



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO



João Paulo Favoretto Braz da Cunha

**ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE PÓRTICOS PLANOS
COM O USO DA FORMULAÇÃO CORROTACIONAL**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CATALÃO – GO, 2018

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: Dissertação [] Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: João Paulo Favoretto Braz da Cunha

Título do trabalho: Análise estática e dinâmica de pórticos planos com o uso da formulação corrotacional

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM [] NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.



João Paulo Favoretto Braz da Cunha²

Ciente e de acordo:



Prof Dr. Wellington Andrade da Silva²

Data: 06 / 12 / 2018

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

² A assinatura deve ser escaneada.

JOÃO PAULO FAVORETTO BRAZ DA CUNHA

ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE PÓRTICOS PLANOS
COM O USO DA FORMULAÇÃO CORROTACIONAL

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem e Otimização pela Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão.

Orientador:
Wellington Andrade da Silva

CATALÃO – GO

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Favoretto Braz Cunha, João Paulo
ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE PÓRTICOS PLANOS COM
O USO DA FORMULAÇÃO CORROTACIONAL [manuscrito] /João
Paulo Favoretto Braz Cunha. - 2018.
109 f.

Orientador: Prof. Dr. Wellington Andrade da Silva.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade
Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão,
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização, Catalão, 2018.

Inclui símbolos, lista de figuras.

1. Descrição corrotacional. 2. Análise não linear geométrica. 3.
Elemento de viga 2D. 4. Pórtico plano. I. Andrade da Silva, Wellington ,
orient. II. Título.

CDU 624

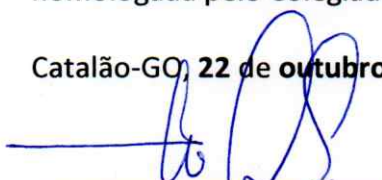


Defesa Nº _____

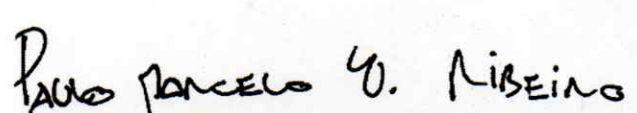
Ata de Defesa Pública – Dissertação de Mestrado

Aos 22 dias do mês de **outubro** do ano de 2018, às 14h:00min, reuniram-se os componentes da banca examinadora, professores **Dr. Wellington Andrade da Silva** (presidente e orientador), **Dr. Romes Antonio Borges** e **Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro** para, em sessão pública realizada via webconferência no Laboratório de Geoprocessamento (Bloco O), da Regional Catalão (RC), da Universidade Federal de Goiás (UFG), procederem com a avaliação do trabalho intitulado "**ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE PÓRTICOS PLANOS COM O USO DA FORMULAÇÃO CORROTACIONAL**", em nível de Mestrado, área de concentração *Modelagem e Otimização*, de autoria de **João Paulo Favoretto Braz da Cunha**, discente do Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização (PPGMO) da UFG/RC. A sessão foi aberta pelo presidente da banca, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao discente que, dentro do tempo regulamentar, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o candidato, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação do trabalho. Os membros da banca consideraram o trabalho final: () **Aprovado** ou () **Reprovado**. Cumpridas as formalidades de pauta, às 16 h: 50 min a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu **Dr. Wellington Andrade da Silva**, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo discente e, posteriormente, será homologada pelo Colegiado do PPGMO.

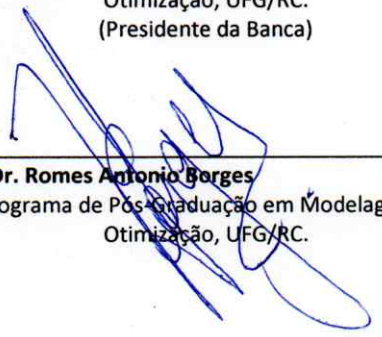
Catalão-GO, 22 de outubro de 2018.



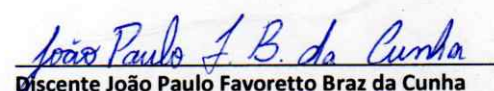
Prof. Dr. Wellington Andrade da Silva
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e
Otimização, UFG/RC.
(Presidente da Banca)



Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil,
PPGEC/UFPE.



Prof. Dr. Romes Antonio Borges
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e
Otimização, UFG/RC.



Discente João Paulo Favoretto Braz da Cunha
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e
Otimização, UFG/RC.

Dedico este trabalho a todos aqueles que me apoiaram e incentivaram durante o mestrado, e estes o sabem. Em especial à Meus Pais Sebastião B.C. dos Reis e Glória A. de Brito

Agradecimentos

Agradeço a Deus e ao meu anjo de guarda por me guiarem em mais essa conquista.

Aos meus pais Sebastião e Glória, por me proporcionarem esta oportunidade através de suor, trabalho duro e paciência. A minha família por sempre estar ao meu lado e apoiar.

Ao professor Wellington Andrade da Silva, por toda a orientação dada no decorrer deste trabalho, pela paciência no esclarecimento das dúvidas, e por toda a disponibilidade para o acompanhamento neste período de conclusão, o que foi fundamental. Ainda a este pelo companheirismo e incentivo durante o mestrado, sendo considerado além de professor um amigo.

Agradeço a todos os professores do Programa Pós-Graduação em Modelagem e Otimização, que contribuíram para a minha formação técnica. Ao Prof. Dr. Celso Vieira Abud e à secretária do programa de pós-graduação Elizângela Nahas, por todo o auxílio prestado sempre que fora necessário. Em especial ao Prof. Dr. Romes Antônio Borges por ter acompanhado e qualificado o desenvolvimento deste trabalho ao longo das várias etapas avaliativas.

A todos os colegas do Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização, que se tornaram grandes amigos no decorrer deste período. E a todos os amigos que de forma direta e indireta contribuíram para a conclusão deste trabalho.

*"Os dois dias mais importantes de sua vida são: o dia em que você nasceu, e o dia em que
você descobre o porquê." (Mark Twain)*

RESUMO

CUNHA, J. P. F. B.. *ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE PÓRTICOS PLANOS COM O USO DA FORMULAÇÃO CORROTACIONAL*. 2018. 109 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem e Otimização) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

Este trabalho apresenta um estudo pertinente a descrição cinemática corrotacional aplicada ao Método dos Elementos Finitos para elemento de viga 2D, baseado na hipótese da viga de Euler-Benoulli, no intuito de tratar os efeitos da não linearidade geométrica presente no comportamento de estruturas. Para realizar este estudo implementou-se dois programas, em linguagem Matlab®, do método dos elementos finitos baseado na descrição cinemática apresentada neste trabalho, sendo o primeiro voltado a realizar análise estática, denominado PPNLG, e o segundo direcionado a realizar análise dinâmica, denominado PPNLD. No tocante do campo das análises estáticas, foi utilizado como método de controle de carga deslocamento o método do comprimento de arco cilíndrico. Com relação às análises dinâmicas, o método adotado para solucionar os sistemas de equações diferenciais não lineares foi o método de integração direta implícita de Newmark. Ambos os programas foram validados com sucesso, ao se comparar os resultados obtidos em exemplos numéricos com os resultados obtidos por outras bibliografias.

Palavras-chaves: Descrição Corrotacional, Análise Não-linear Geométrica, Elemento de viga 2D, Pórtico Plano.

ABSTRACT

CUNHA, J. P. F. B.. *ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE PÓRTICOS PLANOS COM O USO DA FORMULAÇÃO CORROTACIONAL*. 2018. 109 f. Master Thesis in Modelling and Optimization – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

This research presents a survey of the corrotational kinematic description applied to the Finite Element Method for 2D beam element, based on the Euler-Benoulli beam hypothesis, with the purpose to handle the effects of geometric non-linearity in the behavior of structures. In order to complete this survey two Matlab® programs were implemented in the finite element method based on the kinematic description presented in this research. The first one was to static analysis, denominated PPNLG, and the second one to dynamic analysis, denominated PPNLD . In relation of the field of static analysis, the method of load displacement control was the cylindrical arch length method. To the dynamic analysis, the method used to solve the systems of nonlinear differential equations was the implicit direct integration method of Newmark. Both programs were successfully validated when comparing the results obtained in numerical examples with the results obtained by other bibliographies.

Keywords: Corotational formulation, Geometric nonlinear analysis, 2D beam element, Planar frames.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Obelisco de Buenos Aires	25
Figura 1.2 – Centro de manutenção da Gol	26
Figura 1.3 – Torre de transmissão de energia	27
Figura 1.4 – <i>Mapping Study</i>	31
Figura 1.5 – <i>Número de publicações x Anos</i>	31
Figura 1.6 – <i>Vertente: tipo de análise</i>	32
Figura 1.7 – <i>Vertente: tipo de não-linearidade</i>	32
Figura 1.8 – <i>Vertente: tipo de elemento (MEF) utilizado</i>	32
Figura 1.9 – Levantamento de teses e dissertações	34
Figura 1.10 – Número teses e dissertações x Anos	34
Figura 1.11 – Número teses e dissertações x Universidades	35
Figura 1.12 – <i>Vertente: tipo de não-linearidade</i>	36
Figura 1.13 – <i>Vertente: tipo de elemento</i>	36
Figura 1.14 – <i>Vertente: tipo de análise</i>	37
Figura 2.1 – Comportamento não-linear geométrico	39
Figura 2.2 – Divisão dos movimentos de corpo rígido e deformacional	42
Figura 2.3 – Deformação viga Euler-Bernoulli	43
Figura 2.4 – Deformação viga Timoshenko	44
Figura 2.5 – Configurações e sistemas de coordenadas	45
Figura 2.6 – Movimento de corpo rígido	48
Figura 2.7 – Configuração inicial C_0	49
Figura 2.8 – Deslocamentos globais e globais rotacionados	51
Figura 2.9 – Deslocamentos deformacionais no sistema local	52
Figura 2.10 – Convenções de sinais dos esforços	54
Figura 2.11 – Trajetória de equilíbrio	58
Figura 2.12 – Padrões de resposta dinâmica	59
Figura 2.13 – Fenômenos de inversão de equilíbrio	60
Figura 2.14 – Método de comprimento de arco esférico	65
Figura 2.15 – Fluxograma MEF NLG	74

Figura 2.16 – Fluxograma MEF NLD	75
Figura 3.1 – Pórtico de Lee	78
Figura 3.2 – Trajetória de equilíbrio do pórtico de Lee: Vertical	79
Figura 3.3 – Trajetória de equilíbrio do pórtico de Lee: Horizontal	79
Figura 3.4 – <i>Portal Frame</i>	80
Figura 3.5 – Trajetória de equilíbrio do <i>portal frame</i> : Horizontal	81
Figura 3.6 – Arco Circular Não Achatado	82
Figura 3.7 – Trajetória de equilíbrio do arco circular: Vertical	82
Figura 3.8 – Trajetória de equilíbrio do arco circular: Horizontal	83
Figura 3.9 – Viga em balanço	84
Figura 3.10 – Trajetória de equilíbrio da viga em balanço: Vertical	84
Figura 3.11 – Trajetória de equilíbrio da viga em balanço: Horizontal	85
Figura 3.12 – Portico <i>Toggle</i>	86
Figura 3.13 – Trajetória de equilíbrio do pórtico <i>toggle</i> : Vertical	86
Figura 4.1 – Viga Biengastada	88
Figura 4.2 – Resposta dinâmica vertical: Viga Biengastada	89
Figura 4.3 – Resposta dinâmica vertical: linear e não linear	90
Figura 4.4 – Diagrama de plano fase: Viga Biengastada	90
Figura 4.5 – Resposta dinâmica vertical: Viga Biengastada	91
Figura 4.6 – Viga em Balaço	92
Figura 4.7 – Resposta dinâmica vertical: Viga em Balanço	92
Figura 4.8 – Resposta dinâmica vertical: linear e não linear	93
Figura 4.9 – Diagrama de plano fase: Viga em Balanço	94
Figura 4.10 – Resposta dinâmica vertical: Viga em Balanço	94
Figura 4.11 – Pórtico de Williams	95
Figura 4.12 – Resposta dinâmica vertical: Pórtico de Williams	96
Figura 4.13 – Resposta dinâmica vertical: linear e não linear	97
Figura 4.14 – Diagrama de plano fase: Pórtico de Williams	97
Figura 4.15 – Resposta dinâmica vertical: Pórtico de Williams	98
Figura 4.16 – Viga Biengastada	99
Figura 4.17 – Resposta dinâmica vertical: Viga Biengastada	99
Figura 4.18 – Resposta dinâmica vertical: linear e não linear	100
Figura 4.19 – Diagrama de plano fase: Viga Biengastada	101
Figura 4.20 – Resposta dinâmica vertical: Viga Biengastada	101

LISTA DE SÍMBOLOS

- A — Área da seção transversal
- \mathbf{B} — Matriz de deslocamento-deformação
- C — Configuração final
- C_0 — Configuração inicial
- C_R — Configuração corrotacionada
- \mathbf{C} — Matriz de amortecimento
- \mathbf{D} — Matriz de elasticidade
- d — Deformação axial do elemento
- E — Modo de elasticidade longitudinal
- \mathbf{f} — Vetor de forças internas
- \mathbf{f}^A — Parcela axial do vetor de forças internas
- \mathbf{f}^F — Parcela de flexão do vetor de forças internas
- \mathbf{f}_g — Vetor de forças internas em coordenadas globais
- $\mathbf{f}(t)$ — Vetor de forças externas
- \mathbf{f}_{ext} — Vetor de forças externas
- \mathbf{f}_{int} — Vetor de forças internas
- $\mathbf{f}_{inercial}$ — Força inercial
- \mathbf{I} — Matriz identidade
- I — Momento de inércia da seção transversal
- \mathbf{K} — Matriz de rigidez tangente
- \mathbf{K}_M — Matriz de rigidez material
- \mathbf{K}_M^{axial} — Parcela axial matriz de rigidez material

$\mathbf{K}_M^{\text{flexão}}$ — Parcela de flexão matriz de rigidez material
 \mathbf{K}_G — Matriz de rigidez geométrica
 $\mathbf{K}_G^{\text{axial}}$ — Parcela axial matriz de rigidez geométrica
 $\mathbf{K}_G^{\text{flexão}}$ — Parcela de flexão matriz de rigidez geométrica
 \mathbf{K}_g — Matriz de rigidez tangente global
 L_0 — Comprimento inicial do elemento
 L — Comprimento final do elemento
 m — Massa por unidade de comprimento L do elemento
 \mathbf{M} — Matriz de massa
 \mathbf{M}^e — Matriz de massa do elemento
 M_1 — Flexão no nó inicial do elemento
 M_2 — Flexão no nó final do elemento
 $\mathbf{N}(x)$ — Função de forma do elemento, ou função de interpolação
 N — Esforço normal no elemento
 $\mathbf{p}(x)$ — Vetor de forças concentradas
 \mathbf{Q} — Matriz de rotação de coordenadas globais para locais
 \mathbf{Q}^T — Matriz de rotação de coordenadas locais para globais
 \mathbf{R}^T — Matriz de rotação de coordenadas locais para globais do elemento
 $\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1})$ — Vetor residual no passo de tempo $n+1$
 $\mathbf{s}(x)$ — Vetor de forças por unidade de superfície
 tol — Tolerância aplicada ao vetor residual para ser considerada a convergência da iteração k
 \mathbf{u}_n — Vetor deslocamento no passo de tempo n
 \mathbf{u}_{n+1} — Vetor deslocamento no passo de tempo $n+1$
 \mathbf{u}_{n+1}^* — Vetor de predição de deslocamento no passo de tempo $n+1$
 \mathbf{u}_{n+1}^k — Vetor deslocamento no passo de tempo $n+1$, na iteração k
 \mathbf{u}_{n+1}^{k+1} — Vetor deslocamento no passo de tempo $n+1$, na iteração $k+1$
 $\dot{\mathbf{u}}_n$ — Vetor velocidade no passo de tempo n
 $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$ — Vetor velocidade no passo de tempo $n+1$
 $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^*$ — Vetor de predição de velocidade no passo de tempo $n+1$

$\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^k$ — Vetor velocidade no passo de tempo n+1, na iteração k
 $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{k+1}$ — Vetor velocidade no passo de tempo n+1, na iteração k+1
 $\ddot{\mathbf{u}}_n$ — Vetor aceleração no passo de tempo n
 $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$ — Vetor aceleração no passo de tempo n+1
 $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^k$ — Vetor aceleração no passo de tempo n+1, na iteração k
 $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{k+1}$ — Vetor aceleração no passo de tempo n+1, na iteração k+1
 $\dot{\mathbf{u}}$ — Vetor velocidade
 $\ddot{\mathbf{u}}$ — Vetor aceleração
 \mathbf{u} — Vetor deslocamento total
 u — Componente horizontal do vetor \mathbf{u}
 \mathbf{u}_1 — Deslocamento total do nó 1
 u_1 — Componente horizontal do vetor \mathbf{u}_1 no sentido do eixo global x
 \mathbf{u}_2 — Deslocamento total do nó 2
 u_2 — Componente horizontal do vetor \mathbf{u}_2 no sentido do eixo global x
 $\mathbf{u}^{\text{rot}}_{21}$ — Deslocamentos nodais rotacionados
 u^{rot}_{21} — Deslocamento nodal no sentido do eixo local x_0^e
 u^{rot}_1 — Deslocamento do nó 1 no sentido do eixo local x_0^e
 u^{rot}_2 — Deslocamento do nó 2 no sentido do eixo local x_0^e
 $\mathbf{u}^e_{\mathbf{D}}$ — Deslocamento deformacional local da partícula P
 $\mathbf{u}^e_{1\mathbf{D}}$ — Deslocamento deformacional local do nó 1
 $u^e_{1\mathbf{D}}$ — Componente horizontal de vetor $\mathbf{u}^e_{1\mathbf{D}}$
 $\mathbf{u}_{\mathbf{D}}$ — Deslocamento deformacional da partícula P
 $\mathbf{u}_{\mathbf{R}}$ — Deslocamento de corpo rígido da partícula P
 \mathbf{u}_0 — Vetor deslocamento do eixo inicial local ao eixo local corrotacionado
 u_0 — Componente horizontal do vetor \mathbf{u}_0
 $u^e_{2\mathbf{D}}$ — Componente horizontal de vetor $\mathbf{u}^e_{2\mathbf{D}}$
 $\mathbf{u}^e_{2\mathbf{D}}$ — Deslocamento deformacional local do nó 2
 U — Energia de deformação do elemento de viga
 U^A — Parcela axial da energia de deformação
 U^F — Parcela de flexão da energia de deformação

V — Esforço cortante no elemento

v — Componente vertical do vetor \mathbf{u}

v_1 — Componente vertical do vetor \mathbf{u}_1 no sentido do eixo global y

v_2 — Componente vertical do vetor \mathbf{u}_2 no sentido do eixo global y

u_{21} — Deslocamento nodal no sentido do eixo global x

v_{21} — Deslocamento nodal no sentido do eixo global y

v^{rot}_{21} — Deslocamento nodal no sentido do eixo local y_0^e

v^{rot}_1 — Deslocamento do nó 1 no sentido do eixo local y_0^e

v^{rot}_2 — Deslocamento do nó 2 no sentido do eixo local y_0^e

v^e_{1D} — Componente vertical de vetor \mathbf{u}^e_{1D}

v^e_{2D} — Componente vertical de vetor \mathbf{u}^e_{2D}

v_0 — Componente vertical do vetor \mathbf{u}_0

W_{ext} — Trabalho devido à forças externas

W_{int} — Trabalho devido à forças internas

(x, y) — Sistema de coordenada global

(x^e, y^e) — Sistema de coordenada local

(x_0^e, y_0^e) — Eixos locais iniciais

(x_R^e, y_R^e) — Eixos locais corrotacionados

\mathbf{X} — Vetor posição da partícula P_0

\mathbf{X}_1 — Vetor posição do nó 2 do elemento

\mathbf{X}_2 — Vetor posição do nó 1 do elemento

x_1 — Componente horizontal do vetor \mathbf{X}_1

x_2 — Componente horizontal do vetor \mathbf{X}_2

\mathbf{x} — Vetor posição global da partícula P_0 , em sua posição final, após movimentos de corpo rígido e deformacional

\mathbf{x}^e — Vetor posição local da partícula P_0 , em sua posição final, após movimentos de corpo rígido e deformacional

\mathbf{x}_R — Vetor posição da partícula P_0 , em sua posição P_R , após movimento de corpo rígido

y_1 — Componente vertical do vetor \mathbf{X}_1

y_2 — Componente vertical do vetor \mathbf{X}_2

β — Parâmetro beta de estabilidade e precisão do método de integração direta implícito de Newmark

$\Delta \mathbf{u}^k$ — Vetor deslocamento incremental da iteração k

Δt — Instante de tempo da análise dinâmica

$\Delta(x)$ — Vetor de deslocamentos virtuais

Δ — Deslocamentos nodais

$\ddot{\Delta}(x)$ — Aceleração em cada elemento

$\ddot{\Delta}$ — Aceleração nodal em cada elemento

ϵ — Vetor de deformação virtual associado a $\Delta(x)$

γ — Parâmetro gamma de estabilidade e precisão do método de integração direta implícito de Newmark

θ — Rotação total do elemento

θ_1 — Ângulo entre o vetor posição do nó 1 e eixo local do elemento (x_0^e)

θ_2 — Ângulo entre o vetor posição do nó 2 e eixo local do elemento (x_0^e)

θ_{P_0} — Ângulo entre o eixo local (x_0) e o vetor posição da partícula P_0 (\mathbf{X})

$\bar{\theta}$ — Rotação deformacional

$\bar{\theta}_1$ — Rotação deformacional do nó 1

$\bar{\theta}_2$ — Rotação deformacional do nó 2

λ_ψ — Cosseno de ψ

λ_α — Cosseno de α

μ_ψ — Seno de ψ

μ_α — Seno de α

ψ — Rotação de corpo rígido

ρ — Massa específica do material

σ — Vetor de tensões

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
1.1	Motivação	25
1.2	Breve histórico da formulação corrotacional	27
1.3	Objetivo	29
1.3.1	Objetivos específicos	29
1.4	Cenário de pesquisa	30
1.4.1	Periódicos	30
1.4.2	Teses e dissertações	33
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	39
2.1	Análise Não-linear Geométrica	39
2.1.1	Métodos para análise não-linear geométrica	40
2.2	Generalidades Sobre a Descrição Cinemática Corrotacional	41
2.2.1	Natureza da descrição corrotacional	42
2.3	Formulação corrotacional de pórticos planos	43
2.3.1	Modelo de elemento de viga	43
2.3.2	Descrição cinemática	44
2.3.2.1	Transformações de Sistemas Coordenadas	46
2.3.3	Deslocamentos deformacionais	47
2.3.3.1	Movimento deformacional em função dos deslocamentos nodais	48
2.3.3.2	Derivadas parciais dos deslocamentos deformacionais	52
2.3.4	Esforços resultantes	53
2.3.5	Energia de deformação da viga	54
2.3.6	Vetor de forças internas	55
2.3.7	Matriz de rigidez tangente	56
2.4	Estratégia de controle de carga deslocamento	58
2.4.1	Método de comprimento de arco	60
2.4.2	Método de comprimento de arco cilíndrico	65
2.4.3	Tamanho do comprimento de arco	66
2.5	Dinâmica não-linear	67
2.5.1	Equação não-linear do movimento	67
2.5.2	Matriz de massa	68

2.5.3	Integração das equações não lineares de movimento no tempo	70
2.6	Implementação Computacional	73
3	SOLUÇÕES NUMÉRICOS ESTÁTICOS	77
3.1	Pórtico de Lee	77
3.2	Portal Frame	80
3.3	Arco Circular Não Achatado	81
3.4	Viga em Balanço	83
3.5	Pórtico <i>Toggle</i>	85
4	SOLUÇÕES NUMÉRICAS DINÂMICAS	87
4.1	Viga Biengastada	88
4.2	Viga em Balanço	91
4.3	Pórtico de Williams	95
4.4	Viga Biengastada	98
5	CONCLUSÃO	103
	REFERÊNCIAS	105

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

Gradativamente, ao longo dos anos, as edificações e obras de infraestrutura têm sido concebidas com estruturas cada vez mais leves, esbeltas e flexíveis. Isso devido à busca por obter características estéticas, funcionais e/ou econômicas. Referente à estética, o Obelisco de Buenos Aires, expresso na Figura 1.1, é um exemplo. Construído no ano de 1936, este monumento foi erguido em comemoração aos 400 anos de Buenos Aires. Dotado de 67 metros de altura e com uma base de aproximadamente 49 metros quadrados.

Figura 1.1 – Obelisco de Buenos Aires



Fonte: <www.gettyimages.com/detail/video/view-of-obelisco-in-buenos-aires-argentina-stock-footage/sfw30470047> Acesso: em dez. 2017.

O tocante da funcionalidade ocorre em estruturas como, por exemplo, hangares e aerogeradores. Onde para cumprir sua finalidade o primeiro precisa vencer grandes vãos e o segundo possuir elementos estruturais esbeltos. Na Figura 1.2 é apresentado um dos hangares do Centro de Manutenção da GOL, localizado no município de Confins no estado de Minas Gerais. O hangar inaugurado no ano de 2006 é capaz manter duas aeronaves simultaneamente lado a lado. Possui estrutura mista de elementos de concreto e aço, capaz de vencer 80 metros vão livre.

Figura 1.2 – Centro de manutenção da Gol



Fonte:<www.metroo.com.br/projects/view/6> Acesso: em fev. 2017.

No quesito economia, um exemplo comum são as torres de transmissão de energia. De modo geral, são constituídas de elementos, por vezes esbeltos, que se unem de maneira a formar um arranjo estrutural de maior rigidez em detrimento do consumo de material. A linha de transmissão apresentada na Figura 1.3 atravessa o estado do Tocantins promovendo o intercâmbio energético entre os sistemas Norte-Nordeste e Sul-Sudeste. “O Linhão” como esta rede ficou conhecida, iniciou sua operação em 1999, possui 1277 quilômetros de rede a qual é sustentada por 3015 torres com 30 metros de altura.

Figura 1.3 – Torre de transmissão de energia



Fonte: <www.brasil.gov.br/infraestrutura/2017/03/aneel-aponta-melhora-no-fornecimento-de-energia-eletrica-em-2016/21-03-2017-linhas_de_transmissao.jpg>. Acesso: dez. 2017

Estruturas com o perfil descrito são susceptíveis a apresentar grandes deslocamentos. Neste contexto, surge o fenômeno da não-linearidade geométrica, que está ligado ao surgimento dos efeitos de segunda ordem em uma estrutura. A não-linearidade geométrica de uma estrutura origina-se das diferentes posições de equilíbrio que a mesma pode assumir quando submetida carregamentos. À medida que a estrutura é carregada, ela apresenta deslocamentos, de forma que quando estes são suficientemente grandes, ao ponto de causar alterações significativas, a mesma assume uma nova posição, a qual requer novas equações de equilíbrio. Assim, faz-se necessário avaliar a estrutura em sua posição deslocada, visto que, a análise feita para a posição inicial não representa a atual condição da estrutura.

Dessa forma, a análise que leva em consideração os efeitos da não-linearidade geométrica, ou seja, leva em conta a posição deslocada da estrutura, é dita análise não-linear geométrica. No âmbito de estruturas esbeltas e flexíveis, é de suma importância o seu emprego. Para tanto, o uso da análise não-linear geométrica por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF Não Linear) requer a utilização de uma descrição cinemática. [Felippa e Haugen \(2005\)](#) listam as descrições Lagrangeana Total, Lagrangeana Atualizada e Corrotacional como as mais utilizadas para este fim. Sendo a última, a menos desenvolvida entre estas, devido ao fato de ser relativamente nova quando comparada às outras duas.

1.2 Breve histórico da formulação corrotacional

De acordo com [Menin \(2006\)](#) o conceito da formulação corrotacional começou a surgir nas décadas de 1950 e 1960 empregado por projetistas aeroespaciais. Conforme [Belytschko e Glaum \(1979\)](#), a formulação corrotacional aplicada à elementos de viga 2D foi apre-

sentada primeiramente por [Argyris, Kelsey e Kamel \(1964\)](#). Mais adiante, sua aplicação no campo de pórticos planos foi expandida, podendo-se citar estudos como os de [Powell \(1969\)](#), [Oran \(1973\)](#), [Belytschko e Hsieh \(1973\)](#) e [Belytschko e Glaum \(1979\)](#) ([SOUZA, 2000](#)).

[Veubeke \(1976\)](#) desenvolveu para a indústria aeronáutica uma formulação corrotacional para análise dinâmica de estruturas, utilizando um único sistema de eixos corrotacionado para a estrutura como um todo, voltada para solução analítica do problema denominada “shadow element”. [Horrigmoe e Bergan \(1976\)](#) e [Bergan e Nygard \(1989\)](#) aplicaram a ideia do único eixo corrotacionado desenvolvido por [Veubeke \(1976\)](#) individualmente, criando um eixo corrotacionado para cada elemento. Essa nova estratégia permitiu que os autores desvinculassem o movimento de corpo rígido do movimento deformacional, com base no qual determina-se os esforços internos.

[Mattiasson e Samuelsson \(1984\)](#) e [Mattiasson, Bengtsson e Samuelsson \(1985\)](#) em seus estudos descrevem a relação entre a formulação corrotacional e as formulações, mais consolidadas, lagrangeana total e lagrangeana atualizada. Os mesmos enfatizam que dentro do sistema corrotacionado, é possível se empregar a formulação lagrangeana total e lagrangeana atualizada ([SOUZA, 2000](#)).

Um marco no desenvolvimento da formulação corrotacional é atribuído ao trabalho de [Rankin e Brogan \(1986\)](#), que apresentaram a formulação EICR (*Element Independent Corrotational Formulation*), seguidamente aprimorada por [Rankin e Nour-Omid \(1988\)](#) e por [Nour-Omid e Rankin \(1991\)](#). Nestes trabalhos a matriz de rigidez tangente foi desenvolvida utilizando a formulação corrotacional, resultando em uma matriz de rigidez consistente ([MENIN, 2006](#)). Na mesma época o trabalho [Hsiao e Hou \(1987\)](#) desenvolve uma formulação mais eficiente no que diz respeito à limitação de pequenas rotações entre dois passos de carga sucessivos dentro da análise não linear geométrica para elementos de viga 2D e 3D.

No início dos anos 90, [Cole \(1990\)](#) e [Crisfield \(1990\)](#) em seus estudos estabelecem uma formulação corrotacional consistente para análise não linear geométrica referente aos elementos de pórtico plano e espacial. Os trabalhos de [Crisfield \(1990\)](#) e [Nour-Omid e Rankin \(1991\)](#) enfatizam que qualquer elemento que se baseie na teoria geométrica aproximada ou ainda na teoria de deslocamentos infinitesimais, é capaz de acomodar rotações finitas, com uma formulação corrotacional generalizada ([SOUZA, 2000](#)). Ainda na década de 90 surgem estudos de problemas de instabilidade para elementos de viga plana e tridimensional feitos por [Pacoste e Eriksson \(1997\)](#), confrontando a descrição lagrangeana total com a corrotacional.

[Felippa \(2000\)](#) apresenta a formulação de um elemento independente com a descrição corrotacional aplicada ao campo da dinâmica. Essa nova versão de elemento tem como principal vantagem, possibilitar a reutilização de elementos finitos lineares de alto desempenho, de maneira particular, conchas e sólidos ([FELIPPA, 2000](#)). Nos primórdios do século XXI surgem estudos referentes a instabilidade elástica e plástica de vigas planas e espaciais,

utilizando a formulação corrotacional, feitos por [Battini \(2002\)](#) e [Menin e Taylor \(2003\)](#), onde neste último a instabilidade de pórticos planos foi feita utilizando elementos finitos de viga baseados na hipótese de Euler-Bernoulli para a discretização das estruturas.

[Battini \(2007\)](#) desenvolve, por meio da formulação corrotacional, uma nova abordagem de elemento de viga 2D que interpola rotações nodais utilizando um conjunto de quatro nós por elemento. Esse novo procedimento é aplicado em problemas de não linearidades físicas e geométricas e no estudo de instabilidade. No final dos anos 2000, [Yaw \(2009\)](#) analisa uma formulação corrotacional para elementos de viga 2D similar à apresentada por [Crisfield \(1990\)](#), de modo que a estrutura possa apresentar deslocamentos e rotações arbitrariamente grandes ao nível global. Desde que as tensões locais nos elementos de viga sejam pequenas.

No início da década de 2010 [Le, Battini e Hjjaj \(2011\)](#) [Le et al. \(2011\)](#) apresenta uma nova formulação corrotacional para análise dinâmica de elementos de viga 2D, no qual são propostas interpolações cúbicas para desenvolver os termos inerciais e elásticos.

Dentre a gama mais recente de trabalhos que tem como objeto de pesquisa elementos de viga plana com sua formulação regida pela descrição cinemática corrotacional, pode-se citar: [Oliveira et al. \(2014\)](#) que faz uso da formulação corrotacional para analisar pórticos planos em concreto armado. A análise dinâmica não linear física e geométrica é empregada utilizando elementos de viga plana de Euler-Bernoulli por meio da descrição corrotacional. O estudo examinou se o dimensionamento mínimo dos elementos estruturais feito pelas normativas brasileiras e europeias suportaria os carregamentos aplicados. Em [Silva, Cunha e Gutiérrez \(2017\)](#) a formulação corrotacional foi utilizada no desenvolvimento de um elemento de viga 2D que incorpora as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko.

1.3 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo desenvolver um estudo teórico e prático referente à formulação corrotacional, utilizando o elemento de viga 2D, no intuito de considerar os efeitos da não linearidade geométrica em pórticos planos.

1.3.1 Objetivos específicos

Para cumprir o objetivo geral desta dissertação faz-se necessário realizar os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver um estudo referente a formulação corrotacional para elementos de viga plana sob a hipótese de Euler-Bernoulli, no âmbito do fenômeno da não linearidade geométrica.

- Implementar dois programas em linguagem Matlab® do método dos elementos finitos para pórticos planos, baseado na descrição cinemática corrotacional, sendo o primeiro para análise estática denominado (PPNLG) e o segundo para análise dinâmica denominado (PPNLD), ambos voltados a considerar os efeitos do fenômeno da não linearidade geométrica.
- Validar ambos os programas desenvolvidos por meio de exemplos numéricos, estáticos e dinâmicos, dotados da presença não linear geométrica, comparando os resultados obtidos pelos mesmos aos obtidos em estudos de outras bibliografias. Também no intuito de comprovar a eficácia da formulação corrotacional em lidar com o comportamento não linear geométrico.
- Avaliar a capacidade dos programas implementados (PPNLG e PPLND) em detectar instabilidades, como a presença de pontos críticos, alterações de posição de equilíbrio, turning point e pontos fixos, nos resultados dos exemplos numéricos. No campo estático por meio do diagrama de trajetória equilíbrio, e no campo dinâmico por meio de resposta dinâmica transiente e diagrama plano fase, ambos no domínio do tempo.

1.4 Cenário de pesquisa

1.4.1 Periódicos

O cenário de pesquisas a cerca do tema é obtido por meio de um mapeamento sistêmico de artigos, método conhecido como mapping study. A metodologia empregada neste trabalho consiste em realizar um levantamento de dados de modo que o mesmo permita a classificação e categorização das bibliografias pesquisadas.

O levantamento de bibliografias foi realizado consultando as bases de dados: Scielo, Scopus, Science Direct e Periódicos Capes, por meio de suas respectivas plataformas web de pesquisa. Para tanto, a busca nestas bases de dados foi norteada pelas palavras chave: “Instability” e “Dynamic geometric nonlinear analysis”, as quais proporcionaram uma quantidade expressiva de artigos acerca da área de estudo deste trabalho.

Feito o levantamento de material bibliográfico, a etapa seguinte consistiu em refinar este material obtido. O mapping study leva em conta duas etapas de refinamento. Na primeira os artigos são selecionados a partir do critério de “título aderente”, onde se realiza a leitura dos títulos para uma seleção previa do material, que correlacione melhor com a área em estudo. Nesta mesma etapa é verificada a presença de artigos repetidos no material bibliográfico selecionado. A segunda seleção é feita com base nos resumos, de forma a analisar efetivamente o conteúdo do material bibliográfico. O resultado deste mapeamento é expresso na Figura 1.4.

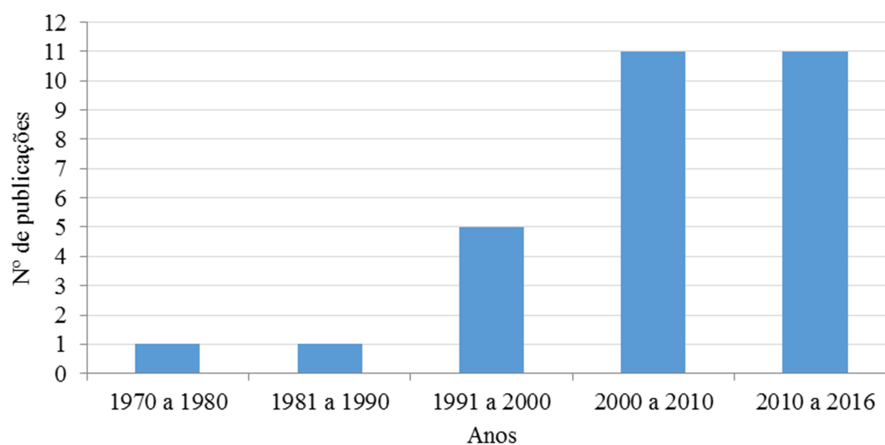
Figura 1.4 – Mapping Study

Base de dados	Inicial	Títulos aderentes
Periódicos CAPES	116	29
Scopus	81	18
SCIELO	5	1
Science Direct	33	7
TOTAL	235	55
Títulos aderentes sem repetição	38	
Artigos selecionados após leitura do título e resumo	29	

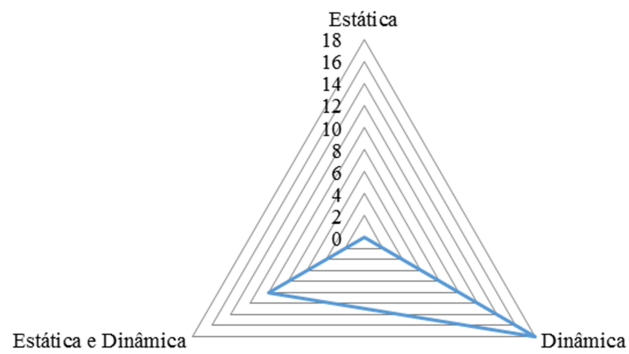
Fonte: o Autor

Analisando os dados fornecidos pelo mapeamento, pode-se inferir alguns aspectos sobre a área de estudo, como, a percepção da abordagem da área ao longo dos anos, e principais vertentes dadas pela comunidade científica. A percepção de abordagem da área com relação ao ano de publicação é expressa no Figuras 1.5. Já as vertentes, como, tipo de análise utilizada, tipo de não-linearidade considerada e o tipo elemento utilizado dentro do Método dos Elementos Finitos (MEF) são apresentados nas Figuras 1.6, 1.7 e 1.8, respectivamente.

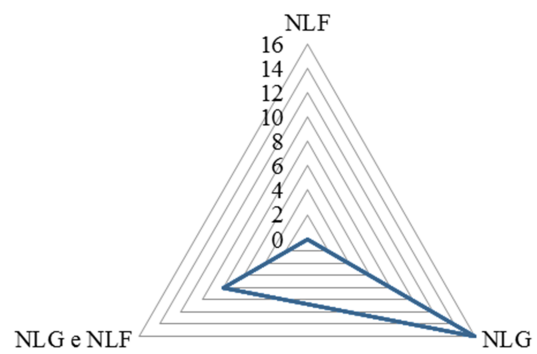
Figura 1.5 – Número de publicações x Anos



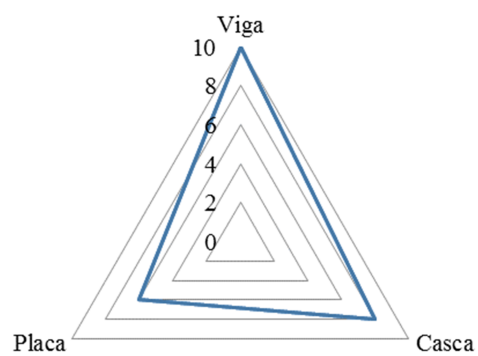
Fonte: o Autor

Figura 1.6 – Vertente: *tipo de análise*

Fonte: o Autor

Figura 1.7 – Vertente: *tipo de não-linearidade*

Fonte: o Autor

Figura 1.8 – Vertente: *tipo de elemento (MEF) utilizado*

Fonte: o Autor

Avaliando A Figura 1.5, percebe-se que ao longo dos anos o enfoque de pesquisas na área em estudo tem aumentado expressivamente. Já nas Figuras 1.6, 1.7 e 1.8, percebe-se uma maior abordagem voltada para análise dinâmica considerando os efeitos da não linearidade geométrica. Em relação aos elementos utilizados dentro do MEF, foi verificada a presença três tipos, sendo elemento de viga, placa e casca, de modo que o elemento de viga foi o mais presente.

1.4.2 Teses e dissertações

O cenário nacional de pesquisas é obtido por meio do levantamento de teses e dissertações. Para tal investigação fez-se uso do Banco de Teses e Dissertações da CAPES (BTD – CAPES), da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e de repositórios institucionais de universidades. O levantamento de teses e dissertações foi realizado de maneira análoga ao mapeamento sistêmico feito a cerca de periódicos na seção 1.4.1. De modo que o mesmo foi orientado pelas expressões chaves “Análise dinâmica não linear geométrica”, “Instabilidade” e “Corrotacional”, no intuito de direcionar a busca acerca da área de estudo deste trabalho. Em alguns casos as buscas foram refinadas por área de conhecimento em engenharia e por área de concentração em estruturas. O material bibliográfico reunido passou por mais duas etapas de refinamento, sendo a primeira por título aderente e a segunda por análise de resumo. Os resultados obtidos após o refinamento são apresentados na Figura 1.9.

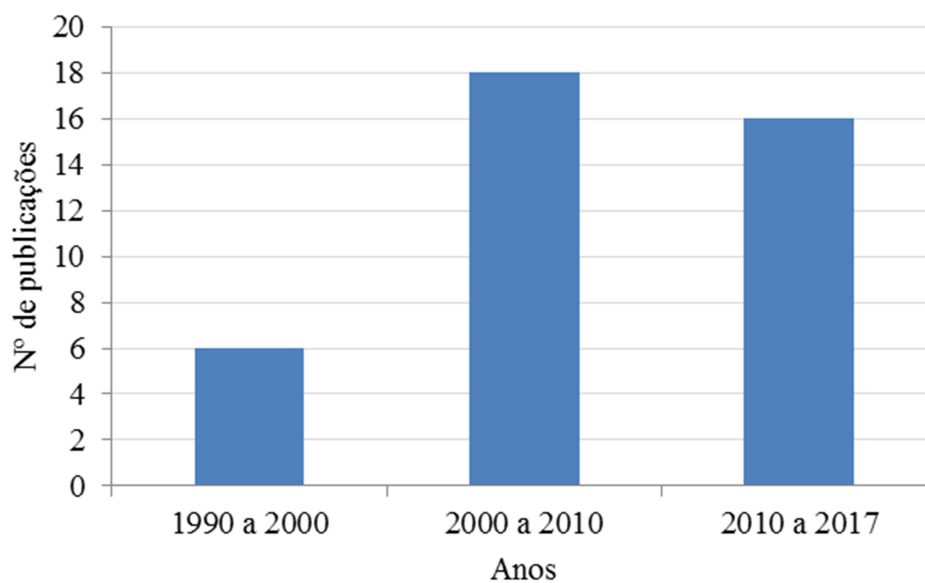
A partir dos dados obtidos, pode-se analisar e inferir aspectos relativos ao cenário de pesquisa nacional. Um aspecto interessante é a abordagem da área de estudo ao longo do tempo, que nos permite avaliar a evolução das pesquisas acerca do tema no decorrer dos anos. Este pode ser visto na Figura 1.10. O qual mostra um aumento significativo no número de teses e dissertações entre as décadas de 1990 e 2000, seguida por uma provável sobrelevação na década de 2010 no número de trabalhos.

Figura 1.9 – Levantamento de teses e dissertações

Base de dados	Expressões chaves		
	"Análise dinâmica não linear geométrica"	"Instabilidade"	"Corrotacional"
BTD - CAPES	7	45	40
BDTD	4	35	28
UNB	1	94	6
PUC-Rio	0	93	0
USP-SP	0	2	0
USP-SC	4	26	0
UFAL	8	3	1
UFOP	25	45	3
UFPA	2	31	4
UFMG	3	144	5
UFPE	15	7	1
ITA	178		
COPPE(UFRJ)	0	50	5
UNICAMP	244	3	2
Total	491	578	95
Títulos aderentes	35	30	25
Títulos aderentes sem repetição total	75		
Trabalhos selecionados após leitura do resumo	40		

Fonte: o Autor

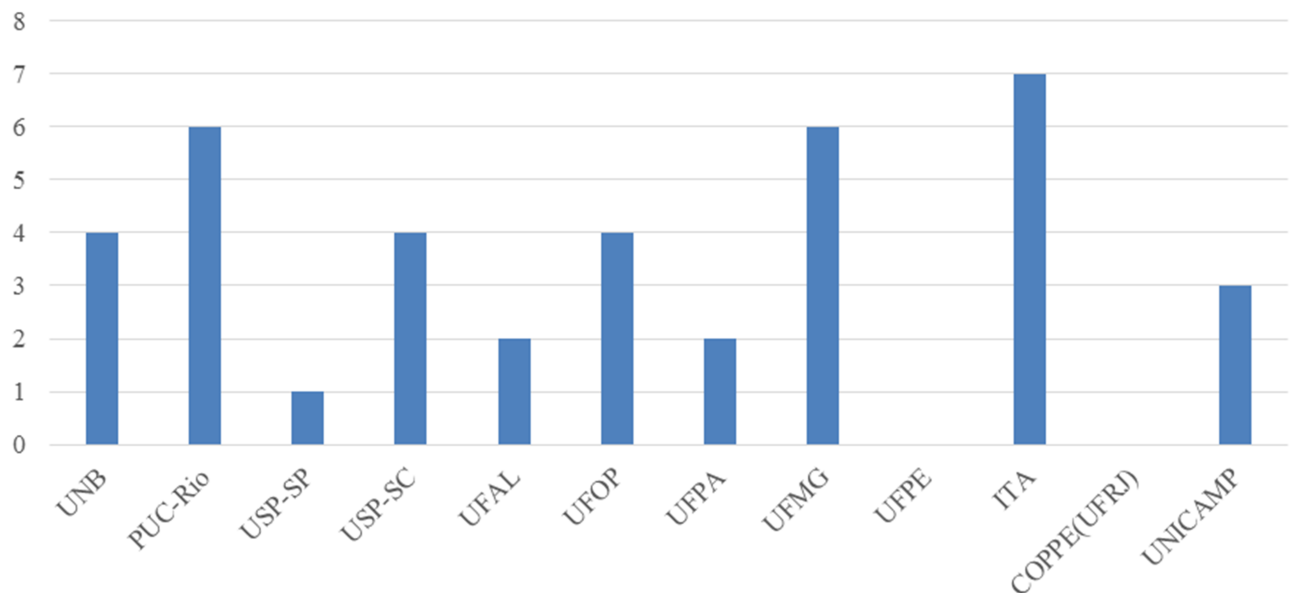
Figura 1.10 – Número teses e dissertações x Anos



Fonte: o Autor

A demais da análise cronológica, o levantamento de teses e dissertações possibilita avaliar a distribuição das mesmas com relação as universidades do país, como exibido na Figura 1.11. De modo que o Instituto de Tecnológico de Aeronáutica (ITA) foi o maior detentor de trabalhos com temas de interesse, seguido da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) e da Pontifícia Universidade Católica do rio de Janeiro (PUC-Rio).

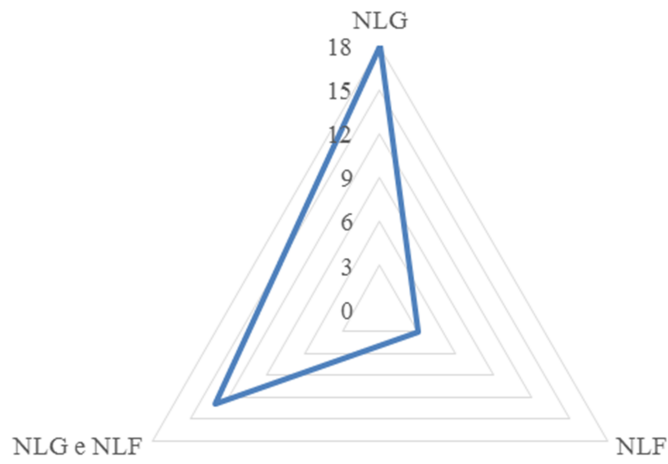
Figura 1.11 – Número teses e dissertações x Universidades



Fonte: o Autor

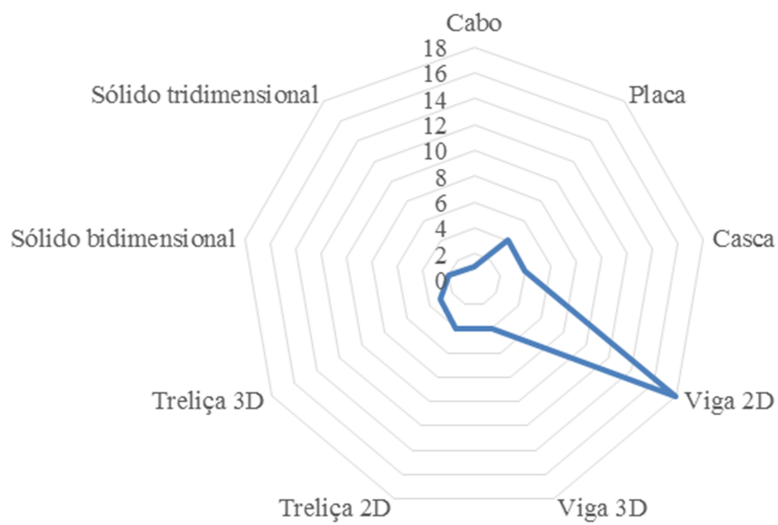
Outro aspecto importante está na análise das principais vertentes aplicadas às pesquisas pela comunidade científica. As vertentes relacionadas à área em estudo podem ser observadas nas Figuras 1.12, 1.13 e 1.14, que descrevem respectivamente os tipos de não-linearidade, elemento (MEF) e análise, empregados nos trabalhos com temas de interesse.

Figura 1.12 – Vertente: tipo de não-linearidade



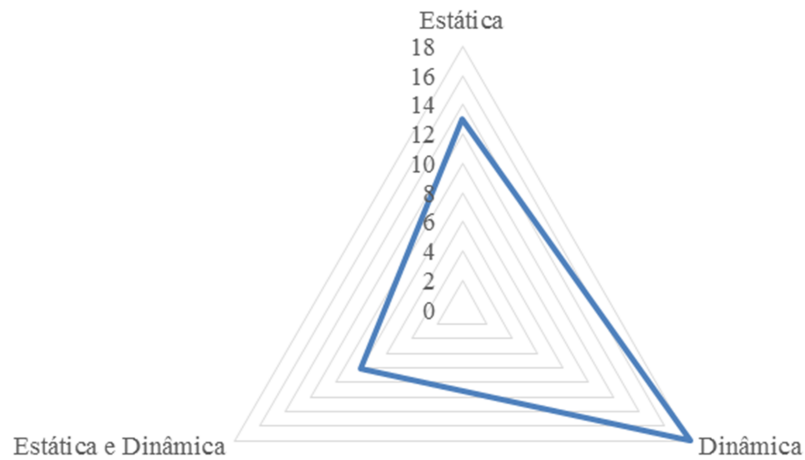
Fonte: o Autor

Figura 1.13 – Vertente: tipo de elemento



Fonte: o Autor

Figura 1.14 – Vertente: tipo de análise



Fonte: o Autor

Avaliando as Figuras 1.12, 1.13 e 1.14, percebe-se que semelhantemente ao que fora avaliado no mapeamento de periódicos, se mantém na maioria dos trabalhos uma abordagem voltada para análise dinâmica considerando os efeitos da não linearidade geométrica. Em relação aos elementos finitos, foi verificada a presença de nove elementos distintos, de maneira que o mais empregado fora o elemento de viga 2D.

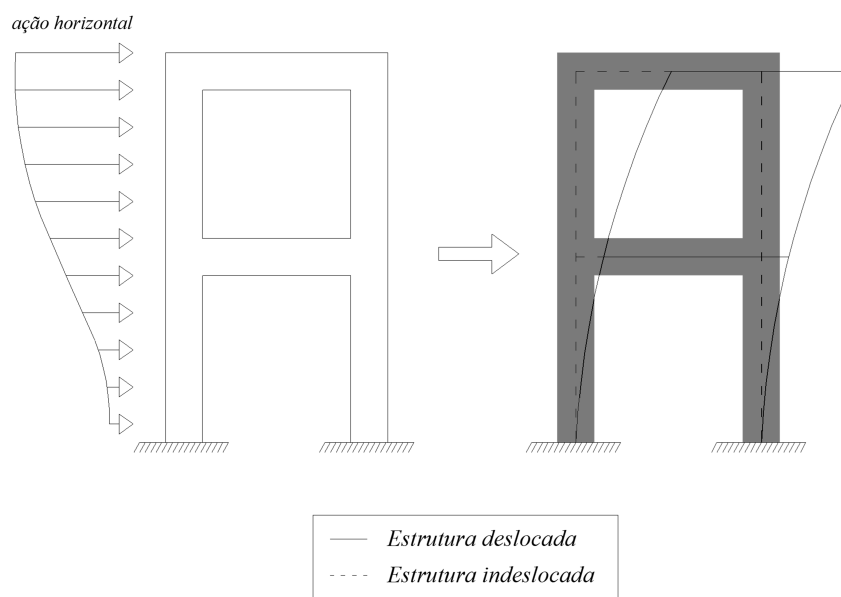
Capítulo 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Análise Não-linear Geométrica

A não-linearidade geométrica (NLG) está relacionada às diferentes configurações que determinada estrutura pode assumir segundo os carregamentos aplicados a ela. De modo que a forma geométrica da estrutura se modifica à medida que é carregada, apresentando grandes deslocamentos, rotações e deformações. Quando a modificação da geometria da estrutura é suficientemente grande para causar alterações significativas, o sistema estrutural requer novas equações de equilíbrio para representar a nova posição assumida. Na Figura 2.1, exemplifica-se o comportamento de não-linearidade geométrica de uma estrutura, a qual apresenta grandes deslocamentos.

Figura 2.1 – Comportamento não-linear geométrico



Fonte: o Autor

Vale ressaltar que deslocamentos dessa magnitude ocorrem em estruturas de caráter esbelto. Dessa forma, estruturas com esta característica são mais suscetíveis ao fenômeno da não linearidade geométrica, do que estruturas robustas, que não sofrem tanto com este fenômeno. É importante lembrar que, uma vez a estrutura deslocada, as equações de equilíbrio e os esforços determinados para posição inicial, ou seja, posição antes da estrutura se deslocar, não serão mais válidos.

Visto que o princípio da superposição de efeitos não se aplica, faz-se necessárias novas equações de equilíbrio para cada vez em que a geometria da estrutura sofra grandes alterações. Isto porque, mudanças significativas na configuração da estrutura provocam um acréscimo de forças internas, o qual não pode ser desprezado (FERREIRA, 2009).

Dessa forma para determinação mais precisa dos esforços é necessário considerar os efeitos da não-linearidade geométrica da estrutura. A análise que leva em conta o equilíbrio da estrutura em sua posição deslocada é dita análise não-linear geométrica (PINTO; RAMALHO, 1997).

2.1.1 Métodos para análise não-linear geométrica

Conforme Felippa e Haugen (2005) e Souza (2000), no que se refere à análise não-linear geométrica em estruturas através do método dos elementos finitos, três descrições cinemáticas são utilizadas frequentemente, sendo elas: Lagrangeana Total (TL), Lagrangeana Atualizada e Corrotacional (CR). Dentre outros aspectos pelo qual se pode diferenciá-las, é a configuração da estrutura adotada como configuração de referência para a formulação das equações do método dos elementos finitos - MEF.

Na descrição cinemática Lagrangeana Total (LT) se utiliza uma configuração fixa, em geral a configuração inicial da estrutura (configuração não deformada), como referencial para formulação das equações de equilíbrio do MEF. Limkatanyu *et al.* (2013) faz uso da descrição Lagrangeana Total para desenvolver um elemento de viga geometricamente não-linear para análises de grandes deslocamentos e pós-flambagem de estruturas de treliças planas.

Já a descrição cinemática Lagrangeana Atualizada (LA) altera sua configuração de referência a cada vez em que a estrutura atinge uma nova configuração de equilíbrio, dessa forma, esta descrição faz uso da última configuração de equilíbrio obtida como referência para formulação das equações do MEF. Em Turkalj *et al.* (2012) a formulação Lagrangeana Atualizada é empregada para a análise não-linear de instabilidade de pórticos de paredes finas com conexões semi-rígidas.

A descrição cinemática Corrotacional (CR) divide os movimentos de cada elemento em dois sistemas distintos, de modo analisar separadamente os movimentos de corpo rígido e os movimentos deformacionais. O primeiro sistema faz uso de uma configuração de refe-

rência fixa, a qual é empregada para medir os deslocamentos de corpo rígido. Já o segundo utiliza uma configuração corrotacionada, ou seja, um sistema de eixos locais corrotacionado para cada elemento, a fim de medir exclusivamente os deslocamentos deformacionais, em função dos quais serão determinadas tensões e deformações da estrutura em análise [Mennin \(2006\)](#). No estudo de [Hsiao, Lin e Lin \(1999\)](#) a formulação corrotacional é empregada para análise dinâmica não-linear geométrica, considerando um elemento de viga espacial. [Li \(2007\)](#) usa a formulação corrotacional para um elemento de viga usando variáveis de rotação vetorial. [Pesic, Lanc e Turkalj \(2016\)](#) aplicaram a formulação Corrotacional na análise não-linear de estabilidade global de vigas laminada de paredes finas.

Além das descrições citadas anteriormente, uma mais recente, tem ganhado espaço no campo da análise não-linear geométrica de estruturas, tanto análises estáticas quanto dinâmicas, sendo denominada de descrição posicional. Apesar de esta ser uma descrição que também possui uma configuração referencial fixa, para formulação das equações do método dos elementos finitos, assim como a descrição Lagrangeana Total, ela diverge da mesma em relação às incógnitas do equacionamento, sendo considerado como variáveis as posições nodais ao invés dos deslocamentos ([FERREIRA, 2009](#)). De acordo com [Lacerda \(2014\)](#) a mesma foi desenvolvida pelo Professor Humberto Breves Coda e colaboradores. Podem-se citar alguns estudos que utilizaram a formulação posicional para análises não lineares geométricas de pórticos planos, como [Coda e Greco \(2004\)](#) e [Reis e Coda \(2014\)](#).

2.2 Generalidades Sobre a Descrição Cinemática Corrotacional

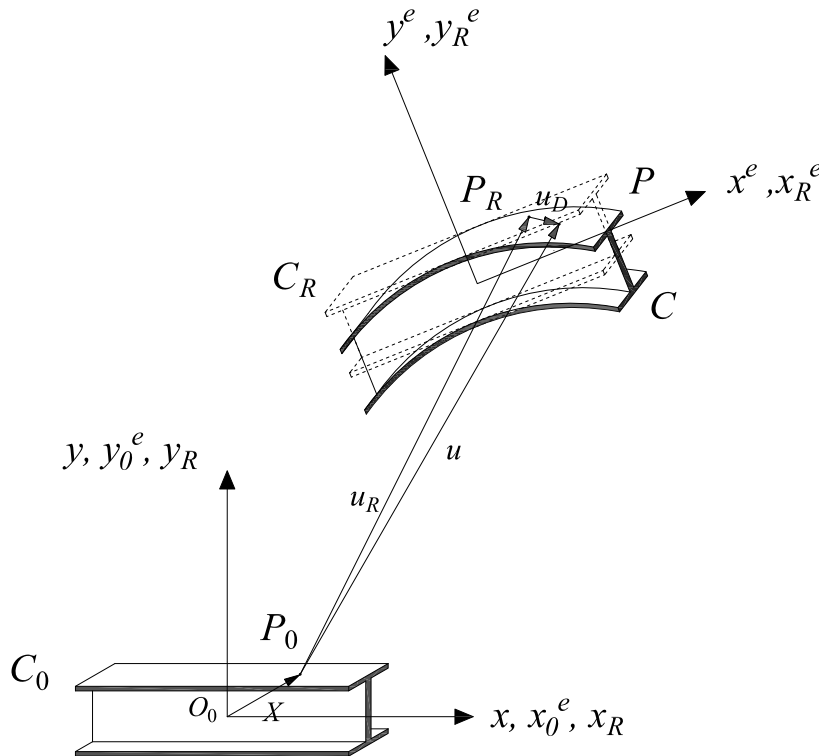
A princípio existem dois tipos de descrições cinemáticas fundamentais, a descrição Lagrangeana e a Euleriana. As demais descrições derivam de uma destas duas ou de ambas. A descrição Lagrangeana consiste em analisar o movimento de uma partícula, ou um ponto material, sob uma ótica onde o observador acompanha a partícula à medida em que se move no espaço e no tempo. Já a descrição Euleriana, consiste em observar o movimento de um ponto material ao passar por determinado local específico, na medida em que o tempo evolui ([PARK; YOO; CHUNG, 2013](#)).

Em se tratando de descrições empregadas em problemas que envolvem análises não-linear geométrica, como visto anteriormente na Seção 2.1.1, sua classificação em Lagrangeana ou Euleriana está relacionada à configuração referencial adotada para a formulação das equações no MEF.

2.2.1 Natureza da descrição corrotacional

A descrição cinemática Corrotacional, como dito anteriormente, apresenta uma particularidade em relação às demais apresentadas até aqui. Nessa descrição ocorre a separação dos movimentos de corpo rígido dos deformacionais em todos os elementos em análise dentro do MEF. Na Figura 2.2 exemplifica-se essa divisão.

Figura 2.2 – Divisão dos movimentos de corpo rígido e deformacional



Fonte: o Autor

Ainda na Figura 2.2, pode-se observar que o elemento, em forma de perfil laminado, inicialmente se encontra em sua configuração inicial, indeformada e indeslocada, C_0 . Em seguida, o elemento se desloca, referenciado na configuração C_0 , até a configuração corrotacionada C_R , retratada em traços pontilhados. Esta etapa representa o movimento de corpo rígido. Após o término do movimento de corpo rígido, o elemento se deforma, de maneira a assumir a configuração deformada C , representando o movimento deformacional. Nesta etapa, a configuração C_R se move de forma conjunta à configuração C , posicionando-se simetricamente em relação à mesma (MENIN, 2006).

A natureza da descrição corrotacional pode ser de fato tanto lagrangeana quanto euleriana, dependendo do referencial o qual se adota para obter os deslocamentos e deformações do elemento (perfil laminado) em sua configuração final C no MEF. Ao utilizar o referencial de eixos locais corrotacionados sua natureza se torna euleriana, ao utilizar o referencial de eixos globais sua natureza se torna lagrangeana.

2.3 Formulação corrotacional de pórticos planos

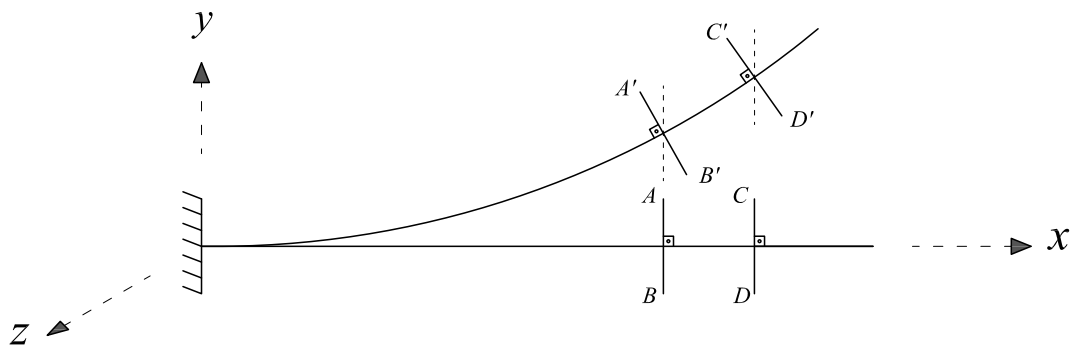
A descrição cinemática apresentada aqui é baseada nos trabalhos de [Menin \(2006\)](#) e [Matias e Mendes \(2009\)](#).

2.3.1 Modelo de elemento de viga

Modelos matemáticos de elementos de vigas planas tem sua concepção baseada em teorias de vigas, que buscam descrever o comportamento das seções transversais da mesma, de forma aproximada. Dois modelos matemáticos de vigas são comumente utilizados na mecânica estrutural: o modelo de Euler-Bernoulli e o modelo de Timoshenko ([FELIPPA, 2001](#)).

O modelo de Euler-Bernoulli ou de flexão pura, também conhecido como, teoria clássica de viga ou teoria de viga de engenharia, leva em conta somente os efeitos dos esforços de flexão para descrever as tensões e deformações na viga. Dessa forma, este modelo ignora as deformações advindas das tensões de cisalhamento presente na viga. A hipótese cinemática do modelo de Euler-Bernoulli consiste em supor que as seções transversais ao longo do eixo longitudinal permanecem planas, indeformadas e perpendiculares em relação ao mesmo. Esta hipótese é exemplificada na Figura 2.3.

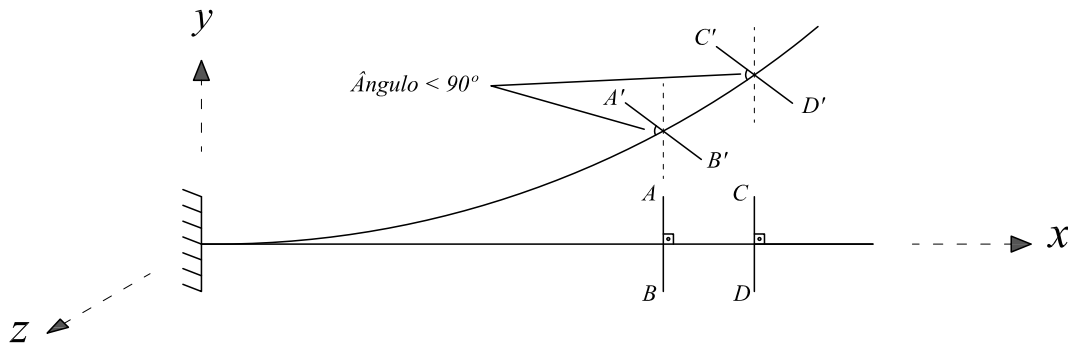
Figura 2.3 – Deformação viga Euler-Bernoulli



Fonte: o Autor

O modelo de Timoshenko, diferentemente do modelo de Euler-Bernoulli, considera tanto os efeitos das tensões de cisalhamento quanto os efeitos dos esforços de flexão para descrever as tensões e deformações na viga. A hipótese cinemática do modelo de Timoshenko é análoga a do modelo de Euler-Bernoulli, exceto pelo fato de que as seções transversais ao longo do eixo longitudinal não permanecem perpendiculares em relação ao mesmo. Isto porque, as seções apresentam uma deformação angular advinda das tensões de cisalhamento, as quais tem sua atuação considerada constante sobre as seções transversais. Esta hipótese é exemplificada na Figura 2.4.

Figura 2.4 – Deformação viga Timoshenko



Fonte: o Autor

Tanto o modelo de viga de Euler-Bernoulli quanto o de Timoshenko tem seu desenvolvimento feito sob a premissa de pequenas deformações e de que o material que compõe a viga apresenta comportamento elástico-linear e isotrópico. Ambos os modelos são capazes de considerar um comportamento geometricamente não-linear, ocasionado por grandes deslocamentos e rotações (FARIA, 1998).

Esta seção expõe a descrição cinemática da formulação corrotacional de pórticos planos concebidos por meio de elementos de vigas, regidos pelo modelo matemático de vigas de Euler-Bernoulli, de maneira a considerar os efeitos dos esforços axial e de flexão separadamente.

A descrição cinemática corrotacional desenvolvida para o elemento de viga de Euler-Bernoulli, faz uso de duas configurações de referência. A primeira, configuração inicial (fixa), é utilizada na obtenção de movimentos de corpo rígido do elemento (translações e rotações). A segunda, configuração corrotacionada (móvel), é empregada para se obter as tensões e deformações do elemento. O emprego destas duas configurações de referência, implica que o deslocamento total nos nós da viga em análise pode ser decomposto em movimento de corpo rígido (rotações e translações) e em movimento deformacional (deformações axial e angular). Como citado anteriormente, os efeitos dos esforços axial e de flexão são considerados separadamente, dessa forma, a energia de deformação total é obtida pelo somatório das energias de deformação axial e de flexão.

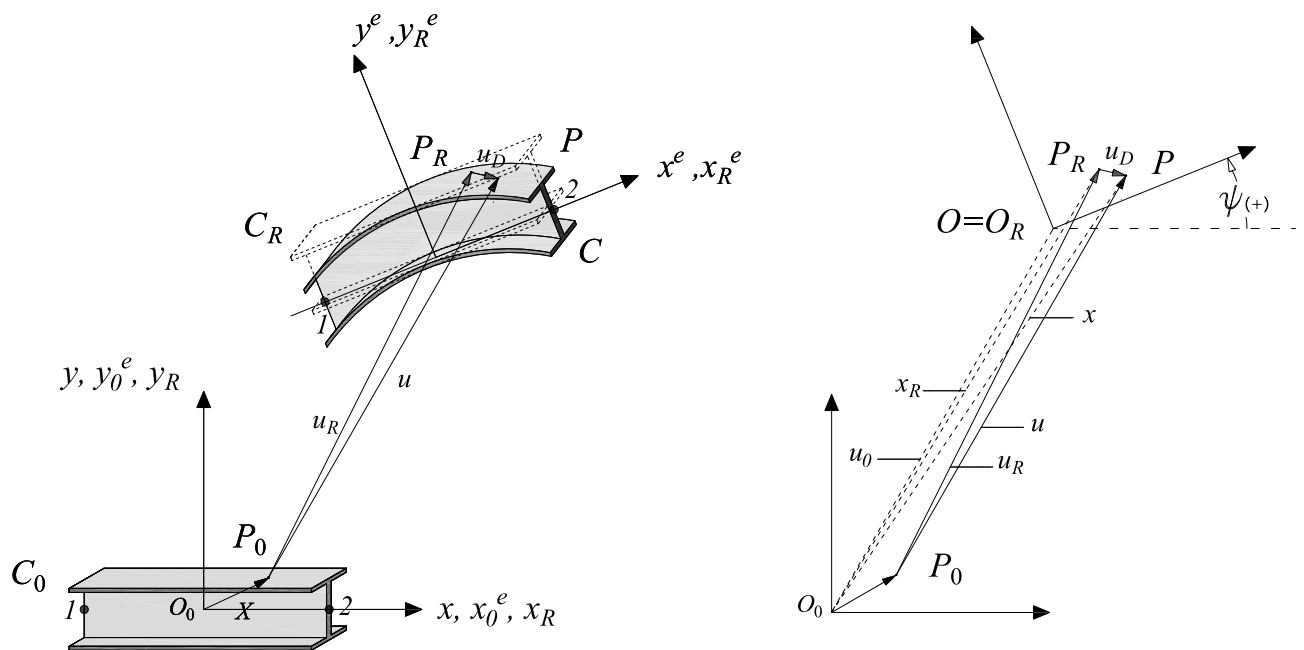
2.3.2 Descrição cinemática

Neste desenvolvimento da descrição cinemática corrotacional, admite-se um elemento finito na forma de um perfil metálico laminado que se move no plano xy , conforme a Figura 2.5. Para tanto é necessário estabelecer dois sistemas de coordenadas que auxiliam a descrição cinemática. Estes, são os sistemas de coordenadas: global espacial (x, y) e local (x^e, y^e) . O sistema de coordenadas local em particular apresenta três grupos de eixos locais, sendo

eles, eixos locais iniciais (x_0^e, y_0^e) , eixos locais (x^e, y^e) e eixos locais corrotacionados (x_R^e, y_R^e) . Além dos sistemas de coordenadas, são estipuladas três configurações as quais o elemento finito pode assumir em seu movimento. Sendo estas, configuração inicial C_0 , configuração corrotacional C_R e configuração atual C . As três configurações estão intimamente ligadas aos eixos locais descritos anteriormente, de forma que estes representam os eixos locais de cada uma delas. Vale lembrar que no início da análise os sistemas de coordenadas locais (x_0^e, y_0^e) e (x_R^e, y_R^e) são coincidentes (BELO *et al.*, 2009).

O elemento finito de viga parte inicialmente da configuração inicial C_0 em seu movimento até atingir a configuração atual C . Onde a partir desta última é definido o eixo local x^e , de forma que o mesmo seja alinhado em relação ao eixo longitudinal do elemento, o qual passa por ambos os nós da extremidade do mesmo. A origem do sistema de eixo local (x^e, y^e) é então estabelecida na distância média do eixo longitudinal. Durante o movimento a configuração corrotacional C_R se move de forma conjunta ao elemento até a configuração atual C , onde a mesma se sobrepõe a configuração atual C . O resultado deste movimento implica que o eixo local corrotacionado (x_R^e, y_R^e) coincide com o eixo local (x^e, y^e) , e ambos distam um ângulo (ψ) do eixo local inicial (x_0^e, y_0^e) .

Figura 2.5 – Configurações e sistemas de coordenadas



Fonte: o Autor

Considere uma partícula P_0 qualquer do elemento de viga, de coordenadas (X, Y) dadas pelo vetor posição \mathbf{X} , na configuração inicial C_0 , executando um movimento de corpo rígido em direção ao ponto P_R de coordenadas (x_R^e, y_R^e) e em seguida assumindo a posição P de coordenadas (x^e, y^e) na configuração atual C , por meio de um movimen-

cional. Admitindo estas condições de movimento, o deslocamento total \mathbf{u} da partícula, em coordenadas globais, pode ser descrito em função dos vetores de deslocamento \mathbf{X} e \mathbf{x} , os quais podem ser observados na Figura 2.5, da seguinte maneira:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \begin{cases} x - X \\ y - Y \\ \theta \end{cases} \quad (2.1)$$

Onde θ representa a rotação total do elemento, dada pela soma da rotação advinda do movimento de corpo rígido ψ e da rotação advinda do movimento deformacional $\bar{\theta}$, esta última será posteriormente apresentada nas Figuras 2.8 e 2.9.

$$\theta = \psi + \bar{\theta} \quad (2.2)$$

O deslocamento total \mathbf{u} pode ser decomposto em duas partes, uma parte vinda do deslocamento deformacional \mathbf{u}_D e outra parte originada do deslocamento de corpo rígido \mathbf{u}_R .

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_R + \mathbf{u}_D = (\mathbf{x}_R - \mathbf{X}) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_R) \quad (2.3)$$

Na formulação corrotacional, os deslocamentos deformacionais utilizados para a determinação do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente, são descritos em função do sistema de coordenada local (x^e, y^e) da configuração atual C . Dessa forma, os mesmos podem ser obtidos da seguinte maneira:

$$\mathbf{u}_D^e = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_D \quad (2.4)$$

Onde \mathbf{Q} é uma matriz de transformação linear das coordenadas globais (X, Y) para as coordenadas locais (x^e, y^e) .

2.3.2.1 Transformações de Sistemas Coordenadas

Os sistemas de coordenadas local e global podem se relacionar por meio de uma matriz de transformação linear \mathbf{Q} . Esta matriz é definida por FILHO (2007) como:

$$\begin{bmatrix} \lambda_\psi & \mu_\psi & 0 \\ -\mu_\psi & \lambda_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Onde λ_ψ e μ_ψ são os cossenos diretores do elemento de viga em sua configuração atual C com relação ao sistema de coordenadas global, ou seja, $\cos(\psi)$ e $\sin(\psi)$ respectivamente. Visto que a matriz \mathbf{Q} é uma matriz ortogonal, isto é, $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$, onde \mathbf{I} é a matriz

identidade, os sistemas de coordenadas global (x, y) e local (x^e, y^e) interagem da seguinte forma:

$$\mathbf{x}^e = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{u}_0) \quad (2.6)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T \mathbf{x}^e + \mathbf{u}_0 \quad (2.7)$$

2.3.3 Deslocamentos deformacionais

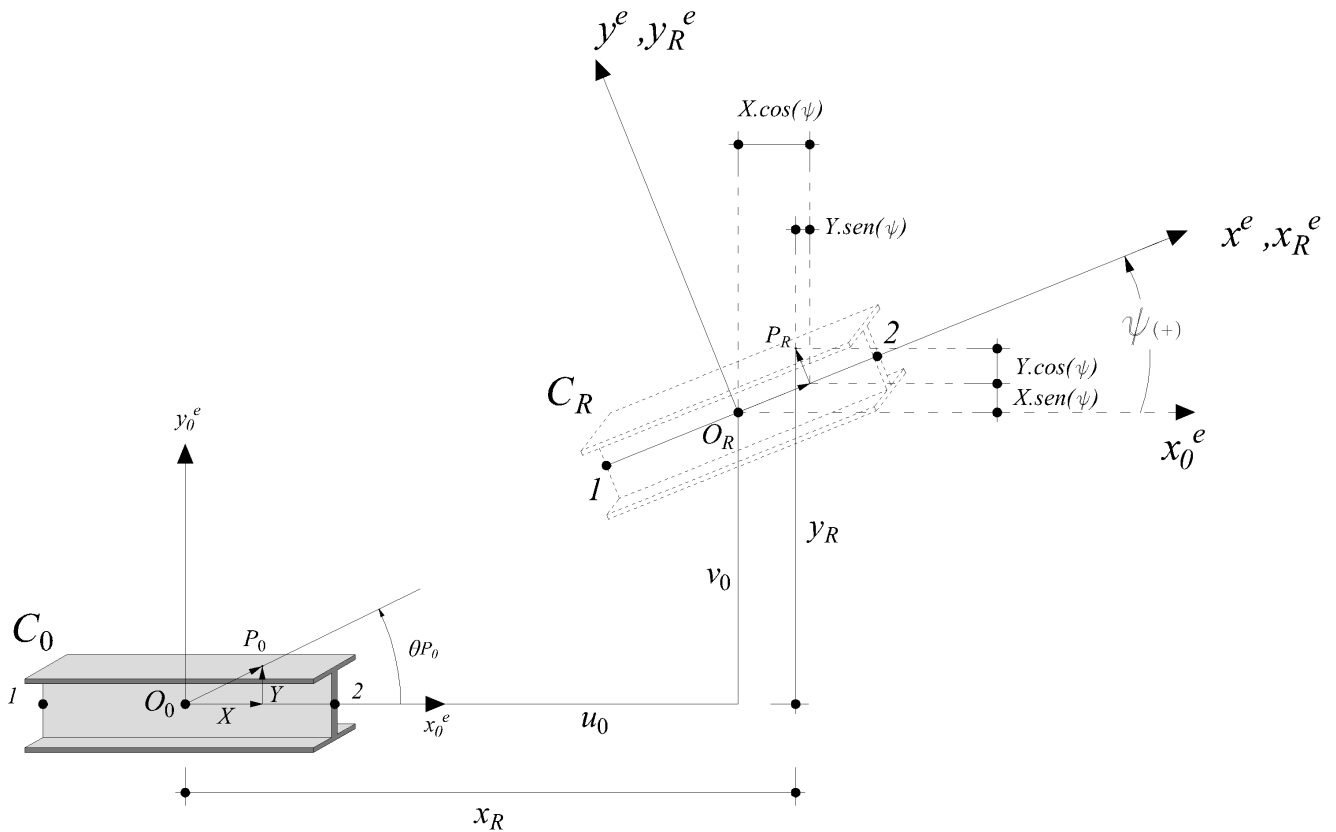
Como dito anteriormente, na formulação corrotacional, os deslocamentos deformacionais dos elementos são determinados em função do sistema de coordenadas local (x^e, y^e) . Para elementos de viga no plano, as coordenadas das partículas P_R e P nas configurações corrotacionada C_R e atual C respectivamente, são determinadas da seguinte maneira:

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{Q}^T \mathbf{X} + \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} \lambda_\psi & \mu_\psi & 0 \\ -\mu_\psi & \lambda_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ \theta_{P_0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta_{P_0} + \psi \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} = \mathbf{I} \mathbf{X} + \mathbf{u} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ \theta_{P_0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta_{P_0} + \theta \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Até então o equacionamento foi deduzido para um ponto P_0 qualquer, entretanto cabe ressaltar que no caso de ser um ponto localizado sobre o eixo local x_0 e na configuração inicial C_0 o termo θ_{P_0} será igual a zero ($\theta_{P_0} = 0$). A interpretação geométrica da Equação 2.8 pode ser vista na Figura 2.6.

Figura 2.6 – Movimento de corpo rígido



Fonte: o Autor

Partindo da premissa de que o deslocamento deformacional pode ser dado por $\mathbf{u}_D = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$ conforme Equação 2.3, e substituindo os valores de \mathbf{x} e \mathbf{x}_R dados pelas Equações 2.9 e 2.8 respectivamente, \mathbf{u}_D pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{x}_D = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^T)\mathbf{X} + \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} x - x_R \\ y - y_R \\ \theta - \psi \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Utilizando o deslocamento deformacional obtido na Equação 2.10 e aplicando-o na Equação 2.4, chega-se a seguinte equação para o deslocamento deformacional em coordenadas locais:

$$\mathbf{u}_D^e = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_D = (\mathbf{Q} - \mathbf{I})\mathbf{X} + \mathbf{Q}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \quad (2.11)$$

2.3.3.1 Movimento deformacional em função dos deslocamentos nodais

Os deslocamentos deformacionais dos nós do elemento podem ser definidos do mesmo modo que os deslocamentos deformacionais foram descritos anteriormente para um ponto

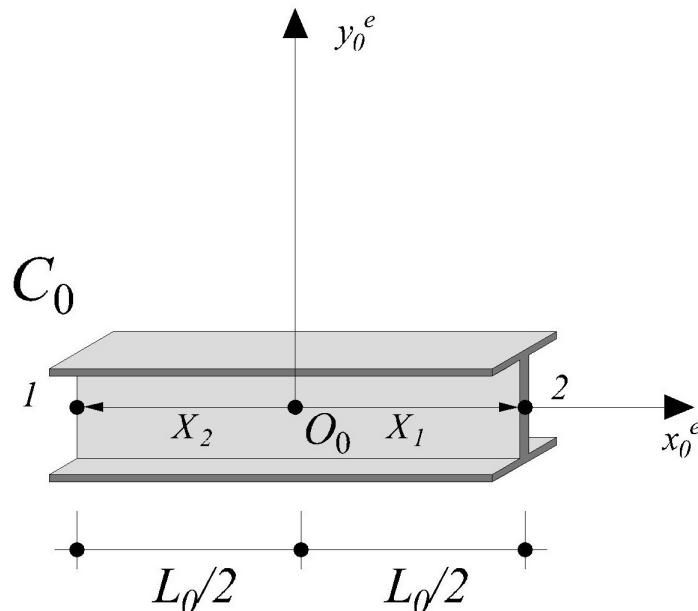
P_0 qualquer. Considerando um elemento de viga no plano que assume a configuração inicial C_0 , os vetores posição dos nós do elemento X_1 e X_2 , podem ser descritos conforme as Equações 2.12 e 2.13.

$$\mathbf{X}_1 = \begin{Bmatrix} x_1 = L_0/2 \\ y_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{X}_2 = \begin{Bmatrix} x_2 = -L_0/2 \\ y_2 = 0 \\ \theta_2 = 0 \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

O entendimento dos vetores posição X_1 e X_2 é esclarecido na Figura 2.7

Figura 2.7 – Configuração inicial C_0



Fonte: o Autor

Deste modo, os deslocamentos totais \mathbf{u} e deformacionais \mathbf{u}_D dos nós de extremidade

do elemento, podem ser expressos da seguinte maneira:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(-\frac{L_0}{2}, 0) \\ v(-\frac{L_0}{2}, 0) \\ \theta(-\frac{L_0}{2}, 0) \\ u(\frac{L_0}{2}, 0) \\ v(\frac{L_0}{2}, 0) \\ \theta(\frac{L_0}{2}, 0) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}_D^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{1D}^e \\ \mathbf{u}_{2D}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1D}^e \\ v_{1D}^e \\ \theta_1 \\ u_{2D}^e \\ v_{2D}^e \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1D}^e(-\frac{L_0}{2}, 0) \\ v_{1D}^e(-\frac{L_0}{2}, 0) \\ \theta_1(-\frac{L_0}{2}, 0) \\ u_{2D}^e(\frac{L_0}{2}, 0) \\ v_{2D}^e(\frac{L_0}{2}, 0) \\ \theta_2(\frac{L_0}{2}, 0) \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

A partir da Equação 2.11 desenvolvida para um ponto P0 qualquer e da descrição de \mathbf{u} e \mathbf{u}_D dadas na Equação 2.14, com algumas operações matemáticas pode-se definir \mathbf{u}_D^e do seguinte modo:

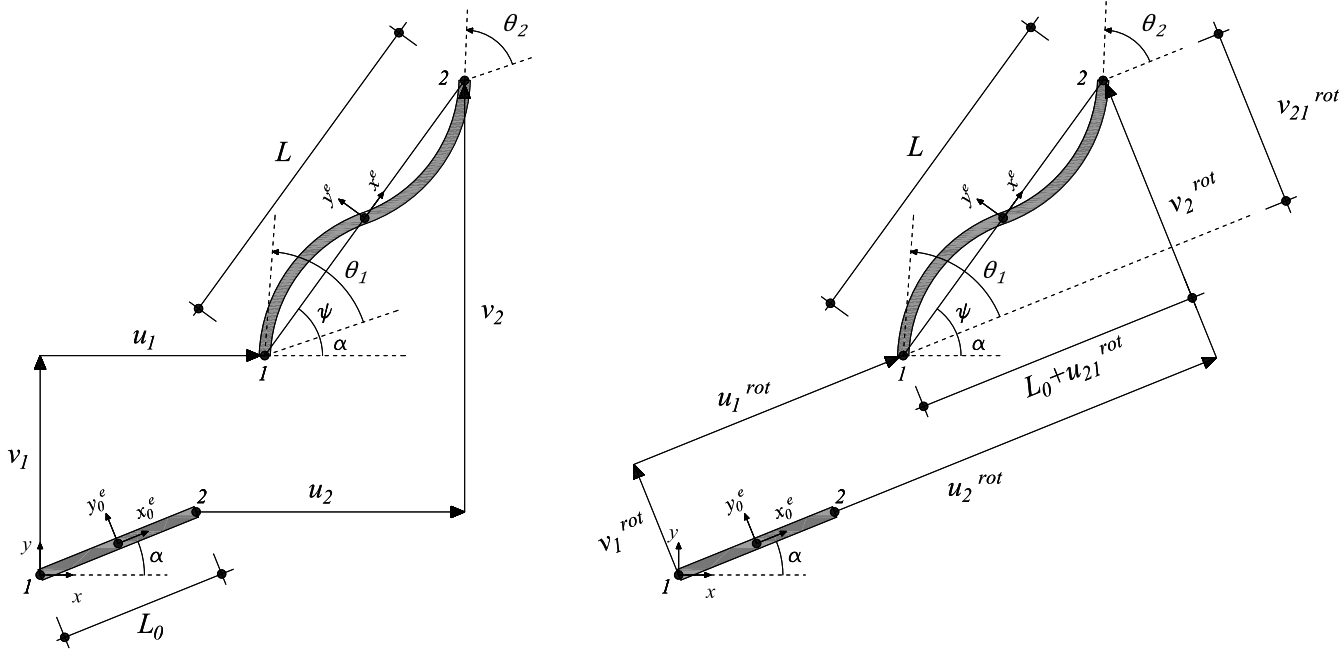
$$\mathbf{u}_D^e = \begin{Bmatrix} u_{1D}^e \\ v_{1D}^e \\ \theta_1 \\ u_{2D}^e \\ v_{2D}^e \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}L_0 \begin{Bmatrix} 1 - \lambda_\psi \\ \mu_\psi \\ 0 \\ \lambda_\psi - 1 \\ -\mu_\psi \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \lambda_\psi & \mu_\psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_\psi & \lambda_\psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_\psi & \mu_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_\psi & \lambda_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 - u_0 \\ v_1 - v_0 \\ \theta_1 - \psi \\ u_2 - u_0 \\ v_2 - v_0 \\ \theta_2 - \psi \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Como citado anteriormente, $\lambda_\psi = \cos(\psi)$ e $\mu_\psi = \sin(\psi)$, sendo os cossenos diretores do elemento de viga obtidos em função de sua rotação de corpo rígido em relação ao sistema de coordenada global. Os deslocamentos translacionais providos do deslocamento do ponto O_0 na configuração inicial C_0 para o ponto O na configuração atual C , são obtidos pelas seguintes equações:

$$u_0 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2), \quad v_0 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \quad (2.16)$$

Considerando um caso de configuração mais generalizada da Figura 2.8 apresenta um elemento cuja configuração inicial não está alinhada com os eixos globais, sendo defasada por um ângulo α . Nela está representado o movimento do elemento de viga com o deslocamento global dos nós definidos em função do sistema de eixos globais (x,y) , do lado esquerdo da Figura 2.8, e em função do sistemas de eixos rotacionado por α , do lado direito.

Figura 2.8 – Deslocamentos globais e globais rotacionados



Fonte: o Autor

No intuito de determinar $\cos(\psi)$, $\sin(\psi)$ e L para a configuração atual, ou seja, em função dos deslocamentos nodais com relação aos eixos rotacionados, é necessário determinar o vetor \mathbf{u}_{21}^{rot} , isto pode ser feito a partir da Equação 2.17.

$$\mathbf{u}_{21}^{rot} = \begin{Bmatrix} u_{21}^{rot} \\ v_{21}^{rot} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2^{rot} - u_1^{rot} \\ v_2^{rot} - v_1^{rot} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_\alpha & \mu_\alpha \\ -\mu_\alpha & \lambda_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{21} \\ v_{21} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

de modo que:

$$\begin{cases} \lambda_\alpha = \cos(\alpha) = \frac{x_{21}}{L_0} = \frac{x_2 - x_1}{L_0} \\ \mu_\alpha = \sin(\alpha) = \frac{y_{21}}{L_0} = \frac{y_2 - y_1}{L_0} \\ u_{21} = u_2 - u_1 \\ v_{21} = v_2 - v_1 \end{cases} \quad (2.18)$$

Em posse dos deslocamentos nodais rotacionados, as principais variáveis cinemáticas envolvidas na formulação corrotacional $\cos(\psi)$, $\sin(\psi)$ e L são obtidas pelas seguintes relações trigonométricas, que podem ser facilmente observadas na 2.8.

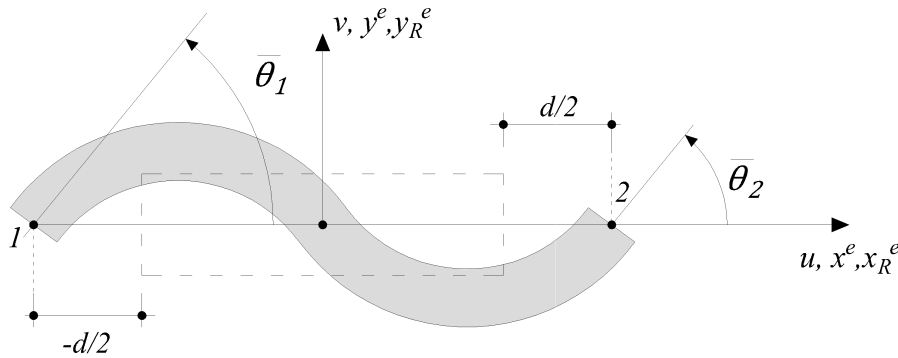
$$\lambda_\psi = \cos(\psi) = \frac{L_0 + u_{21}^{rot}}{L} \quad (2.19)$$

$$\mu_\psi = \sin(\psi) = \frac{v_{21}^{rot}}{L} \quad (2.20)$$

$$L = \sqrt{(L_0 + u_{21}^{rot})^2 + (v_{21}^{rot})^2} \quad (2.21)$$

A Figura 2.9 auxilia na visualização das relações: $u_{2D}^e = -u_{1D}^e = d/2$, $v_{2D}^e = v_{1D}^e = 0$, $\bar{\theta}_1 = \theta_1 - \psi$ e $\bar{\theta}_2 = \theta_2 - \psi$

Figura 2.9 – Deslocamentos deformacionais no sistema local



Fonte: o Autor

2.3.3.2 Derivadas parciais dos deslocamentos deformacionais

Por meio das equações 2.19, 2.20 e 2.21 pode-se determinar as seguintes expressões que relacionam as derivadas parciais das variáveis cinemáticas com relação aos deslocamentos deformacionais.

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = -\frac{\partial L}{\partial u_1} = \lambda_\psi; \quad \frac{\partial L}{\partial v_2} = -\frac{\partial L}{\partial v_1} = \mu_\psi; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \lambda_\psi}{\partial u_2} = -\frac{\partial \lambda_\psi}{\partial u_1} = \frac{\mu_\psi^2}{L}; \quad \frac{\partial \lambda_\psi}{\partial v_2} = -\frac{\partial \lambda_\psi}{\partial v_1} = -\frac{\mu_\psi \lambda_\psi}{L}; \quad \frac{\partial \lambda_\psi}{\partial \theta_2} = \frac{\partial \lambda_\psi}{\partial \theta_1} = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \mu_\psi}{\partial u_2} = -\frac{\partial \mu_\psi}{\partial u_1} = -\frac{\mu_\psi \lambda_\psi}{L}; \quad \frac{\partial \mu_\psi}{\partial v_2} = -\frac{\partial \mu_\psi}{\partial v_1} = \frac{\lambda_\psi^2}{L}; \quad \frac{\partial \mu_\psi}{\partial \theta_2} = \frac{\partial \mu_\psi}{\partial \theta_1} = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial u_1} = -\frac{\mu_\psi}{L}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial v_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial v_1} = \frac{\lambda_\psi}{L}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta_2} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta_1} = 0 \quad (2.25)$$

Derivando o vetor \mathbf{u}_D^e da Equação 2.15 com relação aos deslocamentos globais \mathbf{u} , tem-se a seguinte expressão:

$$\frac{\mathbf{u}_D^e}{\partial \mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_{1D}^e}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial v_{1D}^e}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial u_{2D}^e}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial v_{2D}^e}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial \mathbf{u}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_\psi}{2} & \frac{\mu_\psi}{2} & 0 & -\frac{\lambda_\psi}{2} & -\frac{\mu_\psi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_\psi}{L} & \frac{\lambda_\psi}{L} & 1 & \frac{\mu_\psi}{L} & -\frac{\lambda_\psi}{L} & 0 \\ -\frac{\lambda_\psi}{2} & -\frac{\mu_\psi}{2} & 0 & \frac{\lambda_\psi}{2} & \frac{\mu_\psi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_\psi}{L} & \frac{\lambda_\psi}{L} & 0 & \frac{\mu_\psi}{L} & -\frac{\lambda_\psi}{L} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial \mathbf{u}} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

Tendo em vista a relação $u_{2D}^e = -u_{1D}^e = d/2$, a Equação 2.26 toma a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial d}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial \mathbf{u}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_\psi & -\mu_\psi & 0 & \lambda_\psi & \mu_\psi & 0 \\ -\frac{\mu_\psi}{L} & \frac{\lambda_\psi}{L} & 1 & \frac{\mu_\psi}{L} & -\frac{\lambda_\psi}{L} & 0 \\ -\frac{\mu_\psi}{L} & \frac{\lambda_\psi}{L} & 0 & \frac{\mu_\psi}{L} & -\frac{\lambda_\psi}{L} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial \mathbf{u}} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Considerando as derivadas parciais desenvolvidas nas Equações 2.22, 2.23, 2.24 e 2.25 e a Equação 2.27, as segundas derivadas dos deslocamentos deformacionais são dadas por:

$$\frac{\partial^2 d}{\partial \mathbf{u}^2} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \mu_\psi^2 & -\mu_\psi \lambda_\psi & 0 & -\mu_\psi^2 & \mu_\psi \lambda_\psi & 0 \\ -\mu_\psi \lambda_\psi & \lambda_\psi^2 & 0 & \mu_\psi \lambda_\psi & -\lambda_\psi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_\psi^2 & \mu_\psi \lambda_\psi & 0 & \mu_\psi^2 & -\mu_\psi \lambda_\psi & 0 \\ \mu_\psi \lambda_\psi & -\lambda_\psi^2 & 0 & -\mu_\psi \lambda_\psi & \lambda_\psi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \mathbf{u}^2} = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \mathbf{u}^2} = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} -2\mu_\psi \lambda_\psi & \lambda_\psi^2 - \mu_\psi^2 & 0 & 2\mu_\psi \lambda_\psi & \mu_\psi^2 - \lambda_\psi^2 & 0 \\ \lambda_\psi^2 - \mu_\psi^2 & 2\mu_\psi \lambda_\psi & 0 & \mu_\psi^2 - \lambda_\psi^2 & -2\mu_\psi \lambda_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\mu_\psi \lambda_\psi & \mu_\psi^2 - \lambda_\psi^2 & 0 & -2\mu_\psi \lambda_\psi & \lambda_\psi^2 - \mu_\psi^2 & 0 \\ \mu_\psi^2 - \lambda_\psi^2 & -2\mu_\psi \lambda_\psi & 0 & \lambda_\psi^2 - \mu_\psi^2 & 2\mu_\psi \lambda_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

2.3.4 Esforços resultantes

Os esforços atuantes no elemento de viga no plano, na configuração atual C , considerados nesta formulação são: N , V , $M1$ e $M2$, sendo respectivamente o esforço normal,

cortante, flexão no nó inicial e flexão no nó final do elemento. Estes esforços são descritos em função de suas respectivas deformações em McGuire, Gallagher e Ziemian (2000) nas seguintes equações:

$$N = \frac{EA}{L_0} d \quad (2.30)$$

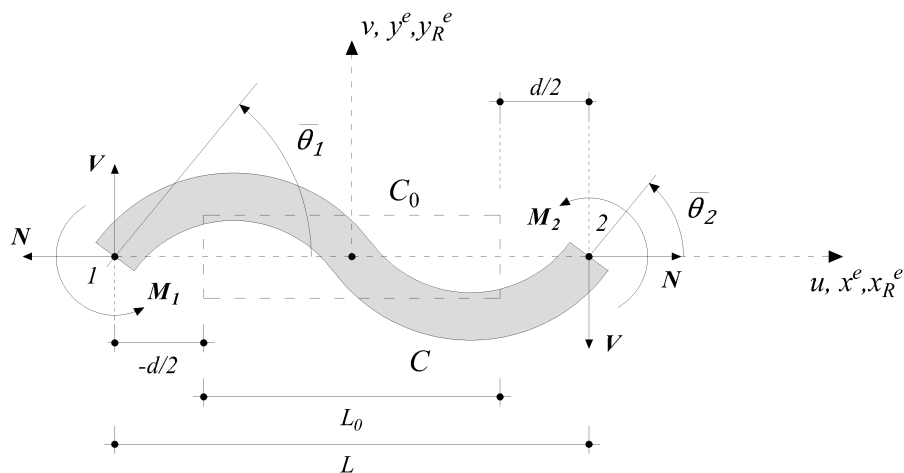
$$V = \frac{M_1 + M_2}{L} = \frac{6EI}{LL_0} \left(\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 + \frac{12v_1}{L_0^2} - \frac{12v_2}{L_0^2} \right) \quad (2.31)$$

$$M_1 = \frac{EI}{L_0} \left(4\bar{\theta}_1 + 2\bar{\theta}_2 + \frac{6v_1}{L_0^2} - \frac{6v_2}{L_0^2} \right) \quad (2.32)$$

$$M_2 = \frac{EI}{L_0} \left(2\bar{\theta}_1 + 4\bar{\theta}_2 + \frac{6v_1}{L_0^2} - \frac{6v_2}{L_0^2} \right) \quad (2.33)$$

Onde E é o módulo de elasticidade longitudinal, A é a área da seção transversal e I é o momento de inércia da seção transversal, do elemento. Na Figura 2.10 são apresentados os esforços com suas respectivas convenções de sinais. Vale lembrar que os esforços N e V são constantes ao longo do comprimento L do elemento, enquanto que M_1 e M_2 apresentam uma variação linear em relação a L , pelo fato de se tratar de um movimento hermitiano.

Figura 2.10 – Convenções de sinais dos esforços



Fonte: o Autor

2.3.5 Energia de deformação da viga

A formulação apresentada aqui leva em conta somente deformações infinitesimais, dessa forma a energia de deformação do elemento de viga, sem levar em conta o acopla-

mento dos esforços axiais e de flexão, pode ser dada por:

$$U = U^A + U^F \quad (2.34)$$

Onde U^A e U^F são respectivamente as deformações de energia axial e de flexão. Separadamente McGuire, Gallagher e Ziemian (2000) definem U^A e U^F , por:

$$U^A = \frac{F_{axial}^2 L_0}{2EA} = \frac{EA d^2}{2L_0} \quad (2.35)$$

$$U^F = \frac{L_0}{6EI} (M_1^2 - M_1 M_2 + M_2^2) = \frac{2EI}{L_0} (\bar{\theta}_1^2 + \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_2^2) \quad (2.36)$$

Sendo F_{axial} a força axial atuante no elemento.

2.3.6 Vetor de forças internas

O vetor de forças internas \mathbf{f} é dado pela derivada parcial de primeira ordem da energia de deformação da viga com relação aos deslocamentos globais \mathbf{u} , conforme apresentado a seguir:

$$\mathbf{f} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}} \quad (2.37)$$

Considerando as relações de U^A e U^F obtidas anteriormente pelas Equações 2.35 e 2.36, e as derivadas parciais de primeira ordem de d, θ_1 e θ_2 , desenvolve-se a seguinte expressão a partir da substituição das mesmas na Equação 2.37:

$$\mathbf{f}^A = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(\frac{EA_0}{2L} \right) = \frac{EA_0}{L} d \frac{\partial d}{\partial \mathbf{u}} = N \frac{\partial d}{\partial \mathbf{u}} = N \begin{bmatrix} -\lambda_\psi & -\mu_\psi & 0 & \lambda_\psi & \mu_\psi & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.38)$$

$$\mathbf{f}^F = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(\frac{2EI}{L_0} (\bar{\theta}_1^2 + \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_2^2) \right) = \frac{2EI}{L_0} \left(2\bar{\theta}_1 \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \mathbf{u}} + \bar{\theta}_2 \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \mathbf{u}} + \bar{\theta}_1 \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \mathbf{u}} + 2\bar{\theta}_2 \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \mathbf{u}} \right) \quad (2.39)$$

$$\mathbf{f}^F = \begin{bmatrix} -V\mu_\psi & V\lambda_\psi & M_1 & V\mu_\psi & -V\lambda_\psi & M_2 \end{bmatrix}^T \quad (2.40)$$

Determinados separadamente os vetores de forças internas referente à contribuição axial (\mathbf{f}^A) e contribuição de flexão (\mathbf{f}^F), nas Equações 2.38 e 2.40 respectivamente, o vetor de forças internas é obtido pela soma de ambas as contribuições.

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^A + \mathbf{f}^F \quad (2.41)$$

A formulação descrita neste capítulo parte da hipótese de que o elemento de viga tem seu sistema de eixos local inicial na configuração inicial C_0 alinhado ao sistema de coordenadas global. Entretanto é possível que o sistema de coordenadas locais do elemento em sua configuração inicial não esteja alinhado com o sistema de coordenadas globais, defasados por um ângulo α como visto na Figura 9. De forma a generalizar a formulação para abranger estes casos também, pode-se reescrever o vetor de forças internas, em relação ao sistema de coordenadas globais por meio da seguinte equação:

$$\mathbf{f}_g = \mathbf{R}^T \mathbf{f} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Sendo \mathbf{R}^T a matriz de rotação capaz de transformar o sistema de coordenadas local para o sistema de coordenadas global, $\mathbf{0}$ é uma matriz 3x3 nula e \mathbf{Q}^T é a transposta da matriz \mathbf{Q} expressa anteriormente na Equação 2.25.

2.3.7 Matriz de rigidez tangente

A matriz de rigidez tangente (\mathbf{K}) é dada pela derivada parcial de segunda ordem da energia de deformação da viga com relação aos deslocamentos globais \mathbf{u} , ou consequentemente pela derivada parcial de primeira ordem do vetor de forças internas \mathbf{f} com relação aos deslocamentos globais \mathbf{u} . A matriz de rigidez tangente pode ser decomposta em duas partes, sendo uma a matriz de rigidez material (\mathbf{K}_M) e a outra a matriz de rigidez geométrica (\mathbf{K}_G), de modo que:

$$\mathbf{K} = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{u}^2} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G \quad (2.44)$$

Relacionando as parcelas do vetor de forças internas \mathbf{f} apresentadas anteriormente e as derivadas parciais definidas nas Equações 2.27, 2.28 e 2.29, com a Equação 2.44, obtêm-se as expressões:

$$\frac{\partial \mathbf{f}^A}{\partial \mathbf{u}} = \frac{EA_0}{L_0} \left(\frac{\partial d}{\partial \mathbf{u}} \left(\frac{\partial d}{\partial \mathbf{u}} \right)^T + d \frac{\partial^2 d}{\partial \mathbf{u}^2} \right) = \mathbf{K}_M^{\text{axial}} + \mathbf{K}_G^{\text{axial}} \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}^F}{\partial \mathbf{u}} = \frac{2EI}{L_0} \frac{\partial d}{\partial \mathbf{u}} \left((2\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_1) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \mathbf{u}} + (\bar{\theta}_1 + 2\bar{\theta}_1) \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \mathbf{u}} \right) = \mathbf{K}_M^{\text{flexão}} + \mathbf{K}_G^{\text{flexão}} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{K}_M^{\text{axial}} + \mathbf{K}_M^{\text{flexão}} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{K}_G^{\text{axial}} + \mathbf{K}_G^{\text{flexão}} \quad (2.48)$$

$$\mathbf{K}_M^{\text{axial}} = \frac{EA_0}{L_0} \begin{bmatrix} \lambda_\psi^2 & \mu_\psi \lambda_\psi & 0 & -\lambda_\psi^2 & -\mu_\psi \lambda_\psi & 0 \\ \mu_\psi \lambda_\psi & \mu_\psi^2 & 0 & -\mu_\psi \lambda_\psi & -\mu_\psi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_\psi^2 & -\mu_\psi \lambda_\psi & 0 & \lambda_\psi^2 & \mu_\psi \lambda_\psi & 0 \\ -\mu_\psi \lambda_\psi & -\mu_\psi^2 & 0 & \mu_\psi \lambda_\psi & \mu_\psi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{K}_M^{\text{flexão}} = \frac{2EI}{L_0} \begin{bmatrix} \frac{6\mu_\psi^2}{L^2} & -\frac{6\mu_\psi \lambda_\psi}{L^2} & -\frac{3\mu_\psi}{L} & -\frac{6\mu_\psi^2}{L^2} & \frac{6\mu_\psi \lambda_\psi}{L^2} & -\frac{3\mu_\psi}{L} \\ -\frac{6\mu_\psi \lambda_\psi}{L^2} & \frac{6\lambda_\psi^2}{L^2} & \frac{3\lambda_\psi}{L} & \frac{6\mu_\psi \lambda_\psi}{L^2} & -\frac{6\lambda_\psi^2}{L^2} & \frac{3\lambda_\psi}{L} \\ -\frac{3\mu_\psi}{L} & \frac{3\lambda_\psi}{L} & 2 & \frac{3\mu_\psi}{L} & -\frac{3\lambda_\psi}{L} & 1 \\ -\frac{6\mu_\psi^2}{L^2} & \frac{6\mu_\psi \lambda_\psi}{L^2} & \frac{3\mu_\psi}{L} & \frac{6\mu_\psi^2}{L^2} & -\frac{6\mu_\psi \lambda_\psi}{L^2} & \frac{3\mu_\psi}{L} \\ \frac{6\mu_\psi \lambda_\psi}{L^2} & -\frac{6\lambda_\psi^2}{L^2} & -\frac{3\lambda_\psi}{L} & -\frac{6\mu_\psi \lambda_\psi}{L^2} & \frac{6\lambda_\psi^2}{L^2} & -\frac{3\lambda_\psi}{L} \\ -\frac{3\mu_\psi}{L} & \frac{3\lambda_\psi}{L} & 1 & \frac{3\mu_\psi}{L} & -\frac{3\lambda_\psi}{L} & 2 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$\mathbf{K}_G^{\text{axial}} = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} \mu_\psi^2 & -\mu_\psi \lambda_\psi & 0 & -\mu_\psi^2 & \mu_\psi \lambda_\psi & 0 \\ -\mu_\psi \lambda_\psi & \lambda_\psi^2 & 0 & \mu_\psi \lambda_\psi & -\lambda_\psi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_\psi^2 & \mu_\psi \lambda_\psi & 0 & \mu_\psi^2 & -\mu_\psi \lambda_\psi & 0 \\ \mu_\psi \lambda_\psi & -\lambda_\psi^2 & 0 & -\mu_\psi \lambda_\psi & \lambda_\psi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{K}_G^{\text{flexão}} = \frac{V}{L} \begin{bmatrix} -2\mu_\psi \lambda_\psi & \lambda_\psi^2 - \mu_\psi^2 & 0 & 2\mu_\psi \lambda_\psi & \mu_\psi^2 - \lambda_\psi^2 & 0 \\ \lambda_\psi^2 - \mu_\psi^2 & 2\mu_\psi \lambda_\psi & 0 & \mu_\psi^2 - \lambda_\psi^2 & -2\mu_\psi \lambda_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\mu_\psi \lambda_\psi & \mu_\psi^2 - \lambda_\psi^2 & 0 & -2\mu_\psi \lambda_\psi & \lambda_\psi^2 - \mu_\psi^2 & 0 \\ \mu_\psi^2 - \lambda_\psi^2 & -2\mu_\psi \lambda_\psi & 0 & \lambda_\psi^2 - \mu_\psi^2 & 2\mu_\psi \lambda_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

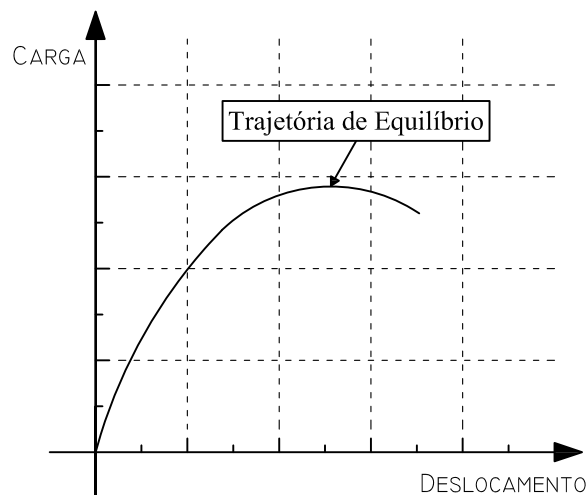
Do mesmo modo que o vetor de forças internas, a matriz de rigidez tangente também deve ser transformada de coordenadas locais para coordenadas globais. Essa operação pode ser feita através da seguinte Equação:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{R} \quad (2.53)$$

2.4 Estratégia de controle de carga deslocamento

Ao se realizar o procedimento de análise não linear estática em uma estrutura, é comum avaliar os resultados desta análise por meio de um diagrama carga (P)-deslocamento (δ), composto por unidade de deslocamento ou rotação em sua abscissa, e unidade de carga em sua ordenada. Um exemplo do diagrama discutido em questão pode ser visto na Figura 2.11.

Figura 2.11 – Trajetória de equilíbrio



Fonte: o Autor

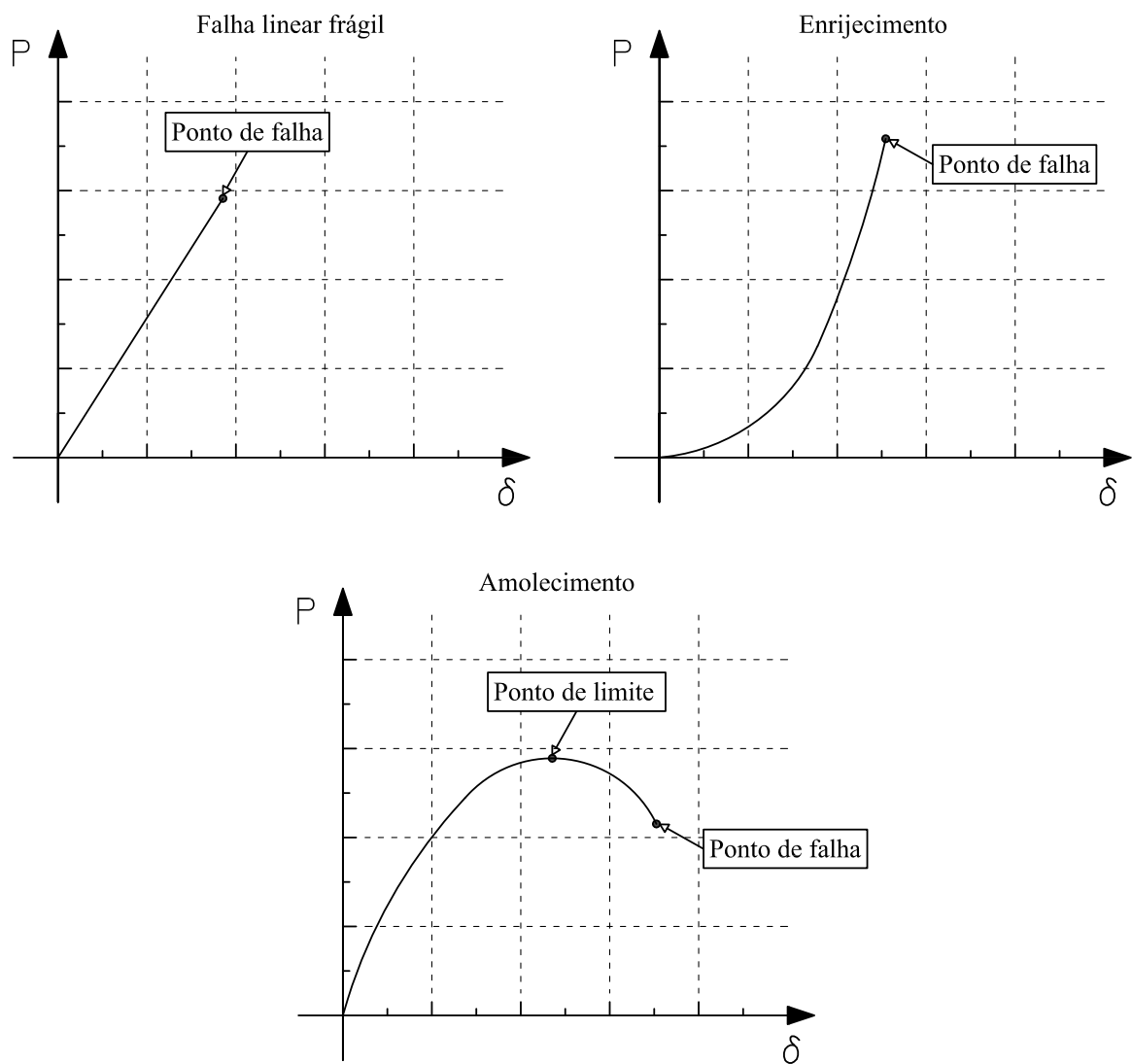
A curva deste tipo de diagrama é formada por um conjunto de pontos, os quais cada um representa uma possível posição de equilíbrio da estrutura, sendo denominados pontos de equilíbrio. A esse trajeto de pontos que representa graficamente as configurações de equilíbrio da estrutura à medida em que é carregada, denomina-se “trajetória de equilíbrio”. De acordo com Felippa (2001), por meio da trajetória de equilíbrio, pode-se identificar e ilustrar muitos conceitos-chave com relação física, matemática ou computacional. Um destes conceitos, que está ligado diretamente a instabilidade de estrutura em análise não linear, é o de “ponto crítico”. Dentre os tipos de pontos críticos que podem ser identificados em um diagrama de trajetória de equilíbrio, pode-se citar:

- Ponto limite: localizado em pontos da trajetória de equilíbrio em que se pode traçar uma reta tangente horizontal, ou seja, reta paralela à abscissa, o qual indica a perda de rigidez total da estrutura;
- Turning points: localizado em pontos da trajetória de equilíbrio em que se pode traçar uma reta tangente vertical, ou seja, reta paralela à ordenada, o qual indica mudança no sentido do deslocamento da estrutura;

- Ponto de falha: localizado ao final da trajetória de equilíbrio, indicando o colapso da estrutura;

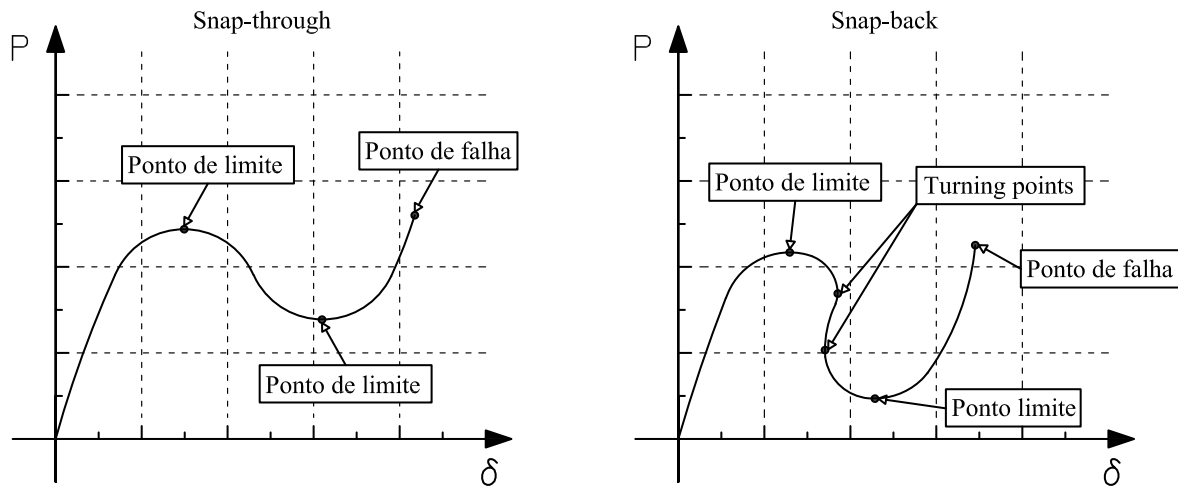
A seguir pode ser observado a presença dos pontos críticos descritos em algumas das trajetórias expressas nas Figuras 2.12 e 2.13. Estas trajetórias de equilíbrio são intituladas conforme a nomenclatura utilizada em Felippa (2001).

Figura 2.12 – Padrões de resposta dinâmica



Fonte: o Autor

Figura 2.13 – Fenômenos de inversão de equilíbrio



Fonte: o Autor

Conforme Rodrigues (2000), de maneira geral a configuração de equilíbrio de uma estrutura pode ser considerada estável quando é mútuo o aumento da carga e deslocamento, e instável quando a progressão da carga e deslocamento são inversas, ou seja, a medida que um aumenta o outro decresce. Para identificar estes fenômenos de instabilidade presentes em trajetórias de estruturas de caráter não linear, é necessário se fazer uso de métodos incrementais iterativos, que possibilitam a detecção de pontos críticos e a obtenção da resposta posterior a eles. O que motiva a constatação de pontos críticos e a investigação da resposta posterior a estes é o fato de que, a presença destes pontos está intimamente ligada aos fenômenos de instabilidade estrutural, e que a identificação do comportamento pós ponto crítico ajuda a avaliar as condições estruturais, permitindo discernir se o potencial total da estrutura fora utilizado, ou se a mesma não é mais capaz de cumprir seu propósito. O procedimento, adotado neste trabalho, que visa a detecção de pontos críticos e que permite a obtenção da resposta após tal detecção é o método de comprimento de arco cilíndrico.

2.4.1 Método de comprimento de arco

Os métodos de comprimento de arco, de maneira geral, em seu processo de cálculo visam obter um escalar que pondera a aplicação de força sobre a estrutura, ao multiplicar o vetor de forças externas. Tal escalar é conhecido como “fator de carga”, e é comumente representado pela letra λ . O método de resolução de problemas não lineares geométricos estáticos, requer o emprego de um processo incremental-iterativo. A parte incremental está relacionada ao fracionamento da carga externa a ser aplicada sobre a estrutura. À parte iterativa compete identificar que fração de carregamento deve ser aplicada à cada incremento, de modo que a análise feita consiga captar os fenômenos de instabilidade (pontos críticos) e a continuidade da resposta. Para que o processo iterativo tenha sucesso em seu objetivo,

recorre-se a uma tipologia métodos iterativos chamada de preditor-corretor, a qual pertence o método do comprimento de arco. O método do comprimento de arco se baseia na hipótese de que a solução para determinar o fator de carga incremental a cada incremento está contida em um trajeto circular, o qual é descrito pelos eixos de deslocamento incremental ($\Delta\mathbf{x}$) e força incremental ($\Delta\lambda \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}}$), com raio de ação igual ao comprimento de arco (ΔL). Desta forma pode-se impor a seguinte restrição, onde o sobrescrito n indica o incremento ao qual se está analisando:

$$(\Delta\mathbf{x}^n)^T \cdot (\Delta\mathbf{x}^n) + b \cdot (\Delta\lambda^n)^2 \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}}^T \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}} = \Delta L^2 \quad (2.54)$$

Onde b é um parâmetro de ponderação aplicado ao eixo de força incremental do traçado circular. Conforme [Menin \(2006\)](#), o deslocamento incremental no incremento n ($\Delta\mathbf{x}^n$) e o deslocamento incremental correspondente a totalidade da força externa ($\Delta\mathbf{x}_T$), podem ser descritos conforme as respectivas equações 2.55 e 2.56:

$$\mathbf{K}^{n-1} \cdot \Delta\mathbf{x}^n = \Delta\lambda^n \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (2.55)$$

$$\mathbf{K}^{n-1} \cdot \Delta\mathbf{x}_T = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (2.56)$$

Onde \mathbf{K}^{n-1} , é a matriz de rigidez não linear geométrica do incremento anterior. Por meio das equações 2.55 e 2.56, podemos obter:

$$\Delta\mathbf{x}^n = \Delta\lambda^n \cdot \Delta\mathbf{x}_T \quad (2.57)$$

Ao substituir a equação na equação 2.57 na equação de restrição do método de comprimento de arco, tem-se a seguinte equação:

$$(\Delta\lambda^n)^2 [(\Delta\mathbf{x}^n)^T \cdot (\Delta\mathbf{x}^n) + b \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}}^T \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}}] = \Delta L^2 \quad (2.58)$$

Como dito anteriormente, o método de comprimento arco é do tipo preditor-corretor, dessa forma o novo formato da equação de restrição do mesmo, equação 2.58, permite isolar o fator de carga incremental ($\Delta\lambda^n$) e gerar uma equação de predição, expressa por:

$$\Delta\lambda^n = \pm \frac{\Delta L}{\sqrt{(\Delta\mathbf{x}^n)^T \cdot (\Delta\mathbf{x}^n) + b \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}}^T \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}}}} \quad (2.59)$$

Conhecido o valor de $\Delta\lambda^n$, pode-se determinar $\Delta\mathbf{x}^n$ por meio da equação 2.57. O processo de predição é realizado somente uma vez a cada incremento. Deste modo, o fator

de carga incremental predito, deve ser corrigido na parte iterativa do método através do processo de correção, com base na equação 2.60.

$$\Delta\lambda_{i+1}^n = \Delta\lambda_i^n + \delta\lambda_i \quad (2.60)$$

Onde o subscripto i indica a iteração a qual se está analisando. A correção do fator de carga incremental se baseia na hipótese do equilíbrio de forças na estrutura, o que impõe a restrição de que a diferença entre o vetor de força interna e o vetor de força externa, deve ser igual a zero, como descreve a equação 2.61:

$$\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = 0 \quad (2.61)$$

Entretanto sabe-se que durante o processo iterativo a restrição da equação 2.61 não é totalmente atendida, de modo que a diferença entre os vetores de força externa e interna é diferente de zero, resultando em um valor frequentemente denominado na literatura como resíduo, ou vetor de força residual. Esse conceito descrito pode ser representado pela equação 2.62:

$$\mathbf{r}(x) = \mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} \neq 0 \quad (2.62)$$

Tendo em vista o conceito de vetor de força residual, o processo corretor do método do comprimento de arco busca, a cada iteração, torna-lo nulo, de modo a atender a restrição de equilíbrio estrutural imposta pela equação 2.61, ou diminuí-lo quanto possível até que seu valor seja tolerável no tocante do equilíbrio da estrutura. Dessa forma, pode-se representar os termos da equação 2.62 em função de contadores incrementais e iterativos do seguinte modo:

$$\mathbf{r}(x_i^n) = \mathbf{f}_{\text{ext},i}^n - \mathbf{f}_{\text{int}}(x_i^n) \neq 0 \quad (2.63)$$

Caso a i -ésima iteração não fosse capaz de eliminar o resíduo e obter o equilíbrio estrutural do n -ésimo incremento, seria necessário prosseguir para a próxima iteração, a qual poderia assumir o seguinte formato:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(x_{i+1}^n) &= \mathbf{f}_{\text{ext},i+1}^n - \mathbf{f}_{\text{int}}(x_{i+1}^n) \\ &= \lambda_{i+1}^n \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}} - \mathbf{f}_{\text{int}}(x_{i+1}^n) \\ &= (\lambda_i^n + \delta\lambda_i) \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}} - \mathbf{f}_{\text{int}}(x_i^n + \delta x_i) \\ &= \lambda_i^n \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}} - \mathbf{f}_{\text{int}}(x_i^n) + \delta\lambda_i \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}} - \mathbf{K}(x_i^n) \cdot \delta\mathbf{x}_i \\ &= \mathbf{r}(x_i^n) + \delta\lambda_i \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}} - \mathbf{K}(x_i^n) \cdot \delta\mathbf{x}_i \end{aligned} \quad (2.64)$$

Ao se impor a restrição $\mathbf{r}(x_{i+1}^n) = 0$, a equação 2.64 toma o seguinte formato:

$$\mathbf{K}(x_i^n) \cdot \delta \mathbf{x}_i = \mathbf{r}(x_i^n) + \delta \lambda_i \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (2.65)$$

Isolando o deslocamento iterativo, tem-se:

$$\delta \mathbf{x}_i = [\mathbf{K}(x_i^n)]^{-1} \cdot \mathbf{r}(x_i^n) + \delta \lambda_i \cdot [\mathbf{K}(x_i^n)]^{-1} \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}} = \delta \mathbf{x}_{Ri} + \delta \lambda_i \cdot \delta \mathbf{x}_T \quad (2.66)$$

Sendo $\delta \mathbf{x}_{Ri}$ o vetor deslocamento iterativo residual e $\delta \mathbf{x}_T$ o vetor deslocamento iterativo total. Estes vetores podem ser obtidos por meio da resolução dos seguintes sistemas:

$$\mathbf{K}(x_i^n) \cdot \delta \mathbf{x}_{Ri} = \mathbf{r}(x_i^n) \quad ; \quad \mathbf{K}(x_i^n) \cdot \delta \mathbf{x}_{Ti} = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (2.67)$$

Considerando a equação 2.66, o deslocamento incremental acumulado pode ser descrito do seguinte modo:

$$\Delta \mathbf{x}_{i+1}^n = \Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_i = \Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_{Ri} + \delta \lambda_i \cdot \delta \mathbf{x}_T \quad (2.68)$$

Definindo a equação 2.54 em formato iteracional, a mesma torna-se:

$$(\Delta \mathbf{x}_{i+1}^n)^T (\Delta \mathbf{x}_{i+1}^n) + b(\Delta \lambda_{i+1}^n)^2 \mathbf{f}_{\text{ext}}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} = (\Delta \mathbf{x}_i^n)^T (\Delta \mathbf{x}_i^n) + b(\Delta \lambda_i^n)^2 \mathbf{f}_{\text{ext}}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} = \Delta L^2 \quad (2.69)$$

Substituindo as equações 2.60 e 2.68 na equação 2.69, se obtém:

$$\begin{aligned} (\Delta \mathbf{x}_{i+1}^n)^T \cdot (\Delta \mathbf{x}_{i+1}^n) + b \cdot (\Delta \lambda_{i+1}^n)^2 \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}}^T \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}} &= (\delta \lambda_i)^2 \cdot ((\delta \mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ti} + b \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}}^T \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}}) \\ &+ \delta \lambda_i \cdot \left(2 \cdot (\Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ti} + 2 \cdot \Delta \lambda_i^n \cdot b \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}}^T \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}} \right) \\ &+ \left((\Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot (\Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_{Ri}) + (\Delta \lambda_i^n)^2 \cdot b \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}}^T \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}} \right) = \Delta L^2 \end{aligned} \quad (2.70)$$

A equação 2.70 pode ser rearranjada no formato de uma equação de segundo grau em função da variável $\delta \lambda_i$, na seguinte maneira:

$$a_1 \cdot (\delta \lambda_i)^2 + a_2 \cdot \delta \lambda_i + a_3 = 0 \quad (2.71)$$

Onde:

$$a_1 = (\delta \mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ti} + b \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}}^T \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (2.72)$$

$$a_2 = 2 \cdot (\Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ti} + 2 \cdot \Delta \lambda_i^n \cdot b \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}}^T \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned}
a_3 &= (\Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot (\Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_{Ri}) + (\Delta \lambda_i^n)^2 \cdot b \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}}^T \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}} - \Delta L^2 \\
&= (\Delta \mathbf{x}_i^n)^T \cdot \Delta \mathbf{x}_i^n + (\Delta \lambda_i^n)^2 \cdot b \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}}^T \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}} - \Delta L^2 + 2 \cdot (\Delta \mathbf{x}_i^n)^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ri} + (\delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ri} \\
&= \Delta L^2 - \Delta L^2 + 2 \cdot (\Delta \mathbf{x}_i^n)^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ri} + (\delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ri} \\
&= 2 \cdot (\Delta \mathbf{x}_i^n)^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ri} + (\delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ri}
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Solucionando a equação de segundo grau 2.71, obtém-se o valor do deslocamento incremental iterativo ($\delta \lambda_i$), necessário à solução da equação 2.60 que rege o processo corretor do método de comprimento de arco. Entretanto, existe a possibilidade da resolução da equação 2.71 fornecer duas raízes diferentes, ou seja, dois valores diferentes para o deslocamento incremental iterativo. A estratégia proposta neste trabalho para tratar esse caso específico consiste em impor a seguinte condição:

$$(\Delta \mathbf{x}_{i+1}^n)^T (\Delta \mathbf{x}_i^n) > 0 \quad \rightarrow \quad (\Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_{Ri} + \delta \lambda_i \delta \mathbf{x}_{Ti})^T (\Delta \mathbf{x}_i^n) > 0 \tag{2.75}$$

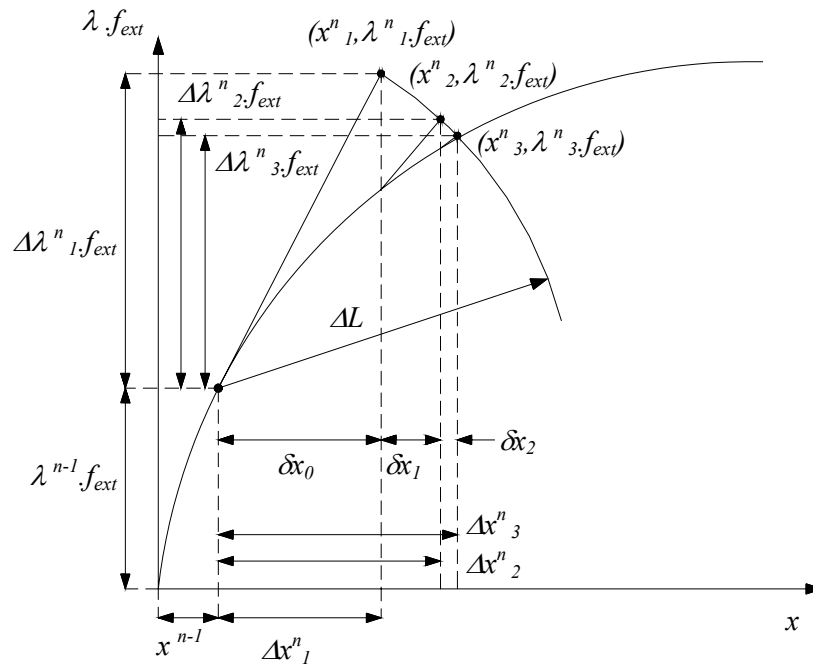
A restrição expressa na equação 2.75 condiciona que o deslocamento incremental iterativo seja sempre progressivo, evitando que a solução obtida possa causar um processo de regressão na trajetória de equilíbrio. No caso em que ambas as raízes atendam a restrição da equação 2.75, opta-se por escolher aquela que mais se aproxime da solução linear dada por :

$$\delta \lambda_i^{\text{linear}} = \frac{-a_3}{a_2} \tag{2.76}$$

A equação 2.54, na qual se baseia a hipótese fundamental do método de comprimento de arco, leva consigo a presença do parâmetro de ponderação b . Este parâmetro é responsável por produzir modalidades diferentes do método. Caso o valor de b seja igual a um ($b = 1$), o método descrito anteriormente recebe o nome de comprimento de arco esférico. Caso o valor de b seja igual a zero ($b = 0$), recebe o nome de comprimento de arco cilíndrico.

A representação geométrica do comportamento do método de comprimento de arco esférico durante as sucessivas iterações na busca da trajetória de equilíbrio é expressa na Figura 2.14, onde o centro da circunferência de raio ΔL , representada pela equação 2.54, é posicionado no ponto de equilíbrio do incremento anterior.

Figura 2.14 – Método de comprimento de arco esférico



Fonte: (Menin, 2006)

2.4.2 Método de comprimento de arco cilíndrico

Como citado anteriormente a diferença entre os métodos de comprimento de arco esférico e cilíndrico consiste no valor adotado para o parâmetro de ponderação b . A formulação do método do comprimento de arco cilíndrico é obtida adotando-se o parâmetro de ponderação b igual a zero ($b = 0$). Na prática isso significa que nesta modalidade do método não são considerados os efeitos advindos da parcela de carregamento nos processos de predição e correção. [Crisfield \(1991\)](#), afirma que é pequena a influência da parcela de carregamento e que a consideração de $b = 0$ leva um bom funcionamento do algoritmo para grande variedade de problemas práticos.

Levando em conta o valor nulo do parâmetro de ponderação a equação de predição torna-se:

$$\Delta\lambda^n = \pm \frac{\Delta L}{\sqrt{(\Delta\mathbf{x}_T)^T \cdot (\Delta\mathbf{x}_T)}} \quad (2.77)$$

Onde a definição do sinal da solução da equação 2.77 é definido como sendo o mesmo da equação 2.78, ou seja, caso o resultado da equação 2.78 seja positivo o sinal da predição dada pela equação 2.77 será positivo, e vice-versa.

$$\text{sinal} = (\Delta\mathbf{x}_T)^T \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}} = (\Delta\mathbf{x}_T)^T \cdot \mathbf{K} \cdot \Delta\mathbf{x}_T \quad (2.78)$$

Os coeficientes a_1 , a_2 e a_3 , da equação de segundo grau utilizada para determinar o fator de carga iterativo $\delta\lambda_i$ no processo de correção do método, assumem os seguintes formatos:

$$a_1 \cdot (\delta\lambda_i)^2 + a_2 \cdot \delta\lambda_i + a_3 = 0 \quad (2.79)$$

Onde:

$$a_1 = (\delta\mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \delta\mathbf{x}_{Ti} \quad (2.80)$$

$$a_2 = 2 \cdot (\Delta\mathbf{x}_i^n + \delta\mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \delta\mathbf{x}_{Ti} \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} a_3 &= (\Delta\mathbf{x}_i^n + \delta\mathbf{x}_{Ri})^T \cdot (\Delta\mathbf{x}_i^n + \delta\mathbf{x}_{Ri}) - \Delta L^2 \\ &= (\Delta\mathbf{x}_i^n)^T \cdot \Delta\mathbf{x}_i^n - \Delta L^2 + 2 \cdot (\Delta\mathbf{x}_i^n)^T \cdot \delta\mathbf{x}_{Ri} + (\delta\mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \delta\mathbf{x}_{Ri} \\ &= \Delta L^2 - \Delta L^2 + 2 \cdot (\Delta\mathbf{x}_i^n)^T \cdot \delta\mathbf{x}_{Ri} + (\delta\mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \delta\mathbf{x}_{Ri} \\ &= 2 \cdot (\Delta\mathbf{x}_i^n)^T \cdot \delta\mathbf{x}_{Ri} + (\delta\mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \delta\mathbf{x}_{Ri} \end{aligned} \quad (2.82)$$

No caso da solução da equação 2.79 originar duas raízes diferentes, segue-se o mesmo procedimento de escolha da solução adequada explanado anteriormente para o método de comprimento de arco esférico

2.4.3 Tamanho do comprimento de arco

O princípio de escolha do tamanho do comprimento de arco está relacionado ao fato de se desejar que o mesmo possua comprimento menor em regiões com comportamento não linear, e comprimento maior em regiões com presença reduzida de não-linearidades. Visando este princípio [Crisfield \(1991\)](#) propõe o seguinte critério:

$$\Delta L^n = \Delta L^{n-1} \sqrt{\frac{I_d^n}{I_d^{n-1}}} \quad (2.83)$$

Onde:

- $\Delta L^{(n-1)}$ é o comprimento de arco no passo n-1;
- $I^{(n-1)}$ é o número de iterações necessárias para convergir no passo n-1;
- I_d^n é o número de iterações desejadas no passo n, sendo $I_d^n \approx 3$ conforme [Crisfield \(1991\)](#);
- ΔL^n é o comprimento de arco a ser utilizado no passo n;

Em situações onde a equação 2.79, presente como solução de raízes complexas, significa que a circunferência, expressa pela equação 2.54, não é capaz de interceptar a trajetória de equilíbrio. Essa incapacidade está relacionada ao fato do comprimento de arco estar relativamente grande. A solução neste caso é reduzir o comprimento de arco da seguinte forma:

$$\Delta L^{novo} = \frac{1}{2} \Delta L \quad (2.84)$$

2.5 Dinâmica não-linear

Se tratando de dinâmica, o equilíbrio de forças generalizado é obtido levando-se em conta quatro forças inerentes ao corpo analisado. Estas são, elástica, de amortecimento, inercial e externa aplicada ao corpo. A força elástica é proporcional à deformação do corpo, a força de amortecimento é relativa à velocidade com que o corpo se move e a força inercial está ligada a aceleração do corpo. Já a externa é a força que provoca deformação, velocidade e aceleração no corpo. De maneira que ao se aplicar a 2ª Lei de Newton a um corpo sujeito às quatro forças descritas, obtém-se a seguinte equação de equilíbrio:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t) \quad (2.85)$$

Onde m é a massa do corpo, c o amortecimento, k a rigidez, $f(t)$ o vetor de forças externas, e u , \dot{u} e \ddot{u} são respectivamente o deslocamento, a velocidade e a aceleração do corpo. De maneira genérica o comportamento dinâmico de qualquer estrutura discretizada em elementos finitos pode ser expresso pela equação do movimento (Equação 2.86) em formato matricial, representando os n graus de liberdade presentes na mesma, da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t) \quad (2.86)$$

Onde \mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{C} a matriz de amortecimento, \mathbf{K} a matriz de rigidez, $\mathbf{f}(t)$ o vetor de forças externas, e \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{u}}$ e $\ddot{\mathbf{u}}$ são respectivamente os vetores de deslocamento, velocidade e aceleração da estrutura.

2.5.1 Equação não-linear do movimento

Diante da dinâmica não-linear, no caso a geométrica, a Equação 2.87 sofre alterações em sua matriz de rigidez. De modo que a mesma passa a ser composta por duas parcelas. Uma matriz material (\mathbf{K}_M) que leva em conta a rigidez elástica da estrutura e a outra uma matriz geométrica (\mathbf{K}_G) que considera os efeitos da não linearidade geométrica. Ambas as

matrizes são desenvolvidas e apresentadas na seção 2.3.7 pelas Equações 2.49, 2.50, 2.51 e 2.52. Assim a equação não-linear do movimento é dada por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G)\mathbf{u} = \mathbf{f}(t) \quad (2.87)$$

2.5.2 Matriz de massa

A matriz de massa correspondente ao elemento de viga 2D pode ser obtida por meio do princípio dos trabalhos virtuais (PTV). Este estabelece que, em um corpo em estado de equilíbrio deformado, o trabalho gerado pelas forças externas em seus pontos de deslocamento é igual ao trabalho gerado pelas tensões internas nos locais de deformação do corpo (AZEVEDO, 2011). Em foco primeiramente no trabalho externo, divide-se as forças que o compõe em três grupos distintos, concentradas, de superfície e de volume. De modo que o mesmo, de maneira generalizada é descrito pela seguinte equação:

$$W_{ext} = \Delta(x)^T \mathbf{p}(x) + \int \Delta(x)^T \rho \ddot{\Delta}(x) dV + \int \Delta(x)^T \mathbf{s}(x) dA \quad (2.88)$$

Onde $\Delta(x)$ representa o vetor deslocamento virtuais nas coordenadas x , $\mathbf{p}(x)$ é o vetor de força concentrada, $\rho \ddot{\Delta}(x)$ é o vetor de força de inércia por unidade de volume e $\mathbf{s}(x)$ é o vetor de força por unidade de superfície. As três parcelas à direita da Equação 2.88 representam respectivamente o trabalho exercido pelas forças concentradas, de superfície e de volume. Segundo Azevedo (2011) o trabalho interno pode ser obtido com base no conceito de energia de deformação, onde o mesmo é dado pela soma das energias de deformação por unidade de volume, expresso pela seguinte equação:

$$W_{int} = \int \epsilon(x)^T \sigma(x) dV \quad (2.89)$$

Onde $\epsilon(x)$ é o vetor de deformação virtual associado a $\Delta(x)$ e $\sigma(x)$ é o vetor de tensões. Valendo-se do princípio dos trabalhos virtuais e igualando as Equações 2.88 e 2.89, obtém-se a seguinte equação:

$$\Delta(x)^T \mathbf{p}(x) + \int \Delta(x)^T \rho \ddot{\Delta}(x) dV + \int \Delta(x)^T \mathbf{s}(x) dA = \int \epsilon(x)^T \sigma(x) dV \quad (2.90)$$

O sucesso da resolução da Equação 2.90 está ligado ao fato do domínio de integração ser bem definido ou não. Dessa forma em corpos com geometrias mais complexas, ou seja, domínios mal definidos para a integração, surge a possibilidade de dividir os mesmos em partes geométricas mais simples. Nesse contexto surge o conceito de método dos elementos finitos. Onde o corpo em análise é discretizado em elementos de domínio bem definido, os quais interligados por pontos discretos denominados nós, compõe o todo. Para tanto se faz necessário obter não só os deslocamentos dos nós, mas também como ao longo de cada

elemento. A determinação dos deslocamentos ao longo do elemento pode ser feita por meio de função de interpolação $\mathbf{N}(x)$, comumente denominada na literatura de função de forma do elemento. Assim os deslocamentos no elemento são descritos pela seguinte equação:

$$\Delta(x) = \mathbf{N}(x)\Delta \quad (2.91)$$

Substituindo as relações deslocamento-deformação ($\epsilon(x) = \mathbf{B}\Delta$), tensão-deformação ($\sigma = \mathbf{D}\epsilon$) e Equação 2.91, na Equação 2.90 e realizando algebrismos, obtém-se:

$$\Delta^T \left[\mathbf{N}(x)^T \mathbf{p}(x) + \sum \int \mathbf{N}(x)^T \rho \ddot{\Delta}(x) dV + \sum \int \mathbf{N}(x)^T \mathbf{s}(x) dA \right] = \Delta^T \left[\int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right] \quad (2.92)$$

Considerando a Equação 2.92, as parcelas à esquerda representam os diferentes tipos de forças atuando sobre o corpo. Já a parcela à direita representa o produto entre a rigidez e os deslocamentos nodais do corpo. Tomando como base que a força de inércia é uma força de volume, esta deve ser representada por uma expressão a seguir:

$$\mathbf{f}_{inercial} = \sum \int \mathbf{N}(x)^T \rho \ddot{\Delta}(x) dV \quad (2.93)$$

Derivando-se a Equação 2.91 duas vezes em relação ao tempo e substituindo a mesma na Equação 2.93, obtém-se:

$$\mathbf{f}_{inercial} = \sum \int \mathbf{N}(x)^T \rho \mathbf{N}(x) \ddot{\Delta} dV \quad (2.94)$$

Organizando a Equação 2.94 de modo a separar aceleração ($\ddot{\Delta}$) que não depende do volume, tem-se:

$$\mathbf{f}_{inercial} = \sum \left(\int \mathbf{N}(x)^T \rho \mathbf{N}(x) dV \right) \ddot{\Delta} \quad (2.95)$$

Fazendo uma analogia à 2ª Lei de Newton com a Equação 2.95, percebe-se que a matriz de massa do elemento é dada pela seguinte parcela:

$$\mathbf{M}^e = \int \mathbf{N}(x)^T \rho \mathbf{N}(x) dV \quad (2.96)$$

De acordo com [Cavalcante \(2010\)](#), delimitando o domínio de integração ao do elemento de viga 2D e considerando suas respectivas funções de forma, a matriz de massa do

elemento é dada por:

$$\mathbf{M}^e = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

Onde m é a massa por unidade de comprimento L do elemento. A matriz de massa da estrutura é dada pela superposição da matriz massa nodal com a matriz de massa do elemento. Onde a primeira considera as massas concentradas nos nós da estrutura e a segunda considera as massas distribuídas ao longo de cada elemento.

2.5.3 Integração das equações não lineares de movimento no tempo

A resolução de sistemas de equações diferenciais no campo da análise dinâmica pode ser obtido por meio dos métodos de superposição modal ou de integração direta. Em problemas dinâmicos cujos sistemas sejam compostos por equações diferenciais lineares, podem ser aplicadas ambas as metodologias citadas. Entretanto quando o problema a ser modelado produz um sistema de equações diferenciais não lineares, utiliza-se o método de integração direta (QUEIROZ *et al.*, 2010). No trabalho em questão, são analisados sistemas de equações diferenciais não-lineares que descreve o equilíbrio dinâmico não-linear geométrico. Dessa forma, a metodologia utilizada para solução dos mesmos é a integração direta. Dentre o método de integração direta ainda existem duas vertentes. Uma se trata de um processo de integração explícito, o qual tem como característica o fato de que a resolução do sistema é baseada na condição de equilíbrio do instante anterior ao analisado, ou seja, não requer valores do instante atual em análise. Já a outra, é um processo de integração implícito, onde a resolução é fundamentada na condição de equilíbrio do instante atual, ou seja, requer valores do instante atual em análise. Neste trabalho, a solução do sistema de equações diferenciais é obtida pela integração temporal das equações não lineares do movimento, por meio do método de integração implícita da família de Newmark. Segundo Muñoz (2015) no campo da dinâmica estrutural o método implícito de Newmark é um dos mais utilizados, devido a estabilidade e simplicidade de implementação. O método tem origem na expansão em série de Taylor dos campos de deslocamento e velocidade obtendo as seguintes expressões para o passo de tempo $n+1$:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{u}}_n + \beta \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \right] \quad (2.98)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t [(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}] \quad (2.99)$$

Onde os parâmetros γ e β definem a estabilidade e precisão do método, podendo variar conforme a aproximação para a variação da aceleração (MUNOZ, 2015). Segundo Silva (2013) a predição do deslocamento e da velocidade no instante de tempo n+1 pode ser definida a partir das Equações 2.98 e 2.99, como descrito a seguir:

$$\mathbf{u}_{n+1}^* = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{\mathbf{u}}_n \Delta t^2 \quad (2.100)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^* = \dot{\mathbf{u}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (2.101)$$

Substituindo as Equações 2.100 e 2.101 nas Equações 2.98 e 2.99 respectivamente, pode-se expressar o deslocamento e a velocidade no instante n+1 em função de deslocamento e velocidade preditos.

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^* + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (2.102)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^* + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (2.103)$$

Isolando-se a Equação 2.102 em função do termo de aceleração e substituindo-o na Equação 2.103, a aceleração e velocidade no instante n+1 podem ser descritas como:

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^* + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) \quad (2.104)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) \quad (2.105)$$

Dessa forma, os deslocamentos, velocidades e acelerações no instante n+1 para iteração k+1, levando em conta a correção $\Delta \mathbf{u}^k = (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*)$, são definidos por:

$$\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{u}^k \quad (2.106)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{k+1} = \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^k + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{u}^k \quad (2.107)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{k+1} = \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^k + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{u}^k \quad (2.108)$$

Substituindo as Equações 2.105 na equação não-linear do movimento, considerando que o movimento seja não amortecido, tem-se:

$$\mathbf{M} \cdot \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) \right) + \mathbf{f}_{\text{int}} = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (2.109)$$

Sabendo que a equação 2.109 possui termos que advêm de uma solução predita, a mesma possui forças desequilibradas, gerando resíduo conforme expresso a seguir:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{M} \cdot \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} (\Delta \mathbf{u}^k) \right) + \mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} \neq 0 \quad (2.110)$$

Para encontrar o equilíbrio de forças, ou seja, $r(\mathbf{u}_{n+1}) = 0$, é necessário fazer uso de uma estratégia incremental-iterativa. Neste tipo de estratégia divide-se o tempo total de análise em incrementos de tempo. A cada incremento de tempo, busca-se determinar o equilíbrio de força por meio de um processo iterativo. Afim de se determinar uma função de resíduo para a próxima iteração $k + 1$, expande-se a condição de forças equilibradas, $\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}) = 0$, por meio da série de Taylor em torno do valor deslocamentoda iteração k , \mathbf{u}_{n+1}^k , obtendo-se:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}) = \mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^k) + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \Delta \mathbf{u}^k + \mathcal{O}(\Delta \mathbf{u}^k)^2 = 0 \quad (2.111)$$

Ao impor a condição de que o resíduo na iteração $k+1$ seja igual a zero, $r(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}) = 0$, a equação 2.111 torna-se:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \Delta \mathbf{u}^k = -\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^k) \quad (2.112)$$

Da equação 2.112 conclui-se que a matriz iterativa é dada por:

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \quad (2.113)$$

Derivando a equação 2.110 em relação ao deslocamento, \mathbf{u}_{n+1} , tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}^k}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \quad (2.114)$$

Substituindo a equação 2.113 na equação 2.114, obtem-se:

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}^k}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \quad (2.115)$$

Considerando que a derivada das forças internas em relação ao deslocamento, \mathbf{u}_{n+1} , é a matriz de rigidez tangente na iteração k , $\frac{\partial \mathbf{f}_{int}^k}{\partial \mathbf{u}_{n+1}}$, a matriz tangente iterativa pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \mathbf{K}_{n+1}^k \quad (2.116)$$

Vale ressaltar que a matriz de rigidez tangente, \mathbf{K}_{n+1}^k , expressa na equação 2.116 é composta pela matriz de rigidez material e pela matriz de rigidez geométrica, descritas na seção 2.3.7. Para movimento não amortecido, a parcela referente à matriz de massa na equação representa a matriz dinâmica, dada por:

$$\hat{\mathbf{K}}_{Dyn, n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \quad (2.117)$$

De modo que:

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1} = \mathbf{K}_{Dyn, n+1} + \mathbf{K}_{n+1}^k \quad (2.118)$$

A correção do resíduo $\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1})$ é feita na fase iterativa de correção no método de Newmark, o qual faz uso da seguinte norma para avaliar a convergência:

$$\frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1})\|}{\|\mathbf{f}_{int}\|} \leq tol \quad (2.119)$$

Onde tol é o valor de tolerância prescrito para o erro.

2.6 Implementação Computacional

Nesta seção são apresentados os fluxogramas dos algoritmos de resolução do Método dos Elementos Finitos para análise não-linear geométrica estática (NLG) e dinâmica (NLD) nas Figuras 2.15 e 2.16 respectivamente. Para maiores informações com relação ao Método dos Elementos Finitos Linear estático e dinâmico, podem ser obtidas consultando [Brebbia e Ferrante \(1986\)](#). Informações relativas ao método de comprimento de arco cilíndrico, implementado no MEF não linear geométrico estático, podem ser obtidas em [Menin \(2006\)](#). Mais informações referentes ao método de integração direta de Newmark, implementado no MEF não linear geométrico dinâmico, podem ser obtidas em [Taylor \(2005\)](#).

Figura 2.15 – Fluxograma MEF NLG

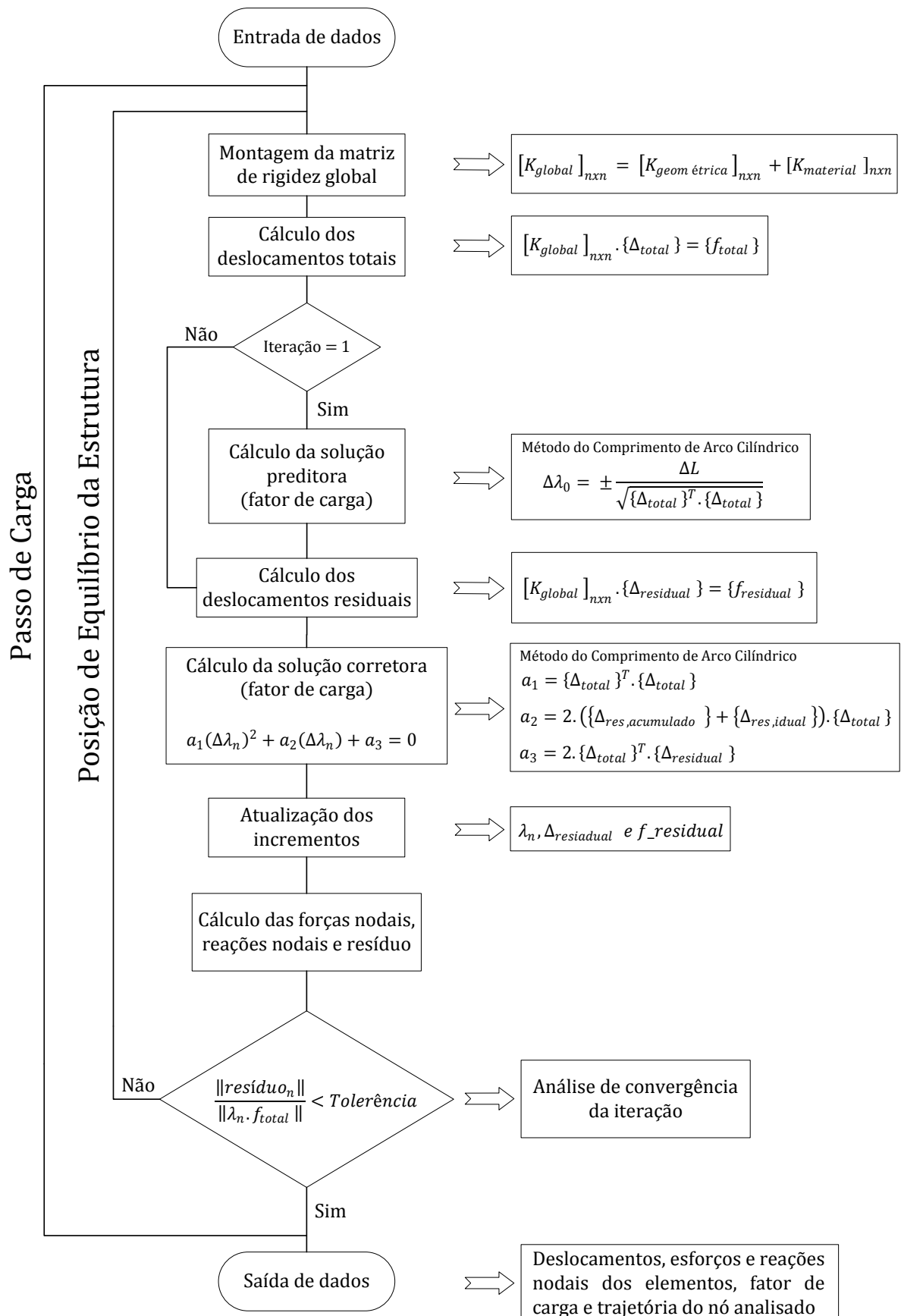
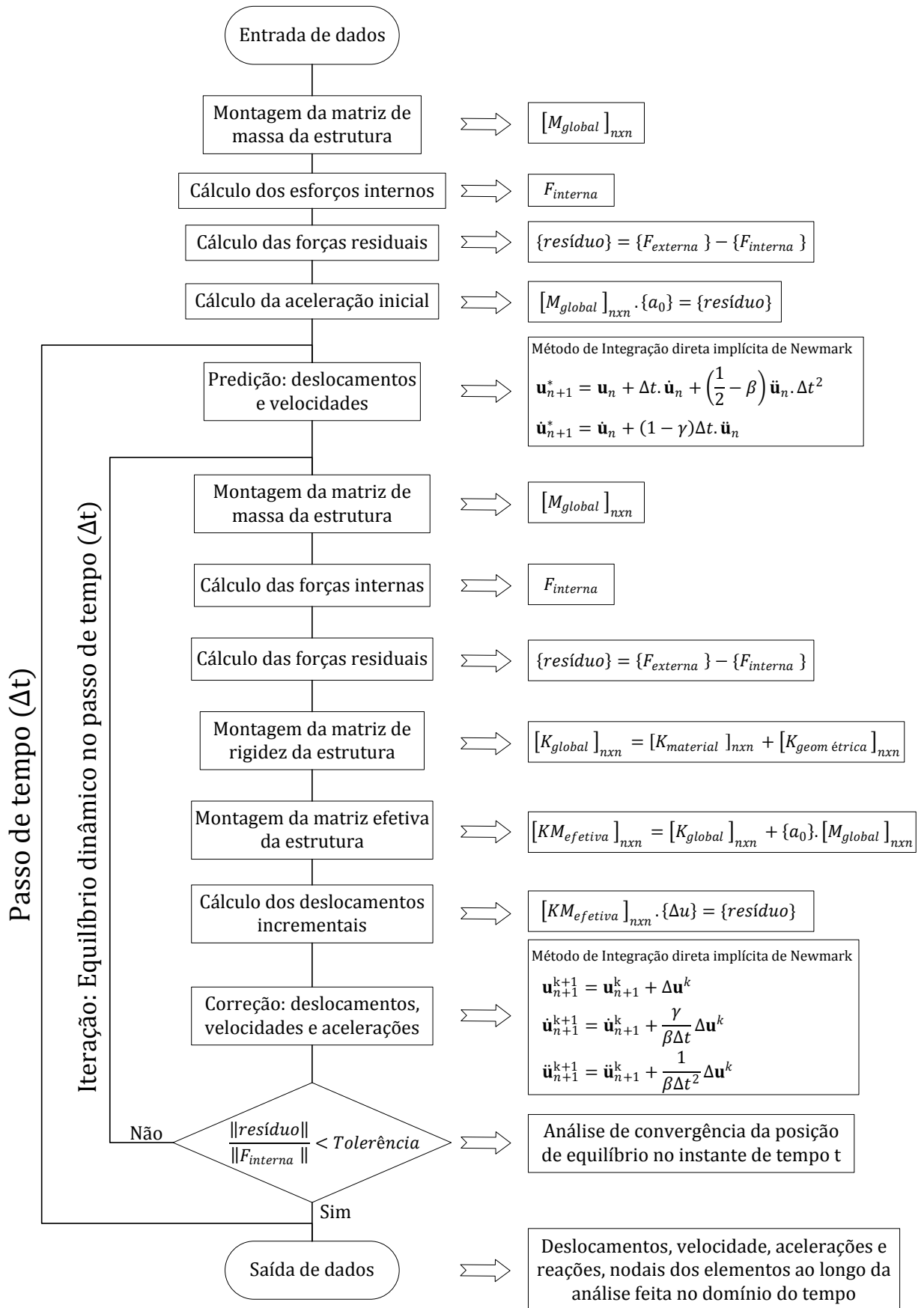


Figura 2.16 – Fluxograma MEF NLD



Capítulo 3

SOLUÇÕES NUMÉRICOS ESTÁTICOS

Nesta seção são apresentados exemplos numéricos estáticos de estruturas planas contendo forte não linearidade geométrica, no intuito de comprovar a eficácia da formulação corrotacional descrita neste trabalho em lidar com tal não linearidade. As estruturas dos exemplos são constituídas de elementos de vigas planas, baseados no modelo de Euler-Bernoulli, segundo a descrição cinemática corrotacional apresentada no presente estudo.

Para tanto implementou-se um programa computacional em linguagem *Matlab*®, denominado "*PPNLG.m*", desenvolvido sob os seguintes aspectos: utiliza a formulação corrotacional para elemento de viga plana, e determina o incremento do fator de carga através do método de comprimento de arco cilíndrico. Vale ressaltar que o controle de carga-deslocamento feito pelo método de comprimento de arco cilíndrico, permite que o programa computacional seja capaz de ultrapassar pontos limites na trajetória de equilíbrio e obter a continuação da resposta, identificando pontos de inversão de equilíbrio, conhecidos como "*Snap-Through*" e "*Snap-Back*".

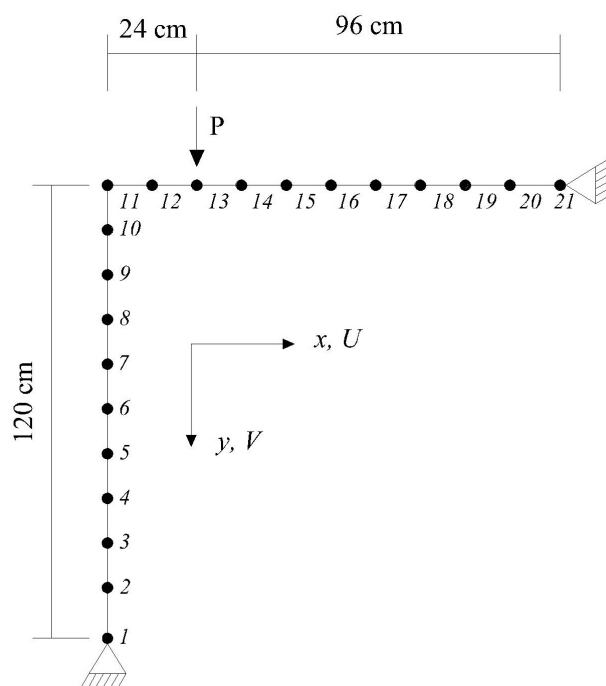
Os exemplos executados nesta seção foram retirados dos trabalhos de [Hsiao e Hou \(1987\)](#), [Monteiro \(2004\)](#) e [Oran e Kassimali \(1976\)](#). Na resolução dos exemplos os dois primeiros autores empregam formulação corrotacional, enquanto que no trabalho de Oran e Kassimali (1975) utiliza método de tipo viga-coluna geral.

3.1 Pórtico de Lee

O pórtico de Lee é uma estrutura composta basicamente por dois elementos, um pilar e uma viga, onde juntos possuem o formato da letra "L" de cabeça para baixo. Esta estrutura foi estudada por [Hsiao e Hou \(1987\)](#) quanto aos efeitos de não linearidade geométrica por meio de uma formulação corrotacional. Neste estudo tanto o pilar quanto a viga da estrutura

foram discretizados em 10 elementos finitos de vigas planas, em comprimentos equivalentes de 12 cm . As propriedades geométricas e materiais empregadas na estrutura foram: área da seção transversal do elemento igual a 6 cm^2 , módulo de elasticidade longitudinal igual a 720 tf/cm^2 e momento de inércia igual a 2 cm^4 . As dimensões, vinculações, configuração de carregamento e divisão de elementos na estrutura, são expressos na Figura 3.1. O nó monitorado no pórtico de Lee foi o número 13. Para esta análise adotou 1.10^{-5} como tolerância da norma de resíduo e 60 incrementos de carga.

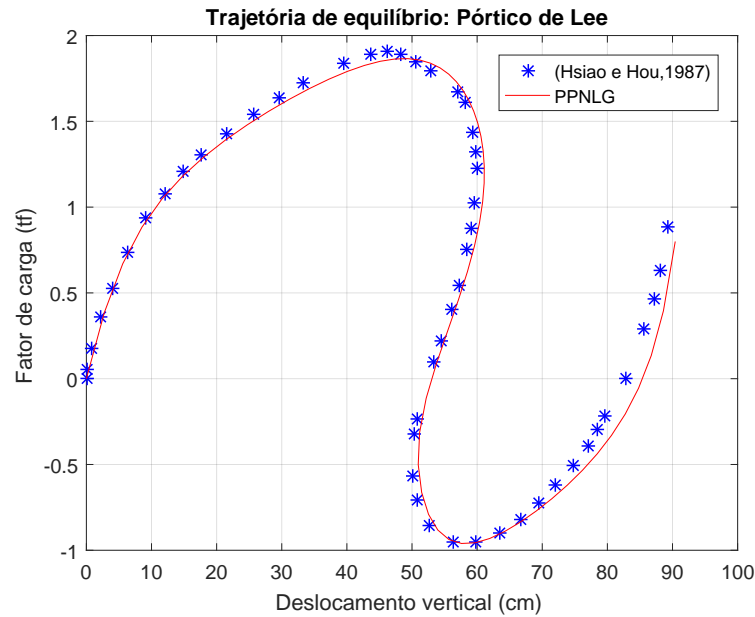
Figura 3.1 – Pórtico de Lee



Fonte: o Autor

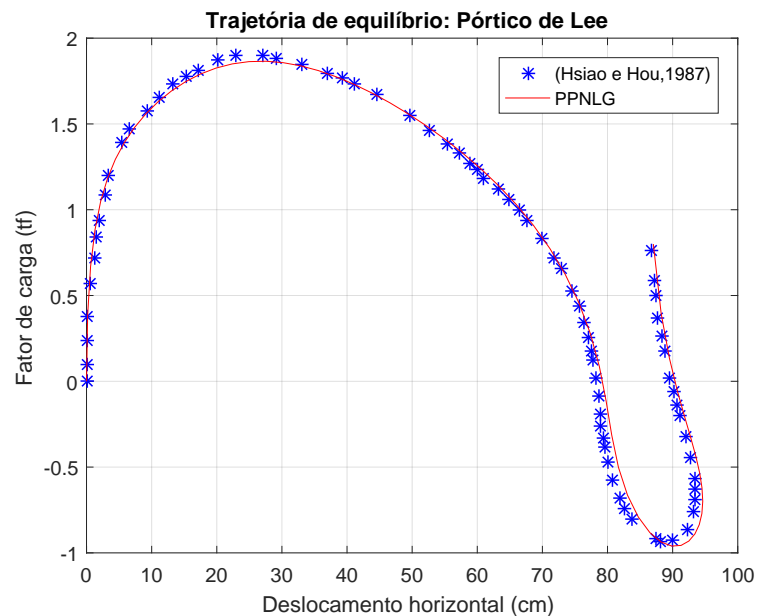
As Figuras 3.2 e 3.3 apresentam as trajetórias de equilíbrio do nó 13 com relação ao deslocamento vertical e horizontal respectivamente. Na trajetória de equilíbrio da Figura 3.2 pode-se observar o fenômeno de inversão de equilíbrio “*Snap-Back*”. Onde os efeitos de não linearidade e a diminuição da rigidez se acentuam, devido ao aumento de carga, até que a mesma seja nula e a estrutura se torne instável. Posteriormente a estrutura assume uma nova posição de equilíbrio, seguida de uma diminuição transitória de deslocamento. Já na Figura 3.3 observa-se o fenômeno de inversão de equilíbrio “*Snap-Through*”. Análogo ao “*Snap-Back*”, porém diferentemente nesse fenômeno a estrutura sofre um aumento brusco de deslocamento antes de atingir a nova posição de equilíbrio. Esses fenômenos tem seu comportamento representado graficamente na Figura 2.13. Analisando ambas as trajetórias de equilíbrio se percebe que a solução determinada com a formulação proposta neste trabalho se encontra em boa concordância com os resultados da bibliografia a qual está sendo comparada.

Figura 3.2 – Trajetória de equilíbrio do pórtico de Lee: Vertical



Fonte: o Autor

Figura 3.3 – Trajetória de equilíbrio do pórtico de Lee: Horizontal



Fonte: o Autor

Na Figura 3.2 pode-se observar que a trajetória de equilíbrio vertical apresenta dois “pontos críticos”. Estes pontos estão localizados onde a tangente da trajetória de equilíbrio é igual a zero, ou seja, pontos onde pode-se traçar uma reta tangente horizontal. O significado de tais pontos no comportamento da estrutura durante a evolução da trajetória de equilíbrio

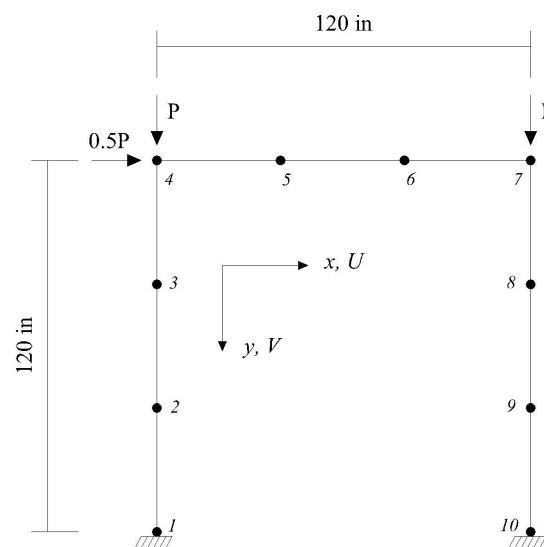
indica a perda total de rigidez da mesma, tornando-os pontos de instabilidade. Na trajetória em questão após o primeiro ponto crítico a estrutura se deforma até atingir uma nova posição de equilíbrio, a qual é assumida no segundo ponto crítico, onde em seguida recupera gradativamente sua rigidez em sua nova configuração.

A trajetória de equilíbrio horizontal do pórtico de Lee, Figura 3.3, semelhantemente à vertical apresenta dois pontos críticos, intercalados por uma alteração da posição de equilíbrio da estrutura, onde posteriormente ao segundo ponto crítico volta a resistir os carregamentos impostos.

3.2 Portal Frame

Este pórtico conhecido na literatura como *portal frame* foi analisado segundo [Oran e Kassimali \(1976\)](#) e posteriormente por [Hsiao e Hou \(1987\)](#), ambos no intuito de validar formulações capazes de tratar os efeitos da não linearidade geométrica. Esta estrutura é composta por dois pilares e uma viga. Neste estudo, cada elemento do pórtico foi discretizado em 3 elementos em comprimentos equivalentes, totalizando um total de 9 elementos de 40 in cada que compõem a estrutura. As propriedades mecânicas empregadas nos elementos foram as seguintes: área da seção transversal de $11,77 \text{ in}^2$, momento de inércia de $310,10 \text{ in}^4$ e módulo de elasticidade longitudinal de 30.000 ksi . As dimensões, vinculações, configurações de carregamentos e divisão de elementos na estrutura, podem ser observados na Figura 3.4. O nó monitorado neste exemplo foi o número 4. Para esta análise adotou 1.10^{-5} como tolerância da norma de resíduo e 100 incrementos de carga.

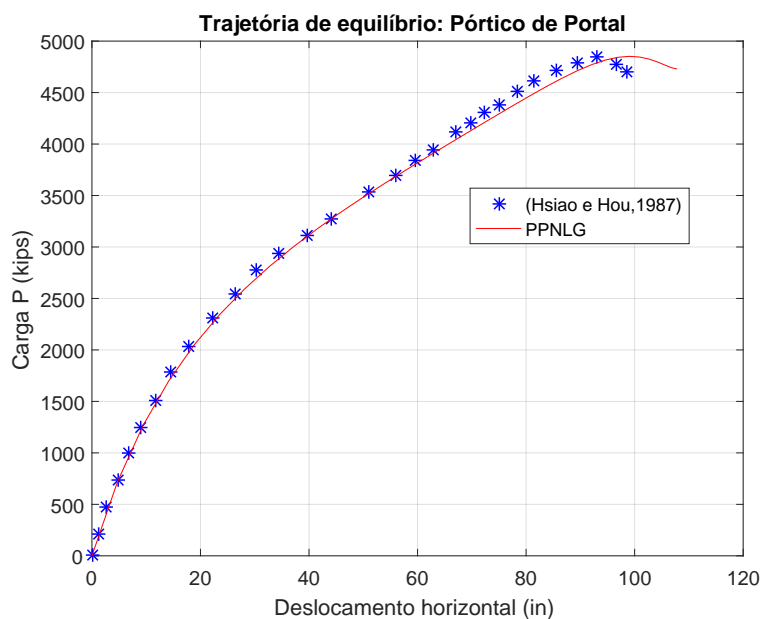
Figura 3.4 – Portal Frame



Fonte: o Autor

A Figura 3.5 exibe a trajetória de equilíbrio do nó 4 com relação ao deslocamento horizontal. No tocante da solução obtida pelo algoritmo implementado, ao se comparar com os resultados da bibliografia, verifica-se um desempenho razoável do mesmo. Onde de forma geral há boa concordância entre ambos os resultados, existindo alguma divergência ao final da trajetória de equilíbrio.

Figura 3.5 – Trajetória de equilíbrio do *portal frame*: Horizontal



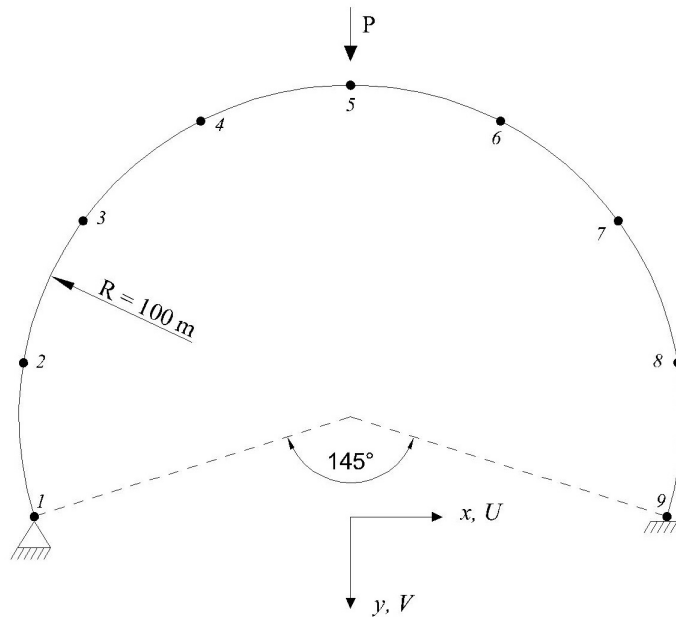
Fonte: o Autor

Ao longo da trajetória de equilíbrio descrita observa-se a existência de somente um ponto crítico (tangente horizontal), descrito graficamente como "ponto limite" pelas Figuras 2.12 e 2.13, localizado na parte final da mesma.

3.3 Arco Circular Não Achatado

Esta estrutura é formada por um arco de ângulo interno de 215° , cujos apoios são: fixo e engastado, da direita para esquerda, respectivamente. Em Monteiro (2004) o arco circular não achatado tem sua trajetória de equilíbrio analisada no intuito de avaliar a eficiência de uma formulação corrotacional em lidar com não linearidades geométricas desta estrutura. Neste trabalho o arco circular foi discretizado em 8 elementos de viga 2D, em comprimentos equidistantes. As propriedades mecânicas empregadas nos elementos foram as seguintes: área da seção transversal de $1,0 \text{ m}^2$, momento de inércia de $0,0833 \text{ m}^4$ e módulo de elasticidade longitudinal de 210 GPa . O raio de curvatura do arco, vinculações, configuração de carregamento e divisão de elementos na estrutura, podem ser observados na Figura 3.6. Na análise do arco circular não achatado o nó monitorado foi o número 5. Para esta análise adotou 1.10^{-5} como tolerância da norma de resíduo e 100 incrementos de carga.

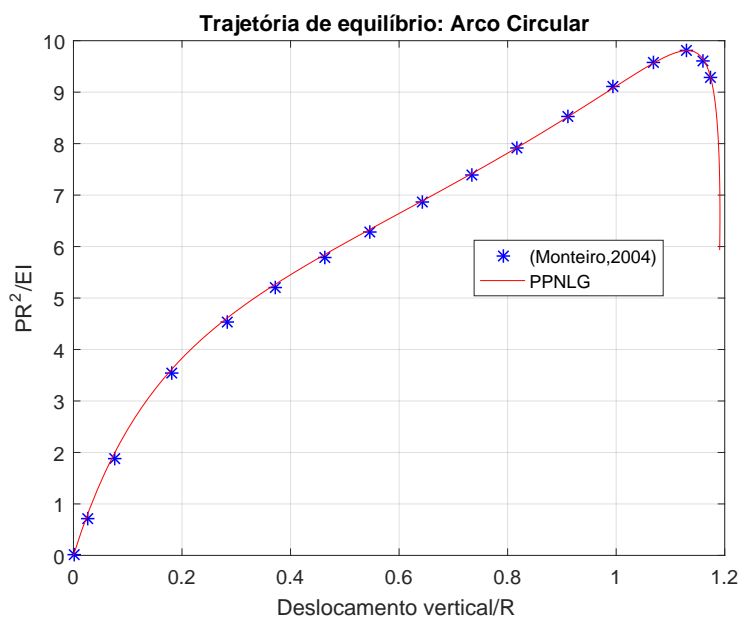
Figura 3.6 – Arco Circular Não Achatado



Fonte: o Autor

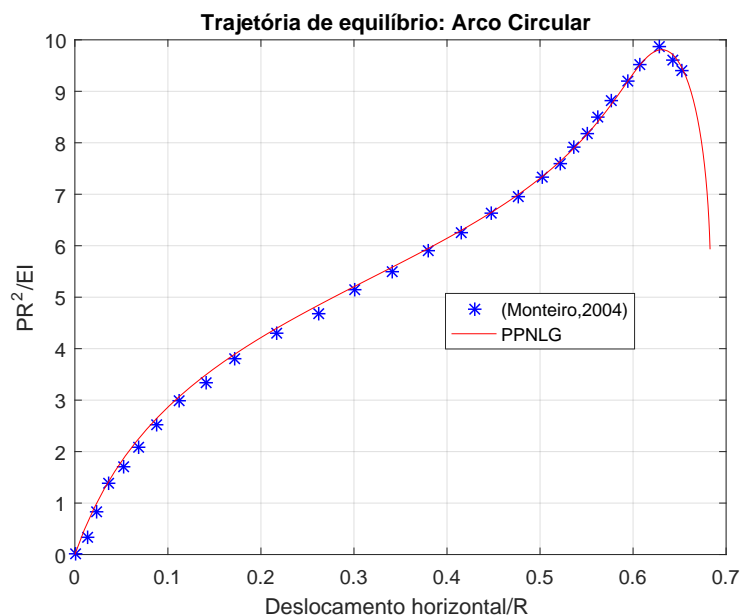
As Figuras 3.7 e 3.8 apresentam as trajetórias de equilíbrio do nó 5, com relação ao deslocamento vertical e horizontal, respectivamente, divididos pelo raio do arco “ R ”. Em ambas as trajetórias de equilíbrio se verifica a boa concordância da solução determinada pela formulação implementada, em comparação à que fora fornecida por Monteiro (2004).

Figura 3.7 – Trajetória de equilíbrio do arco circular: Vertical



Fonte: o Autor

Figura 3.8 – Trajetória de equilíbrio do arco circular: Horizontal



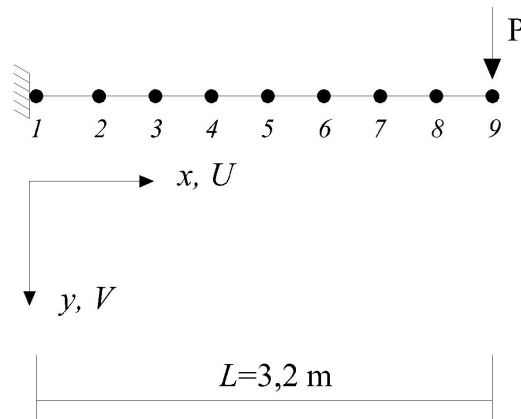
Fonte: o Autor

A aparição de pontos críticos ou limites (tangente horizontal), vide Figuras 2.12 e 2.13, é vista tanto na trajetória de equilíbrio horizontal quanto na vertical. Há a presença de um ponto crítico (tangente horizontal) em cada trajetória, localizados ao final das mesmas. Após a ocorrência da perda total de rigidez da estrutura (tangente horizontal), as duas trajetórias apresentam o comportamento de acomodação da estrutura, onde a mesma apresenta grandes deformações, podendo ser levada a uma nova configuração de equilíbrio ou o colapso da mesma.

3.4 Viga em Balanço

Esta estrutura consiste em uma viga engastada somente em sua extremidade à esquerda, sujeita a uma carga vertical aplicada a sua extremidade à direita. Este exemplo foi estudado por Monteiro (2004) no intuito de validar uma formulação corrotacional aplicada a pórticos espaciais, comparando os resultados obtidos à solução analítica do problema. A viga em balanço foi discretizada em 8 elementos, sendo estes de comprimentos iguais. As propriedades mecânicas aplicadas aos elementos deste exemplo foram: área da seção transversal de $0,01 \text{ m}^2$, momento de inércia de $0,00000833 \text{ m}^4$ e módulo de elasticidade longitudinal de 210 GPa . O comprimento “ L ” da viga, vinculações, configuração de carregamento e divisão de elementos na estrutura, são expressos na Figura 3.9. O nó monitorado na viga em balanço é o número 9. Para esta análise adotou 1.10^{-5} como tolerância da norma de resíduo e 300 incrementos de carga.

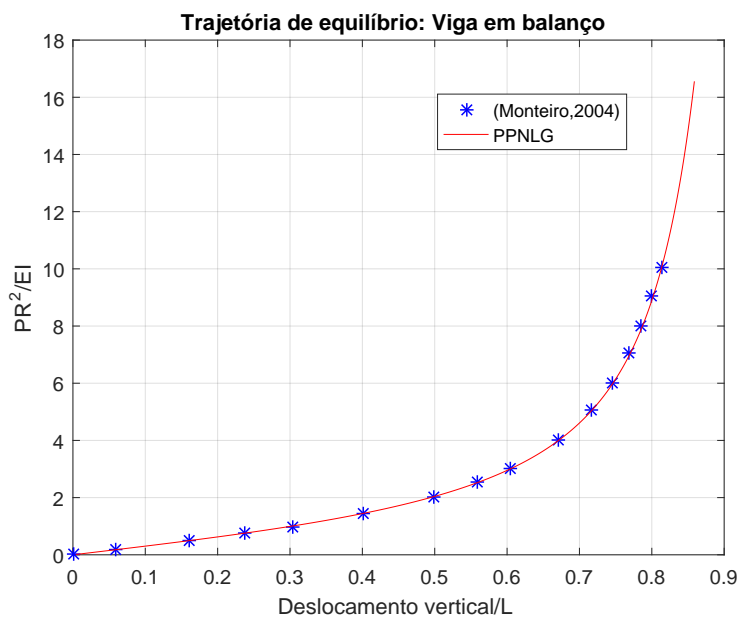
Figura 3.9 – Viga em balanço



Fonte: o Autor

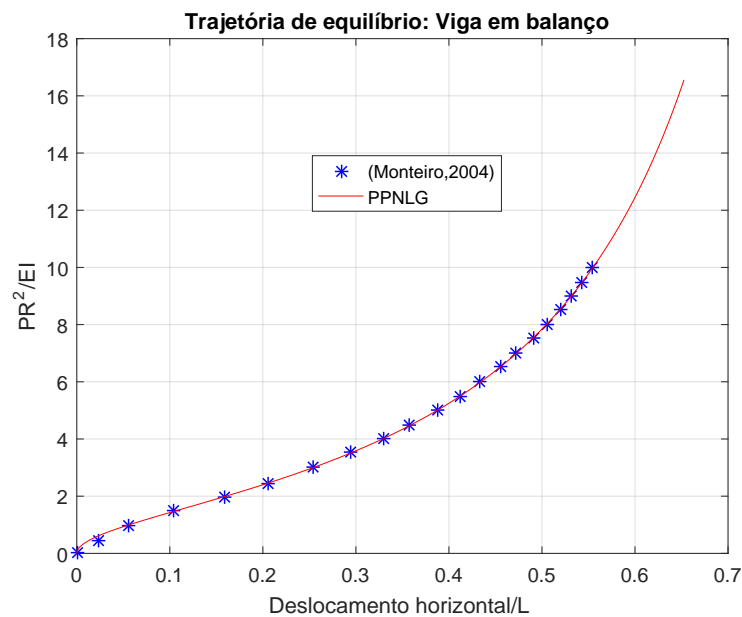
As Figuras 3.10 e 3.11 apresentam as trajetórias de equilíbrio do nó 9, com relação ao deslocamento vertical e horizontal, respectivamente, divididos pelo comprimento da viga “L”. Analisando as duas trajetórias a seguir, é possível notar que a solução obtida com a formulação implementada coincide com os resultados obtidos pela bibliografia a qual é comparada. Este exemplo envolve a ocorrência de deslocamentos consideráveis, visto que em suas trajetórias de equilíbrio vertical e horizontal, o deslocamento chega à mais de 80% e 50% respectivamente, do comprimento da viga. Tornando-o um exemplo interessante acerca da análise da capacidade da formulação em lidar com grandes deslocamentos. Em ambas as trajetórias não há a presença de pontos críticos (tangente horizontal)

Figura 3.10 – Trajetória de equilíbrio da viga em balanço: Vertical



Fonte: o Autor

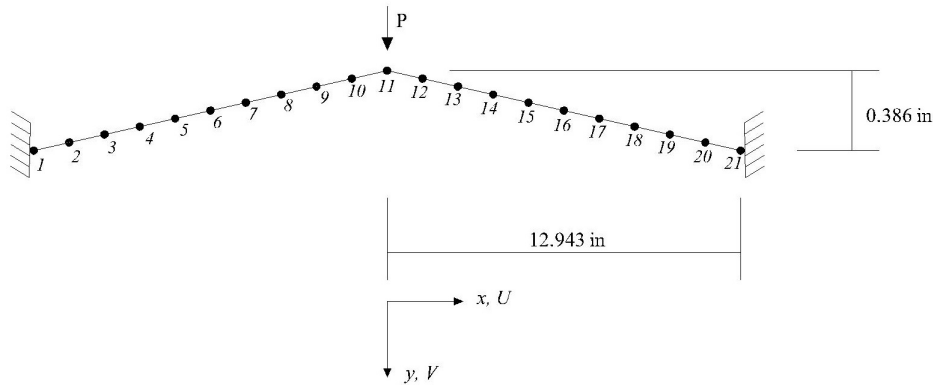
Figura 3.11 – Trajetória de equilíbrio da viga em balanço: Horizontal



Fonte: o Autor

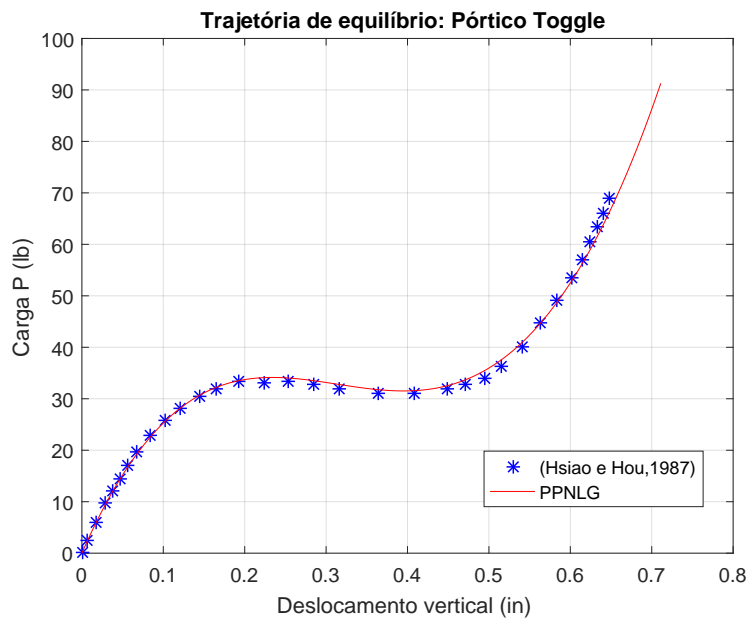
3.5 Pórtico Toggle

O Pórtico *Toggle* é uma estrutura formada por duas vigas inclinadas, de modo a configurar a letra “V” de cabeça para baixo. Esta estrutura dentre outras foi estudada por [Hsiao e Hou \(1987\)](#) através de uma formulação corrotacional. Neste trabalho cada viga que compõem o pórtico foi discretizada em 10 elementos de viga 2D, totalizando 20 elementos de dimensões equivalentes que descrevem toda estrutura. As propriedades mecânicas inerentes aos elementos de viga 2D utilizada foram: área da seção transversal de $0,183 \text{ in}^2$, momento de inércia de $0,0009 \text{ in}^4$ e módulo de elasticidade longitudinal de $10.300.000 \text{ psi}$. As dimensões do vão e da altura do pórtico, vinculações, configuração de carregamento e divisão de elementos na estrutura, são expressos na Figura 3.12. O nó avaliado neste exemplo durante a análise fora o número 11. Para esta análise adotou 1.10^{-5} como tolerância da norma de resíduo e 120 incrementos de carga.

Figura 3.12 – Portico *Toggle*

Fonte: o Autor

A Figura 3.13 exibe a trajetória de equilíbrio do nó 11 com relação ao deslocamento vertical. Examinado o resultado obtido se identifica boa concordância do mesmo quando comparado ao fornecido por Hsiao e Hou (1987).

Figura 3.13 – Trajetória de equilíbrio do pórtico *toggle*: Vertical

Fonte: o Autor

A presença de pontos críticos ou limites (tangente horizontal) ocorre duas vezes ao longo da trajetória, sendo intercalada pelo acomodamento da estrutura em uma nova posição de equilíbrio. Onde a partir desta passa a resistir novamente o carregamento até o final da trajetória de equilíbrio. Assim como no exemplo do Pórtico de Lee, a trajetória de equilíbrio do Pórtico Toggle apresenta o fenômeno de “Snap-Though”, que pode ser observado no trecho entre os dois pontos críticos (tangente horizontal) presentes na Figura 3.13.

Capítulo 4

SOLUÇÕES NUMÉRICAS DINÂMICAS

Nesta seção são apresentados exemplos numéricos dinâmicos de estruturas planas, no intuito de validar a eficácia da formulação corrotacional descrita e implementada neste trabalho em solucionar tais exemplos. As estruturas dos exemplos são constituídas de elementos de vigas planas, baseados no modelo de Euler-Bernoulli, segundo a descrição cinemática corrotacional apresentada neste estudo.

Para tanto implementou-se um programa computacional em linguagem Matlab®, denominado “PPNLD.m”, desenvolvido sob os seguintes aspectos: faz uso da formulação corrotacional para elemento de viga plana e obtém a solução das equações diferenciais não lineares de movimento por meio do método de integração implícita da família de Newmark.

Os exemplos estudados a seguir foram retirados dos trabalhos de [Hsiao e Jang \(1989\)](#), [Behdinan, Stylianou e Tabarrok \(1998\)](#) e [Silva \(2009\)](#). Na resolução dos exemplos os dois primeiros autores empregam a formulação corrotacional, já o último fez uso da formulação lagrangiana atualiza. Todos os autores basearam os elementos de viga 2D na hipótese de Euler-Bernoulli.

Os exemplos neste capítulo foram analisados por intermédio de dois tipos de diagramas, sendo o primeiro a resposta dinâmica transiente e o segundo o diagrama de plano fase, ambos no domínio do tempo.

A resposta dinâmica transiente é o gráfico o qual expressa o deslocamento de um ponto da estrutura, no sentido do grau de liberdade analisado, em função do tempo. Por intermédio da resposta dinâmica transiente foi validada a implementação feita neste trabalho (PPNLD), confrontando os resultados obtidos pela mesma aos de outras bibliografias.

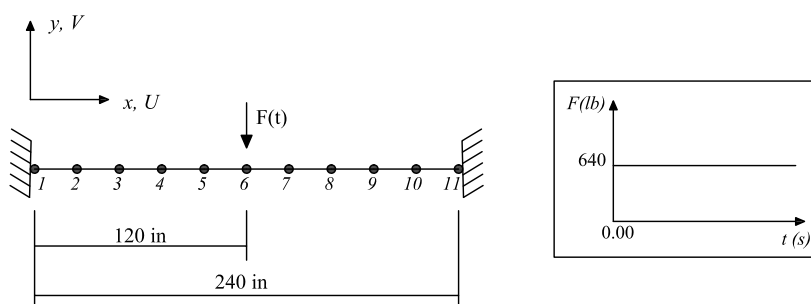
O diagrama de plano fase representa a resposta dinâmica no tempo sob a perspectiva dos deslocamentos e velocidades de um ponto da estrutura no decorrer da análise. Este diagrama, objetiva avaliar a periodicidade da resposta dinâmica, em função dos deslocamentos e velocidades no sentido do grau de liberdade monitorado do ponto em análise da

estrutura, por meio da detecção de “pontos fixos”. Pontos fixos podem ser definidos como pontos coincidentes no diagrama de plano fase, detectados ao longo da evolução da resposta dinâmica no tempo, dotados de periodicidade. Caso não seja detectado a presença de pontos fixos no diagrama de plano fase o movimento analisado é dito não periódico. De acordo com Machado (1993), um movimento não periódico em que a coleção de pontos seja geometricamente arrumada, indica a existência de um atrator estranho, onde em problemas de engenharia é também um atrator caótico, que está associado a caracterização do movimento como sendo instável.

4.1 Viga Biengastada

Este exemplo tem sua estrutura composta basicamente por uma viga na qual os nós de ambas as extremidades são restritos quanto a movimentos verticais, horizontais e rotações, ou seja, os nós das extremidades possuem o vínculo de engaste. A estrutura a ser analisada pelo algoritmo implementado neste trabalho foi estudada por Hsiao e Jang (1989) no intuito de avaliar as não linearidades geométricas presentes, utilizando a formulação corrotacional. Para a análise deste exemplo a estrutura foi discretizada em 10 elementos de viga 2D, com dimensão de 2 in cada, totalizando o comprimento de 20 in. As propriedades mecânicas empregadas nos elementos foram: área da seção transversal igual a $0,125 \text{ in}^2$, módulo de elasticidade longitudinal igual a 30.000 ksi , momento de inércia igual a $1,628 \cdot 10^{-4} \text{ in}^4$ e densidade linear igual a $2,536 \cdot 10^{-4} \frac{\text{lb}\cdot\text{s}^2}{\text{in}^4}$. As dimensões do vão da viga, vinculações, configuração de carregamento e divisão de elementos na estrutura, são expressos na Figura 30. O nó monitorado na estrutura foi o número 6. O carregamento aplicado foi feito de forma contínua durante todo o período da análise, 500 ms, no valor de 640 lb. A tolerância imposta sobre o resíduo foi de $1 \cdot 10^{-12}$. O tempo de análise foi dividido em 500 incrementos.

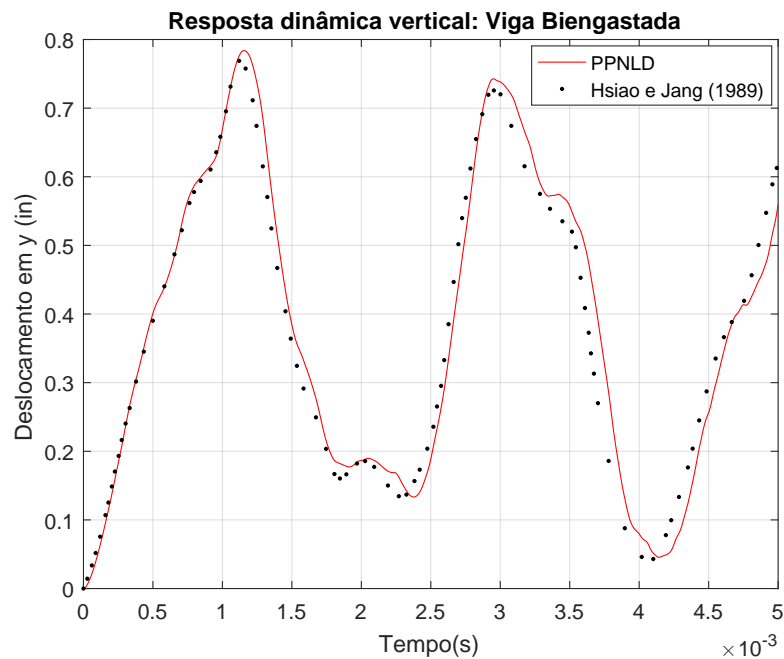
Figura 4.1 – Viga Biengastada



Fonte: o Autor

A Figura 4.2 exibe a resposta dinâmica vertical em função do tempo, do nó 6 sob regime do carregamento aplicado.

Figura 4.2 – Resposta dinâmica vertical: Viga Biengastada



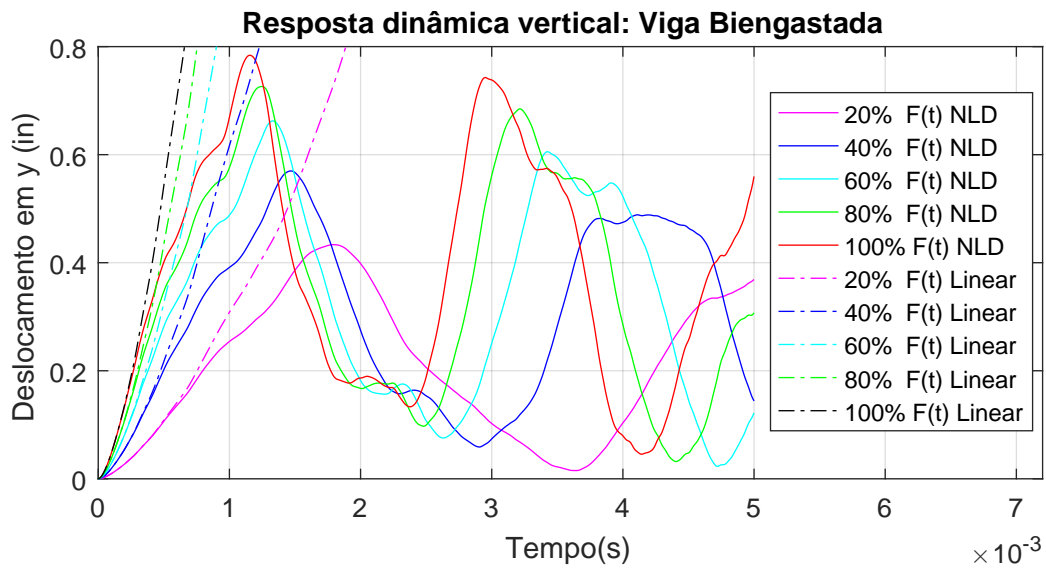
Fonte: o Autor

Com relação à solução obtida pelo algoritmo implementado (PPNLD), quando comparado à solução encontrada por [Hsiao e Jang \(1989\)](#), verifica-se concordância razoável entre os resultados. Ambas as soluções retratam comportamento oscilatório semelhante, divergindo apenas por uma defasagem que se inicia à partir do instante 0,001 segundos da análise. Ainda que esta defasagem se faça presente até o final da análise a mesma não apresenta aumento de proporção. Na figura 4.3 são representadas as evoluções das respostas dinâmicas, linear e não linear, conforme o aumento do carregamento imposto à estrutura do exemplo.

Pode-se observar, logo no início das respostas dinâmicas, a divergência entre as respostas lineares e as não lineares, indicando a presença e detecção de não linearidades geométricas no exemplo numérico analisado.

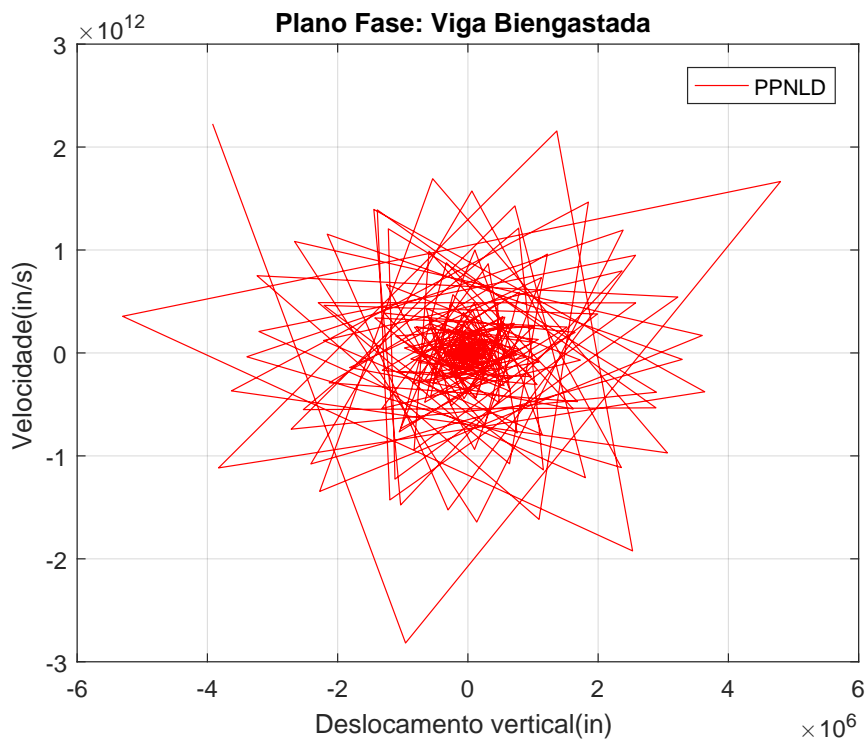
Nas Figuras 4.4 e 4.5 são apresentados o diagrama de plano fase e a resposta dinâmica vertical sobre a ótica do deslocamento, velocidade e tempo, respectivamente, do nó 6 sob regime do carregamento aplicado.

Figura 4.3 – Resposta dinâmica vertical: linear e não linear



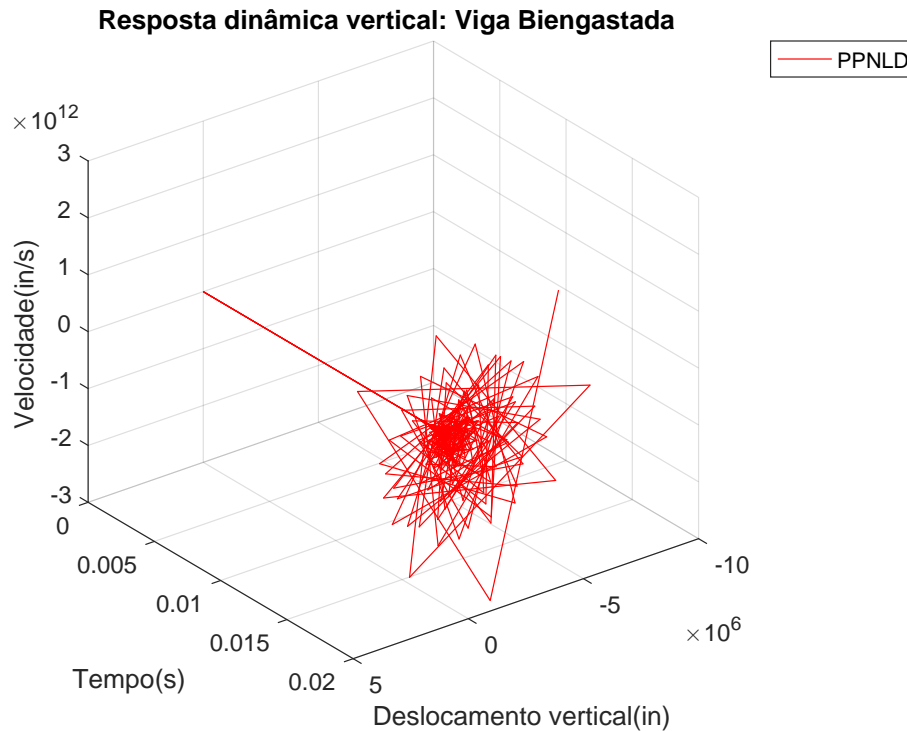
Fonte: o Autor

Figura 4.4 – Diagrama de plano fase: Viga Biengastada



Fonte: o Autor

Figura 4.5 – Resposta dinâmica vertical: Viga Biengastada



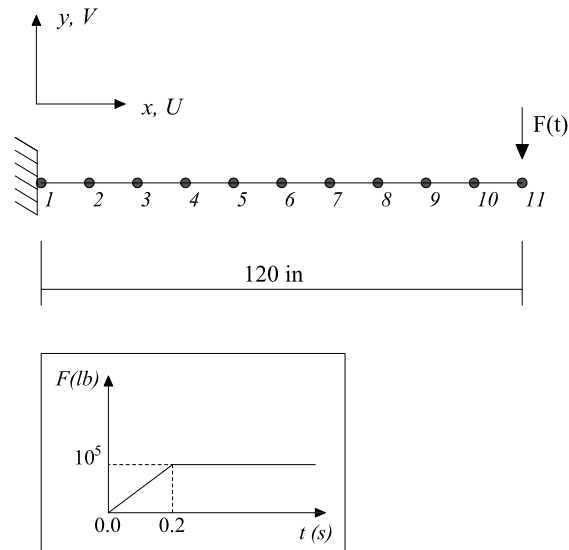
Analisado o diagrama plano fase apresentado na Figura 4.4, não foi detectado a presença de pontos coincidente na solução. A ausência de pontos fixos no diagrama de plano fase indica o movimento como sendo não periódico, dentro o espectro de tempo da análise.

4.2 Viga em Balanço

Esta estrutura possui ponto único de apoio, sendo formada por uma viga na qual o vínculo do nó da extremidade esquerda restringe movimentos verticais, horizontais e rotações, ou seja, o nó à esquerda está engastado. Este exemplo foi discutido no trabalho de [Behdian, Stylianou e Tabarrok \(1998\)](#), onde se avaliou as não linearidades geométricas inerentes ao mesmo. A discretização da estrutura foi feita por meio de 10 elementos de viga 2D, com extensão de 12 in cada, constituindo uma viga em balanço de 120 in. Foram aplicadas as seguintes propriedades mecânicas aos elementos: área da seção transversal igual a 21.90 in², módulo de elasticidade longitudinal igual a 30.000 ksi, momento de inércia igual a 100 in⁴ e densidade linear igual a $4,567 \cdot 10^{-3} \frac{lb \cdot s^2}{in^4}$. As dimensões do comprimento da viga, vinculações, configuração de carregamento e divisão de elementos na estrutura, são expressos na Figura 4.6. O nó monitorado na estrutura foi o número 11. O carregamento aplicado foi feito primeiramente por aumento linear até 10^5 lb durante o período de 0,2 segundos, sendo em

seguida mantido este valor ao longo do restante da análise, de duração de 1 s. A tolerância imposta sobre o resíduo foi de $1, 10^{-12}$. O tempo de análise foi dividido em 500 incrementos.

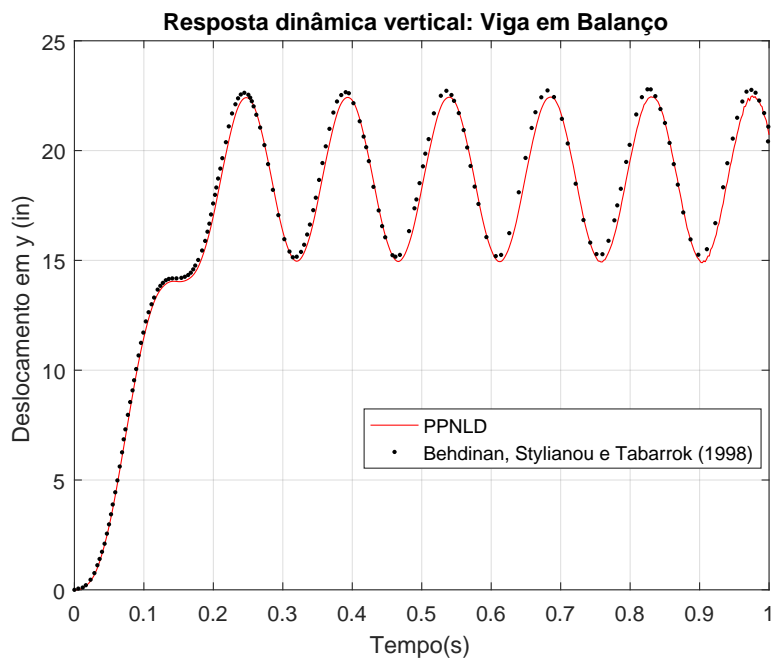
Figura 4.6 – Viga em Balaço



Fonte: o Autor

A Figura 4.7 exibe a resposta dinâmica vertical em função do tempo, do nó 11 sob regime do carregamento imposto.

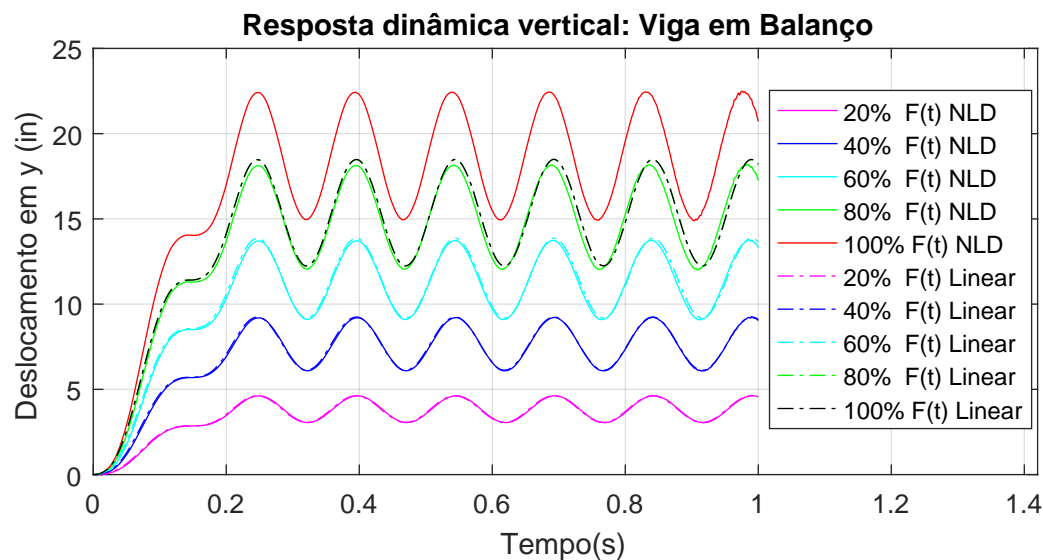
Figura 4.7 – Resposta dinâmica vertical: Viga em Balanço



Fonte: o Autor

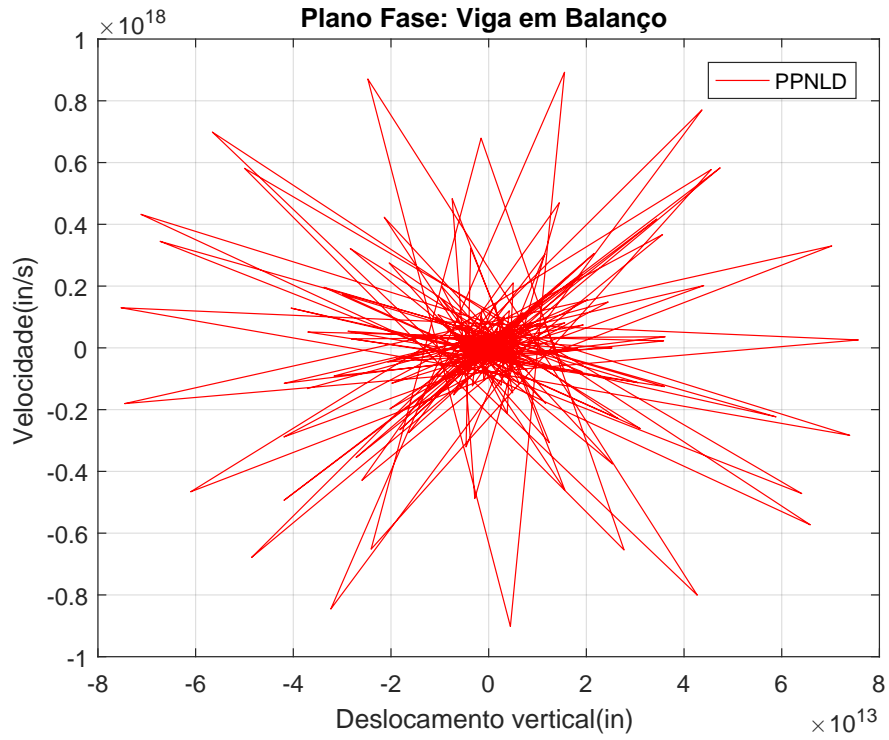
Comparado os resultados obtidos pelo algoritmo PPnLD com os resultados do estudo realizado por [Behdinan, Stylianou e Tabarrok \(1998\)](#), constata-se boa concordância do comportamento das respostas dinâmicas, não só como também a coincidência razoável das mesmas. Ambas as soluções retratam o comportamento oscilatório regular no tocante da amplitude e período de oscilação, a partir do instante 0,18 segundos, o qual se mantém até o final da análise. Existe a presença de uma pequena defasagem entre as soluções, onde a resposta dinâmica da bibliografia se posiciona em ligeiro atraso com relação à obtida neste trabalho. Apesar da existência desta defasagem entre as soluções, a mesma permanece estável durante todo o período da análise, de modo a não aumentar sua proporção. Na figura 4.8 são representadas as evoluções das respostas dinâmicas, linear e não linear, conforme o aumento do carregamento imposto à estrutura do exemplo.

Figura 4.8 – Resposta dinâmica vertical: linear e não linear



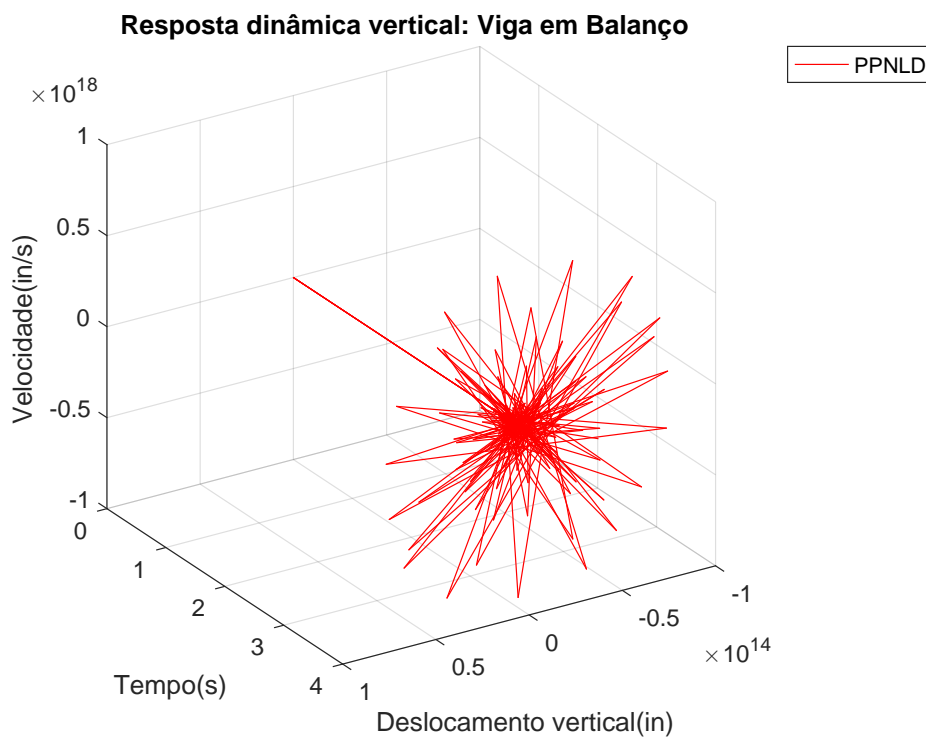
Ambas as soluções, linear e não linear, apresentam as mesmas respostas dinâmicas à medida em que se aumenta o carregamento. Entretanto ao se atingir a totalidade da carga, é possível notar o surgimento de divergências entre as respostas linear e não linear, indicando a presença de não linearidades no exemplo numérico analisado. Nas Figuras 4.9 e 4.10 são apresentados o diagrama de plano fase e a resposta dinâmica vertical sobre a ótica do deslocamento, velocidade e tempo, respectivamente, do nó 11 sob regime do carregamento aplicado.

Figura 4.9 – Diagrama de plano fase: Viga em Balanço



Fonte: o Autor

Figura 4.10 – Resposta dinâmica vertical: Viga em Balanço



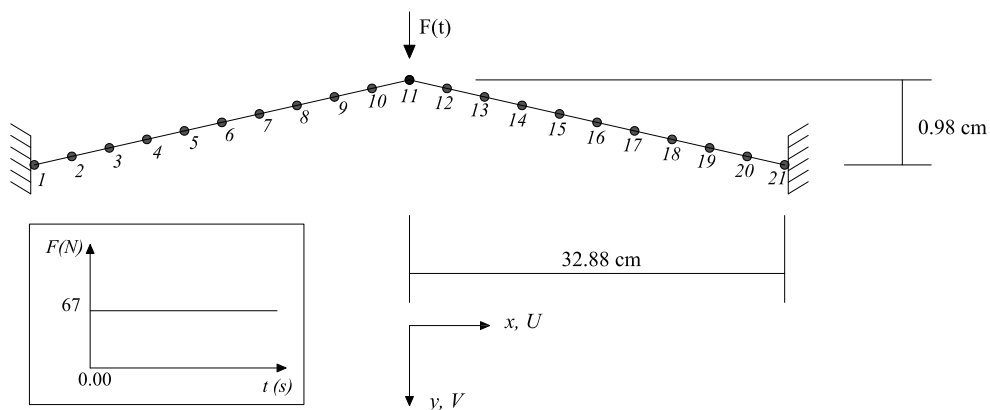
Fonte: o Autor

Obtido o diagrama de plano fase expresso na Figura 4.9, em sua análise não foi constatado a manifestação de pontos fixos. O fato da não detecção de tais pontos no diagrama de plano fase assinala a solução como não periódica detre o intervalo de tempo analisado.

4.3 Pórtico de Williams

O Pórtico de Williams, também conhecido como Pórtico Toogle, é frequentemente utilizado para validar formulações que se propõe em lidar com os fenômenos de não linearidade. Esta estrutura é composta pela união de duas barras inclinadas formando um pórtico abatido, cuja os nós das extremidades são restritos quanto aos movimentos verticais, horizontais e rotações, ou seja, são nós engastados. Silva (2009) analisa as não linearidades do Pórtico de Williams por meio da formulação lagrangiana atualizada. Neste exemplo a estrutura foi discretizada em 20 elementos, de dimensões equivalentes, de viga 2D. Foram aplicadas as seguintes propriedades mecânicas aos elementos: área da seção transversal igual a $1,1806 \text{ cm}^2$, módulo de elasticidade longitudinal igual a $71,02 \text{ GPa}$, momento de inércia igual a $0,036 \text{ cm}^4$ e densidade linear igual a $2714,5 \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{m}^4}$. As dimensões do comprimento do pórtico, vinculações, configuração de carregamento e divisão de elementos na estrutura, são expressos na Figura 4.11. O nó monitorado na estrutura foi o número 11. O carregamento aplicado, de 67 N , foi feito de forma contínua durante todo o período de análise, que fora de 0.03 segundos. A tolerância imposta sobre o resíduo foi de $1, 10^{-12}$. O tempo de análise foi dividido em 300 incrementos.

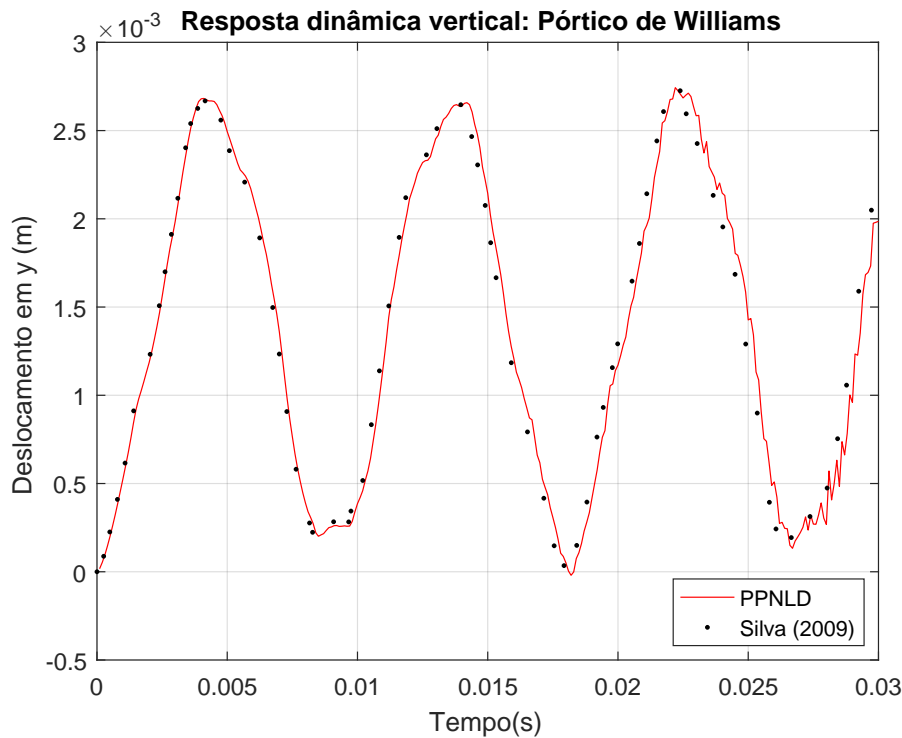
Figura 4.11 – Pórtico de Williams



Fonte: o Autor

A Figura 4.12 exibe a resposta dinâmica vertical em função do tempo, do nó 11 sob regime do carregamento imposto.

Figura 4.12 – Resposta dinâmica vertical: Pórtico de Williams



Fonte: o Autor

A solução fornecida pelo algoritmo implementado neste trabalho (PPNLD), sob a ótica da descrição cinemática corrotacional, demonstrou boa qualidade na representação do comportamento da resposta dinâmica quando comparada à resposta alcançada por [Silva \(2009\)](#), utilizando a descrição cinemática lagrangeana atualizada. Entre as soluções encontradas há a presença de uma leve defasagem que se mantém estável durante o período de análise. Outra divergência entre as soluções se encontra no vale da terceira oscilação, entre os instantes de tempo 0,025 e 0,03 segundos, onde o algoritmo PPNLD detecta instabilidade neste trecho da solução. Na figura 4.13 são representadas as evoluções das respostas dinâmicas, linear e não linear, conforme o aumento do carregamento imposto à estrutura do exemplo.

No decorrer da evolução das respostas dinâmicas linear e não linear, conforme o carregamento é acrescido, percebe-se o aumento da diferenciação entre as respostas linear e não linear, de maneira a se identificar a presença e proporção de não linearidades geométricas contidas no exemplo numérico analisado. Nas Figuras 4.14 e 4.15 são apresentados o diagrama de plano fase e a resposta dinâmica vertical sobre à ótica do deslocamento, velocidade e tempo, respectivamente, do nó 11 sob regime do carregamento aplicado.

Figura 4.13 – Resposta dinâmica vertical: linear e não linear

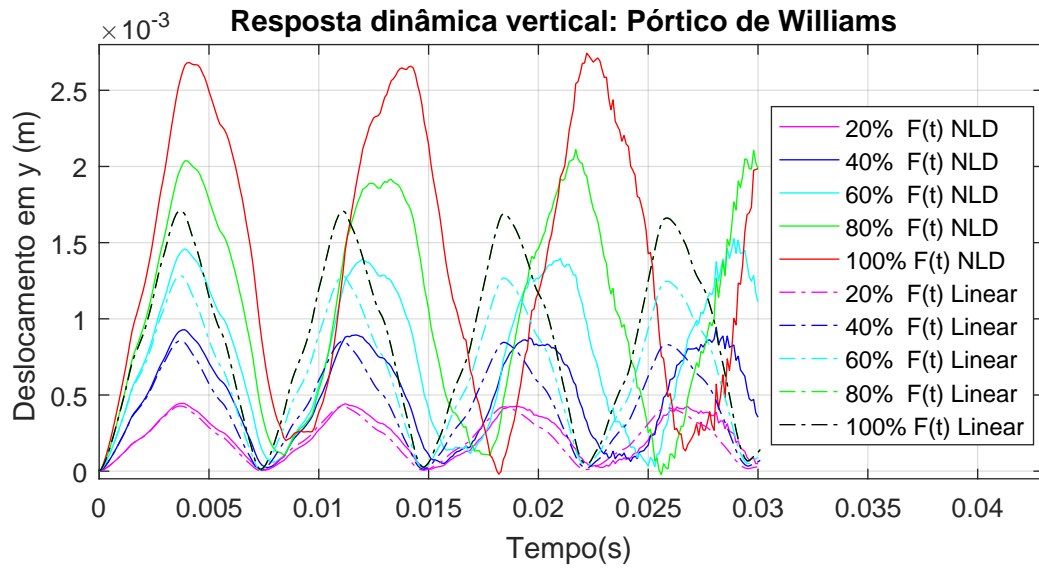


Figura 4.14 – Diagrama de plano fase: Pórtico de Williams

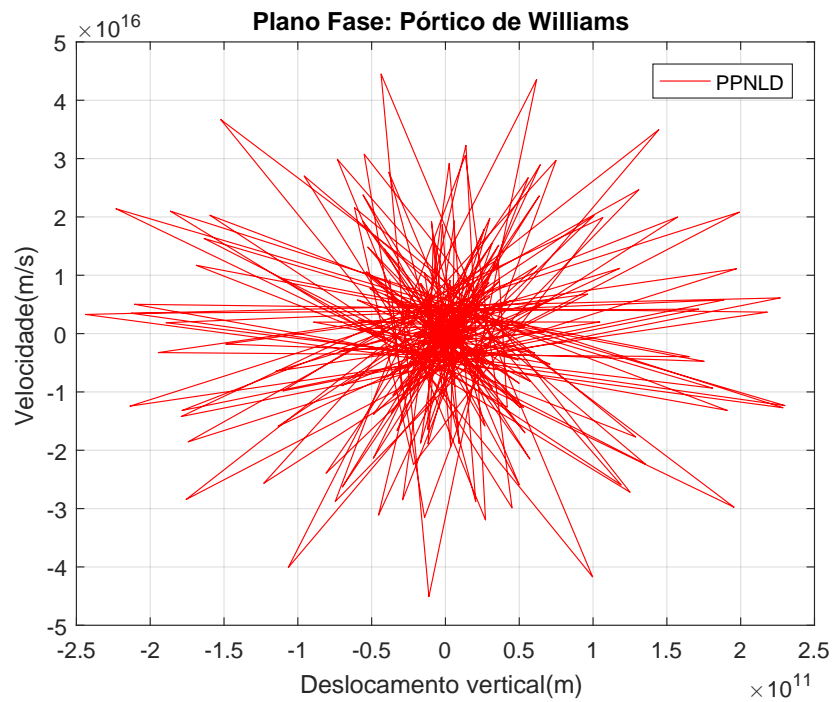
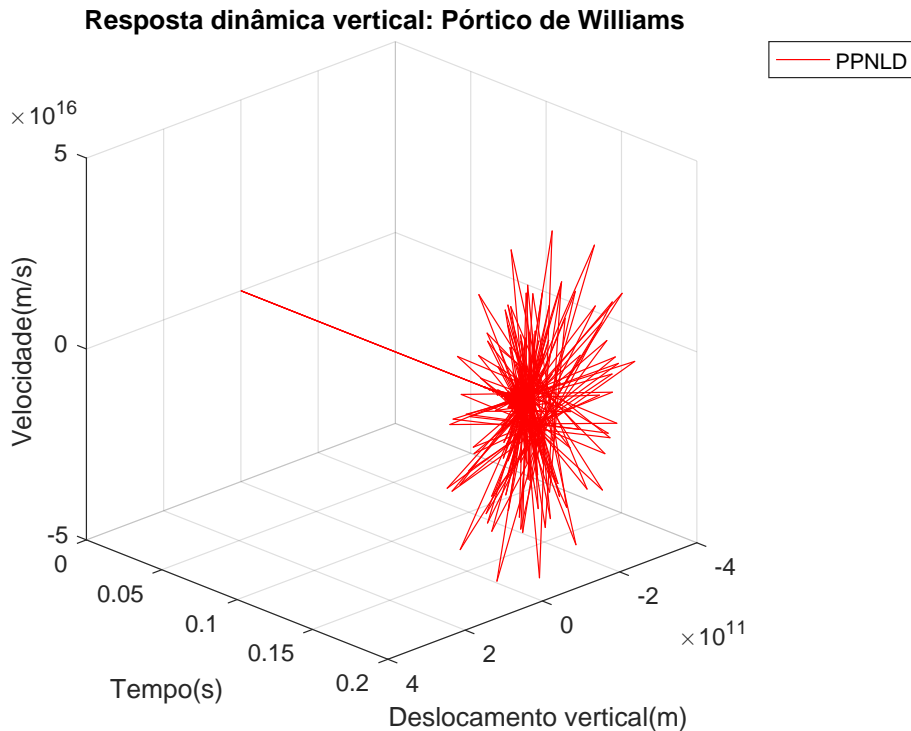


Figura 4.15 – Resposta dinâmica vertical: Pórtico de Williams



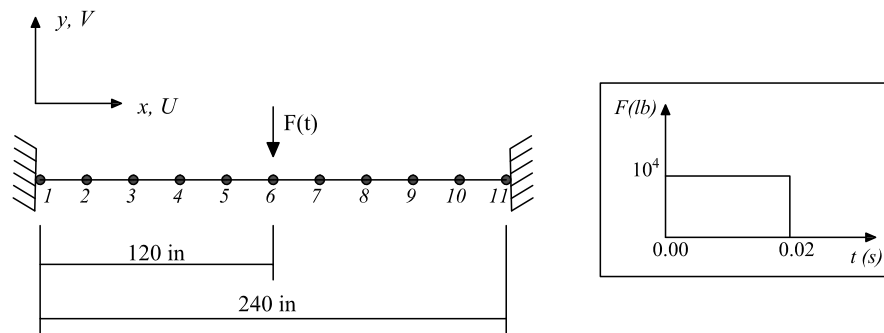
Examinado o diagrama plano fase apresentado na Figura 4.14, não foram encontrados pontos fixos na solução. A inexistência de tais pontos no diagrama de plano fase caracteriza o movimento como sendo não periódico.

4.4 Viga Biengastada

Este exemplo foi analisado em [Behdinan, Stylianou e Tabarrok \(1998\)](#), neste trabalho os autores apresentam uma formulação corrotacional no intuito de validá-la no campo da análise dinâmica não linear, especificamente geométrica. A validação foi feita comparando os resultados obtidos pela formulação corrotacional aos obtidos pela formulação lagrangeana atualizada. Esta estrutura se configura basicamente por uma viga cujo os nós da extremidade se encontram impedidos de se deslocar nas direções verticais, horizontais e rotações. Para a análise deste exemplo a estrutura foi discretizada em 10 elementos de viga 2D, com dimensão de 24 in cada, constituindo o comprimento total de 240 in . Foram aplicadas as seguintes propriedades mecânicas aos elementos: área da seção transversal igual a 21.90 in^2 , módulo de elasticidade longitudinal igual a 30.000 ksi , momento de inércia igual a 100 in^4 e densidade linear igual a $4,567 \cdot 10^{-3} \frac{\text{lb} \cdot \text{s}^2}{\text{in}^4}$. As dimensões do vão da viga, vinculações, configuração de carregamento e divisão de elementos na estrutura, são expressos na Figura

4.16. O nó monitorado na estrutura foi o número 6. O carregamento aplicado foi feito de forma contínua durante os primeiros $0,02$ s da análise, com intensidade de 10.000 lb, e em seguida interrompido. A duração total do período da análise foi $0,11$ segundos. A tolerância imposta sobre o resíduo foi de $1, 10^{-12}$. O tempo de análise foi dividido em 110 incrementos.

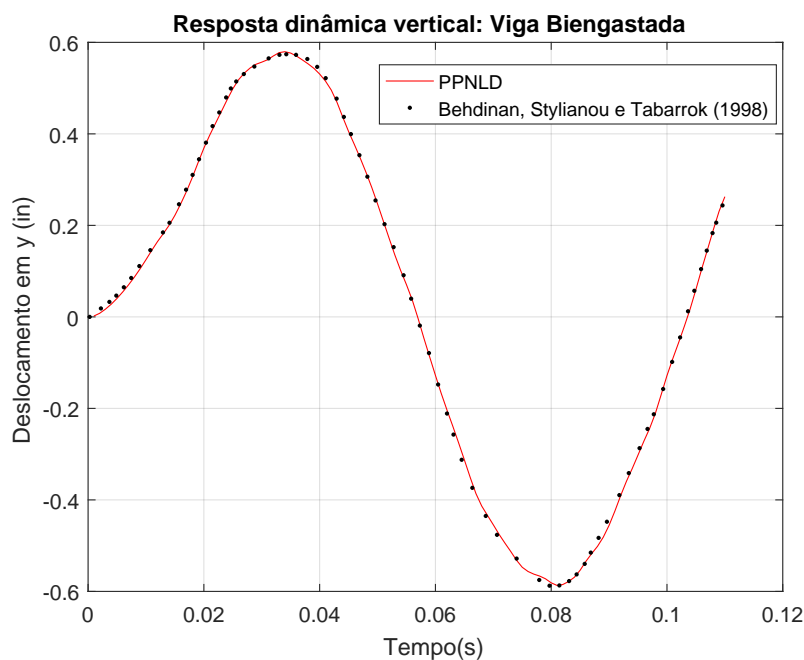
Figura 4.16 – Viga Biengastada



Fonte: o Autor

A Figura 4.17 exibe a resposta dinâmica vertical em função do tempo, do nó 6 sob regime do carregamento imposto.

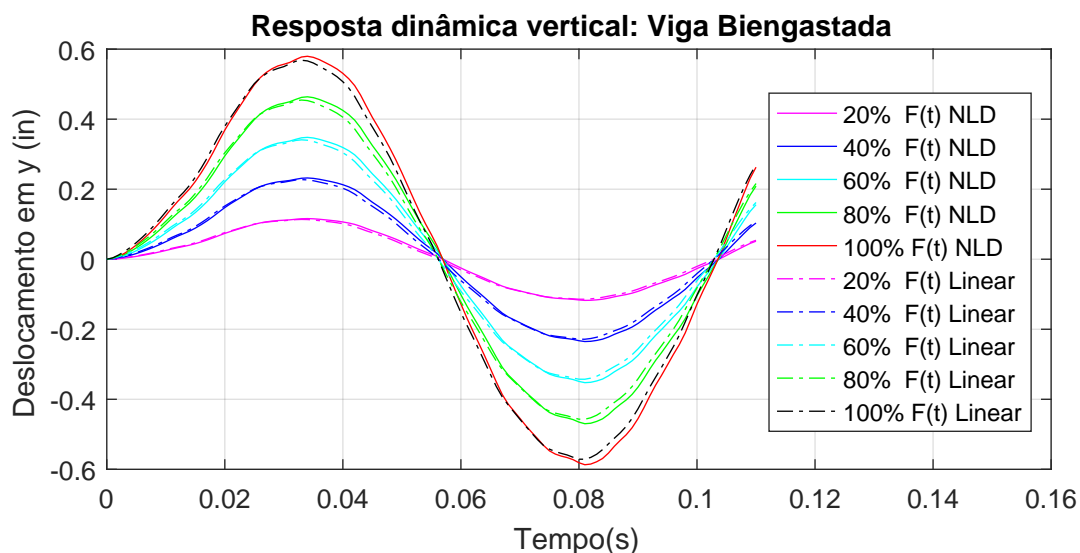
Figura 4.17 – Resposta dinâmica vertical: Viga Biengastada



Fonte: o Autor

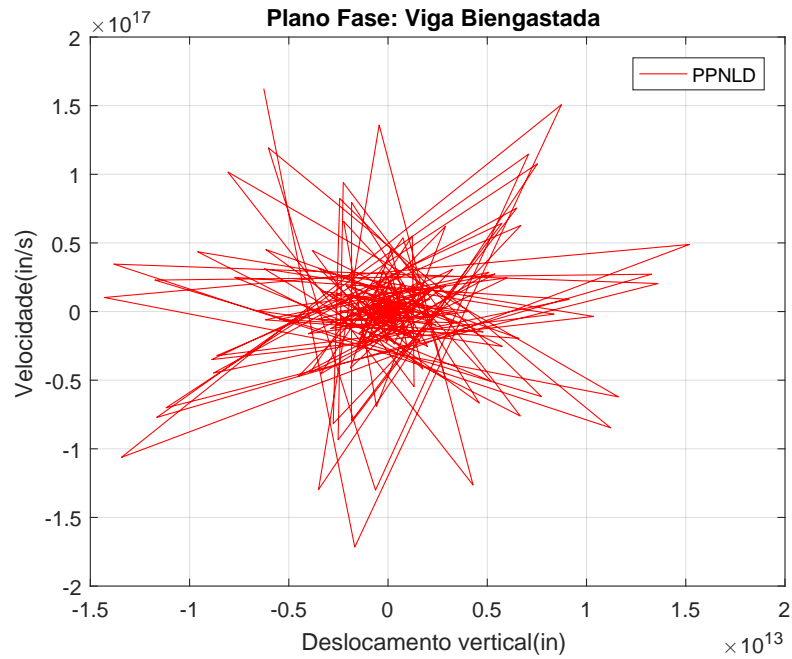
Examinado o resultado obtido pelo algoritmo PPNLD, se identifica que a resposta dinâmica encontrada foi bastante satisfatória quando comparada à obtida por [Behdinan, Stylianou e Tabarrok \(1998\)](#). A mesma demonstrou boa qualidade na representação do comportamento e da coincidência de resultados com relação à da bibliografia. No curto período de análise, ambas as soluções demonstraram comportamento oscilatório regular em relação aos aspectos de amplitude e período de oscilação. Na figura 4.18 são representadas as evoluções das respostas dinâmicas, linear e não linear, conforme o aumento do carregamento imposto à estrutura do exemplo.

Figura 4.18 – Resposta dinâmica vertical: linear e não linear



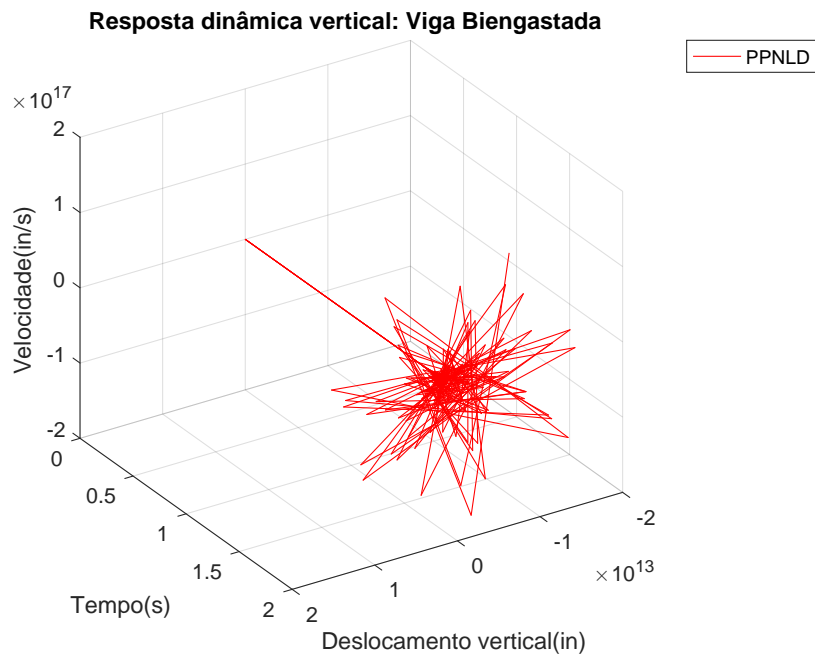
Tanto a resposta dinâmica linear quanto a não linear apresentam soluções parecidas. Porém conforme a evolução do carregamento, pode-se identificar o aumento proporcional de divergência entre as respostas. Indicando leve não linearidade geométrica presente no exemplo analisado. Nas Figuras 4.19 e 4.20 são apresentados o diagrama de plano fase e a resposta dinâmica vertical sobre a ótica do deslocamento, velocidade e tempo, respectivamente, do nó 6 sob regime do carregamento aplicado.

Figura 4.19 – Diagrama de plano fase: Viga Biengastada



Fonte: o Autor

Figura 4.20 – Resposta dinâmica vertical: Viga Biengastada



Fonte: o Autor

Examinado o diagrama plano fase exibido na Figura 4.19, não foi constatado a existências de pontos fixos. O que sugere que o movimento seja não periódico, dentro do período de análise.

Capítulo 5

CONCLUSÃO

Seja pelo fator estético, econômico ou de funcionalidade, as edificações e obras de infraestrutura têm sido concebidas com estruturas cada vez mais leves e esbeltas, e consequentemente de maior flexibilidade. Estruturas com o perfil descrito são susceptíveis a apresentar deslocamentos significativos, ao ponto de alterar a configuração de equilíbrio e consequentemente os esforços das mesmas. A análise capaz de prever tal alteração é dita não linear geométrica. De forma que, no âmbito deste tipo de estrutura, é de suma importância o seu emprego. Tanto no campo da análise estática quanto dinâmica não linear geométrica, se faz necessário o uso de uma formulação capaz de descrever a cinemática da estrutura ao ser aplicado o carregamento. As três formulações mais utilizadas são a formulação Lagrangeana Total, Lagrangeana Atualizada e Corrotacional. Diferentemente das outras duas formulações, a corrotacional apresenta a particularidade de separar os movimentos de corpo rígido dos movimentos deformacionais em seu procedimento de cálculo das posições nodais e da deformação do elemento.

Neste trabalho foi apresentado uma formulação corrotacional para lidar com não linearidades geométricas, no intuito de atestar sua eficácia diante de tal fenômeno. A formulação descrita neste estudo é empregada em elementos de viga 2D e baseia-se na hipótese de Euler-Bernoulli. Isto implica que a mesma considera somente os efeitos da flexão para determinar tensões e deformações. A energia de deformação utilizada para deduzir a matriz de rigidez tangente parte do princípio de que a formulação admite que os elementos sofrem deformações infinitesimais. Dessa forma, a energia de deformação é obtida pela soma da componente advinda da deformação axial com a componente de deformação por flexão, sem levar em conta os efeitos acoplados de ambas as parcelas. A dedução da matriz de rigidez não linear geométrica é desenvolvida de modo a ser decomposta em duas parcelas. Sendo uma dita material, referente à força elástica do elemento, e a outra dita geométrica, relacionada aos esforços aplicados sobre o elemento.

A formulação descrita neste estudo é aplicada junto ao método dos elementos finitos. Dessa forma foram implementados dois programas, em linguagem Matlab®, do método dos

elementos finitos, baseados nas premissas anteriormente citadas, sendo um no tocante da análise estática (PPNLG) e o outro da análise dinâmica (PPNLD). Ambos os programas tiveram seus resultados validados por meio de exemplos numéricos, comparando-os aos resultados encontrados em estudos de outras bibliografias.

O programa de análise estática (PPNLG) foi desenvolvido utilizando o método de comprimento de arco cilíndrico como critério de controle de carga deslocamento, sendo validado por meio de cinco exemplos numéricos. Todos exemplos analisados obtiveram resultados satisfatórios quando comparados aos resultados das bibliografias. É importante ressaltar que, a descrição cinemática junto ao método de controle de carga-deslocamento empregados, permitiram o PPNLG ultrapassar pontos limites na trajetória de equilíbrio obtendo a continuação da resposta, detecção de tanto fenômenos de inversão de equilíbrio (snap-back e snap-through) presentes no exemplos do pórtico de lee e do pórtico toogle, quanto a presença de pontos críticos, incidentes na maioria do exemplos. Dentre os exemplos numéricos, a viga em balanço chamou atenção visto que a mesma apresentou deslocamentos consideráveis, cerca de 80% do seu comprimento total, entretanto mesmo assim a formulação empregada obteve sucesso ao determinar a trajetória de equilíbrio.

A implementação do programa de análise dinâmica (PPNLD) fez uso do método de integração direta implícita de Newmark, método empregado na resolução de sistemas de equações diferenciais não-lineares do movimento. Quatro exemplos numéricos foram utilizados para validar o programa. Todos exemplos analisados obtiveram respostas dinâmicas transientes satisfatórias quando comparadas às respostas dinâmicas das bibliografias. Havendo a presença de pequenas defasagens entre as soluções que se mantiveram estáveis, sem aumento de proporção durante o período de análise, de alguns exemplos numéricos. Além das respostas dinâmicas, o PPNLD proporciona gerar os diagramas de plano fase, no intuito de avaliar a periodicidade do movimento analisado em cada exemplo, por meio da detecção de pontos fixos. Nos exemplos analisados não foram identificados pontos fixos, caracterizando as soluções obtidas como não periódicas.

Avaliando os resultados dos exemplos numéricos, comprova-se a eficiência da formulação corrotacional descrita neste trabalho, em lidar com a presença de não linearidades geométricas e a capacidade da mesma em detectar fenômenos que indicam provável instabilidade estrutural. Vale ressaltar que os resultados obtidos com este estudo podem ser utilizados para calibrar outros programas ou validar novas propostas de formulações e métodos que se proponham em lidar com não linearidade geométrica.

REFERÊNCIAS

ARGYRIS, J. H.; KELSEY, S.; KAMEL, H. *Matrix methods of structural analysis*. [S.l.]: Pergamon Press, Oxford, 1964. Citado na página 28.

AZEVEDO, Á. F. Método dos elementos finitos. 2011. Citado na página 68.

BATTINI, J.-M. *Co-rotational beam elements in instability problems*. Tese (Doutorado) — KTH, 2002. Citado na página 29.

BATTINI, J.-M. A modified corotational framework for triangular shell elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 196, n. 13-16, p. 1905–1914, 2007. Citado na página 29.

BEHDINAN, K.; STYLIANOU, M.; TABARROK, B. Co-rotational dynamic analysis of flexible beams. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 154, n. 3-4, p. 151–161, 1998. Citado 5 vezes nas páginas 87, 91, 93, 98 e 100.

BELO, I. M. *et al.* Desenvolvimento da formulação corrotacional em elementos finitos de casca para a análise hiperelástica. 2009. Citado na página 45.

BELYTSCHKO, T.; GLAUM, L. W. Applications of higher order corotational stretch theories to nonlinear finite element analysis. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 10, n. 1-2, p. 175–182, 1979. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.

BELYTSCHKO, T.; HSIEH, B. Non-linear transient finite element analysis with convected coordinates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 7, n. 3, p. 255–271, 1973. Citado na página 28.

BERGAN, P. G.; NYGARD, M. K. Nonlinear shell analysis using free formulation finite elements. *Finite Element Methods for Nonlinear Problems*, Springer Verlag, p. 317–338, 1989. Citado na página 28.

BREBBIA, C. A.; FERRANTE, A. J. *Computational methods for the solution of engineering problems*. [S.l.]: Pentech press, 1986. Citado na página 73.

CAVALCANTE, E. *Implementação computacional para análise dinâmica plana e espacial de pontes ferroviárias considerando interação veículo-estrutura*. Tese (Doutorado) — Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Pará, 2010. Citado na página 69.

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple fem formulation for large deflection 2d frame analysis based on position description. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 193, n. 33, p. 3541–3557, 2004. Citado na página 41.

COLE, G. *Consistent co-rotational formulation for geometrically nonlinear beam elements with special reference to large rotations*. Tese (Doutorado) — School of Civil Engineering – Kingston Polytechnic, UK, 1990. Citado na página 28.

CRISFIELD, M. A. A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 81, n. 2, p. 131–150, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

_____. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. [S.l.]: Wiley New York, 1991. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 66.

FARIA, H. P. *Análise não-linear de instabilidade elástica de pórticos planos*. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado, ENC/FT/UnB, 1998. Citado na página 44.

FELIPPA, C. A. *A systematic approach to the element-independent corotational dynamics of finite elements*. [S.l.], 2000. Citado na página 28.

_____. "nonlinear finite element methods", lecture notes for the course non-linear finite element methods, center for aerospace structures. *University of Colorado, Boulder, Colorado, USA*, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 43, 58 e 59.

FELIPPA, C. A.; HAUGEN, B. A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 194, n. 21, p. 2285–2335, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 40.

FERREIRA, I. P. *Análise dinâmica não linear geométrica de treliças espaciais*. Dissertação (Mestrado) — Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.

FILHO, A. A. *Elementos finitos—a base da tecnologia cae*. São Paulo, Editora Érica Ltda, 2007. Citado na página 46.

HORRIGMOE, G.; BERGAN, P. G. Incremental variational principles and finite element models for nonlinear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 7, n. 2, p. 201–217, 1976. Citado na página 28.

HSIAO, K. M.; HOU, F. Y. Nonlinear finite element analysis of elastic frames. *Computers & structures*, Elsevier, v. 26, n. 4, p. 693–701, 1987. Citado 5 vezes nas páginas 28, 77, 80, 85 e 86.

HSIAO, K.-M.; JANG, J.-Y. Nonlinear dynamic analysis of elastic frames. *Computers & structures*, Elsevier, v. 33, n. 4, p. 1057–1063, 1989. Citado 3 vezes nas páginas 87, 88 e 89.

HSIAO, K. M.; LIN, J. Y.; LIN, W. Y. A consistent co-rotational finite element formulation for geometrically nonlinear dynamic analysis of 3-d beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 169, n. 1-2, p. 1–18, 1999. Citado na página 41.

LACERDA, E. G. M. d. *Análise não-linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2014. Citado na página 41.

LE, T.-N.; BATTINI, J.-M.; HJIAJ, M. Efficient formulation for dynamics of corotational 2d beams. *Computational Mechanics*, Springer, v. 48, n. 2, p. 153–161, 2011. Citado na página [29](#).

LI, Z. X. A co-rotational formulation for 3d beam element using vectorial rotational variables. *Computational Mechanics*, Springer, v. 39, n. 3, p. 309–322, 2007. Citado na página [41](#).

LIMKATANYU, S. *et al.* Nonlinear winkler-based beam element with improved displacement shape functions. *KSCE Journal of Civil Engineering*, Springer, v. 17, n. 1, p. 192–201, 2013. Citado na página [40](#).

MACHADO, V. *Bifurcações Múltiplas e Comportamento Não-Linear de Sistemas Dinâmicos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, 1993. Citado na página [88](#).

MATIAS, W. T.; MENDES, L. Uma abordagem unificada da formulação co-rotacional para elementos de treliça 2d, treliça 3d e viga 2 d. *Revista Internacional de Métodos Numéricos*, Universitat Politècnica de Catalunya, v. 25, n. 2, p. 163–190, 2009. Citado na página [43](#).

MATTIASSON, K.; BENGTTSSON, A.; SAMUELSSON, A. On the accuracy and efficiency of numerical algorithms for geometrically nonlinear structural analysis. In: *Finite Element Methods for Nonlinear Problems, Europe-US Symposium*. Trondheim, Norway: [s.n.], 1985. Citado na página [28](#).

MATTIASSON, K.; SAMUELSSON, A. Total and updated lagrangian forms of the co-rotational finite element formulation in geometrically and materially nonlinear analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Num. Meth. Non. Lin. Prob, p. 134–151, 1984. Citado na página [28](#).

MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. *Matrix structural analysis*. [S.l.: s.n.], 2000. Citado 2 vezes nas páginas [54](#) e [55](#).

MENIN, R. C. G. *Aplicação da Descrição Cinemática Co-Rotacional na Análise Não-Linear Geométrica de Estruturas Discretizadas por Elementos Finitos de Treliças, Vigas e Cascas*. Tese (Doutorado) — UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, 2006. Citado 7 vezes nas páginas [27](#), [28](#), [41](#), [42](#), [43](#), [61](#) e [73](#).

MENIN, R. C. G.; TAYLOR, W. Resposta pós-crítica de pórticos planos discretizados com elementos de viga de euler-bernoulli utilizando uma formulação co-rotacional. In: *XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering/Cilamce*. [S.l.: s.n.], 2003. Citado na página [29](#).

MONTEIRO, F. A. C. *Uma formulação co-rotacional gera: Aplicação a pórticos espaciais*. Dissertação (Mestrado) — ITA, Brasil, 2004. Citado 4 vezes nas páginas [77](#), [81](#), [82](#) e [83](#).

MUÑOZ, L. F. P. *Análise Dinâmica Não Linear de Pórticos com Base Elasto-Plástica sob Ação Sísmica*. Tese (Doutorado) — PUC-Rio, 2015. Citado 2 vezes nas páginas [70](#) e [71](#).

NOUR-OMID, B.; RANKIN, C. C. Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 93, n. 3, p. 353–384, 1991. Citado na página [28](#).

- OLIVEIRA, C. E. M. *et al.* Nonlinear analysis of the progressive collapse of reinforced concrete plane frames using a multilayered beam formulation. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, SciELO Brasil, v. 7, n. 5, p. 845–855, 2014. Citado na página 29.
- ORAN, C. Tangent stiffness in plane frames. *Journal of the structural Division*, ASCE, v. 99, n. 6, p. 973–985, 1973. Citado na página 28.
- ORAN, C.; KASSIMALI, A. Large deformations of framed structures under static and dynamic loads. *Computers & structures*, Elsevier, v. 6, n. 6, p. 539–547, 1976. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 80.
- PACOSTE, C.; ERIKSSON, A. Beam elements in instability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 144, n. 1-2, p. 163–197, 1997. Citado na página 28.
- PARK, S.; YOO, H. H.; CHUNG, J. Eulerian and lagrangian descriptions for the vibration analysis of a deploying beam. *Journal of Mechanical Science and Technology*, Springer, v. 27, n. 9, p. 2637–2643, 2013. Citado na página 41.
- PESIC, I.; LANC, D.; TURKALJ, G. Non-linear global stability analysis of thin-walled laminated beam-type structures. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 173, p. 19–30, 2016. Citado na página 41.
- PINTO, R. S.; RAMALHO, M. A. *Não-linearidade física e geométrica no projeto de edifícios usuais de concreto armado*. Tese (Doutorado) — Dissertação (Mestrado)-Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1997. Citado na página 40.
- POWELL, G. H. Theory of nonlinear elastic structures. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v. 95, n. 12, p. 2687–2702, 1969. Citado na página 28.
- QUEIROZ, P. C. d. O. *et al.* Análise estática e dinâmica de estruturas reticuladas: ambiente de simulação em java. Universidade Federal da Paraíba, 2010. Citado na página 70.
- RANKIN, C. C.; BROGAN, F. An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations. *Journal of pressure vessel technology*, American Society of Mechanical Engineers, v. 108, n. 2, p. 165–174, 1986. Citado na página 28.
- RANKIN, C. C.; NOUR-OMID, B. The use of projectors to improve finite element performance. In: *Computational Structural Mechanics & Fluid Dynamics*. [S.l.]: Elsevier, 1988. p. 257–267. Citado na página 28.
- REIS, M. C. J.; CODA, H. B. Physical and geometrical non-linear analysis of plane frames considering elastoplastic semi-rigid connections by the positional fem. *Latin American Journal of Solids and Structures*, SciELO Brasil, v. 11, n. 7, p. 1163–1189, 2014. Citado na página 41.
- RODRIGUES, P. F. N. *Ferramentas numéricas para a análise não-linear física e geométrica de estruturas reticuladas na exploração de petróleo offshore*. Tese (Doutorado) — Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2000. Citado na página 60.
- SILVA, A. R. D. d. Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil. Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto., 2009. Citado 3 vezes nas páginas 87, 95 e 96.

- SILVA, W. A. d. Análise dinâmica não-linear de pórticos espaciais utilizando a formulação corrotacional. tese de doutorado em estruturas e construção civil, publicação e.td-a/11, departamento de engenharia civil e ambiental, universidade de Brasília, df, 176p. 2013. Citado na página 71.
- SILVA, W. T. M.; CUNHA, A. A.; GUTIÉRREZ, M. P. D. Análisis no lineal de pórticos planos usando la formulación corrotacional con elemento de viga timoshenko. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Elsevier, v. 33, n. 1-2, p. 115–122, 2017. Citado na página 29.
- SOUZA, R. M. D. *Force-based finite element for large displacement inelastic analysis of frames*. Tese (Doutorado) — University of California, Berkeley, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 40.
- TAYLOR, W. Aplicaciones de algoritmos que conservan la energia-momentum en dinámica no lineal. In: *Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*. [S.l.: s.n.], 2005. Citado na página 73.
- TURKALJ, G. *et al.* Updated lagrangian formulation for nonlinear stability analysis of thin-walled frames with semi-rigid connections. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, World Scientific, v. 12, n. 03, p. 1250013, 2012. Citado na página 40.
- VEUBEKE, B. F. D. The dynamics of flexible bodies. *International Journal of Engineering Science*, Elsevier, v. 14, n. 10, p. 895–913, 1976. Citado na página 28.
- YAW, L. L. 2d corotational beam formulation. *Walla Walla University*, 2009. Citado na página 29.