

$$I_2 = \frac{\bar{\bar{E}}_S \nu_S}{\bar{E}} \frac{1}{\nu} \left[\int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega \right] \dots\dots\dots (4.30)$$

Fazendo a integração por partes da Eq. (4.30) e generalizando para N_{inc} inclusões, o termo I_2 resulta em:

$$I_2 = \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} \int_{\Gamma_1} u_i p_{ki}^* d\Gamma + \sum_{j=1}^{N_{inc}} \left(\frac{\bar{E}_j v_j}{\bar{E} v} - \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} \right) \int_{\Gamma_{j1}} u_1 p_{ki}^* d\Gamma_{j1} +$$

$$- \sum_{S=1}^{N_S} \frac{\bar{E}_S v_S}{\bar{E} v} \int_{\Omega_S} u_i N_{kij,j}^* d\Omega \dots\dots\dots (4.31)$$

Seja agora o termo final de I_2 (Eq. 4.31):

$$I_4 = \sum_{S=1}^{N_S} \frac{\bar{E}_S v_S}{\bar{E} v} \int_{\Omega_S} u_i N_{kij,j}^* d\Omega \dots\dots\dots i,j,k=1,2 \dots\dots\dots (4.32)$$

Considerando que:

$$N_{kij,j}^* + b_i^* = 0 \rightarrow N_{kij,j}^* = -b_i^* \dots\dots\dots (4.33)$$

onde o termo $b_i^* = \delta(q,p)\delta_{ki}$ é a carga fundamental, e $\delta(q,p)$ a função delta de Dirac. Considerando as propriedades da função delta de Dirac, dadas por:

$$\int_{\Omega_\infty} \phi_i(p)\delta(q,p)\delta_{ik}d\Omega_\infty = \begin{cases} 0 & \text{se } p \neq q \\ \phi_k(q) & \text{se } p = q \end{cases} \dots\dots\dots (4.34)$$

sendo q o ponto de colocação, p o ponto campo e $\phi(p)$ uma função contínua qualquer, tem-se que a Eq. (4.33) resulta em:

$$I_4 = -u_k(q) \dots\dots\dots k = 1,2 \dots\dots\dots (4.35)$$

Seja agora a integração por partes do seguinte termo da Eq. (4.24):

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* (N_{ij} + N_{ij}^0) d\Omega_S \dots\dots\dots (4.36)$$

Definindo:

$$I_3 = \int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega_S \dots\dots\dots (4.37)$$

E fazendo a integração por partes do termo I_3 , para os subdomínios Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 , surgem integrais sobre o contorno Γ e sobre as interfaces matriz/agregado (Γ_{12} e Γ_{13}) e agregado/matriz (Γ_{21} e Γ_{31}). Mas considerando que para um mesmo ponto da interface, a força referente à matriz tem o mesmo valor com sinal trocado da respectiva força referente ao subdomínio da inclusão, as integrais de interface se cancelam e I_3 resulta em:

$$I_3 = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \dots \dots \dots i, j, k = 1, 2 \dots \dots \dots (4.38)$$

Para o caso desse trabalho, que é a modelagem da micro-estrutura do concreto impondo uma macro-deformação, a força b_i é nula. Substituindo as Eq. (4.29), (4.31), (4.35) e ((4.38) na Eq. (4.24), chegamos à equação de Somigliana para um domínio bidimensional dividido em sub-regiões considerando N_S sub-regiões, N_{inc} inclusões e N_{vazios} de vazios:

$$\begin{aligned} u_k(q) = & \int_{\Gamma_1} [u_{ki}^*(q, P)p_i(P)] - \left[\frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} u_i(P)p_{ki}^*(q, P) \right] - \left[\bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) u_i(P)\varepsilon_{ki}^*(q, P) \right] d\Gamma + \\ & - \sum_{j=1}^{N_{vazios}} \left\{ \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} \left[\int_{\Gamma_1} u_i(P)p_{ki}^*(q, P) d\Gamma \right] - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) \left[\int_{\Gamma_{j1}} u_i(P)\varepsilon_{ki}^*(q, P) d\Gamma_{j1} \right] \right\} + \\ & - \sum_{j=1}^{N_{inc}} \int_{\Gamma_{j1}} \left\{ \frac{\bar{E}_j v_j - \bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} [u_i(P)p_{ki}^*(q, P)] - \bar{E}_j \left(1 - \frac{v_j}{v} \right) + \right. \\ & \left. - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) [u_i(P)\varepsilon_{ki}^*(q, P)] \right\} d\Gamma_{j1} + \\ & + \sum_{S=1}^{N_S} \int_{\Omega_S} \bar{E}_S \left(1 - \frac{v_S}{v} \right) [u_i(p)\varepsilon_{kij,j}^*(q, p)] + \varepsilon_{kij}^*(q, p) N_{ij}^0(p) d\Omega_S \end{aligned} \dots \dots \dots (4.39)$$

onde u_i e p_i , são os deslocamentos e forças no plano do domínio, \bar{E} e v são valores referentes à sub-região onde está o ponto de colocação, N_{ij}^0 os esforços iniciais e $\bar{E}_S = \frac{\bar{E}_S}{(1-v_S^2)}$.

Com o tratamento de singularidades que aparecem nas integrais, é possível transformar a Eq. ((4.39), escrita para um ponto interno, na equação integral do deslocamento para um ponto sobre o contorno $u_k(Q)$.

Observa-se na Eq. (4.39) a definição de duas integrais de domínio: uma envolvendo as forças dissipativas e outra que existe apenas no caso de as sub-regiões terem coeficiente de

Poisson diferentes. Como comentado no capítulo 2, para resolver o EVR, impõe-se deslocamentos lineares no contorno, obtidos a partir da macro-deformação imposta. A partir dessa condição de contorno, obtém-se a solução elástica em deslocamentos nos pontos internos e forças de superfície no contorno, calculada considerando a forma algébrica da Eq. ((4.39). Porém, após a solução do problema de equilíbrio do EVR, o campo de flutuações de deslocamentos é conhecido, o que altera os deslocamentos no contorno. Portanto os deslocamentos impostos no contorno devem ser recalculados para levar em conta as flutuações de deslocamentos no contorno e a resposta elástica em deslocamentos nos pontos internos e forças de superfície no contorno também deve ser atualizada. As forças de superfície finais no contorno são obtidas somando-se as forças elásticas à parcela das forças devido às forças dissipativas. A partir dessas forças de superfície finais no contorno, se calculam as componentes do tensor de tensão homogeneizado, como detalhado no capítulo 2.

4.3 DEMAIS EQUAÇÕES INTEGRAIS DO EVR

4.3.1 Equação integral dos deslocamentos para pontos sobre o contorno ou interface da microestrutura

Quando o ponto de colocação está sobre o contorno ou interface e pertence ao elemento que está sendo integrado, aparecem problemas de singularidade. Essas singularidades podem ser fraca ($\ln(r)$), forte ($\frac{1}{r}$) e hipersingular ($\frac{1}{r^2}$). Isso se dá devido à coincidência geométrica entre o ponto fonte Q e o ponto campo P . Para contornar essas indeterminações adota-se um procedimento algébrico que regulariza as integrais singulares, resultando em valores ou expressões finitas, denominados termos livres. É importante esclarecer que as integrais que contêm as singularidades são resolvidas de forma analíticas, dada a natureza singular do núcleo das equações fundamentais.

No contexto do EVR, a discretização inclui elementos ao longo do contorno externo e nas interfaces entre matriz e inclusões/vazios. Na construção do sistema de equações, adotam-se pontos de colocação distribuídos no contorno e interfaces. E quando os coeficientes de Poisson são diferentes entre as sub-regiões é necessário também definir pontos de colocação nos nós de célula, ou seja, em pontos internos. Este tópico aborda a metodologia para o cálculo dos termos livres que emergem na formulação integral aplicada a microestruturas heterogêneas.

De maneira geral, a equação integral de deslocamento quando o ponto coincide com contorno, seja ele externo ou de interface, resulta na Eq. ((4.39) acrescida do termo livre C_{ki} :

$$C_{ki}u_i(Q) = \int_{\Gamma_1} [u_{ki}^*(q, P)p_i(P)] - \left[\frac{\bar{E}_1\nu_1}{\bar{E}\nu} u_i(P)p_{ki}^*(q, P) \right] - \left[\bar{E}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) u_i(P)\varepsilon_{ki}^*(q, P) \right] d\Gamma$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=1}^{N_{\text{vazios}}} \left\{ \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} \left[\int_{\Gamma_1} u_i(P) p_{ki}^*(\mathbf{q}, P) d\Gamma \right] - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) \left[\int_{\Gamma_{j1}} u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(\mathbf{q}, P) d\Gamma_{j1} \right] \right\} + \\
 & \quad - \sum_{j=1}^{N_{\text{inc}}} \int_{\Gamma_{j1}} \left\{ \frac{\bar{E}_j v_j - \bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} [u_i(P) p_{ki}^*(\mathbf{q}, P)] - \bar{E}_j \left(1 - \frac{v_j}{v} \right) + + \right. \\
 & \quad \left. - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) [u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(\mathbf{q}, P)] \right\} d\Gamma_{j1} + \\
 & \quad + \sum_{S=1}^{N_S} \int_{\Omega_S} \bar{E}_S \left(1 - \frac{v_S}{v} \right) [u_i(p) \varepsilon_{kij,j}^*(\mathbf{q}, p)] + \varepsilon_{kij}^*(\mathbf{q}, p) N_{ij}^0(p) d\Omega_S \\
 & \dots\dots\dots i, j, k = 1, 2 \dots\dots\dots (4.40)
 \end{aligned}$$

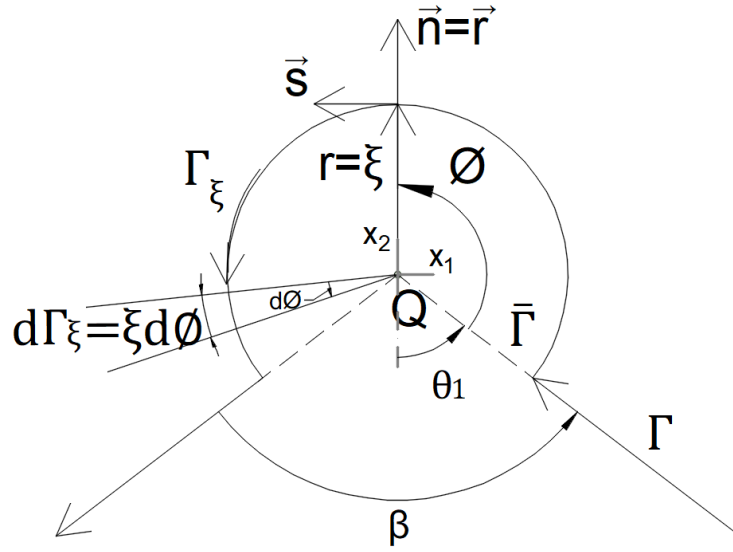
sendo v_1, \bar{E}_1 e Γ_1 as propriedades e contorno externo da matriz; Γ_{j1} interface matriz/inclusão j ; Γ_{1j} interface matriz/vazio e C_{ki} o termo livre.

No MEC, tratamentos específicos são necessários para resolver singularidades nas integrais, conforme detalhado por OHLAND (2017) e CROZARIOL (2017). Note que na dedução do termo livre quando o ponto de colocação está na interface, será considerado que o ponto pertence à matriz. Se fosse considerado que ele pertence à inclusão, o termo livre resultante teria sinal invertido daquele apresentado aqui.

No presente trabalho, adota-se a estratégia de nós duplos para vértices localizados no contorno externo do domínio, para representar a descontinuidade das forças de superfície. Nesse caso, o ponto de colocação é deslocado para dentro do elemento. Nas interfaces os pontos de colocação são coincidentes com as extremidades dos elementos e, portanto, nesse caso há angulosidade no nó. Se a interface for perfeitamente aderida, esse nó é simples, mas se o descolamento de fase estiver sendo modelado na interface, esse nó deve ser duplo para possibilitar abrir a fratura. Nos nós de interface há somente deslocamentos como incógnitas. Dessa forma, a necessidade de cálculo dos termos livres se restringe aos seguintes casos: quando o ponto de colocação Q está sobre interface, matriz/inclusão ou matriz/vazio, sendo coincidente com vértice ou quando está sobre o contorno externo sendo sempre em regiões regulares do contorno.

O tratamento das singularidades é realizado conforme Figura 4.3), criando-se um contorno Γ_ξ de raio ξ infinitesimal centrado em Q ; remove do contorno o trecho $\bar{\Gamma}$ que contém a singularidade; reescreve a equação do contorno, ficando com a expressão $\Gamma_{j1} - \bar{\Gamma} + \Gamma_\xi$; faz os limites do raio ξ e do contorno $\bar{\Gamma}$ tenderem a zero, tornando o ponto Q sobre o contorno.

Figura 4.3 – Tratamento de singularidade



Fonte: Adaptado de Fernandes (2005)

Da Figura 4.3) têm-se as seguintes relações:

$$r = \xi \dots\dots\dots (4.41)$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = 1 \text{ e } \frac{\partial r}{\partial s} = 0 \dots\dots\dots (4.42)$$

$$d\Gamma_\xi(Q) = \xi d\phi \dots\dots\dots (4.43)$$

Aplicando o procedimento descrito acima à Eq. ((4.39), para o caso de o ponto Q está sobre a interface e pertencente à matriz, tem-se:

$$\begin{aligned}
 u_k(q) = & \int_{\Gamma_1} [u_{ki}^*(q, P)p_i(P)] - \left[\frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E} \nu} u_i(P)p_{ki}^*(q, P) \right] - \left[\bar{E}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) u_i(P)\varepsilon_{ki}^*(q, P) \right] d\Gamma \\
 & - \sum_{j=1}^{N_{vazios}} \left\{ \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E} \nu} \left[\int_{\Gamma_1} u_i(P)p_{ki}^*(q, P)d\Gamma \right] - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \left[\int_{\Gamma_{j1}} u_i(P)\varepsilon_{ki}^*(q, P)d\Gamma_{j1} \right] \right\} + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \frac{\bar{E}_j \nu_j - \bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E} \nu} \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{j1} - \bar{\Gamma}} u_i(P)p_{ki}^*(q, P)d\Gamma_{j1} + \frac{\bar{E}_j \nu_j - \bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E} \nu} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P)p_{ki}^*(q, P)d\Gamma_\xi \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \bar{E}_j \left(1 - \frac{\nu_j}{\nu}\right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{j1} - \bar{\Gamma}} u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(q, P) d\Gamma_{j1} + \right. \\
 & \quad \left. + \left[\bar{E}_j \left(1 - \frac{\nu_j}{\nu}\right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \right] \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(q, P) d\Gamma_\xi \right\} \\
 & \quad + \sum_{S=1}^{N_S} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega_S + \Omega_\xi} \bar{E}_S \left(1 - \frac{\nu_S}{\nu}\right) [u_i(p) \varepsilon_{kij,j}^*(q, p)] + \varepsilon_{kij}^*(q, p) N_{ij}^0(p) d\Omega_S \\
 & \dots\dots\dots i, j, k = 1, 2 \dots\dots\dots (4.44)
 \end{aligned}$$

sendo Ω_ξ o domínio infinitesimal de contorno Γ_ξ .

Resolvendo as integrais sobre o contorno da interface $\Gamma_{1j} - \bar{\Gamma}$ da Eq. (4.44) analiticamente, elas resultam em seus valores principais, sendo interpretadas como valor principal de Cauchy, ou seja, os termos de valor infinito se cancelam, resultando em um valor finito, tem-se:

$$\lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{j1} - \bar{\Gamma}} u_i(P) p_{ki}^*(q, P) d\Gamma_{j1} = \int_{\Gamma_{j1}} u_i(P) p_{ki}^*(q, P) d\Gamma_{j1} \dots\dots\dots (4.45)$$

$$\lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{j1} - \bar{\Gamma}} u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(q, P) d\Gamma_{j1} = \int_{\Gamma_{j1}} u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(q, P) d\Gamma_{j1} \dots\dots\dots (4.46)$$

Considerando a mudança de coordenada $d\Omega = r dr d\theta$ para as integrais envolvendo domínio e fazendo o limite de ξ tender a zero, conclui-se que:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega_\xi} \varepsilon_{kij}^*(q, p) N_{ij}^0(p) d\Omega_S = 0 \dots\dots\dots i, j, k = 1, 2 \dots\dots\dots (4.47)$$

Nota-se que quando o ponto de colocação pertencer à célula a ser integrada $\nu = \nu_S$, fazendo com que a integral de domínio abaixo não precise ser calculada.

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega_S + \Omega_\xi} u_i(p) \varepsilon_{kij,j}^*(q, p) d\Omega_S = 0 \dots\dots\dots (4.48)$$

Fazendo agora o cálculo das integrais sobre o contorno infinitesimal, considerando o ponto de colocação sobre a matriz, ou seja, as propriedades elásticas da seguinte forma: $\nu = \nu_1$ e $E = E_1$, ficando as integrais da seguinte forma:

$$\left\{ \frac{\bar{E}_j v_j - \bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} \right\} \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) p_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi \right] = \left\{ \frac{\bar{E}_j v_j}{\bar{E}_1 v_1} - 1 \right\} \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) p_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi \right]$$

..... (4.49)

$$\left\{ \bar{E}_j \left(1 - \frac{v_j}{v} \right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) \right\} \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi \right] =$$

$$\left\{ \bar{E}_j \left(1 - \frac{v_j}{v_1} \right) - \right\} \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi \right] \dots\dots\dots (4.50)$$

As integrais anteriores devem ser calculadas ao longo da interface infinitesimal. Fazendo $d\Gamma_\xi = r d\phi = \xi d\phi$ e somando $u_i(Q) - u_i(Q)$ nas integrais das Eq. (4.49) e (4.50) e, como o contorno é infinitesimal, considera-se $u_i(P) = u_i(Q)$, as equações resultam em:

$$\left\{ \frac{\bar{E}_j v_j}{\bar{E}_1 v_1} - 1 \right\} \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(Q) p_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi \right] \dots\dots\dots (4.51)$$

$$\left\{ \bar{E}_j \left(1 - \frac{v_j}{v_1} \right) - \right\} \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(Q) \varepsilon_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi \right] \dots\dots\dots$$

..... (4.52)

É possível perceber na Figura 4.3) que o ângulo infinitesimal varia de acordo com a seguinte inequação: $0 \leq \phi \leq \beta$, sendo β o ângulo definido no vértice, pode-se ainda verificar que $\{\vec{n}\} = \begin{Bmatrix} -\text{sen}(\phi - \theta_1) \\ -\text{cos}(\phi - \theta_1) \end{Bmatrix}$. Substituindo as expressões fundamentais, definidas no Apêndice A, nas Eq. (4.49) e (4.50) e considerando $r = \xi$, $0 \leq \phi \leq \beta$, tem-se os seguintes termos livres:

- Q está sobre a interface matriz/inclusão e coincide com um canto:

$$C_{11} = \left(1 - \frac{\beta}{2\pi} \right) + \frac{\beta}{2\pi} \left(\frac{\bar{E}_j v_j}{\bar{E} v} + \frac{\bar{E}_j (2 - 3\nu')}{4G(1 - \nu')} \left(1 - \frac{v_j}{v} \right) \right) +$$

$$+ \left(\frac{\bar{E}_j v_j}{\bar{E} v} - 1 + \frac{\bar{E}_j (1 - \nu')}{2G} \left(1 - \frac{v_j}{v} \right) \right) \left(\frac{\text{cos}2\theta_1 \text{sen}2\beta + \text{sen}2\theta_1 (1 - \text{cos}2\beta)}{8\pi(1 - \nu')} \right)$$

..... (4.53)

$$C_{12} = C_{21} = \left[\frac{1}{8\pi(1-\nu')} \left(1 - \frac{\bar{E}_j \nu_j}{\bar{E}_\nu} \right) - \frac{\bar{E}_j}{16\pi\bar{G}} \left(1 - \frac{\nu_j}{\nu} \right) \right] [-\text{sen}2\theta_1 \text{sen}2\beta + \text{cos}2\theta_1(1 - \text{cos}2\beta)] \dots\dots\dots (4.54)$$

$$C_{22} = \frac{2\pi - \beta}{2\pi} + \frac{\beta}{2\pi} \left(\frac{\bar{E}_j \nu_j}{\bar{E}_\nu} + \frac{\bar{E}_j(2 - 3\nu')}{4\bar{G}(1 - \nu')} \left(1 - \frac{\nu_j}{\nu} \right) \right) + \left(\frac{\bar{E}_j \nu_j}{\bar{E}_\nu} - 1 + \frac{\bar{E}_j(1-\nu')}{2\bar{G}} \left(1 - \frac{\nu_j}{\nu} \right) \right) \left(\frac{\text{cos}2\theta_1 \text{sen}2\beta + \text{sen}2\theta_1(1 - \text{cos}2\beta)}{8\pi(1-\nu')} \right) \dots\dots\dots (4.55)$$

- Q está sobre a interface matriz/vazio e coincide com um canto:

$$C_{11} = \left(1 - \frac{\beta}{2\pi} \right) + \left(\frac{\text{cos}2\theta_1 \text{sen}2\beta + \text{sen}2\theta_1(\text{cos}2\beta - 1)}{8\pi(1-\nu')} \right) \dots\dots\dots (4.56)$$

$$C_{22} = \left(1 - \frac{\beta}{2\pi} \right) - \left(\frac{\text{cos}2\theta_1 \text{sen}2\beta + \text{sen}2\theta_1(\text{cos}2\beta - 1)}{8\pi(1-\nu')} \right) \dots\dots\dots (4.57)$$

$$C_{12} = C_{21} = \left(\frac{\text{cos}2\theta_1 \text{sen}2\beta + \text{sen}2\theta_1(1 - \text{cos}2\beta)}{8\pi(1-\nu')} \right) \dots\dots\dots (4.58)$$

- Q está sobre o contorno externo e não coincide com um canto:

$$\{C_{1i}\}^T = \left\{ \frac{1}{2} \quad 0 \right\} \dots\dots\dots (4.59)$$

$$\{C_{2i}\}^T = \left\{ 0 \quad \frac{1}{2} \right\} \dots\dots\dots (4.60)$$

4.3.2 Equação integral da derivada dos deslocamentos u_k para os pontos do domínio

É a partir da equação integral da derivada dos deslocamentos u_k que se obtém a equação algébrica das forças elásticas, a qual é fundamental para a solução do problema. Ao derivar a Eq. (4.40) para qualquer direção m , a seguinte expressão é obtida:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_k}{\partial m}(q) = & \int_{\Gamma_1} \left[\frac{\partial u_{ki}^*}{\partial m}(q, P) p_i(P) \right] - \left[\frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} u_i(P) \frac{\partial p_{ki}^*}{\partial m}(q, P) \right] \\
 & - \left[\bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) u_i(P) \frac{\partial \varepsilon_{ki}^*}{\partial m}(q, P) \right] d\Gamma \\
 - & \sum_{j=1}^{N_{\text{vazios}}} \left\{ \frac{\bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} \left[\int_{\Gamma_1} u_i(P) \frac{\partial p_{ki}^*}{\partial m}(q, P) d\Gamma \right] - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) \left[\int_{\Gamma_{j1}} u_i(P) \frac{\partial \varepsilon_{ki}^*}{\partial m}(q, P) d\Gamma_{j1} \right] \right\} + \\
 - & \sum_{j=1}^{N_{\text{inc}}} \left\{ \frac{\bar{E}_j v_j - \bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{j1} - \bar{\Gamma}} u_i(P) \frac{\partial p_{ki}^*}{\partial m}(q, P) d\Gamma_{j1} + \frac{\bar{E}_j v_j - \bar{E}_1 v_1}{\bar{E} v} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) \frac{\partial p_{ki}^*}{\partial m}(q, P) d\Gamma_\xi \right\} \\
 - & \sum_{j=1}^{N_{\text{inc}}} \left\{ \bar{E}_j \left(1 - \frac{v_j}{v} \right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{j1} - \bar{\Gamma}} u_i(P) \frac{\partial \varepsilon_{ki}^*}{\partial m}(q, P) d\Gamma_{j1} + \right. \\
 & \left. + \left[\bar{E}_j \left(1 - \frac{v_j}{v} \right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) \right] \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) \frac{\partial \varepsilon_{ki}^*}{\partial m}(q, P) d\Gamma_\xi \right\} \\
 & + \sum_{S=1}^{N_S} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega_S + \Omega_\xi} \bar{E}_S \left(1 - \frac{v_S}{v} \right) \left[u_i(p) \frac{\partial \varepsilon_{kij}^*}{\partial m_S}(q, p) \right] + \varepsilon_{kij}^*(q, p) N_{ij}^0(p) d\Omega_S \\
 & \dots\dots\dots i, j, k = 1, 2 \dots\dots\dots (4.61)
 \end{aligned}$$

Observe que não acontece problemas de singularidade na integral de domínio envolvendo os deslocamentos, pois quando o ponto de colocação pertence à célula a ser integrada, tem-se que $v = v_s$ que determina que essa integral não necessita ser calculada. Para a integral envolvendo forças plásticas é necessário fazer o tratamento da singularidade, realizado de forma similar ao tratado anteriormente; mais detalhes desse processo podem ser encontrados em CROZARIOL (2017). Após o tratamento dessa singularidade, a integral de domínio resulta em:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial m} \int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^*(q, p) N_{ij}^0(p) d\Omega = & \int_{\Omega} N_{ij}^0(p) \varepsilon_{kijm}^*(q, p) d\Omega + \\
 + \frac{1}{16\bar{G}(1-v')} [& (6 - 8v') N_{km}^0(q) - N_{mm}^0(q) \delta_{km}] \dots\dots i, j, k, m = 1, 2 \dots\dots\dots (4.62)
 \end{aligned}$$

A expressão fundamental se encontra no Apêndice A

4.4 APLICAÇÃO DO MEC ÀS EQUAÇÕES INTEGRAIS

Para obter a solução aproximada do EVR pelo MEC é necessário discretizar o contorno e as interfaces em elementos e, como no caso desse trabalho existem fenômenos dissipativos, deve-se discretizar o domínio em células, onde existem incógnitas dadas pelas forças inelásticas. E quando se tem coeficiente de Poisson diferentes nas fases do EVR, há também nas células termos que multiplicam os deslocamentos. As incógnitas definidas do problema são as forças nodais no contorno, deslocamentos nos nós internos (incluindo interface) e as forças inelásticas nos nós internos. Para aplicação do MEC é necessário definir funções de forma nos elementos e células para aproximar as variáveis do problema, transformando as equações integrais em equações algébricas.

A solução do EVR é alcançada pela imposição da deformação constante que vem do macro-contínuo em todos os nós do contorno externo. Como a microestrutura é heterogênea o campo de deslocamento é definido como a soma de uma parcela obtida a partir dessa deformação imposta e uma parcela de flutuação de deslocamentos. Após a aplicação dos deslocamentos no contorno externo, gera-se um campo de flutuação dos deslocamentos no EVR. O problema de equilíbrio consiste em encontrar o valor desse campo que gera um campo de tensões auto-equilibrado no EVR.

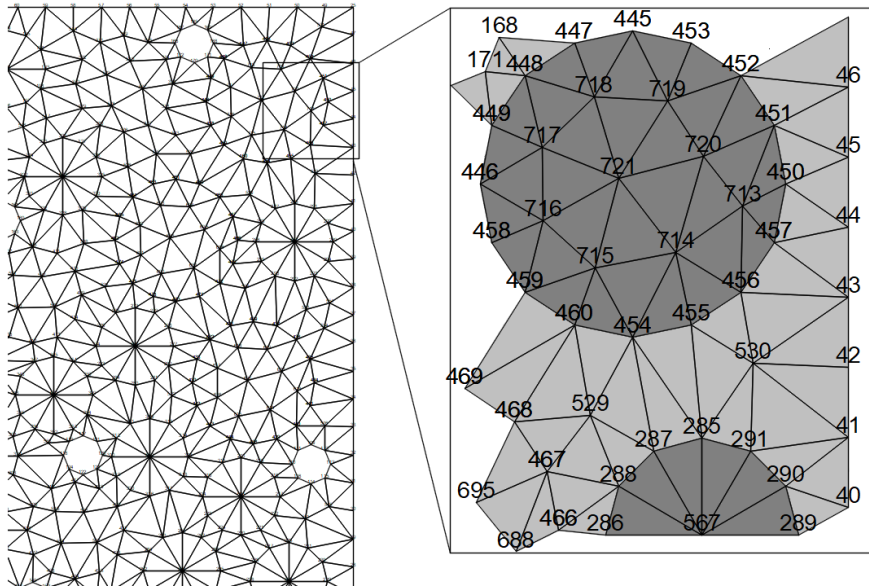
4.4.1 Discretização do EVR em elementos e células

4.4.1.1 Aproximação das variáveis nos elementos

As integrais sobre o contorno e interface são calculadas de maneira aproximada através da discretização em elementos. A geometria desse elemento pode ser aproximada por qualquer função, sendo que a quantidade e forma dessas funções devem representar adequadamente o contorno real a ser estudado. Para modelagem do EVR é utilizado elementos retos.

A figura a seguir mostra um exemplo de discretização de um EVR, sendo que cada elemento possui dois nós. Cada célula possui três nós para aproximar os deslocamentos, onde adota aproximação linear. Mas há apenas um nó na célula quando aproxima as forças inelásticas, que são adotadas constantes.

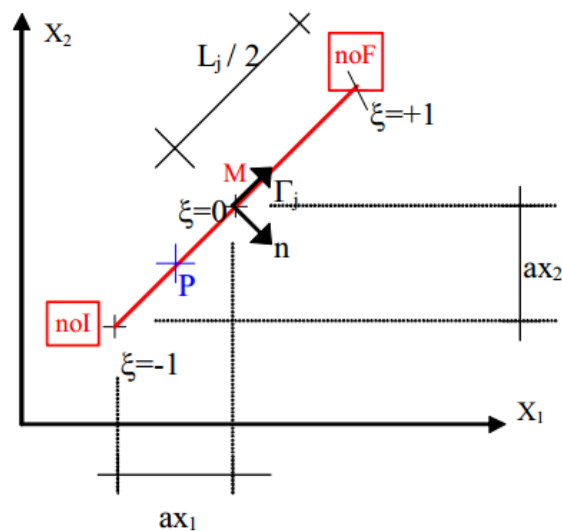
Figura 4.4 – Discretização EVR em elementos retos



Fonte: Elaboração própria (2025)

As integrais quando o ponto de colocação não pertence ao elemento são resolvidas numericamente. Para isso, é necessário expressar as coordenadas cartesianas de um ponto P qualquer ($X_1^P; X_2^P$) e o contorno (Γ) em função da coordenada homogênea (ξ) local do elemento. Seja a figura, onde noI é o nó inicial do elemento, noF o nó final do elemento, M o ponto do meio do elemento, L_j o comprimento do elemento j , n a direção normal ao contorno Γ_j :

Figura 4.5 – Elemento reto em coordenadas homogêneas



Fonte: Fernandes (2005)

Tem-se as seguintes relações:

$$\Gamma_j = \xi \frac{L_j}{2} \dots\dots\dots (4.63)$$

$$X_i^P = X_i^M + \xi a x_i \dots\dots\dots i = 1,2 \dots\dots\dots (4.64)$$

$$X_i^M = \frac{(X_i^{noI} + X_i^{noF})}{2} \dots\dots\dots (4.65)$$

$$a x_i = \frac{(X_i^{noF} - X_i^{noI})}{2} \dots\dots\dots (4.66)$$

sendo X_i^P a coordenada na direção i do ponto P ; X_i^M a coordenada na direção i do ponto M (ponto médio do elemento).

Substituindo as Eq. (4.65) e (4.66) na Eq. (4.64), tem-se a seguinte simplificação:

$$X_i^P = X_i^{NoI} \left(\frac{1-\xi}{2} \right) + X_i^{NoF} \left(\frac{1+\xi}{2} \right) \dots\dots\dots (4.67)$$

Portanto, define-se as seguintes funções de forma linear:

$$\phi_1(P) = \frac{1}{2} (1 - \xi) \dots\dots\dots (4.68)$$

$$\phi_2(P) = \frac{1}{2} (1 + \xi) \dots\dots\dots (4.69)$$

sendo ξ a coordenada local homogênea do ponto P .

Então, escreve-se a Eq. (4.67) de forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} X_1^P \\ X_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & \phi_2(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(P) & \phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{noI} \\ X_1^{noF} \\ X_2^{noI} \\ X_2^{noF} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (4.70)$$

Para fazer a integração numérica é necessário mudar de coordenadas cartesianas para coordenadas homogêneas, assim, a integral ao longo do contorno ou interface é calculada de forma aproximada.

A interpolação das grandezas no elemento é realizada visando representar os valores das variáveis u e p de um ponto P qualquer de um elemento j utilizando como base os valores nodais e funções de forma predefinidas. Dessa maneira, as expressões para $U(P)$ e $Q(P)$ são dados da seguinte forma:

$$U_{\sim}(P) = \begin{Bmatrix} u_1^P \\ u_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 \\ 0 & \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix}_j \\ \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix}_j \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (4.71)$$

$$P_{\sim}(P) = \begin{Bmatrix} p_1^P \\ p_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 \\ 0 & \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \end{Bmatrix}_j \\ \begin{Bmatrix} p_1^2 \\ p_2^2 \end{Bmatrix}_j \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (4.72)$$

sendo: o sobrescrito 1,2 referentes ao nó inicial e nó final do elemento e os subscritos são as direções das variáveis. As funções de aproximação são das pelas Eq. (4.68) e (4.69).

4.4.1.2 Aproximação das variáveis nas células

Na Eq. (4.40) existem integrais de domínio para serem resolvidas. Sendo uma envolvendo deslocamentos e outra envolvendo esforços iniciais. Para resolver, é necessário discretizar o domínio em células triangulares, onde é adotada uma aproximação linear para os deslocamentos e os esforços iniciais são considerados constantes. Como na Eq. de equilíbrio do EVR (2.19) tem-se definido o campo de flutuações de deslocamentos, há necessidade de adotar uma aproximação para esse campo no domínio do EVR. Como o campo de deformações no EVR (Eq. 2.14) é definido em termos de gradiente de deslocamentos, a ordem de aproximação do campo de flutuações de deslocamentos é uma ordem acima do campo de deformações. Logo, a aproximação para as forças dissipativas deve ser da mesma ordem das deformações.

Seja a integral de domínio que envolve os deslocamentos e a Fig. (4.6):

$$\sum_{S=1}^{N_s} \bar{\bar{E}}_S \left(1 - \frac{v_s}{v}\right) \int_{\Omega_S} u_i(p) \varepsilon_{kij}^*(q, p) d\Omega_S \dots\dots\dots (4.73)$$

sendo a^α e b^α dados pelas Eq. $a_\alpha = X_1^k - X_1^j$ $\alpha = 1,2,3; j = 2,3,1; k = 3,1,2$ (2.16) e $b_\alpha =$

$$X_2^k - X_2^j \quad \alpha = 1,2,3; j = 2,3,1; k = 3,1,2 \quad (2.17)$$

$$2A_0^\alpha = X_1^j X_2^k - X_1^k X_2^j \dots \alpha = 1,2,3; j = 2,3,1; k = 3,1,2 \dots (4.80)$$

A é a área do triângulo, dada por:

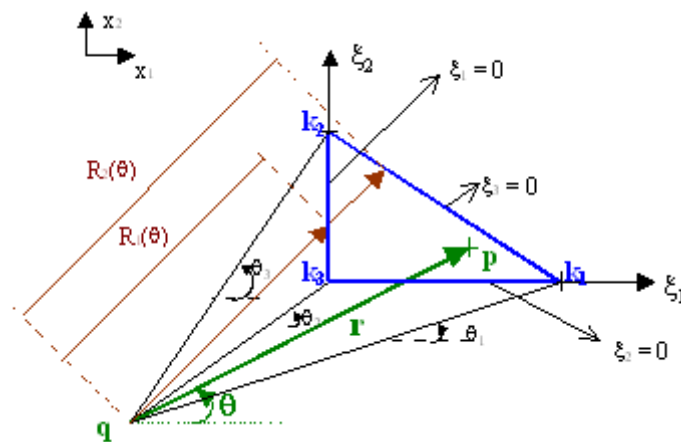
$$A = \frac{1}{2}(b^1 a^2 - b^2 a^1) \dots (4.81)$$

Para resolução da integral sobre cada célula é adotado um esquema semi-analítico de integração, onde transforma a integral de domínio em integral de contorno ao longo dos lados da célula. De início considera o esquema utilizado por TELLES & BREBBIA (1981), VENTURINI (1982), que transforma a integral de domínio em integral sobre o ângulo θ (ver Figura 4.7)). Então transforma essa integral em θ , em integral de contorno como feito em FERNANDES (2003). Para isso, seja um sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ) , centrado no ponto de carregamento q (ver Figura 4.7)), que é adotado para poder calcular analiticamente a integral sobre a coordenada r . As relações entre coordenadas cartesianas (X_1^p, X_2^p) e polares (r, θ) do ponto p são dadas por:

$$X_i(p) = X_i(q) + r r_{i, \theta} \dots i = 1,2 \dots (4.82)$$

sendo $r_{1, \theta} = \cos\theta; r_{2, \theta} = \sin\theta$.

Figura 4.7 – Sistema de coordenadas cilíndricas



Fonte: Fernandes (2005)

Após definir a função de forma dos deslocamentos, é realizado o cálculo das integrais de domínio. Discretiza-se o domínio do EVR em N_{cel} células e aproxima-se os deslocamentos das mesmas, através da Eq. (4.73) escreve-se a equação sobre o domínio da seguinte forma:

$$\sum_{s=1}^{N_s} \bar{E}_s \left(1 - \frac{\nu_s}{\nu}\right) \int_{\Omega_s} u_i(p) \varepsilon_{kij,j}^{*2D}(q, p) d\Omega_s = \sum_{cel=1}^{N_{cel}} \left[\int_{\Omega_{cel}} \{ \varepsilon_{kij,j}^{*2D}(q, p) [\Psi]^T(p) d\Omega_{cel}(p) \} \{ u_{cel}^N \} \dots\dots\dots (4.83)$$

sendo $k^*(q, p) = \{ \varepsilon_{k1j,j}^{*2D}(q, p) \quad \varepsilon_{k2j,j}^{*2D}(q, p) \}$; $[\Psi]$ a função de forma linear dada na Eq. (4.76); as expressões fundamentais são dadas em na Eq. (A.18) do Apêndice A.

Definindo $\{e^{cel(\alpha)}(q)\}$ como a integral sobre cada célula genérica Ω_{cel} , determina-se seis coeficientes, pois existem duas componentes de deslocamento (u_1, u_2) para cada um dos nós da célula. Sendo um determinado coeficiente relativo a um nó α e a componente de deslocamento na direção i , a integral é dada por:

$$e_i^{cel(\alpha)}(q) = \int_{\Omega_s} \varepsilon_{kij,j}^{*2D}(q, p) \xi_\alpha^p(p) d\Omega_s \dots\dots\dots i, j = 1, 2; \alpha = 1, 2, 3 \dots\dots\dots (4.84)$$

Substituindo na Eq. (4.84) a expressão fundamental $\varepsilon_{kij,j}^*$, dada no Apêndice A na Eq. (A.18), considerando r_k e r_i são funções de θ , pode-se escrever $d\Omega_s = r dr d\theta$, chegando a:

$$e_i^{cel(\alpha)}(q) = \frac{\nu}{4\pi\bar{G}(1-\nu)} \int_\theta \int_r (\delta_{ik} - 2r_{,i}r_{,k}) \frac{1}{r^2} \left[\xi_\alpha^q + \frac{r}{2A} (b^\alpha \cos\theta + a^\alpha \sin\theta) \right] r dr d\theta \dots\dots\dots (4.85)$$

sendo $r_{,i}$ os cossenos diretores de r .

Fazendo a integração em relação à r , tem-se:

$$e_i^{cel(\alpha)}(q) = \frac{\nu}{4\pi\bar{G}(1-\nu)} \int_\theta (\delta_{ik} - 2r_{,i}r_{,k}) \left[\ln R \xi_\alpha^q + \frac{R}{2A} (b^\alpha \cos\theta + a^\alpha \sin\theta) \right] d\theta \dots\dots (4.86)$$

Utilizando a técnica apresentada em FERNANDES (2003), a integral acima será transformada em integral ao longo do contorno da célula. Para isso, faz-se a transformação de coordenadas: $d\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma$, obtendo:

$$e_i^{cel(\alpha)}(q) = \frac{\nu}{4\pi\bar{G}(1-\nu)} \int_{\Gamma_i} (\delta_{ik} - 2r_{,i}r_{,k}) \left[\ln R \xi_\alpha^q + \xi_\alpha^R \right] \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_i \dots\dots\dots (4.87)$$

onde ξ_α^R é dado pela Eq. (4.79) substituindo $r = R$.

Como a célula tem três lados, calcula-se a Eq. (4.87) para os três lados, tendo a seguinte expressão:

$$e_i^{cel(\alpha)}(q) = \frac{\nu}{4\pi\bar{G}(1-\nu)} \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i} (\delta_{ik} - 2r_{,i}r_{,k}) \left[\ln R \xi_\alpha^q + \xi_\alpha^R \right] \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_i \dots\dots\dots (4.88)$$

A integração é feita utilizando a fórmula de quadratura de Gauss, empregando a técnica de subelementos (ver FERNANDES (2003)). Para integração numérica da Eq. (4.88) deve-se fazer a mudança para coordenadas homogêneas η definida no subelemento, dada por $d\Gamma = \frac{L}{2} d\eta$, temos:

$$e_{ki}^{cel(\alpha)}(q) = \sum_{l=1}^3 \sum_{ks=1}^{N_{sub}} \sum_{IG=1}^{N_g} \frac{\nu a_{ks}}{8\pi\bar{G}(1-\nu)} (\delta_{ik} - 2r_{,i}r_{,k}) \left[\ln R \xi_\alpha^q + \xi_\alpha^R \right] \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial n} W_{IG} \quad (4.89)$$

sendo N_{sub} o número de subelementos em que o elemento é dividido, N_g o número de pontos de Gauss, a_{ks} o comprimento do subelemento ks , W_{IG} o fator de ponderação do ponto de Gauss IG .

Para a equação da derivada do deslocamento $u_{k,m}$, deve-se resolver a seguinte integral de domínio nas sub-regiões:

$$\sum_S^N \bar{E}_S \left(1 - \frac{\nu_S}{\nu} \right) \int_{\Omega_S} u_i(p) \frac{\partial \varepsilon_{kij}^*}{\partial m_s}(q, p) d\Omega_S \dots\dots\dots (4.90)$$

Adotando o mesmo processo feito para a equação do deslocamento, calcula-se a integral numericamente da seguinte forma:

$$e_{ki}^{cel(\alpha)}(q) = \sum_{l=1}^3 \sum_{ks=1}^{N_{sub}} \sum_{IG=1}^{N_g} \frac{\nu a_{ks}}{4\pi\bar{G}(1-\nu)} \left[\left(\frac{\partial r}{\partial m} (\delta_{ik} - 4r_{,i}r_{,k}) + r_{,i}m_k + r_{,k}m_i \right) \cdot \left[-\xi_\alpha^q + \xi_\alpha^R \ln R \right] \frac{1}{R^2} \frac{\partial r}{\partial n} W_{IG} \dots\dots\dots (4.91)$$

Tendo os deslocamentos variação linear nas células, as deformações e esforços iniciais têm variação constante. Sendo a aproximação constante, é necessário apenas um nó na célula, definida no seu ponto central. As deformações são dadas por:

$$\{\varepsilon_p\}_{cel} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \gamma_{12} \\ \varepsilon_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_p \dots\dots\dots (4.92)$$

Considerando as Eq. (4.74), (4.75) e (4.76) a Eq. (4.92) se torna:

$$\{\varepsilon_p\}_{cel} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1^p}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial \xi_2^p}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial \xi_3^p}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial \xi_1^p}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_1^p}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2^p}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2^p}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3^p}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3^p}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial \xi_1^p}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial \xi_2^p}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial \xi_3^p}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{k_1} \\ u_2^{k_2} \\ u_1^{k_2} \\ u_2^{k_2} \\ u_1^{k_3} \\ u_2^{k_3} \end{Bmatrix} = [B]_{cel} \{U\}^N \dots\dots\dots (4.93)$$

onde $[B]_{cel}$ é dado pela Eq. (2.15)

Seja integral de domínio envolvendo esforços iniciais que aparece na Eq. ((4.39):

$$\sum_{S=1}^{N_S} \int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^*(q, p) N_{ij}^0(p) d\Omega \dots\dots\dots i, j, k = 1, 2 \dots\dots\dots (4.94)$$

Como os esforços iniciais são aproximados por função de forma constante, é necessário apenas um nó da célula, que será definido no seu centro. Os esforços de um ponto p qualquer da célula são dados por:

$$\{N^0\}(p) = [\Psi]^T(p) \{N^{0(N)}\} \dots\dots\dots (4.95)$$

sendo Ψ a função interpoladora constante e $\{N^{0(N)}\}$ o vetor dos deslocamentos nodais, dados por:

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.96)$$

$$\{N^{0(N)}\}^T = \{N^{0(no)}\} = \{N_{11}^{0(no)} \quad N_{12}^{0(no)} \quad N_{22}^{0(no)}\} \dots \dots \dots (4.97)$$

Discretizando o domínio em N_{cel} células, calcula-se de forma aproximada a integral de domínio envolvendo os esforços iniciais através da seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} (N_{ij}^0(p) \varepsilon_{kij}^*(q, p)) d\Omega(p) = \sum_{cel=1}^{N_{cel}} [\{k^{**}\}(q, p) d\Omega_{cel}(p)] \{N_{cel}^{0(N)}\} \dots \dots \dots (4.98)$$

sendo $k^{**}(q, p) = \{\varepsilon_{k11}^*(q, p) \quad 2\varepsilon_{k12}^*(q, p) \quad \varepsilon_{k22}^*(q, p)\}$

De forma análoga à integral de domínio envolvendo deslocamentos, obtém-se o coeficiente relativo à Eq. (4.99):

$$\bar{e}_{kijl}^{cel}(q) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu')} \sum_{s=1}^3 \left\{ \int_{\Gamma_s} \frac{f_{kijl}(\theta)}{R} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_s \right\} \dots \dots \dots i, j, k, l = 1, 2 \dots \dots \dots (4.99)$$

sendo a função $f_{kijl}(\theta)$ com $i, j, k, l = 1, 2$, dada por:

$$f_{kijl}(\theta) = \frac{(1 - 2\nu')}{8\pi G(1 - \nu')} [\delta_{jl}\delta_{ki} + \delta_{il}\delta_{kj} - 2\delta_{ki}r_{,i}r_{,l} - 2\delta_{kj}r_{,i}r_{,l}] +$$

$$+ \frac{1}{8\pi G(1-\nu')} [\delta_{ij}(2r_{,k}r_{,l} - \delta_{kl}) + 2\delta_{kl}r_{,i}r_{,j} + 2\delta_{jl}r_{,k}r_{,j} + 2\delta_{jl}r_{,i}r_{,k} - 8r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,l}] \dots \dots \dots (4.100)$$

4.4.2 Transformação das equações integrais em equações algébricas

Seja a Eq. (4.42), do deslocamento u_k de um ponto Q sobre contorno ou interface. Ela pode ser escrita da seguinte forma:

$$C_{ki}u_i(Q) = \sum_{j=1}^{N_{ec}} g_{ki}^{N(j)}(Q) p_{i(j)}^N - \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E}} \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{N_{ec}} h_{ki}^{N(j)}(Q) u_{i(j)}^N +$$

$$- \sum_{m=1}^{N_{vazios}} \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E}} \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{N_{ei}} h_{ki}^{N(j)}(Q) u_{i(j)}^N - \sum_{m=1}^{N_{inc}} \left[\frac{\bar{E}_m \nu_m}{\bar{E}} \frac{1}{\nu} - \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E}} \frac{1}{\nu} \right] \sum_{j=1}^{N_{ei}} h_{ki}^{N(j)}(Q) u_{i(j)}^N +$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{m=1}^{N_{inc}} \left\{ \bar{E}_m \left(1 - \frac{v_m}{v} \right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) \right\} \sum_{j=1}^{N_{ei}} \bar{h}_{ki}^{N(j)}(Q) u_{i(j)}^N + \\
 & + \sum_{s=1}^{N_s} \bar{E}_s \left(1 - \frac{v_s}{v} \right) \sum_{cel=1}^{N_{cel}} e_{ki}^{cel}(q) u_{i(cel)}^N + \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{cel=1}^{N_{cel}} e_{kij}^{r,cel}(q) N_{ij(cel)}^{0(N)} \dots \dots \dots (4.101)
 \end{aligned}$$

sendo N_{ec} o número de elementos de contorno e N_{ei} número de elementos de interface.

Para todos os elementos, são calculados os vetores $\{h^j\}(Q), \{\bar{h}^j\}(Q), \{g^j\}(Q)$, que são dados por:

$$h_{ki}^{N(j)}(Q) = \int_{\Gamma_j} p_{ki}^*(Q, P) \phi_N(P) d\Gamma_j \dots \dots \dots (4.102)$$

$$\bar{h}_{ki}^{N(j)}(Q) = \int_{\Gamma_j} \varepsilon_{ki}^*(Q, P) \phi_N(P) d\Gamma_j \dots \dots \dots (4.103)$$

$$g_{ki}^{N(j)}(Q) = \int_{\Gamma_j} u_{ki}^*(Q, P) \phi_N(P) d\Gamma_j \dots \dots \dots (4.104)$$

sendo k a direção da carga fundamental, i a direção da força ou deslocamento fundamental na qual se calcula o coeficiente e N é o nó local do elemento j . As funções de aproximação são das pelas Eq. (4.68) e (4.69) e o coeficiente das células é dado pela Eq. (4.83).

Agrupando os coeficientes relacionados a um mesmo valor nodal, a Eq. (4.102) pode ser escrita de forma matricial. Além disso, o termo livre deve ser adicionado à coluna correspondente ao ponto de colocação no vetor $\{H\}$. Assim, obtém-se a equação algébrica referente à equação do deslocamento no ponto Q :

$$\{H_\mu\}(Q)\{U_\mu\} = \{G_\mu\}(Q)\{P_\mu\} + \{E_\mu\}(q)\{N^0\} \dots \dots \dots (4.105)$$

sendo $\{U_\mu\}$ o vetor dos valores nodais de deslocamentos nos nós sobre o contorno, internos e de interfaces; $\{P_\mu\}$ o vetor dos valores nodais de forças de superfície no contorno externo e $\{N^0\}$ o vetor dos esforços iniciais nos nós de células.

4.5 SISTEMA DE EQUAÇÕES

A transformação das equações integrais em equações algébricas é feita através da discretização do contorno e interface em elementos e o domínio em células. No contorno externo existem quatro variáveis: duas prescritas (deslocamentos u_i , para $i = 1,2$ impostos pela macro-deformação multiescala) e duas incógnitas (forças de superfície p_i , correspondentes às reações aos deslocamentos). No domínio os valores nodais são: duas componentes de deslocamentos (u_i) e três componentes de forças inelásticas (N_{ij}^0).

Após a discretização do EVR em elementos com aproximação linear das variáveis e o domínio em células, a formulação matemática requer a definição de duas equações de deslocamento para cada nó presente no contorno, na interface e nas células internas, representado pelo seguinte sistema de equações algébricas:

$$\begin{bmatrix} [H]_{CC} & [H]_{Ci} \\ [H]_{iC} & [H]_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [U]_C \\ [U]_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_{CC} \\ [G]_{iC} \end{bmatrix} \{P\}_C + [E]\{N^0\} \dots \dots \dots (4.106)$$

Na equação anterior, o subíndice C é relacionado com os nós de contorno externo e o subíndice i é relacionado com os dos nós internos, sendo incluso das interfaces. Os vetores $\{U\}$, $\{P\}$, e $\{N^0\}$ são os valores nodais dos deslocamentos, forças de superfícies e esforços inelásticos, respectivamente. Os esforços inelásticos representam contribuições de fenômenos dissipativos, como plasticidade na matriz ou descolamento na interface inclusão-matriz. A matriz $[H]$ representa os valores da integração dos elementos do contorno, da interface e das células definidas na matriz e inclusões, relacionados com os deslocamentos. A matriz $[G]$ representa os valores da integração dos elementos do contorno, relacionados às forças de superfície. A matriz $[E]$ representa os valores da integração das células definidas na matriz, relacionados com os esforços inelásticos.

No contexto multi-escala, as condições de contorno são impostas pela macro-deformação, ou seja, são impostas condições de contorno de deslocamentos lineares. Trabalhando a Eq. (4.105) para que as incógnitas fiquem todas do lado esquerdo, reescreve-se assim:

$$\begin{bmatrix} -[G]_{CC} & [H]_{Ci} \\ -[G]_{iC} & [H]_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [P]_C \\ [U]_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[H]_{CC} \\ -[H]_{iC} \end{bmatrix} \{U\}_C + [E]\{N^0\} \dots \dots \dots (4.107)$$

Compactando a equação anterior, pode-se escrevê-la como:

$$[A]\{X\} = \{B\} + [E]\{N^0\} \dots \dots \dots (4.108)$$

sendo: $[A] = \begin{bmatrix} -[G]_{cc} & [H]_{ci} \\ -[G]_{ic} & [H]_{ii} \end{bmatrix}$, $\{B\} = \begin{bmatrix} -[H]_{cc} \\ -[H]_{ic} \end{bmatrix} \{U\}_c$ e $\{X\}$ o vetor das incógnitas dado pelas forças de superfície no contorno e dos deslocamentos nos nós internos.

Isolando o vetor $\{X\}$, a Eq. (4.108) fica:

$$\{X\} = [A]^{-1}\{B\} + [A]^{-1}[E]\{N^0\} \dots \dots \dots (4.109)$$

sendo $[A]^{-1}\{B\} = \{L\}$ representa a solução elástica para as forças no contorno e deslocamentos nas interfaces e nós internos, representa a solução antes da resolução do problema de equilíbrio do EVR.

O problema de equilíbrio do EVR é resolvido quando a somatória das forças nodais em todas as células for nula. As forças são obtidas a partir das tensões ou forças normais verdadeiras $\{N\}$, obtidas após verificação do modelo constitutivo. Mas para isso, deve-se antes obter as forças elásticas $\{N^e\}$ e as tensões elásticas (de tentativa) $\{\sigma^e\}$. As forças elásticas são obtidas após escrever a equação da derivada dos deslocamentos em todos os nós centrais de células e aplicar a lei de Hooke, obtendo:

$$\{N^e\} = -[[H']_c \quad [H']_i] \begin{Bmatrix} \{U\}_c \\ \{U\}_i \end{Bmatrix} + [G']_c \{P\}_c + [E']\{N^0\} \dots \dots \dots (4.110)$$

Após aplicar as condições de contorno no EVR a equação anterior pode ser escrita como:

$$\{N^e\} = [[G']_c \quad -[H']_i] \begin{Bmatrix} \{P\}_c \\ \{U\}_i \end{Bmatrix} - [H']_c \{U\}_c + [E']\{N^0\} \dots \dots \dots (4.111)$$

Ainda:

$$\{N^e\} = -[A']\{X\} + \{B'\} + [E']\{N^0\} \dots \dots \dots (4.112)$$

Substituindo a Eq. (4.111) na Eq. (4.112), tem-se:

$$\{N^e\} = \{K\} + [S]\{N^0\} \dots \dots \dots (4.113)$$

onde: $\{K\} = \{B'\} - [A']\{L\}$; $[S] = [E'] - [A']\{R\}$; $[R] = [A]^{-1}[E']$.

Para resolver o problema não-linear, o sistema é linearizado em incrementos, gerando a equação matricial:

$$\{\Delta X\} = \{\Delta L\} + [R]\{\Delta N^0\} \dots\dots\dots(4.114)$$

Sendo o vetor $\{\Delta X\} = \begin{Bmatrix} \Delta P_c \\ \Delta U_i \end{Bmatrix}_n^0$ e $\{\Delta L\} = [A]^{-1}\{\Delta B\}$

sendo $\{\Delta L\}$ o vetor das incógnitas elásticas incrementais, ΔP_c o incremento de forças de contorno, ΔU_i o incremento de deslocamentos internos, o índice n indica o incremento de deformação e o índice 0 indica a iteração inicial (solução elástica tentativa).

5 ALGORITMO PARA OBTER A RESPOSTA HOMOGENEIZADA DO EVR

Considerando um incremento de deformação $[\Delta\varepsilon]_n$, para definir os valores homogeneizados de tensão e tensor constitutivo da microestrutura heterogênea, considerando os fenômenos dissipativos apresentados anteriormente, o algoritmo segue os seguintes passos:

1. Duplicar os nós das interfaces considerando um ponto de colocação na matriz e outro na inclusão, sendo eles inicialmente coincidentes, se deseja modelar o descolamento de fase. Escrever duas equações algébricas de deslocamentos para cada nó do EVR.;
2. Impor a macrodeformação $[\Delta\varepsilon]_n$ ao contorno do EVR por meio da imposição do incremento de deslocamento com variação linear: $\{\Delta U_c^L\}_n = [\Delta\varepsilon]_n \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_y$;
3. O vetor $\{\Delta U_c^L\}_n$ é imposto como condição de contorno do EVR, obtendo as incógnitas elásticas $\{\Delta L\} = \begin{Bmatrix} \Delta P_c \\ \Delta U_i \end{Bmatrix}_n^0$, definidas na Eq. (3.6);
4. Escrever no ponto central de cada célula três equações algébricas de forças normais elásticas, obtendo $\{\Delta K\}_n$ (ver Eq. (4.113)). E a partir da lei de Hooke é calculado o incremento de deformação para cada célula $\{\Delta\varepsilon_\mu\}_n^0 = [C_N]^{-1}\{\Delta K\}_n$;
5. Para verificar a Eq. (2.18) faz-se o seguinte processo para cada célula:
 - Incremento de tensões elásticas calculado pela lei de Hooke: $\{\Delta\sigma_\mu^e\}_n^k = [C]\{\Delta\varepsilon_\mu\}_n^k$;
 - A tensão de tentativa é computada: $\{\sigma_\mu^e\}_n^k = \{\sigma_\mu\}_{n-1} + \{\Delta\sigma_\mu^e\}_n^k$;
 - O modelo constitutivo é verificado, obtendo: $[C_\mu^{ep}]_n^k, \{\sigma_\mu\}_n^k$ e $\{\Delta\sigma_\mu\}_n^k = \{\sigma_\mu\}_n^k - \{\sigma_\mu\}_{n-1}$;
 - As forças de membrana são computadas: $\{N\}_n^k = [B]\{\sigma_\mu\}_n^k t A_{cel}$;
6. Verificar para cada elemento de contato e fratura coesiva cf :
 - O vetor de incremento de deslocamento de abertura efetiva: $\{\Delta\delta_\mu^{cf(t)}\}_n^k = N_e \{\Delta u_\mu^{cf(t)}\}_n^k$, (ver Eq. 3.22) sendo N_e as funções de forma do elemento coesivo;
 - O modelo constitutivo é verificado, obtendo os valores das forças internas $\{F_{cf}^{int}\}_n^k$ (ver Eq. (3.27)) e a rigidez tangente $\{K_{cf}\}_n^k$ (ver Eq.

- 3.28)), que dependem do estado da fratura (carregamento, descarregamento ou permanece fechada);
7. Após a obtenção das forças de todas as células e elementos de contato e fratura coesiva, verificar a equação de equilíbrio. Se a Eq. (2.20) é satisfeita para $i = 0$, o EVR é uniforme. Se satisfeita para $i \geq 1$, passa-se ao item 8. Se não for satisfeita, passa à próxima iteração k . Para isso, deve-se antes:
 - A matriz $[K]_n^{k-1}$ é atualizada;
 - A correção de flutuação dos deslocamentos $\{\delta\tilde{u}\}_n^k$ é obtida;
 - O vetor da flutuação dos deslocamentos é atualizado: $\{\tilde{u}\}_n^k = \{\tilde{u}\}_n^{k-1} + \{\delta\tilde{u}\}_n^k$;
 - Os incrementos de flutuação dos deslocamentos são atualizados: $\{\Delta\tilde{u}_\mu\}_n^k = \{\tilde{u}\}_n^k - \{\tilde{u}\}_{n-1}$;
 - O incremento de deformação é atualizado para cada célula: $\{\Delta\varepsilon_\mu\}_n^k = \{\Delta\varepsilon_\mu\}_n^0 + [B]_{\text{cell}}\{\Delta\tilde{u}\}_n^k$;
 - Retornar aos itens 5), 6) e 7);
 8. A tensão homogeneizada σ é computada, seguindo o procedimento:
 - O incremento de deslocamento nodal final ao longo do contorno externo é obtido: $\{\Delta U_c\}_n = \{\Delta U_c^L\}_n + \{\Delta\tilde{u}_c\}_n$;
 - O incremento das forças de superfície ao longo do contorno $\{\Delta L_c\}_n$ é atualizado considerando $\{\Delta U_c\}_n$;
 - Calcular o incremento de forças normais plásticas: $\{\Delta N^P\}_n = [C_N]\{\Delta\varepsilon_\mu\}_n - \{\Delta N\}_n$;
 - As forças de contato e fratura coesiva são obtidas: $\{\Delta N^{\text{ef}}\}_n = \{\Delta K\}_n + -[C_N]\{\Delta\varepsilon_\mu\}_n$;
 - As forças inelásticas são computadas: $\{\Delta N^0\}_n = \{\Delta N^P\}_n + \{\Delta N^{\text{ef}}\}_n$;
 - Os incrementos das forças ao longo do contorno são atualizados: $\{\Delta P_c\}_n = \{\Delta L_c\}_n + [R]\{\Delta N^0\}_n$;
 - As forças finais são obtidas: $\{P_c\}_n = \{P_c\}_{n-1} + \{\Delta P_c\}_n$;
 - Multiplicar $\{P_c\}_n$ pelo comprimento de influência do elemento, o tensor das tensões homogeneizado pode ser calculado pela média volumétrica das tensões microscópicas conforme Eq. (2.35);
 9. O tensor constitutivo homogeneizado $[C^{\text{ep}}]$ é obtido. (ver Eq. (2.40))

6 MODELAGEM EXPERIMENTAL DO CONCRETO COM AGREGADOS RECICLADOS

6.1 COLETA DO MATERIAL PARA ENSAIOS FÍSICOS

O material a ser utilizado para a moldagem dos corpos foi coletado na empresa RNV Gestão de Resíduos, localizada no aterro sanitário de Catalão-GO. Foi coletada uma amostragem do material no local. Na operação foi constatado que não ocorre a separação do material cinza (composto de argamassa e material cimentício) do material marrom (composto por material cerâmico).

Foi realizada uma pré-limpeza manual do material, separando o material cerâmico de granulometria maiores. Na Figura 6.1 o material coletado.

Figura 6.1 – Material reciclado com pré-limpeza



Fonte: Acervo próprio

Foram retirados materiais como gesso e, principalmente, materiais de pisos cerâmicos e porcelanatos, que são muito lisos e dificultaria a aderência da pasta cimentícia. Na Figura 6.2 o material descartado:

Figura 6.2 – Material reciclado descartado



Fonte: Acervo próprio

Após essa triagem inicial, foi realizado dois ensaios de granulometria do material, detalhados no item 6.3.

6.2 TRAÇO CONCRETO

Este trabalho propõe a modelagem computacional do comportamento mecânico de concretos com agregados reciclados, aliada à verificação experimental por meio de ensaios físicos realizados nos Laboratórios de Materiais e de Estruturas da Faculdade de Engenharia (FENG) da Universidade Federal de Catalão. A abordagem visa integrar os resultados experimentais e computacionais, com foco na validação da modelagem numérica utilizando o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Para isso, o concreto foi elaborado seguindo critérios de volume de agregados definidos a partir de um Elemento de Volume Representativo (EVR) previamente desenvolvido por SILVA et al. (2024), o qual foi ajustado para representar o concreto testado experimentalmente por DELALIBERA (2002).

Neste trabalho, foram adotados cinco teores de substituição de agregado graúdo por agregado reciclado, sendo eles: 0%, 13,96%, 27,02%, 49,68% e 100%. Essa escolha foi definida de modo a permitir o uso do EVR desenvolvido por SILVA et al. (2024) e visa avaliar o impacto da substituição gradual no comportamento mecânico do concreto, permitindo identificar tendências e variações de desempenho associadas ao uso de materiais reciclados.

O traço de referência proposto possui resistência característica à compressão de $f_{ck} = 25\text{MPa}$ e foi calculado de acordo com o método da Associação Brasileira de Cimento Portland (ABCP), amplamente reconhecido por sua eficiência em dosagens para concretos convencionais. As propriedades dos materiais e o consumo por unidade de volume do concreto estão detalhados nas Tabelas 6.1 a 6.4:

Tabela 6.1 – Propriedades Materiais

Nr	Descrição	Peso Específico (γ) (kg/m ³)	Massa Unitária (δ) (kg/m ³)	Módulo Finura	Dmax (mm)
1	Cimento	3100	1092	-	-
2	Areia Grossa	2650	1470	2.6	-
3	Brita 1	2700	1600	-	19

Fonte: Elaboração própria (2024)

Tabela 6.2 – Propriedades Concreto

fck	Abatimento	Controle A - Sd
25 MPa	100 ± 20 mm	4 MPa

Fonte: Elaboração própria (2024)

Tabela 6.3 – Consumo Materiais

Nr	Descrição	Consumo	Unidade
1	Água	205	l/m ³
2	Cimento	410	kg/m ³
3	Areia	662.5	kg/m ³
4	Brita	1104	kg/m ³

Fonte: Elaboração própria (2024)

Tabela 6.4 – Apresentação Traço

Cimento	Areia	Brita	a/c
1	1.62	2.7	0.5

Fonte: Elaboração própria (2024)

Para o concreto proposto o teor de argamassa é de aproximadamente 59% do volume total do concreto. Esse percentual assegura adequada trabalhabilidade e coesão da mistura, favorecendo o preenchimento dos vazios entre os agregados graúdos e contribuindo para a obtenção das propriedades mecânicas desejadas.

6.3 ENSAIO GRANULOMÉTRICO DO MATERIAL RECICLADO

Realizou-se a caracterização granulométrica do material reciclado conforme NBR 17054:2022 no Laboratório de Solos da Geografia da UFCAT. O ensaio é realizado através de peneiramento, utilizando peneiras com uma série de aberturas. Essas séries são denominadas série normal e série intermediária. A norma estabelece a seguinte tabela de séries:

Tabela 6.5 – Peneiras

Série Normal	Série Intermediária
76 mm	---
---	64 mm
---	50 mm
38 mm	---
---	31,5 mm
---	25 mm
19 mm	---
---	12,5 mm
9,5 mm	---
---	6,3 mm
4,8 mm	---
2,4 mm	---
1,2 mm	---
0,6 mm	---
0,3 mm	---
0,15 mm	---

Fonte: NBR 17054 (Adaptado)

Na Tabela 6.6 mostra-se os limites da composição granulométrica, de acordo com a NBR 7211:2022, a faixa utilizada é de 19/31,5 mm:

Tabela 6.6 – Limites da composição granulométrica

Peneiras	Inferior	Superior
31.50	0%	5%
25.00	5%	25%
19.00	65%	95%
12.50	92%	100%
9.50	95%	100%
4.75	100%	105%

Fonte: NBR 7211 (Adaptado)

Os dados obtidos nos ensaios são apresentados conforme as tabelas a seguir:

Tabela 6.7 – GRANULOMETRIA ENSAIO 01

Material: Brita Reciclada

Peneiras	Material Retido (g)	% Retida	% Retida Acumulada	% Passante
31.50	0	0.00%	0.00%	100.00%
25.00	0	0.00%	0.00%	100.00%
19.00	7112	54.71%	54.71%	45.29%
12.50	5092	39.17%	93.88%	6.12%
9.50	484	3.72%	97.60%	2.40%
4.75	130	1.00%	98.60%	1.40%
2.36	6	0.05%	98.65%	1.35%
1.18	6	0.05%	98.69%	1.31%
0.60	10	0.08%	98.77%	1.23%
0.30	24	0.18%	98.95%	1.05%
0.15	46	0.35%	99.31%	0.69%
Fundo	54	0.42%	99.72%	0.28%
Dmax: 19		MF:	7.45	

Fonte: Elaboração própria (2025)

Tabela 6.8 – GRANULOMETRIA ENSAIO 02

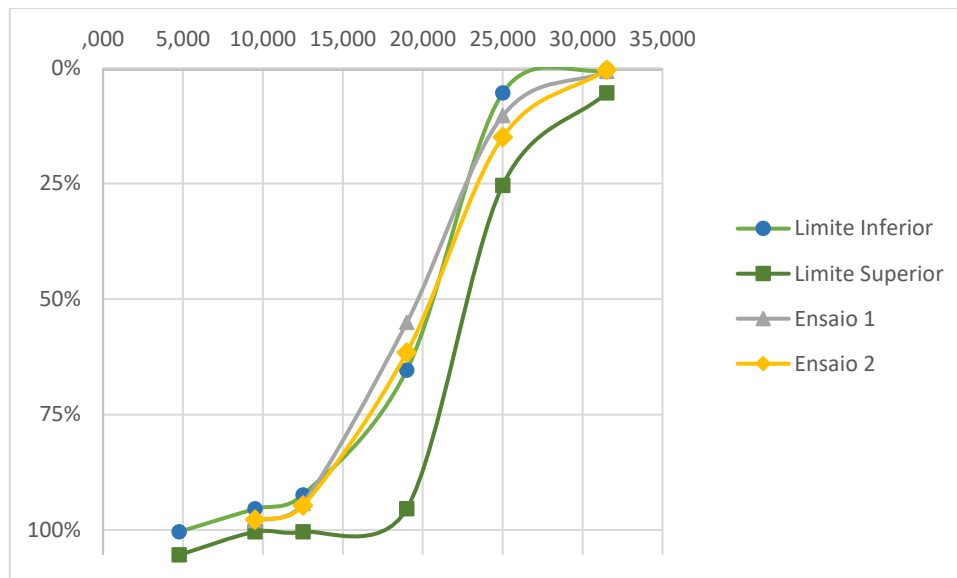
Material: Brita Reciclada

Peneiras	Material Retido (g)	% Retida	% Retida Acumulada	% Passante
31.50	0	0.00%	0.00%	100.00%
25.00	0	0.00%	0.00%	100.00%
19.00	6118	61.18%	61.18%	38.82%
12.50	3314	33.14%	94.32%	5.68%
9.50	306	3.06%	97.38%	2.62%
4.75	0	0.00%	97.38%	2.62%
2.36	98	0.98%	98.36%	1.64%
1.18	6	0.06%	98.42%	1.58%
0.60	10	0.10%	98.52%	1.48%
0.30	24	0.24%	98.76%	1.24%
0.15	42	0.42%	99.18%	0.82%
Fundo	52	0.52%	99.70%	0.30%
Dmax: 19		MF:	7.49	

Fonte: Elaboração própria (2025)

Conforme as tabelas, gera-se o seguinte gráfico:

Figura 6.3 – Curvas Granulométricas



Fonte: Elaboração própria

Os dois ensaios apresentam uma retenção abaixo do limite inferior na peneira de 19,00. No primeiro ensaio a porcentagem retida acumulada foi de 54,71%, sendo o limite inferior de 65%; no segundo ensaio a porcentagem foi de 61,18%. A NBR 7211:2022 aceita uma variação de 5% no limite superior da peneira de 25 mm e no limite inferior da peneira de 19 mm.

No ensaio, ainda foram encontrados materiais como argila expandida, pedaços de telha de fibrocimento, isopor, entre outros materiais indesejados para produção do concreto, os quais foram descartados para utilização. A seguir tem-se algumas fotos do material peneirado:

Figura 6.4 – Pesagem material peneirado



Fonte: Acervo próprio

Figura 6.5 – Separação do material peneirado



Fonte: Acervo próprio

Figura 6.6 – Material após pesagem



Fonte: Acervo próprio

6.4 MOLDAGEM E CURA DOS CORPOS DE PROVA CILÍNDRICOS

Foram moldados corpo-de-prova (CPs) de 10 x 20 cm com o traço de referência, proposto no item 6.2, e traços com teores de substituição definidos através do estudo do EVR. Para moldagem dos CPs com teores de substituição dos agregados reciclados foi realizada a exclusão das pedras retidas na peneira de 25 mm, devido ao EVR contar com inclusões de no máximo 19 mm.

Para processo de mistura foi utilizado o procedimento descrito em SCANDIUZZI & ANDRIOLO (1986). Os CPs foram moldados conforme ABNT NBR 5738:2016. A cura também seguiu essa mesma norma. A seguir imagens do processo:

Figura 6.7 – Moldagem dos CPs



Fonte: Acervo próprio

Figura 6.8 – Cura dos CPs



Fonte: Acervo próprio

Após o processo de cura, foram realizados os ensaios de compressão axial e de tração por compressão diametral em uma máquina de ensaios servo-controlada (modelo YAW-2000 Classe 1 – Figura 6.9), com capacidade de 200 toneladas-força e sistema de controle de deslocamentos, localizada no Laboratório de Estruturas/UFCAT. A máquina é equipada com um sistema automatizado de aquisição de dados, que registra em tempo real o deslocamento da mesa de carga e os valores de força aplicada, garantindo precisão na captura das curvas de carga versus deformação. Foram moldados 60 CPs, distribuídos em 5 traços com 4 CPs para ensaio de compressão axial aos 28 dias, 4 CPs para ensaio de compressão diametral aos 28 dias e 4 CPs para ensaio de compressão axial aos 96 dias. Na Tabela 6.9 são apresentadas as especificações dos ensaios:

Tabela 6.9 – Especificações ensaios

Ensaio	Tipo	Idade
1.01 a 1.04	Compressão uniaxial	32 dias
1.05 a 1.08	Compressão diametral	35 dias
1.09 a 1.12	Compressão uniaxial	89 dias
2.01 a 2.04	Compressão uniaxial	32 dias
2.05 a 2.08	Compressão diametral	35 dias
2.09	Falha de moldagem	-
2.10 a 2.12	Compressão uniaxial	89 dias
3.01 a 3.04	Compressão uniaxial	32 dias
3.05 a 3.08	Compressão diametral	35 dias
3.09 a 3.12	Compressão uniaxial	89 dias
4.01 a 4.04	Compressão uniaxial	32 dias
4.05 a 4.08	Compressão diametral	35 dias
4.09 a 4.12	Compressão uniaxial	89 dias
5.01 a 5.04	Compressão uniaxial	32 dias
5.05 a 5.08	Compressão diametral	35 dias
5.09 a 5.12	Compressão uniaxial	89 dias

Fonte: Elaboração própria (2025)

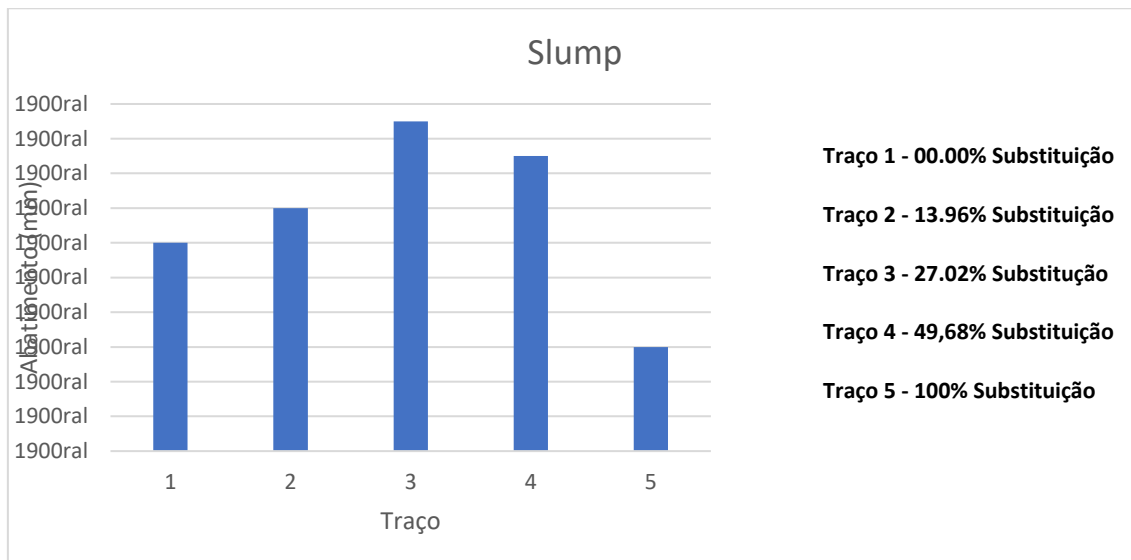
Figura 6.9 – Prensa ensaio



Fonte: Acervo próprio

Foi realizada a determinação da consistência do concreto conforme a NBR 16889:2020, conhecido como Slump Test, tendo como resultados ilustrados conforme gráfico abaixo:

Figura 6.10 – Ensaio de abatimento



Fonte: Elaboração própria

A Tabela 6.10 apresenta os valores de abatimento obtidos nos diferentes traços, permitindo observar variações relevantes ao longo da substituição progressiva dos agregados naturais por reciclados. Embora se esperasse uma redução gradual da trabalhabilidade com o aumento do teor de agregados reciclados, os resultados indicam uma inconsistência entre os traços 1, 2 e 3, o que revela uma não conformidade na compensação da água de amassamento entre esses traços, especialmente no traço 3, cujo alto valor de slump não condiz com o comportamento típico de concretos com maior teor de materiais porosos. A ausência do ensaio de absorção de água dos agregados reciclados comprometeu a calibração adequada da relação água/cimento efetiva, refletindo em um comportamento inesperado da mistura e em perda de homogeneidade entre os traços.

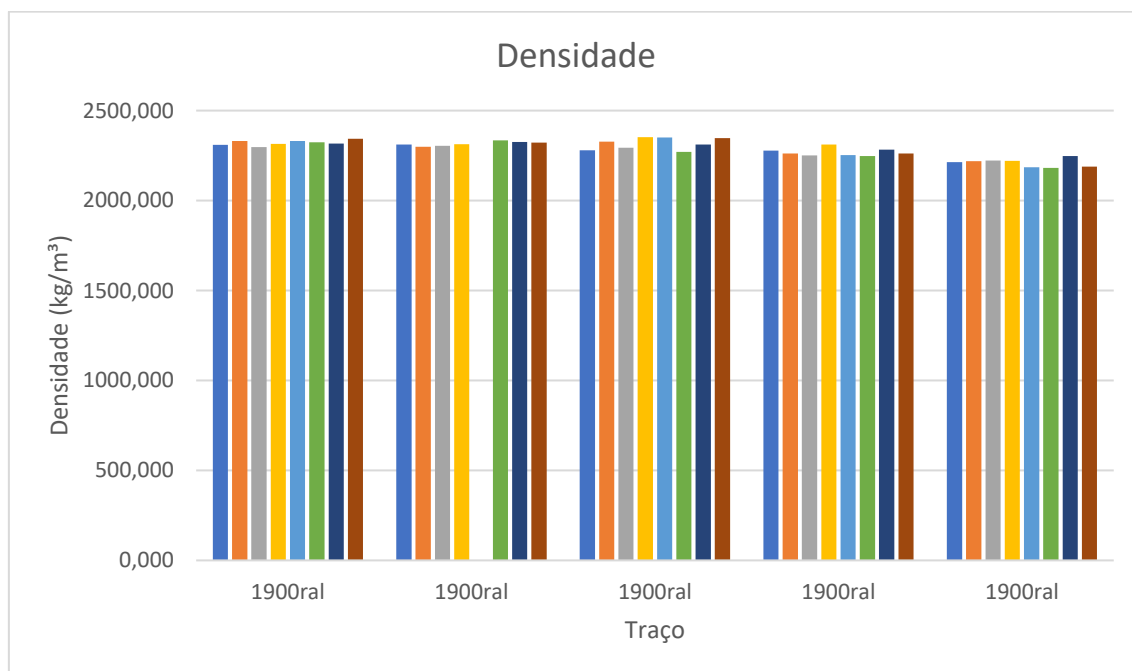
No traço 5, que utilizou apenas agregados reciclados, o abatimento foi reduzido drasticamente para 30 mm, indicando uma severa perda de trabalhabilidade, compatível com a alta absorção de água desses materiais. Essa resposta reforça a importância do ensaio de absorção prévio para ajustes precisos no teor de água. Trabalhos como os de COSTA et al. (2025), HADJARI et al. (2025) e KIM et al. (2019) destacam que a correta compensação da água absorvida pelos AGRs é fundamental para garantir a consistência e o desempenho da mistura. Além disso, TRIVEDI et al. (2025) reforça que a presença de resíduos cerâmicos (como tijolos, presentes nos AGRs utilizados) agrava esse efeito, acelerando a perda de fluidez. Assim, pode-se concluir que a falta de controle desse parâmetro resultou em um comportamento

incompatível com o desempenho esperado para concretos bem dosados, comprometendo a confiabilidade dos traços em termos de trabalhabilidade.

É possível notar que a substituição parcial não teve grande influência no slump, contudo a substituição total por agregados reciclados determinou em uma alta absorção de água, tendo uma influência direta no slump. Ou seja, há uma alta demanda por água devido ao aumento da porosidade dos AGRs (Agregados Graúdos Reciclados) o que leva a uma perda de trabalhabilidade refletido principalmente em níveis de substituição a partir do traço 3 ao traço 5, quando há apenas AGR. Este resultado é também encontrado em trabalhos desenvolvidos por COSTA et al (2025) e HADJARI et al (2025) e KIM et al (2019). Ainda, segundo TRIVEDI et al (2025), uma diminuição do slump foi percebida com o aumento de materiais cerâmicos em substituição aos agregados naturais, como resíduos de tijolos presentes nos traços do presente trabalho.

Foi realizado ainda a pesagem dos CPs após a retirada dos mesmos do tanque, ou seja, foi obtido densidade saturada dos CPs, sendo ilustrado pela figura a seguir:

Figura 6.11 – Densidade CPs



Fonte: Elaboração própria

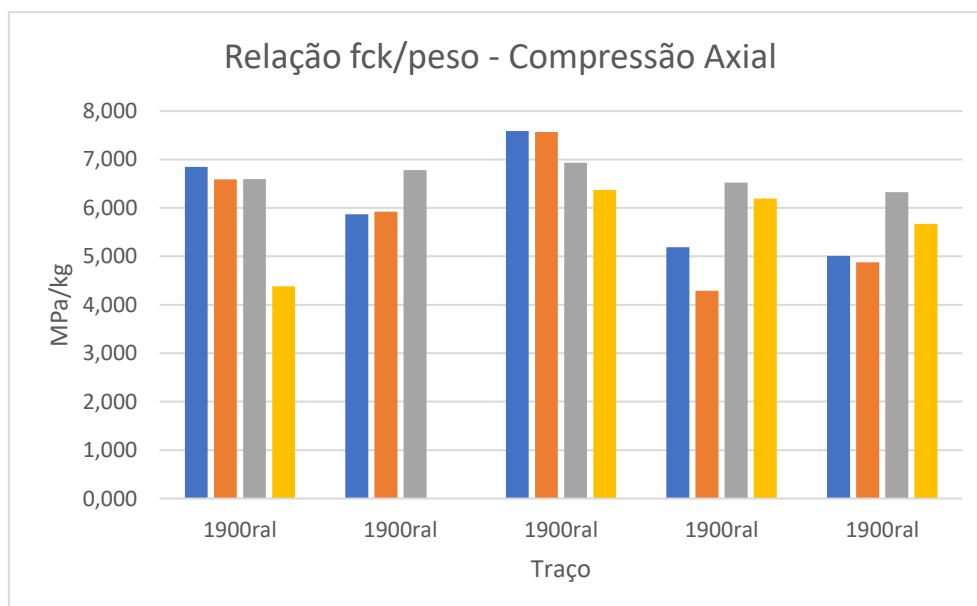
Os pesos foram registrados para rompimento nas idades de 35 dias e 89 dias. Para o CP 2.09 a pesagem foi descartada pois ocorreu falha na moldagem, conforme especificado na Tabela 6.9. No gráfico da Figura 6.11 cada grupo de barras representa um traço, sendo T.05 a T.12 para todos os traços exceto o traço 2, que exclui o CP 2.09. (T representa o número do traço).

Nota-se que existe uma influência da substituição dos agregados com a redução do peso, pode-se relacionar também a influência do slump em relação ao peso.

Os resultados indicaram uma redução progressiva do peso médio do concreto à medida que aumentou a substituição de agregados convencionais por recicláveis. O Traço 1 (0% substituição) apresentou peso médio de 3,60 kg, enquanto o Traço 5 (100% substituição) registrou 3,47 kg, uma diminuição de 3,6%. Embora o Traço 2 tenha mantido valores próximos ao controle, a partir de 25% de substituição (Traço 3) a tendência decrescente tornou-se clara, atingindo reduções significativas nos traços subsequentes. Essa diminuição está associada à menor densidade dos agregados reciclados, cuja microporosidade e composição heterogênea reduzem a massa específica do compósito. A correlação entre maior teor de agregados reciclados e leveza do concreto reforça o potencial sustentável do material, ainda que exija atenção a propriedades mecânicas, já que a porosidade pode comprometer a resistência mecânica.

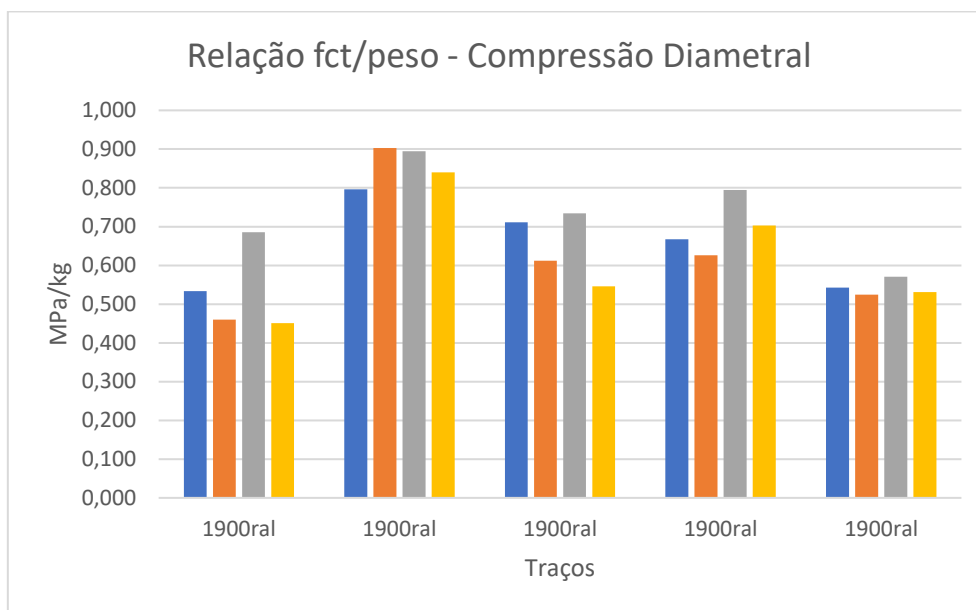
Além da redução de peso, foram analisadas as relações entre a resistência à compressão (f_{ck}) e a resistência à tração por compressão diametral (f_{ct}) com o peso dos CPs, a fim de avaliar a eficiência do concreto em termos de resistência por unidade de massa. Os resultados dos ensaios de compressão uniaxial e de compressão diametral são apresentados no item 6.5. A seguir os gráficos onde apresentam-se os dados:

Figura 6.12 – Peso CPs para ensaio de compressão uniaxial aos 89 dias



Fonte: Elaboração própria

Figura 6.13 – Peso CPs para ensaio de compressão diametral aos 35 dias



Fonte: Elaboração própria

Para a resistência à compressão, observou-se que, até 50% de substituição dos agregados convencionais por reciclados (Traço 3), a relação fck/peso aumentou de 6,103 MPa/kg (Traço 1) para 7,11 MPa/kg, indicando uma melhoria na eficiência estrutural do material. No entanto, para teores de substituição superiores a 50% (Traços 4 e 5), a relação fck/peso diminuiu progressivamente, atingindo 5,471 MPa/kg no Traço 5 (100% substituição). Essa diminuição sugere que, embora o concreto com altos teores de agregados reciclados seja mais leve, a porosidade e a heterogeneidade do material podem comprometer sua resistência mecânica.

No caso da resistência à tração na compressão diametral (fct), a relação fct/peso apresentou um comportamento distinto. Foi observado que a relação fct/peso para o concreto de referência (Traço 1) foi de 0,542 MPa/kg. Para 27% de substituição (Traço 2), a relação fct/peso aumentou significativamente, atingindo 0,858 MPa/kg, o que representa um aumento de 61% em relação ao Traço 1. Para 50% de substituição (Traço 3), a relação diminuiu para 0,651 MPa/kg, mas ainda se manteve superior ao valor do Traço 1. Para 75% de substituição (Traço 4), a relação fct/peso aumentou novamente, atingindo 0,698 MPa/kg, indicando uma melhoria na eficiência do material. No entanto, para 100% de substituição (Traço 5), a relação fct/peso retornou a valores próximos ao do Traço 1 (0,542 MPa/kg), sugerindo que a substituição total dos agregados convencionais pode não ser vantajosa em termos de resistência à tração.

Portanto, a substituição de até 50% dos agregados convencionais por reciclados mostrou-se como uma alternativa viável, combinando redução de peso e manutenção das

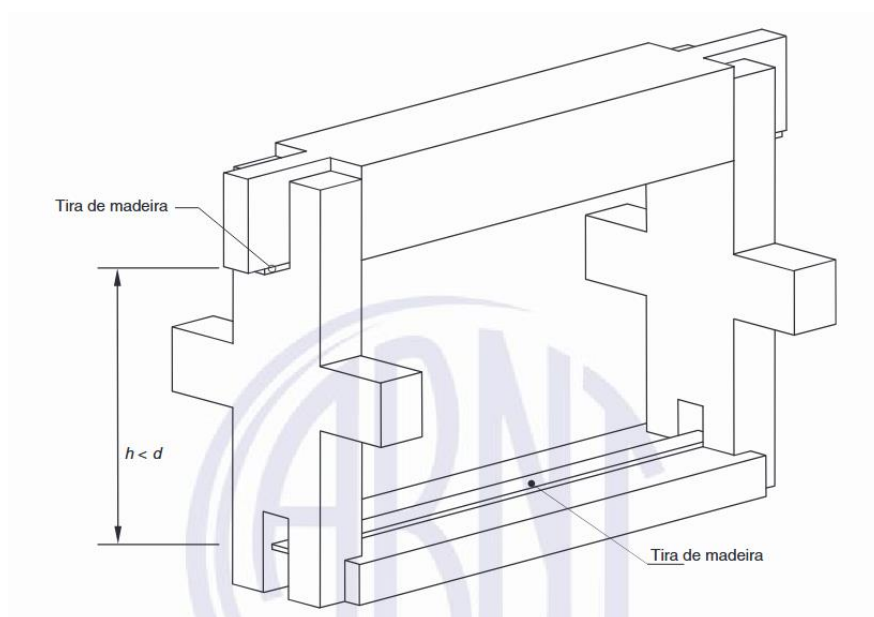
propriedades mecânicas. Ressalta-se, no entanto, que essas conclusões são válidas para os agregados reciclados utilizados neste estudo, provenientes da região de Catalão-GO, e que novos experimentos são necessários para ampliar a base estatística e confirmar esses resultados.

6.5 ROMPIMENTO DOS CORPOS DE PROVA CILÍNDRICOS

Os rompimentos dos CPs foram realizados conforme as normas NBR 5739:2018 (para ensaios de compressão axial) e NBR 7222:2011 (para ensaios de tração por compressão diametral). Para o ensaio de compressão axial, adotou-se uma taxa de deformação constante de $0,245 \pm 0,15$ MPa/s, conforme especificado na NBR 5739:2018. Já para o ensaio de compressão diametral, a taxa de carregamento foi de $0,05 \pm 0,02$ MPa/s, conforme estabelecido na NBR 7222:2011.

Antes dos ensaios, as dimensões dos CPs (diâmetro e altura) foram medidas com um paquímetro de precisão ($\pm 0,05$ mm) e inseridas no sistema de aquisição de dados da máquina de ensaios. Essas medições permitiram o cálculo da área transversal dos CPs, necessária para a determinação das tensões aplicadas. No ensaio de compressão diametral, a força aplicada foi calculada a partir da leitura do extensômetro acoplado ao corpo de prova, que mediu a deformação diametral durante o carregamento. O dispositivo auxiliar utilizado para o ensaio de compressão diametral (NBR 7222:2011) foi adaptado para este estudo para posicionamento do extensômetro:

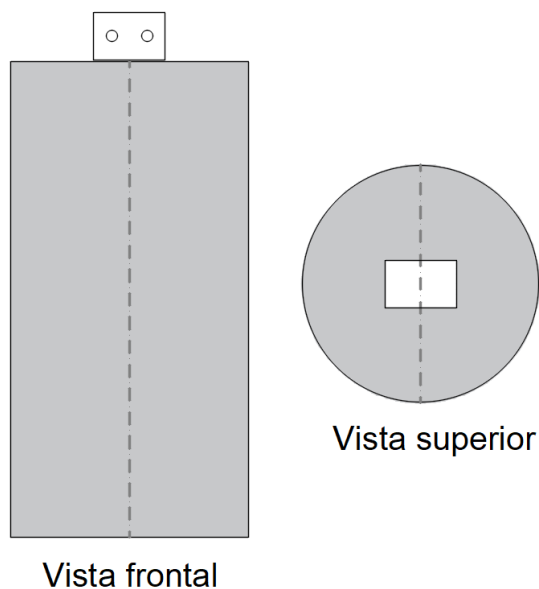
Figura 6.14 – Ilustração dispositivo



Fonte: NBR 7222:2011

Para posicionamento do extensômetro foi retirada a parte da frente do dispositivo auxiliar. O extensômetro foi posicionado de tal forma que capturasse o deslocamento transversal do CP, para isso foram coladas, com adesivo epóxi, chapas de metal conforme ilustra a figura abaixo:

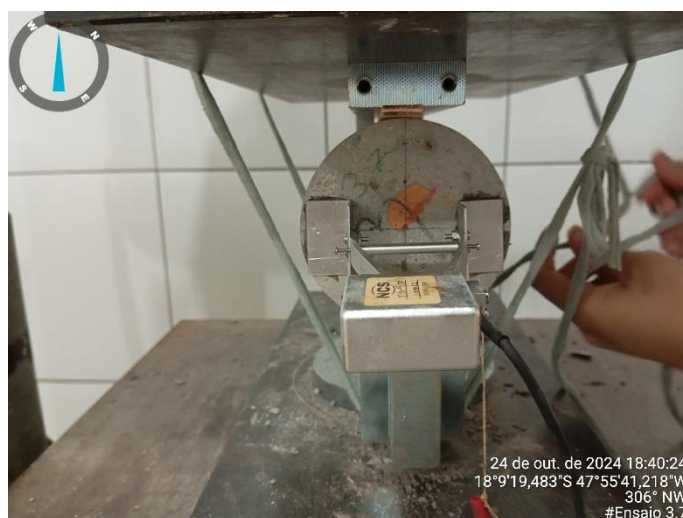
Figura 6.15 – Desenho chapas CPs



Fonte: Elaboração própria

O posicionamento do CP no dispositivo auxiliar juntamente com a fixação do extensômetro é ilustrado na Figura 6.16):

Figura 6.16 – CP posicionado para rompimento



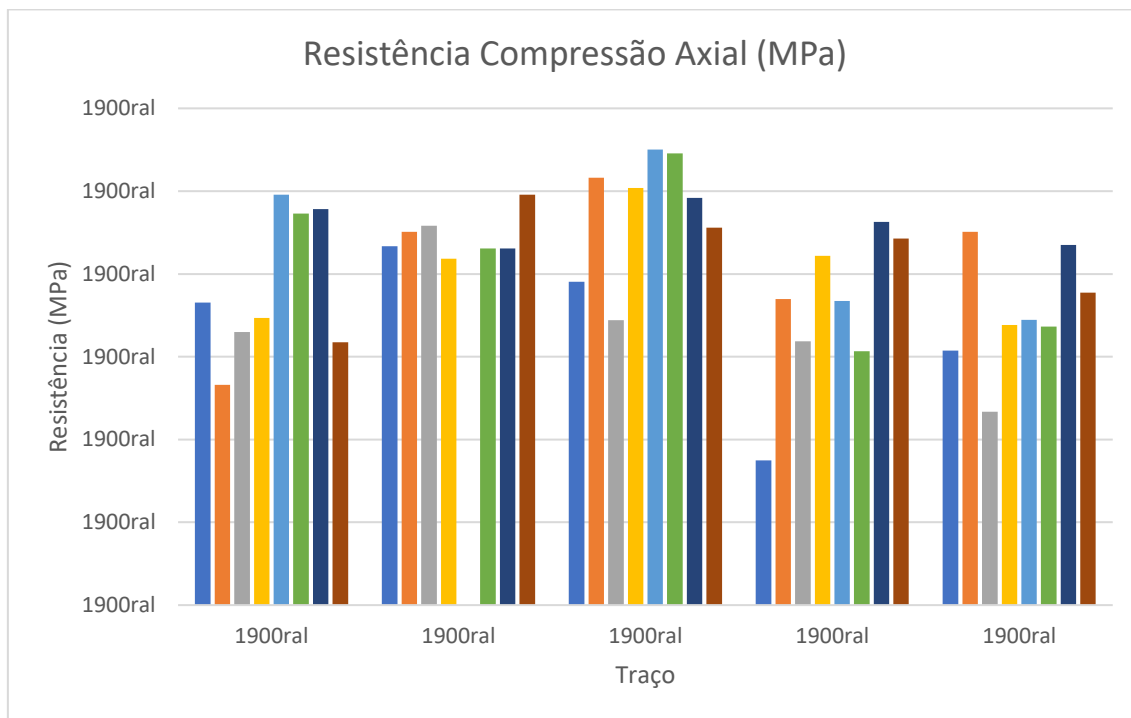
Fonte: Acervo próprio

Na Figura 6.17), é apresentado o gráfico de rompimento de compressão uniaxial de 32 dias, quatro primeiras barras e 89 dias, quatro últimas barras, para cada traço. Conforme mencionado anteriormente, o CP 2.09 teve falha de moldagem, sendo descartado das análises. Já na Figura 6.18 apresentam-se o gráfico com as resistências obtidas nos ensaios de compressão diametral aos 35 dias. Analisando as figuras, pode-se considerar que existe um ponto ótimo de substituição para manter o comportamento mecânico do concreto, acima de limites de 27% de substituição observa-se redução progressiva no desempenho, principalmente em substituições acima de 50% onde a porosidade e fragilidade dos AGRs afetam significativamente a integridade do concreto, o que está de acordo com a literatura, segundo TRIVEDI et al (2025), após revisão de trabalhos na área. A mesma constatação foi obtida nos ensaios do trabalho de KIM et al (2019), onde os concretos ensaiados naquele trabalho apresentaram um comportamento similar ao da Figura 17 para concretos com resistência à compressão da ordem de 24 MPa e de 35 MPa. Já em HADJARI et al (2025), nos concretos ensaiados com resistência da ordem de 40 MPa, o mesmo comportamento foi observado por KIM et al (2019), onde a substituição por AGR em 30% teve a mesma ordem de grandeza de resistência para a substituição de 100% com um pico de resistência em 60% de substituição. Também, em LU (2025), após análise em banco de dados com 932 exemplares de ensaios à compressão aos 28 dias, foi observado que com até 20% de substituição de AGN por AGR, a resistência à compressão tem um aumento de valor 14,6% (indo de 44,7 MPa no concreto com 0% de substituição à 51,2 MPa no concreto com 20% de substituição) e que conforme o teor de substituição cresce, a resistência à compressão. Porém com picos de resistência em algumas substituições até 100%, o que corrobora com os resultados encontrados no presente trabalho.

Já no caso da resistência à tração por compressão diametral, em TRIVEDI et al (2025) diz que aquela resistência apresenta uma taxa de diminuição menor à medida que a substituição de AGN por AGR se dá em altos valores, o que está sendo confirmado na Figura 18. O mesmo comportamento é relatado em HADJARI et al. (2025). Também em LU (2024), após análise em banco de dados com 498 exemplares de teste de compressão diametral, foi observado uma variação da resistência à tração dos concretos, não sendo necessariamente evidenciada uma perda de resistência à tração conforme o aumento da substituição de AGN por AGR.

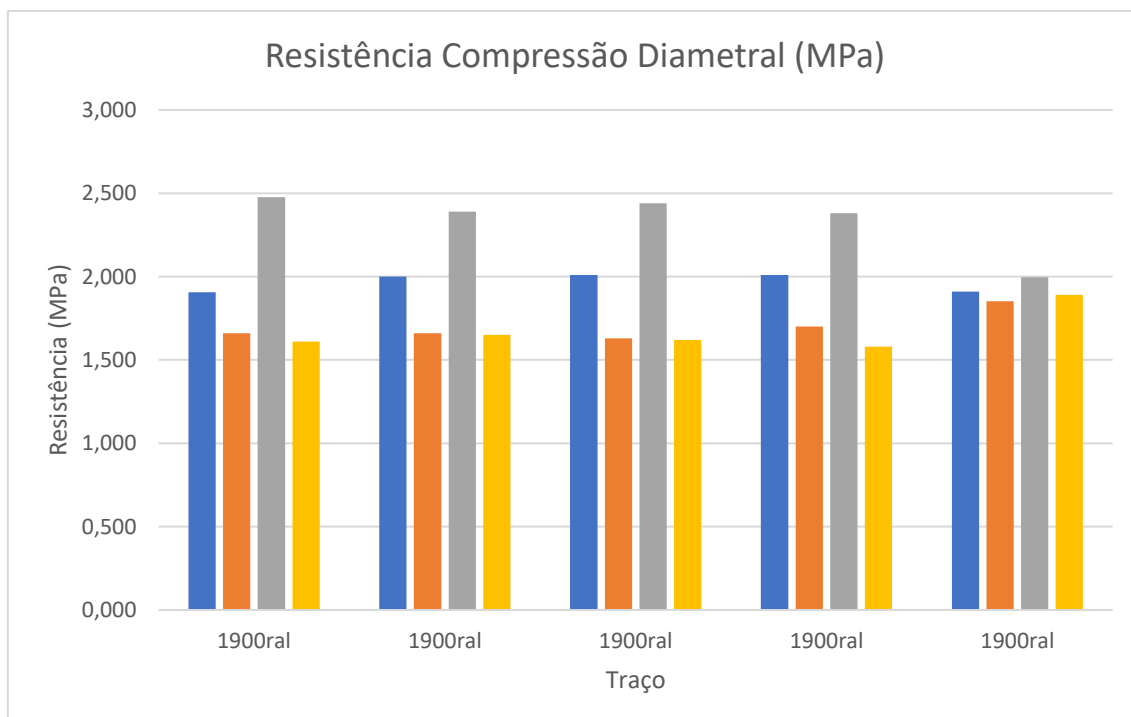
Por fim, segundo TRIVEDI et al. (2025), a resistência à compressão do concreto reciclado é influenciada pela dimensão principal do agregado, além da fonte do resíduo que ele é derivado.

Figura 6.17 – Resistências Compressão Axial



Fonte: Elaboração própria

Figura 6.18 – Resistências Compressão diametral



Fonte: Elaboração própria

Observa-se que existe uma correlação entre os ensaios, quanto maiores resistências axiais, maiores resistência diametra. Pode-se inferir ainda que existe um ponto ótimo de

substituição para manter o comportamento mecânico do concreto, acima de limites de 27% de substituição observa-se redução progressiva no desempenho, principalmente em substituições acima de 50% onde a porosidade e fragilidade dos agregados reciclados afetam significativamente a integridade do concreto.

Durante a moldagem dos corpos de prova (CPs), foi realizada a compensação de água conforme preconizado na NBR 15116:2021, que estabelece ajustes na dosagem para contrabalançar a absorção de água dos agregados reciclados. Contudo, durante a análise a posteriori dos resultados, observou-se que a quantidade de água compensada mostrou-se inferior à necessária para equilibrar a elevada porosidade do material reciclado utilizado. Esse desvio ocorreu devido à subestimação da taxa de absorção específica do agregado em questão, possivelmente associada à heterogeneidade intrínseca do resíduo, que pode variar significativamente entre lotes.

Assim como observado por COSTA et al. (2025), a alta absorção dos agregados reciclados demanda uma compensação hídrica precisa para evitar alterações indesejadas na relação água/cimento. No presente estudo, embora a compensação tenha sido realizada conforme a NBR 15116:2021, a variabilidade intrínseca do material reciclado pode ter contribuído para uma subestimação prática. Esse fenômeno reforça a necessidade de caracterização individualizada de cada lote de agregado, conforme destacado na literatura recente.

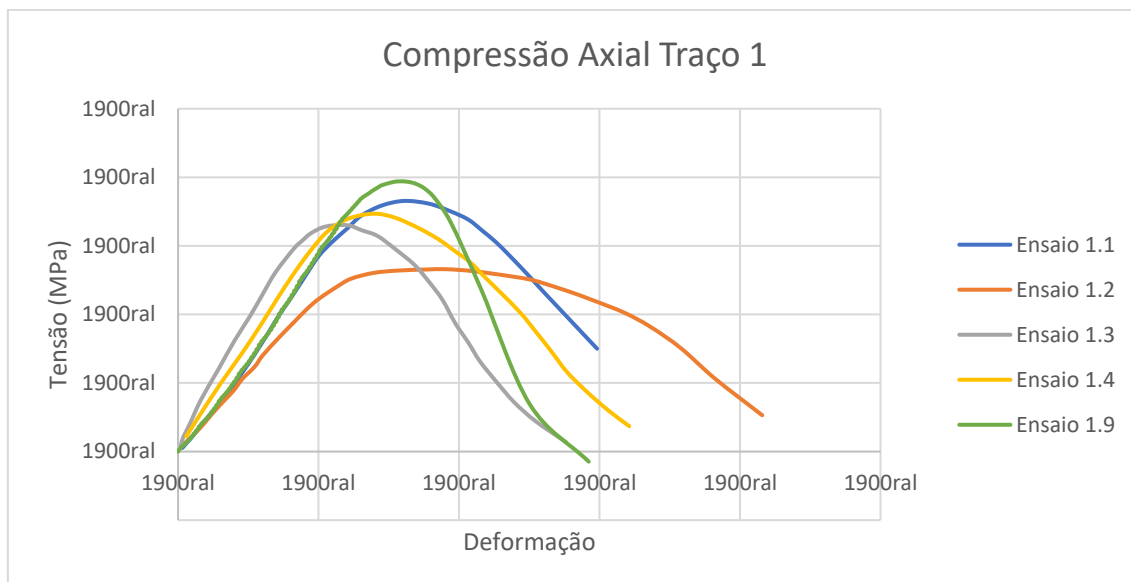
Embora o procedimento adotado tenha seguido os parâmetros normativos, a experiência evidenciou a importância de análises complementares para caracterização detalhada dos agregados antes da dosagem, especialmente em materiais reciclados de origem diversificada. Ressalta-se que o fenômeno foi devidamente registrado e considerado na interpretação dos resultados mecânicos.

É relevante destacar que os ensaios experimentais realizados têm caráter complementar ao escopo principal desta pesquisa, que visa desenvolver um modelo numérico para previsão do comportamento mecânico de concretos com agregados reciclados. Os dados obtidos, mesmo com as limitações mencionadas, foram utilizados para parametrização da curva de calibração do modelo, garantindo que as variáveis críticas fossem consideradas. Essa abordagem permite que eventuais discrepâncias observadas nos ensaios sejam ajustadas numericamente, sem comprometer a análise teórica. Como ilustrado nas Figura 6.19) a Figura 6.28) (curvas tensão x deformação nos ensaios de compressão axial e compressão diametral geradas pela prensa), os resultados experimentais cumprem um papel secundário, porém essencial, na validação empírica das hipóteses do estudo. Tais gráficos não apenas apresentam a resposta mecânica dos CPs, mas também fornecem subsídios quantitativos para refinar a sensibilidade do modelo numérico a variações de deformação. Assim, enquanto o foco analítico permanece na otimização do sistema

de simulação computacional, as curvas obtidas experimentalmente funcionam como marcos para calibrar a precisão das previsões teóricas.

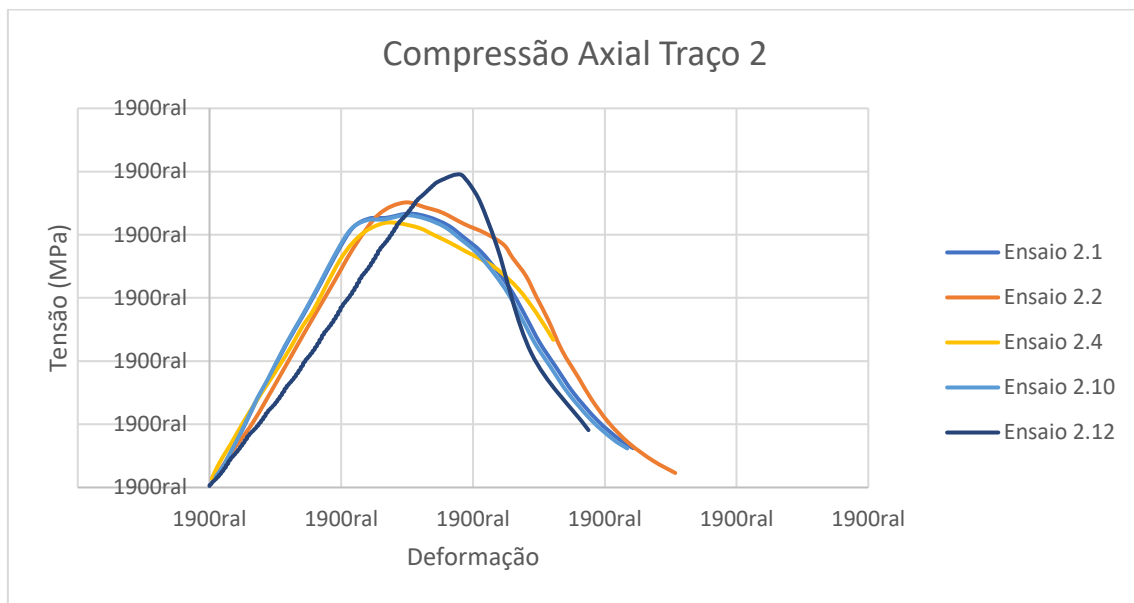
Para o ensaio 1.9, que é de rompimento à compressão uniaxial aos 89 dias, observou-se um comportamento inicial diferente das demais curvas, com uma rigidez inferior no trecho inicial. Após análise, considerou-se que essa diferença se deve a um efeito inicial do sistema de ensaio, provavelmente relacionado ao ajuste do CP na mesa de ensaio (fenômeno similar ao que é conhecido como carga de escovamento). Diante disso, optou-se por desconsiderar a parte inicial da curva que apresenta esse comportamento atípico, assumindo que a aplicação efetiva da carga e, conseqüentemente, o início da resposta mecânica do material, ocorreram a partir do ponto em que se observa uma alteração na rigidez. Assim, o ensaio 1.9 foi mantido na análise, com a devida correção no ponto de origem dos dados, garantindo maior consistência estatística entre as curvas comparadas.

Figura 6.19 – Curva Tensão x Deformação



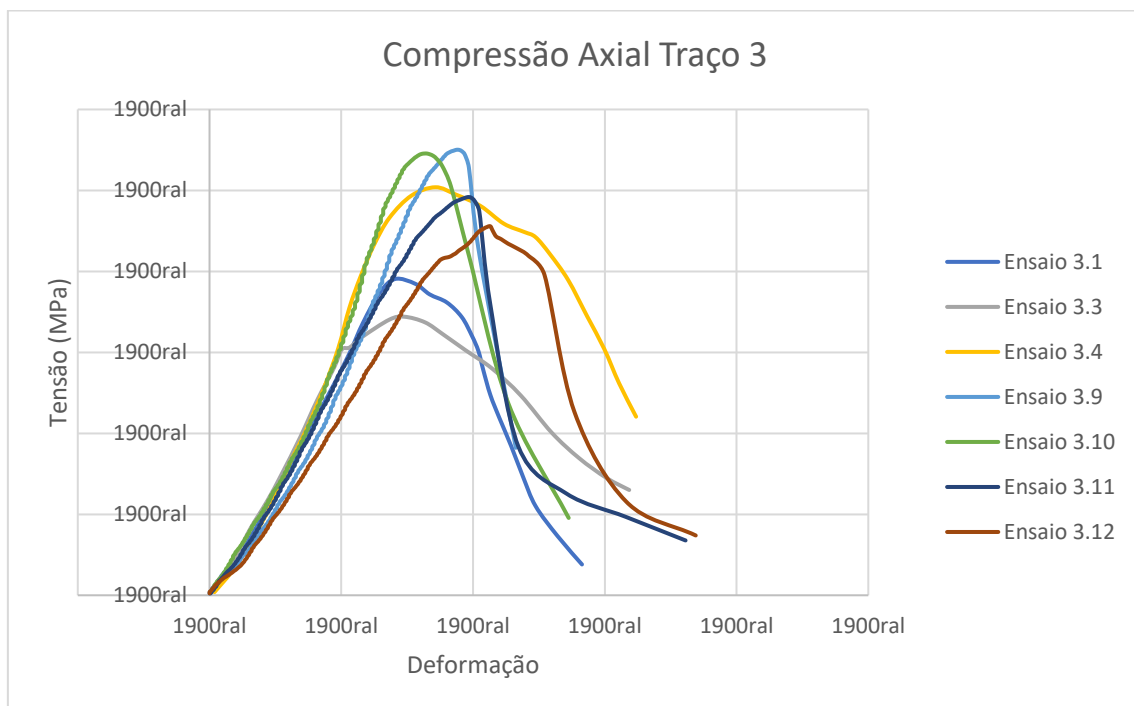
Fonte: Elaboração própria

Figura 6.20 – Curva Tensão x Deformação



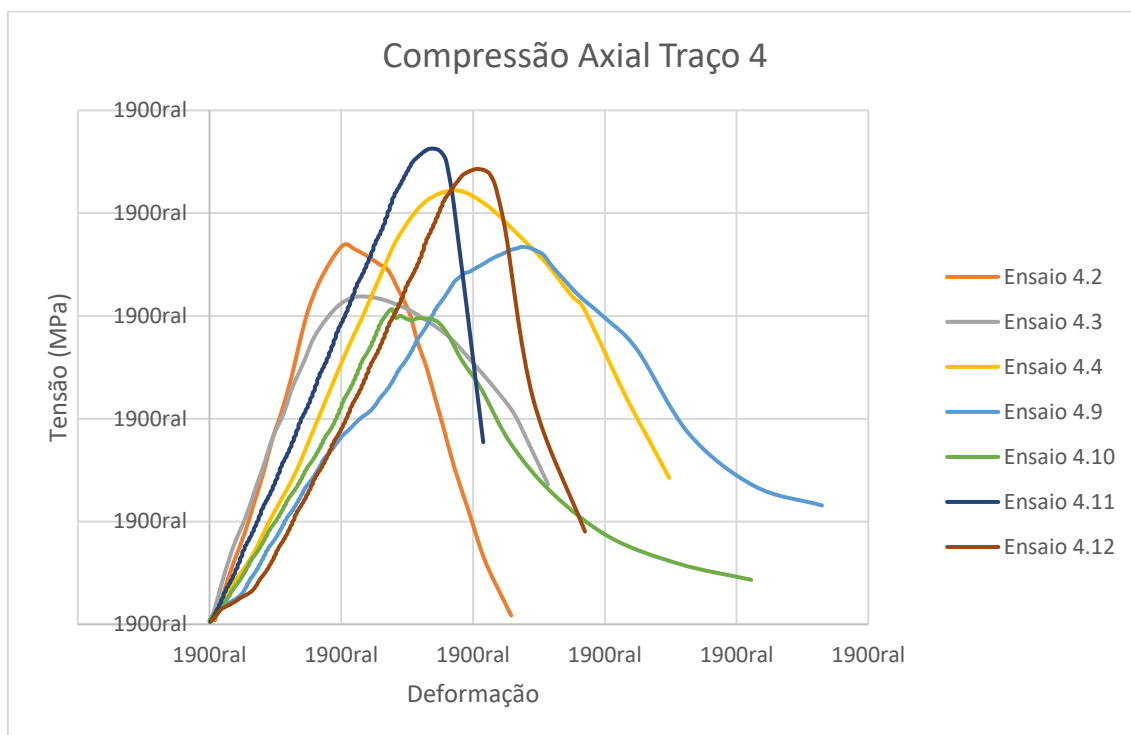
Fonte: Elaboração própria

Figura 6.21 – Curva Tensão x Deformação



Fonte: Elaboração própria

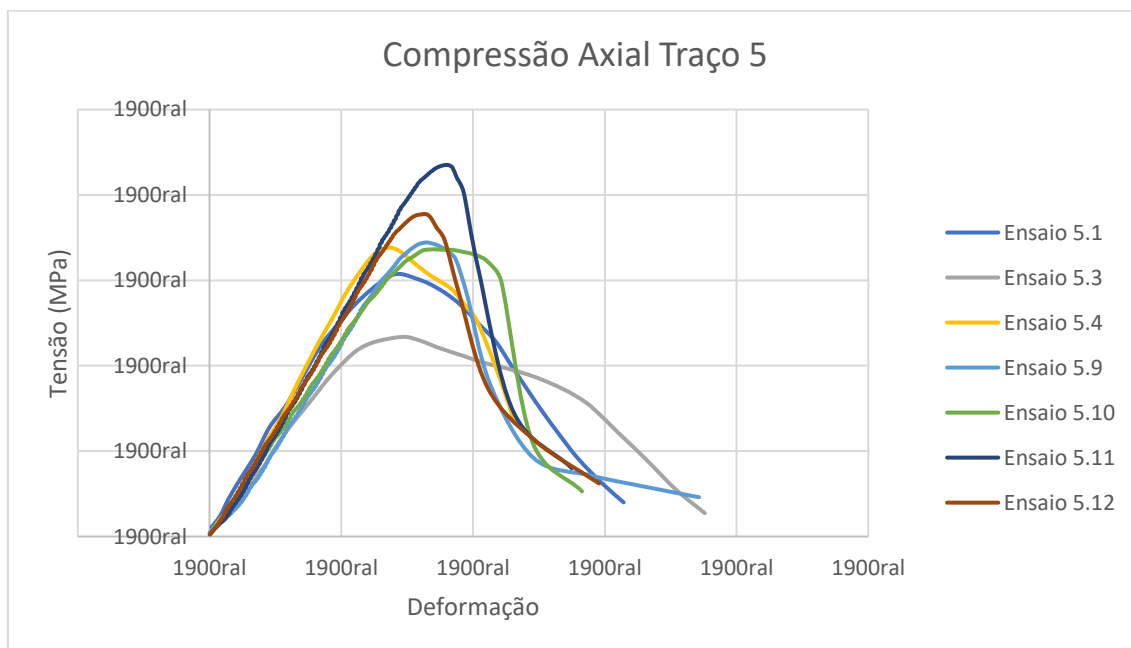
Figura 6.22 – Curva Tensão x Deformação



Fonte: Elaboração própria

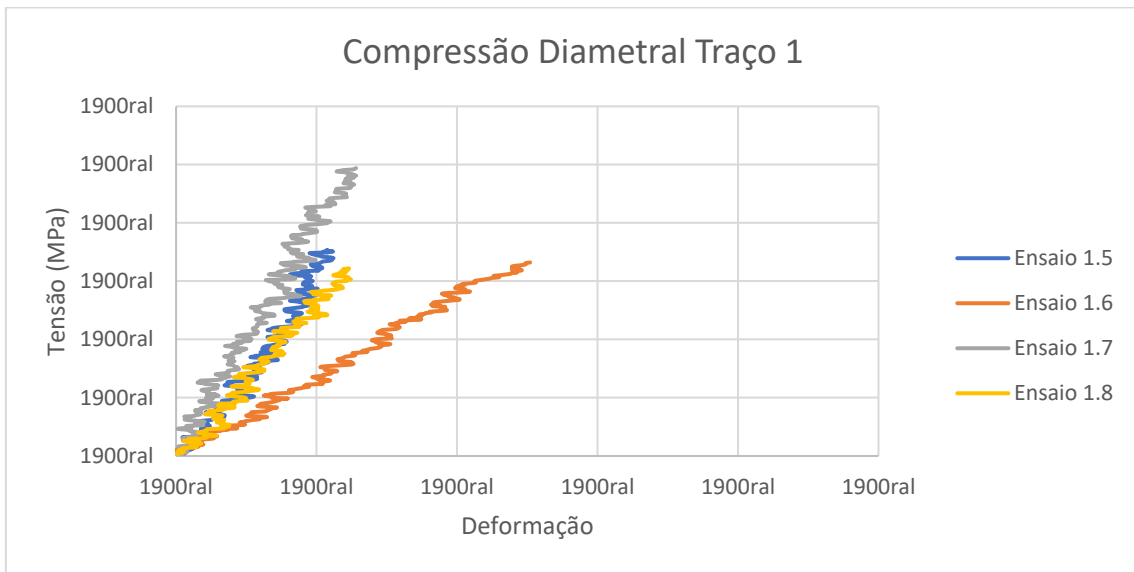
Figura 6.17 – Curva Tensão x Deformação

Figura 6.23 – Curva Tensão x Deformação



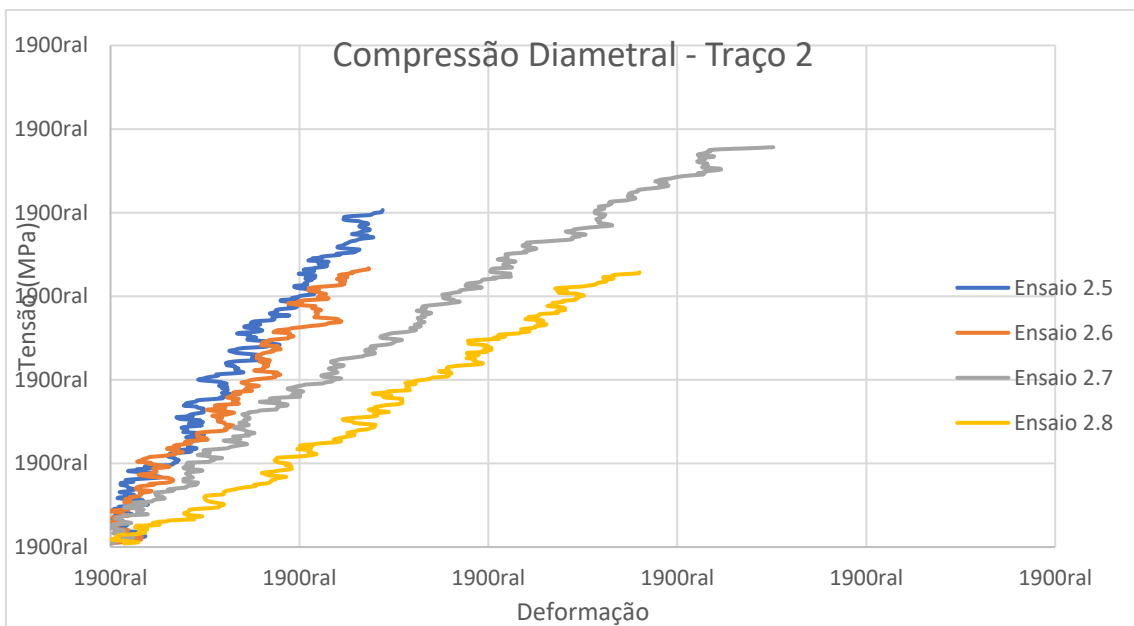
Fonte: Elaboração própria

Figura 6.24 – Curva Tensão x Deformação



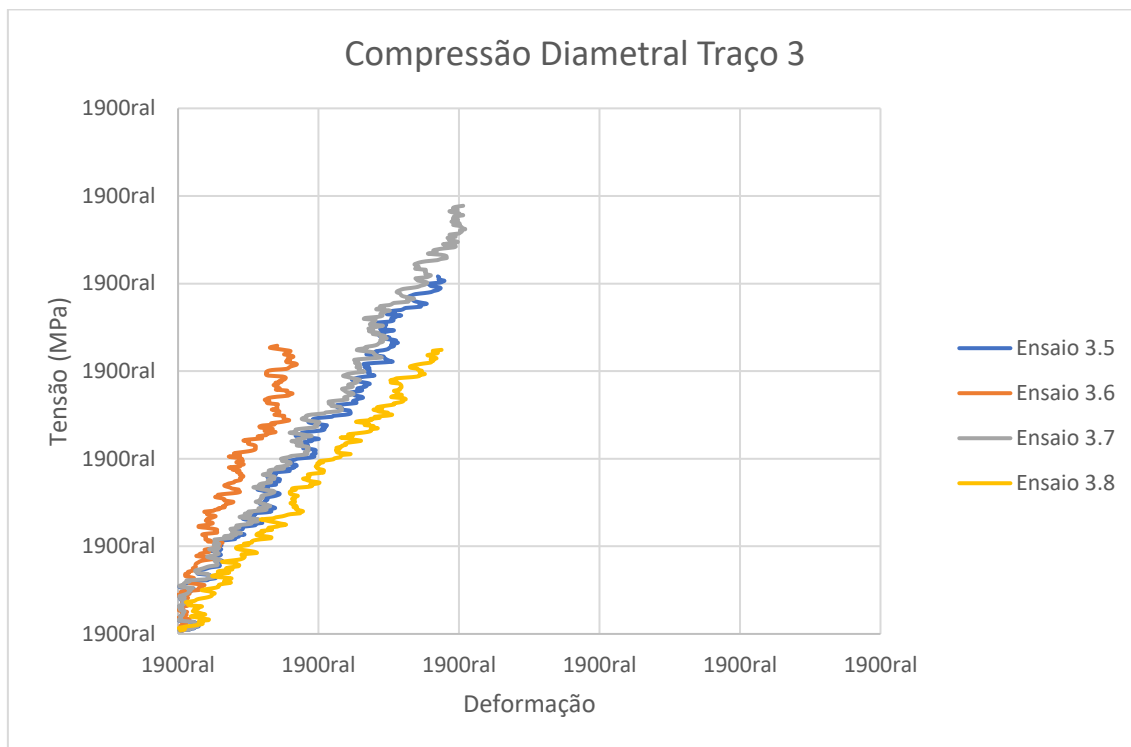
Fonte: Elaboração própria

Figura 6.25 – Curva Tensão x Deformação



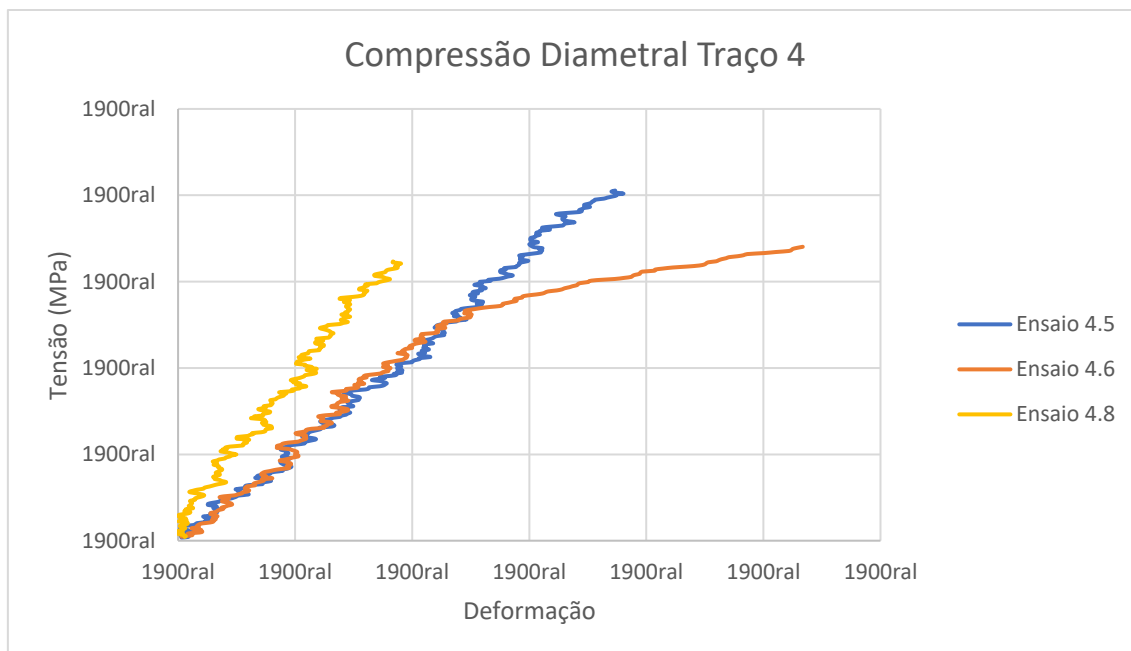
Fonte: Elaboração própria

Figura 6.26 – Curva Tensão x Deformação



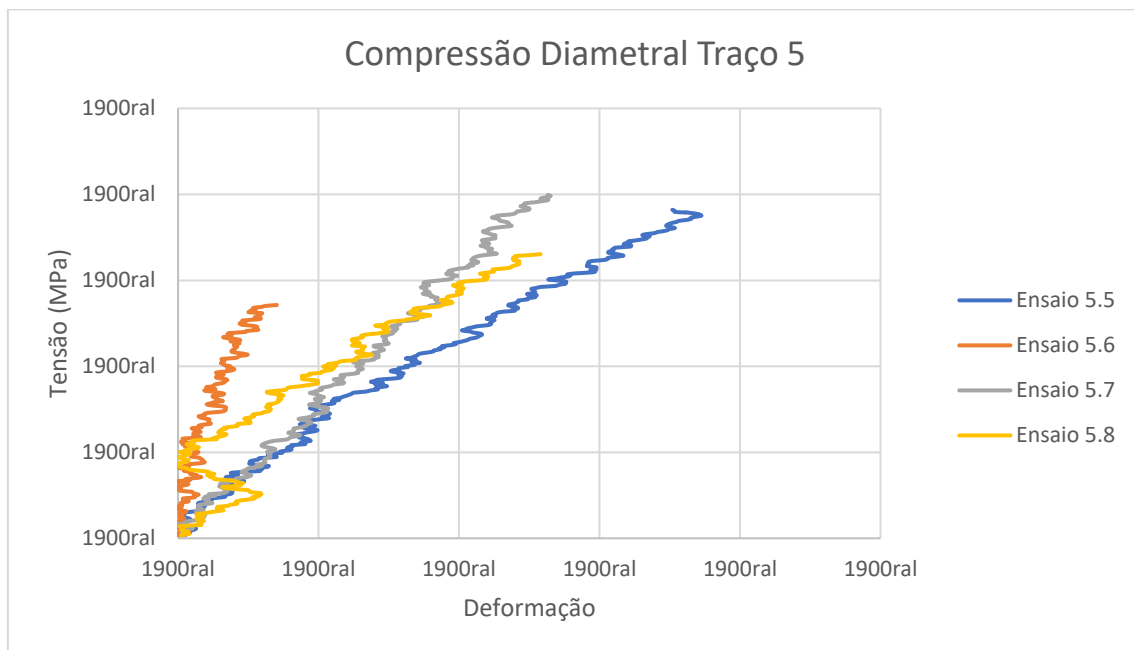
Fonte: Elaboração própria

Figura 6.27 – Curva Tensão x Deformação



Fonte: Elaboração própria

Figura 6.28 – Curva Tensão x Deformação



Fonte: Elaboração própria

A seguir algumas fotos dos rompimentos:

Figura 6.29 – Foto rompimento compressão axial



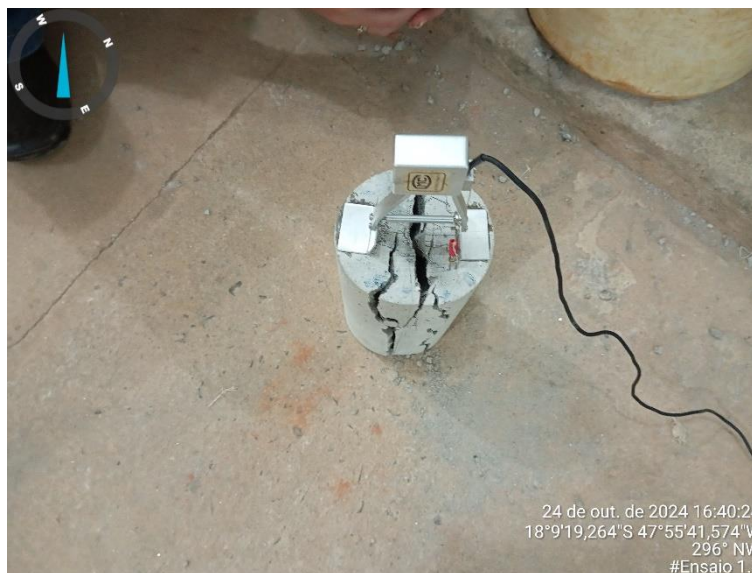
Fonte: Acervo próprio

Figura 6.30 – Foto rompimento compressão diametral



Fonte: Acervo próprio

Figura 6.31 – Foto CP rompido com extensômetro



Fonte: Acervo próprio

Figura 6.32 – Foto CP rompido compressão axial



Fonte: Acervo próprio

Figura 6.33 – Foto CP rompido compressão diametral

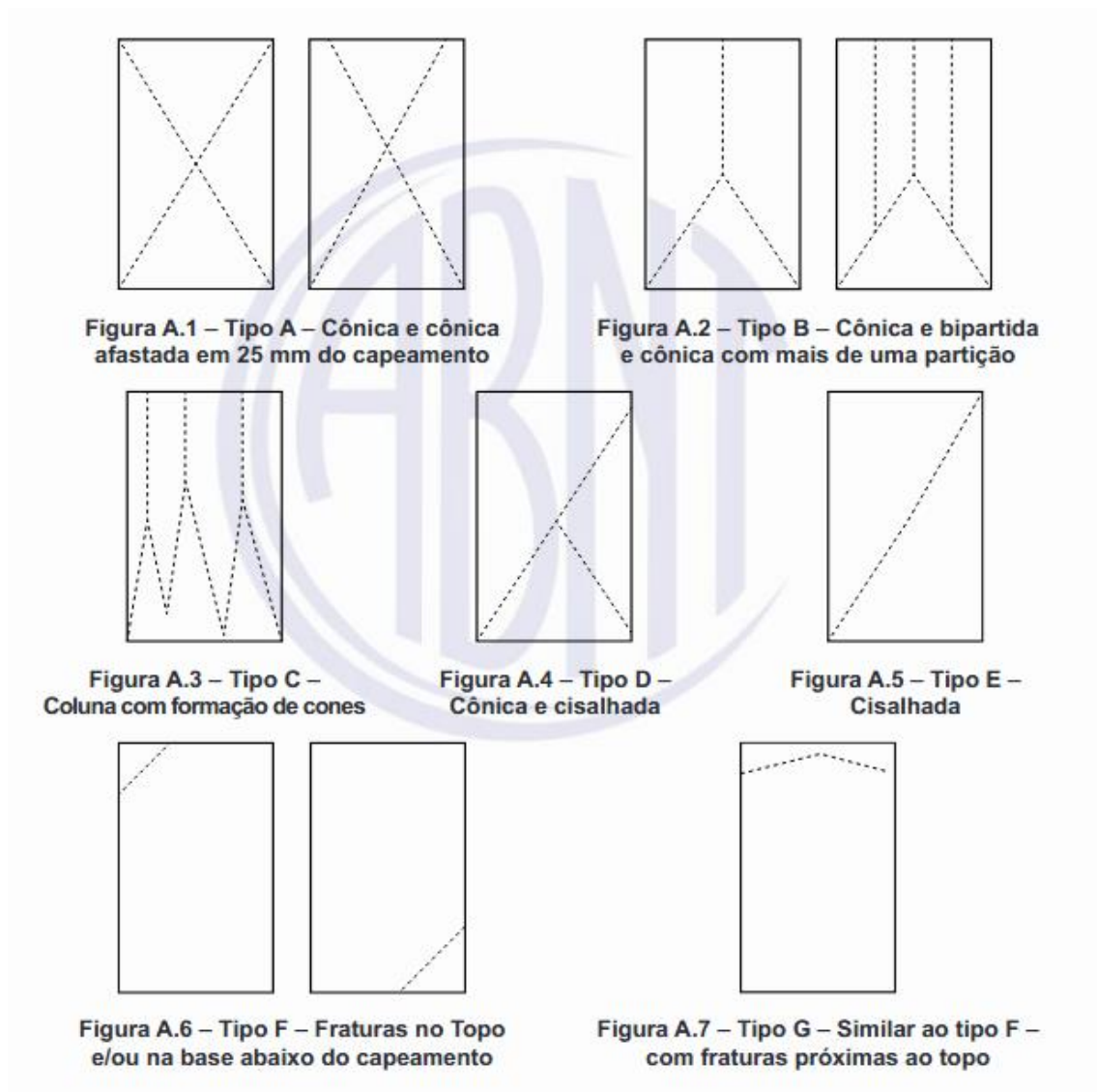


Fonte: Acervo próprio

6.6 TIPO DE RUPTURA

Nesse item são apresentados os tipos de ruptura conforme a NBR 5739:2018:

Figura 6.34 – Tipos de ruptura



Fonte: NBR 5739:2018

Os tipos de ruptura são apresentados nas tabelas a seguir:

Tabela 6.10 – Tipos de Ruptura Traço 1

Ensaio	Tipo Ruptura
1.01	E
1.02	E
1.03	B
1.04	E
1.09	B
1.10	B

1.11	C
1.12	C
Fonte: Elaboração própria (2024)	

Tabela 6.11 – Tipos de Ruptura Traço 2

Ensaio	Tipo Ruptura
2.01	C
2.02	C
2.03	E
2.04	C
2.10	E
2.11	C
2.12	C
Fonte: Elaboração própria (2025)	

Tabela 6.12 – Tipos de Ruptura Traço 3

Ensaio	Tipo Ruptura
3.01	B
3.02	C
3.03	B
3.04	A
3.09	E
3.10	C
3.11	B
3.12	E
Fonte: Elaboração própria (2025)	

Tabela 6.13 – Tipos de Ruptura Traço 4

Ensaio	Tipo Ruptura
4.01	B
4.02	E
4.03	C
4.04	C
4.09	C
4.10	E
4.11	B
4.12	E
Fonte: Elaboração própria (2025)	

Tabela 6.14 – Tipos de Ruptura Traço 5

Ensaio	Tipo Ruptura
5.01	D
5.02	D
5.03	C
5.04	E
5.09	E
5.10	E
5.11	B
5.12	C

Fonte: Elaboração própria
(2025)

Os resultados obtidos indicam que a substituição de agregados naturais por reciclados não promoveu alterações drásticas nos modos de ruptura predominantes dos corpos de prova sob compressão axial, mantendo-se majoritariamente dentro dos padrões considerados aceitáveis pela NBR 5739:2018 (rupturas do tipo A, B e E). No entanto, observa-se uma sutil mudança no comportamento de ruptura à medida que se eleva o teor de substituição.

Nos traços com menor teor de agregado reciclado (Traço 1 e Traço 2), predominam rupturas do tipo E e C, indicando um concreto com bom desempenho estrutural e integridade mecânica. A partir dos traços com substituições mais elevadas (Traço 3 e Traço 4), verifica-se um aumento da frequência de rupturas do tipo B, sugerindo uma leve perda de coesão entre os constituintes do concreto.

No Traço 5 — correspondente à substituição integral dos agregados naturais — aparecem rupturas do tipo D, além de uma maior incidência do tipo E. Essas ocorrências indicam que, em teores elevados de substituição, a presença do agregado reciclado pode favorecer zonas de fragilidade na matriz, possivelmente relacionadas à maior porosidade e menor aderência entre pasta e agregado.

Ainda assim, mesmo nos traços com 100% de substituição, os modos de ruptura mantêm-se, em sua maioria, dentro do espectro considerado aceitável pela norma. A seguir algumas fotos dos rompimentos:

Figura 6.35 – Ruptura Ensaio 2.10



Fonte: Acervo próprio

Figura 6.36 – Ruptura Ensaio 3.02



Fonte: Acervo próprio

Figura 6.37 – Ruptura Ensaio 3.03



Fonte: Acervo próprio

Figura 6.38 – Ruptura Ensaio 4.03



Fonte: Acervo próprio

Figura 6.39 – Ruptura Ensaio 5.01



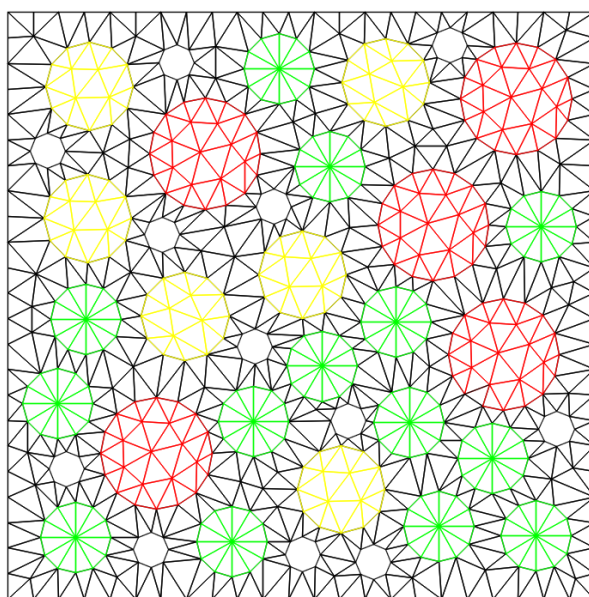
Fonte: Acervo próprio

7 MODELAGEM NUMÉRICA DO CONCRETO COM AGREGADOS RECICLADOS

7.1 DEFINIÇÃO DA MICROESTRUTURA DOS EVRS

Conforme mencionado anteriormente o EVR é elaborado partindo-se de algumas definições paramétricas do trabalho de SILVA et al. (2022), mostrado na Figura 7.1), EVR com 5 inclusões grandes (19 mm), 6 inclusões médias (15 mm) e 14 inclusões pequenas (12 mm).

Figura 7.1 – EVR 1116 células



Fonte: Elaboração própria

Para as análises existem dois tipos de EVRs, um com elementos de contato e fratura apenas nas inclusões grandes e outro com elementos de contato e fratura nas inclusões grandes e médias. Sendo assim faz-se duas especificações de EVRs. São feitas análises de compressão e de tração em cada EVR. O EVR com fratura apenas nas inclusões grandes contém 1116 células, 721 nós e 80 elementos de contato e fratura. O EVR com fratura nas inclusões grandes e médias contém 1116 células 793 nós e 152 elementos de contato e fratura. Conforme especificado na Tab. (6.9) o EVR do Traço 1 conta com apenas duas fases, sendo matriz e inclusões; já os Traços 2 a 4, contam com três fases, sendo matriz, inclusão e inclusão reciclada; o Traço 5 também conta com apenas duas fases, sendo matriz e inclusões recicladas, visto que a substituição é de 100%. Para os traços que contam com proporções de agregado reciclado os parâmetros da ZTI serão divididos em dois grupos, sendo um grupo de parâmetros para as inclusões normais e o outro para as inclusões recicláveis.

Para todos os testes os ensaios experimentais foram transformados em uma curva única de referência, para que o ensaio numérico possa ser mais bem verificado em relação ao experimental.

7.2 CONCRETO COM SUBSTITUIÇÃO DE 0% (TRAÇO 1)

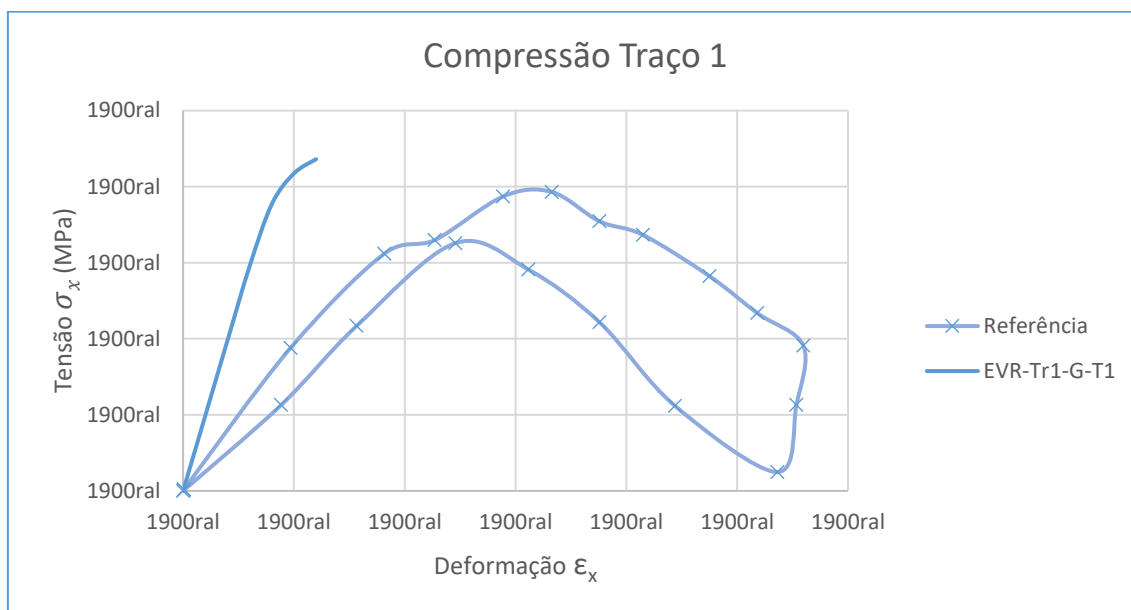
O Elemento de Volume Representativo (EVR) foi desenvolvido com base nos parâmetros estabelecidos por SILVA et al. (2022). Entretanto, durante a análise comparativa, constatou-se que a rigidez e a resistência do concreto de referência do presente estudo apresentaram discrepâncias significativas em relação ao concreto modelado numericamente em SILVA et al. (2022). No Teste 01 da Figura 7.2, adotaram-se os mesmos parâmetros do estudo anterior (SILVA et al. (2024)), sem modificações e foi imposto ao EVR condições de contorno de flutuação de deslocamentos periódicas, detalhado no item 2.7. Foram ainda impostas as deformações de $\varepsilon_x = -0,006$; $\varepsilon_y = 0,0012$; $\gamma_{xy} = 0$ para simular os efeitos de compressão e de $\varepsilon_x = 0,0004$; $\varepsilon_y = 0,00008$; $\gamma_{xy} = 0$ para simular os efeitos de tração. O coeficiente de Poisson da matriz é definido de e da inclusão, os demais parâmetros da curva EVR Teste 1 segue conforme Tabela 7.1). O modelo constitutivo da matriz é regido pelo critério de Mohr-Coulomb, enquanto as inclusões obedecem a regime elástico.

A nomenclatura dos testes é definida conforme o exemplo: EVR-Tr1-G-T1 – EVR do traço 01, com fraturas somente nas inclusões grandes, com teste de parâmetros número 1. Sendo sempre padronizado o primeiro termo do nome indicando que é a análise de um EVR, o segundo termo definindo o traço (Tr1 a Tr5), o terceiro termo são as inclusões fraturadas (“G” para as grandes e “GM” para grandes e médias) e o último termo indicando o número do teste dos parâmetros.

Como as análises contam com fenômenos dissipativos, as deformações impostas ao EVR, devem ser divididas em incrementos de deformações, sendo a resposta homogeneizada do EVR obtida para cada um desses incrementos. Foi-se realizado um estudo sobre a quantidade de incrementos a ser considerada para se ter uma boa representação da curva tensão *versus* deformação, e constatou-se que 30 incrementos são suficientes para uma boa representação.

Conforme pode ser constatado pela Figura 7.2), o Teste 1 ficou muito discrepante das curvas da resposta mecânica dos ensaios experimentais. Logo, foi necessário realizar redefinições paramétricas para adequação ao comportamento mecânico observado experimentalmente no presente trabalho. A curva de referência foi elaborada conforme os ensaios experimentais, apresentadas no item 6.5 do capítulo anterior (ver Fig. (6.19)):

Figura 7.2 – Resultados Experimentais do traço 1 e resultado numérico para compressão do EVR-Tr1-G-T1, considerando descolamento de fase apenas nas interfaces dos agregados maiores



Fonte: Elaboração própria

Tabela 7.1 – Propriedades Elásticas e Parâmetros do Modelo de Mohr-Coulomb para EVR-Tr1-G-T1

Fase	Nomenclatura	Poisson (ν)	E(GPa)	Modelo Constitutivo	Curva plasticidade (ϵ_p, σ_y (MPa))	Ângulo de atrito e dilatância (ϕ)
Matriz	EVR-Tr1-G-T1	0.200	23	Mohr-Coulomb	(0;11) (0.22;40)	4°
Inclusão	EVR-Tr1-G-T1	0.300	40	Elástico	-	-

Fonte: Elaboração própria

Tabela 7.2 – Parâmetros Fratura EVR-Tr1-G-T1

Fase	Nomenclatura	β	σ_c (MPa)	δ_c (mm)	Penalty
ZTI	EVR-Tr1-T1	0.707	1.000	0.0568	200000

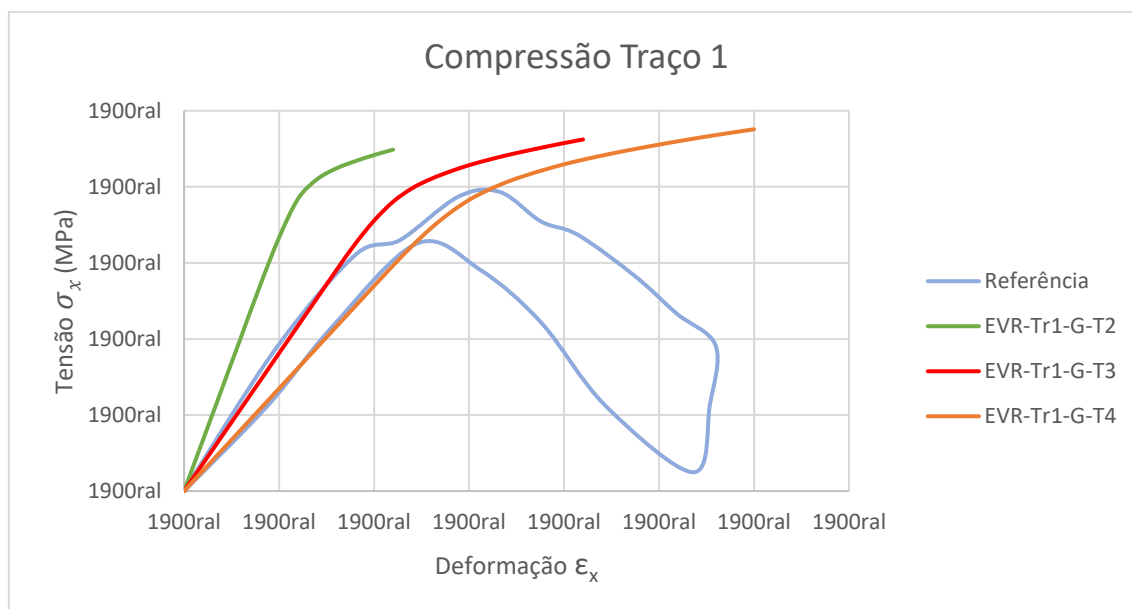
Fonte: Elaboração própria

SILVA et al.. (2022) verificou que a alteração do módulo de elasticidade da inclusão não gera mudanças significativas na rigidez; porém quanto maior o módulo de elasticidade da matriz, maior a rigidez. Foi constatado também que a variação da tensão coesiva não reflete

mudanças significativas nas curvas de compressão. Verificou-se ainda que o primeiro par da curva de plasticidade é diretamente proporcional ao início da curva de escoamento e o segundo par da curva de plasticidade é diretamente proporcional à tensão final do escoamento.

Inicialmente, realizou-se estudo paramétrico para definir os módulos de elasticidade da inclusão e da matriz, para que a análise numérica fosse capaz de representar a rigidez experimental das curvas de ensaio, conforme Figura 7.3 –). Os parâmetros elásticos e do critério de Mohr-Coulomb das curvas apresentadas na Figura 7.3) estão conforme Tabela 7.3), e os parâmetros de fratura se mantiveram os mesmos da Tabela 7.2). Constatou-se que a resposta elástica deveria ficar entre o teste 2 e o teste 4, sendo a melhor aproximação elástica o teste 3.

Figura 7.3 – Resultados Experimentais do traço 1 e resultado numérico para compressão dos EVR-Tr1-G-T2, EVR-Tr1-G-T3, EVR-Tr1-G-T4, considerando descolamento de fase apenas nas interfaces dos agregados maiores



Fonte: Elaboração própria

Tabela 7.3 – Propriedades Elásticas e Parâmetros do Modelo de Mohr-Coulomb para os EVRs EVR-Tr1-T2, EVR-Tr1-T3 e EVR-Tr1-T4

Fase	Nomenclatura	Poisson (ν)	E(GPa)	Modelo Constitutivo	Curva plasticidade ($\bar{\epsilon}_p, \sigma_y$ (MPa))	Ângulo de atrito e dilatância (ϕ)
Matriz	EVR-Tr1-G-T2	0.200	15	Mohr-Coulomb	(0;11) (0.22;25)	4°
Inclusão	EVR-Tr1-G-T2	0.300	30	Elástico	-	-
Matriz	EVR-Tr1-G-T3	0.200	7	Mohr-Coulomb	(0;11) (0.22;25)	4°
Inclusão	EVR-Tr1-G-T3	0.300	30	Elástico	-	-
Matriz	EVR-Tr1-G-T4	0.200	5	Mohr-Coulomb	(0;11) (0.22;25)	4°

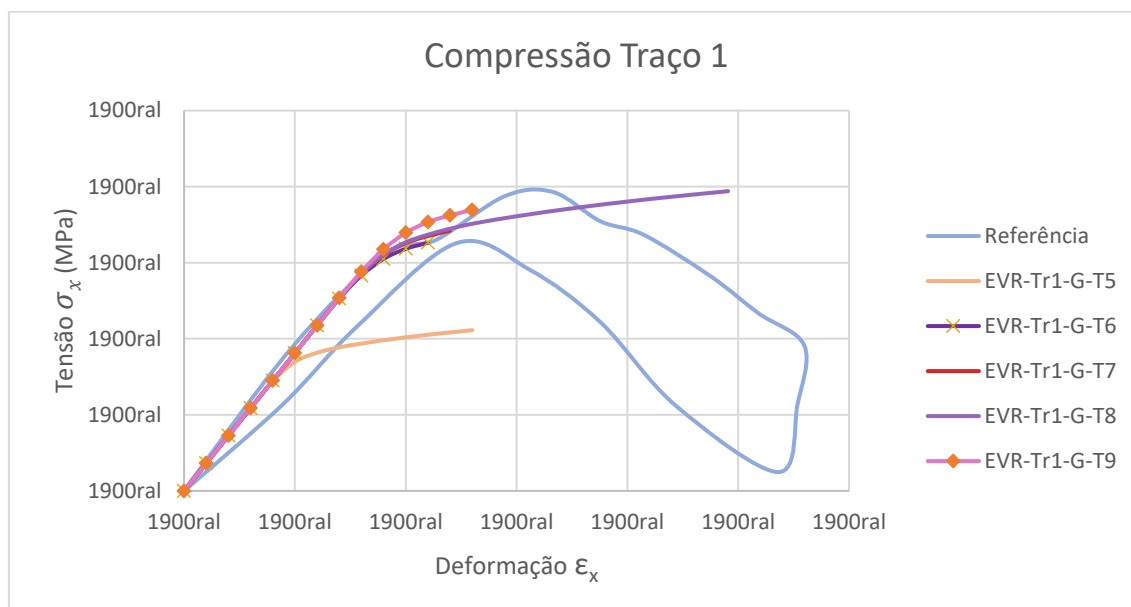
Inclusão	EVR-Tr1-G-T4	0.300	30	Elástico	-	-
----------	--------------	-------	----	----------	---	---

Fonte: Elaboração própria

Como O EVR-Tr1-G-T3 foi o que apresentou melhor aproximação da parte elástica, os parâmetros de elasticidade das fases desse teste foram mantidos nos testes seguintes. Uma vez estabelecida a resposta elástica compatível, realizou-se a parametrização da curva de plasticidade, definindo-se os pares de pontos de deformação plástica e tensão de escoamento efetiva que reproduzissem o encruamento característico do material. Avaliou-se ainda a influência dos ângulos de atrito e dilatância no modelo constitutivo de Mohr-Coulomb. Por meio de variações desses parâmetros, analisou-se sua correlação com o comportamento pós-pico das curvas. Os parâmetros de fratura seguem os mesmos do EVR-Tr1-G-T1. Os novos testes considerados estão definidos Tabela 7.4). Os resultados numéricos estão apresentados na Figura 7.4). Observa-se na Figura 7.4 – que o EVR-Tr1-G-T7 apresentou boa aproximação em relação aos dados experimentais, porém tem uma resistência inferior àquela observada experimentalmente. Por isso, foi realizado o teste EVR-Tr1-G-T8 que apenas difere do EVR-Tr1-G-T7, por ter maior encruamento. Note que a diferença entre EVR-Tr1-G-T6 e EVR-Tr1-G-T9 é a tensão de escoamento inicial e o encruamento que são maiores no EVR-Tr1-G-T9, na tentativa de aproximar melhor à curva experimental. E a única diferença entre EVR-Tr1-G-T6 e EVR-Tr1-G-T10 é o encruamento, que é maior no EVR-Tr1-G-T10. Foi observado na Figura 7.4) que o EVR-Tr1-G-T5 apresenta o pior desempenho com tensão máxima incompatível com qualquer ensaio. O EVR-Tr1-G-T6 mostrou-se insuficiente, subestimando a tensão máxima observada nos ensaios. O EVR-Tr1-G-T7, apresentou boa aproximação na fase elasto-plástica inicial, porém subestimou a resistência máxima experimental. O EVR-Tr1-G-T8, com maior encruamento, superestimou a tensão de pico, ultrapassando claramente os limites experimentais. Quanto ao EVR-Tr1-G-T9, que combina maior tensão de escoamento inicial e encruamento elevado, a curva aproximou-se do Ensaio 1.1, mas manteve um endurecimento contínuo. O EVR-Tr1-G-T10 destacou-se como a melhor aproximação situando-se dentro da faixa experimental e apresentando trajetória ascendente compatível com os dados reais.

A Figura 7.4) evidencia ainda que a variação do ângulo de atrito e de dilatância influenciou diretamente a dissipação de energia após início de plastificação. O EVR-Tr1-G-T7 que tem o ângulo definido em apresenta maior rigidez e resistência que o EVR-Tr1-G-T6 com ângulo definido em O mesmo comportamento é observado com relação aos EVRs EVR-Tr1-G-T8 (ângulo de 4°) e o EVR-Tr1-G-T10 (ângulo de). Porém, observa-se que o EVR-Tr1-G-T8 avança mais na análise por ter encruamento maior que o EVR-Tr1-G-T10.

Figura 7.4 – Resultados Experimentais do traço 1 e resultado numérico para compressão dos EVR-Tr1-G-T5, EVR-Tr1-G-T6, EVR-Tr1-G-T7, EVR-Tr1-G-T8, EVR-Tr1-G-T9, considerando descolamento de fase apenas nas interfaces dos agregados maiores



Fonte: Elaboração própria

Tabela 7.4 – Propriedades Elásticas e Parâmetros do Modelo de Mohr-Coulomb para os EVRs EVR-Tr1-T5, EVR-Tr1-T6, EVR-Tr1-T7, EVR-Tr1-T8, EVR-Tr1-T9 e EVR-Tr1-T10

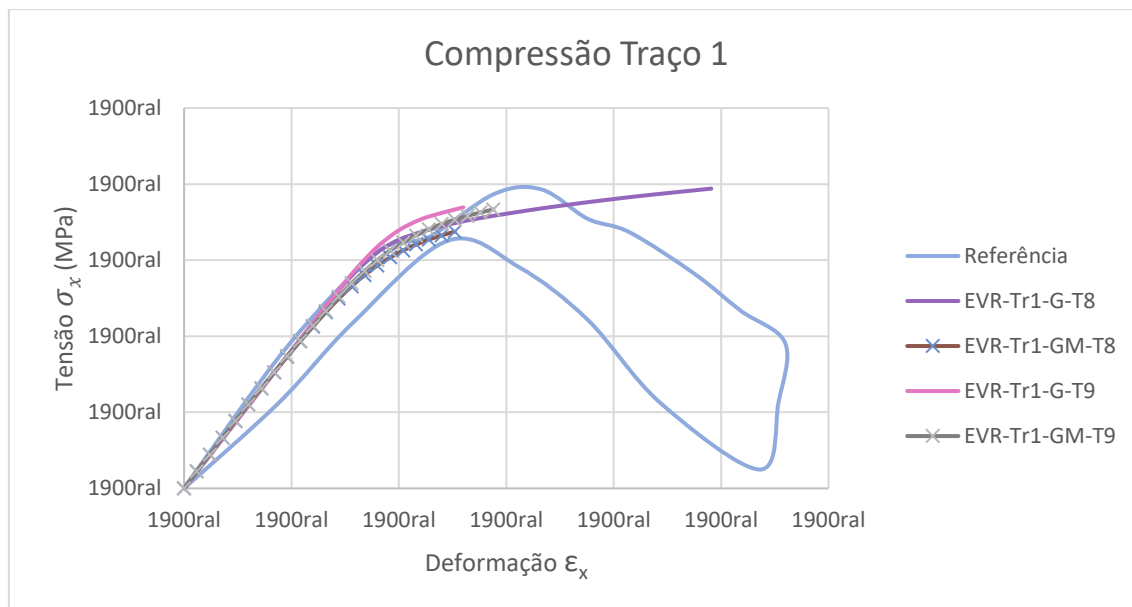
Fase	Nomenclatura	Poisson (ν)	E(GPa)	Modelo Constitutivo	Curva plasticidade (ε _p , σ _y (MPa))	Ângulo de atrito e dilatância (φ)
Matriz	EVR-Tr1-G-T5	0.200	7	Mohr-Coulomb	(0;5) (0.22;10)	2°
Inclusão	EVR-Tr1-G-T5	0.300	30	Elástico	-	-
Matriz	EVR-Tr1-G-T6	0.200	7	Mohr-Coulomb	(0;9) (0.22;15)	2°
Inclusão	EVR-Tr1-G-T6	0.300	30	Elástico	-	-
Matriz	EVR-Tr1-G-T7	0.200	7	Mohr-Coulomb	(0;9) (0.22;15)	4°
Inclusão	EVR-Tr1-G-T7	0.300	30	Elástico	-	-
Matriz	EVR-Tr1-G-T8	0.200	7	Mohr-Coulomb	(0;9) (0.22;18)	4°
Inclusão	EVR-Tr1-G-T8	0.300	30	Elástico	-	-
Matriz	EVR-Tr1-G-T9	0.200	7	Mohr-Coulomb	(0;10) (0.22;18)	2°
Inclusão	EVR-Tr1-G-T9	0.300	30	Elástico	-	-
Matriz	EVR-Tr1-G-T10	0.200	7	Mohr-Coulomb	(0;9) (0.22;17)	2°
Inclusão	EVR-Tr1-G-T10	0.300	30	Elástico	-	-

Fonte: Elaboração própria

Foi realizado ainda os testes 8, 9 e 10 com fraturas nas inclusões grandes e médias, sendo os parâmetros de fratura os mesmos do EVR-Tr1-G-T1, determinados na Tabela 7.2). Para uma convergência melhor dos testes com fratura nas inclusões grandes e médias foi

aumentado o número de incrementos de 30 para 50, sendo o gráfico com as curvas apresentados na Figura 7.5). Os testes que diferem apenas a configuração de fraturas, são analisados separadamente nas Fig. Figura 7.6) a Figura 7.8):

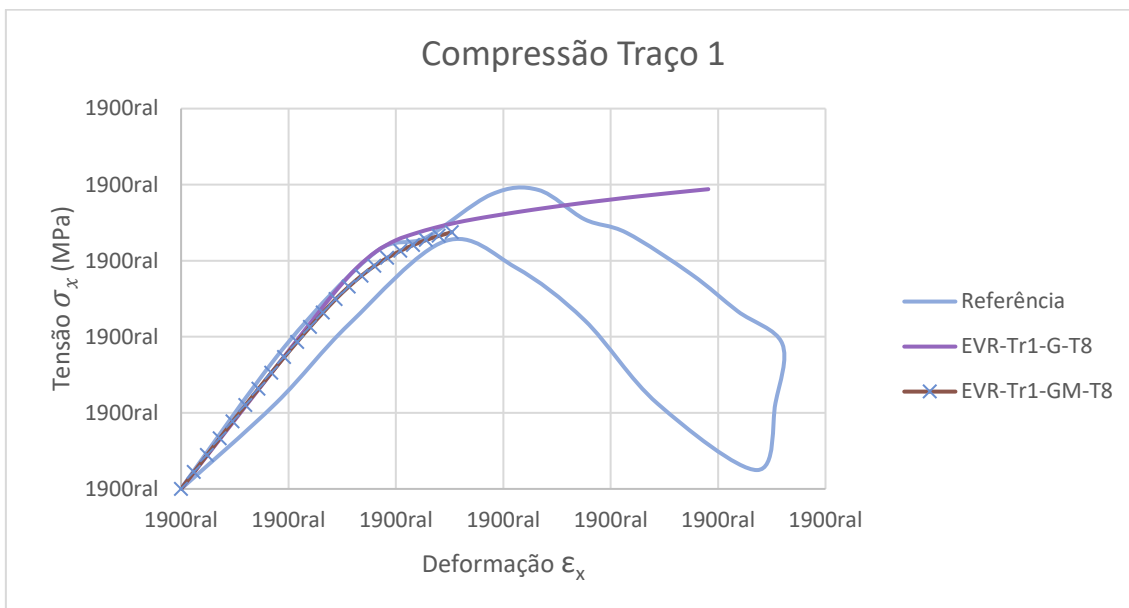
Figura 7.5 – Resultados Experimentais do traço 1 e resultado numérico para compressão dos EVR-Tr1-G-T8, EVR-Tr1-GM-T8, EVR-Tr1-G-T9, EVR-Tr1-GM-T9, EVR-Tr1-G-T10, EVR-Tr1-GM-T10, considerando diferentes configurações de descolamento de fase matriz/inclusão



Fonte: Elaboração própria

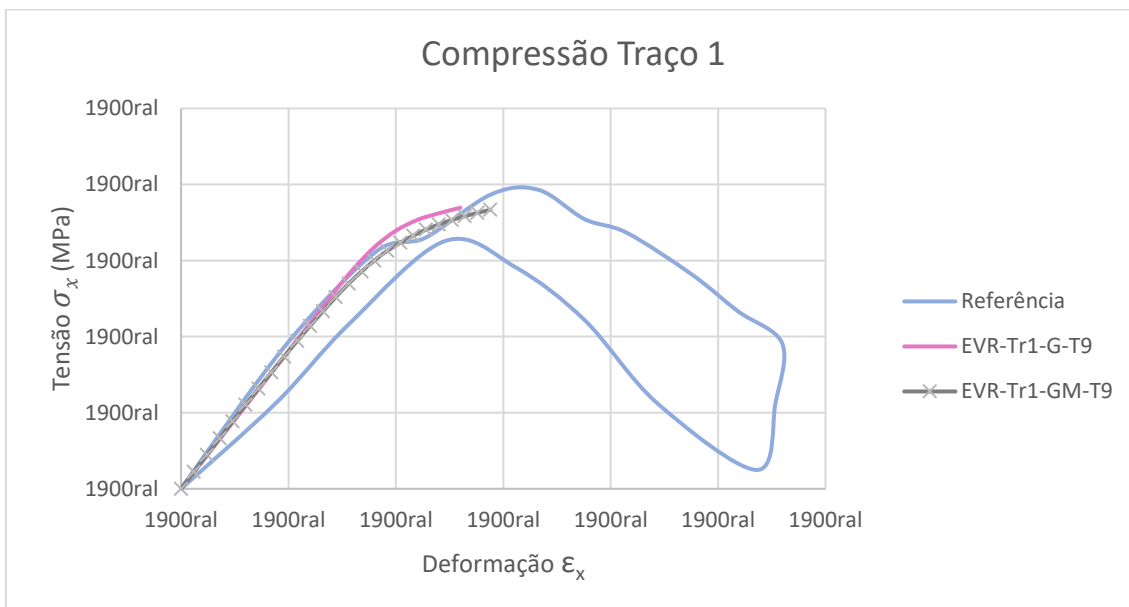
Conforme evidenciado na Figura 7.5), verifica-se que o aumento de ZTIs com elementos de contato e fratura coesiva resulta em maior não-linearidade e degradação antecipada da rigidez, reduzindo a resistência global à deformação. Isso ocorre porque as inclusões médias ampliam a densidade de Zonas de Transição (ZTIs) sujeitas a descolamento, aumentando a dissipação de energia por danos localizados. Essa redução na eficiência mecânica é atribuída à maior concentração de discontinuidades estruturais, que fragmentam a transferência de tensões e aceleram a perda de rigidez:

Figura 7.6 – Resultados Experimentais do traço 1 e resultado numérico para compressão dos EVR-Tr1-G-T8, EVR-Tr1-GM-T8, considerando diferentes configurações de descolamento de fase matriz/inclusão



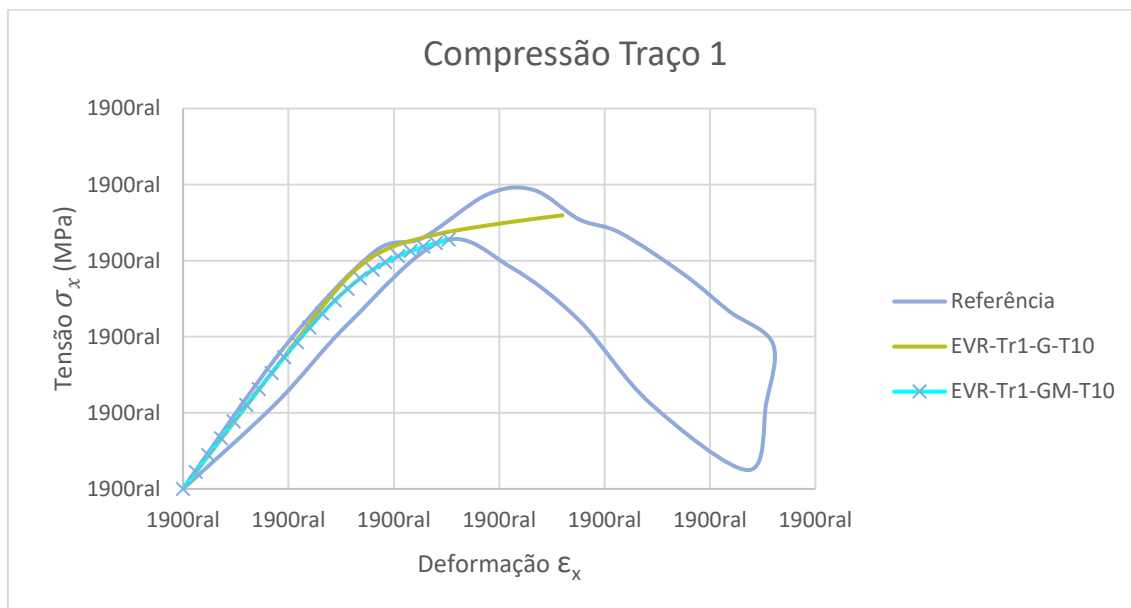
Fonte: Elaboração própria

Figura 7.7 – Resultados Experimentais do traço 1 e resultado numérico para compressão dos EVR-Tr1-G-T9, EVR-Tr1-GM-T9, considerando diferentes configurações de descolamento de fase matriz/inclusão



Fonte: Elaboração própria

Figura 7.8 – Resultados Experimentais do traço 1 e resultado numérico para compressão dos EVR-Tr1-G-T10, EVR-Tr1-GM-T10, considerando diferentes configurações de descolamento de fase matriz/inclusão



Fonte: Elaboração própria

Ressalta-se que o modelo atual não é capaz de capturar a parte descendente da curva tensão-deformação (fase pós-pico), uma vez que não incorpora mecanismos relacionados à nucleação e propagação de trincas, responsáveis pelo amolecimento do material após o pico de tensão. Como a degradação progressiva da rigidez, típica do comportamento pós-pico de materiais frágeis como o concreto, está associada à evolução de fraturas na matriz e nas interfaces, a ausência de uma modelagem específica para esse fenômeno limita a representação adequada dessa fase.

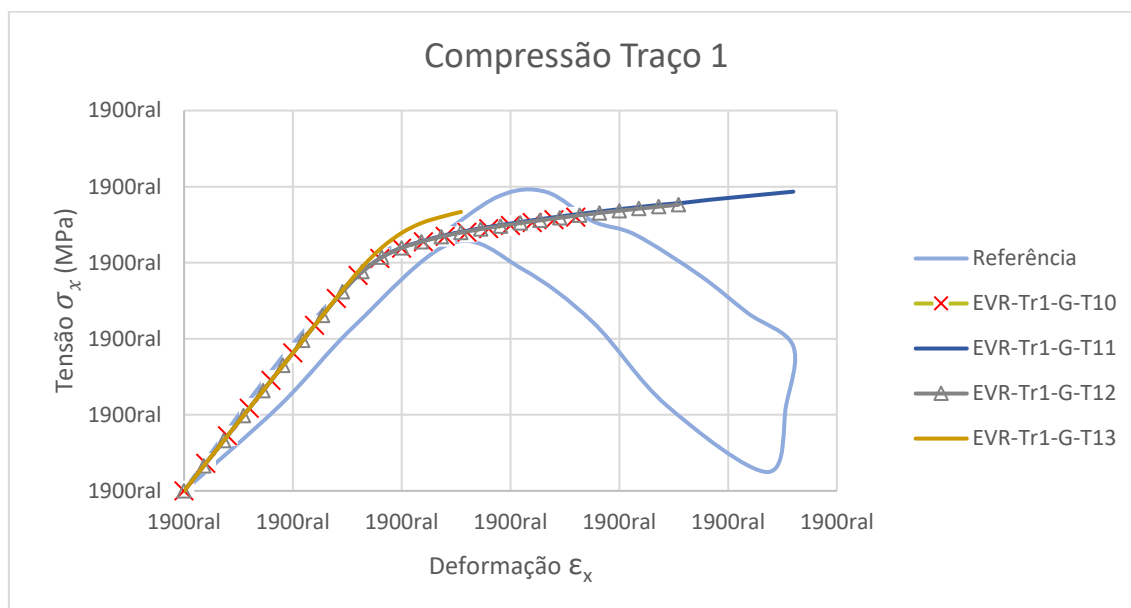
Dentre os EVRs analisados a compressão, o EVR-Tr1-G-T10 destacou-se por apresentar maior aderência às curvas experimentais. Essa abordagem permitiu a calibração do modelo às propriedades mecânicas específicas do concreto em estudo, mas também a validação da sensibilidade dos parâmetros na resposta global do EVR. Contudo, para aumentar as possibilidades de compatibilização de todos os traços, foram desenvolvidos mais três testes variando apenas a curva de plasticidade, conforme Tabela 7.5, as curvas são apresentadas na Figura 7.9:

Tabela 7.5 – Propriedades Elásticas e Parâmetros do Modelo de Mohr-Coulomb para os EVRs
EVR-Tr1-T11, EVR-Tr1-T12 e EVR-Tr1-T13

Fase	Nomenclatura	Poisson (ν)	E(GPa)	Modelo Constitutivo	Curva plasticidade (ε _p , σ _y (MPa))	Ângulo de atrito e dilatância (φ)
Matriz Inclusão	EVR-Tr1-G-T11	0.200	7	Mohr-Coulomb	(0;9) (0.22;19)	2°
	EVR-Tr1-G-T11	0.300	30	Elástico	-	-
Matriz Inclusão	EVR-Tr1-G-T12	0.200	7	Mohr-Coulomb	(0;9) (0.22;18)	2°
	EVR-Tr1-G-T12	0.300	30	Elástico	-	-
Matriz Inclusão	EVR-Tr1-G-T13	0.200	7	Mohr-Coulomb	(0;10) (0.22;17)	2°
	EVR-Tr1-G-T13	0.300	30	Elástico	-	-

Fonte: Elaboração própria

Figura 7.9 – Resultados Experimentais do traço 1 e resultado numérico para compressão dos EVR-Tr1-G-T10, EVR-Tr1-G-T11, EVR-Tr1-G-T12 e EVR-Tr1-G-T13, considerando descolamento de fase apenas nas interfaces dos agregados maiores



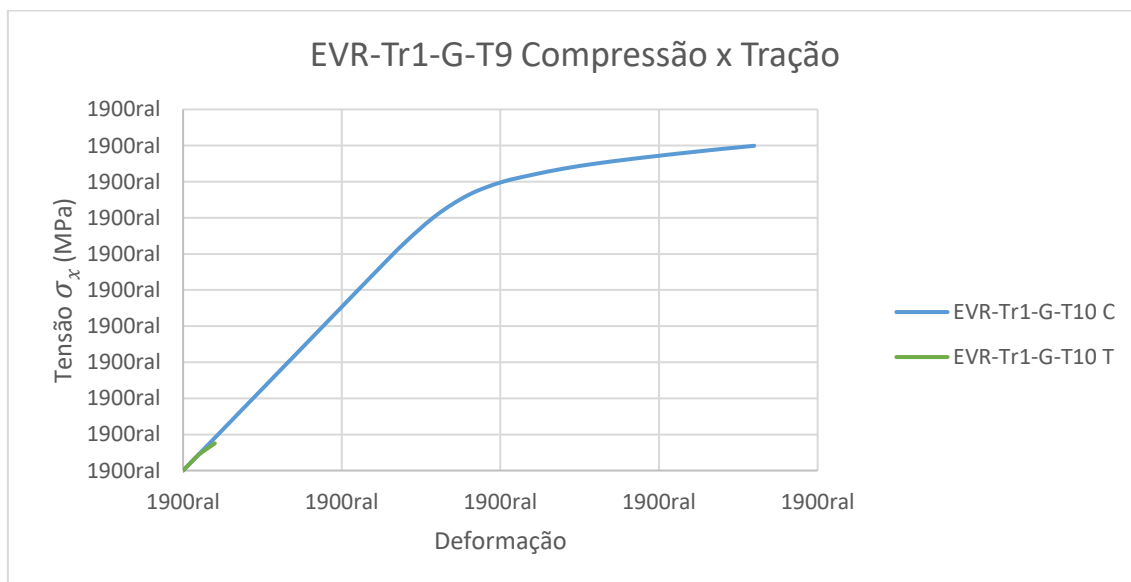
Fonte: Elaboração própria

Apesar de as novas modelagens ultrapassarem um pouco o limite estabelecido na referência, esses ensaios ampliam os parâmetros de plasticidade que podem ser utilizados para os outros traços. Lembrando que o modelo atual não captura a parte da curva descendente (fase pós-pico), verifica-se que o teste que melhor representa a referência do traço 1 é o T10, porém, o T12 conta com uma boa aproximação, apesar de não ter capturado a fase descendente da curva não superou o limite de resistência estabelecido pelos ensaios experimentais.

Para modelar o teste de tração uniaxial, foram impostas ao EVR as deformações: As rigidezes na fase elástica dos ensaios à tração obtidas experimentalmente foram bastante discrepantes daquelas do ensaio de compressão, o que é incoerente. Portanto, para o traço 1 as curvas experimentais à tração foram descartadas, já que deve ter ocorrido algum problema na realização do ensaio, pelo fato da resposta obtida não estar coerente. Por isso, para a modelagem dos EVRs à tração, as propriedades elásticas foram mantidas as mesmas do EVR-Tr1-G-T10.

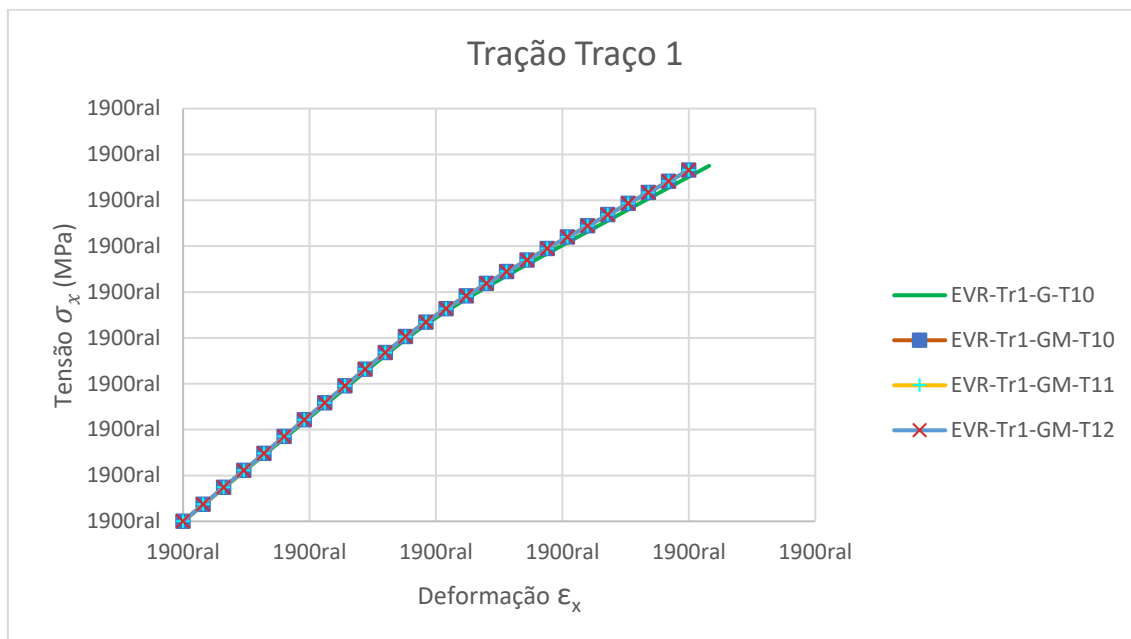
Conforme NEVILLE (2013), a resistência à tração corresponde, em média, a cerca de 10% da sua resistência à compressão. Observa-se que no ensaio 1.1 o concreto apresentou resistência por volta de enquanto o ensaio 1.4 apresenta resistência por volta de . Logo, espera-se que a resistência do EVR à tração seja aproximadamente . Como o EVR-Tr1-G-T10 foi o que melhor aproximou dos ensaios experimentais, a mesma configuração de parâmetros foi utilizada para submeter o EVR à tração. Na Figura 7.10) tem-se o gráfico do o EVR-Tr1-G-T10 submetido tanto à compressão (C), como à tração (T). Os resultados indicam que a resistência à tração está próxima a 10% da resistência à compressão. Na Figura 7.11, verificou-se os resultados dos EVR-Tr1-T10, EVR-Tr1-T11 e EVR-Tr1-T12, mas considerando fraturamento ao redor dos agregados grandes e médios (EVR-Tr1-GM-T10, EVR-Tr1-GM-T11 e EVR-Tr1-GM-T12):

Figura 7.10 – Resultado numérico do EVR-Tr1-G-T10, submetido à compressão e à tração



Fonte: Elaboração própria

Figura 7.11 –Resultado numérico em tração dos EVR-Tr1-G-T10, EVR-Tr1-GM-T10, EVR-Tr1-GM-T11, EVR-Tr1-GM-T12, considerando diferentes configurações de descolamento de fase



Fonte: Elaboração própria

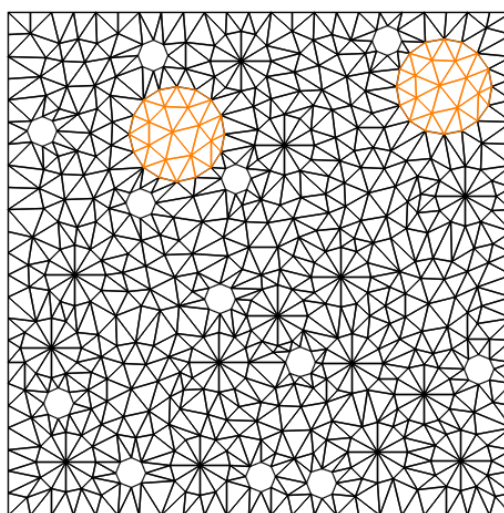
É possível verificar na Figura 7.11 que a consideração de diferentes configurações de fratura no teste 10 não compromete o desempenho global do EVR quando submetido à tração, já que os resultados considerando fraturas nas grandes e médias (EVR-Tr1-GM-T10) são muito similares aos resultados do EVR-Tr1-G-T10. Assim, como todos os EVRs apresentam respostas muito semelhantes, conclui-se que a alteração dos parâmetros da curva de plasticidade também não foi um fator de alteração significativa para a resistência do EVR quando submetido à tração. Como a alteração de configuração de descolamento matriz/inclusão não sofreu alteração, nos próximos traços o resultado é apresentado apenas para configuração de fraturamento nas inclusões grandes, visto que exige menos esforço computacional.

7.3 CONCRETO COM SUBSTITUIÇÃO DE 13,96% (TRAÇO 2)

A fim de determinar quantas inclusões serão consideradas como agregados reciclados, note que o EVR conta com uma área total de 10.000mm^2 , contando com inclusões grandes, médias e pequenas. Existem 5 inclusões grandes que totalizam uma área de $1417,64\text{mm}^2$, 6 inclusões médias que totalizam uma área de $1060,30\text{mm}^2$ e 14 inclusões pequenas que totalizam uma área de $1583,40\text{mm}^2$, a área total de inclusões é de $4061,29\text{mm}^2$, totalizando 40,61% da área do EVR.

Para substituição de 13,96% foi realizada a alteração do módulo de elasticidade de duas inclusões grandes que totalizam uma área de $567,06\text{mm}^2$, que é 13,96% da área total de inclusões. Para o EVR do traço 2, tem-se a malha conforme Figura 7.12, onde em destaque são as inclusões recicladas. O EVR com inclusões recicladas tem 3 fases sendo a matriz, a inclusão e a inclusão reciclada e duas ZTIs, uma para os agregados convencionas e outra para os agregados reciclados (ZTI Rec).

Figura 7.12 – EVR-Tr2



Fonte: Elaboração própria

Para a parametrização inicial, foram mantidas as propriedades elásticas da matriz e dos agregados convencionais, além dos parâmetros da curva plástica encontrados para o EVR do traço 1. Assim, os parâmetros dos testes T10, T11, T12 e T13 foram utilizados para os testes dos demais traços. Para os traços 2, 3, 4 e 5 o teste T1 tem os mesmos parâmetros de T10 do traço 1, o T2 tem os mesmos parâmetros do T11, T3 os mesmos parâmetros do T12, T4 os mesmos parâmetros do teste T13. A relação entre os testes pode ser visualizada na Tabela 7.6. Alterou-se o módulo de elasticidade das inclusões recicladas, que também são adotadas elásticas, utilizando o valor de 12GPa . Além disso, as ZTIs das inclusões recicladas tiveram seu parâmetro de fratura σ_c alterado de 1MPa para $0,9\text{MPa}$.

Tabela 7.6 – Curva de plasticidade do modelo de Mohr Coulomb na matriz, para os diferentes traços

Curva Plasticidade (ϵ_p ; $\sigma_y(\text{MPa})$)	Tr1	Tr2	Tr3	Tr4	Tr5
(0;9)(.22;17)	T10	T1	T1	T1	T1
(0;9)(.22;19)	T11	T2	T2	T2	T2

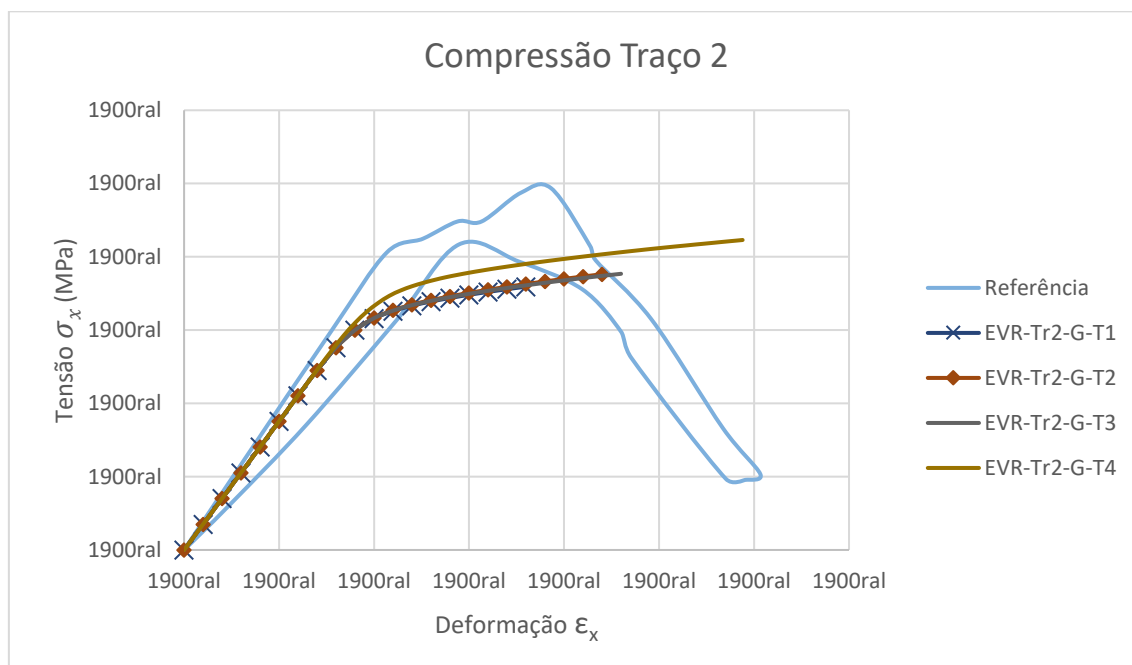
(0;9).(22;18)	T12	T3	T3	T3	T3
(0;10).(22;17)	T13	T4	T4	T4	T4

Fonte: Elaboração própria

Os demais parâmetros dos testes podem ser verificados nas Tabela 7.4 e Tabela 7.5.

Na Figura 7.13 é apresentado o gráfico com o comparativo entre os ensaios experimentais de referência e os EVR-Tr2-G-T1, EVR-Tr2-G-T2, EVR-Tr2-G-T3 e EVR-Tr2-G-T4 à compressão:

Figura 7.13 – Resultados Experimentais do traço 2 e resultado numérico para compressão dos EVR-Tr2-G-T1, EVR-Tr2-G-T2, EVR-Tr2-G-T3 e EVR-Tr2-G-T4, considerando descolamento de fase apenas nas interfaces dos agregados maiores

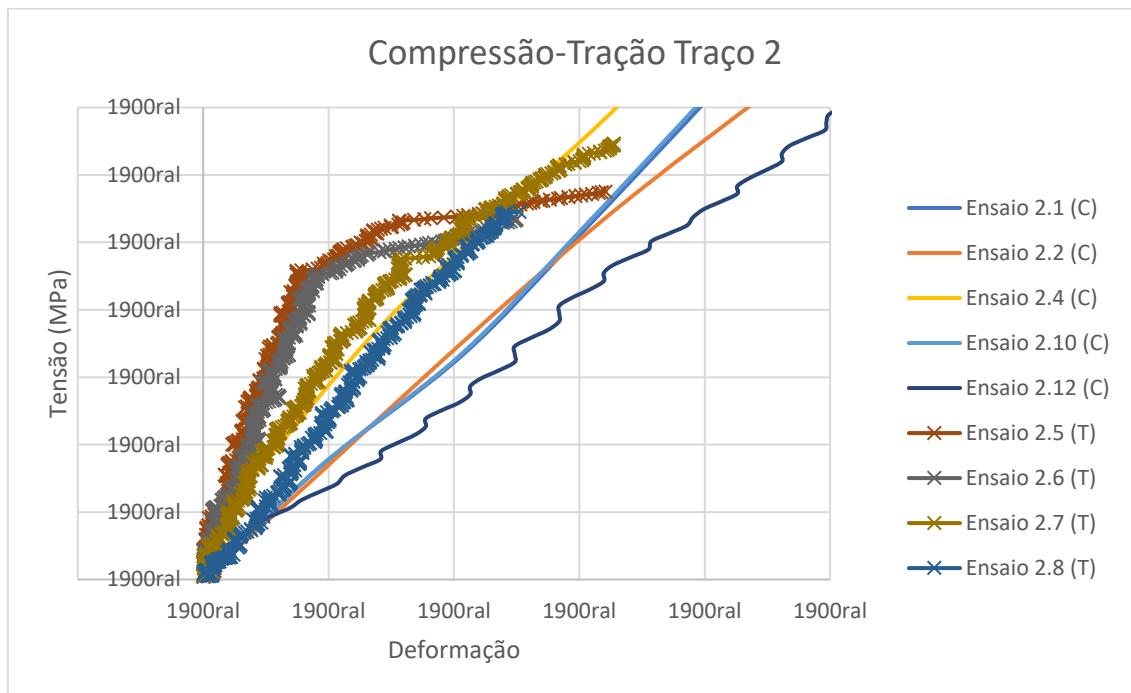


Fonte: Elaboração própria

A curva de referência foi confeccionada através dos ensaios de rompimento à compressão uniaxial aos 32 e 89 dias, como já mencionado anteriormente. As curvas mais discrepantes foram descartadas. Pode-se perceber que todos os testes comparam bem com os resultados experimentais até a tensão de 16Mpa. Após esse valor os resultados numéricos apresentam resistência e rigidezes menores que aquelas observada experimentalmente. A tensão limite obtida numericamente foi em torno de 18Mpa, enquanto a tensão limite média experimentalmente foi de 22.5Mpa. Note que o teste T4 apresentou o início de plastificação um pouco posterior do que os outros, devido ao fato de que sua tensão inicial de plastificação é superior aos dos outros testes, como pode-se ver na Tabela 7.6.

Para verificação da coerência dos ensaios experimentais submetidos à compressão diametral (tração), apresenta-se na Figura 7.14 as rigidezes dos ensaios de compressão comparados com os ensaios de tração:

Figura 7.14 – Resultados Experimentais do traço 2 comparando os ensaios de compressão uniaxial (C) e diametral (T)

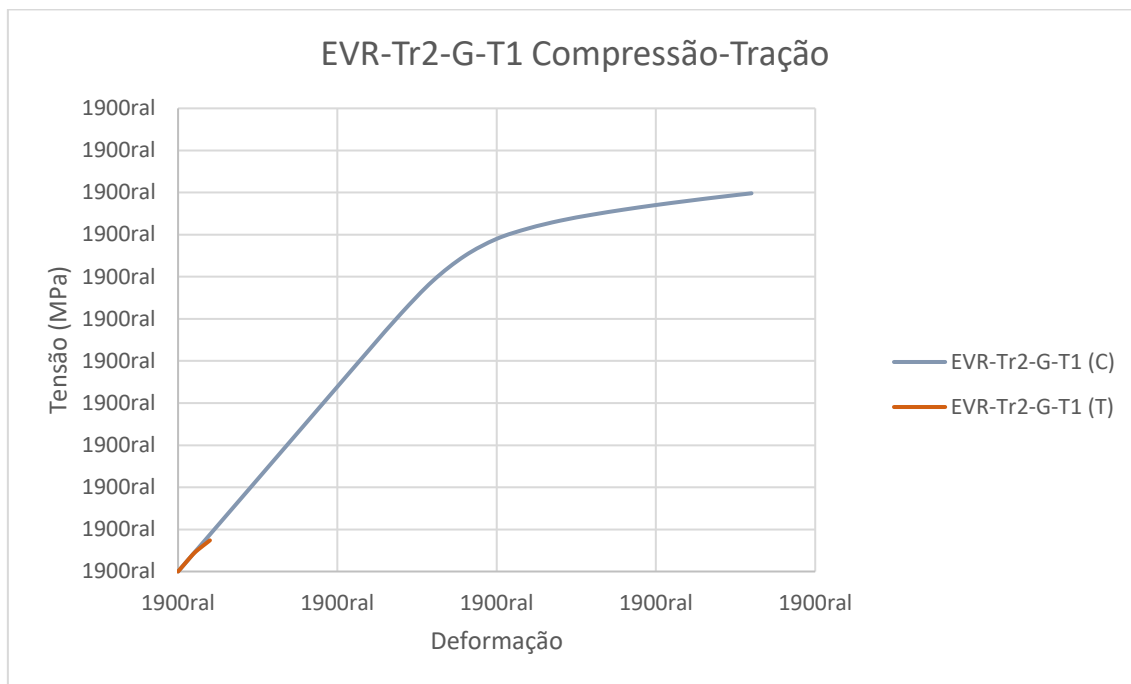


Fonte: Elaboração própria

Verifica-se que as rigidezes dos ensaios de tração 2.7 e 2.8 , são semelhantes às do ensaio de compressão 2.4. As demais apresentam rigidezes muito diferentes. Sendo assim, a referência do ensaio de tração fica sendo os ensaios 2.7 e 2.8, podendo ainda ficar um pouco abaixo do ensaio 2.8.

Para verificação da coerência dos resultados numéricos, é apresentado na Figura 7.15 o gráfico com as curvas do EVR-Tr2-G-T1 submetido à compressão (C) e à tração (T):

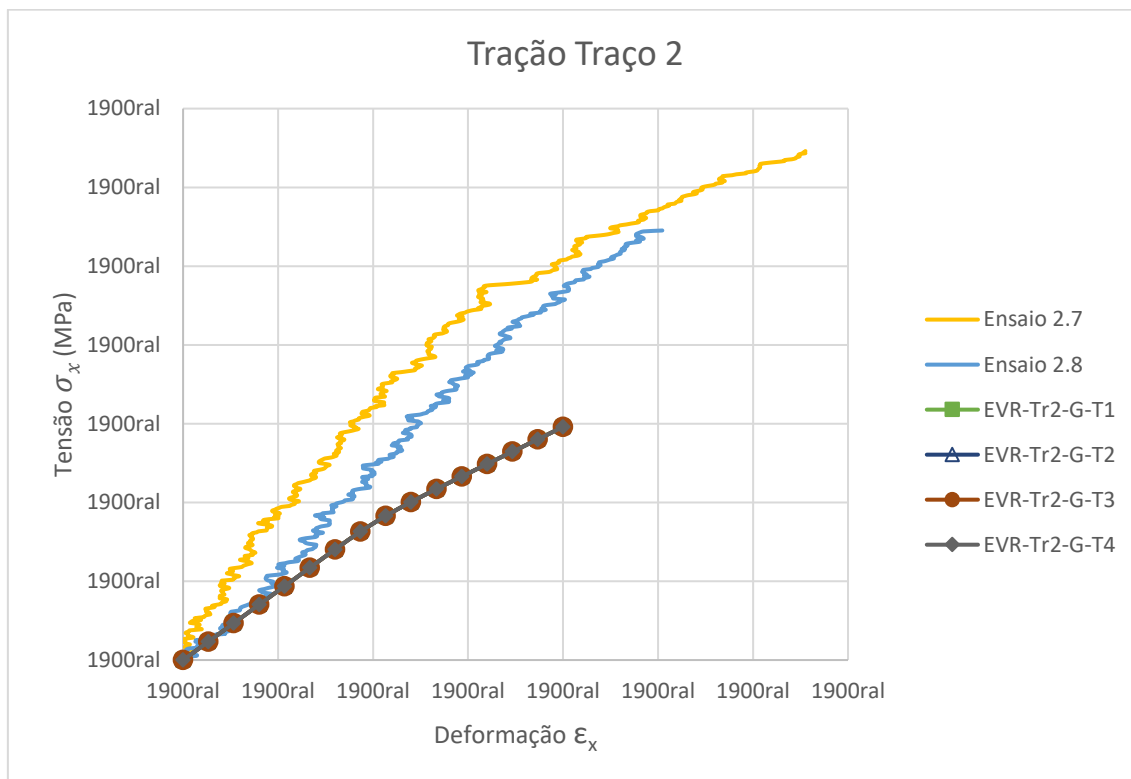
Figura 7.15 – Resultado numérico do EVR-Tr2-G-T1, submetido à compressão e à tração



Fonte: Elaboração própria

Os testes T1, T2, T3 e T4 foram submetidos à esforços de tração com a configuração de descolamento matriz/inclusão nas inclusões grandes. Na Figura 7.16 são apresentados os resultados dos EVRs:

Figura 7.16 – Resultados Experimentais do traço 2 e resultado numérico em tração dos EVR-Tr2-GM-T1, EVR-Tr2-GM-T2, EVR-Tr2-GM-T3 e EVR-Tr2-GM-T4, considerando fraturamento ao redor das inclusões grandes e médias



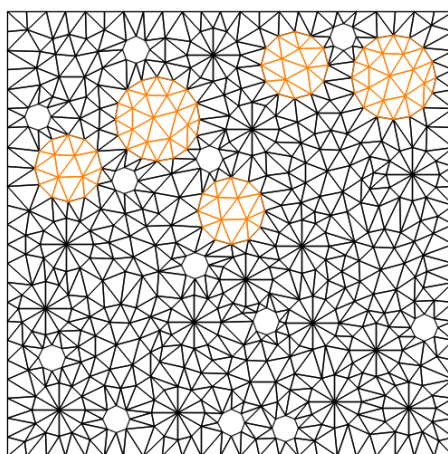
Fonte: Elaboração própria

A alteração da curva de plasticidade não impactou em nenhum dos testes como pode ser visto na Figura 7.16. Conforme mencionado, a resistência do concreto à tração deve ser por volta de 10% da resistência à compressão. Experimentalmente a resistência à compressão foi em torno de 22MPa (veja Figura 6.20), enquanto a resistência à tração foi de $1,92\text{MPa}$ (ver Figura 6.25). Numericamente, a resistência à compressão foi em torno de $18,84\text{MPa}$ (veja Figura 7.15), enquanto a resistência à tração foi de $1,48\text{MPa}$ (ver Figura 7.16). Como pode-se observar a resistência à compressão e à tração obtidas numericamente no traço 2 foram inferiores àquelas observadas experimentalmente. Por outro lado, a resistência à tração (tanto aquela obtida numericamente como nos experimentos) foi em torno de 10% do valor da compressão, como esperado. Sendo assim pode-se afirmar que a modelagem numérica do concreto submetido à tração do traço 2 se mostra como o esperado, apesar de não reproduzir as resistências observadas experimentalmente.

7.4 CONCRETO COM SUBSTITUIÇÃO DE 27,02% (TRAÇO 3)

Para substituição de 27,02% foi realizada a alteração do módulo de elasticidade de duas inclusões grandes e três inclusões médias que totalizam uma área de $1097,20\text{mm}^2$. Para o EVR do traço 3, tem-se a malha conforme Figura 7.17, onde destacam-se em laranja as inclusões consideradas de material reciclado.

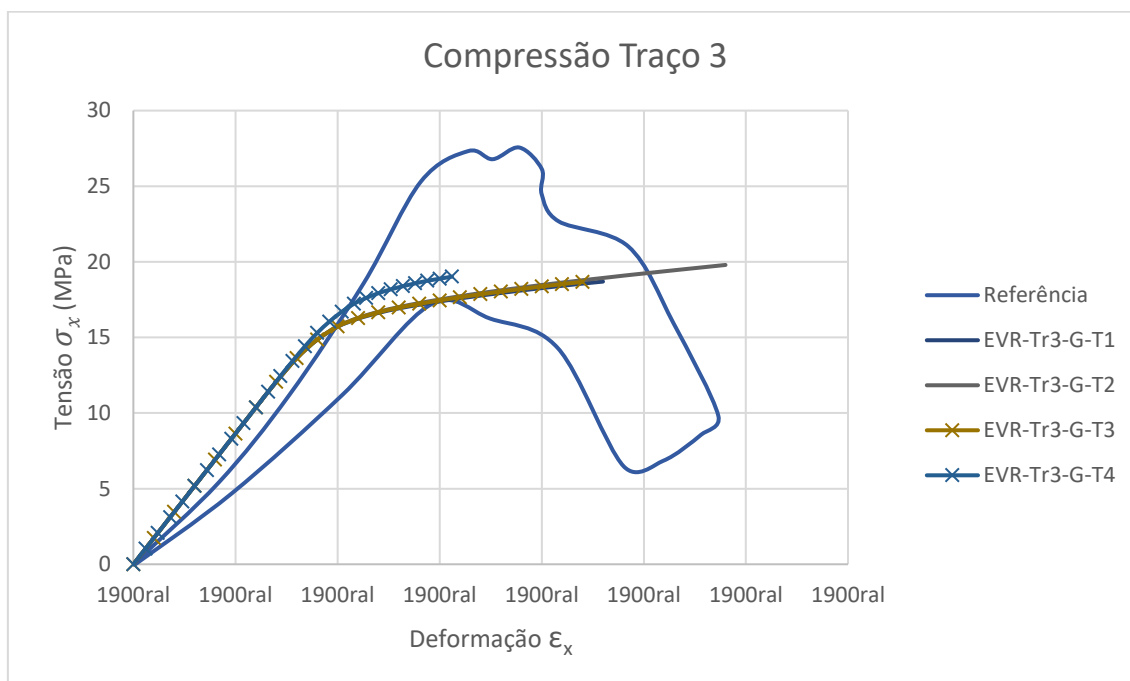
Figura 7.17 – EVR-Tr3



Fonte: Elaboração própria

Como os parâmetros foram definidos no EVRs dos traços 1 e 2, a única alteração para os outros EVRs são a quantidade de inclusões recicladas que aumentam. Sendo assim, foram realizadas apenas testes que já foram parametrizados, para verificar qual o teste que melhor converge para todos os traços em conjunto. Os testes do traço 3, seguem a parametrização conforme relação da Tabela 7.6. Na Figura 7.18 é apresentado o gráfico com o comparativo entre os ensaios físicos de referência e os testes T1 a T4 à compressão:

Figura 7.18 – Resultados Experimentais do traço 3 e resultado numérico para compressão dos EVR-Tr3-G-T1, EVR-Tr3-G-T2, EVR-Tr3-G-T3 e EVR-Tr3-G-T4 considerando descolamento de fase apenas nas interfaces dos agregados maiores

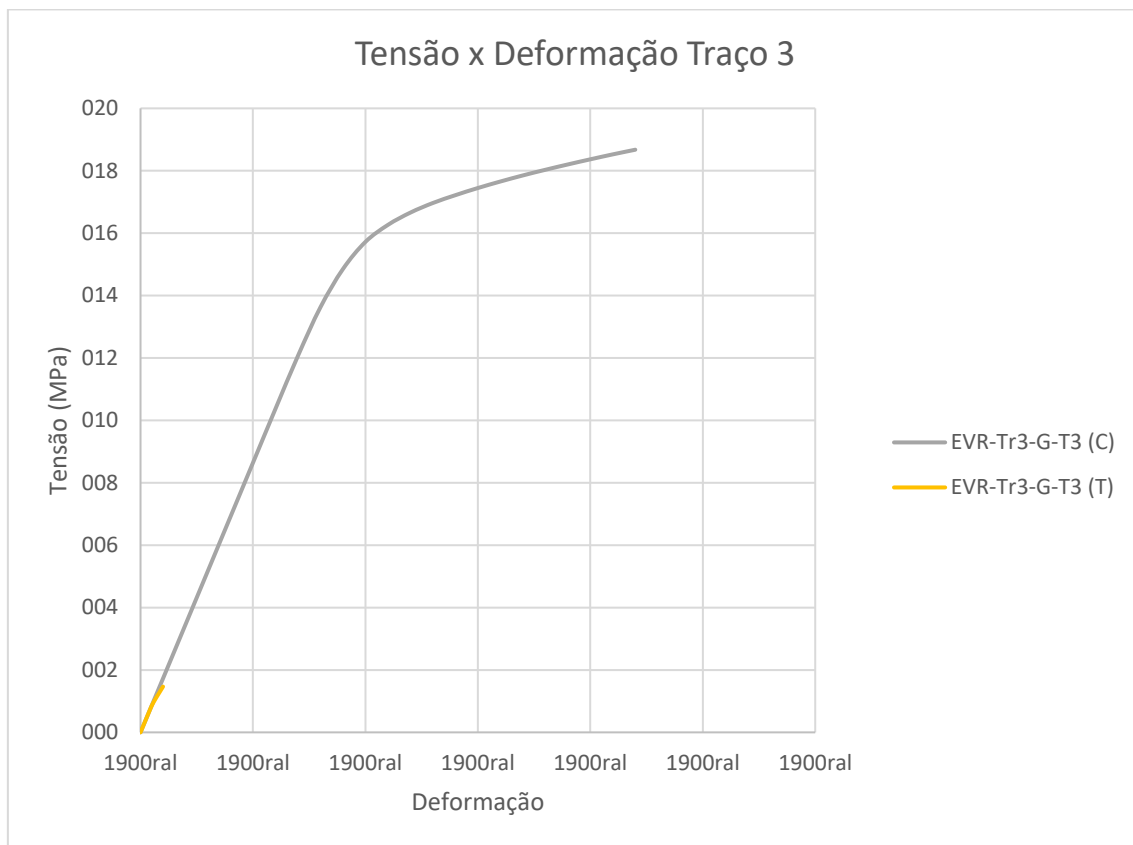


Fonte: Elaboração própria

Verifica-se no gráfico que, apesar da parte elástica estar um pouco acima do limite, a convergência das simulações tem uma boa aproximação. As curvas dos testes T1, T2 e T3 estão praticamente sobrepostas e com uma boa aproximação do ensaio experimental, sendo o teste T2 o que mais avançou. Já o teste T4 tem plastificação um pouco mais tardia, o que se espera devido ao maior limite elástico desse teste, porém o colapso é um pouco mais prematuro do que os outros traços.

Conforme ocorrido no traço 1, as curvas experimentais à tração do traço 3 foram descartadas, devido à discrepância das rigidezes entre os ensaios de compressão e tração, por isso a resistência esperada para tração será conforme adotada para o traço 1, de 10% do valor obtido para compressão. Como o resultado à compressão foi de 18MPa, o esperado para tração é de cerca de 1,8MPa. Para verificação da coerência do resultado numérico, o gráfico da Figura 7.19 mostra o EVR-Tr3-G-T3 submetido à esforços de compressão e de tração:

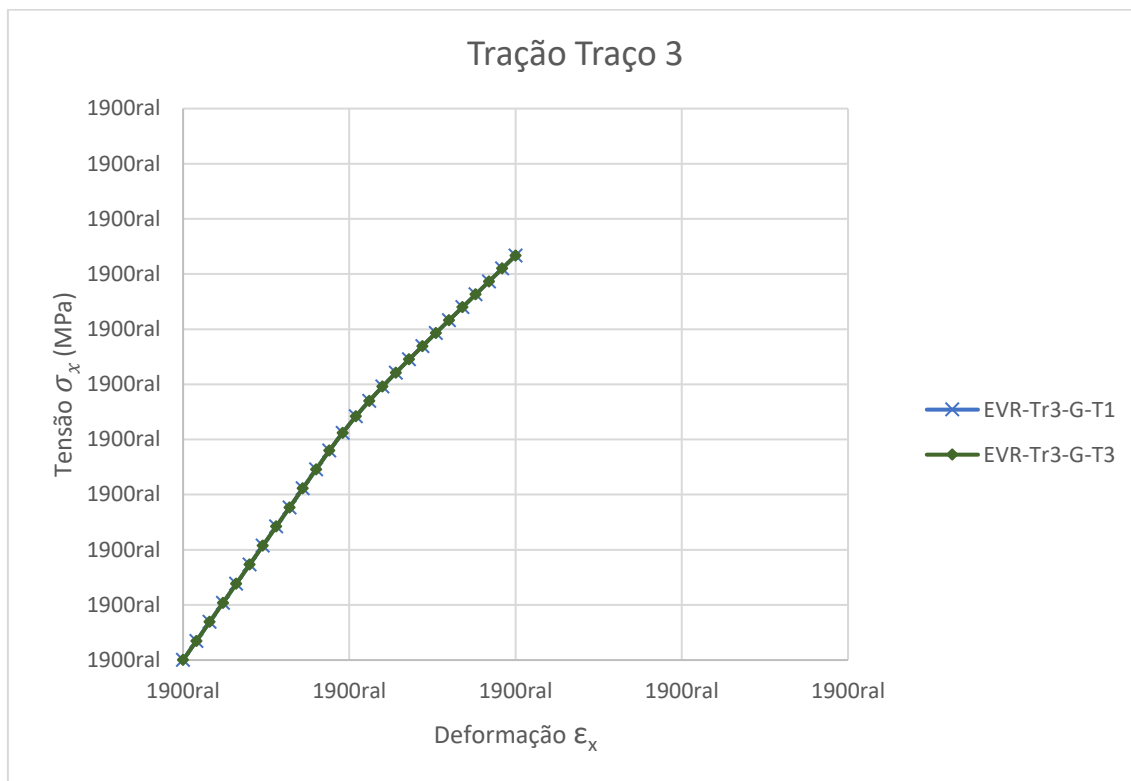
Figura 7.19 – Resultado numérico do EVR-Tr3-G-T3, submetido à compressão e à tração



Fonte: Elaboração própria

Os EVRs submetidos à tração foram os testes T1 e T3, já que se considera que eles que responderam melhor à compressão. Os resultados encontram-se na Figura 7.20:

Figura 7.20 – Resultados Experimentais do traço 3 e resultado numérico em tração dos EVR-Tr3-G-T1 e EVR-Tr3-G-T3, considerando descolamento de fase nas interfaces dos agregados grandes



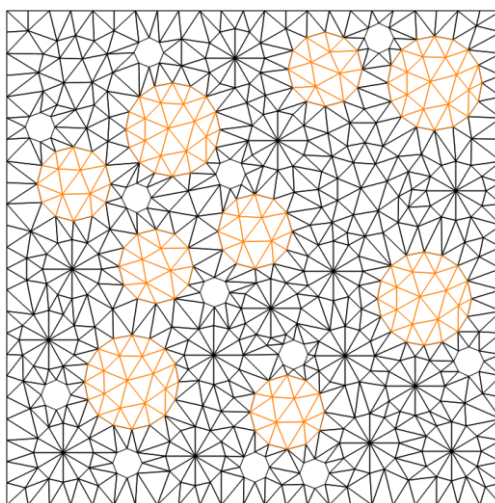
Fonte: Elaboração própria

Na Figura 7.20 verifica-se que os dois testes ficam sobrepostos, o que significa que a alteração da curva de plasticidade não altera o resultado dos testes, mesmo fenômeno constatado no traço 2. É possível ainda perceber que a resistência do EVR submetido à tração chega a $1,47MPa$, o que dá 7,9% dos $18,67MPa$ encontrados na simulação do EVR submetido à compressão, o que mostra coerência, pois o valor é próximo aos 10% esperado da relação compressão-tração do concreto.

7.5 CONCRETO COM SUBSTITUIÇÃO DE 49,68% (TRAÇO 4)

Para substituição de 49,68% foi realizada a alteração do módulo de elasticidade de quatro inclusões grandes e cinco inclusões médias que totalizam uma área de $2017,70mm^2$. Para o EVR do traço 4, tem-se a malha conforme Figura 7.21:

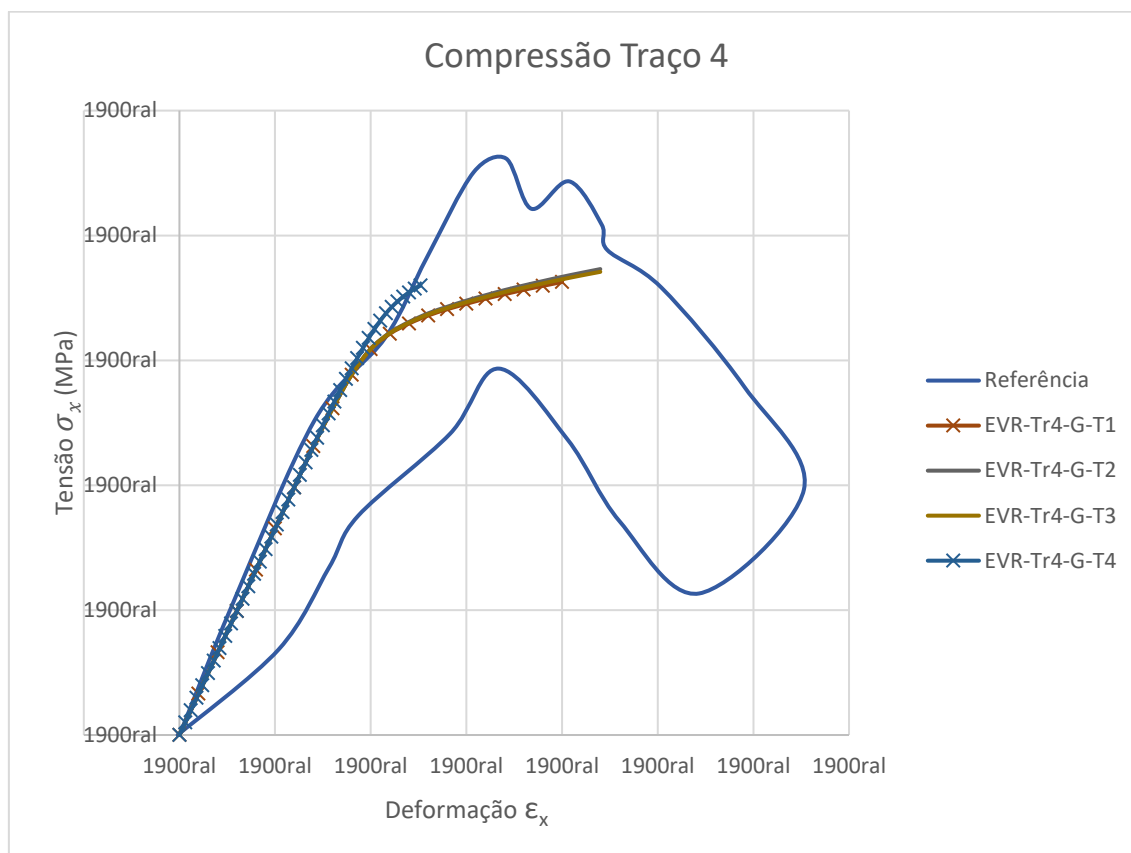
Figura 7.21 – EVR-Tr4



Fonte: Elaboração própria

Da mesma forma que ocorre para o traço 3, a única alteração realizada no EVR do traço 4 é a quantidade de células pertencentes à fase 3 (inclusão reciclada). Os resultados numéricos dos testes T1, T2, T3 e T4 são apresentados na Figura 7.22:

Figura 7.22 – Resultados Experimentais do traço 4 e resultado numérico para compressão dos EVR-Tr4-G-T1, EVR-Tr4-G-T2, EVR-Tr4-G-T3 e EVR-Tr4-G-T4, considerando descolamento de fase apenas nas interfaces dos agregados maiores

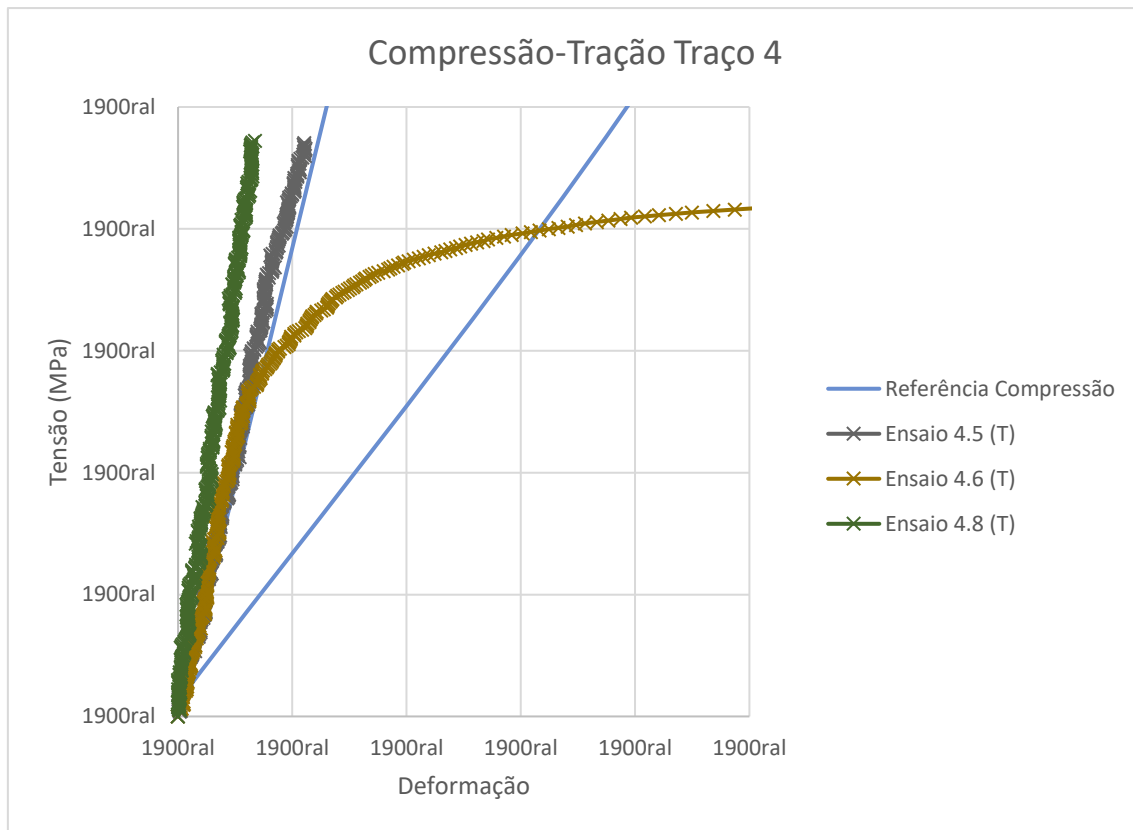


Fonte: Elaboração própria

É possível notar no gráfico, apresentado na Figura 7.22, que as curvas dos testes T1, T2 e T3 estão praticamente sobrepostas e com uma boa aproximação do ensaio experimental, sendo o teste T1 tendo o colapso um pouco antes dos testes T2 e T3. Já o teste T4 tem um encruamento iniciado mais acima, porém tendo o colapso muito cedo, sem apresentar aumento considerável da deformação após plastificação.

Para verificação da coerência dos ensaios experimentais submetidos à compressão diametral (tração), apresenta-se na Figura 7.23 as rigidezes dos ensaios de compressão comparados com os ensaios de tração:

Figura 7.23 – Resultados Experimentais do traço 4 comparando os ensaios de compressão uniaxial (C) e diametral (T)

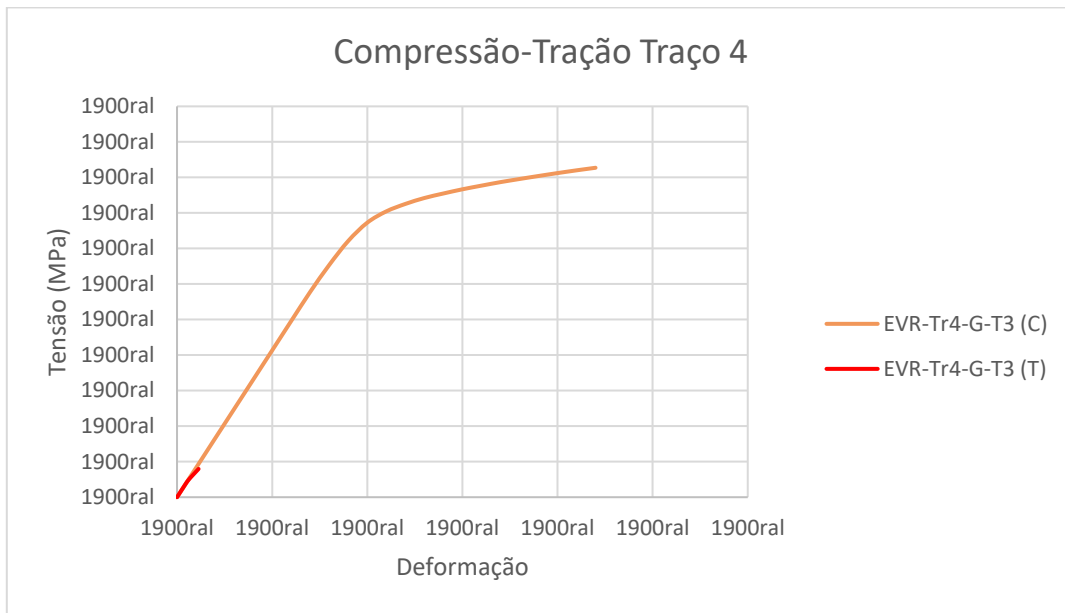


Fonte: Elaboração própria

Verifica-se que as rigidezes dos ensaios de tração 4.5 e 4.6 comparam-se muito bem com o ensaio de compressão 4.3, que é a curva de compressão mais rígida (limite da referência). Sendo assim, elas são usadas como referência para as modelagens numéricas, com certa tolerância.

Para a verificação da coerência numérica, foi realizada a comparação do EVR-Tr4-G-T3 submetido à compressão e à tração. O resultado dessa comparação é apresentado na Figura 7.24, onde observa-se que o resultado da simulação numérica do concreto submetido à tração é de $1,65MPa$, que é 8,65% do resultado da simulação numérica do EVR submetido à compressão, que resultou em $18,54MPa$:

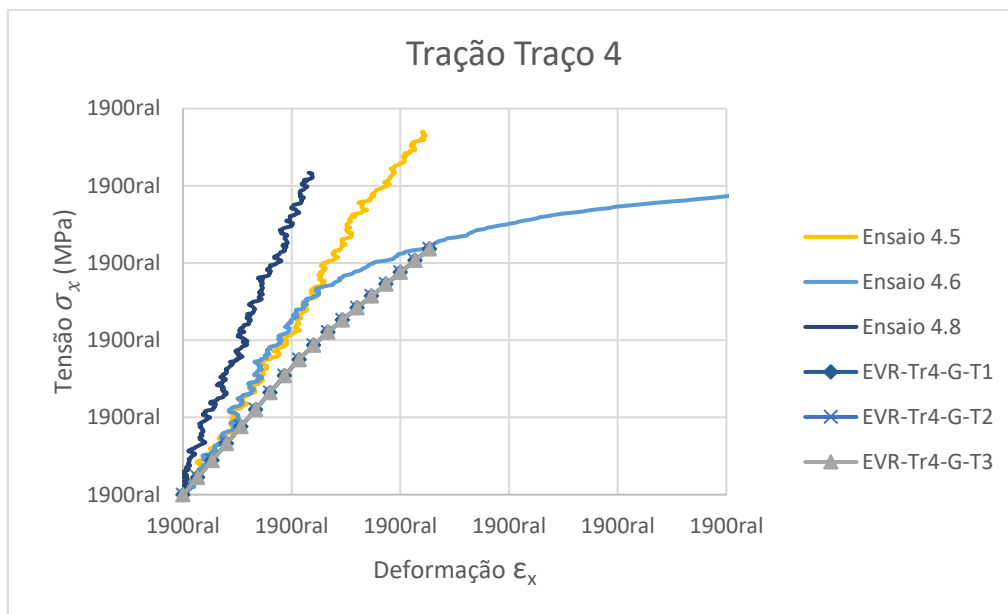
Figura 7.24 – Resultado numérico do EVR-Tr4-G-T3, submetido à compressão e à tração



Fonte: Elaboração própria

Como os testes T1, T2 e T3 compararam melhor aos resultados experimentais de compressão, esses EVRs foram submetidos à esforços de tração com a configuração de descolamento matriz/inclusão nas inclusões grandes. Na Figura 7.25 são apresentados os resultados dos EVRs comparados aos ensaios experimentais:

Figura 7.25 – Resultados Experimentais do traço 4 e resultado numérico em tração dos EVR-Tr4-G-T1, EVR-Tr4-G-T2 e EVR-Tr4-G-T3, considerando descolamento de fase nas interfaces dos agregados grandes



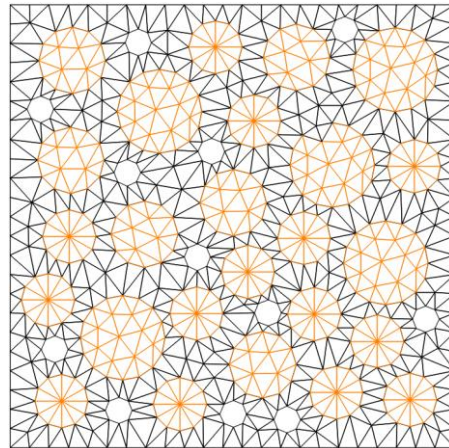
Fonte: Elaboração própria

Nota-se que os três testes T1, T2 e T3 ficaram sobrepostos, indicando que a curva de plasticidade não alterou significativamente o comportamento mecânico do EVR quando submetido à tração. Observa-se também uma boa aproximação entre o resultado numérico e o experimental. Logo, para o traço 4 considera-se que a modelagem numérica foi eficiente e conseguiu capturar o fenômeno ocorrido no concreto, apesar da resistência à tração obtida numericamente ser um pouco menor daquela observada experimentalmente.

7.6 CONCRETO COM SUBSTITUIÇÃO DE 100% (TRAÇO 5)

O EVR do traço 5 contém apenas agregados reciclados, tendo o EVR apenas duas fases: matriz e inclusões recicladas e uma ZTI sendo os parâmetros adotados da ZTI Re, obtida no item 7.3. A malha segue conforme Figura 7.26:

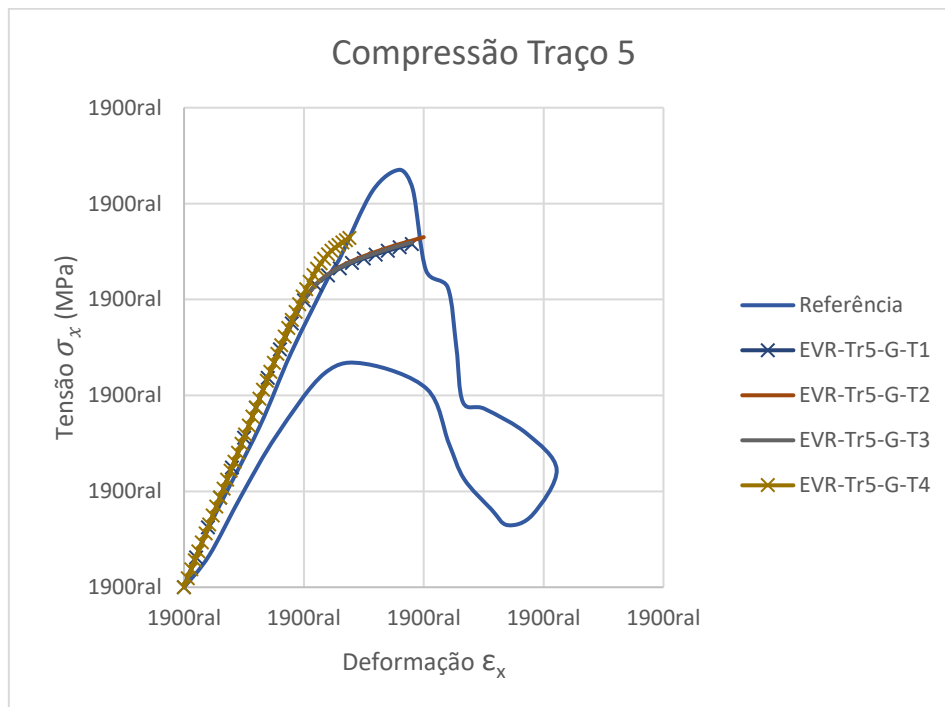
Figura 7.26 – EVR-Tr5



Fonte: Elaboração própria

Nesse traço, todas as células de inclusões são configuradas como fase 2 e os parâmetros da fase 2 são os parâmetros da inclusão reciclada encontrados no traço 2 ($E = 12GPa$ e $\nu = 0,3$). Os testes T1, T2, T3 e T4 foram executados para o traço 5 e são apresentados na Figura 7.27:

Figura 7.27 – Resultados Experimentais do traço 5 e resultado numérico para compressão dos EVR-Tr5-G-T1, EVR-Tr5-G-T2, EVR-Tr5-G-T3 e EVR-Tr5-G-T4, considerando descolamento de fase apenas nas interfaces dos agregados maiores

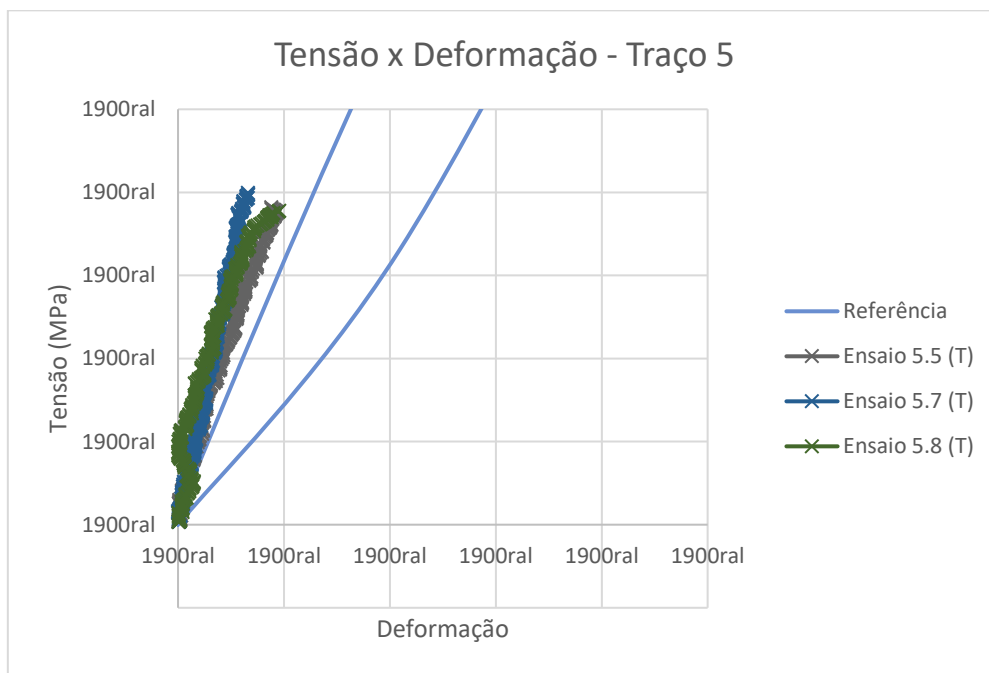


Fonte: Elaboração própria

Nota-se que as curvas dos testes T1, T2 e T3 estão praticamente sobrepostas e com uma boa aproximação do ensaio experimental, sendo o teste T2 avançando um pouco mais que os testes T1 e T3. Já o teste T4, têm o colapso muito prematuro, sem apresentar muita deformação.

Para verificação da coerência dos ensaios experimentais submetidos à tração, apresenta-se na Figura 7.28 as rigidezes dos ensaios de compressão comparados com os ensaios de tração:

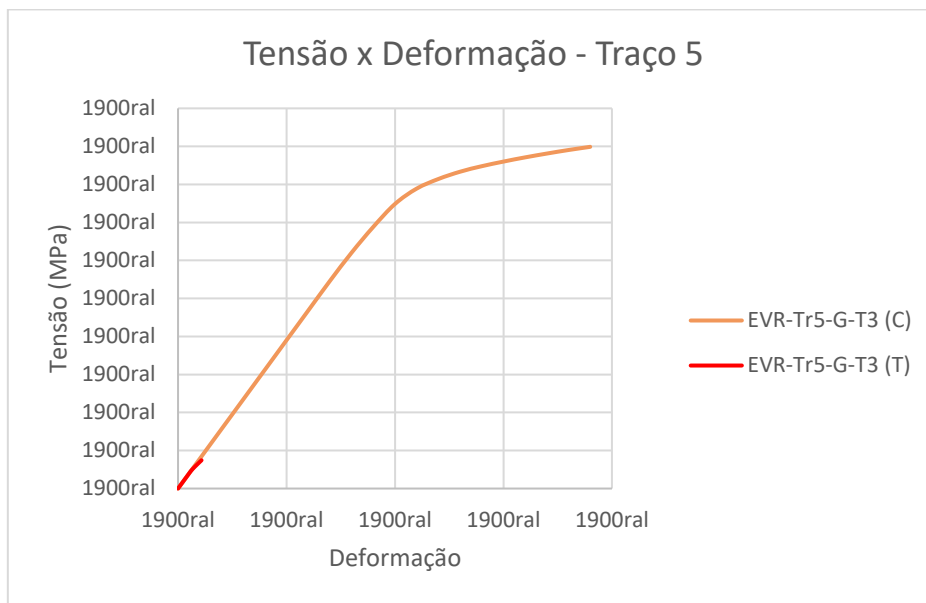
Figura 7.28 – Resultados Experimentais do traço 5 comparando os ensaios de compressão uniaxial (C) e diametral (T)



Fonte: Elaboração própria

Verifica-se que até tensão de 0.7Mpa as rigidezes dos ensaios de tração comparam bem com os de compressão. Após esse valor, a rigidez à tração está um pouco acima das do ensaio de compressão. Sendo assim, elas são usadas como referência para as modelagens numéricas, com certa tolerância. Na Figura 7.29 é realizada a verificação da coerência numérica das simulações do EVR-Tr5-G-T3 submetido à compressão e à tração:

Figura 7.29 – Resultado numérico do EVR-Tr5-G-T3, submetido à compressão e à tração

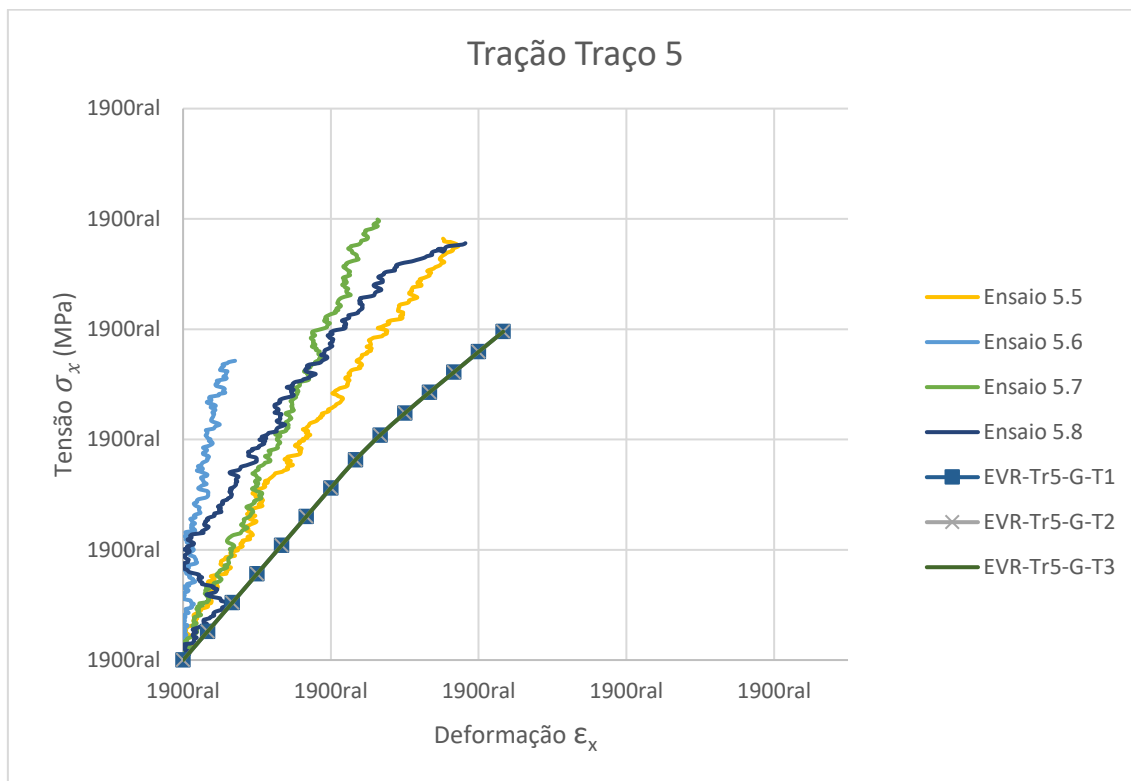


Fonte: Elaboração própria

Novamente se verifica que existe coerência entre as simulações numéricas de compressão e tração, visto que a resistência à tração foi de $1,49\text{MPa}$, que corresponde a 8,3% da resistência de compressão que foi de $17,98\text{MPa}$.

Como os testes T1, T2 e T3 resultaram em melhor resposta à compressão, eles foram submetidos à esforços de tração com a configuração de descolamento matriz/inclusão nas inclusões grandes. Na Figura 7.30 são apresentados os resultados dos EVRs, comparados com os ensaios experimentais:

Figura 7.30 – Resultados Experimentais do traço 4 e resultado numérico em tração dos EVR-Tr5-G-T1, EVR-Tr5-G-T2 e EVR-Tr5-G-T3, considerando descolamento de fase nas interfaces dos agregados grandes



Fonte: Elaboração própria

Nota-se que os três testes T1, T2 e T3 ficaram sobrepostos novamente e com a rigidez um pouco abaixo em comparação aos testes experimentais, como era esperado, já que a rigidez numérica comparou bem com a rigidez obtida nos ensaios de compressão. E essa, por sua vez é menor que aquelas dos ensaios de tração, como pode-se observar na Fig. (7.28). Verifica-se que o concreto com inclusões recicladas tem uma relação um pouco menor do que 10% entre as resistências de tração e compressão. Considera-se que a simulação numérica conseguiu representar o comportamento à tração de forma satisfatória.

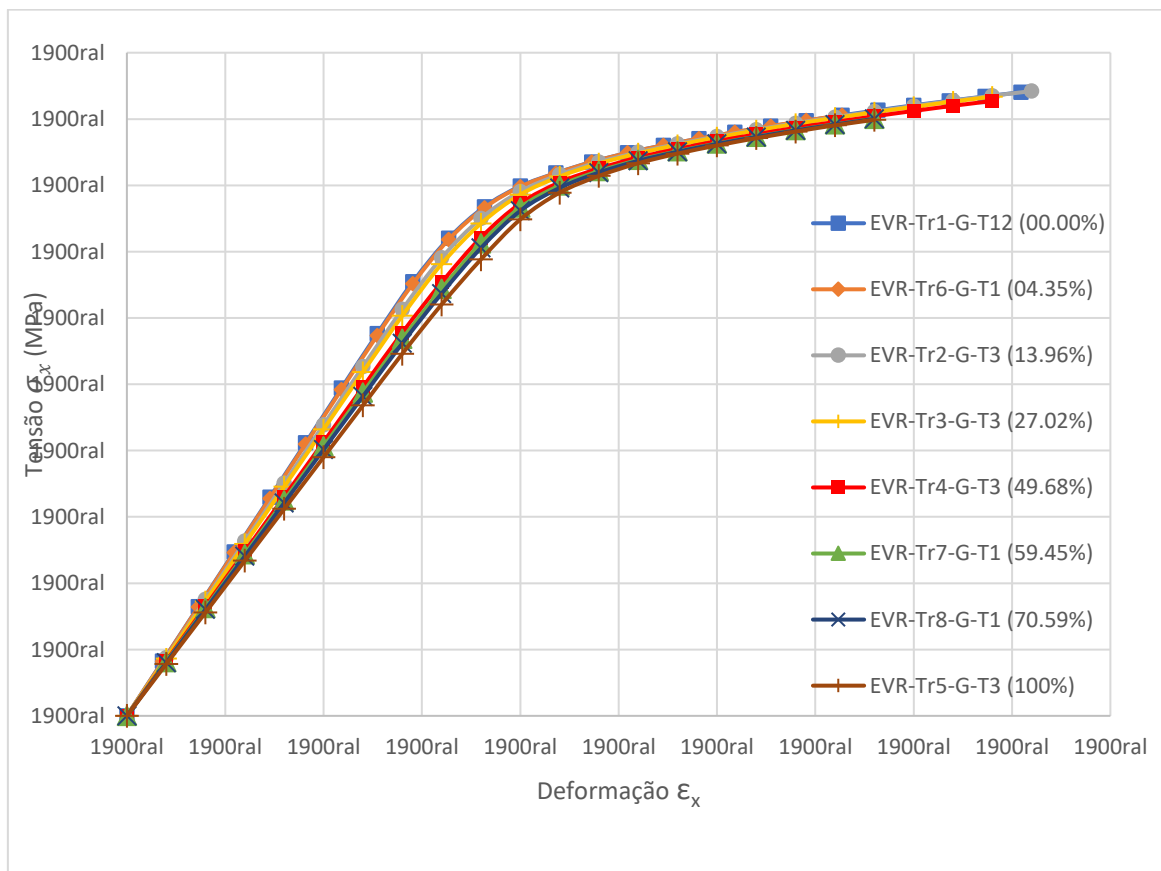
7.7 PARAMETRIZAÇÃO OUTRAS PROPORÇÕES DE SUBSTITUIÇÃO.

É possível verificar que os testes que melhor representam os ensaios experimentais à compressão uniaxial para o traço 1 foram os testes T10 e T12. Para o traço 2 os melhores testes foram T2 e T3. Para o traço 3 os melhores testes foram T1 e T3. Para os traços 4 e 5 os melhores testes foram T1, T2 e T3. Conforme apresentado na Tabela 7.6 o T10 do traço 1 equivale aos testes T1 dos outros traços, T11 do traço 1 equivale aos testes T2 dos outros traços,

assim até o T13 do traço 1. Como o teste T12, que é o equivalente ao T3 dos outros traços, tem uma aderência boa com as curvas de referência de todos os traços, fica sendo definido como parametrização padrão para realizar novas simulações numéricas com outros teores de substituição, os quais não foram obtidas respostas experimentais.

Para verificar a resistência do concreto com outros teores de substituição foram adotados os parâmetros T12 do traço 1, que é equivalente ao T3 dos outros traços. Foram realizadas substituição de 4,35% (substituição de apenas uma inclusão média), chamada de traço 6; 59,45% (substituição de cinco inclusões grandes, cinco médias e uma pequena), chamada de traço 7 e 70,59% (substituição de cinco inclusões de cada tamanho), chamada de traço 8. Na Figura 7.31, é apresentado o gráfico com as curvas das simulações numéricas de todos os traços, todos os EVRs têm o mesmo parâmetro, a única diferença é a quantidade de inclusões recicladas:

Figura 7.31 – Resultados numéricos para compressão dos EVR-Tr1-G-T12, EVR-Tr6-G-T1, EVR-Tr2-G-T3, EVR-Tr3-G-T3, EVR-Tr4-G-T3, EVR-Tr7-G-T1, EVR-Tr8-G-T1 e EVR-Tr5-G-T3, considerando descolamento de fase apenas nas interfaces dos agregados maiores

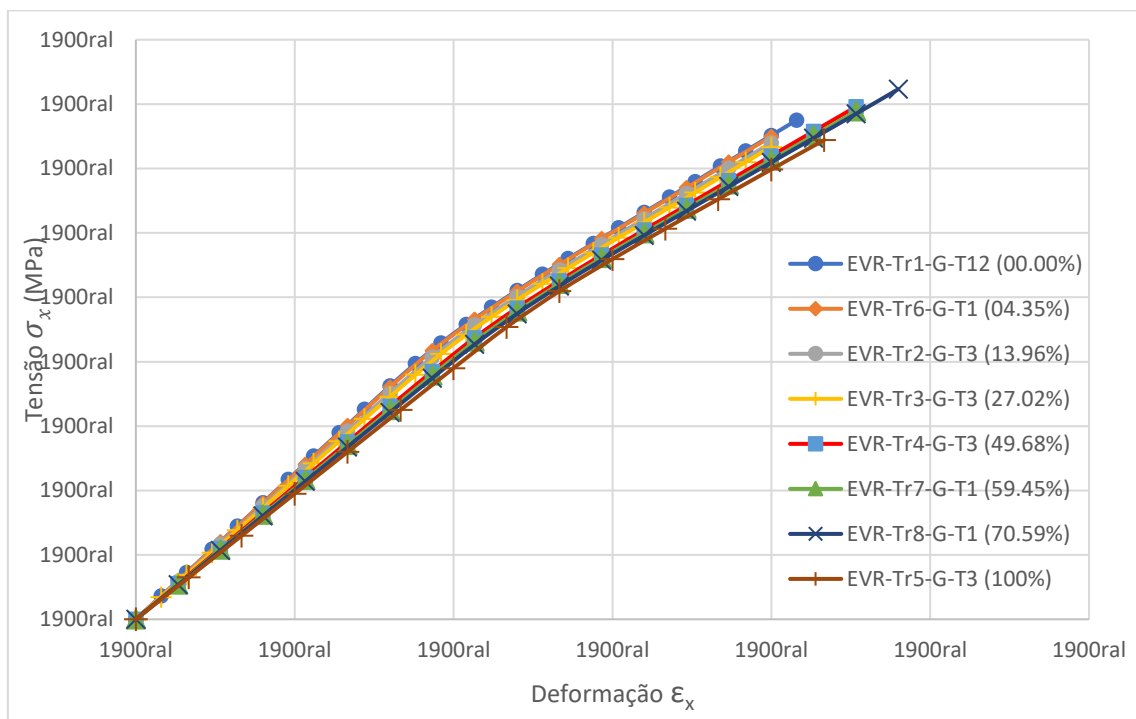


Fonte: Elaboração própria

Nota-se que o aumento de inclusões recicladas diminui a rigidez e o pico de resistência do EVR. Para os traços 6, 2 e 3, a resistência ficou muito próxima do traço de referência, enquanto o de referência resultou em 18,81MPa, os traços 6, 2 e 3 resultaram em 18,12MPa, 18,84MPa e 18,67MPa, respectivamente. O traço 4, o EVR apresenta uma parte elástica menos rígida, mas o pico de resistência se mantém próximo ao da referência em 18,50MPa. Os traços 7, 8 e 5, que tem os maiores teores de substituição resultam em resistências de 18,01MPa, 18,00MPa e 17,97MPa.

Pode-se observar que para os traços 7 e 8, quase não houve diferença no comportamento do material. Já para o traço 6, o material é um pouco mais rígido e tem a tendência de ser mais resistente.

Figura 7.32 – Resultados numéricos em tração dos EVR-Tr1-G-T12, EVR-Tr6-G-T1, EVR-Tr2-G-T3, EVR-Tr3-G-T3, EVR-Tr4-G-T3, EVR-Tr7-G-T1, EVR-Tr8-G-T1 e EVR-Tr5-G-T3, considerando descolamento de fase apenas nas interfaces dos agregados maiores



Fonte: Elaboração própria

É possível verificar que a inserção das inclusões recicladas deixa o concreto menos rígido, contudo a ductilidade na fase plástica aumenta a capacidade do concreto para redistribuição dos esforços, fenômeno também observado nos ensaios experimentais nos traços 4 e 5, quando comparados ao traço 1.

Pode-se afirmar que o modelo matemático consegue capturar o comportamento do concreto com inclusões recicladas e, após a parametrização do material, é possível prever como

o concreto se comportará com diferentes teores de substituição, sem a necessidade de ensaios experimentais que são onerosos em grandes escalas.

É importante deixar claro que essa parametrização é válida para os resíduos encontrados na cidade de Catalão-GO. Outro ponto de destaque, que não é objeto desse estudo, é verificar a sazonalidade da qualidade do material que é recebida no aterro, podendo ter diferentes composições em diferentes épocas do ano.

7.8 EQUAÇÃO DE FCK X SUBSTITUIÇÃO

Com o resultado de todos os traços, é possível encontrar uma equação que relacione o fck esperado com a quantidade de substituição de agregados graúdos reciclados. A linha de tendência é apresentada na Figura 7.33:

Figura 7.33 – Linha de tendência fck x substituição



Fonte: Elaboração própria

Foi utilizada uma função polinomial de ordem 2 para representar os resultados que relaciona o fck com substituição dos agregados graúdos. Portanto, a equação proposta no presente trabalho é dada por:

$$fck = -4,7758R^2 + 1,4103R + 20,099 \dots\dots\dots(7.1)$$

sendo o fck dado em MPa e R é a taxa de substituição de agregados graúdos naturais por agregados graúdos reciclados, onde R=1 e R=0 equivalem, respectivamente, a 100% e 0% de substituição. Observe que a Eq. (7.1) é válida para o material obtido na cidade de Catalão-GO e com ela é possível obter resistências esperadas conforme a substituição de agregado graúdo desejada.

Obviamente que quanto mais resultados estiverem disponíveis, mais representativa será a equação obtida pela aproximação dos resultados. Sendo esta, uma possibilidade a ser explorada em trabalho futuro.

8 CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo investigar o comportamento mecânico de concretos produzidos com diferentes teores de substituição de agregados graúdos naturais por agregados reciclados, por meio de uma abordagem integrada entre modelagem experimental e modelagem numérica multiescala, onde a microestrutura do material é modelada pelo Elemento de Volume Representativo (EVR) e sua solução é obtida com uma formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC). Trata-se de um trabalho pioneiro dentro das pesquisas realizadas no Núcleo de Pesquisas em Modelagem de Materiais e Estruturas (NP2ME) e que servirá de base para novos trabalhos dentro dessa linha, contribuindo assim, com a utilização sustentável de materiais provenientes da demolição de construção civil e/ou da extração de minérios tão presente na Região de Catalão-GO.

O concreto com agregados reciclados é composto por três fases sendo elas: a matriz de pasta de cimento hidratada, os agregados graúdos convencionais e os agregados graúdos reciclados; e ainda duas zonas de transição interfaciais (ZTIs), sendo uma entre a pasta de cimento e os agregados graúdos convencionais e outra entre a pasta de cimento e os agregados graúdos reciclados.

O EVR utilizado é o mesmo proposto por SILVA et al. (2024), alterando apenas as inclusões referentes aos agregados graúdos reciclados, e as ZTIs dessas inclusões, de acordo com o traço em questão.

A partir dos ensaios experimentais realizados com corpos de prova contendo teores crescentes de substituição, foi possível observar que substituições de até 30% resultaram em desempenho mecânico satisfatório, mantendo a resistência do concreto em relação ao traço de referência. Contudo, substituições superiores a esse valor mostraram tendência de redução na eficiência mecânica do concreto, especialmente em termos de rigidez e resistência à tração.

Os ensaios físicos realizados forneceram dados fundamentais para a calibração e validação dos modelos numéricos. A modelagem computacional permitiu, a partir da definição de EVR, estimar com boa precisão a resposta constitutiva do material, mesmo em diferentes níveis de substituição dos agregados. Observou-se que elementos de fratura coesiva e contato ao redor dos agregados maiores propiciou a representação adequada de fenômenos como a fissuração da ZTI, contribuindo significativamente para a coerência entre os modelos numéricos e os resultados experimentais.

Os resultados mostraram ainda que a estratégia de parametrização adotada — baseada em testes numéricos com diferentes configurações de fratura (para o traço 1) e propriedades do material — possibilitou a extrapolação confiável para teores intermediários de substituição, mesmo sem dados experimentais correspondentes. Isso evidencia o potencial da abordagem

numérica com o EVR na predição do comportamento de concretos reciclados, reduzindo custos experimentais.

Dessa forma, conclui-se que a metodologia proposta contribui significativamente para o entendimento do comportamento mecânico de concretos com agregados reciclados, na cidade de Catalão-GO, e oferece uma ferramenta robusta para a análise computacional de materiais heterogêneos. Fica evidente a viabilidade da substituição parcial de agregados convencionais, desde que criteriosamente avaliada, como alternativa sustentável na construção civil.

8.1 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Embora os resultados do trabalho tenham sido satisfatórios, em sendo um primeiro realizado no tema dentro do leque de pesquisas do NP2ME, algumas limitações observadas durante a execução do trabalho indicam possíveis caminhos para pesquisas futuras:

- Realizar análise multiescala acoplada, visto que esse trabalho se restringiu à análise da microestrutura, sem realizar o acoplamento direto com a estrutura global. Uma pesquisa futura pode ser a verificação da viabilidade de uma estrutura construída com concreto com agregados recicláveis, utilizando a análise multiescala acoplada.
- Aprimoramento dos ensaios experimentais, incorporando o ensaio de álcali-agregado dos agregados reciclados, para verificar o quanto esse tipo de agregado impacta na fissuração do concreto, além de realização de testes de absorção de água desse tipo de agregado graúdo para o melhor acompanhamento da correção do fator água/cimento.
- Pode-se também realizar a investigação do impacto de formas e tamanhos dos agregados reciclados na resposta global do concreto. Observou-se que a captação das deformações nos ensaios de tração por compressão diametral se apresentou muito instável. Fica, portanto, a sugestão do aprimoramento da metodologia para uma estabilidade melhor da medição dos ensaios experimentais dessa natureza.
- Verificação dos efeitos de degradação por ciclos de carga do concreto reciclado. O presente trabalho verificou a curva de tensão x deformação, podendo-se expandir esse estudo no comportamento do concreto reciclado submetido à ciclos de carga.
- Utilização de resíduos da construção e de rejeitos do setor de mineração na condição de agregado miúdo na confecção de pastas cimentícias e posterior verificação da viabilidade de seu uso via ensaios experimentais e modelagem computacional multiescala.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRELPE. Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil. Disponível em: <https://abrelpe.org.br/download-panorama-2022>. Acesso em: 16 de maio de 2024.

ABREMA. Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil. Disponível em: https://www.abrema.org.br/wp-content/uploads/dlm_uploads/2024/03/Panorama_2023_P1.pdf. Acesso em: 17 de julho de 2025.

AL-AZZAWI, A. A. **Mechanical properties of recycled aggregate concrete**. ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. Vol. 11, n. 19, 2016.

ALIABADI, Mohammad H. **The boundary element method, volume 2: applications in solids and structures**. John Wiley & Sons, 2002.

ALLAIRE, Grégoire. Homogenization and two-scale convergence. **SIAM Journal on Mathematical Analysis**, v. 23, n. 6, p. 1482-1518, 1992.

ALTHEMAN, D. Avaliação da durabilidade de concretos confeccionados com entulho de construção civil. **Relatório final de Iniciação Científica apresentado a FAPESP. Campinas: UNICAMP**, 2002.

ANDRADE, Paula Viana Queiroz. Estudo do comportamento mecânico de microestruturas de materiais compósitos com matriz metálica. 2017.

ANGULO, Sérgio C.; FIGUEIREDO, AD de. Concreto com agregados reciclados. **Concreto: ciência e tecnologia**, v. 1, p. 1731-1767, 2011.

ANGULO, Sérgio C.; FIGUEIREDO, AD de. Concreto com agregados reciclados. **Concreto: ciência e tecnologia**, v. 1, p. 1731-1767, 2011.

ANGULO, Sérgio Cirelli. **Caracterização de agregados de resíduos de construção e demolição reciclados e a influência de suas características no comportamento de concretos**. 2005.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). NBR 5738: Concreto – Procedimento para moldagem e cura de corpos de prova, Rio de Janeiro, 2016.

_____. NBR 5739: Concreto – Ensaio de compressão de corpos de prova cilíndricos, Rio de Janeiro, 2018.

_____. NBR 7211: Agregados para concreto – Requisitos, Rio de Janeiro, 2022.

_____. NBR 7222: Concreto e argamassa – Determinação da resistência à tração por compressão diametral de corpos de prova cilíndricos, Rio de Janeiro, 2011.

_____. NBR 12655: Concreto de cimento Portland – Preparo, controle, recebimento e aceitação – Procedimento, Rio de Janeiro, 2022.

_____. NBR 15115: Agregados reciclados de resíduos sólidos da construção civil – Execução de camadas de pavimentação – Procedimentos, Rio de Janeiro, 2004.

_____. NBR 15116: Agregados reciclados para uso em argamassas e concretos de cimento Portland – Requisitos e métodos de ensaios, Rio de Janeiro, 2021.

_____. NBR 16889: Concreto – Determinação da consistência pelo abatimento do tronco de cone, Rio de Janeiro, 2020.

_____. NBR 17054: Agregados – Determinação da composição granulométrica – Método de ensaio, Rio de Janeiro, 2022.

AZIZI, Reza. Micromechanical modeling of damage in periodic composites using strain gradient plasticity. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 92, p. 101-113, 2012.

BETANCUR ARROYAVE, Adrián Alberto. Estudo da homogeneização de materiais microheterogêneos e viscoelásticos empregando o MEC. 2018.

BORGES, D. C. **Estudo e avaliação de uma proposta de modelagem do comportamento micromecânico do concreto**. 2015. 111 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2015.

BRADY, B. H. G.; BRAY, J. W. The boundary element method for determining stresses and displacements around long openings in a triaxial stress field. In: **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts**. Pergamon, 1978. p. 21-28.

BREBBIA, Carlos Alberto; DOMINGUEZ, Jose. **Boundary elements: an introductory course**. WIT press, 1994.

BUTTLER, A. M. **Concreto com agregados graúdos reciclados de concreto: influência da idade de reciclagem nas propriedades dos agregados e concretos reciclados**. São Carlos, 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Escola de Engenharia de São Paulo, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

CHEN, Kehan et al. Enhancement treatment of recycled concrete aggregate. **Frontiers in Built Environment**, v. 7, p. 739148, 2021.

CHENG, Alexander H.-D.; CHENG, Daisy T. Heritage and early history of the boundary element method. **Engineering analysis with boundary elements**, v. 29, n. 3, p. 268-302, 2005.

CIMENTO ITAMBÉ. Norma admite agregados reciclados em concreto estrutural. Disponível em: < <https://www.cimentoitambe.com.br/norma-admite-agregados-reciclados-em-concreto-estrutural/>>. Acesso em: 25 jan. 2025.

CIRAK, Fehmi; ORTIZ, Michael; PANDOLFI, Anna. A cohesive approach to thin-shell fracture and fragmentation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, n. 21-24, p. 2604-2618, 2005.

COSTA, Amanda T. et al. Steel fiber reinforced recycled aggregate concrete as structural material: From predicting post-cracking parameters to designing beams aided by FEM-based model. In: **Structures**. Elsevier, 2025. p. 108068.

CROZARIOL, Luis Henrique de Rezende. Análise do comportamento de microestruturas heterogêneas pelo método dos elementos de contorno considerando-se não-linearidade física. 2017.

CROZARIOL, Luís Henrique de Rezende; FERNANDES, Gabriela Rezende. Análise da resposta constitutiva de materiais heterogêneos pelo Método dos Elementos de Contorno, considerando-se diferentes microestruturas para o EVR. **Matéria (Rio de Janeiro)**, v. 25, p. e-12550, 2020.

DA SILVA, Marcello Congro Dias. **Modelagem Numérica do Comportamento Mecânico de Materiais Compósitos Cimentícios em uma Abordagem Multiescala**. 2020. Tese de Doutorado. PUC-Rio.

DE SOUZA NETO, E. A.; FEIJÓO, R. A. Variational foundations of multi-scale constitutive models of solid: small and large strain kinematical formulation. **LNCC Research & Development Report**, v. 16, 2006.

DELALIBERA, Rodrigo Gustavo. Análise teórica e experimental de vigas de concreto armado com armadura de confinamento. **Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo**, 2002.

DIN, DIN. 4226-100. Aggregates for concrete and mortar—part 100: recycled aggregates. **Deutsches Institut Fur Normung**, 2002.

FERNANDES, G. R.; PITUBA, J. J. C.; DE SOUZA NETO, E. A. FEM/BEM formulation for multi-scale analysis of stretched plates. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 54, p. 47-59, 2015a.

FERNANDES, G. R.; PITUBA, J. J. C.; DE SOUZA NETO, E. A. Multi-scale modelling for bending analysis of heterogeneous plates by coupling BEM and FEM. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 51, p. 1-13, 2015b.

FERNANDES, G. R.; PONTES, G. B. S.; OLIVEIRA, V. N. A 2D BEM formulation considering dissipative phenomena and a full coupled multiscale modelling. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 119, p. 25-43, 2020.

FERNANDES, Gabriela R. et al. A 2D boundary element formulation to model the constitutive behavior of heterogeneous microstructures considering dissipative phenomena. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 99, p. 1-22, 2019a.

FERNANDES, Gabriela R. et al. A 2D RVE formulation by the boundary element method considering phase debonding. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 104, p. 259-276, 2019b.

FERNANDES, Gabriela R.; OHLAND, Guilherme A.; VIEIRA, Jordana F. A Boundary Element Formulation to perform elastic analysis of heterogeneous microstructures. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 87, p. 47-65, 2018.

FERNANDES, Gabriela R.; OHLAND, Guilherme A.; VIEIRA, Jordana F. A boundary element formulation to perform elastic analysis of heterogeneous microstructures. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 87, p. 47-65, 2018.

FERNANDES, Gabriela Rezende. O método dos elementos de contorno aplicado à análise não-linear de placas. **São Carlos. Dissertação (Mestrado)-Escola de Engenharia de São Carlos-Universidade de São Paulo**, 1998.

FERNANDES, Gabriela Rezende. **Análise não-linear de estruturas de pavimentos de edifícios através do método dos elementos de contorno**. São Carlos. 272p. Tese (Doutorado)-Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2003.

FOLTRAN, Carlos Eduardo. **Análise de problemas planos em regime elasto-plástico pelo método dos elementos de contorno**. 1999. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas-Faculdade de Engenharia Civil.

FRANÇA, Luis Henrique Pereira. Caracterização e modelagem numérica do comportamento não linear do concreto de ultra-alto desempenho reforçado com fibras metálicas. 2021.

GAO, Weiliang et al. Discrete Element Modelling of Damage Evolution of Concrete Considering Meso-Structure of ITZ. **CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences**, v. 139, n. 3, 2024.

GAO, Xiao-Wei; DAVIES, Trevor G. **Boundary element programming in mechanics**. Cambridge University Press, 2002.

GIUSTI, Sebastián Miguel. Análise de sensibilidade topológica em modelos constitutivos multi-escalas. **Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional. Petrópolis**, 2009.

GRAY, L. J.; PAULINO, Glaucio H. Symmetric Galerkin boundary integral formulation for interface and multi-zone problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, n. 16, p. 3085-3101, 1997.

HADJARI, Mohammed et al. Investigation of the Mechanical and Fracture Properties of Recycled Aggregate Concrete. **Buildings**, v. 15, n. 7, p. 1155, 2025.

HASHIN, Zvi; SHTRIKMAN, Shmuel. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 11, n. 2, p. 127-140, 1963.

HILL, Rodney. A self-consistent mechanics of composite materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 13, n. 4, p. 213-222, 1965.

KARPINSK, Luisete Andreis. **Gestão diferenciada de resíduos da construção civil: uma abordagem ambiental**. Edipucrs, 2009.

KIM, Jung-Ho et al. A study on the properties of recycled aggregate concrete and its production facilities. **Applied Sciences**, v. 9, n. 9, p. 1935, 2019.

KIM, Sun-Myung; AL-RUB, Rashid K. Abu. Meso-scale computational modeling of the plastic-damage response of cementitious composites. **Cement and Concrete Research**, v. 41, n. 3, p. 339-358, 2011.

KLahr, Bruno et al. Modelo de homogeneização computacional bifásico em grandes deformações: um estudo aplicado a investigações numéricas de tecidos biológicos moles. 2022.

KLahr, Bruno; CARNIEL, Thiago André; FANCELLO, Eduardo Alberto. Uma abordagem numérica multiescala para simulação de estados uniaxiais de tensão em tecidos biológicos.

KRÄTZIG, Wilfried B.; KÖNKE, Carsten; BASAR, Yavuz. Multi-Scale Modelling of Damage Processes in Shell Structures. In: **Computational Mechanics' 95: Theory and Applications**. Springer Berlin Heidelberg, 1995. p. 1934-1939.

LA SERNA, HA de; REZENDE, Márcio Marques. Agregados para a construção civil. **Brasília: DNPM**, 2009.

LEITE, Mônica Batista. **Avaliação de propriedades mecânicas de concretos produzidos com agregados reciclados de resíduos de construção e demolição**. 2001.

LENS, Luciani Neves. Modelos para análise de fratura do concreto simples empregando interfaces coesivas. 2009.

LEVY, Salomon Mony. Contribuição ao estudo da durabilidade de concretos, produzidos com resíduos de concreto e alvenaria. **São Paulo**, v. 199, 2001.

LU, Linfeng. Optimal replacement ratio of recycled concrete aggregate balancing mechanical performance with sustainability: A review. **Buildings**, v. 14, n. 7, p. 2204, 2024.

LYE, Chao-Qun; DHIR, Ravindra K.; GHATAORA, Gurmel S. Elastic modulus of concrete made with recycled aggregates. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Structures and Buildings**, v. 169, n. 5, p. 314-339, 2016.

MALEKI, Mirshad et al. On the effect of ITZ thickness in meso-scale models of concrete. **Construction and Building Materials**, v. 258, p. 119639, 2020.

MANDEL, Jean. Plastidite et viscoplasticite. **CISM Lectures Notes**, v. 97, 1971.

MANSUR, Webe João. **A time-stepping technique to solve wave propagation problems using the boundary element method**. 1983. Tese de Doutorado. University of Southampton.

MEHTA, P. K., MONTEIRO, P. J. M., **Concreto: Microestrutura, Propriedades e Materiais** – 2ª Edição. Ed.: IBRACON. ISBN.: 978-85-98576213. 751 p. 2014.

NAKAGUMBA, Roberto Katumi. **Three dimensional elastostatics using the boundary element method**. 1979. Tese de Doutorado. University of Southampton.

NEVILLE, Adam M. **Tecnologia do concreto**. Bookman Editora, 2013.

OHLAND, Guilherme Avino. Análise de microestruturas heterogêneas através de uma formulação do método dos elementos de contorno considerando materiais com comportamento elástico. 2017.

PAPANICOLAU, George; BENSOUSSAN, Alain; LIONS, J.-L. **Asymptotic analysis for periodic structures**. Elsevier, 1978.

PARTRIDGE, P. W. **THE DUAL RECIPROCAL BOUNDARY ELEMENT METHOD**. 1990.

PENG, Yijiang; CHU, Hao; PU, Jiwei. Numerical simulation of recycled concrete using convex aggregate model and base force element method. **Advances in materials science and engineering**, v. 2016, n. 1, p. 5075109, 2016.

PERIĆ, D. et al. On multiscale analysis of heterogeneous composite materials: implementation of micro-to-macro transitions in the finite element setting. In: **Computational Plasticity**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2007. p. 165-185.

PETTRES, Roberto; DE LACERDA, Luiz Alkimir; CARRER, José Antonio Marques. A boundary element formulation for the heat equation with dissipative and heat generation terms. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 51, p. 191-198, 2015.

PITUBA, José J. de C.; FERNANDES, Gabriela R.; DE SOUZA NETO, Eduardo A. Modeling of cohesive fracture and plasticity processes in composite microstructures. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 142, n. 10, p. 04016069, 2016.

PITUBA, Jose JC; NETO, Eduardo A. Souza. Modeling of unilateral effect in brittle materials by a mesoscopic scale approach. **Computers and Concrete, An International Journal**, v. 15, n. 5, p. 735-758, 2015.

PORTLAND CEMENT ASSOCIATION. Applications of cement. Disponível em: <<https://www.cement.org/cement-concrete/applications-of-cement/>>. Acesso em: 18 dez. 2024.

QUARESMA, Wanessa Mesquita Godoi. Contribuição ao estudo do comportamento mecânico do concreto utilizando diferentes modelagens em elementos finitos na escala mesoscópica. 2016.

SAMAAN, Morcos Farid. Dual reciprocity boundary element method: Methodology and applications in structural engineering. **Computers & Structures**, v. 298, p. 107367, 2024.

SANTOS, W. F. *et al.* Análise do comportamento mecânico de compósitos de matriz metálica considerando processos de plasticidade e descolamento da interface. In: **Congresso ibero-latino-americano de métodos computacionais em engenharia (CILAMCE)**, 38., 2017, Florianópolis. *Anais...* Florianópolis: ABMEC, 2017.

SANTOS, Wanderson Ferreira dos; PITUBA, José Julio de Cerqueira. Yield surfaces of material composed of porous and heterogeneous microstructures considering phase debonding. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 14, n. 8, p. 1387-1415, 2017.

SCANDIUZZI, Luercio; ANDRIOLO, Francisco Rodrigues. **Concreto e seus materiais: propriedades e ensaios**. Pini, 1986.

SILVA, Maria Julia Marques et al. Meso-scale modeling of the compressive mechanical behavior of concrete by a RVE-based BEM formulation. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, v. 31, n. 9, p. 1877-1896, 2024.

SOUZA, Flávio Vasconcelos de. Modelo multi-escala para análise estrutural de compósitos viscoelásticos suscetíveis ao dano. 2005.

SOUZA, JG de. **Contribuição ao Estudo da Relação Entre Propriedades e Proporcionamento de Blocos de Concreto: aplicação ao uso de entulho como agregado reciclado**. Brasília, 2001. 142 f. 2001. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)—Escola de Engenharia, Universidade de Brasília, Brasília.

TELLES, J. C. F.; BREBBIA, C. A. Boundary element solution for half-plane problems. **International Journal of Solids and Structures**, v. 17, n. 12, p. 1149-1158, 1981.

TELLES, José Claudio de Faria. **On the application of the boundary element method to inelastic problems**. 1981. Tese de Doutorado. University of Southampton.

TRIVEDI, Shiv Sai; DAS, Bibhuti Bhusan; BARBHUIYA, Salim. Performance of construction and demolition waste as recycled aggregates in concrete—review. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Construction Materials**, p. 1-28, 2024.

VENTURA, A. M. F. M. **Os Compósitos e a sua aplicação na Reabilitação de Estruturas metálicas**. Ciência & Tecnologia dos Materiais, v. 21, n. 3–4, p. 10–19, jul. 2009.

VENTURINI, W. S.; BREBBIA, C. A. Boundary element formulation to solve no-tension problems in geomechanics. In: **Numerical Methods in Geomechanics: Proceedings of the NATO Advanced Study Institute, University of Minho, Braga, Portugal, held at Vimeiro, August 24–September 4, 1981**. Dordrecht: Springer Netherlands, 1982. p. 375-388.

VENTURINI, Wilson Sergio. **Application of the boundary element formulation to solve geomechanical problems**. 1982. Tese de Doutorado. University of Southampton.

VYNCKE, Johan; VRIJDERS, Jeroen. Recycling of C&D waste in Belgium: state-of-the-art and opportunities for technology transfer. In: **INTERNATIONAL CONFERENCE ON SUSTAINABLE CONSTRUCTION MATERIALS AND TECHNOLOGIES**. 2010.

ZORDAN, Sergio Eduardo. **A utilização do entulho como agregado, na confecção do concreto**. 1997. Tese de Doutorado. [sn].

APÊNDICE A – SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

A equação integral do Método dos Elementos de Contorno (MEC) é estabelecida com base em um problema fundamental, no qual a solução $u_{ki}(q,p)$ da equação de Poisson, originalmente derivada por Lord Kelvin, é adotada. Essa solução fundamental é considerada independente da solução do problema físico, embora regida pela mesma equação diferencial que rege o problema real (Fernandes, 2005). Matematicamente, (q,p) representam o deslocamento no ponto p , na direção i , resultante de uma carga concentrada unitária aplicada no ponto de colocação q , na direção k . A carga unitária associada ao problema fundamental é modelada pela função delta de Dirac $\delta(q,p)$, enquanto variáveis relacionadas a esse problema são sistematicamente identificadas pelo índice $*$.

No caso tridimensional, a solução fundamental $u_{ki,jj}^*$ é obtida ao se substituir a força b_i na equação diferencial de equilíbrio (Equação de Navier) pela função delta de Dirac $\delta(q,p)$, resultando na expressão:

$$u_{ki,jj}^* + \frac{u_{kj,ij}^*}{1-2\nu} + \frac{\delta(q,p)\delta_{ki}}{G} = 0 \dots\dots\dots i, j, k = 1,2,3 \dots\dots\dots (8.1)$$

Resolvendo a Eq. (A.1) têm-se a expressão do deslocamento fundamental para o caso tridimensional:

$$u_{ki}^*(q,p) = \frac{[(3-4\nu)\delta_{ki}+r_i r_{,k}]}{16\pi r G(1-\nu)} \dots\dots\dots i, j, k = 1,2,3 \dots\dots\dots (8.2)$$

sendo r a distância entre o ponto q e o ponto p .

Para escrever a equação do deslocamento fundamental para o caso bidimensional, basta integrar a Eq. (A.2) ao longo de um dos eixos no intervalo de $(-\infty, \infty)$, assim, desprezando-se o movimento de corpo rígido igual a infinito, chega-se a:

$$u_{ki}^*(q,p) = \frac{[-(3-4\nu)\ln(r)\delta_{ki}+r_i r_{,k}]}{8\pi G(1-\nu)} \dots\dots\dots i, j, k = 1,2 \dots\dots\dots (8.3)$$

Para particularizar o equacionamento para o caso de Estado Plano de Tensão (EPT) o coeficiente de Poisson ν deve ser substituído por $\nu' = \frac{\nu}{(1+\nu)}$. Considerando uma carga fundamental aplicada na direção k , têm-se o seguinte vetor de deslocamentos fundamentais:

$$\{u_{ki}^*\}^T = \{u_{k1}^* \quad u_{k2}^*\} \dots\dots\dots k = 1,2 \dots\dots\dots (8.4)$$

Para encontrar a deformação fundamental é necessário derivar a Eq. (A.3), resultando em:

$$\frac{\partial u_{ki}^*(q,p)}{\partial x_j(p)} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[-(3-4\nu) \frac{1}{r} r_{,j} \delta_{ik} + r_{,k} \frac{\partial r_{,i}}{\partial x_j(p)} + r_{,i} \frac{\partial r_{,k}}{\partial x_j(p)} \right] \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots i, j, k = 1,2 \dots\dots\dots (8.5)$$

Têm-se que:

$$\frac{\partial r_{,i}}{\partial x_j(p)} = \frac{1}{r} (\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}) \dots\dots\dots i, j = 1,2 \dots\dots\dots (8.6)$$

Sabendo da relação expressa na Eq. (A.6), pode-se reescrever a Eq. (A.5) da seguinte forma:

$$\frac{\partial u_{ki}^*(q,p)}{\partial x_j(p)} = u_{ki,j}^*(q,p) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} \left[-(3-4\nu)r_{,j} \delta_{ki} + \delta_{ij}r_{,k} + \delta_{kj}r_{,i} - 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right].$$

$$\dots\dots\dots i, j, k = 1,2 \dots\dots\dots (8.7)$$

Analogamente, têm-se a derivada $\frac{\partial u_{kj}^*(q,p)}{\partial x_i(p)}$:

$$\frac{\partial u_{kj}^*(q,p)}{\partial x_i(p)} = u_{kj,i}^*(q,p) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} \left[-(3-4\nu)r_{,i} \delta_{kj} + \delta_{ij}r_{,k} + \delta_{ki}r_{,j} - 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right].$$

$$\dots\dots\dots i, j, k = 1,2 \dots\dots\dots (8.8)$$

Definindo a deformação em termos do gradiente de deslocamentos, tem-se:

$$\varepsilon_{kij}^*(q,p) = \frac{1}{2} (u_{ki,j}^*(q,p) + u_{kj,i}^*(q,p)) \dots\dots\dots i, j, k = 1,2 \dots\dots\dots (8.9)$$

Substituindo as Eq. (A.7) e (A.8) na Eq. (A.9), tem-se:

$$\varepsilon_{kij}^*(q, p) = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} [(1-2\nu)(r_{,j} \delta_{ki} + r_{,i} \delta_{kj}) - r_{,k} \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k}] \dots\dots\dots i, j, k = 1, 2 \dots\dots\dots (8.10)$$

A fim de aplicar a relação constitutiva para obtenção da tensão fundamental a partir da deformação fundamental, é necessário obter o traço da deformação, representado por ε_{kll}^* . Para isso, realiza-se a atribuição de $i = j = l$ na Eq. (A.10) e considerando $\delta_{kk}r_{,l} = r_{,k}$; $\delta_{ll} = \delta_{11} + \delta_{22} = 2$ e $r_{,l} r_{,l} = r_{,1}^2 + r_{,2}^2 = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$, obtém-se:

$$\varepsilon_{kll}^* = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} [(1-2\nu')(r_{,k} + r_{,k}) - 2r_{,k} + 2r_{,k}] = -\frac{(1-2\nu')r_{,k}}{4\pi(1-\nu)Gr} \dots\dots\dots k, l = 1, 2 \dots\dots\dots (8.11)$$

Tem-se a Lei de Hooke generalizada aplicada ao problema fundamental:

$$\sigma_{kij}^* = 2G\varepsilon_{kij}^* + \lambda\varepsilon_{kll}^*\delta_{ij} \dots\dots\dots i, j, k = 1, 2 \dots\dots\dots (8.12)$$

Substituindo as Eq. (A.10) e (A.11) na Eq. (A.12), encontra-se a expressão fundamental para a tensão em um ponto p:

$$\sigma_{kij}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{(1-2\nu')[\delta_{jk}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,j} - \delta_{ij}r_{,k}] + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k}\} \dots\dots\dots i, j, k = 1, 2 \dots\dots\dots (8.13)$$

A partir da Eq. (A.13) obtém-se a expressão da força de superfície fundamental $p_{ki}^*(q, p)$:

$$p_{ki}^*(q, p) = \sigma_{kij}^* n_j = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ [(1-2\nu')\delta_{ik} + 2r_{,i} r_{,k}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu')[n_i r_{,k} + n_k r_{,i}] \right\} \dots\dots\dots i, k = 1, 2 \dots\dots\dots (8.14)$$

O vetor das forças de superfície para uma carga fundamental aplicada na direção k no caso bidimensional é dado por:

$$\{p_{ki}^*\}^T = \{p_{k1}^* \quad p_{k2}^*\} \dots\dots\dots k = 1, 2 \dots\dots\dots (8.15)$$

Para obter o esforço fundamental N_{kij}^* integra-se a Eq. (A.13):

$$N_{kij}^* = \frac{\bar{E}}{1-\nu^2} [\nu \varepsilon_{kll}^* \delta_{ij} + (1-\nu) \varepsilon_{kij}^*] \dots \dots \dots i, j, k = 1, 2 \dots \dots \dots (8.16)$$

A partir da integração da Eq. (A.10), surgem novos termos fundamentais:

$$\varepsilon_{ki}^{*2D} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu')\bar{G}r} \left\{ (1-2\nu') \left[n_k r_{,i} + \delta_{ki} \frac{\partial r}{\partial n} \right] - r_{,k} n_i + 2r_{,k} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} \dots \dots \dots (8.17)$$

$$\varepsilon_{kij}^{*2D} = -\frac{\nu'}{4\pi(1-\nu')\bar{G}r^2} [\delta_{ki} - 2r_{,k} r_{,i}] \dots \dots \dots (8.18)$$

REFERÊNCIAS

FERNANDES, G.R. **Introdução ao Método dos Elementos de Contorno – MEC.** Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Ilha Solteira, 2005.