Universidade Federal de Goiás

Departamento de Matemática

Regional Catalão

Programa de Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional

Utilização de Conceitos Básicos de Matemática e Experimentos de Robótica para a Compreensão de Fenômenos Físicos

Gilmar José do Nascimento

Catalão

2014

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Gilmar José do Nascimento					
E-mail:	pororocanascimento@yahoo.com.br					
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não						
Vínculo empregatício do autor	Universidade Estadual de Goiás – Morrinhos					
Agência de fomento:	UEG - Governo de Goiás	Sigla:	SEGPLAN			
País:	Brasil	UF:	GO	CNPJ:	011125800001-71	
Título:	Utilização de Conceitos Básicos de Matemática e Experimentos de Robótica para a Compreensão de Fenômenos Físicos					
Palavras-chave:	Matemática Básica, Fenômenos Físicos, Aplicações da Matemática na Física, Robótica, Lego Mindstorms.					
Título em outra língua:	Use of Basic Concepts of Mathematics and Robotics Experiments for Understanding Physical Phenomena					
Palavras-chave em outra língua:	Basic Mathematics, Physical Phenomena, Applications of Mathematics in the Physics, Robotics, Lego Mindstorms.					
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico					
Data defesa:	03/02/2014					
Programa de Pós-Graduação:	Programa de Mestrado Profissional – PROFMAT					
Orientador (a):	Romes Antônio Borges					
E-mail:	kvtborges@gmail.com					

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

_____ Data: _____/_____/_____

Assinatura do autor

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Gilmar José do Nascimento

Utilização de Conceitos Básicos de Matemática e Experimentos de Robótica para a Compreensão de Fenômenos Físicos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática, Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Prof. Dr. Romes Antônio Borges – UFG/Catalão (Orientador)
Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi – UFG/Catalão
Prof. Dr. Plínio José Oliveira – UFG/Catalão
Prof. Dr. Manoel Morais Junqueira – UEG/Morrinhos

Catalão

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
(GPT/BSCAC/UFG)

N244u

Nascimento, Gilmar José do.
Utilização de conceitos básicos de matemática e experimentos de robótica para a compreensão de fenômenos físicos [manuscrito] / Gilmar José do Nascimento. - 2014.
154 f.

Orientador: Profº. Dr. Romes Antônio Borges.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão, Departamento de Matemática, 2014.
Bibliografia.

1. Fenômenos físicos. 2. Aplicações da matemática na física. 3. Robótica. 4. Lego mindstorms. I. Título.

CDU: 501: 004.896

Gilmar José do Nascimento

Utilização de Conceitos Básicos de Matemática e Experimentos de Robótica para a Compreensão de Fenômenos Físicos

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Departamento de Matemática, Câmpus Catalão da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 03 de Fevereiro de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Romes Antônio Borges
Departamento de Matemática-UFG/CAC
Presidente da Banca

Prof. Dr. Manoel Moraes Junqueira
DM/UFG/Morrinhos

Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi
Departamento de Matemática-UFG/CAC

Prof. Dr. Plínio José Oliveira
Departamento de Matemática-UFG/CAC

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Gilmar José do Nascimento graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia e especializou-se em Física pela Universidade Federal de Uberlândia.

Dedico este trabalho à minha esposa, aos meus filhos e aos amigos por terem me incentivado na carreira profissional.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado força na conclusão do trabalho. Obrigado também aos amigos de convívio, Alceny, Carlos Soares, Cleyton, Eduardo Hirota, Eliton, Emerson, João Batista, Marcelo e Ricardo, pelo apoio diário. Agradecimentos especiais aos professores do programa: Fernando Kennedy, Juliana Bernardes, Márcio Rocha, Paulo Roberto Bergamaschi, Plínio J. Oliveira, Porfírio Júnior e Thiago Alves Queiroz, pela importância na vida acadêmica e no desenvolver deste trabalho. Agradeço profundamente aos amigos que auxiliaram durante a minha carreira: Ademir Cavalheiros e Edmardo Naves. Não poderia deixar de agradecer aos colegas, ao André Geus, Bruno Alves e José Salviano que foram de fundamental importância para a conclusão do trabalho. Agradecimentos também à CAPES pelo suporte financeiro durante o mestrado. Também quero de forma especial fazer um agradecimento para a colega Thais Lopes que, com grande humildade, muito contribuiu para meu aprendizado principalmente no que diz respeito à digitação do trabalho e, por fim, ao professor Romes Antonio Borges pela paciência na orientação e incentivo que tornaram possível a conclusão deste trabalho.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal possibilitar a compreensão de conceitos físicos utilizando fundamentos básicos de matemática. Neste sentido, pretende-se evidenciar tanto os fenômenos que ocorrem na natureza quanto os fenômenos que ocorrem em manipulações de laboratórios. No presente estudo, é possível perceber que a matemática é de fundamental importância no estudo dos fenômenos físicos. Um vasto estudo é feito acerca de conceitos matemáticos que, em seguida, serão aplicados à vários tipos de problemas, sendo possível compreender aspectos fundamentais envolvendo grandezas físicas. Com o objetivo de vivenciar as aplicações na prática, são construídos protótipos robóticos utilizando os kits LEGO MINDSTORMS, simulando situações reais da natureza e confrontando os cálculos com resultados teóricos clássicos.

Palavras-chave

Matemática Básica, Fenômenos Físicos, Aplicações da Matemática na Física, Robótica, Lego Mindstorms.

Abstract

This work aims to enable the understanding of physics conceptions utilizing basic foundations of mathematics. In this regard, the aim is to highlight both those the phenomena that occur in nature as the phenomena which occur in laboratory manipulations. A extensive research is made about mathematical concepts that will subsequently be applied to several types of problems, being possible understand fundamental aspects involving physical quantities. With the goal to experience the in practice applications, robotic prototypes using LEGO MINDSTORMS kits, simulating real situations of nature and confronting of the computations with classical theoretical results are built.

Keywords

Basic Mathematics, Physical Phenomena, Applications of Mathematics in the Physics, Robotics, Lego Mindstorms.

Lista de Figuras

Figura 2.1. Ilustração de um vetor 18
Figura 2.2. Representação do vetor velocidade 19
Figura 2.3. Soma de vetores 19
Figura 2.4. Ilustração da lei dos cossenos 20
Figura 2.5. Projeção de um vetor em um eixo 21
Figura 2.6. Decomposição de um vetor no espaço 23
Figura 2.7. Decomposição de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ 25
Figura 2.8. Resultante da soma de vetores $\vec{F}$ 26
Figura 2.9. Ilustração do conceito de trabalho 28
Figura 2.10. Aplicação de trabalho 28
Figura 2.11. Linhas de indução atravessando uma secção 29
Figura 2.12. Ilustração de produto vetorial 30
Figura 2.13. Produto vetorial 31
Figura 2.14. Cilindro para ilustração do produto vetorial 32
Figura 2.15. Trajetória retilínea 33
Figura 2.16. Trajetória curvilínea 33
Figura 2.17. Trajetória circular 33
Figura 2.18. Trajetória helicoidal 34
Figura 2.19. Posição da partícula em um dado instante 34
Figura 2.20. Representação vetorial de posição, vetor, deslocamento e distância percorrida 34
Figura 2.21. Velocidade na direção do deslocamento 35
Figura 2.22. Aceleração normal 37
Figura 2.23. Movimento curvilíneo 38
Figura 2.24. Conceituação de trabalho 39
Figura 2.25. Queda livre 42
Figura 2.26. Trabalho da força elástica 43
Figura 2.27. Mola deformada 44
Figura 2.28. Conceituação de impulso 45
Figura 2.29. Conceituação da quantidade de movimento 45

Figura 2.30. Representação de torque....46
Figura 2.31. Momento angular....47
Figura 3.1. Movimento ao longo de um eixo....48
Figura 3.2. Movimento no plano....48
Figura 3.3. Movimento uniforme....50
Figura 3.4. Velocidade x Tempo....51
Figura 3.5. Posição x Tempo....51
Figura 3.6. Aceleração x Tempo....52
Figura 3.7. Carro movimentando entre duas cidades....54
Figura 3.8. Carro em declive....54
Figura 3.9. Carro em aclive....55
Figura 3.10. Posição x Tempo....56
Figura 3.11. Velocidade x Tempo....56
Figura 3.12. Aceleração x Tempo....57
Figura 3.13. Velocidade x Tempo....58
Figura 3.14. Trajetória curvilínea....59
Figura 3.15. Plano inclinado....59
Figura 3.16. Plano inclinado....60
Figura 3.17. Decomposição do peso....60
Figura 3.18. Par de ação e reação....61
Figura 3.19. Representação das forças....62
Figura 3.20. Rugosidade....62
Figura 3.21. Plano inclinado....64
Figura 3.22. Carro em aclive....65
Figura 3.23. Posição no plano inclinado....67
Figura 3.24. Movimento Uniformemente Variado....67
Figura 3.25. Velocidade x Tempo....68
Figura 3.26. Posição do objeto....69
Figura 3.27. Movimento ao longo de uma reta/Movimento variado....70
Figura 3.28. Velocidade x Tempo....70
Figura 3.29. Posição x Tempo....71
Figura 3.30. Velocidade x Tempo....72
Figura 3.31. Velocidade x Tempo....72

Figura 3.32. Queda livre/MRUV 74
Figura 3.33. Velocidade x Tempo 75
Figura 3.34. Posição x Tempo 76
Figura 3.35. Lançamento vertical 76
Figura 3.36. Posição x Tempo 78
Figura 3.37. Velocidade x Tempo 78
Figura 3.38. Aceleração x Tempo 78
Figura 3.39. Movimento retilíneo/Variado 79
Figura 3.40. Velocidade x Tempo 80
Figura 3.41. Lançamento oblíquo 82
Figura 3.42. Posição vertical x Tempo 85
Figura 3.43. Movimento circular 86
Figura 3.44. Velocidades lineares diferentes 87
Figura 3.45. Velocidades lineares iguais 88
Figura 3.46. Ciclóide 89
Figura 3.47. Movimento do cone 91
Figura 3.48. Momento de inércia de uma barra 94
Figura 3.49. Representação de torque 95
Figura 3.50. Momento de inércia 96
Figura 3.51. Torque e momento angular 97
Figura 3.52. Partícula movendo-se num círculo no plano xy 97
Figura 3.53. Determinação de momento de inércia 98
Figura 3.54. Patinadora Sasha Cohen em movimento 98
Figura 3.55. Movimento de rotação e translação 99
Figura 3.56. Velocidade x Tempo 102
Figura 3.57. Posição x Tempo 103
Figura 3.58. Velocidade x Tempo 104
Figura 3.59. Distância x Tempo 105
Figura 3.60. Bloco x Mola 106
Figura 3.61. Força x Tempo 107
Figura 3.62. Trajetória 108
Figura 3.63. Movimento no plano 110
Figura 3.64. Rotação de vetores 111

Figura 3.65. Movimento no plano 112
Figura 3.66. Determinação do ângulo 115
Figura 3.67. Hipérbole rotacionada de $45°$ 117
Figura 3.68. Rotação do antebraço 118
Figura 3.69. Representação do vetor deslocamento 118
Figura 3.70. Coordenadas da velocidade transversa 119
Figura 3.71. Momento angular 120
Figura 3.72. Torque 120
Figura 3.73. Momento de inércia da barra 122
Figura 3.74. Momento de inércia do cilindro 123
Figura 3.75. Momento de inércia da esfera 124
Figura 3.76. Momento de inércia de uma roda 125
Figura 3.77. Natureza vetorial da rotação 127
Figura 3.78. Primeira roda gigante (1893) 127
Figura 3.79. Conservação do momento angular 128
Figura 3.80. Composição de velocidades 129
Figura 3.81. Composição de velocidades 130
Figura 3.82. Decomposição de velocidades 131
Figura 3.83. Decomposição de velocidades 131
Figura 4.1. Protótipo de um carro montado com peças Lego 141
Figura 4.2. Posição x Tempo 143
Figura 4.3. Velocidade x Tempo 144
Figura 4.4. Torre construída com kit Lego 145
Figura 4.5. Queda livre 147
Figura 4.6. Protótipo construído para descrever o Movimento Circular Uniforme (MCU) 149

Sumário

Capítulo I: Introdução **16**
Capítulo II: Introdução ao Estudo de Vetores **18**
2.1. Adição de vetores 19
2.2. Projeção de um vetor nos eixos de coordenadas 21
2.3. Método das projeções e soma de dois ou mais vetores 22
2.4. Soma de dois vetores no plano xy 24
2.5. Produto escalar entre dois vetores 27
2.6. O produto vetorial 30
2.7. Conceito dos movimentos 33
2.8. Grandezas físicas abordadas no estudo dos movimentos. 38
Capítulo III: Movimentos 48
3.1. Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) 49
3.2. Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV) 67
3.3. Movimentos curvilíneos 82
3.4. Giro de um corpo extenso em torno de um eixo 93
3.5. Torque sobre uma partícula 95
3.6. Momento angular da $(\vec{L})$ partícula 95
3.7. Translação e rotação de uma esfera maciça descendo um plano inclinado 99
3.8. Conservação da energia mecânica 105
3.9. Movimento no plano 109
3.10. Movimento de rotação de objetos e mudanças de eixos de coordenadas 114
3.11. Momento de inércia de um objeto (I) 121
3.12. Movimento relativo 128
Capítulo IV: Introdução à robótica **133**
4.1. Experimento I: Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) 141
4.2. Experimento II: Queda livre dos corpos (MRUV) 144
4.3. Experimento III: Movimento Circular Uniforme (MCU) 148
Capítulo V: Conclusões e Perspectivas futuras **152**
Capítulo VI: Referências **154**

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Para a compreensão dos fenômenos físicos e das leis que regem tais fenômenos, deve-se obter um modelo matemático, onde se define as grandezas físicas nele envolvidas, ou então desenvolver na prática aparelhos que mensurem ou estimem a quantidade da grandeza no fenômeno e/ou situação-problema. Neste modelo matemático, muitas vezes, se faz necessário demonstrar propriedades, teoremas, lemas, corolários, com o objetivo de validar tais situações.

A ciência busca um melhoramento do próprio homem encontrando novas técnicas e máquinas que facilitem o trabalho e progresso nas mais variadas áreas do conhecimento. Neste sentido, um esforço deve ser empreendido no que tange às várias técnicas empregadas no ensino aprendizagem dos mais diversos conteúdos. O ideal é fazer com que haja uma edificação do conhecimento de modo mais eficiente, consiste em se dominar “ferramentas” que possibilitem à construção de conceitos mais detalhados, tendo assim, uma ideia bem elaborada do problema em questão.

A proposta consiste em abordar os movimentos, não somente com o equacionamento de funções que exprimem a posição, a velocidade, a aceleração no tempo, mas também descobrir a causa de tal movimento, ou seja, as forças envolvidas, a energia, a quantidade de movimento, o momento de inércia, o momento angular, o torque. A matemática é de suma importância nos cálculos exatos na execução de uma peça, um robô, na indústria de automação, na construção de um estádio de futebol, da mecânica estatística dentre outros.

É notório que a utilização de novas tecnologias possui grande importância no ensino-aprendizagem. Assim, a robótica ganha cada vez mais espaço, pois, é uma ciência que permite uma visão concreta para a melhoria de um determinado sistema. Neste sentido, é importante que haja uma interação entre o homem e o computador (softwares e hardware), onde se busque conceber os fenômenos físicos e matemáticos que regem o sistema.

Será enfatizado o posicionamento do móvel (ou partícula), a velocidade, a aceleração, as forças envolvidas, a energia no decorrer do movimento, a quantidade de movimento do móvel e a inércia envolvida. Com isso, busca-se construir todos os conceitos da mecânica, de tal forma que haja uma melhor compreensão dos mais variados conceitos relacionados ao tema em questão.

Compreender os fenômenos que ocorrem na natureza desde os primórdios da humanidade, bem como seu equacionamento não é tarefa simples. Por isso, neste trabalho, propõe-se estudar os conteúdos referentes ao ensino básico, utilizando conceitos da Matemática e da Física com o objetivo de se atingir melhores resultados. A principal motivação deste trabalho é evidenciar uma abordagem diferenciada para que se tenha uma maior satisfação ao se estudar tais conteúdos e, assim, obter melhores resultados. Neste sentido, a metodologia aqui sugerida pode facilmente ser aplicada no ensino de conteúdos para a rede básica de educação. Resta ainda dizer que o tema escolhido para este trabalho se deve à grande experiência do autor como professor de Física e Matemática na rede pública de educação, o que possibilitou a construção da metodologia empregada.

O presente trabalho foi desenvolvido como segue:

No Capítulo 2, são abordados conceitos básicos tanto de Matemática Elementar quanto da Física, também é feita uma introdução aos vetores e suas operações visando construir um conhecimento básico a ser utilizado no decorrer do trabalho.

Já no Capítulo 3, utilizou-se dos conceitos do capítulo anterior para desenvolver os tópicos relacionados à mecânica, uma vez que a grande maioria das grandezas são vetoriais.

A seguir, no Capítulo 4, são desenvolvidas práticas educacionais onde se terá a oportunidade de ver na prática a aplicação da teoria estudada.

Finalmente, no Capítulo 5, são apresentadas as conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE VETORES

Em ciências aplicadas, verifica-se a existência de um grande número de grandezas que ficam bem definidas, apenas com seu valor numérico, estas são denominadas de grandezas escalares. Entretanto, muitas delas, além do seu valor numérico (módulo), necessitam de uma orientação (direção e sentido), tais grandezas são denominadas de grandezas vetoriais, para isto, elas são representadas por um vetor (segmento de reta orientado, com origem e extremidade), onde o mesmo representa as três (3) características da grandeza física vetorial que são: módulo, direção e sentido**.**

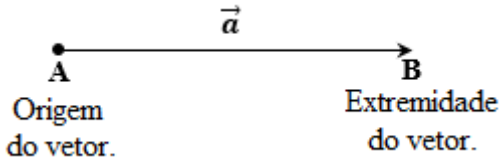


Figura 2.1. Ilustração de um vetor

Na Fig.(2.1), $\vec{a}$ é o vetor, $\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|$ ou $\|\vec{a}\|$ representam o módulo (comprimento) da grandeza física; $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ representa a direção da grandeza física; A para B representa o sentido da grandeza física. Para facilitar a escrita, no decorrer do trabalho o módulo do vetor $\|\vec{a}\|$ será descrito apenas por a.

A velocidade, aceleração, força, impulso, quantidade de movimento, posição, deslocamento, torque, momento angular, campos (gravitacional, elétrico e magnético), são alguns exemplos de grandezas físicas vetoriais.

Se a grandeza física vetorial $\vec{a}$ for, por exemplo, a velocidade, esta será representada por $\vec{\mathrm{v}}$, a mesma é medida no Sistema Internacional (SI) em $\mathrm{m/s}$, pois, $\vec{\mathrm{v}} = \lim_{\Delta \mathrm{t} \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathrm{r}}}{\Delta \mathrm{t}}$, em que $\Delta \vec{\mathrm{r}}$ representa o vetor deslocamento e $\Delta \mathrm{t}$ representa o intervalo de tempo. Tal fato é ilustrado na Fig.(2.2).

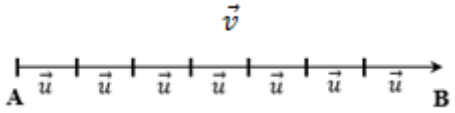


Figura 2.2. Representação do vetor velocidade

Observando a Fig.(2.2), verifica-se que o comprimento do vetor $\vec{v}$ é expresso por:

$$\|\vec{v}\| = v = |7|.\|\vec{u}\| = 7 \qquad (2.1)$$

sendo que $\vec{u}$ representa o vetor unitário. Portanto, se módulo de $\vec{u}$ vale 1, então, tem-se: $v = 7\ m/s$.

2.1 Adição de Vetores

Muitas vezes faz-se necessário, somar velocidades, forças, dentre outras, portanto, tem-se que somá-las vetorialmente. Ao se efetuar a soma entre dois ou mais vetores, eles tem que ser de mesma natureza física, velocidade só poderá ser somada à velocidade, e assim por diante.

A soma de dois vetores, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, que representam a velocidade de duas partículas, é ilustrado na Fig.(2.3):

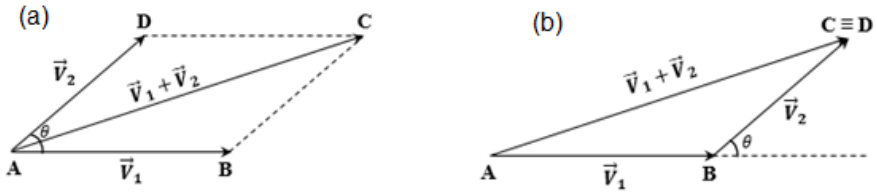


Figura 2.3. Soma de vetores: (a) Soma de vetores de mesma origem, (b) Soma de vetores em sequência

Na Fig.(2.3).(a), tem-se a chamada Regra do Paralelogramo que, matematicamente, é descrita por:

$$\|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\| \leq \|\vec{v}_1\| + \|\vec{v}_2\| \quad (2.2)$$

Na Fig.(2.3).(b), tem-se a Regra do Polígono em que o vetor $\vec{v}_2$ é transladado, de tal forma que a sua origem coincida com a extremidade do vetor $\vec{v}_1$. Ao se transladar um vetor, preserva-se o módulo, a direção e o sentido, mudando apenas o ponto de aplicação do mesmo.

Com base na Eq.(2.2) é necessário determinar o módulo da soma de $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, para isto, será utilizada a lei dos cossenos, descrita como segue:

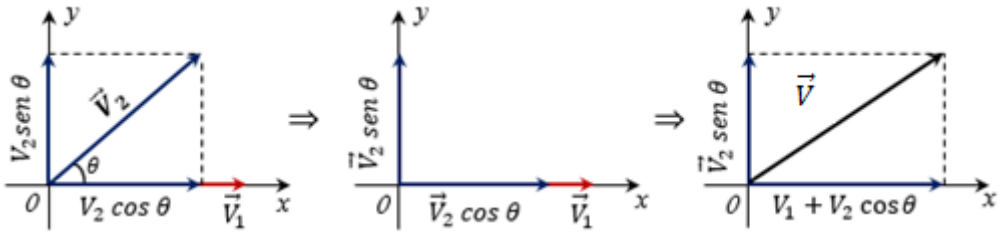


Figura 2.4. Ilustração da lei dos cossenos

Com base na Fig.(2.4), utilizando o Teorema de Pitágoras, pode-se escrever:

$$v^2 = (v_1 + v_2 \cos\theta)^2 + (v_2 sen\,\theta)^2 \quad (2.3)$$

desenvolvendo a Eq.(2.3) tem-se:

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2(\cos^2\theta + sen^2\theta) + 2v_1v_2 \cos\theta \quad (2.4)$$

devido à identidade trigonométrica:

$$\cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1 \quad (2.5)$$

então, a Eq.(2.4) torna-se:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_1 \cos(\theta)} \quad (2.6)$$

obtém-se, desta forma, a soma de dois vetores que formam um ângulo θ entre si, a qual é dita lei dos cossenos.

2.2 Projeção de um Vetor nos Eixos de Coordenadas

A Fig.(2.5) ilustra o procedimento para se calcular o efeito de um vetor em uma dada direção. Sendo $\vec{F}$ o vetor na direção $\overrightarrow{AB}$, um vetor aplicado em um ponto P material.

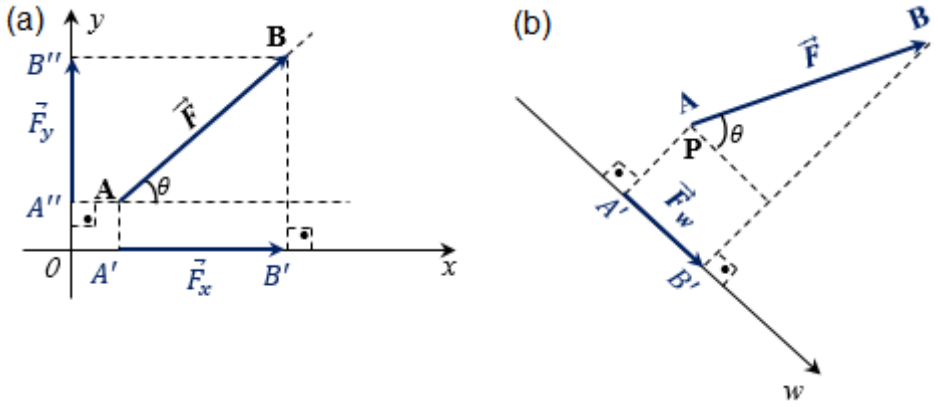


Figura 2.5. Projeção de um vetor em um eixo

Na Fig.(2.5), $\vec{F}_x$ é a projeção de $\vec{F}$ na direção do eixo x, esta componente é o efeito da grandeza $\vec{F}$ produzida na direção x (horizontal), $\vec{F}_y$ é a projeção de $\vec{F}$ na direção y, esta componente é o efeito que a grandeza $\vec{F}$ produzida na direção de y (vertical); $\vec{F}_w$ é o efeito de $\vec{F}$, produzida na direção w.

Pode-se exemplificar tal metodologia imaginando uma pista de um aeroporto, onde se dispõe de um caminhão para abastecer as aeronaves, um helicóptero e um avião. O caminhão tem apenas velocidade na direção horizontal no plano da pista, ou seja, esta componente de velocidade produz no caminhão (deslocamento de afastamento ou aproximação das aeronaves). O helicóptero tem apenas uma componente na direção vertical, portanto, a componente vertical, faz com que o helicóptero ganhe apenas altura (neste caso).

Enquanto o avião ao levantar voo, tem duas componentes de velocidade, $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$; $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$. A componente $\vec{v}_x$ produz o afastamento horizontal do avião em relação ao aeroporto, enquanto $\vec{v}_y$, faz com que o avião ganhe altura, em relação ao aeroporto.

O mesmo ocorre com todas as grandezas físicas vetoriais.

Todas as grandezas físicas que ficam bem definidas apenas com o seu valor numérico são grandezas físicas escalares. Dentre elas, pode-se enumerar, distância, massa, tempo, energia, pressão, corrente elétrica, carga elétrica, intensidade luminosa, intensidade sonora, temperatura, dentre outras. No SI ou no sistema MKS tem-se: massa (Kg), tempo (s), distância (m), corrente elétrica (A), temperatura (K), energia $(\mathcal{J})$, intensidade luminosa $(\mathbb{C}$, candela).

2.3 Método das Projeções e Soma de Dois ou mais Vetores

Sejam $\vec{F}_1; \vec{F}_2;$ ...; $\vec{F}_n$ forças que atuam em um sistema. Decompõem-se cada força nos eixos de coordenadas, encontrando assim os seus efeitos produzidos ou não, nas direções dos eixos de coordenadas. Soma-se os efeitos em cada eixo de coordenadas de todas às forças que atuam no sistema, e posteriormente determina a força resultante que é a soma: $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$.

Este procedimento é ilustrado na Eq.(2.7) abaixo:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n \begin{cases} \vec{F}_x = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} + \cdots + \vec{F}_{nx} \\ \vec{F}_y = \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} + \cdots + \vec{F}_{ny} \\ \vec{F}_z = \vec{F}_{1z} + \vec{F}_{2z} + \cdots + \vec{F}_{nz} \end{cases} \tag{2.7}$$

A Fig.(2.6) ilustra a decomposição da força $\vec{F}_1$.

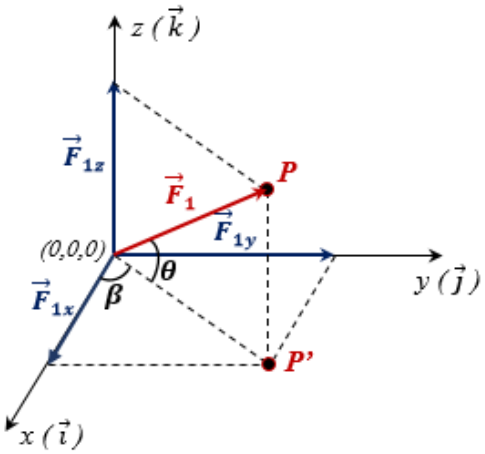


Figura 2.6. Decomposição de um vetor no espaço

Em que P' é o ponto onde a perpendicular passando por P é secante ao plano xy.

Utilizando-se da função $\mathrm{sen}(\theta)$, é estabelecida a componente da força na direção de z.

$$\mathrm{sen}(\theta) = \frac{F_{1z}}{F_1} \Rightarrow F_{1z} = F_1.\mathrm{sen}(\theta) \qquad (2.8)$$

A partir da função $\cos(\theta)$ determina-se a componente da força no plano xy.

$$\cos(\theta) = \frac{\overline{OP}'}{F_1} \Rightarrow \overline{OP}' = F_1.\cos(\theta) \qquad (2.9)$$

Com base na função $\cos(\beta)$ define-se a componente da força $\overline{OP}'$ na direção de x.

$$\cos(\beta) = \frac{F_{1x}}{\overline{OP}'} \Rightarrow F_{1x} = F_1.\cos(\theta).\cos(\beta) \qquad (2.10)$$

Aplicando a função $\mathrm{sen}(\beta)$ tem-se a componente da força $\overline{OP}'$ na direção de y.

$$\mathrm{sen}(\beta) = \frac{F_{1y}}{\overline{OP}'} \Rightarrow F_{1y} = F_1.\cos(\theta).\mathrm{sen}(\beta) \qquad (2.11)$$

A força total é então escrita como:

$$\vec{F}_1 = F_{1x}\hat{i} + F_{1y}\hat{j} + F_{1z}\hat{k} \quad (2.12)$$

A partir da Eq.(2.12) pode se calcular a força $\vec{F}_1$:

$$\vec{F}_1 = F_1.\cos(\theta).\cos(\beta)\hat{i} + F_1.\cos(\theta).\text{sen}(\beta)\hat{j} + F_1.\text{sen}(\theta)\hat{k} \quad (2.13)$$

assim, o módulo da força $\vec{F}_1$ é calculado como:

$$\|\vec{F}_1\| = \sqrt{[F_1\cos(\theta)\cos(\beta)]^2 + [F_1.\cos(\theta)\text{sen}(\beta)]^2 + [F_1\text{sen}(\theta)]^2} \quad (2.14)$$

desenvolvendo as potências tem-se:

$$\|\vec{F}_1\| = \sqrt{F_1^2\cos^2\theta.\cos^2\beta + F_1^2\cos^2\theta.\text{sen}^2\beta + F_1^2.\text{sen}^2\theta} \quad (2.15)$$

a partir do Ciclo Trigonométrico, tem-se $\cos^2(\beta) + \text{sen}^2(\beta) = 1$, assim:

$$\|\vec{F}_1\| = \sqrt{F_1^2\cos^2\theta(\cos^2\beta + \text{sen}^2\beta) + F_1^2\text{sen}^2\theta} = \sqrt{F_1^2\cos^2\theta + F_1^2\text{sen}^2\theta} \quad (2.16)$$

então:

$$\|\vec{F}_1\| = \sqrt{F_1^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)} \quad (2.17)$$

$$\|\vec{F}_1\| = F_1 \quad (2.18)$$

Este mesmo procedimento, deve ser feito para todos os outros vetores $\vec{F}_2; \vec{F}_3; \ldots; \vec{F}_n$.

2.4 Soma de Dois Vetores no Plano xy

Para determinar a resultante entre dois ou mais vetores, calcula-se as componentes de cada um deles nas direções x e y. Soma-se as componentes dos vetores envolvidos nas direções de x e de y e finalmente, determina-se a soma vetorial de suas componentes, sabendo-se que elas são perpendiculares entre si. Aplicando-se o Teorema de Pitágoras (HALLIDAY, 2006), tem-se:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \tag{2.19}$$

Com a finalidade de exemplificar o procedimento, apresenta-se o problema a seguir:

Sejam, $F_1 = 80N$; $F_2 = 60N$; $\cos(\alpha) = 0{,}8$; $\text{sen}(\alpha) = 0{,}6$, conforme Fig.(2.7):

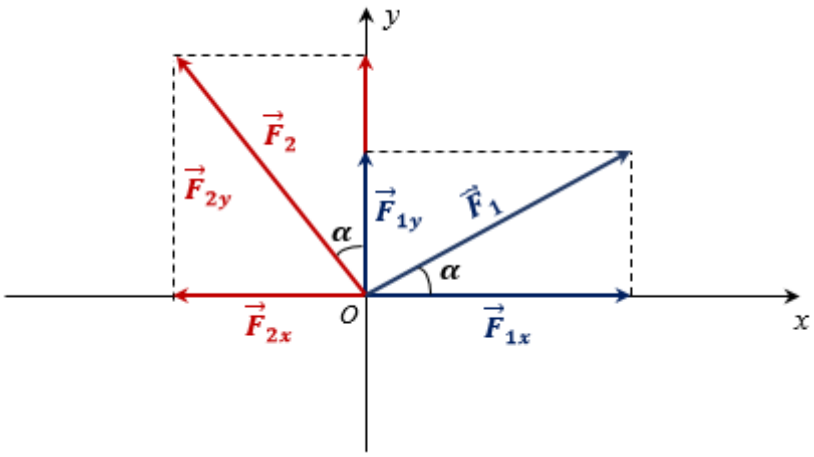


Figura 2.7. Decomposição de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$

Será calculado a seguir o módulo do vetor resultante, dado na Eq. (2.20):

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \therefore \begin{cases} \vec{F}_x = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} \\ \vec{F}_y = \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} \end{cases} \tag{2.20}$$

Para encontrar a soma no eixo x, faz-se:

$$F_x = F_1.\cos(\alpha) - F_2\text{sen}(\alpha) \tag{2.21}$$

substituindo os valores dados, obtém-se:

$$F_x = 80.(0{,}8) - 60.(0{,}6) = 64 - 36 = 28N \tag{2.22}$$

$$F_x = 28N \tag{2.23}$$

pode-se agora encontrar as projeções das forças no eixo y.

$$\mathrm{F_y} = \mathrm{F_1 sen}(\alpha) + \mathrm{F_2}\cos(\alpha) \tag{2.24}$$

$$\mathrm{F_y} = 80.(0{,}6) + 60.(0{,}8) = 48 + 48 = 96\mathrm{N} \tag{2.25}$$

A Fig.(2.8) mostra a resultante da soma dos vetores:

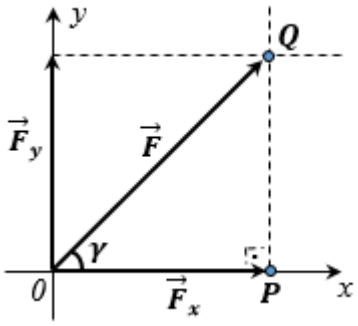


Figura 2.8. Resultante da soma de vetores $\vec{\mathrm{F}}$

Sabe-se que o triângulo OPQ é retângulo, assim, utilizando o Teorema de Pitágoras tem-se:

$$\mathrm{F} = \sqrt{\mathrm{F_x}^2 + \mathrm{F_y}^2} \Rightarrow \mathrm{F} = \sqrt{(28)^2 + (96)^2} \Rightarrow \mathrm{F} = \sqrt{784 + 9216} = \sqrt{10.000} \tag{2.26}$$

o que resulta em:

$$\mathrm{F} = 100\mathrm{N} \therefore \mathrm{tg}(\gamma) = \frac{\mathrm{F_y}}{\mathrm{F_x}} = \frac{96}{28} = 3{,}42857 \tag{2.27}$$

Procedendo agora o cálculo do ângulo γ:

$$\gamma = \mathrm{arctg}(3{,}42857) \therefore \gamma = 73{,}74° = 1{,}287\ \mathrm{rad} \tag{2.28}$$

É possível verificar facilmente que o ângulo entre $\vec{\mathrm{F}}_1$ e $\vec{\mathrm{F}}_2$ é de $90°$, logo, pode-se aplicar o Teorema de Pitágoras, diretamente:

$$\mathrm{F}^2 = \mathrm{F_1}^2 + \mathrm{F_2}^2 \therefore \mathrm{F} = \sqrt{(80)^2 + (60)^2} = \sqrt{10.000} \Rightarrow \mathrm{F} = 100\mathrm{N} \tag{2.29}$$

assim, para o problema em questão, tem-se:

$$\vec{F}:\begin{cases}\text{módulo: } 100\text{N}\\ \text{direção: ascendente, formando um ângulo } \gamma = 73{,}74° \text{ com o eixo horizontal}\\ \text{sentido: 0 para Q, veja Fig. (2.8)}\end{cases}$$

2.5 Produto Escalar entre Dois Vetores

O produto escalar entre dois vetores é por definição um escalar (número) que expressa uma quantidade física de uma determinada grandeza, (YOUNG, 2008).

Por definição, o produto escalar entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é dado por:

$$\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\cos(\theta). \tag{2.30}$$

Com o objetivo de ilustrar tal procedimento, tomam-se os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, descritos na Eq.(2.31):

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} \text{ e } \vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k} \tag{2.31}$$

O procedimento para o produto escalar entre estes vetores é dado por:

$$\vec{a}.\vec{b} = \left(a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}\right).\left(b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}\right)\begin{cases}\hat{\imath}.\hat{\jmath} = 0\\ \|1\|.\|\hat{\jmath}\|.\cos(90) = 0\\ \vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\cos(\theta)\end{cases} \tag{2.32}$$

de onde se obtém: $\vec{a}.\vec{b} = a_x.b_x + a_y.b_y + a_z.b_z \Rightarrow \text{número (escalar)}.$

Para exemplificar tal conceito, seja $\vec{F}$ o vetor $\vec{b}$, e seja $\vec{a}$ o vetor deslocamento $\Delta\vec{r}$ de um objeto. O módulo da componente de $\vec{F}$ multiplicado pelo módulo do deslocamento $(\Delta\vec{r})$ fornece a energia para arrastar o corpo de uma posição (A) até uma posição (B), dada na Eq.(2.33) e ilustrado na Fig.(2.9):

$${}_FW_A^B = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B |\vec{F}|.|d\vec{r}|.\cos(\theta) \rightarrow \text{Valor do trabalho} \tag{2.33}$$

Sabendo-se que ${}_FW_A^B$ o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ no deslocamento de A até B.

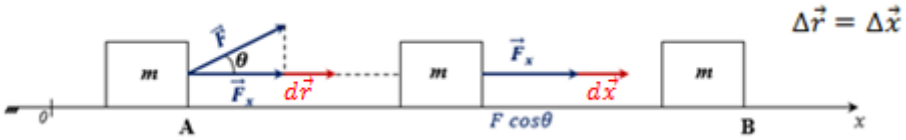


Figura 2.9. Ilustração do conceito de trabalho

A componente $\vec{F}_x$ que tem módulo $F\cos(\theta)$ encontra-se na direção e sentido do vetor deslocamento.

Da definição de trabalho, tem-se:

$$\vec{F}.(\Delta\vec{r}) = (F\cos\theta\,\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}).(\overline{AB}\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}) \tag{2.34}$$

o $\Delta\vec{r}$ é descrito conforme a Eq.(2.35):

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{x} = \overline{AB}\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} \therefore \left(\vec{F}.\Delta\vec{r}\right) = \|F\cos\theta\|.\|\overline{AB}\|.\cos(0°) \tag{2.35}$$

do conceito de trabalho:

$$_{F}W_{A}^{B} = \|F\cos\theta\|.\|\overline{AB}\|.1 \therefore \ _{F}W_{A}^{B} = F.\overline{AB}.\cos(\theta) \tag{2.36}$$

Uma aplicação simples da Eq.(2.36) pode ser vista como segue:

Dados: $F = 50N$; $\overline{AB} = 10m$ e $\theta = 37°$

$$_{F}W_{A}^{B} = 50.10.\cos(37°) = 50.10.0{,}866 \tag{2.37}$$

$$_{F}W_{A}^{B} = 433,\overline{3}\ \text{Joules} \tag{2.38}$$

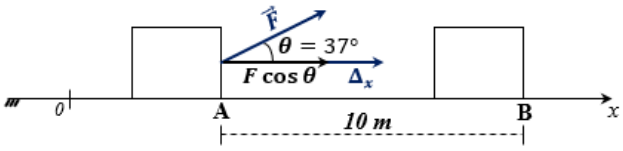


Figura 2.10. Aplicação de Trabalho

Outra interessante aplicação envolvendo tais conceitos é o de se calcular o fluxo (ϕ_m) magnético que atravessa uma determinada área, sabendo-se o comportamento do campo magnético $\vec{B}$ naquela secção, ou, elemento de área $(d\vec{A})$ é conhecida. Define-se o fluxo magnético como sendo: $\phi_m = \int \vec{B}.d\vec{A}$, onde $\vec{B}$ é o campo magnético e $d\vec{A}$ representa o elemento de área por onde o fluxo (linhas de indução) atravessam. $d\vec{A} = dA.\hat{n}$, onde $\hat{n}$ é o vetor normal a área de módulo 1, e dA é o escalar representando a intensidade ou valor do elemento de área. Tal conceito pode ser observado na Fig.(2.11).

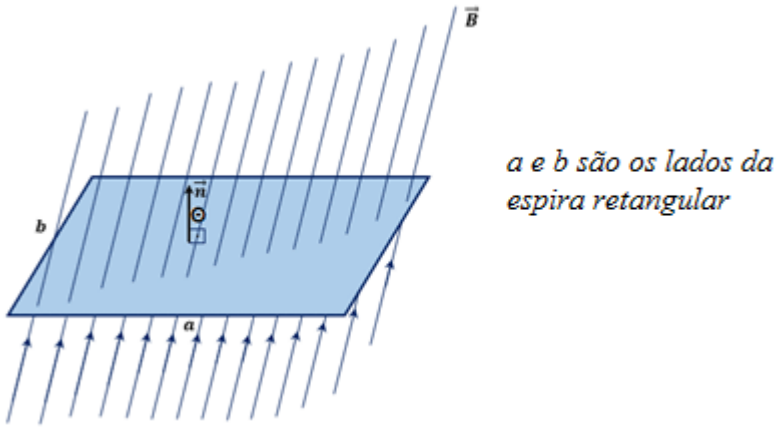


Fig. 2.11. Linhas de indução atravessando uma secção

Sabendo-se que, em $\phi_m = \int \vec{B}.d\vec{A}$, $\vec{B}$ é uniforme e em $\phi_m = B\int dA.\cos\theta$, θ é fixo, tem-se a Eq.(2.39):

$$\phi_m = B.\cos\theta\,.\int dA = B.\cos\theta\,.(a.b) \qquad (2.39)$$

sabendo-se que $\int dA = a.b$, tem-se:

$$\phi_m = B.A.\cos\theta \qquad (2.40)$$

se θ for variável de maneira uniforme, de tal forma que ω seja constante, para cada elemento $d\vec{A}$, tem-se:

$$\phi_m = B.A.\cos(\theta), \text{ onde } \theta = \theta_0 + \omega t \qquad (2.41)$$

a partir da Eq.(2.41), obtém-se:

$$\phi_m = B.A.\cos(\theta_0 + \omega t) \tag{2.42}$$

segundo a Lei de Faraday, a força eletromotriz induzida é dada por:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}[B.A.\cos(\theta_0 + \omega t)] \tag{2.43}$$

desenvolvendo a derivada da Eq.(2.43), tem-se:

$$\varepsilon_i = B.A.\omega.\mathrm{sen}(\theta_0 + \omega t) \text{ f.e.m. induzida.} \tag{2.44}$$

2.6 O Produto Vetorial

O produto vetorial entre dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, gera um terceiro vetor $\vec{a} \times \vec{b}$ de natureza física que nada tem a ver com os dois vetores citados, porém, ele tem uma direção que é perpendicular tanto a $\vec{a}$ quanto a $\vec{b}$, a partir disto tem-se a Eq.(2.45):

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = a.b.\mathrm{sen}(\theta) \tag{2.45}$$

$\vec{a}$ e $\vec{b}$ são de naturezas diferentes, formando entre si um ângulo θ, $0 \leq \theta \leq 180°$.

Na Fig.(2.12), tem-se que $\vec{a} \times \vec{b}$ é um vetor de módulo $(a.b.\mathrm{sen}(\theta))$ perpendicular ao plano formado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$, cujo sentido é perpendicular a estes. A grosso modo, obtém-se o sentido deste vetor resultante da seguinte maneira: ao deslizar a mão direita empurrando o primeiro vetor $\vec{a}$, sobre $\vec{b}$; o polegar desta mão dará o sentido do produto vetorial.

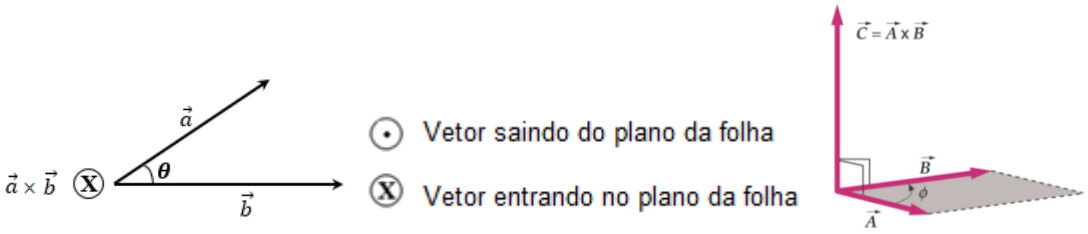


Figura 2.12. Ilustração de produto vetorial

Exemplificando o procedimento de um produto vetorial, pode-se citar o de uma carga elétrica $q > 0$ lançada com velocidade $\vec{v}$ perpendicularmente as linhas de indução de um campo magnético $\vec{B}$, onde a força magnética é dada por: $\vec{F}_m = q.\vec{v} \times \vec{B}$. O sentido da força elétrica $\vec{F}_m$ pode ser calculado observando a Fig.(2.13):

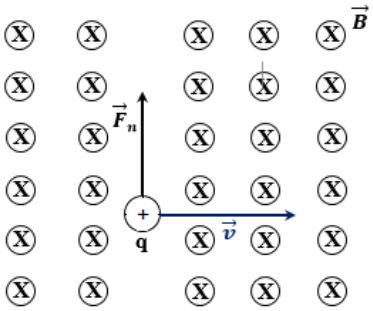


Figura 2.13. Produto Vetorial

Sendo que $\vec{F}_m$ é perpendicular tanto a $\vec{B}$, quanto a $\vec{v}$. Os vetores $\vec{v}$ e $\vec{B}$ formam um plano perpendicular ao plano da folha de papel (Fig.2.12), logo $\vec{F}_m$ encontra-se no plano do papel para cima, isto porque q é positivo. Caso, q for negativo, inverte-se o sentido da força magnética.

Observa-se na Fig.(2.14), o caso em que se tem uma força $\vec{F} = 2t\hat{k}$ aplicada à um cilindro rotativo de raio $0{,}5\ m$. O raio vetor é $\vec{r} = 0{,}5\cos(2t)\hat{i} + 0{,}5\,sen(2t)\hat{j}$. Pode-se determinar o torque $(\vec{\tau})$ recebido pelo cilindro, devido à aplicação da força $\vec{F}$, na direção de $\hat{k}$, adotando-se o eixo do cilindro como referência (eixo axial).

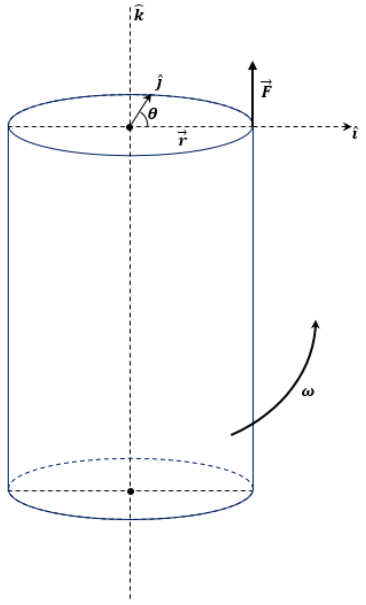


Figura 2.14. Cilindro para ilustração do produto vetorial

A definição da grandeza torque, é representada na Eq.(2.46):

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = [0{,}5\cos(2t)\hat{\imath} + 0{,}5\,\mathrm{sen}(2t)\hat{\jmath}] \times 2t\hat{k} \tag{2.46}$$

que pode ser escrita como:

$$\vec{\tau} = -t\cos(2t)\hat{\jmath} + t\,\mathrm{sen}(2t)\,\hat{\imath} \tag{2.47}$$

a partir da Eq.(2.47), tem-se o módulo de $\vec{\tau}$, que vale:

$$|\vec{\tau}| = \sqrt{(-t\cos(2t))^2 + (t\,\mathrm{sen}(2t))^2} = \sqrt{t^2[\cos^2(2t) + \mathrm{sen}^2(2t)]} \tag{2.48}$$

sendo $|\vec{\tau}| = t$, o módulo do torque recebido pelo cilindro cresce linearmente ao decorrer do tempo, ou pode-se determinar o torque utilizando o determinante, como segue na Eq.(2.49):

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0{,}5\cos(2t) & 0{,}5\,\mathrm{sen}(2t) & 0 \\ 0 & 0 & 2t \end{vmatrix} = t\,\mathrm{sen}(2t)\hat{\imath} - t\cos(2t)\hat{\jmath} \tag{2.49}$$

resolvendo a Eq.(2.49) tem-se $\vec{\tau} = t\,\mathrm{sen}(2t)\hat{\imath} - t\cos(2t)\hat{\jmath}$, que está de acordo com a Eq.(2.47).

2.7 Conceito dos Movimentos

Movimento é a mudança de posição no decorrer do tempo, assim, seguem os seguintes conceitos:

- Referencial: é um ponto inercial (fixo) que é adotado para estudar os movimentos.

- Trajetória: É o “rastro” deixado pela partícula durante o seu movimento, tendo portanto diversos formatos. Esta trajetória pode então ser vistas nas Figuras de (2.15) a (2.18):

  - Trajetória Retilínea:

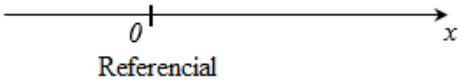


Figura 2.15. Trajetória retilínea

  - Trajetória Curvilínea:

Figura 2.16. Trajetória curvilínea

  - Trajetória Circular:

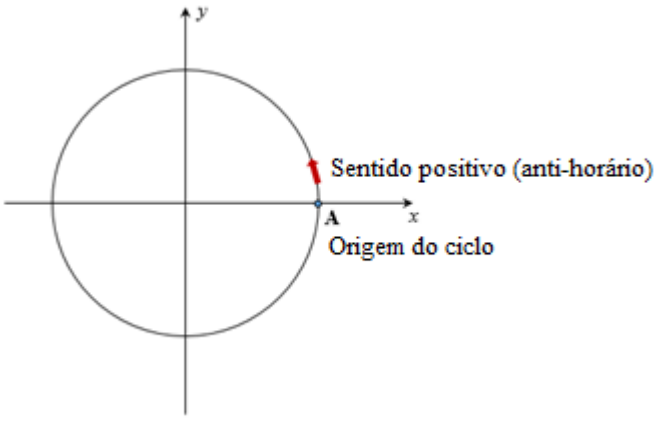


Figura 2.17. Trajetória circular

- Trajetória Helicoidal:

Figura 2.18. Trajetória helicoidal

- Posição: é uma grandeza vetorial associada ao movimento que localiza a partícula em relação ao referencial, como observado na Fig(2.19).

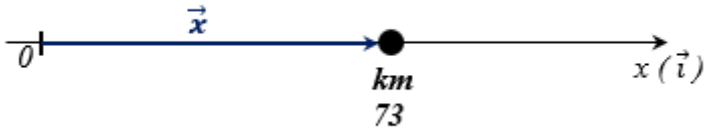


Figura 2.19. Posição da partícula em um dado instante

$$\therefore \vec{x} = 73\hat{i}; x \rightarrow Km \qquad (2.50)$$

- Deslocamento: É uma grandeza vetorial associada movimento, podendo ser escrita como $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ como visto na Fig.(2.20) abaixo:

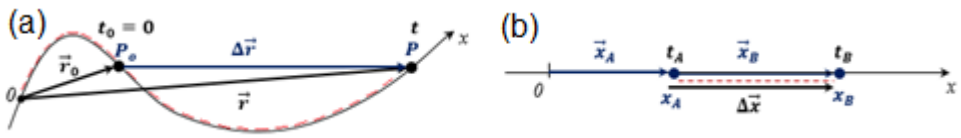


Figura 2.20. Representação vetorial de posição, vetor deslocamento e distância percorrida: (a) Deslocamento em uma trajetória curvilínea, (b) Deslocamento numa trajetória retilínea

O deslocamento $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$, tem origem em P_0 e extremidade em P. $\Delta\vec{r}$ orienta o movimento da partícula.

Sejam $A(10,0)$ e $B(21,0)$, os vetores posições dados: $\vec{x}_A = 10\hat{i}$ e $\vec{x}_B = 21\hat{i}$.

Substituindo os vetores A e B, calcula-se o vetor deslocamento:

$$\|\Delta\vec{x}\| = \|\vec{x}_B - \vec{x}_A\| = \|21\hat{i} - 10\hat{i}\| = \|11\hat{i}\| = 11 \quad (2.51)$$

- Distância percorrida: é o comprimento da curva deixada pela partícula. (Tracejado de vermelho na Fig.(2.20)).
- Tempo: é uma grandeza escalar, no SI é dado em segundo (s); as demais unidades de tempo são a hora, o minuto, a semana, o mês, o ano, a década, o século, entre outros.
- Velocidade $(\vec{v})$: é uma grandeza física vetorial associada ao movimento que mede a variação de posição no decorrer do tempo. É representada pela Fig.(2.21).

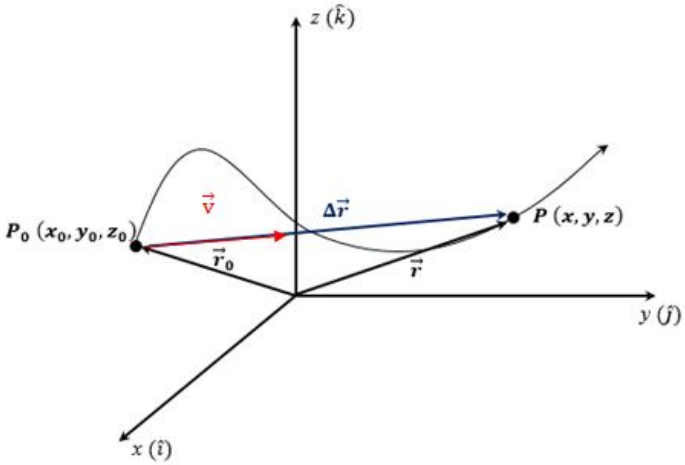


Figura 2.21: Velocidade na direção do deslocamento

O valor do vetor $\vec{v}$ é obtido através da Eq.(2.52), em que $\Delta\vec{r}$ é o vetor deslocamento, e Δt é o intervalo de tempo:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \text{ unidade } m/s \quad (2.52)$$

A velocidade $\vec{v}$ instantaneamente é sempre tangente à curva ponto a ponto. Pode-se ainda afirmar que:

Quando se tem $v > 0$ o movimento é progressivo.

Quando se tem $v < 0$ o movimento é retrógrado.

Para cada eixo de coordenadas tem-se a posição final e inicial, representadas nas Eq. (2.53) e (2.54), respectivamente.

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \tag{2.53}$$

$$\vec{r}_0 = x_0\hat{\imath} + y_0\hat{\jmath} + z_0\hat{k} \tag{2.54}$$

a partir das Eq. (2.53) e (2.54) calcula-se o vetor deslocamento que será dado por:

$$\Delta\vec{r} = (x - x_0)\hat{\imath} + (y - y_0)\hat{\jmath} + (z - z_0)\hat{k} \tag{2.55}$$

aplicando a definição de velocidade, dada pela Eq.(2.52), tem-se:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\imath} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\jmath} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k} \tag{2.56}$$

pode-se então representar a velocidade pela Eq.(2.57):

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k} \tag{2.57}$$

Ainda neste raciocínio, a velocidade média ($\vec{V}_m$) pode ser escrita como $\vec{V}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. Já a velocidade instantânea ($\vec{V}_i$) pode ser descrita por $\vec{V}_i = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

Caso o movimento do objeto seja retilíneo ao longo de x, a velocidade é dada por $\vec{v} = v_x\hat{\imath}$ ou v_x, porém se o movimento do objeto for no plano xy, a velocidade é dada por $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}$.

Calculando o módulo da velocidade no plano, chega-se a:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} \tag{2.58}$$

sendo o movimento no espaço, este é descrito como a Eq.(2.59) e seu módulo é escrito como na Eq.(2.60):

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k} \tag{2.59}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} \tag{2.60}$$

- Aceleração ($\vec{a}$) : É uma grandeza física vetorial associada ao movimento que mede a variação da velocidade no decorrer do tempo, definida por:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \text{ unidade } \frac{m}{s^2} \quad (2.61)$$

Na Eq.(2.62) tem-se o cálculo do módulo da aceleração:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_N \therefore a = \sqrt{{a_t}^2 + {a_N}^2} \quad (2.62)$$

sendo que $\vec{a}_t$ é a aceleração tangencial, pois este tangencia a curva ponto a ponto, na direção da velocidade, medindo a variação do módulo de $\vec{v}$ no decorrer do tempo; $\vec{a}_N$ é a aceleração normal (aponta para o centro da curva) que mede a variação da direção de $\vec{v}$, portanto, aceleração radial é descrita por.

$\vec{a}_N = \frac{d(\vec{v})}{dt}$; em relação à direção de $\vec{v}$. (2.63)

Cálculo da aceleração normal (radial).

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r} \rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t}.\frac{v}{r} \rightarrow a_N = \frac{v^2}{r} \quad (2.64)$$

que, graficamente pode ser observado na Fig.(2.22):

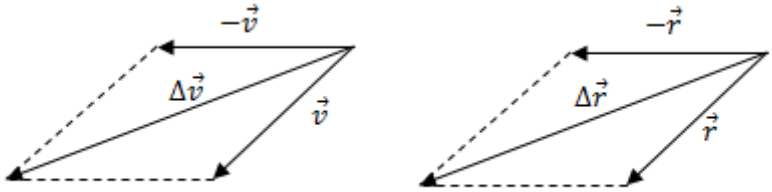


Figura 2.22. Aceleração normal

onde $a_N = \frac{v^2}{R}$ ou $a_N = w^2.R$ representam os movimentos curvilíneos e pode ser visto na Fig.(2.23):

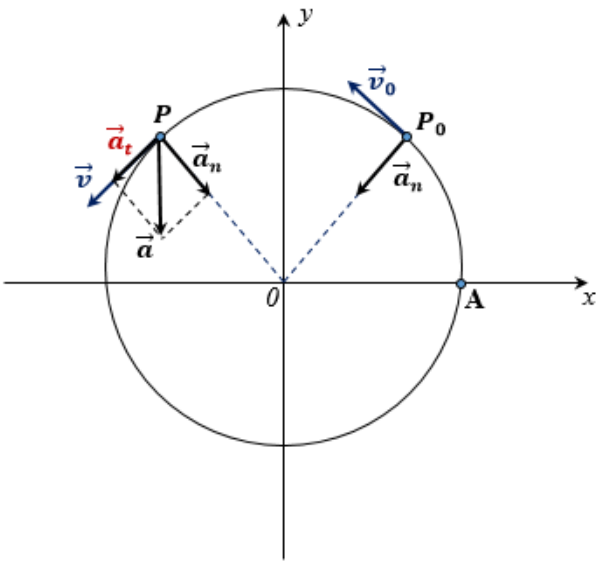


Figura 2.23. Movimento curvilíneo

$$\vec{a} = \vec{a}_{\mathrm{t}} + \vec{a}_{\mathrm{N}} \tag{2.65}$$

O Movimento Circular Uniforme (MCU) pode ser descrito a partir do ponto material abaixo:

$$a_{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{R}} \tag{2.66}$$

na Eq.(2.65), $\|\vec{\mathrm{v}}\|$ é constante e, com isto, $a_{\mathrm{t}} = 0$, assim tem-se:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\mathrm{t}} + \vec{a}_{\mathrm{N}} \therefore \|\vec{a}\| = a_{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{R}} \tag{2.67}$$

devido apenas, a componente centrípeta ou normal.

2.8 Grandezas Físicas Abordadas no Estudo dos Movimentos

No estudo dos movimentos, várias grandezas são utilizadas na descrição dos mesmos. Destaca-se a seguir as grandezas principais envolvidas no estudo dos vários tipos de movimentos.

- Trabalho realizado pela força $\vec{F}$ aplicado em um corpo de massa m no deslocamento de A até B: é uma grandeza física escalar associada ao movimento de um objeto que mede a energia necessária para transportar um objeto de A até B, seja ao longo de eixo, plano ou espaço, e é definido por ${}_{F}W_{A}^{B} = \int_{A}^{B} \vec{F}.\,d\vec{r}$ unidade: $1N.\,1m = 1\mathcal{J}$.

Nota-se que o produto escalar ou produto interno entre dois vetores $\vec{F}$ e $\Delta\vec{r}$ é um número que tem por unidade de medida Joule $(\mathcal{J})$ e fornece a energia para transportar um objeto de A até B.

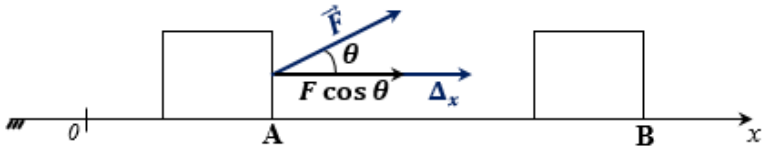


Figura 2.24. Conceituação de trabalho

A Eq.(2.68) é utilizada para definir o trabalho de uma força.

$${}_{F}W_{A}^{B} = \int \vec{F}.\,d\vec{r} \qquad (2.68)$$

Se a força resultante $\vec{F}_R$ que atua no objeto for constante, então tem-se que ${}_{F_R}W_{A}^{B} = \vec{F}_R.\Delta\vec{x} = \left\|\vec{F}_R\right\|.\|\Delta\vec{x}\|\cos\theta$, sendo que $\vec{F}_R$ e $\Delta\vec{x}$ tem o mesmo sentido, então $\theta = 0°$ e $\cos(0°) = 1$, o que fornece ${}_{F_R}W_{A}^{B} = F.\overline{AB}$, (veja Fig. (2.24)), neste caso, trabalho é motor, ou seja ${}_{F_R}W_{A}^{B} = \Delta E_C = E_{CB} - E_{CA}$, onde E_C é a energia cinética da partícula ou objeto de massa (m) dada por: $E_C = \frac{1}{2}m.v_x^2$.

Se a força resultante $\vec{F}_R$ que atua no objeto num plano for constante: ${}_{F_R}W_{A}^{B} = \vec{F}_R.\Delta\vec{r}$. Então:

$$\vec{F}_R = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} \qquad (2.69)$$

já o deslocamento no plano é dado pela Eq.(2.70):

$$\Delta\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} \qquad (2.70)$$

aplicando o produto escalar na Eq.(2.68), tem-se:

$$_{F_R}W_A^B = \vec{F}_R.\Delta\vec{r} = \left(F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath}\right).(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) = F_x.x + F_y.y = \Delta E_C \quad (2.71)$$

apresenta-se então na Eq.(2.72) o Teorema da Energia Cinética:

$$_{F_R}W_A^B = F_x.x + F_y.y = E_{CB} - E_{CA} \quad (2.72)$$

bem como a velocidade resultante é mostrada na Eq.(2.73):

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y \therefore \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (2.73)$$

A energia cinética é definida como segue:

$$E_C = \frac{1}{2}m.v^2 \quad (2.74)$$

onde m é a massa da partícula e v a velocidade da mesma.

Se a força resultante $\vec{F}_R$ atua no objeto no espaço: $_{F_R}W_A^B = \vec{F}_R.\Delta\vec{r}$, então esta é descrita por:

$$\vec{F}_R = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k} \text{ e } \Delta\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \quad (2.75)$$

aplicando o conceito de trabalho, é possível obter:

$$_{F_R}W_A^B = \vec{F}_R.\Delta\vec{r} = \left(F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}\right).(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}) \quad (2.76)$$

e, considerando o teorema da Energia Cinética tem-se a Eq.(2.77):

$$_{F_R}W_A^B = F_x.x + F_y.y + F_z.z = \Delta E_C = E_{CB} - E_{CA},\ E_C = \frac{1}{2}m.v^2 \quad (2.77)$$

A velocidade, bem como seu módulo, é definida no espaço de maneira similar ao que foi mostrado para o plano, ou seja, a velocidade no espaço é dada por:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z \quad (2.78)$$

e seu módulo é descrito na Eq.(2.79):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{2.79}$$

Se a variação da energia cinética for nula tem-se, $\Delta E_C = 0 \therefore E_{CB} - E_{CA} = 0 \therefore E_{CB} = E_{CA}$. Um sistema é dito conservativo quando atuam forças conservativas e forças não conservativas, de tal forma que o somatório do trabalho realizado pelas forças não conservativas sejam igual a zero. Então o trabalho resultante líquido será conservado. Forças ditas conservativas são: força peso, força elétrica e força elástica. A energia mecânica de um sistema é conservada. Então, tem-se:

$$E_m = E_c + E_p \tag{2.80}$$

Sendo E_m, a energia mecânica em qualquer ponto no sistema, E_c a energia cinética, E_p, a energia potencial e E_c a energia de movimento de um sistema.

A energia potencial (E_p) é dita energia de posição, pois, depende de um referencial, e é obtida a partir da Eq.(2.81):

$$E_p = m.g.y \tag{2.81}$$

m é a massa do objeto; g a aceleração da gravidade; y a altura do objeto.

Um exemplo de aplicação deste conceito pode ser dado ao abandonar um objeto de massa m nas proximidades da superfície terrestre, desprezando a resistência do ar, ou seja, o corpo encontra-se em queda livre submetido apenas a força da gravidade (Fig.(2.25)). É possível então calcular a energia necessária para que a força-peso aplicada no corpo, desloque o mesmo de A para B.

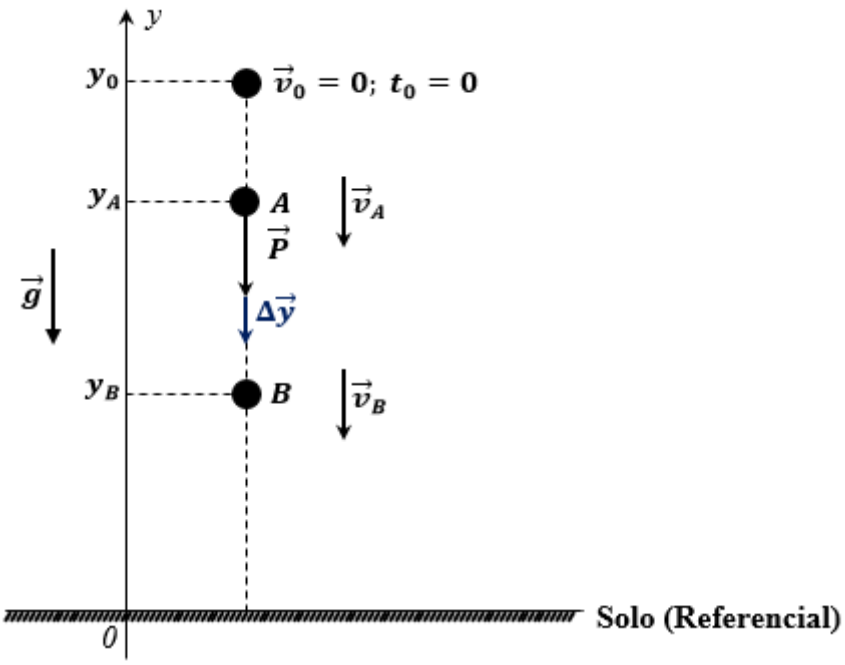


Figura 2.25. Queda livre

A definição de campo gravitacional, é dada como:

$$\vec{g} = \frac{\vec{P}}{m} \tag{2.82}$$

em que $\vec{g}$ é o campo gravitacional, $\vec{P}$ é a força que a atua no objeto num dado ponto do espaço e m é a massa do objeto.

Então, o peso de um objeto nas proximidades de um planeta pode ser dado por:

$$\vec{P} = m.\vec{g} \tag{2.83}$$

Já o vetor deslocamento do objeto na queda de um corpo é dado por:

$$\Delta\vec{y} = \vec{y}_B - \vec{y}_A \rightarrow \text{negativo.} \tag{2.84}$$

aplicando o conceito de trabalho, tem-se:

$$_PW_A^B = \vec{P}.(\Delta\vec{y}) \rightarrow \ _PW_A^B = \|\vec{P}\|.\|\Delta\vec{y}\|.\cos(0°) \tag{2.85}$$

utilizando a Eq.(2.84), a Eq.(2.85) é escrita como:

$$ {}_{\mathrm{P}}\mathrm{W}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = -\mathrm{mg}.(\mathrm{y_B} - \mathrm{y_A}) = -[\mathrm{mgy_B} - \mathrm{mgy_A}] \tag{2.86} $$

quando um sistema realiza trabalho, a sua energia potencial diminui, por isto o sinal negativo aparece na Eq.(2.87):

$$ {}_{\mathrm{P}}\mathrm{W}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = -[\mathrm{E_{PB}} - \mathrm{E_{PA}}] \tag{2.87} $$

$$ {}_{\mathrm{P}}\mathrm{W}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = -\Delta\mathrm{E_P} \tag{2.88} $$

pelo Teorema da Energia Cinética, tem-se:

$$ \Delta\mathrm{E_{CAB}} = \Delta\mathrm{E_P} \tag{2.89} $$

$$ \mathrm{E_{CB}} - \mathrm{E_{CA}} = -[\mathrm{E_{PB}} - \mathrm{E_{PA}}] \tag{2.90} $$

A conservação da energia mecânica, é representada na Eq.(2.91):

$$ \mathrm{E_{CB}} + \mathrm{E_{PB}} = \mathrm{E_{CA}} + \mathrm{E_{PA}} \tag{2.91} $$

Em um sistema conservativo, a energia em qualquer ponto é sempre a mesma. É a soma da energia cinética com a energia potencial $(\mathrm{E_c} + \mathrm{E_p})$.

Define-se energia potencial elástica como sendo:

$$ \mathrm{E_{p_e}} = \frac{\mathrm{kx}^2}{2} \tag{2.92} $$

Segue uma exemplificação de um sistema massa-mola, representado na Fig.(2.26), onde tornar-se-á possível a compreensão da energia da mola e a energia cinética envolvida no sistema abaixo.

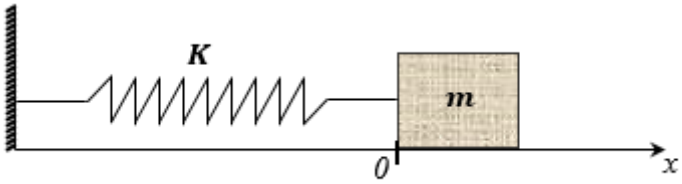


Figura 2.26. Trabalho da força elástica

Quando a massa se encontra na posição zero a deformação da mola é nula, portanto a força elástica também é nula $(\mathrm{F_E} = 0)$.

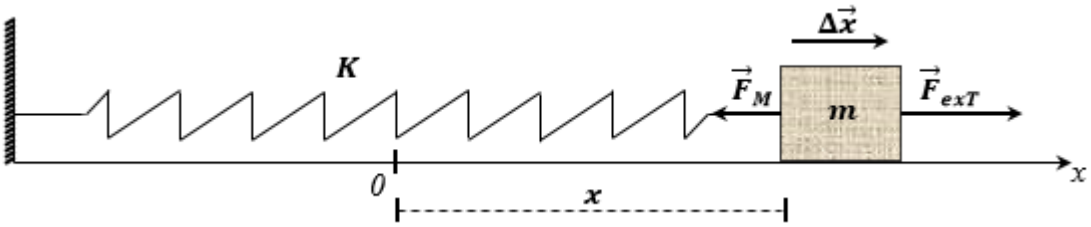


Figura 2.27: Mola deformada

A definição de força da mola $(\mathrm{F_M})$:

$$\mathrm{F_M} = -\mathrm{kx} \tag{2.93}$$

k, é a constante elástica da mola, que mede a elasticidade com que a mola se deforma. Para valores de k pequeno tem-se uma mola "macia" e para um valor alto de k tem-se uma mola dura.

x, é a deformação da mola.

$\vec{\mathrm{F}}_\mathrm{M}$ tem sentido oposto da força externa $(\vec{\mathrm{F}}_\mathrm{exT})$.

Aplicando-se o conceito de trabalho tem-se:

$$_{\mathrm{F_M}}\mathrm{W_A^B} = -\int_\mathrm{A}^\mathrm{B}[\vec{\mathrm{F}}_\mathrm{exT}.\,\Delta\vec{\mathrm{x}}] = -\int_\mathrm{A}^\mathrm{B}[\mathrm{kx\hat{i}}.\,\mathrm{dx\hat{i}}] \Rightarrow {}_{\mathrm{F_M}}\mathrm{W_A^B} = -\Delta\mathrm{E_{PE}} = -\left[\frac{\mathrm{kx^2}}{2}\right] \tag{2.94}$$

na Eq.(2.95) o sinal $(-)$ representa a perda de energia potencial elástica:

$$_{\mathrm{F_M}}\mathrm{W_A^B} = -\Delta\mathrm{E_{PE}} \tag{2.95}$$

$$\mathrm{E_{PE}} = \frac{\mathrm{kx^2}}{2} \tag{2.96}$$

Quando um sistema realiza trabalho, o mesmo perde energia.

- A definição de impulso $(\vec{\mathrm{I}})$ de uma força $(\vec{\mathrm{F}})$ é uma grandeza física vetorial associada ao movimento de um objeto, definida por, $\vec{\mathrm{I}} = \vec{\mathrm{F}}.\,\Delta\mathrm{t}$ [unidade: $\mathrm{N.\,s}$], em que $\Delta\mathrm{t}$ é o intervalo de tempo de atuação da força na partícula, representado na Fig.(2.28):

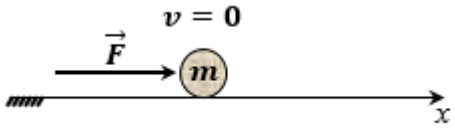


Figura 2.28: Conceituação de impulso

- A quantidade de movimento $(\vec{q})$ é uma grandeza física vetorial associada ao movimento de um objeto, definida por, $\vec{q} = m.\vec{v}$ com unidade dada em $Kg.\frac{m}{s}$; sendo m e $\vec{v}$, a massa e a velocidade da partícula, respectivamente.

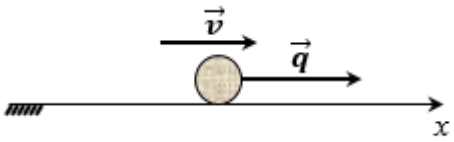


Figura 2.29: Conceituação da quantidade de movimento

Diz-se que a partícula recebeu um impulso devido a aplicação da força $\vec{F}$, num dado intervalo de tempo que atuou nela (partícula).

Se $\vec{q} = m.\vec{v}$ se mantém constante, então $\Delta\vec{q} = \vec{0}$; O impulso $(\vec{I})$ devido as forças resultantes (externas) é igual a variação da quantidade de movimento $\vec{I} = \Delta\vec{q}$; então se, $\Delta\vec{q} = \vec{0} \rightarrow \vec{I} = \vec{0}$, não existe força resultante atuando no sistema. Caso $\Delta\vec{q}$ seja não nulo, $\vec{I}$ é não nulo, ou seja, atuam forças externas no sistema.

Desta análise feita acima, enuncia-se o princípio da conservação da quantidade de movimento: “Na ausência de resultante das forças externas, a quantidade de movimento do sistema se conserva”.

Quando no sistema atuam apenas forças internas, na interação de A com B, um trocando forças com o outro, forças de contato, ou forças de ação à distância, são denominadas forças internas, de mesmo módulo, mesma direção, sentidos opostos e aplicadas em corpos diferentes, então, $\vec{I} = \vec{I}_{AB} + \vec{I}_{BA} = \vec{0}$, conservando-se assim a quantidade de movimento das partículas, pois, $\vec{I} = \Delta\vec{q} = 0 \therefore \vec{q}_{Final} - \vec{q}_{Inicial} = 0 \rightarrow \vec{q}_{Inicial} = \vec{q}_{Final}$.

- Torque $(\vec{\tau})$ de uma força aplicada em um ponto de um objeto extenso: Ao abrir-se uma porta, aplica-se uma força $\vec{F}$ em um ponto P da porta, como

mostrado na Fig.(2.30). A porta fica submetida a um torque orientado para baixo. Torque é uma grandeza vetorial definida como sendo o produto vetorial de $\vec{r}$ (braço) com força $(\vec{F})$ aplicada em um ponto P de um corpo extenso, e mede-se o efeito de giro produzido pela aplicação de $\vec{F}$ no objeto.

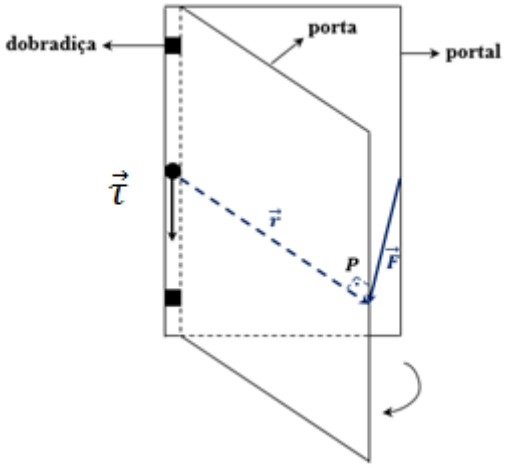


Figura 2.30. Representação de torque

Na Eq.(2.97) tem-se o conceito de torque:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F};\ \theta = 90° \tag{2.97}$$

O módulo do torque é calculado como segue:

$$\|\vec{\tau}\| = \|\vec{r}\|.\left\|\vec{F}\right\| \operatorname{sen}(\theta) \tag{2.98}$$

$$\tau = r.F \tag{2.99}$$

A direção é perpendicular ao plano formado por $\vec{r}$ e $\vec{F}$.

Sentido: Dado pelo polegar da mão direita, ou, empurrar $\vec{r}$ sobre $\vec{F}$ com a mão direita aberta, o polegar fornece o sentido do produto vetorial que é o torque.

- Momento angular $(\vec{L})$ é uma grandeza vetorial definida por:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{2.100}$$

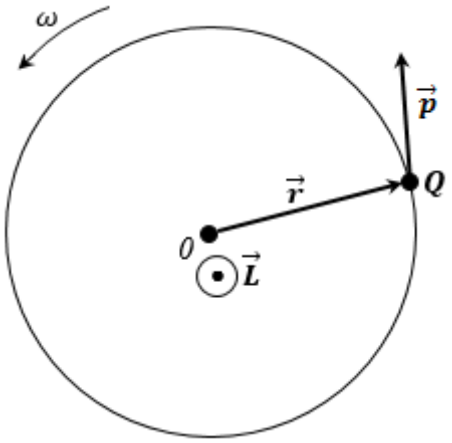


Figura 2.31. Momento angular

Veja na Fig.(2.31) que utilizando-se a regra da mão direita determina-se o sentido do momento angular $(\vec{\mathrm{L}})$.

A partir da Eq.(2.100), sabe-se que:

$$\vec{\mathrm{L}} \text{ é dado: } \begin{cases} \text{Módulo: } \|\vec{\mathrm{r}}\|.\|\vec{\mathrm{p}}\|.\operatorname{sen}(\theta) \\ \text{Direção: Perpendicular ao plano formado por } \vec{\mathrm{r}} \text{ e } \vec{\mathrm{p}}. \\ \text{Sentido: Dedão da mão direita.} \end{cases}$$

$\vec{\mathrm{r}}$, representa o raio, ou braço. O $\vec{\mathrm{p}}$ da Eq.(2.100) representa o momento linear da partícula, e é dado conforme segue:

$$\vec{\mathrm{p}} = \mathrm{m}\vec{\mathrm{v}} \tag{2.101}$$

então:

$$\vec{\mathrm{L}} = \vec{\mathrm{r}} \times \mathrm{m}\vec{\mathrm{v}} \tag{2.102}$$

CAPÍTULO III

MOVIMENTOS

Observando os pontos ao longo de uma reta, obtém-se as posições de um objeto ao longo da sua trajetória (“Caminho da partícula”). Veja esquema representado pela Fig.(3.1):

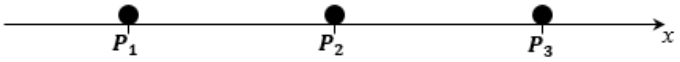


Figura 3.1. Movimento ao longo de um eixo

Antes de 1530 d.C., não se disponibilizava de relógios, apenas marcadores de tempo registravam as posições do móvel, com ampulhetas.

Em torno de 1530 d.C., René-Descartes cria o sistema cartesiano xoy, onde, se pode compreender o movimento no plano de coordenadas cartesianas (LIMA, 2003), como mostra a Fig.(3.2).

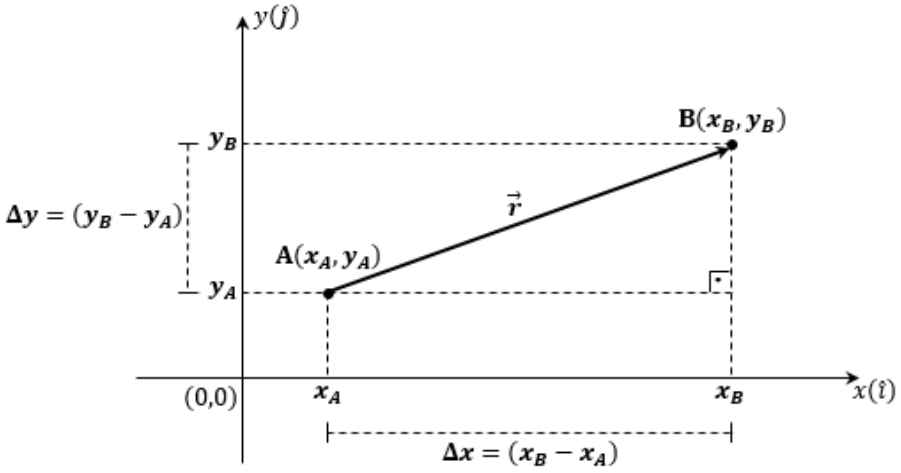


Figura 3.2. Movimento no plano

O móvel desloca-se no plano com um movimento uniforme, porém, composto de uma parcela em x e outra em y. O móvel tem um deslocamento Δx na direção x e Δy na direção y.

A velocidade é uma grandeza física que mede a variação da posição em uma dada direção pelo intervalo de tempo, então, $\vec{v}_x = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \therefore \vec{v}_x = \frac{(x-x_0)}{\Delta t}\hat{\imath}$ e $\vec{v}_y = \frac{(y-y_0)}{\Delta t}\hat{\jmath}$, logo, tem-se: $\vec{r} = (x - x_0)\hat{\imath} + (y - y_0)\hat{\jmath}$, ou, $\vec{r} = v_x t\hat{\imath} + v_y t\hat{\jmath}$.

Como exemplo de cálculo de movimento, observa-se a Fig.(3.2) se $v_x = 8\,m/s$ e $v_y = 6\,m/s$, o vetor posição será dado por: $\vec{r} = 8t\hat{\imath} + 6t\hat{\jmath}$, onde $\vec{r}$, representa a posição no plano cartesiano, segundo a segundo, como mostra a função $r(t)$.

Galileu Galilei, um professor italiano apaixonado por física, desenvolveu a Lei do Pêndulo, que versa sobre a inércia dos corpos em continuar no seu estado de movimento e retrata sobre a resistência do ar e ainda afirmou que “um corpo encontra-se em queda livre, quando fica sujeito apenas sobre a ação da gravidade”. Galileu era um excelente conferencista, sobre física, porque gostava também de astronomia, defensor de que a Terra girava em torno do Sol. Teve que se retratar para não ser queimado vivo na fogueira, perante a Inquisição da Igreja Católica, depois que seu discípulo Jordano Bruno, foi queimado na fogueira (HALLIDAY, 2006).

A mecânica se desenvolveu a passos largos, a partir de 1630 d.C; com as Leis do Movimento de Isaac Newton e paralelamente Gottfried Wilhem Leibntiz desenvolveram o cálculo diferencial e integral, tornando a ciência cada vez mais evolutiva e próspera em descobrir novas leis e princípios que explicasse uma quantidade maior de fenômenos que ocorrem no mundo macroscópico e microscópico. As leis são: 1ª Lei: Inércia; 2ª Lei: Se num sistema há forças externas resultantes, então, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$; 3ª Lei: Ação e reação e a Lei da Gravitação Universal: $\vec{F}_G = \frac{G.M.m}{r^2}.\hat{u}_R$ força esta, entre duas massas M e m separadas de uma distância r entre os seus centros de massas, onde $\hat{u}_R$ é um vetor radial, e G é uma constante que vale: $6{,}67.10^{-11} N.m^2/Kg^2$.

3.1 Movimento Retilíneo Uniforme (MRU)

Na Fig.(3.3), a trajetória é retilínea; o módulo, a direção e o sentido da velocidade são os mesmos ao longo do movimento do objeto de A até B. Ao longo do movimento atuam 4 forças no objeto: força motora $(\vec{F}_M)$, força de resistência $(\vec{f}_R)$, peso do objeto $(\vec{P})$ e a força normal $(\vec{F}_N)$, porém, o somatório das forças é nulo, tanto no eixo (x), quanto no eixo vertical (y). Analisando as grandezas físicas que atuam no objeto de massa m no movimento de A até B.

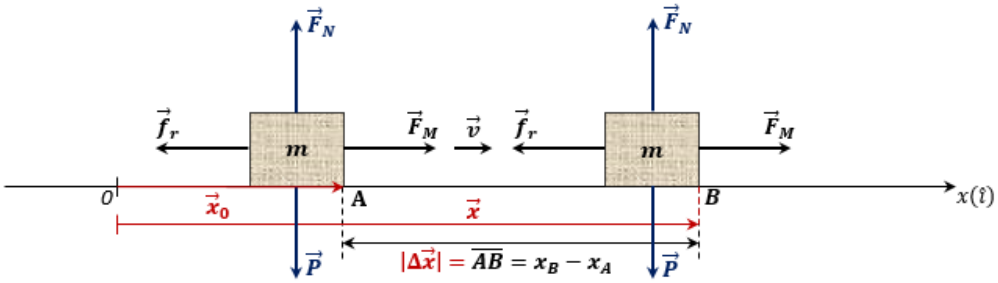


Figura 3.3. Movimento uniforme

Características: $\begin{cases} \text{A trajetória é uma reta.} \\ \text{A velocidade é constante.} \end{cases}$

Como $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$, a direção e o sentido não variam, a velocidade é dada por $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \rightarrow v.t = x - x_0$, sendo:

$$x = x_0 + v.t \qquad (3.1)$$

na Eq.(3.1), x representa a função horária da posição, x_0 é a posição inicial e v é a velocidade do objeto.

$x = f(t)$ ∴ A posição x depende apenas do decorrer do tempo (t).

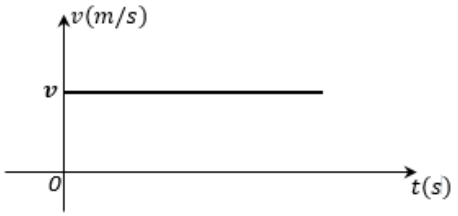


Figura 3.4. Velocidade x Tempo

Se, $v > 0$, tem-se o movimento é progressivo.

Se, $v < 0$, o movimento é retrógrado.

Pode ser visto na Fig.(3.5) que:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ ou } v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (3.2)$$

A variação do espaço Δx pela variação do tempo Δt é por definição a velocidade da partícula.

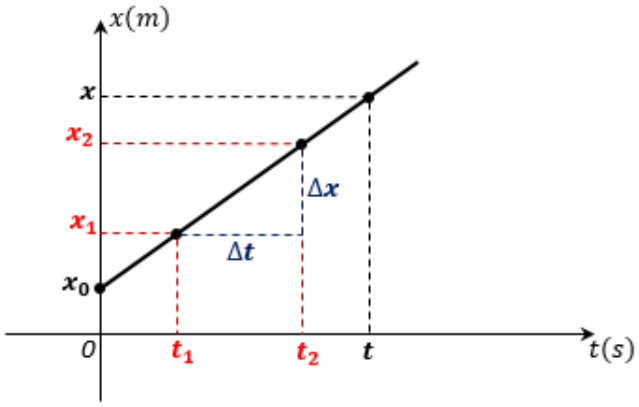


Figura 3.5. Posição x Tempo

Na Fig.(3.5) a reta é crescente, então, $v > 0$, $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$.

A reta será decrescente, quando, $v < 0$, ou seja, o objeto caminha (desloca) em sentido oposto ao da trajetória orientada.

A aceleração por definição: $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$, como não há variação da velocidade, pois $\vec{v}$ é constante (módulo, direção e sentido), temos $\vec{a} = \vec{0}$.

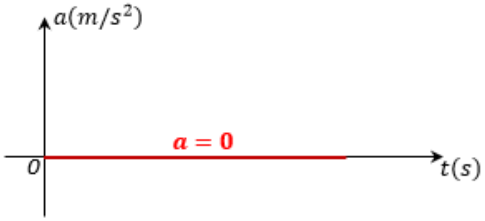


Figura 3.6. Aceleração x Tempo

A energia cinética é constante, $E_C = \frac{1}{2} m.v^2$, portanto a variação da energia cinética é nula, $({}_{F_R}W_A^B = 0)$. A força $\vec{F}_M$ e $\vec{f}_R$ realizam trabalho, porém, a soma: ${}_{F_R}W_A^B = {}_{F_M}W_A^B + {}_{f_R}W_A^B + {}_{P}W_A^B + {}_{F_N}W_A^B = 0$.

Não se tem neste caso, desnível $(E_{PG} = 0)$; pois, $E_P = m.g.y,\ \ y = 0$.

Não se tem neste caso, molas $(E_{PE} = 0)$; pois, $E_{PE} = \frac{kx^2}{2},\ \ x = 0$.

Têm-se impulsos: $\vec{I}_M = \vec{F}_M.\Delta t\,;\ \vec{I}_R = \vec{f}_R.\Delta t\,;\ \vec{I}_N = \vec{F}_N.\Delta t\,;\ \vec{I}_P = \vec{P}.\Delta t\,,$ porém, o impulso resultante é dado por $\left(\vec{I} = \vec{I}_M + \vec{I}_r + \vec{I}_N + \vec{I}_P = \vec{0}\right)$.

A quantidade de movimento $(\vec{q})$ é escrita como: $\vec{q} = m.\vec{v} \therefore q_x = m.v_x$. Se v é constante, então, $\Delta\vec{q} = \vec{0} \rightarrow \vec{I} = \vec{0}$, a soma das forças externas são nulas.

O Torque $(\vec{\tau})$ é nulo, não tem efeito de giro, pois, se estuda o movimento de uma partícula (objeto pequeno/diante das distâncias envolvidas).

O momento angular $\left(\vec{L}\right)$ é nulo, pois, não há movimento de rotação.

Um bom exemplo de MRU é o de se tomar um automóvel de $4\ m$ de comprimento, se deslocando ao longo de uma trajetória retilínea da cidade $A\ (0\ Km)$ até a cidade $B\ (60\ Km)$, e, neste percurso existem descidas, subidas e planos horizontais com velocidade $\vec{v}$ constante. Adota-se a cidade A como referencial e o

sentido $\overrightarrow{AB}$ é positivo (trajetória orientada), cujo, módulo da velocidade é de $90\,\mathrm{Km/h}$ (Fig.(3.7)). Neste tipo de problema, deve-se procurar a explicação para:

1. Na descida, como se deve proceder para manter o módulo da velocidade constante?
2. Na subida como se deve proceder para manter o automóvel com a mesma velocidade?
3. No plano horizontal, como manter a velocidade $(\vec{v})$ constante?

Ainda, se o automóvel vai de A até B, permanece na cidade B por 30 minutos e retorna a cidade A com o mesmo valor de $\vec{v}$.

Então, neste caso, é possível calcular:

A. O tempo total do movimento;
B. O gráfico $x \times t$ para todo o movimento;
C. O gráfico $v \times t$ para todo o movimento;
D. O gráfico $a \times t$ para todo o movimento;
E. A variação de posição do automóvel, todo o percurso;
F. A distância percorrida pelo automóvel para todo o movimento;
G. A posição do automóvel no instante $t = 30$ minutos da partida de A;
H. Como calcular o valor da velocidade através do gráfico $x \times t$?
I. Como calcular a distância percorrida pelo automóvel através do gráfico $v \times t$?
J. Analisando o gráfico $a \times t$, qual conclusão que se tem a respeito da variação da velocidade?
K. O tipo de movimento de A para B e de B para A;
L. A variação de posição do instante 30 minutos até 80 minutos;

Os itens acima podem ser discutidos como segue:

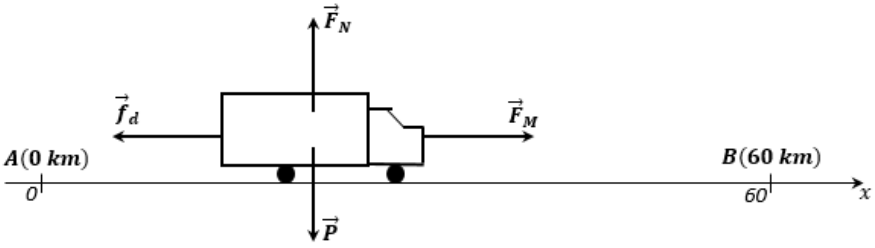


Figura 3.7. Carro movimentando entre duas cidades

1. Na descida, aparecerá uma componente do peso a favor do movimento, logo, é necessário frear o veículo, para manter a velocidade constante.

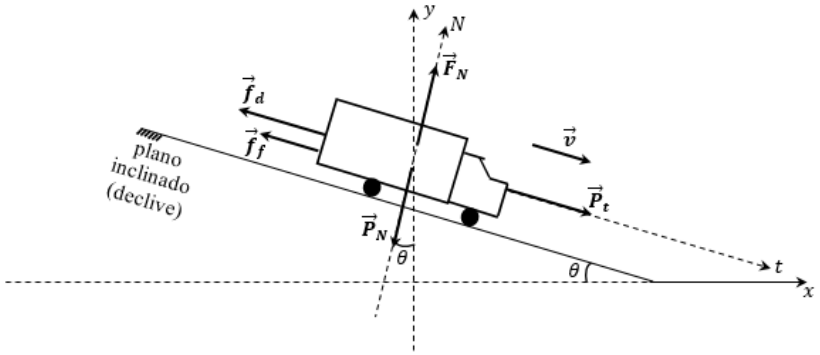


Figura 3.8. Carro em declive

A força peso é calculada por $\mathrm{P} = \mathrm{m}.\mathrm{g}$ e calcula-se a componente $\mathrm{P_t}$:

$$\mathrm{sen}(\theta) = \frac{\mathrm{P_t}}{\mathrm{P}} \rightarrow \mathrm{P_t} = \mathrm{m}.\mathrm{g}.\mathrm{sen}(\theta) \tag{3.3}$$

em seguida, faz-se o cálculo da componente $\mathrm{P_N}$:

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{P_N}}{\mathrm{P}} \rightarrow \mathrm{P_N} = \mathrm{m}.\mathrm{g}.\cos(\theta) \tag{3.4}$$

para que o equilíbrio aconteça, tem-se:

$$\sum \mathrm{F_t} = 0 \therefore \mathrm{P_t} = \mathrm{f_d} + \mathrm{f_f} \tag{3.5}$$

$$\sum \mathrm{F_N} = 0 \therefore \mathrm{F_N} = \mathrm{P_N} = \mathrm{mg}\cos\theta \tag{3.6}$$

2. Na subida, conforme pode ser visto na Fig.(3.9), aparecerá uma componente do peso contrário ao movimento, logo, deve-se utilizar mais o acelerador , aumentando a força motora, para manter a velocidade constante.

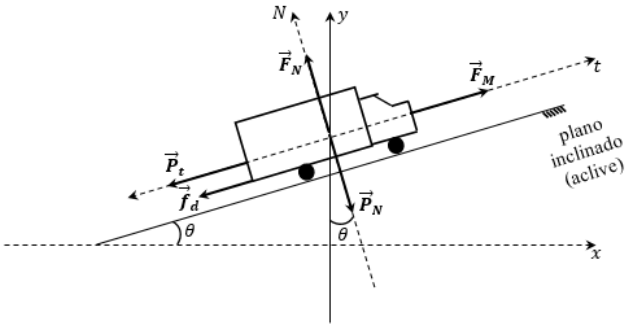


Figura 3.9. Carro em aclive

A componente $\mathrm{P_t}$ é calculada como:

$$\mathrm{sen}(\theta) = \frac{\mathrm{P_t}}{\mathrm{P}} \rightarrow \mathrm{P_t} = \mathrm{m.g.sen}(\theta) \tag{3.7}$$

também neste caso tem-se:

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{P_N}}{\mathrm{P}} \rightarrow \mathrm{P_N} = \mathrm{m.g.cos}(\theta) \tag{3.8}$$

como o carro está em equilíbrio, escreve-se:

$$\sum \mathrm{F_t} = 0 \therefore \mathrm{F_M} = \mathrm{P_t} + \mathrm{f_d} \tag{3.9}$$

$$\sum \mathrm{F_N} = 0 \therefore \mathrm{F_N} = \mathrm{P_N} = \mathrm{m.g.cos}\,\theta \tag{3.10}$$

3. No caso do plano horizontal, tem-se simplesmente:

$$\sum \mathrm{F_x} = 0 \therefore \mathrm{F_M} = \mathrm{f_d} \tag{3.11}$$

$$\sum \mathrm{F_y} = 0 \therefore \mathrm{F_N} = \mathrm{P} = \mathrm{m.g} \tag{3.12}$$

A. Continuando a discussão, o tempo de ida, pode ser encontrado fazendo:

$$\mathrm{x} = 90.\mathrm{t} \tag{3.13}$$

neste caso tem-se que o movimento é progressivo

$$60 = 90.\mathrm{t_i} \tag{3.14}$$

$\overrightarrow{AB}$ $t_i = \frac{2}{3}h = 40$ minutos. (3.15)

o tempo de volta fica:

$x = 60 - 90t$ (3.16)

movimento retrógrado

$0 = 60 - 90t_v$ (3.17)

$\overrightarrow{BA}$ $t_v = \frac{2}{3}h = 40$ minutos. (3.18)

tempo total do movimento:

$t_T = 40 + 30 + 40 \therefore t_T = 110$ minutos. (3.19)

B. O gráfico $x \times t$ para todo o movimento é dado pela Fig.(3.10):

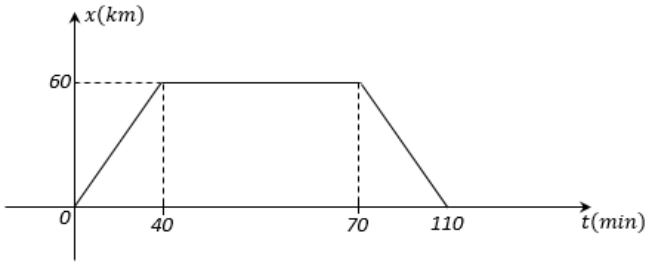


Figura 3.10. Posição x Tempo

C. O gráfico $v \times t$ para todo o movimento é dado pela Fig.(3.11):

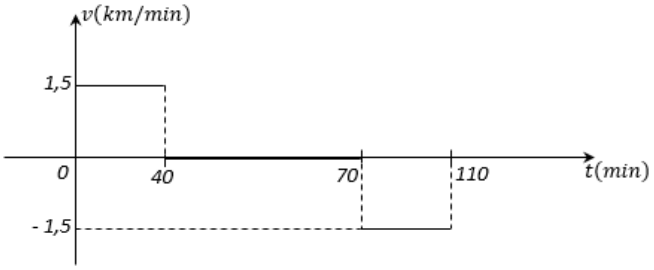


Figura 3.11. Velocidade x Tempo

D. O gráfico $a \times t$ para todo o movimento pode ser observado na Fig.(3.12):

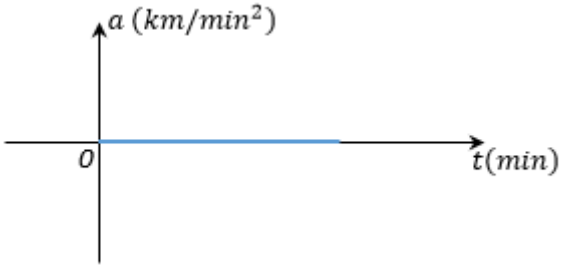


Figura 3.12. Aceleração x Tempo

E. A variação de posição do automóvel, todo o percurso pode ser dada pela Eq.(3.20):

$$\Delta x = x_f - x_0 = 0 - 0 \therefore \Delta x = 0\ \text{Km} \tag{3.20}$$

F. A distância percorrida pelo automóvel para todo o movimento é calculada na Eq.(3.21):

$$d_T = d_i + d_v = 60 + 60 \therefore d_T = 120\ \text{Km} \tag{3.21}$$

G. A posição do automóvel no instante $t = 30$ minutos da partida de A é mostrada na Eq.(3.22):

$$x' = 1{,}5(30) \therefore x' = 45\ \text{Km} \tag{3.22}$$

H. O calculo do valor da velocidade através do gráfico $x \times t$ para a ida e volta é então dado por:

I.

- Ida: $v_i = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{60-0}{40-0} = 1{,}5\ \text{Km/min}$, de 40 a 70 min: esteve parado.
- Volta: $v_v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0-60}{110-70} = -1{,}5\ \text{Km/min}$.

J. Através da área do gráfico dado pela Fig.(3.13), calcula-se a distância percorrida de 0 a 40 minutos:

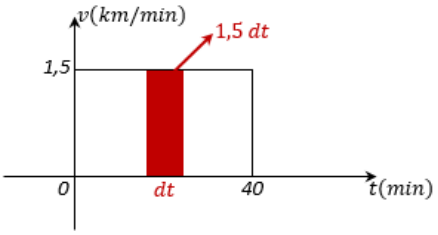


Figura 3.13. Velocidade x Tempo

$$A \cong \int_0^{40} 1{,}5dt = 1{,}5.[t]|_0^{40} = 1{,}5(40) \quad (3.23)$$

$$d = 60\ \text{Km};\ \text{ida}/d_v = 60\ \text{Km};\ \text{volta} \quad (3.24)$$

$$d_T = 120\ \text{Km} \quad (3.25)$$

K. Analisando o gráfico $a \times t$, é possível concluir que:

$a = 0 \therefore a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{\Delta t} = 0 \therefore \Delta v = 0 \therefore v$ é constante.

L. Quanto ao tipo de movimento de A para B conclui-se que é progressivo $(v > 0)$ e de B para A é Retrógrado $(v < 0)$

M. No caso da variação de posição do instante 30 minutos até 80 minutos, pode-se dizer que $x_i = 45\ \text{Km};\ x_v = 60 - 1{,}5(10) \therefore x_v = 45\ \text{Km};\ \Delta x = 0$

Como o automóvel tem um comprimento de $4\ \text{m}$, e a distância da cidade A até a cidade B tem $60.000\ \text{m}$, o tamanho do automóvel é desprezível em relação a distância $\overline{AB}$, logo, pode-se considerar o carro como sendo uma partícula, ou, um ponto material na rodovia. Outra observação é de considerar a rodovia entre as cidades A e B como retilínea, sabendo que existem descidas e subidas ao longo do percurso. Porém, descidas e subidas possuem raio de curvatura muito grande, assim pode-se considerar que o vetor velocidade $(\vec{v})$ fique sempre paralelo a rodovia.

Agora, se considerarmos um automóvel em declive num plano inclinado, cujo, ângulo de inclinação com a horizontal seja θ, e na Fig.(3.15), mostra-se que β tem o mesmo valor de θ e ainda o aparecimento das componentes $\vec{P}_t$ e $\vec{P}_N$ da força-peso

$(\vec{P})$. A força-peso $(\vec{P})$ é a força de atração gravitacional entre os objetos e a Terra, onde $\vec{g}$ denomina a aceleração gravitacional ou campo gravitacional, é um vetor que aponta sempre para o centro de massa da terra, portanto, perpendicular a superfície terrestre e nas proximidades do planeta terra vale $9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, costuma-se aproximar para $10\ \mathrm{m/s^2}$. Em um experimento deve-se usar o valor correto $9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

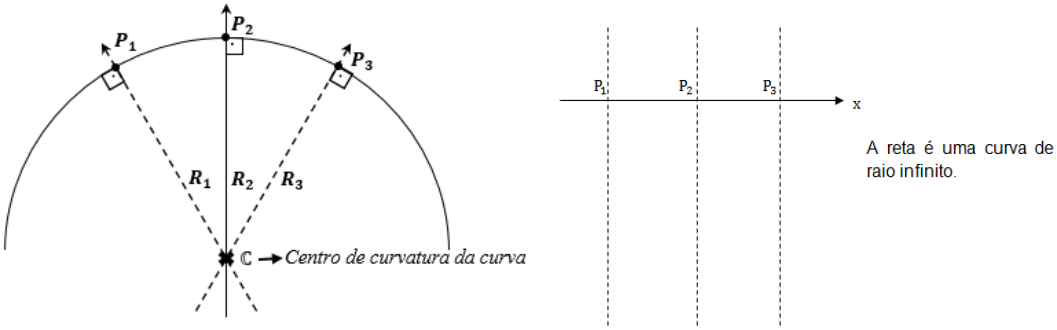


Figura 3.14. Trajetória curvilínea

Na Fig.(3.14) observa-se que a medida que o raio de curvatura fica muito grande, a curva vai se aproximando de uma reta.

Observando a Fig.(3.15), calcula-se as componentes da força peso:

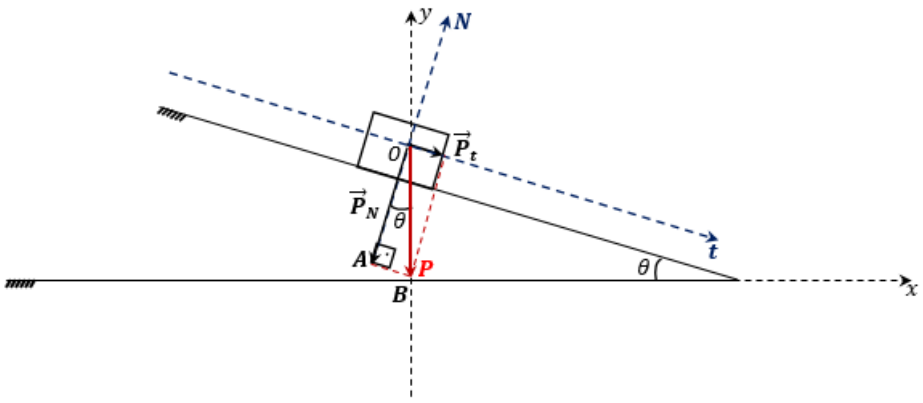


Figura 3.15. Plano inclinado

$$\Delta OAB \therefore \operatorname{sen}(\theta) = \frac{P_t}{P} \rightarrow P_t = P.\operatorname{sen}(\theta) \therefore P_t = m.g.\operatorname{sen}(\theta) \qquad (3.26)$$

$$\cos(\theta) = \frac{P_N}{P} \rightarrow P_N = P.\cos(\theta) \therefore P_N = m.g.\cos(\theta) \qquad (3.27)$$

Observando agora a Fig.(3.16) conclui-se que

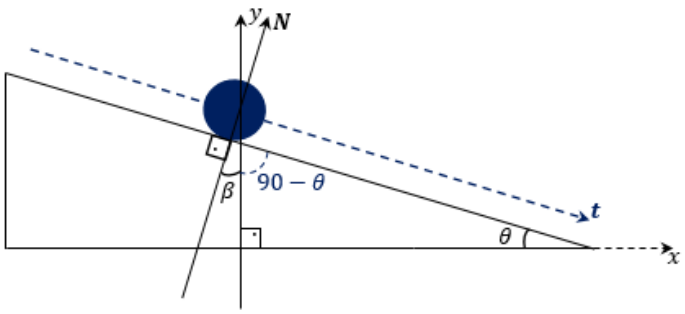


Figura 3.16. Plano inclinado

$\beta + (90 - \theta) = 90$, ou seja, o eixo N é perpendicular a superfície da rampa. Então, $\theta = \beta$.

Veja que a componente $\vec{P}_t$ aparece no objeto, paralela a rampa e sempre dirigida (rampa abaixo), puxando o objeto para baixo, enquanto a componente $\vec{P}_N$ é perpendicular a rampa, comprimindo o objeto contra a rampa. Por isto, a rampa recebe uma força $\vec{F}_N$ do corpo dirigido para dentro da rampa na direção de N (normal), assim a superfície (rampa) reage e aplica no objeto uma força $\vec{F}_N$, perpendicular à rampa, sobre o eixo N, com a mesma intensidade, mesma direção e sentido oposto a $\vec{F}_N$, porém, elas atuam em corpos diferentes (3ª Lei de Newton – Ação e Reação). A decomposição do peso pode ser vista na Fig.(3.17) e descrita nas equações (3.28) e (3.29):

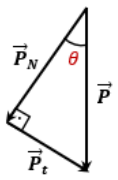


Figura 3.17. Decomposição do peso

$$\vec{P} = \vec{P}_N + \vec{P}_t \therefore P = \sqrt{P_t^2 + P_N^2} \quad (3.28)$$

$$P = \sqrt{P^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) + P^2\cos^2\theta} = \sqrt{P^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta)} = P \quad (3.29)$$

$\vec{P}_t$ e $\vec{P}_N$ são frações da força $\vec{P}$. A referida ação e reação pode ser vista na Fig.(3.18):

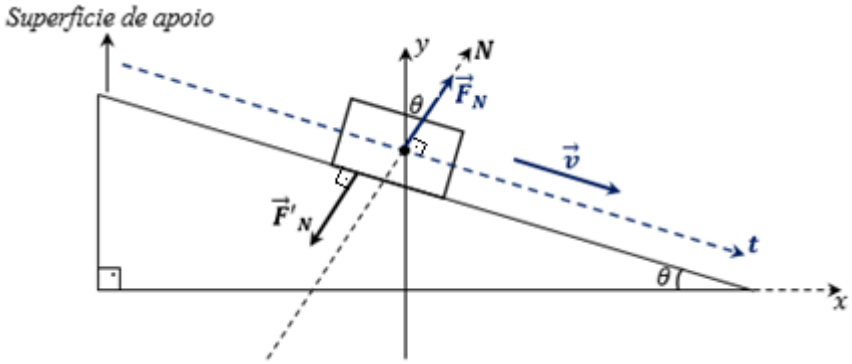


Figura 3.18. Par de ação e reação

$\vec{F}'_N$, é a força que o bloco aplica na rampa.

$\vec{F}_N$, é a força que a superfície aplica no bloco.

$\vec{F}_N$ e $\vec{F}'_N$, é um par de ação e reação.

Analisando-se um carro subindo uma rampa (aclive), as componentes $\vec{P}_t$ e $\vec{P}_N$ não se alteram; $\vec{P}_t$ continua paralela à rampa para baixo e $\vec{P}_N$ continua na direção de N, comprimindo o bloco contra a rampa. Logo, para o carro subir com velocidade constante, é necessária uma força externa $(\vec{F}_{eXT})$ rampa acima de módulo igual às que tem no carro rampa abaixo, tal procedimento é ilustrado pela Fig.(3.19):

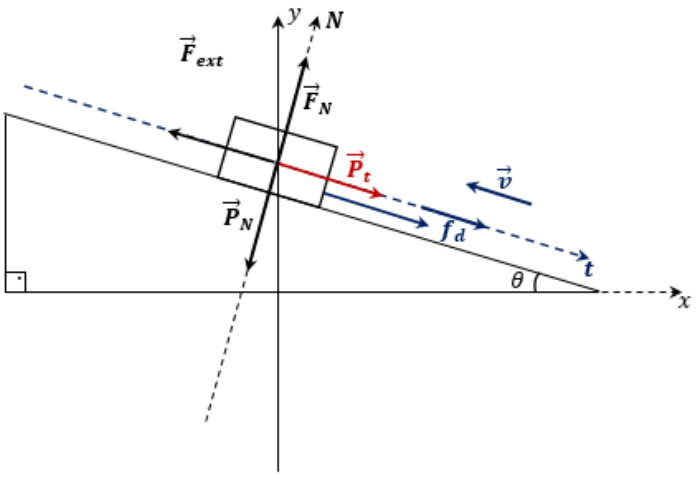


Figura 3.19. Representação das forças

O equilíbrio de um objeto subindo a rampa, é dado na Eq.(3.30):

$$\sum \mathrm{F_t} = 0 \therefore \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{eXT}} + \vec{\mathrm{P}}_{\mathrm{t}} + \vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{d}} = 0 \tag{3.30}$$

o módulo da força externa:

$$\mathrm{F_{eXT}} = \mathrm{P_t} + \mathrm{f_d} \tag{3.31}$$

Veja que apareceu uma força no objeto $\vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{d}}$ em sentido oposto ao movimento, que se denominará força de atrito dinâmica ou força de atrito cinética. Surge no objeto (carro) devido a rugosidade existente entre o par de superfície em contato, veja Fig.(3.20).

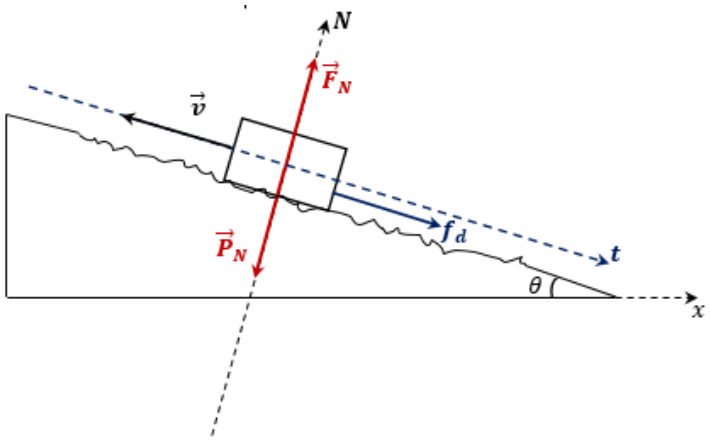


Figura 3.20. Rugosidade

Cálculo da força de atrito:

$$\vec{f}_d \, \alpha \, \vec{F}_N \therefore f_d = u_d . F_N \quad (3.32)$$

Cálculo da componente (P_N):

$$F_N = P_N = m . g . \cos(\theta) \quad (3.33)$$

substitui-se a Eq.(3.33) na Eq.(3.32), obtendo-se:

$$f_d = u_d . m . g . \cos(\theta); \quad (3.34)$$

sendo, u_d o coeficiente de atrito dinâmico ou cinético.

Para cada par de superfícies (carro + rampa), a força de atrito surge no objeto em sentido oposto ao movimento relativo do objeto com a rampa, devido a rugosidade existente entre as superfícies de contato. A força de atrito que surge nos sapatos é importante, para que seja possível caminhar. O mesmo ocorre com um automóvel que se desloca ao longo de uma rua ou rodovia. Porém, há casos em que se deve procurar eliminá-lo ao máximo possível, ou seja, a força de atrito deve aproximar de zero, para isso, deve-se polir a superfície e ainda colocar-se óleo para ocupar os espaços vazios entre as superfícies, eliminando-se o desgaste das peças em contato (ex: pistão e a carcaça de um veículo).

Através da Fig.(3.21), demonstra-se o surgimento da força de atrito, como o objeto encontra-se em repouso, mostra-se que a força de atrito estático varia de zero até um valor máximo:

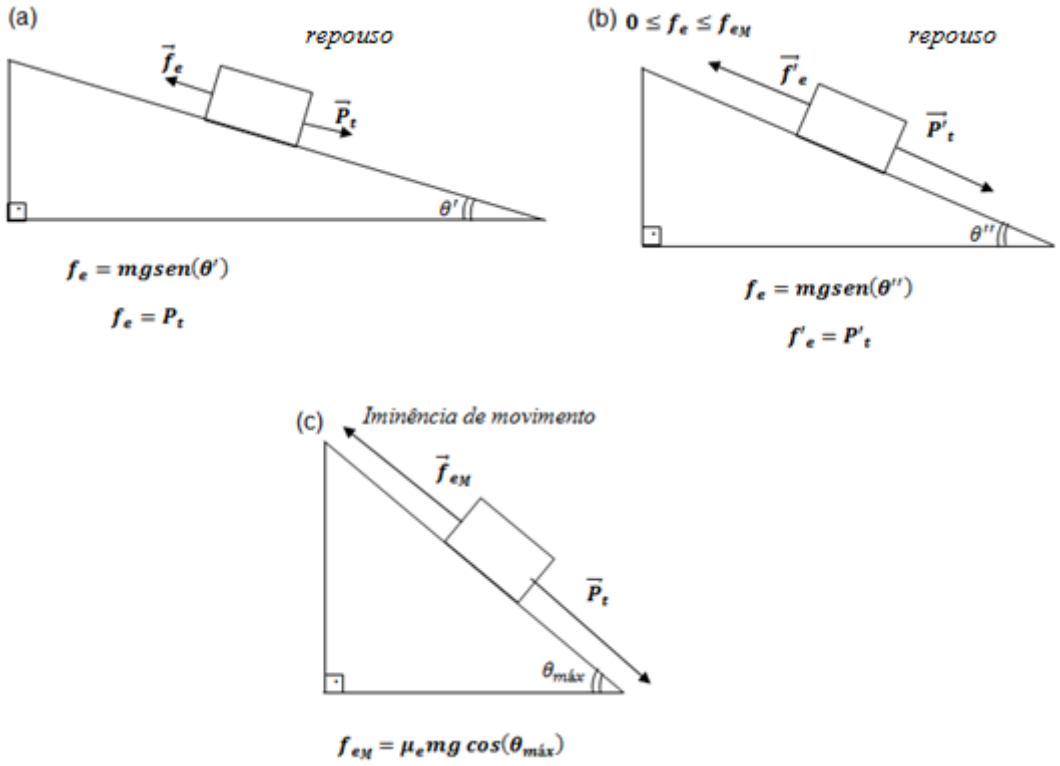


Figura 3.21. Plano inclinado: (a) Repouso, (b) Repouso, (c) Iminência de Movimento

Na Fig.(3.21).(a) o bloco encontra-se em repouso, consequentemente a resultante das forças que atuam no objeto é igual a 0, com isto a componente do peso (P_t) é igual a força de atrito estático $(P_t = f_e)$. A medida que o ângulo θ for aumentando a componente do peso P_t aumenta, como o corpo continua em equilíbrio, a força de atrito estático aumentou de tal forma que $P'_t = f'_e$. Quando o objeto encontra-se na eminência de movimento, na Fig.(3.21).(c), observa-se que o valor máximo da força de atrito f_{em} é atingido. A partir daí o corpo põe-se em movimento, logo, será denominada de força de atrito dinâmica.

Cálculo da força de atrito estático máximo:

$$fem = ue.m.g.\cos(\theta_{máx}) \therefore P_t = fem \tag{3.35}$$

Cálculo do ângulo máximo:

$$tg(\theta_{máx}) = \frac{P_t}{P_N} = \frac{fem}{F_N} = \frac{ue.m.g.\cos(\theta_{máx})}{m.g.\cos(\theta_{máx})} = ue \tag{3.36}$$

$$\theta_{máx} = \text{arctg}(ue) \tag{3.37}$$

A força de atrito depende exclusivamente da rugosidade existente entre as superfícies de contato.

Então, quando um automóvel sobe uma rampa, tem-se:

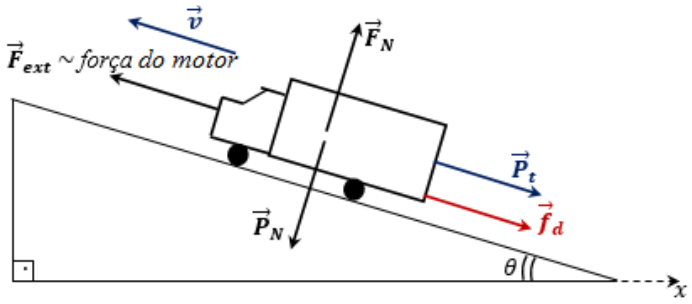


Figura 3.22. Carro em aclive

Somatório das forças no eixo normal:

$$\sum F_N = 0 \therefore F_N = P_N \tag{3.38}$$

Considerando-se o carro subindo com velocidade constante, tem-se:

$$\sum F_t = 0 \therefore F_{ext} = P_t + f_d \tag{3.39}$$

Cálculo da força de atrito dinâmica:

$$f_d = u_d . m . g . \cos(\theta) \tag{3.40}$$

De acordo com a explicação acima, e considerando a massa do carro, $m = 1500\ \text{Kg}; g = 10\ m/s^2;\ \cos(\theta) = 0{,}8;\ \text{sen}(\theta) = 0{,}6;\ u_d = 0{,}6$. Determine a força do motor (F_{ext}) para que o automóvel suba a rampa com velocidade constante.

substituindo os valores na Eq.(3.38), tem-se:

$$F_N = P_N = m . g . \cos(\theta) = 1500.10.0{,}8 \rightarrow F_N = 12000\text{N} \tag{3.41}$$

a partir da Eq.(3.40), determina-se a força de atrito dinâmica:

$$f_d = u_d.m.g.\cos(\theta) = 0{,}6.(12000) \rightarrow f_d = 7200N \quad (3.42)$$

Cálculo da componente do peso:

$$P_t = m.g.\text{sen}(\theta) = 1500.10.0{,}6 \rightarrow P_t = 9000N \quad (3.43)$$

Somatório das forças que atuam no carro é igual a zero:

$$F_{ext} = P_t + f_d = 9000 + 7200 \rightarrow F_{ext} = 16200N \quad (3.44)$$

Quando um carro desce uma rampa com velocidade constante $(\vec{v})$; tem-se: ${}_{F_R}W_A^B = \Delta E_C = E_{CB} - E_{CA} = 0 \therefore E_{CB} = E_{CA} \therefore v_A = v_B$; Portanto a energia cinética é constante. Quanto a energia potencial gravitacional há uma diminuição, pois o carro está passando de pontos de $E_{PA} > E_{PB}$, ou seja, $Y_A > Y_B \therefore E_{PG} = m.g.y$, quanto maior for y, maior é a energia potencial. Consequentemente como o corpo (carro) está perdendo energia potencial e não está convertendo em energia cinética, logo, o carro está perdendo esta energia para o ambiente, devido o fato dele estar freando. Hoje em dia, há o dispositivo KERS, do inglês *Kinetic Energy Recovery System*, que armazena esta energia em molas (energia potencial elástica) que no momento oportuno esta energia da mola retorna para o aproveitamento no movimento do carro.

Quando o carro desce a rampa, a componente do peso $(\vec{P}_t)$ ajuda a puxar o carro rampa abaixo, tentando aumentar a velocidade do mesmo, isto, só não ocorre, por quê o motorista pisa no freio, tornando a força resultante nula, não havendo aceleração, com isso a velocidade se mantém constante. Enquanto o carro sobe uma rampa, a componente do peso $(\vec{P}_t)$ atua em sentido oposto, contrariando ao movimento, por isto, o motorista pisa mais no acelerador, para mantê-lo, com velocidade constante. Como o carro está ganhando energia potencial, o motor do carro imprime uma força motora de tal forma que a resultante das forças seja nula, mantendo a velocidade do carro constante.

A Fig.(3.23) mostra um corpo indo de A para B, perdendo altura, perdendo energia potencial para o ambiente através da aplicação da força de atrito dinâmica $(\vec{f}_d)$ contrária ao movimento.

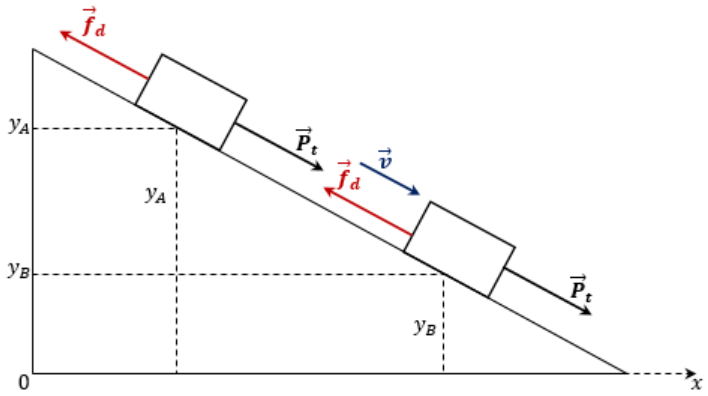


Figura 3.23. Posições no plano inclinado

3.2 Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV)

Na Fig.(3.24), é ilustrado o movimento de um móvel com velocidade variável:

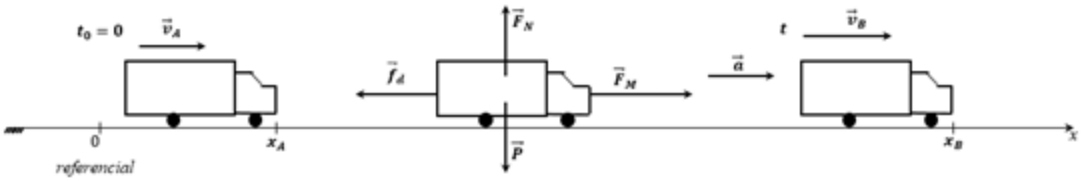


Figura 3.24. Movimento Uniformemente Variado

Características do movimento: $\begin{cases} \rightarrow \text{A trajetória é uma reta.} \\ \rightarrow \text{A aceleração é constante.} \end{cases}$

Pela característica do movimento, onde a aceleração é constante e diferente de zero, existe variação do módulo da velocidade no decorrer do tempo, uma vez que a direção e sentido não se modificam. Se a velocidade se modifica, significa que há algum tipo de interferência externa. Se o móvel se desloca com velocidade constante o somatório de forças é igual à zero, como a velocidade está se modificando então a força resultante é diferente de zero, ou seja, significa que há uma força resultante atuando neste corpo. Se a força resultante está a favor do movimento, o módulo da velocidade aumenta (movimento acelerado) e se a força resultante atua em sentido oposto ao movimento, o módulo da velocidade diminui

(movimento retardado). Acelerando ou freando, a posição e a velocidade estão alterando com o passar do tempo. Logo, será necessário definir uma grandeza física, para equacionar o movimento, onde através das funções, pode-se localizar o móvel (posição) e afirmar quanto vale a velocidade num dado instante qualquer. A partir da aceleração, $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - 0}$; $v - v_0 = a.t$, é que se tem, $v = v_0 + a.t$, esta é a função horária da velocidade, em que v_0 representa a velocidade inicial e a é a aceleração do móvel.

Então, a velocidade depende apenas do tempo.

$$v(t) = v_0 + a.t \tag{3.45}$$

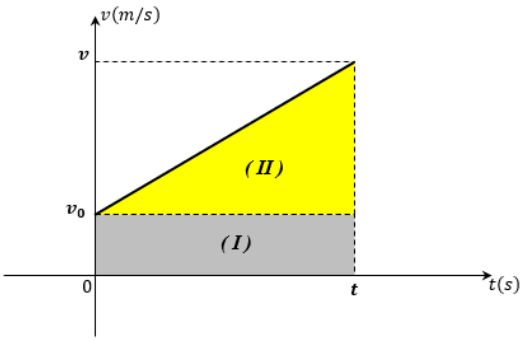


Figura 3.25. Velocidade x Tempo

Ao calcular a área do gráfico da Fig.(3.25) encontra-se o deslocamento da partícula.

Cálculo do deslocamento do móvel:

$$\Delta x = v_0.t + \frac{t(v - v_0)}{2} \rightarrow x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}(v_0 + at - v_0).t \tag{3.46}$$

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, é a função horária da posição $(f.h.p)$, em que x_0 é a posição inicial, v_0 representa a velocidade inicial e a representa a aceleração, que é constante.

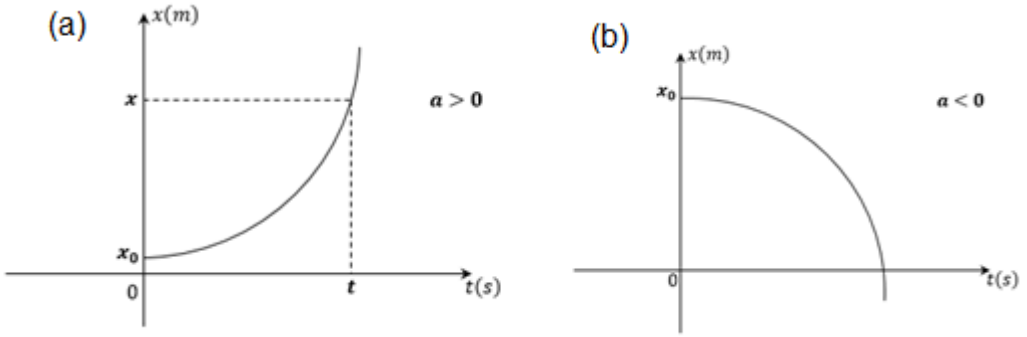


Figura 3.26. Posição do objeto: (a) Posição x Tempo, (b) Posição x Tempo

Exemplificando o movimento variado, tem-se um móvel mostrado na Fig.(3.27) que parte inicialmente da posição $60\,\mathrm{m}$ com velocidade de $6\,\mathrm{m/s}$ e submetido a uma aceleração de $3\,\mathrm{m/s^2}$. À medida que o tempo passa a posição e a velocidade se modifica então descobrir:

A. A função horária da velocidade e seu respectivo gráfico $\mathrm{v} \times \mathrm{t}$.

B. A função horária da posição e seu respectivo gráfico $\mathrm{x} \times \mathrm{t}$.

C. O tipo de movimento.

D. A posição e a velocidade no instante $\mathrm{t}' = 6\mathrm{s}$.

E. O instante em que o móvel passa pela origem dos espaços.

F. A distância percorrida de 0 a $10\ \mathrm{s}$ de movimento.

G. A distância percorrida entre $\mathrm{t}_1 = 5\ \mathrm{s}$ e $\mathrm{t}'' = 12\ \mathrm{s}$.

H. A aceleração no instante $\mathrm{t}' = 6\ \mathrm{s}$.

I. Se o tempo for muito grande, é possível ter uma velocidade infinita?

J. Neste caso, existe algum momento que o móvel inverte o movimento?

K. Se, $a > 0$, explique o porquê a curvatura da curva $\mathrm{x} \times \mathrm{t}$ ser para cima?

L. Quando se pode afirmar que a posição do móvel é sempre crescente?

M. Quando se pode afirmar que a posição do móvel é sempre decrescente?

N. Quando é que se pode afirmar que o móvel não muda de posição?

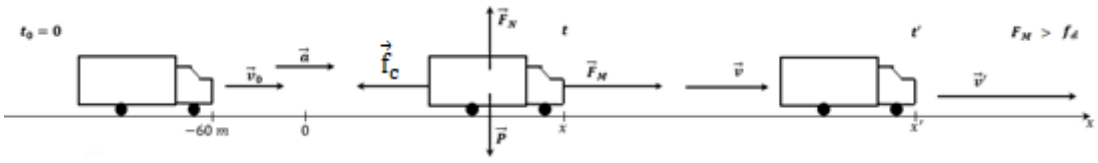


Figura 3.27. Movimento ao longo de uma reta/Movimento variado

Tais questionamentos serão explicados em seguida, seguindo a ordem alfabética em que foram apresentados.

Como $\vec{F}_M$ é maior do que $\vec{f}_d$, a força resultante é a favor do movimento, logo, o módulo da velocidade aumenta no decorrer do tempo.

A. A função horária da velocidade e seu respectivo gráfico (Fig.3.28) são mostrados abaixo:

$v \times t \qquad v = v_0 + at \therefore v(t) = 6 + 3t;\ v \rightarrow m/s \text{ e } t \rightarrow s.$ (3.47)

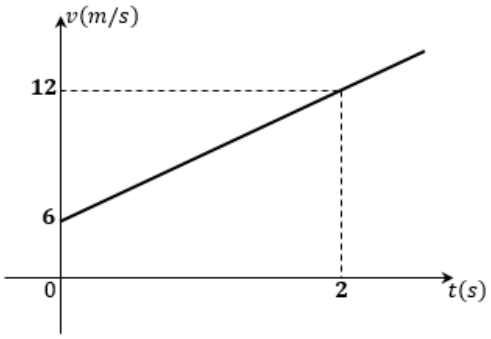


Figura 3.28. Velocidade x Tempo

B. A função horária da posição e seu respectivo gráfico (Fig.(3.29)) são mostrados como segue:

$x \times t \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ (3.48)

$x(t) = -60 + 6t + \frac{3}{2} t^2$ (3.49)

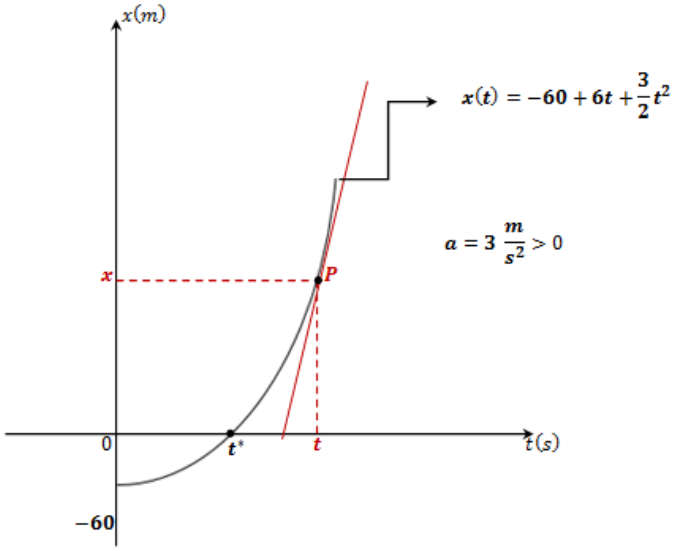


Figura 3.29. Posição x Tempo

C. Para o movimento progressivo$(\mathrm{v} > 0)$ e acelerado $(a > 0)$, v e a tem o mesmo sinal (ambas positivas). Tem-se então, um Movimento Progressivo Acelerado (MPA).

D. Calcula-se agora a posição e a velocidade no instante mencionado:

$$\mathrm{x}'(6) = -60 + 6(6) + \frac{3}{2}(6)^2 \tag{3.50}$$

$$\mathrm{x}' = -60 + 36 + 54 \rightarrow \mathrm{x}' = 30\ \mathrm{m} \tag{3.51}$$

$$\mathrm{v}'(6) = 6 + 3(6) \rightarrow \mathrm{v}' = 6 + 18 \therefore \mathrm{v}' = 24\ \mathrm{m/s} \tag{3.52}$$

E. O instante em que o móvel passa pela origem dos espaços é calculado como segue:

$$0 = -60 + 6\mathrm{t} + \frac{3}{2}\mathrm{t}^2 \therefore \tag{3.53}$$

$$\mathrm{t} = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right)(-60)}}{2\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{-6 \pm \sqrt{396}}{3} = \frac{-6 \pm 19{,}9}{3} \tag{3.54}$$

$\mathrm{t}^* = 4{,}63\ \mathrm{s}$ instante em que o móvel passa pela origem dos espaços.

F. O tipo de movimento pode ser dado pelo equacionamento abaixo e mostrado na Fig.(3.30):

$$v(10) = 6 + 3(10) = 36\,m/s \tag{3.55}$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t vdt = \int_0^{10}(6 + 3t)dt \tag{3.56}$$

$$\Delta x = \int_0^{10} 6d + \int_0^{10} 3tdt \tag{3.57}$$

$$\Delta x = 6t|_0^{10} + \frac{3t^2}{2}\Big|_0^{10} = 6.10 + \frac{3(10)^2}{2} \tag{3.58}$$

$\Delta x = 210m$. O móvel percorreu $210\ m$ nos primeiros $10\ s$ de movimento.

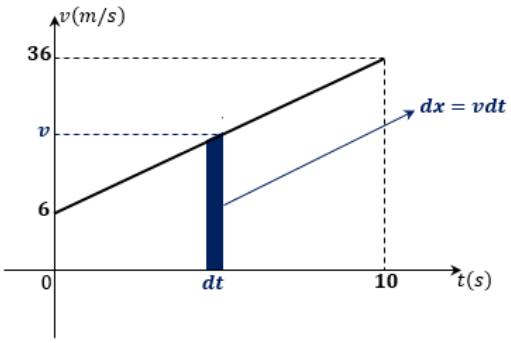


Figura 3.30. Velocidade x Tempo

G. A seguir, tem-se o cálculo da distância percorrida pelo móvel e ilustrada na Fig.(3.31):

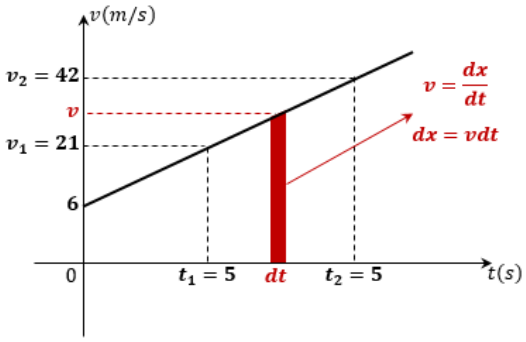


Figura 3.31. Velocidade x Tempo

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} vdt = \int_{t_1}^{t_2}(6)dt + \int_{t_1}^{t_2} 3tdt \tag{3.59}$$

$$x|_{x_1}^{x_2} = 6t|_5^{12} + \frac{3t^2}{2}\Big|_5^{12} \tag{3.60}$$

$$x_2 - x_1 = [6(12) - 6(5)] + \left[\frac{3(12)^2}{2} - \frac{3(5)^2}{2}\right] \quad (3.61)$$

$$\Delta x = [72 - 30] + [216 - 37{,}5] \quad (3.62)$$

$$\Delta x = 42 + 178{,}5 \therefore \Delta x = 220{,}5\ \mathrm{m} \quad (3.63)$$

a distância percorrida foi de $220{,}5\ \mathrm{m}$ de $5\ \mathrm{s}$ à $12\ \mathrm{s}$.

H. Quanto à aceleração, tem-se que $a(6) = 3\ \mathrm{m/s^2}$; pois, esta é constante.

I. Quanto à velocidade infinita, não será possível, pois não se consegue acelerar um carro de tal forma que ele aumente sua velocidade permanentemente, até por que a máxima velocidade é a da luz $(\mathrm{C} = 3.10^8\ \mathrm{m/s})$.

J. A função $v = 6 + 3t$, para $\forall t \in \mathbb{R}$, $v > 0$; então, o móvel não para, por não ter inversão de movimento.

K. Quanto à curvatura, faz-se: $x(t) = -60 + 6t + \frac{3}{2}t^2 \therefore \frac{d[x(t)]}{dt} = 6 + 3t = v(t)$, estuda a taxa de variação da posição em função do tempo. $\frac{d^2[x(t)]}{dt^2} = 3\frac{m}{s^2} > 0$; Quando a 2ª derivada, é positiva, a curvatura da curva $x(t) \times t$ é voltada para cima.

L. Se $\frac{d[x(t)]}{dt} > 0$; A posição aumenta com o tempo; ou seja, a função da posição é crescente.

M. Se $\frac{d[x(t)]}{dt} < 0$; A posição diminui com o tempo; ou seja, a função da posição é decrescente.

N. Se $\frac{d[x(t)]}{dt} = 0$; A posição do móvel não se altera, logo, o móvel encontra-se em repouso.

O MRUV também pode ser entendido imaginando um objeto caindo em queda livre nas proximidades da Terra de uma altura de $180\ \mathrm{m}$, onde o campo de força terrestre vale $10\ \mathrm{m/s^2}$. Observe o esquema representado na Fig.(3.32).

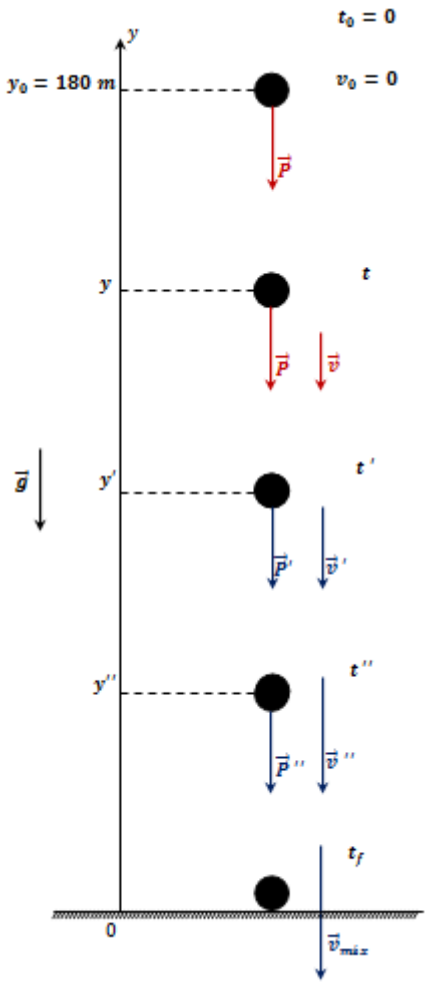


Figura 3.32. Queda livre/MRUV

Observa-se que a trajetória é retilínea e que a aceleração da gravidade é constante, o movimento do corpo é retrógrado $(\mathrm{v} < 0)$ a aceleração $(a = \mathrm{g} = -10\mathrm{ms}2$; Portanto o movimento é acelerado v e a tem o mesmo sinal, ambas negativas.

Cálculo da função velocidade:

$$a = \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} \rightarrow \mathrm{dv} = a\mathrm{dt} \therefore \int_0^{\mathrm{v}} \mathrm{dv} = \int_0^{\mathrm{t}} -10\mathrm{dt} \rightarrow \mathrm{v}|_0^{\mathrm{v}} = -10\mathrm{t}|_0^{\mathrm{t}} \tag{3.64}$$

$$\mathrm{v} - \mathrm{v}_0 = -10\mathrm{t} \therefore \mathrm{v}(\mathrm{t}) = -10\mathrm{t}\ \mathrm{f.h.v} \tag{3.65}$$

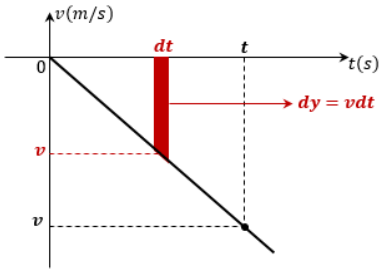


Figura 3.33. Velocidade x Tempo

Cálculo da função horária da posição:

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{0}^{t}(-10t)dt \tag{3.66}$$

$$y - y_0 = \frac{-10t^2}{2} \tag{3.67}$$

$$y = y_0 - 5t^2 \text{ f. h. p} \tag{3.68}$$

$$y = 180 - 5t^2 \tag{3.69}$$

Note que a velocidade é sempre negativa durante toda a queda do corpo. A posição diminui até zerar (no solo), de onde é possível determinar o tempo de queda (t_q).

$$0 = y_0 - 5t_q^2 \rightarrow 5t_q^2 = 180 \rightarrow t_q = 6\ s \tag{3.70}$$

Cálculo da velocidade máxima do corpo:

$$|v_{máx}| = |-10(6)| = 60\ m/s \tag{3.71}$$

A partir da Eq.(3.69) determina-se a posição do corpo nos instantes $t_2 = 2s$ e $t_4 = 4s$:

$$y_2 = 180 - 5(2)^2 \rightarrow y_2 = 160\ m \tag{3.72}$$

$$y_4 = 180 - 5(4)^2 \rightarrow y_4 = 100\ m \tag{3.73}$$

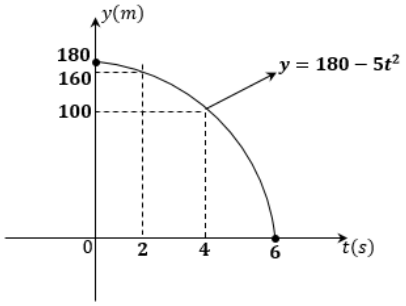


Figura 3.34. Posição x Tempo

O lançamento verticalmente para cima é uma exemplificação que contribui para o entendimento do MRUV, sendo assim tem-se um corpo lançado para cima com velocidade de $50\,\mathrm{m/s}$, a partir do solo, num local onde a resistência do ar é desprezível. Faça um estudo completo, funções horárias, gráficos, crescimento e decrescimento da posição, simetria do gráfico $\mathrm{y} \times \mathrm{t}$.

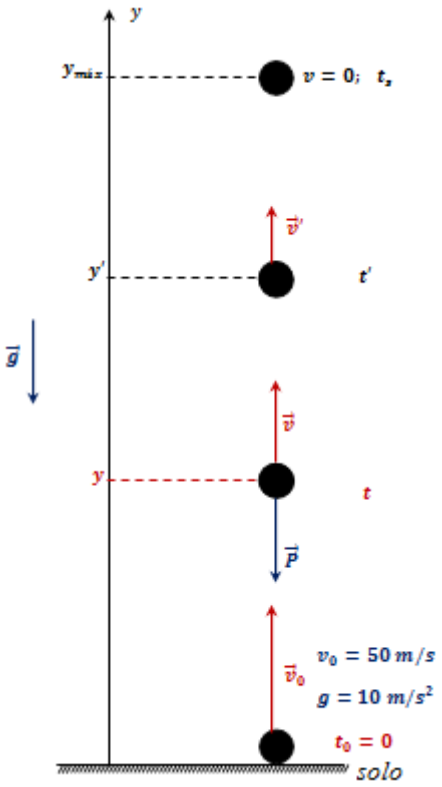


Figura 3.35. Lançamento vertical

Observe que uma grandeza vetorial é positiva, quando tem mesmo sentido do eixo adotado, e será negativa, quando tem sentido oposto ao da trajetória orientada. A aceleração $\vec{g}$ é sempre negativa, uma vez que o eixo y é orientado para cima, e o $\vec{g}$ é sempre para baixo. As figuras (3.36), (3.37) e (3.38), ilustra os cálculos realizados a seguir:

Cálculo da função horária da velocidade:

$$v = v_0 + at \therefore v(t) = 50 - 10t \ \text{f.h.v} \tag{3.74}$$

Cálculo da função horária da posição:

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{3.75}$$

$$y = 50t - 5t^2 \ \text{f.h.p} \tag{3.76}$$

No ponto de altura máxima, determina-se o tempo de subida:

$$(v = 0) \therefore 0 = 50 - 10t_s \rightarrow t_s = 5 \text{ s} \tag{3.77}$$

A posição máxima do objeto lançado:

$$y_{máx} = 50(5) - 5(5)^2 \rightarrow y_{máx} = 250 - 125 \rightarrow y_{máx} = 125 \text{ m} \tag{3.78}$$

Na subida: MPR → Movimento Progressivo Retardado $(v > 0$ e $g < 0)$.

Na descida: MRA → Movimento Retrógrado Acelerado $(v < 0 \ e \ g < 0)$.

Segue os gráficos:

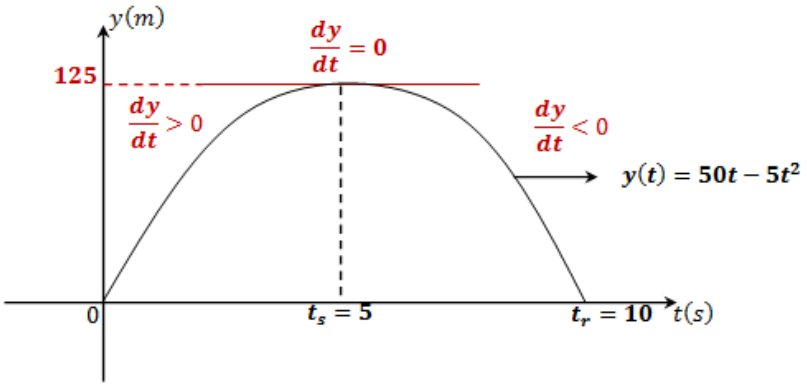


Figura 3.36. Posição x Tempo

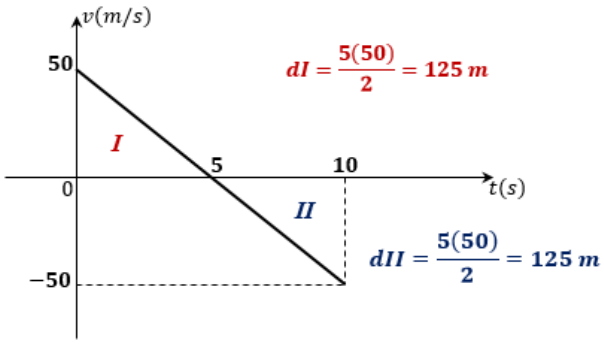


Figura 3.37. Velocidade x Tempo

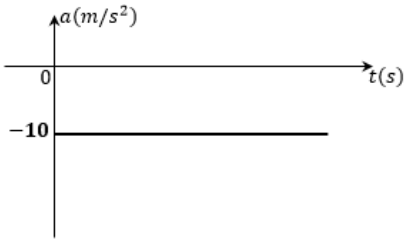


Figura 3.38. Aceleração x Tempo

Assim, nos Movimentos Uniformemente Variados (MRUV) existe uma força resultante atuando no sistema. Se a favor do movimento a força resultante atua no sentido de aumentar o módulo da velocidade, então o sistema ganha energia de um

agente externo. Utilizando-se da Fig.(3.39) calcula-se a energia recebida pelo sistema:

$\vec{F}_R = m.\vec{a}$, 2ª Lei de Newton.

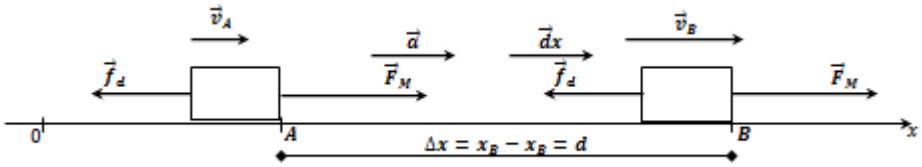


Figura 3.39. Movimento retilíneo/Variado

Cálculo da energia recebida pelo sistema:

$$_{F_R}W_A^B = \int_A^B (\vec{F}_M - \vec{f}_d).\,d\vec{x} \qquad (3.79)$$

sendo $v_B^2 = v_A^2 + 2.a.d$ a Equação de Torricelli em que se obtém: $a.d = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2}$.

$$_{F_R}W_A^B = \int_{x_A}^{x_B} m.a.dx = m.a.d = m.\left(\frac{v_B^2 - v_A^2}{2}\right) \qquad (3.80)$$

$$_{F_R}W_A^B = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2};\ E_C = \frac{1}{2}mv^2 \therefore\ _{F_R}W_A^B = \Delta E_C > 0 \qquad (3.81)$$

O sistema ganhou energia, então, $_{F_R}W_A^B > 0$.

Se a força resultante atua em sentido oposto ao do movimento, $_{F_R}W_A^B = \Delta E_C < 0$, o sistema perde energia para o meio externo, fazendo com que haja diminuição da velocidade do sistema.

Quando na queda livre, observa-se que a medida que o corpo vai caindo, há uma diminuição da altura (E_{PG} diminui), como o sistema não perde energia para a vizinhança, então, o corpo ganha velocidade, aumentando sua energia cinética $\left(E_C = \frac{1}{2}mv^2\right)$. O corpo apenas transforma energia potencial em energia cinética de tal forma que sua energia se conserva. Daí o princípio da conservação da energia mecânica:

$$E_M = E_{PG} + E_C \therefore E_{MA} = E_{MB} = \cdots = E_{MP} \quad (3.82)$$

$$E_{CA} + E_{PA} = E_{CB} + E_{PB} \quad (3.83)$$

Na ausência de forças dissipativas, a energia mecânica do sistema se conserva.

Uma aplicação que pode ser observada no cotidiano é quando, dois carros A e B partem de um mesmo ponto (A) e movimenta-se em linha reta no mesmo sentido, onde a velocidade dos carros são dados abaixo. Determine depois de quanto tempo os carros voltam a se encontrar.

Observando a Fig.(3.40) no intervalo $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$, calcula-se o valor da constante k.

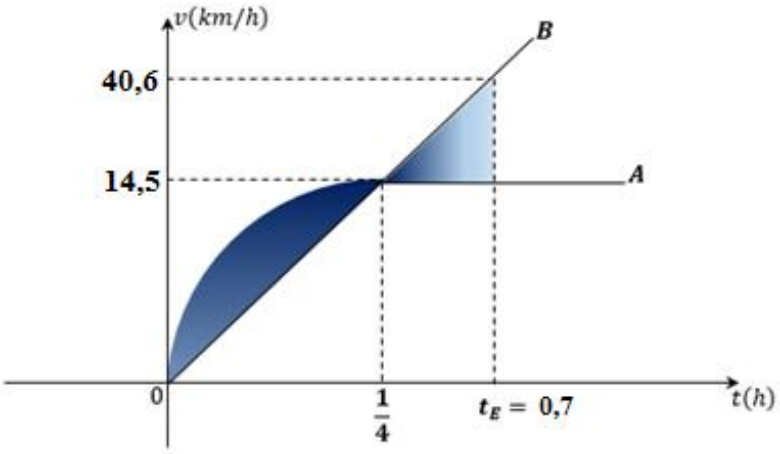


Figura 3.40. Velocidade x Tempo

$$v_A(t) = k\sqrt{t} \rightarrow 14{,}5 = k\sqrt{\frac{1}{4}} \quad (3.84)$$

$$k = 29 \therefore v_A(t) = 29.t^{\frac{1}{2}} \quad (3.85)$$

$$t > \frac{1}{4}\ h = 15\ \text{minutos} \quad (3.86)$$

a velocidade do carro A é $v_A(t) = 14{,}5\ \mathrm{Km/h}$.

Carro B:

$$v_B(t) = a_B . t \tag{3.87}$$

$$v_B(t) = 58t \tag{3.88}$$

a aceleração do carro B:

$$a_B = \frac{14{,}5}{\left(\frac{1}{4}\right)} = 58\ \mathrm{Km/h^2} \tag{3.89}$$

Cálculo do tempo de encontro (t'_E):

$$\int_0^{\frac{1}{4}} [v_A(t) - v_B(t)]\, dt = \int_0^{t'_E} [v_B(t) - v_A(t)]\, dt \tag{3.90}$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \left[29t^{\frac{1}{2}} - 58t\right] dt = \int_0^{t'_E} [58t - 14{,}5] dt \tag{3.91}$$

$$29\,\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{1}{4}} - \frac{58t^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{1}{4}} = \frac{58t^2}{2}\Bigg|_0^{t'_E} - 14{,}5t\Big|_0^{t'_E} \tag{3.92}$$

$$2{,}416 - 1{,}8125 = 29t'^2_E - 14{,}5t'_E \tag{3.93}$$

$$29t'^2_E - 14{,}5t'_E - 0{,}604 = 0 \tag{3.94}$$

$$t'_E = \frac{14{,}5 \pm 11{,}84}{58} \tag{3.95}$$

$$t'_E = 0{,}45\ \mathrm{h} = 27\ \mathrm{minutos}\ \therefore t_E = 0{,}25\ \mathrm{h} + 0{,}45\ \mathrm{h} = 0{,}7\ \mathrm{h} \tag{3.96}$$

$$t_E > \frac{1}{4}\ \mathrm{h} \tag{3.97}$$

o carro A estava à frente de B, e no instante $t_E = 0{,}7\ \mathrm{h}$ eles voltam a se encontrar.

3.3 Movimentos Curvilíneos

Os movimentos curvilíneos são movimentos um pouco mais complexos que os já vistos até agora, pois, estes são compostos de dois ou mais movimentos simples. Quando se lança um objeto formando um ângulo θ com a horizontal, a velocidade de lançamento $(\vec{v}_0)$ terá duas componentes $(\vec{v}_{0x} \rightarrow \text{horizontal e } \vec{v}_{oy} \rightarrow \text{vertical}$, originando em dois movimentos independentes. O movimento da horizontal é um MRU e o movimento da vertical é um MRUV, assim, eles são perpendiculares entre si, portanto, não produz efeito de um sobre o outro, ou seja, eles são independentes.

Abaixo, mostra-se uma aplicação de movimentos curvilíneos:

Considere $v_0 = 50\,m/s; g = 10\,m/s^2$; $sen(\theta) = 0{,}8$ e $cos(\theta) = 0{,}6$, conforme Fig.(3.41):

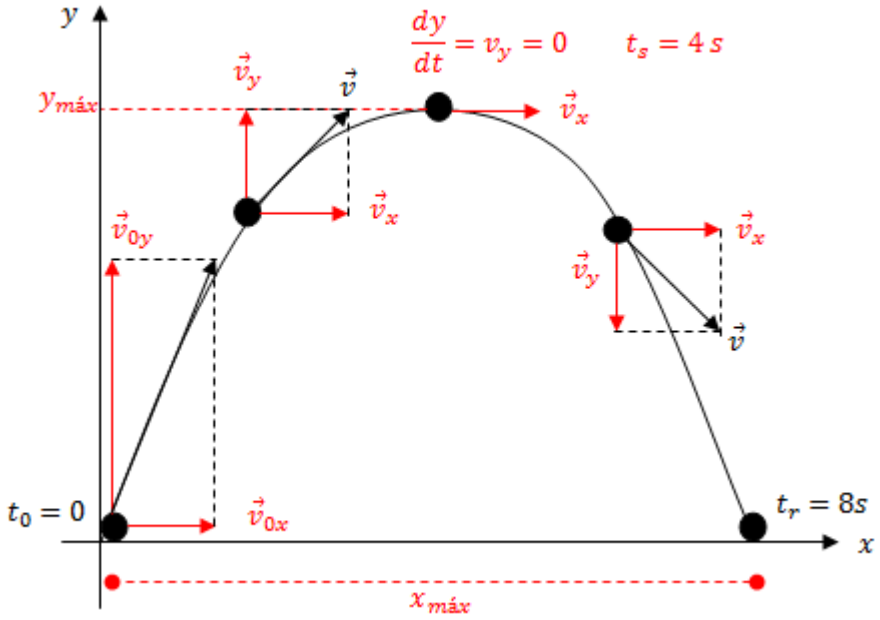


Figura 3.41. Lançamento oblíquo

Equação vetorial da velocidade:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y \quad (3.98)$$

Módulo da velocidade:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (3.99)$$

Função horária da velocidade no plano:

$$\vec{v} = (v_0 \cos(\theta))\hat{i} + (v_0 \operatorname{sen}\theta - gt)\hat{j} \therefore \ \vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \quad (3.100)$$

Movimento horizontal:

$$v_x = v_0 \cos(\theta) = 50.0{,}6 \rightarrow v_x = 30\,m/s \quad (3.101)$$

MRU $\therefore x(t) = x_0 + v_x.t$ (3.102)

$x(t) = 30t \ \ f.h.p$ (horizontal) (3.103)

Movimento vertical:

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}(\theta) - gt \rightarrow v_y = 50.(0{,}8) - 10t \quad (3.104)$$

$$v_y = 40 - 10t \ f.h.vel.(v) \quad (3.105)$$

MRUV: $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \rightarrow y(t) = 40t - 5t^2 \ f.h.p.(v)$ (3.106)

v_x: Produz afastamento.

v_y: $\begin{cases} \text{Produz ganho de altura (subida).} \\ \text{Produz perda de altura (descida).} \end{cases}$

Ponto de altura máxima $(v_y = 0)$.

$$0 = 40 - 10t_s \rightarrow t_s = 4\,s \quad (3.107)$$

Obtendo-se a altura máxima:

$$y_{máx} = 40(4) - 5(4)^2 = 160 - 80 \therefore y_{máx} = 80\,m. \quad (3.108)$$

Obtendo-se o alcance máximo:

$$x_{máx} = 30(8) = 240\ \text{m} \therefore x_{máx} = A = 240\ \text{m}. \tag{3.109}$$

Cálculo da posição do objeto no instante $t' = 2\ s$:

$$x' = 30(2) = 60\ \text{m e } y' = 40(2) - 5(2)^2 \therefore y' = 60\ \text{m} \tag{3.110}$$

Cálculo da posição do objeto no instante $t'' = 6\ s$:

$$x'' = 30(6) = 180\ \text{m e } y'' = 40(6) - 5(6)^2 \therefore y'' = 60\text{m} \tag{3.111}$$

Cálculo do módulo da velocidade no instante $t' = 2\ s$:

$$v_x = 30\,\text{m/s e } v_y = 40 - 10(2) = 20\,\text{m/s} \therefore v = \sqrt{(30)^2 + (20)^2} \therefore v = 36\text{m/s} \tag{3.112}$$

Cálculo da equação da trajetória (Fig.(3.42)):

$$v_x = v_0.\cos(\theta) \therefore v_y = v_0.\text{sen}(\theta) - gt \therefore x = v_0\cos(\theta).t \tag{3.113}$$

$$t = \frac{x}{v_0\cos(\theta)} \tag{3.114}$$

$$y = v_0\,\text{sen}(\theta)\,t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.115}$$

$$y(x) = v_0.\text{sen}(\theta).\frac{x}{v_0\cos(\theta)} - \frac{1}{2}g.\left(\frac{x}{v_0\cos(\theta)}\right)^2 \tag{3.116}$$

$$y(x) = \text{tg}(\theta).x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\theta)}.x^2; \quad b = \text{tg}(\theta); \quad a = \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\theta)} \tag{3.117}$$

$$y(x) = b.x - a.x^2 \tag{3.118}$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = b - 2ax_v = 0 \tag{3.119}$$

$$x_v = \frac{b}{2a} \tag{3.120}$$

$$y_{máx} = y(x_v) \tag{3.121}$$

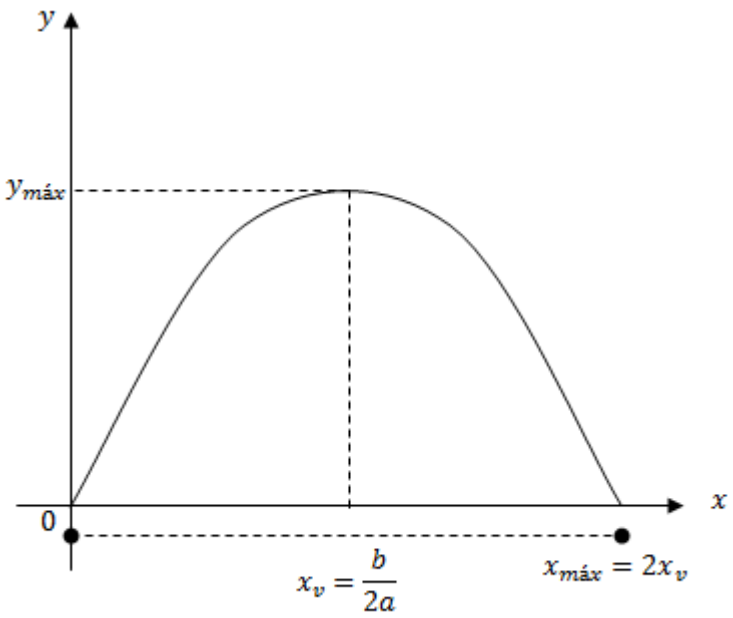


Figura 3.42. Posição vertical x Tempo

$$x_v = \frac{b}{2a} = \frac{\text{sen}(\theta).2.v_0^2\cos^2(\theta)}{\cos(\theta).2.g} \rightarrow x_v = \frac{v_0^2\,\text{sen}(2\theta)}{2g} \quad (3.122)$$

$$y_{máx} = y(x_v) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}.\frac{v_0^2.\text{sen}(\theta).\cos(\theta).2}{2g} - \frac{g}{2v_0\cos^2(\theta)}.\left[\frac{v_0^2.\text{sen}(\theta).\cos\theta.2}{2g}\right]^2 \quad (3.123)$$

$$y_{máx} = \frac{v_0^2.\text{sen}^2(\theta)}{g} - \frac{(v_0^2)^2.\text{sen}^2(\theta).\cos^2(\theta)}{2v_0^2\cos^2(\theta)g} = \frac{v_0^2.\text{sen}^2(\theta)}{2g} \quad (3.124)$$

$$y_{máx} = \frac{v_0^2.\text{sen}^2(\theta)}{2g} \quad (3.125)$$

$$x_{máx} = 2.x_v = 2.\frac{v_0^2.\text{sen}(2\theta)}{2g} \rightarrow x_{máx} = \frac{v_0^2.\text{sen}(2\theta)}{g} \quad (3.126)$$

Dois ou mais corpos, lançados de um mesmo ponto, num mesmo local $(g = \text{constante})$ com a mesma velocidade de lançamento, terá um alcance máximo possível, quanto maior for $\text{sen}(2\theta)$.

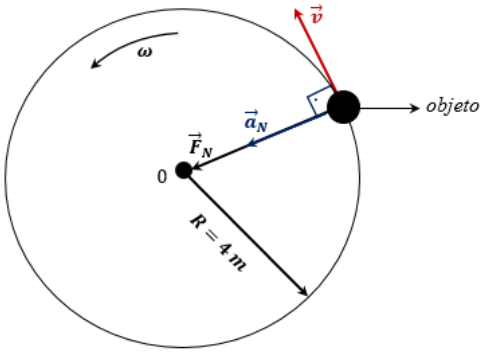
$$\text{sen}(2\theta) = 1 \therefore 2\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} = 45° \quad (3.127)$$

Lançando um objeto com um ângulo de $45°$, seu alcance será o máximo possível, desde que se mantenha a mesma velocidade de lançamento.

Considerando o Movimento Circular, imagine um objeto girando com velocidade constante $\omega = 0{,}2\pi\,\mathrm{rad/s}$ cujo raio vale $4\,\mathrm{m}$, sobre um disco rugoso, onde o coeficiente de atrito estático entre o disco e o objeto vale $\mu_e = 0{,}8$. Considere: $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ e $m = 20\ \mathrm{Kg}$, $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}; \omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$. assim, pode-se calcular:

A. A velocidade linear do objeto.
B. A aceleração centrípeta que atua no objeto.
C. O módulo da força que atua no objeto.
D. O período de revolução (T) do objeto.
E. O ângulo "varrido" depois de 30 minutos de movimento.
F. A distância percorrida pelo objeto após 30 minutos de movimento.
G. A velocidade angular $(\omega_{máx})$ que o objeto suporta sem sair do disco.

Observando a Fig.(3.43), será mostrado à seguir as considerações acerca dos itens acima.



$$\omega = 0{,}2\pi\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = 0{,}63\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Figura 3.43. Movimento circular

A. $v = \frac{2\pi R}{T} = \omega . R$ (3.128)

$v = 0{,}2\pi(4) \therefore v = 0{,}8\pi\,\mathrm{m/s}$ (3.129)

B. $a_N = a_C = \omega^2 . R = (0{,}2\pi)^2 . (4)$ (3.130)

$a_N = 0{,}16\pi^2\ \mathrm{m/s^2}$ (3.131)

C. $F_C = F_N = m . a_N$ (3.132)

$$F_N = 20.(0{,}16\pi^2) \therefore F_N = 3{,}20\pi^2\ N \tag{3.133}$$

D. $$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{0{,}2\pi} \rightarrow T = 10\ s \tag{3.134}$$

E. $$\theta = \omega.t \rightarrow \theta = 0{,}2\pi.(1800) \tag{3.135}$$

$\theta = 360\pi\ rad \rightarrow 180$ voltas

F. $$\Delta s = v.t \rightarrow \Delta s = 0{,}8\pi.(1800) \tag{3.136}$$

$\Delta s = 4524\ m$ distância percorrida.

G. $$F_N = f_{EM} = \mu_e.mg = m.\omega_{máx}^2.R \rightarrow 0{,}8.10 = \omega_{máx}^2(4) \tag{3.137}$$

$$\omega_{máx} = 1{,}41\ rad/s \tag{3.138}$$

Quando partículas ou objetos puntiformes giram sobre um mesmo eixo eles têm a mesma velocidade angular (ω), porém, quanto mais afastado do eixo (maior raio), maior será a velocidade linear, veja a Fig.(3.44).

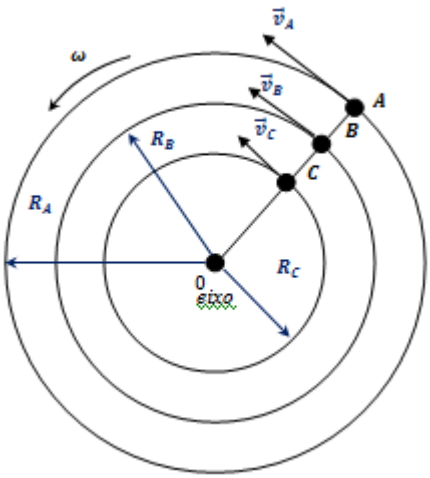


Figura 3.44. Velocidades lineares diferentes

Veja que a velocidade angular é a mesma para todos os pontos do disco:

$$\omega_A = \omega_B = \omega_C \tag{3.139}$$

A velocidade linear é dependente do raio, quanto maior o raio, maior será a velocidade linear. Na Fig.(3.44) tem-se:

$$v_A > v_B > v_C \tag{3.140}$$

Observe:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \tag{3.141}$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T} \tag{3.142}$$

$$v = \omega . R \tag{3.143}$$

Quando partículas giram acopladas a eixos diferentes elas têm a mesma velocidade linear $(\vec{v})$, tendo maior velocidade angular a polia de menor raio (R) como pode ser visto na Fig.(3.45).

$$v_1 = v_2 \tag{3.144}$$

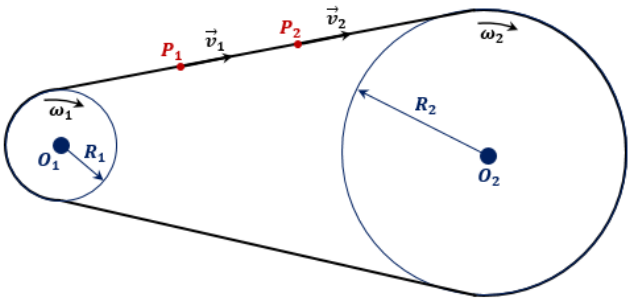


Figura 3.45. Velocidades lineares iguais

É possível notar que o raio da polia 1 é menor do que o raio da polia 2, consequentemente a velocidade angular da polia 1 é maior do que a da polia 2.

$$\omega_1 > \omega_2 \tag{3.145}$$

A ciclóide é a trajetória de um ponto P da roda “deixada” no plano devido uma volta completa da roda no eixo x (piso), veja Fig.(3.46):

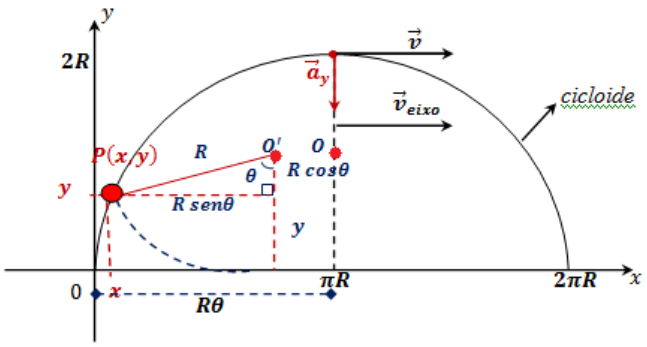


Figura 3.46. Ciclóide

ω, representa a velocidade angular da roda.

Funções da posição em função do ângulo θ:

$$\begin{cases} x = R\theta - R\,\mathrm{sen}(\theta) \\ y = R - R\cos(\theta) \end{cases} \tag{3.146}$$

$$\omega = \frac{\theta}{t} \rightarrow \theta = \omega . t \tag{3.147}$$

$$v_{eixo} = \omega . R \tag{3.148}$$

Função horária da posição na horizontal:

$$x(t) = R\omega t - R\,\mathrm{sen}(\omega t) \tag{3.149}$$

Função horária da posição na vertical:

$$y(t) = R - R\cos(\omega t) \tag{3.150}$$

As componentes da velocidade:

$$v_x(t) = \frac{d[x(t)]}{dt} = \omega R - R\omega\cos(\omega t) \text{ e } v_y = \frac{d[y(t)]}{dt} = +R\omega\,\mathrm{sen}(\omega t) \tag{3.151}$$

$$v_x(t) = \omega R - R\omega\cos(\omega t)\ \text{f.h.vel (H)}\ \text{e}\ v_y(t) = \omega R\,\text{sen}(\omega t)\ \text{f.h.vel. (V)} \quad (3.152)$$

$$a_x(t) = \frac{d[v_x(t)]}{dt} = \omega^2 R\,\text{sen}(\omega t)\ \text{e}\ a_y(t) = \frac{d[v_y(t)]}{dt} = \omega^2 R\cos(\omega t) \quad (3.153)$$

$$a_x(t) = \omega^2 R\,\text{sen}(\omega t)\ \text{f.h.acel. (H)}\ \text{e}\ a_y(t) = \omega^2.R.\cos(\omega t)\ \text{f.h.acel. (v)} \quad (3.154)$$

Se o ponto P encontra-se no ponto mais alto da trajetória, tem-se:

$$\theta = \pi\text{rad}\ \text{e}\ \cos\left(\omega.\frac{T}{2}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}.\frac{T}{2}\right) = -1 \quad (3.155)$$

$$\theta = \pi\text{rad}\ \text{e}\ \text{sen}\left(\omega.\frac{T}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}.\frac{T}{2}\right) = 0 \quad (3.156)$$

Determinação da posição horizontal em meia volta:

$$x\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = x(t) = \pi R \quad (3.157)$$

Determinação da velocidade horizontal em meia volta:

$$v\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = v(t) = 2\omega R \quad (3.158)$$

Na Eq.(3.154) é determinado a aceleração em meia volta:

$$a_x\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = a_x(t) = 0 \quad (3.159)$$

A altura do ponto P da roda em meia volta:

$$y\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = y(t) = 2R \quad (3.160)$$

Cálculo da velocidade vertical em meia volta:

$$v_y\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = v_y(t) = 0 \quad (3.161)$$

Cálculo da aceleração vertical em meia volta:

$$a_y\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = a_y(t) = -\omega^2.R \quad (3.162)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{3.163}$$

$$\omega T = \pi \tag{3.164}$$

$$T = \frac{\pi}{\omega} \tag{3.165}$$

A seguir, na Fig.(3.47), tem-se a aplicação de movimento curvilíneo: Para que o bloco de massa M fique a uma altura h, determine o tempo mínimo e máximo do período de revolução (T) do cone invertido, cujo coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície do cone vale μ_s.

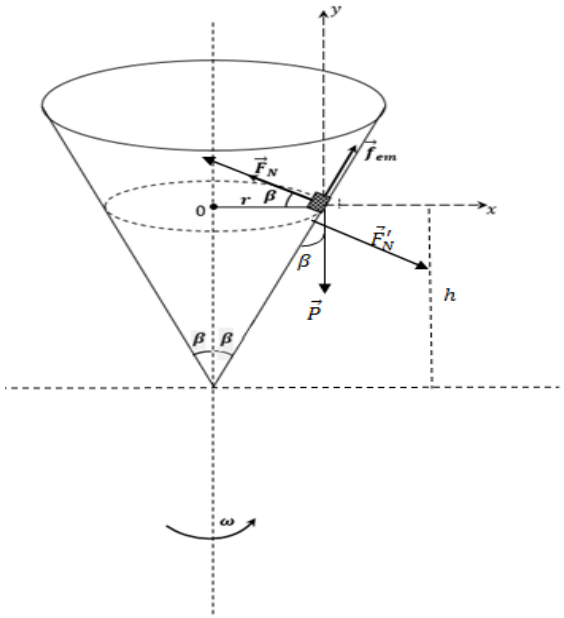


Figura 3.47. Movimento no cone

Observando-se a Fig.(3.47), tem-se:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{r}{h} \rightarrow r = h\operatorname{tg}\beta \tag{3.166}$$

o bloco tende a descer sobre a rampa (funil), logo, a força de atrito máximo, é rampa acima.

Cálculo do tempo máximo $(T_{máx})$:

$$F_N.\operatorname{sen}\beta + \mu_s.F_N.\cos\beta = m.g \tag{3.167}$$

$$F_N.\cos\beta - \mu_s.F_N.\operatorname{sen}\beta = \frac{m.v^2}{r} \tag{3.168}$$

da Eq.(3.167): $F_N = \frac{mg}{(\operatorname{sen}\beta + \mu_s\cos\beta)}$

da Eq.(3.168): $F_N = \frac{mv^2}{r(\cos\beta - \mu_s.\operatorname{sen}\beta)}$

$$\frac{mv^2}{r(\cos\beta - \mu_s\operatorname{sen}\beta)} = \frac{mg}{(\operatorname{sen}\beta + \mu_s.\cos\beta)} \rightarrow v = \sqrt{h\operatorname{tg}\beta.g.\left(\frac{\cos\beta - \mu_s.\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\beta + \mu_s.\cos\beta}\right)} \tag{3.169}$$

$$2\pi r = v.T \rightarrow T_{máx} = \frac{2\pi h\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{g.h\operatorname{tg}\beta\left(\frac{\cos\beta - \mu_s.\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\beta + \mu_s.\cos\beta}\right)}} \text{ ou} \tag{3.170}$$

$$T_{máx} = 2\pi\sqrt{\frac{h\operatorname{tg}\beta}{g}\left(\frac{\operatorname{sen}\beta + \mu_s.\cos\beta}{\cos\beta - \mu_s.\operatorname{sen}\beta}\right)} \tag{3.171}$$

Veja que foi necessário utilizar a Eq.(3.170) para melhorar-se a Eq.(3.172).

$$\frac{h\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{h\operatorname{tg}\beta}} = \sqrt{h\operatorname{tg}\beta} \tag{3.172}$$

Cálculo do tempo mínimo ($T_{mín}$): O bloco tende a subir sobre a rampa do cone (funil), logo, a força de atrito estático é para baixo. Modifica-se as Eq.(3.167) e Eq.(3.168), a resolução é análogo a situação anterior.

$$F_N = \cos\beta + \mu_s.F_N\operatorname{sen}\beta = \frac{mv^2}{r} \tag{3.173}$$

$$F_N\operatorname{sen}\beta - \mu_s.F_N.\cos\beta = mg \tag{3.174}$$

então:

$$T_{mín} = 2\pi\sqrt{\frac{h.\operatorname{tg}\beta}{g}\left(\frac{\operatorname{sen}\beta - \mu_s\cos\beta}{\cos\beta + \mu_s\operatorname{sen}\beta}\right)} \tag{3.175}$$

3.4 Giro de um Corpo Extenso em Torno de um Eixo

A partir de agora estudar-se-á o movimento de corpos extensos. Logo tem-se a necessidade de compreender a grandeza momento de inércia e as grandezas físicas tais como, torque e momento angular afim de determinar-se a energia envolvida nas situações-problema, (YOUNG, 2008).

Será iniciado o estudo com uma barra uniforme de aço, com $1{,}20\ \mathrm{m}$ de comprimento e $6{,}4\ \mathrm{Kg}$ de massa, tem fixada em cada extremidade uma pequena esfera de $1{,}06\ \mathrm{Kg}$ de massa. A barra gira em um plano horizontal, em torno de um eixo vertical que passa pelo seu ponto médio. Em um dado instante, observa-se que ela está realizando $39\ \mathrm{rotações/s}$. Em virtude do atrito com o eixo, ela chega ao repouso $32\ \mathrm{s}$ mais tarde. Supondo constante o torque do atrito, pode-se calcular:

A. A aceleração angular.
B. O torque retardador devido o atrito no eixo.
C. O trabalho total realizado pelo atrito no eixo.
D. O número total de rotações efetuadas durante os $32\ \mathrm{s}$.
E. Suponha, entretanto, que se saiba que o torque devido ao atrito não é constante, calcule o trabalho realizado pelo atrito.

Calcula-se inicialmente os seguintes dados:

$$\mathrm{I_{Esf}} = \frac{2\mathrm{mR}^2}{5} \tag{3.176}$$

$$\mathrm{I_{Barra}} = \frac{\mathrm{mL}^2}{12} \tag{3.177}$$

$$\omega_0 = 39(2\pi) = 78\pi\ \mathrm{rad/s} \tag{3.178}$$

Em seguida, de posse da Fig.(3.48), serão discutidos os questionamentos acima:

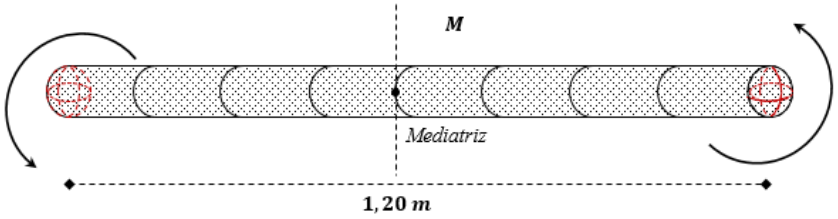


Figura 3.48. Momento de inércia de uma barra

A. $\omega = \omega_0 + \gamma t$ (3.179)

$0 = 78\pi + \gamma(32)$ (3.180)

$\gamma = -7{,}657\ \mathrm{rad/s^2}$ (3.181)

B. $\tau = I.\alpha = I.\gamma$ (3.182)

Nas Eq.(3.176) e Eq.(3.177), $[1{,}06(0{,}6)^2 + 1{,}06.(0{,}6)^2 + 6{,}4.(1{,}2)^2/12]$, corresponde ao I das duas esferas somadas à barra:

$\tau = [1{,}06(0{,}6)^2 + 1{,}06.(0{,}6)^2 + 6{,}4.(1{,}2)^2/12].(-7{,}657)$ (3.183)

$\tau = -11{,}7\ \mathrm{N \times m}$ (3.184)

C. $W_{Torque} = \int_0^{32} \tau d\theta = \int_0^{32} (-11{,}7)[78\pi - 7{,}657t]$ (3.185)

$W_{Torque} = -11{,}7\left[\int_0^{32} 78\pi\, dt - \int_0^{32} 7{,}657t\, dt\right]$ (3.186)

$W_{Torque} = -11{,}7\left[78\pi.(32) - \frac{7{,}657t^2}{2}\Big|_0^{32}\right]$ (3.187)

$W_{Torque} = -11{,}7[3921] \rightarrow \omega_T = -4{,}58.10^4 \mathcal{J}$ (3.188)

D. $N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{3921}{2\pi} \rightarrow N = 624$ rotações $\therefore\ \Delta\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2$ (3.189)

E. O trabalho depende apenas o ponto inicial e final, não depende dos meios, ou seja, dos processos intermediários $\therefore\ {}_TW_A^B = -4{,}58.10^4 \mathcal{J}$.

3.5 Torque Sobre uma Partícula

Anteriormente foi definido o conceito de torque, a Fig.(3.49) reforça o entendimento de tal grandeza física.

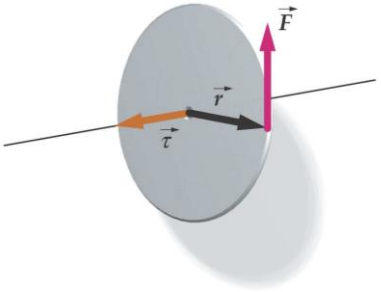


Figura 3.49. Representação de torque (Adaptado de DONOSO, 2014)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{3.190}$$

$\tau = r.F.\operatorname{sen}\theta = r.F_r$; F_r é a força perpendicular ao raio. (3.191)

É uma grandeza vetorial que mede o efeito de giro que a força $\vec{F}$ produz no sistema num dado ponto do mesmo.

3.6 Momento Angular $(\vec{L})$ da Partícula

Momento angular é uma grandeza física associada ao movimento de rotação de um objeto definido por:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \therefore \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}; \tag{3.192}$$

Aplicando-se o operador derivada primeira na Eq.(3.193), tem-se:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} \tag{3.193}$$

Relação do torque com o momento angular:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \ \therefore \ \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{3.194}$$

Se $\vec{L}$ for constante, o $\tau = 0$.

Suponha um corpo constituído de duas massas esféricas com $5\ \mathrm{Kg}$ cada uma, ligadas por uma barra rígida (Fig.(3.50)), leve, de $1\ \mathrm{m}$ de comprimento. Considere as esferas como partículas e despreze a massa da barra. Pode-se então determinar o momento de inércia:

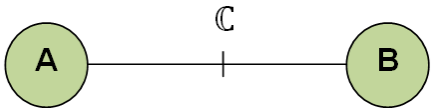


Figura 3.50. Momento de inércia

A. Em relação a um eixo perpendicular a barra e que passe pelo ponto $\mathbb{C}$.
B. Em relação a um eixo perpendicular a barra e que passe por uma delas.

A. $I_{\mathbb{C}} = \sum m_i r^2{}_i = 5.(0{,}5)^2 + 5.(0{,}5)^2 = 2{,}5\ \mathrm{Kg.m^2}$ (3.195)

B. $I_A = \sum m_i r^2{}_i = 5.(1)^2 = 5\ \mathrm{Kg.m^2}.$ (3.196)

O modelo de haltere rígido, I_A é o dobro de $I_{\mathbb{C}}$.

Deduzir a relação $L = I.\omega$ para o momento angular de um corpo rígido e um eixo de rotação em torno de um eixo fixo.

$\vec{\tau} = I.\vec{\alpha}$, $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$, então $\therefore \vec{\tau} = I.\vec{\alpha} = I(d\omega/dt) = \frac{d(I\omega)}{dt}$ (3.197)

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \therefore \vec{L} = I\vec{\omega} \tag{3.198}$$

Abaixo tem-se as figuras que representam o momento angular que atua em cada caso:

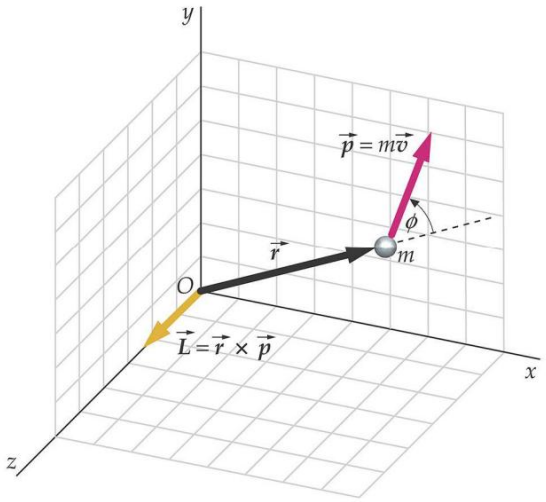


Figura 3.51. Torque e momento angular, (Adaptado de DONOSO, [2014])

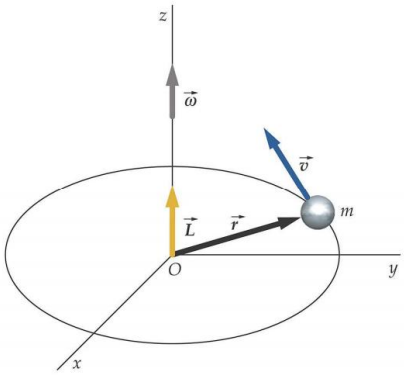


Figura 3.52. Partícula movendo-se num círculo no plano xy, (Adaptado de DONOSO, [2014])

Figura 3.53. Determinação do momento angular, (Adaptado de DONOSO, [2014])

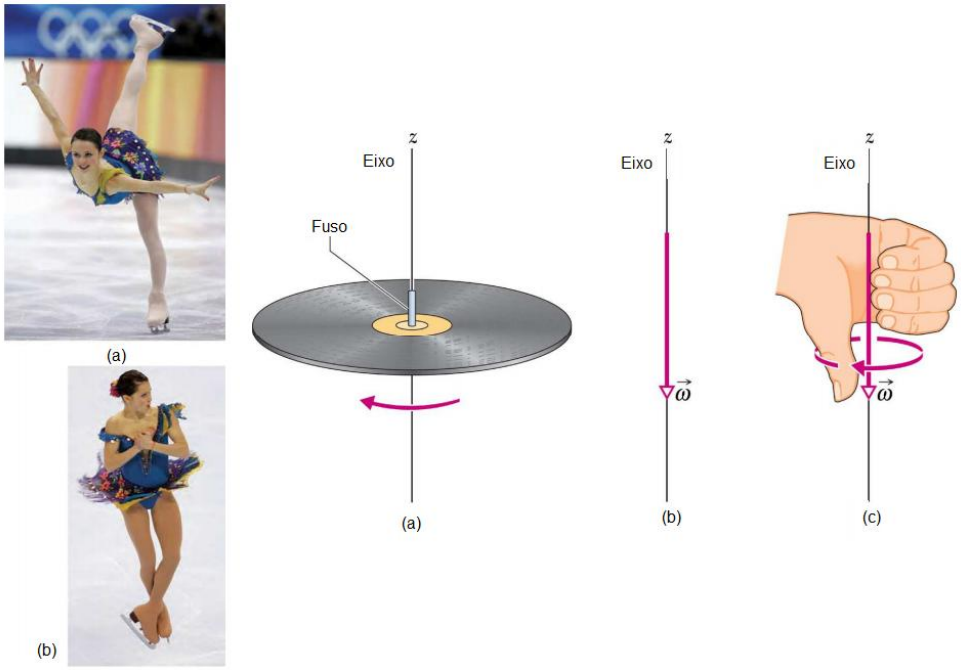


Figura 3.54. Patinadora Sasha Cohen em movimento de: (a) Translação e (b) de Rotação em torno de um eixo vertical, (c) Determinação da Velocidade Angular, (Adaptado de DONOSO, [2014])

3.7 Translação e Rotação de uma Esfera Maciça Descendo um Plano Inclinado

Sabe-se que uma esfera ao descer o plano inclinado terá rotação e translação. Para esclarecer os dois movimentos abandona-se uma esfera do topo de um plano inclinado como mostra a Fig.(3.55). Determine a velocidade de translação da esfera no final da rampa.

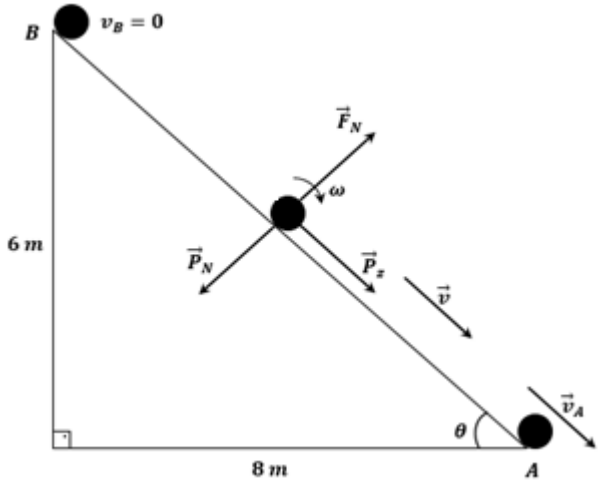


Figura 3.55. Movimento de rotação e translação

Sendo o problema acima com os seguintes dados: $\mathrm{m} = 2\ \mathrm{Kg}; \mathrm{g} = 10\ \mathrm{m/s^2};\ \mathrm{H_B} = 10\ \mathrm{m};\ \mathrm{V_B} = 0;\ \mu_e = 0{,}125;\ \mathrm{I_{Esf}} = \frac{2\mathrm{MR}^2}{5}; \mathrm{R} = 6{,}3.10^{-2}\ \mathrm{m}.$

Determinação da força normal:

$$\mathrm{F_N} = \mathrm{m.g.cos}(\theta) \tag{3.199}$$

$$\mathrm{F_N} = 2.10.0{,}8 \tag{3.200}$$

$$\mathrm{F_N} = 16\ \mathrm{N} \tag{3.201}$$

Comprimento da rampa:

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{6^2 + 8^2}\ \therefore\ \overline{\mathrm{AB}} = 10\ \mathrm{m}. \tag{3.202}$$

Cálculo do seno e cosseno do ângulo do plano inclinado:

$$\text{sen}(\theta) = 0{,}6 \text{ e } \cos(\theta) = 0{,}8. \quad (3.203)$$

Cálculo da força de atrito:

$$f_e = \mu_e . F_N = 0{,}125.16 \ \therefore \ f_e = 2 \text{ N} \quad (3.204)$$

Cálculo da componente tangencial do peso:

$$P_z = m.g.\text{sen}(\theta) = 2.10.0{,}6 \ \rightarrow \ P_z = 12 \text{ N} \quad (3.205)$$

Cálculo do trabalho realizado pelas forças que atuam na esfera:

$$_{F_R}W_B^A = \Delta E_C \rightarrow {}_{F_R}W_B^A = P_z W_B^A = 12.10 \therefore {}_{F_R}W_B^A = 120\mathcal{J} \quad (3.206)$$

$$\Delta E_C = \Delta E_{CT} + \Delta E_{CR} \therefore T \rightarrow \text{Translação}, R \rightarrow \text{Rotação}. \quad (3.207)$$

$$120 = \frac{1}{2}.2.v_A^2 + \frac{1}{2}(3{,}175.10^{-3}).W_A^2 \quad (3.208)$$

$$120 = v_A^2 + 39{,}63 \therefore v_A = 8{,}965 \text{ m/s} \quad (3.209)$$

Se não houvesse movimento de rotação a velocidade de translação seria de: $v_A = 10 \text{ m/s}$.

Em aplicações mais simples, utiliza-se de bloquinhos, evitando assim a rotação.

Cálculo do momento de inércia da esfera:

$$I_{Esf} = \frac{2.2.(6{,}3.10^{-2})^2}{5} \rightarrow I = 3{,}175.10^{-3} \text{Kg.m}^2 \quad (3.210)$$

Cálculo da velocidade angular da esfera na parte inferior do plano inclinado:

$$W_A = W_B + \gamma_B . t \quad (3.211)$$

$$W_A = 79.t = 79.(2) \quad (3.212)$$

$$W_A = 158\ \text{rad/s} \tag{3.213}$$

Cálculo da aceleração angular:

$$v_A = v_A + a_A.t \tag{3.214}$$

$$\frac{a_A}{R} = \gamma = \frac{g\,\text{sen}(\theta) - 1}{6{,}3.10^{-2}} \tag{3.215}$$

$$\gamma = \frac{10.(0{,}6) - 1}{6{,}3.10^{-2}} \tag{3.216}$$

$$\gamma = 0{,}79.10^2 \tag{3.217}$$

$$\gamma = 79\,\text{rad/s}^2 \tag{3.218}$$

Aplicando-se a 2ª Lei de Newton, tem-se:

$$F_R = P_Z - f_e = m.a \tag{3.219}$$

$$10 = 2.a \rightarrow a = 5\,\text{m/s}^2 \tag{3.220}$$

$$\Delta z = \frac{1}{2}a.t^2 \tag{3.221}$$

$$10 = 2{,}5t_A^2 \tag{3.222}$$

$$t_A = 2\ \text{s} \tag{3.223}$$

A aplicação que segue mostra de forma análoga o que é feito para controlar o trânsito nas grandes cidades. Seja então, um trem de comprimento $200\ \text{m}$ entra na ponte de $1200\ \text{m}$ com velocidade de $5\ \text{m/s}$, no momento em que o maquinista acelera a locomotiva em $\frac{1}{4}\,\text{m/s}^2$. Determine o tempo gasto pelo trem para ultrapassar completamente a ponte.

Função horária da posição:

$$x = x_0 + 5t + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}t^2 \therefore 1200 = -200 + 5t + \frac{1}{8}t^2 \tag{3.224}$$

$$5t_E + \frac{1}{8}t_E^2 \therefore \frac{1}{8}t_E^2 - 1400 = 0 \quad (3.225)$$

O tempo de ultrapassagem sobre a ponte:

$$t_E = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4\left(\frac{1}{8}\right)(-1400)}}{2.\left(\frac{1}{8}\right)} = \frac{-5 \pm 26{,}93}{\frac{1}{4}} \rightarrow t_E = 87{,}7s \quad (3.226)$$

Nos quarteirões de uma cidade um automóvel deve obedecer o gráfico da velocidade x tempo apresentado na Fig.(3.56), pois para-se numa esquina, acelera o veículo e mantém-se a velocidade do mesmo por um certo tempo, freando o veículo até parar numa próxima esquina, dividido nos trechos representados no gráfico $(v \times t)$. Com base no exposto constrói-se o gráfico posição x tempo mostrado na Fig.(3.56):

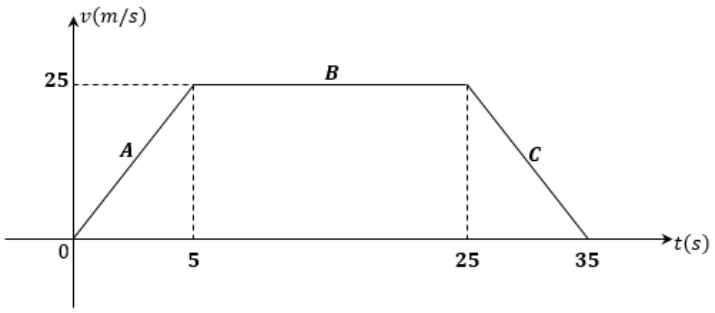


Figura 3.56. Velocidade x Tempo

Assim, calcula-se as distâncias em cada trecho:

Trecho $A\ (0_5\ s)$:

$$a_A = \frac{25}{5} = 5\ m/s^2\ f.h.p \quad (3.227)$$

$$x_A(t) = \frac{1}{2}5t^2\ f.h.p \therefore x_{fA} = \frac{5}{2}(5)^2 = 62{,}5m \quad (3.228)$$

Trecho $B\ (5_25\ s)$:

$$x_B(t) = 62{,}5 + 25t\ \ f.h.p \quad (3.229)$$

$$x_B(20) = 62{,}5 + 25(20) = 562{,}5\ \text{m} \tag{3.230}$$

Trecho C $(25_35\ \text{s})$:

$$a_C = \frac{0-25}{10} \therefore a_C = -\frac{5}{2}\text{m/s}^2 \tag{3.231}$$

$$x_C(t) = 562{,}5 + 25t - \frac{1}{2}.\frac{5}{2}t^2 \tag{3.232}$$

$$x_C(10) = 562{,}5 + 25(10) - \frac{5}{4}(10)^2 \rightarrow x_C(10) = 687{,}5\ \text{m} \tag{3.233}$$

Distância percorrida pelo carro nos respectivos trechos:

$$\begin{array}{ccccccc} & 62{,}5 & & 500 & & 125 & \\ D = & \downarrow & + & \downarrow & + & \downarrow & \\ & A & & B & & C & \end{array} \tag{3.234}$$

$$D = 687{,}5\ \text{m} \tag{3.235}$$

A Fig.(3.57) mostra o percurso do trem, nos trechos calculados acima:

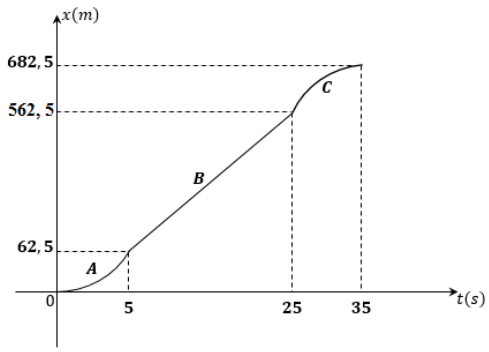


Figura 3.57. Posição x Tempo

Seja agora o caso em que dois carros A e B partem da mesma posição e no mesmo sentido, como mostra o gráfico da velocidade dos carros na Fig.(3.58). Neste sentido, é possível verificar se há colisão ou não.

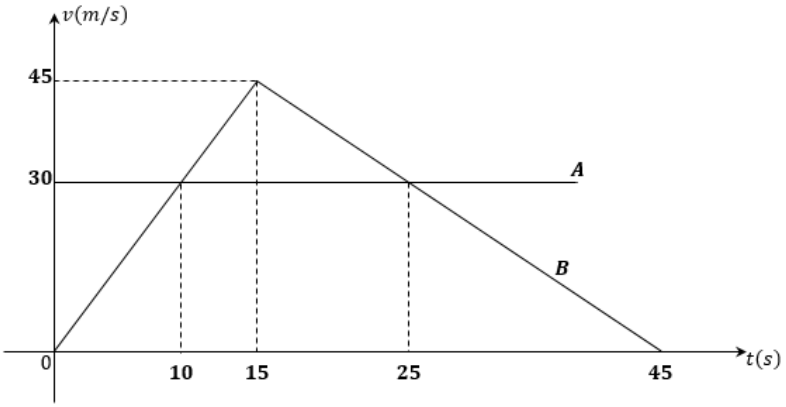


Figura 3.58. Velocidade x Tempo

Para $0 \leq t \leq 15$, o movimento do carro A é uniforme, enquanto o carro B tem um movimento acelerado no intervalo de 0 a $15\ s$ e a partir de $15\ s$ tem um movimento retardado.

Cálculo da distância percorrida pelos automóveis:

$$d_A = 30.15 = 450\text{m} \text{ e } d_B = \frac{1}{2}.3(15)^2 \rightarrow d_B = 337{,}5\text{m};\ a_B = 3\ \text{m/s}^2 \quad (3.236)$$

O carro A, ainda encontra-se a frente do carro B, estudar-se-á o trecho seguinte que vai de:

$$\begin{matrix} 15 \leq t \leq 45 \\ \downarrow \quad\quad \downarrow \\ 0 \leq t \leq 30 \end{matrix} \quad (3.237)$$

Criação da função distância entre os carros:

$$D(t) = [450 + 30t] - \left[337{,}5 + 45t - \frac{3}{4}t^2\right] \quad (3.238)$$

$$D(t) = \frac{3}{4}t^2 - 15t + 112{,}5 \quad (3.239)$$

Cálculo da derivada primeira na Eq.(3.239):

$$D'(t) = \frac{3}{2}t - 15 = 0 \quad (3.240)$$

$$t^* = 10\ s \tag{3.241}$$

$$D(t^*) = D(10) \tag{3.242}$$

$$D_{mín} = 37{,}5\ m \tag{3.243}$$

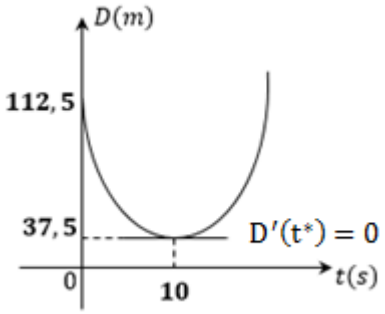


Figura 3.59. Distância x Tempo

Assim, chega-se a conclusão que o carro B nunca alcançará o carro A.

A menor distância entre os carros A e B é de $37{,}5\ m$, onde o carro (A) esteve sempre a frente do carro B.

3.8 Conservação da Energia Mecânica

Na ausência de forças dissipativas a Energia Mecânica de um sistema se conserva, (NUSSENZVEIG, 2002). Para comprovar-se a veracidade da afirmação será desenvolvido a exemplificação como segue:

De acordo com o sistema apresentado na Fig.(3.60), pede-se:

Dados: $k = 500\ N/m\,; m = 5\ Kg; g = 10\ m/s^2; H = 4\ m$

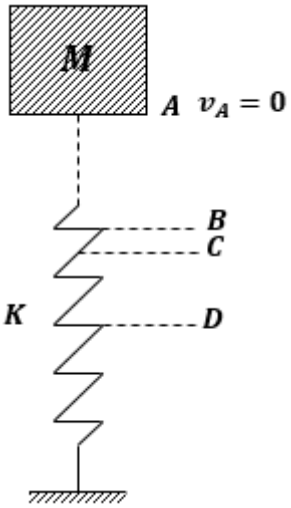


Figura 3.60. Bloco x Mola

A. A velocidade máxima do bloco.
B. A máxima deformação da mola.

Cálculo da velocidade máxima:

A. $\mathrm{F_m} = \mathrm{P} \rightarrow$ Velocidade é máxima (Ponto C)

$$\mathrm{kx'} = \mathrm{mg} \rightarrow 500\mathrm{x'} = 5.10 \rightarrow \mathrm{x'} = 0{,}1\ \mathrm{m} \tag{3.244}$$

Nível de referência em C:

$$\mathrm{E_{MA}} = \mathrm{E_{MC}} \therefore \mathrm{m.g.(H + 0{,}1)} = \frac{\mathrm{kx'^2}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{mv_{máx}^2} \tag{3.245}$$

$$5.10(4{,}1) = \frac{500(0{,}1)^2}{2} + \frac{1}{2}.5.\mathrm{v_{máx}^2} \tag{3.246}$$

$$\frac{205-2{,}5}{2{,}5} = \mathrm{v_{máx}^2} \rightarrow \mathrm{v_{máx}} = 9\ \mathrm{m/s} \tag{3.247}$$

B. Considerando o nível de referência em D, determina-se a deformação máxima:

$$E_{MA} = E_{MD} \therefore mg.(H + x_M) = \frac{1}{2}k.x_M^2 \rightarrow 5.10(4 + x_M) = \frac{1}{2}.500x_M \quad (3.248)$$

$$250x_M^2 - 50x_M - 200 = 0 \therefore x_M = \frac{50 \pm \sqrt{(50)^2 - 4(250)(-200)}}{2(250)} = \frac{50 \pm 450}{500} \quad (3.249)$$

$$x_{máx} = 1\ m \quad (3.250)$$

Outra ilustração da conservação da energia mecânica é dada quando um corpo de massa $5\ Kg$ desenvolve uma velocidade de $3\ m/s$ numa superfície plana e lisa, num dado instante uma força externa passa atuar no corpo durante πs, o que pode ser observado na Fig.(3.61). Neste caso, deseja-se calcular a velocidade do corpo no instante $t' = \pi s$.

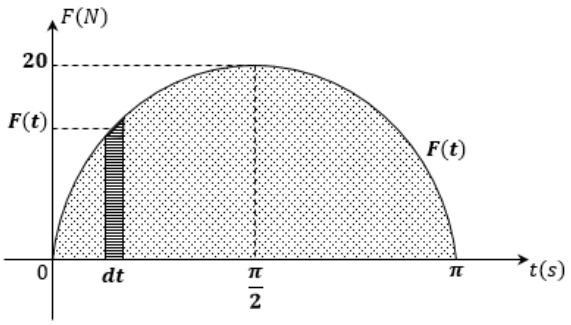


Figura 3.61. Força x Tempo

Para o problema em questão, função é do tipo:

$$F(t) = a.\text{sen}(\varphi_0 + \omega t). \quad (3.251)$$

a Eq.(3.252) apresenta os dados extraídos a partir da Fig.(3.61):

$$a = 20;\ \varphi_0 = 0; T = 2\pi, \text{ então } \omega = 1\frac{rad}{s} \quad (3.252)$$

os dados são substituídos na Eq. (3.253):

$$F(t) = 20\,\text{sen}(t) \therefore \text{Área} \equiv I \quad (3.253)$$

Cálculo da área da Fig.(3.61):

$$I = \int_0^{\pi} F(t)dt = \int_0^{\pi} 20\,\mathrm{sen}(t)dt = 20[-\cos(t)]_0^{\pi} \quad (3.254)$$

$$I = 20[+1-(-1)] = 40\ \mathrm{N.s} \quad (3.255)$$

$$I = \Delta Q = mv_f - mv_i \rightarrow 40 = 5.v_f - 5(3) \rightarrow 55 = 5v_f \rightarrow v_f = 11\,m/s \quad (3.256)$$

Ganho de energia:

$$\Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci} = \frac{1}{2}.5(11)^2 - \frac{1}{2}.5(3)^2 \quad (3.257)$$

$$\Delta E_C = 302{,}5 - 22{,}5 \quad (3.258)$$

$$\Delta E_C = 280\,\mathcal{J} \quad (3.259)$$

Com o objetivo de se ter maior entendimento acerca do conceito de conservação de energia mecânica é apresentada a seguinte situação: um bloco é abandonado de uma certa altura H (Ponto A) da Fig.(3.62). A superfície de contato com o bloco tem atrito, com isto o corpo perde 30% de sua energia potencial em energia térmica para o ambiente. Determine a altura H para que o bloco consiga descrever a trajetória $ABCDEF$. Dados: $m = 5\ \mathrm{Kg}; g = 10\,m/s^2$ e raio $R = 4m$.

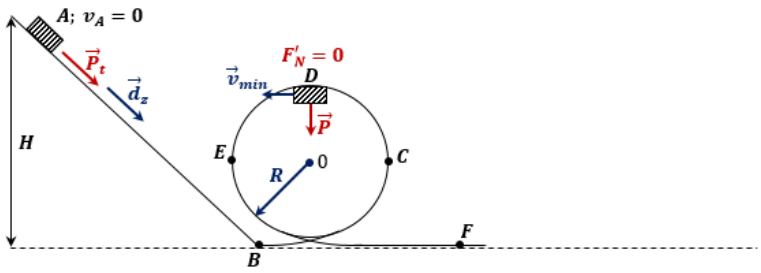


Figura 3.62. Trajetória

Em D, o bloco deve ter uma velocidade mínima para não cair, de tal forma que corresponda uma inércia, onde a resultante centrípeta, seja apenas a força-peso.

Em D:

$$F_C = P = \frac{mv_{mín}^2}{R} \rightarrow mg = \frac{mv_{mín}^2}{R} \tag{3.260}$$

$$v_{mín} = \sqrt{Rg} = \sqrt{4.10} = 2\sqrt{10}\ m/s \tag{3.261}$$

O ponto D, é o mais crítico de toda a trajetória.

$$E_{MD} = 70\%\ E_{MA} \rightarrow \frac{1}{2}mv_{mín}^2 + m.g.(2R) = 0{,}7\ m.g.H \tag{3.262}$$

$$\frac{1}{2}.40 + 10.(8) = 0{,}7.10.H \rightarrow \frac{100}{7} = H \rightarrow H = 14{,}285\ m \tag{3.263}$$

Veja que o sistema perdeu para o ambiente, $30\%\ E_{PA}$.

$$E_{dissip} = -0{,}3m.g.H = -0{,}3.5.10.14{,}285 \rightarrow E_{dissip} = -214{,}28\ \mathcal{J} \tag{3.264}$$

O sinal $(-)$ na Eq.(3.267) indica energia perdida pelo sistema.

No ponto D: $\begin{cases} E_{CD} = \frac{1}{2}mv_{mín}^2 = \frac{1}{2}.5.40 \rightarrow E_{CD} = 100\ \mathcal{J} \\ E_{PD} = m.g.(2R) = 5.10.8 \rightarrow E_{PD} = 400\ \mathcal{J} \\ E_{MD} = E_{CD} + E_{PD} = 100 + 400 \rightarrow E_{MD} = 500\ \mathcal{J} \end{cases}$ (3.265)

Em Δ: $\{E_{MA} = E_{CA} + E_{PA} = 5.10.(14{,}285) \rightarrow E_{MA} = 714{,}25\ \mathcal{J}$ (3.266)

$$E_{dissip} = E_{Mf} - E_{Mi} = 500 - 714{,}28 \rightarrow E_{dissip} = -214{,}28\ \mathcal{J} \tag{3.267}$$

3.9 Movimento no Plano

Estudar-se-á um objeto descrevendo o movimento curvilíneo, onde serão analisadas as grandezas físicas neste movimento, conforme Fig.(3.63).

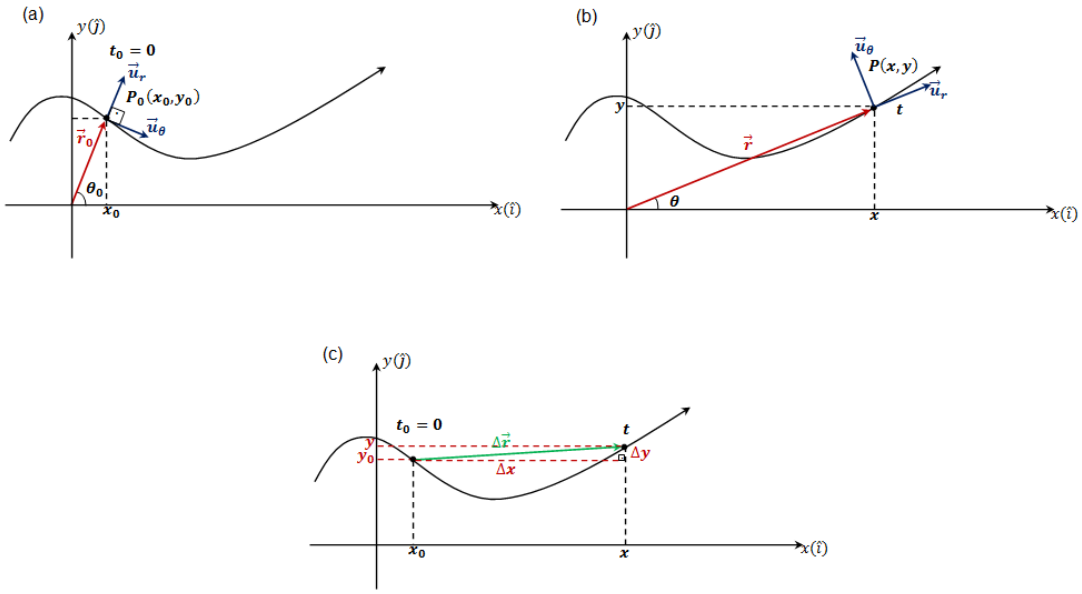


Figura 3.63. Movimento no plano: (a) Posição inicial, (b) Posição final, (c) deslocamento

Na Fig.(3.63).(a), mostra-se a posição do objeto no instante inicial $(t_0 = 0)$, onde $\vec{r}_0 = x_0\hat{\imath} + y_0\hat{\jmath}$ no sistema cartesiano (xoy). Pode-se escrevê-lo na base $\vec{u}_r$ e $\hat{u}_\theta$, então: $\vec{r} = r_0\vec{u}_r$; onde $\hat{u}_r$ é o vetor unitário na direção radial.

Na Fig.(3.63).(b), é exibido a posição do objeto no instante (t), onde $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ no sistema cartesiano (xoy). É possível escrevê-lo na base $\vec{u}_r$ e $\hat{u}_\theta$, então: $\vec{r} = r.\hat{u}_r$; onde $\hat{u}_r$ varia em direção e sentido.

Na Fig.(3.63).(c), é realçado o vetor deslocamento de $(t_0 = 0)$ a t, onde o corpo sai de $P_0(x_0; y_0)$ e passa por $P(x; y)$ no intervalo Δt de tempo.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(x-x_0)}{\Delta t}\hat{\imath} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(y-y_0)}{\Delta t}\hat{\jmath} \rightarrow \vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y \qquad (3.268)$$

Fazendo a derivada da função em relação ao tempo: $\frac{d[u.v]}{dt} = v.\frac{du}{dt} + u\frac{dv}{dt}$.

A Eq.(3.270) representa o vetor posição $(\vec{r})$:

$$\vec{r} = r.\hat{u}_r \qquad (3.269)$$

Derivando o vetor posição, tem-se:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d[\hat{u}_r]}{dt} \tag{3.270}$$

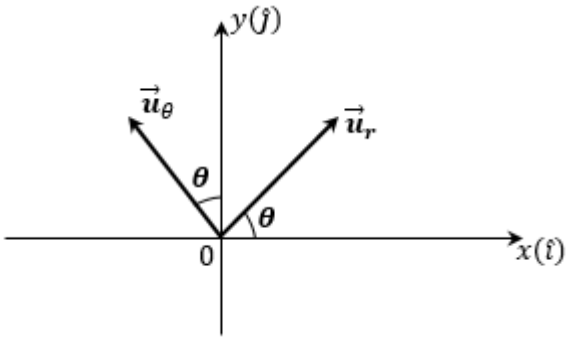


Figura 3.64. Rotação de vetores

Decompondo-se os vetores apresentados na Fig.(3.64) tem-se a nova base $\hat{u}_r$ e $\hat{u}_\theta$.

$$\hat{u}_r = \cos(\theta)\hat{\imath} + \text{sen}(\theta)\hat{\jmath} \tag{3.271}$$

$$\hat{u}_\theta = -\text{sen}(\theta)\hat{\imath} + \cos(\theta)\hat{\jmath} \tag{3.272}$$

utiliza-se a Eq.(3.271) na Eq.(3.272) e obtém-se a Eq.(3.273), conforme demonstrado abaixo:

$$\frac{d(\hat{u}_r)}{dt} = -\text{sen}(\theta).\frac{d\theta}{dt}\hat{\imath} + \cos(\theta).\frac{d\theta}{dt}; \qquad \hat{u}_\theta = [-\text{sen}(\theta)\hat{\imath} + \cos(\theta)\,\hat{\jmath}] \tag{3.273}$$

sendo $\hat{u}_\theta = [-\text{sen}(\theta)\hat{\imath} + \cos(\theta)\,\hat{\jmath}]$ obtido a partir da Eq.(3.272):

$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}.\hat{u}_\theta \therefore \quad \vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r.\omega.\hat{u}_\theta \therefore \quad \vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta \tag{3.274}$$

sendo $\frac{dr}{dt}\hat{u}_r$ a componente radial da velocidade e $r.\omega.\hat{u}_\theta$ a componente transversa da velocidade, tem-se:

$$\frac{d[\cos(\theta)]}{d\theta} = -\text{sen}(\theta) \therefore \frac{d[\cos(\theta)]}{dt} = \frac{d[\cos(\theta)]}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}; \quad \theta = \omega t \tag{3.275}$$

então,

$$\frac{d[\cos(\omega t)]}{dt} = -\operatorname{sen}(\omega t).\frac{d[\omega t]}{dt} = -\operatorname{sen}(\omega t).\omega = -\omega\operatorname{sen}(\omega t) \quad (3.276)$$

A partir do conceito de velocidade angular, sabe-se que $\omega = \frac{d(\theta)}{dt}$, logo $\int_{\theta_0}^{\theta} d(\theta) = \int_0^t \omega dt$.

Se ω = constante, $\theta = \theta_0 + \omega t$ (MCU).

Se ω for variável: $\theta - \theta_0 = \int_0^t (\omega_0 + \gamma t)dt$, onde $\omega = \omega_0 + \gamma t$, consequentemente tem-se, $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$ (MCUV).

Em que ω_0 , é a velocidade angular inicial e γ representa a aceleração angular.

No MCU representa-se os vetores posição em cada momento de sua trajetória, conforme a Fig.(3.65):

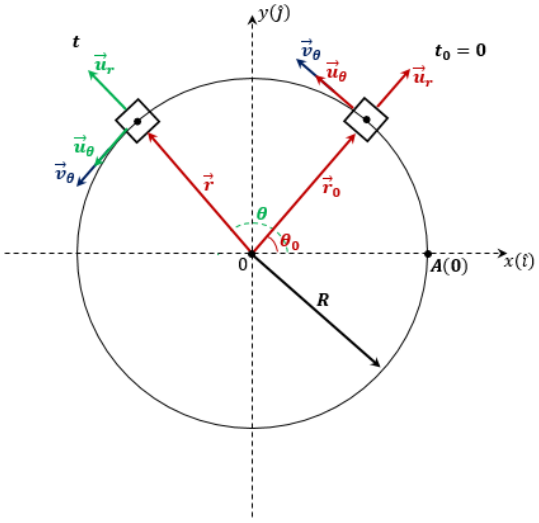


Figura 3.65. Movimento no plano

Cálculo da velocidade da partícula:

$$\hat{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta \quad (3.277)$$

Se o movimento é circular (raio) constante, tem-se:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r.\frac{d(\hat{u}_r)}{dt} \therefore \vec{v} = r.[-\operatorname{sen}(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j}].\frac{d\theta}{dt} \quad (3.278)$$

$$\vec{v} = r.\frac{d\theta}{dt}.\hat{u}_\theta = \vec{v}_\theta \therefore \vec{v} = \omega.r.\hat{u}_\theta \quad (3.279)$$

$\vec{v} = \omega.R.\hat{u}_\theta$, é a componente transversa na direção de $\hat{u}_\theta$, onde $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ é a velocidade angular.

$$|\vec{v}| = |\vec{v}_\theta| = v_\theta = \omega.R \quad (3.280)$$

Cálculo da aceleração:

$$\vec{a}_\theta = \frac{d(\vec{v}_\theta)}{dt} = \frac{d(w)}{dt}.r.\hat{u}_\theta + \omega.\frac{dr}{dt}.\hat{u}_\theta + \omega.r.\frac{d(\hat{u}_\theta)}{dt} \quad (3.281)$$

$$\vec{a}_\theta = \gamma.r\hat{u}_\theta - \omega^2.r.\hat{u}_r \rightarrow \vec{a}_\theta = a_t.\hat{u}_\theta - a_N\hat{u}_r \quad (3.282)$$

Quando o movimento for MCU:

$$\vec{a}_\theta = -a_N\hat{u}_r,\ a_t = 0 \quad (3.283)$$

Quando o movimento for MCUV:

$$\vec{a}_\theta = \vec{a}_t\hat{u}_\theta - a_N\hat{u}_r \quad (3.284)$$

Se o movimento é curvilíneo qualquer, tem-se:

$$\vec{r} = r.\hat{u}_r \therefore \begin{cases} \vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r.\frac{d(\hat{u}_r)}{dt} \\ \vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta \end{cases} \quad (3.285)$$

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt}.\hat{u}_r \rightarrow \text{Velocidade radial} \\ r\frac{d(\hat{u}_r)}{dt} = r.\frac{d\theta}{dt}.\hat{u}_\theta \rightarrow \text{Velocidade transversa} \end{cases} \quad (3.286)$$

Cálculo da aceleração:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r.\frac{d(\hat{u}_r)}{dt}\right] \quad (3.287)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{u}_r + \frac{dr}{dt}.\frac{d(\hat{u}_r)}{dt} + \frac{d\omega}{dt}.r.\hat{u}_\theta + \omega.\frac{dr}{dt}.\hat{u}_\theta + \omega.r.\frac{d(\hat{u}_\theta)}{dt} \quad (3.288)$$

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r\right]\hat{u}_r + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\omega}{dt}.r\right]\hat{u}_\theta \quad (3.289)$$

3.10 Movimento de Rotação de Objetos e Mudanças de Eixos de Coordenadas

Será feita a rotação em objetos e até mesmo em funções que expressem uma figura geométrica, aplicando a matriz rotação no plano:

$$\begin{cases} x = x_1\cos(\theta) - y_1\,\mathrm{sen}(\theta) \\ y = x_1\,\mathrm{sen}(\theta) + y_1\cos(\theta) \end{cases}, \text{ onde } M = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.290)$$

Quando for necessário um novo sistema de coordenadas, aplica-se a matriz rotação no vetor $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, assim:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad (3.291)$$

Em que $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é o vetor ou novo ponto; $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ é a matriz rotação; $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ é o vetor ponto conhecido.

Tem-se um ponto $P(x,y)$ no sistema xoy e se quer encontrar o ponto $P_1(x_1; y_1)$ no sistema x_1oy_1, deve-se aplicar a matriz rotação girando o sistema de um ângulo θ, veja: se $P\left(5;\sqrt{3}\right)$ e o sistema cartesiano for girado de $\frac{\pi}{3}\mathrm{rad}(60°)$, é possível determinar as coordenadas do ponto $P_1(x_1; y_1)$ no sistema x_1oy_1.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(60°) & -\mathrm{sen}(60°) \\ \mathrm{sen}(60°) & \cos(60°) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}.x_1 & - & \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 & + & \frac{1}{2}y_1 \end{bmatrix} \quad (3.292)$$

$$\begin{array}{l} 5 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_1\ (\mathrm{I}) \rightarrow \\ \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1\ (\mathrm{II}) \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} 5 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 \\ 3 = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 \quad (+) \\ \hline 8 = 2x_1 \rightarrow x_1 = 4 \text{ em (I)}: \end{array} \quad (3.293)$$

$$5 = \frac{1}{2}.(4) - \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 \rightarrow 3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}y_1 \rightarrow y_1 = -\frac{2.(3)}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \rightarrow y_1 = -2\sqrt{3} \quad (3.294)$$

então, $\mathrm{P}_1 = \left(4; -2\sqrt{3}\right)$.

Ao aplicar a matriz rotação em um ponto, determina-se outro ponto de um outro sistema cartesiano. Ao se aplicar a matriz rotação em uma equação do plano de qualquer figura geométrica, verifica-se que também ocorre translação destes pontos.

Os pontos transladados são apresentados conforme a Eq.(3.295):

$$\mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_0 \text{ e } \mathrm{y}_2 = \mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_0. \quad (3.295)$$

$(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$, representa o ponto do sistema $\mathrm{x}_1\mathrm{oy}_1$; $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$, representa o ponto do sistema $\mathrm{x}_0\mathrm{oy}_0$; $(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$, representa o ponto do sistema $\mathrm{x}_2\mathrm{oy}_2$ transladada do plano $\mathrm{x}_1\mathrm{oy}_1$.

Considerando a equação geral abaixo:

$$3\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{y}^2 - 10\mathrm{xy} + 12\sqrt{2}\mathrm{x} - 4\sqrt{2}\mathrm{y} + 32 = 0; \quad (3.296)$$

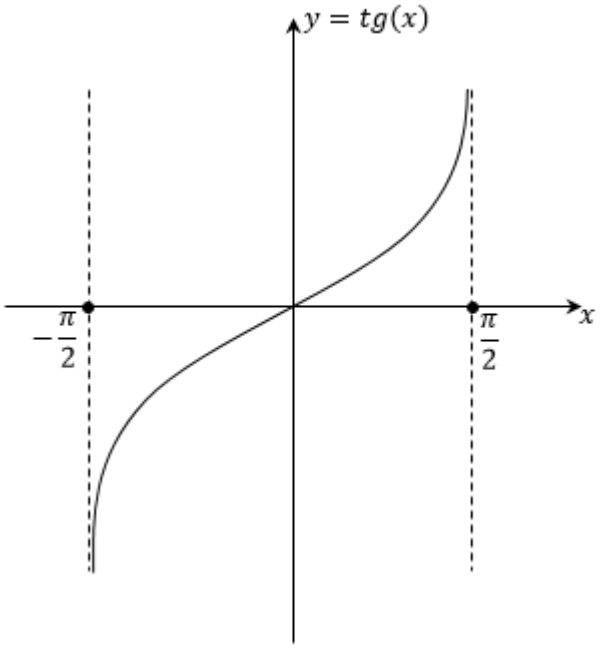


Figura 3.66. Determinação do ângulo

De acordo com a Eq.(3.297) e a Fig.(3.66), chega-se a conclusão: $\theta = \frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{c}{a-b}\right)$; Equação geral: $ax^2 + by^2cxy + dx + ey + f = 0$. Considerando, $a = b = 3$, tem-se:

$$\theta = \frac{1}{2}\text{arctg}(\infty) \therefore \theta = \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} \therefore \theta = \frac{\pi}{4} = 45° \quad (3.297)$$

Aplicando-se a matriz rotação na Eq.(3.297): $\text{Rotação}\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 \end{cases}$

$$3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_1\right)^2 + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1\right)^2 - 10\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1\right) + 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 -$$

$$22y1-4222x1+22y1+32=0 \quad (3.298)$$

resolvendo, tem-se:

$$-2x_1^2 + 8y_1^2 + 8x_1 - 16y_1 + 32 = 0 \quad (3.299)$$

$$x\left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow x_1^2 - 4y_1^2 - 4x_1 + 8y_1 - 16 = 0 \quad (3.300)$$

rearranjando os termos, obtém se a equação da hipérbole:

$$(x_1 - 2)^2 - 4 - 4(y_1 - 1)^2 + 4 = 16 \quad (3.301)$$

$$\frac{(x_1-2)^2}{(4)^2} - \frac{(y_1-1)^2}{(2)^2} = 1 \quad (3.302)$$

$$x_2 = x_1 - 2 \text{ e } y_2 = y_1 - 1 \quad (3.303)$$

a hipérbole transladada de (2,1) no sistema é representa conforme a Eq.(3.304)

$$\frac{x_2^2}{(4)^2} - \frac{y_2^2}{(2)^2} = 1 \quad (3.304)$$

a hipérbole rotacionada de $45°$ e transladada de (2,1) é apresentada na na Fig.(3.67)**.**

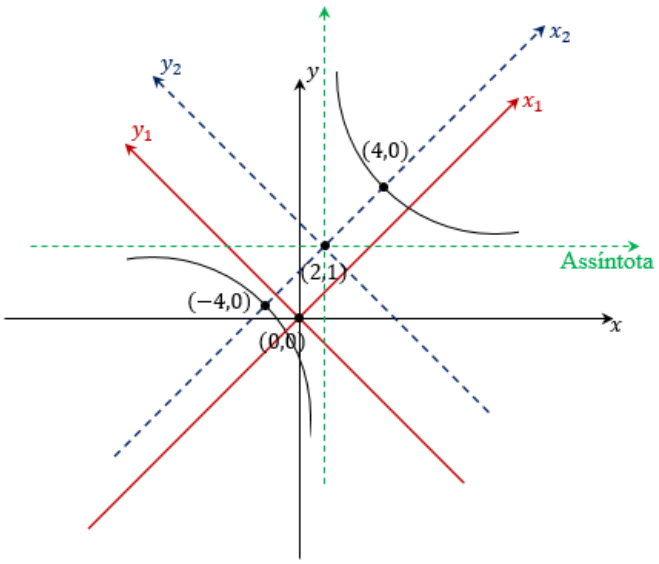


Figura 3.67. Hipérbole rotacionada de $45°$

Aplicando-se uma rotação em um objeto qualquer, todos os pontos sofrerão o mesmo giro de um ângulo θ.

Tal conceito pode ser exemplificado imaginando um braço de $45\ \mathrm{cm}$ de comprimento e $4\ \mathrm{Kg}$ de massa que se encontra sobre o eixo x (Fig.(3.68)) onde o centro de massa do braço $\mathrm{C} = (\mathrm{x_{cm}}; \mathrm{y_{cm}}) = (0{,}225\mathrm{m}; 0)$. Sabe-se inicialmente que o braço está em repouso e que gasta $0{,}5\ \mathrm{s}$ para dar um giro de $60°$. Neste caso, é possível explicar fisicamente o que ocorre com as grandezas envolvidas na rotação destes braços. Dado o momento de inércia do braço, $\mathrm{I_b} = 0{,}0675\mathrm{Kg.m^2}$.

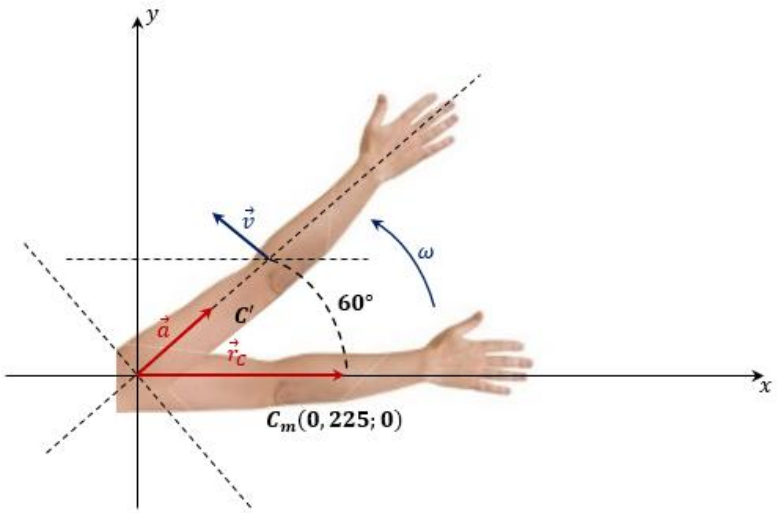


Figura 3.68. Rotação do antebraço

A posição do braço inicialmente:

$$\vec{r}_0 = 0{,}2250\hat{i} + 0\hat{j} \tag{3.305}$$

$$\vec{r} = 0{,}1125\hat{i} + 0{,}1948\hat{j} \tag{3.306}$$

Cálculo do vetor deslocamento ($\Delta\vec{r}$):

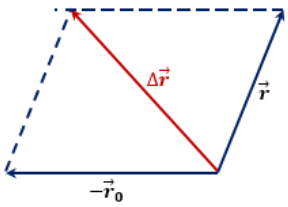


Figura 3.69: Representação do vetor deslocamento

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (0{,}1125\hat{i} + 0{,}1948\hat{j}) - (0{,}225\hat{i}) \tag{3.307}$$

$$\Delta\vec{r} = -0{,}1125\hat{i} + 0{,}1948\hat{j} \tag{3.308}$$

Cálculo da velocidade do centro de massa do braço:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta \therefore \vec{v}_r = \frac{dr}{dt}.\hat{u}_r \text{ e } \vec{v}_\theta = r.\frac{d\theta}{dt} \tag{3.309}$$

em que $\vec{v}_r$ é a velocidade radial e $\vec{v}_\theta$ é a velocidade transversa.

$$\vec{v} = \vec{v}_\theta = \omega.r.\hat{u}_\theta \rightarrow \vec{v} = -0{,}408\hat{\imath} + 0{,}2356\hat{\jmath} \tag{3.310}$$

após girar $60°$, $\omega = \frac{(\pi/3)}{3} = \frac{2\pi}{3}\frac{rad}{s}$

$$v_\theta = 0{,}225.\left(\frac{2\pi}{3}\right) \rightarrow v_\theta = 0{,}4712\ m/s \tag{3.311}$$

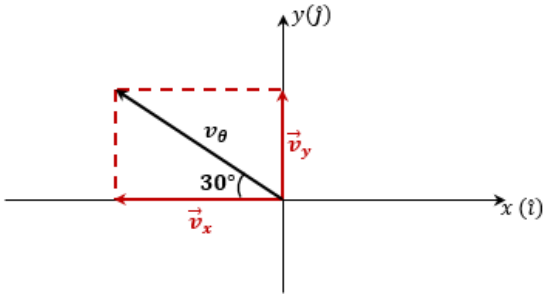


Figura 3.70. Coordenadas da velocidade transversa

Cálculo da aceleração do centro de massa do braço:

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{u}_r + \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}.\frac{d\theta}{dt}\right]\hat{u}_\theta \tag{3.312}$$

$$\vec{a} = [-\omega^2 r]\hat{u}_r + [\gamma r]\hat{u}_\theta \therefore \vec{a} = -(0{,}987)\hat{u}_r + (0{,}94)\hat{u}_\theta \tag{3.313}$$

$$|\vec{a}| = 1{,}363\ m/s^2 \tag{3.314}$$

Cálculo da aceleração angular:

$$\begin{cases} \gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{(2\pi/3)}{\frac{1}{2}} = \frac{4\pi}{3}\,rad/s^2 \therefore \frac{4\pi}{3}.0{,}225 = 0{,}94\,m/s^2 \\ \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2.0{,}225 = 0{,}987\,m/s^2 \end{cases} \tag{3.315}$$

Cálculo do momento Angular $(\vec{L})$

$$\vec{r} = -0{,}1125\hat{\imath} + 0{,}1948\hat{\jmath} \text{ e} \tag{3.316}$$

$$\vec{p} = m.\vec{v} = 4(-0{,}408\hat{\imath} + 0{,}2356\hat{\jmath}) \tag{3.317}$$

$$\vec{p} = -1{,}632\hat{\imath} + 0{,}94\hat{\jmath} \tag{3.318}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (-0{,}1125\hat{\imath} + 0{,}1948\hat{\jmath}) \times (-1{,}632\hat{\imath} + 0{,}94\hat{\jmath}) \tag{3.319}$$

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -0{,}1125 & 0{,}1948 & 0 \\ -1{,}632 & 0{,}94 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{L} = -0{,}106\hat{k} + 0{,}318\hat{k} = 0{,}212\hat{k} \tag{3.320}$$

$$\vec{L} = 0{,}212\hat{k} \tag{3.321}$$

$$\left|\vec{L}\right| = 0{,}212 \text{ Kg}.\frac{m^2}{s} \tag{3.322}$$

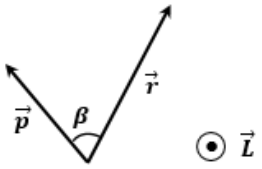


Figura 3.71. Momento angular

Cálculo do Torque $(\vec{\tau})$:

$$\vec{\tau} = I.\vec{\gamma} \rightarrow \tau = 0{,}0675.\left(\frac{4\pi}{3}\right) \rightarrow \tau = 0{,}283\text{N} \times \text{m} \tag{3.323}$$

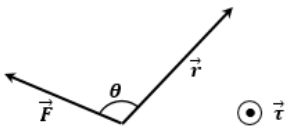


Figura 3.72. Torque

Cálculo da força $(\vec{F})$:

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F}, \theta = 90° \tag{3.324}$$

$$0{,}283 = 0{,}225.\,F \rightarrow F = 1{,}26\ N \tag{3.325}$$

Cálculo da energia (E)

$$_{F}W_{A}^{B} = \int \tau\, d\theta = 0{,}283.\int_{0}^{\pi/3} d\theta \rightarrow E = {}_{F_e}W_{A}^{B} = 0{,}283.\frac{\pi}{3} \rightarrow E = 0{,}3\ \mathcal{J} \tag{3.326}$$

3.11 Momento de Inércia de um Objeto (I)

O momento de Inércia é uma grandeza física escalar que mede a distribuição de massa de um corpo em relação a um eixo que passa por uma das partes do mesmo. Se o eixo escolhido for o centro de massa do objeto, tem-se o momento de inércia (I) menor possível e se, escolher um eixo nas extremidades ou periferia do mesmo, ter-se-á um momento de inércia muito grande, (TIPLER, 2011). Segue a explicação para esclarecer o leitor.

Define-se $I = \int r^2 dm$, onde r é a distância do elemento de massa (dm) em relação ao eixo adotado. O somatório contínuo de $r^2 dm$ é dado por $\int r^2 dm$ que representa o momento de inércia do objeto como um todo, em relação ao eixo escolhido.

$$I = \int r^2 dm \text{ ou } I = \int r^2 \rho dv \tag{3.327}$$

Na Fig.(3.73) será aplicado o conceito de momento de inércia de uma barra de densidade constante e eixo ortogonal ao seu comprimento.

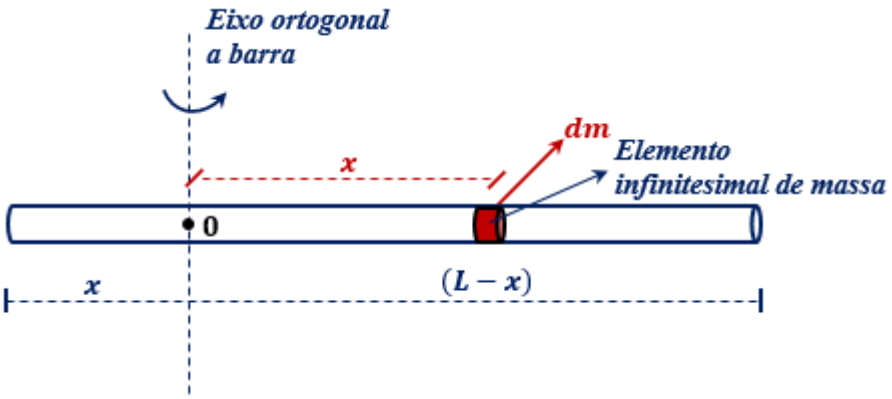


Figura 3.73. Momento de inércia da barra

Cálculo do elemento de massa da barra:

$$\rho = \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{L}} \rightarrow \mathrm{dm} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}\mathrm{d}\ell, \qquad \mathrm{d}\ell = \mathrm{dx} \tag{3.328}$$

A distribuição de massa é uniforme ao longo da barra.

$$\mathrm{I} = \int_{-\mathrm{x}}^{\mathrm{L}-\mathrm{x}} \mathrm{x}^2 \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}.\frac{\mathrm{x}^3}{3}\Big|_{-\mathrm{x}}^{\mathrm{L}-\mathrm{x}} \rightarrow \mathrm{I} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}.\left[\frac{(\mathrm{L}-\mathrm{x})^3}{3} - \frac{(-\mathrm{x})^3}{3}\right] \tag{3.329}$$

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{M}}{3\mathrm{L}}[\mathrm{L}^3 - 3\mathrm{L}^2\mathrm{x} + 3\mathrm{L}.\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^3] \rightarrow \mathrm{I} = \frac{\mathrm{ML}^2}{3} - \mathrm{MLx} + \mathrm{Mx}^2 \tag{3.330}$$

Vale ressaltar, que:

- Se $\mathrm{x} = 0$, o eixo encontra-se na extremidade da barra, momento de inércia, o máximo possível, ao girar a barra, tem-se uma complexidade máxima. Sendo, $\mathrm{I} = \frac{\mathrm{M}}{3}.\mathrm{L}^2$.
- Se $\mathrm{x} = \frac{\mathrm{L}}{2}$, o eixo encontra-se no centro de massa da barra, o momento de inércia, será o menor possível, ao girar a barra, tem-se a menor dificuldade.

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{M}}{3}\mathrm{L}^2 - \frac{\mathrm{M}.\mathrm{L}^2}{2} + \frac{\mathrm{ML}^2}{4} = \frac{4\mathrm{ML}^2 - 6\mathrm{ML}^2 + 3\mathrm{ML}^2}{12} \therefore \mathrm{I} = \frac{1}{12}\mathrm{ML}^2 \tag{3.331}$$

Outro momento de inércia pode ser calculado em um cilindro oco e um cilindro maciço, ilustrado na Fig.(3.74):

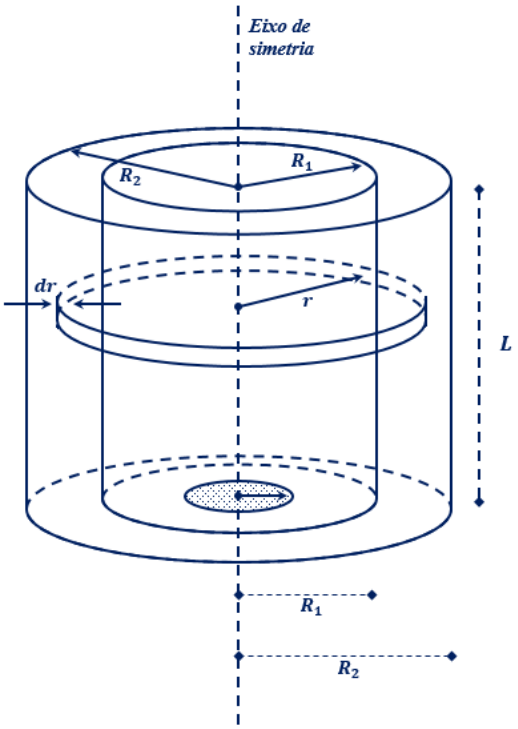


Figura 3.74. Momento de inércia do cilindro

Cálculo do elemento de massa no cilindro:

$$\mathrm{dm} = \rho \mathrm{dv} = \rho(2\pi \mathrm{rLdr}) \tag{3.332}$$

Cálculo do momento de inércia do cilindro:

$$\mathrm{I} = \int \mathrm{r}^2 \mathrm{dm} = \int_{\mathrm{R}_1}^{\mathrm{R}_2} \mathrm{r}^2 . \rho . (2\pi \mathrm{rLdr}) \tag{3.333}$$

$$\mathrm{I} = 2\pi\rho . \mathrm{L} \int_{\mathrm{R}_1}^{\mathrm{R}_2} \mathrm{r}^3 \mathrm{dr} \tag{3.334}$$

$$\mathrm{I} = 2\pi\rho \mathrm{L} . \left[\frac{\mathrm{R}^4}{4}\right]_{\mathrm{R}_1}^{\mathrm{R}_2} \tag{3.335}$$

$$\mathrm{I} = \frac{2\pi\rho . \mathrm{L}}{4} (\mathrm{R}_2^4 - \mathrm{R}_1^4) \tag{3.336}$$

$$\mathrm{I} = \frac{\pi\rho . \mathrm{L}}{2} . (\mathrm{R}_2^2 - \mathrm{R}_1^2) . (\mathrm{R}_2^2 + \mathrm{R}_1^2) \tag{3.337}$$

As equações (3.338) e (3.339) representam o momento de inércia em relação a massa do cilindro oco ou maciço.

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\mathrm{M}(\mathrm{R}_2^2 + \mathrm{R}_1^2) \tag{3.338}$$

$$\mathrm{V} = \pi\mathrm{L}(\mathrm{R}_2^2 - \mathrm{R}_1^2), \text{ então } \mathrm{M} = \rho.\pi\mathrm{L}(\mathrm{R}_2^2 - \mathrm{R}_1^2) \tag{3.339}$$

É importante ressaltar que:

- $\mathrm{R}_1 = 0 \therefore$ cilindro é maciço: $\mathrm{I} = \frac{1}{2}\mathrm{M}.\mathrm{R}^2.\ \mathrm{R}_2 = \mathrm{R}.$
- $\mathrm{R}_1 \cong \mathrm{R}_2 \therefore$ cilindro oco, muito fino: $\mathrm{I} = \mathrm{MR}^2.$

Ao abandonar dois cilindros no topo de um plano inclinado, um maciço e o outro oco, o momento de inércia do cilindro oco é o dobro do momento de inércia do cilindro maciço, logo o cilindro maciço chegará na base do topo primeiro, pois, o seu momento de inércia é menor, logo atingirá uma velocidade maior, percorrendo a rampa num intervalo de tempo menor do que o cilindro oco.

Quanto maior momento de inércia, menor a velocidade:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{CR}} = \frac{1}{2}\mathrm{I}\omega^2 \tag{3.340}$$

Uma exemplificação para o cálculo do momento de inércia em uma esfera de raio R e densidade constante, é dado como se segue:

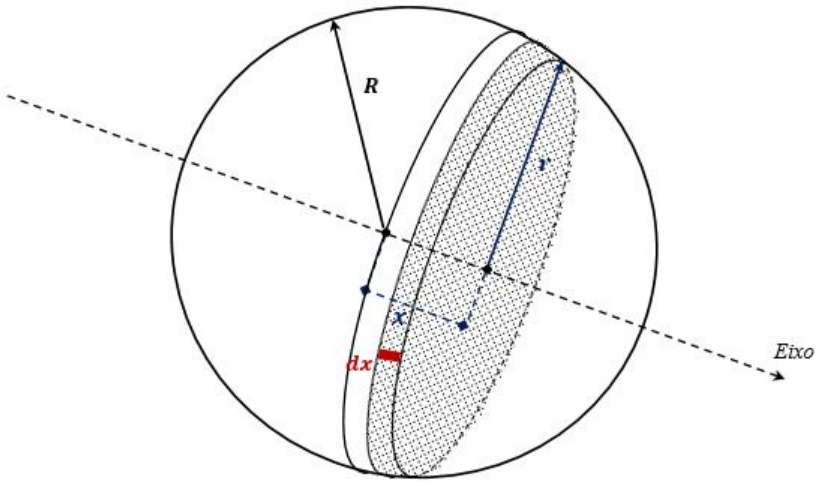


Figura 3.75. Momento de inércia da esfera

Cálculo do elemento de massa da esfera:

$$\mathrm{dm} = \rho \mathrm{dv} = \pi\rho(\mathrm{R}^2 - \mathrm{x}^2)\mathrm{dx} \tag{3.341}$$

Cálculo do momento de inércia da esfera:

$$\int \mathrm{dI} = (2)\frac{\pi\rho}{2}\int_0^{\mathrm{R}}(\mathrm{R}^2 - \mathrm{x}^2)\mathrm{dx} \tag{3.342}$$

$$\mathrm{I} = \frac{8\pi\rho}{15}\mathrm{R}^5 \tag{3.343}$$

O volume da esfera é $\frac{4}{3}\pi\mathrm{R}^3$, logo $\mathrm{M} = \rho.\frac{4}{3}\pi\mathrm{R}^3$, então: $\mathrm{I} = \frac{2}{5}.\mathrm{MR}^2$ representa o momento de inércia da esfera em relação ao eixo de simetria.

Comparando o momento de inércia da esfera, $\mathrm{I_E} = 0{,}4\mathrm{MR}^2$ com o momento de inércia do cilindro maciço de raio R e massa M, $\mathrm{I_C} = 0{,}5\mathrm{MR}^2$, verifica-se que o momento de inércia da esfera é menor do que o momento de inércia do cilindro, isto ocorre devido a massa da esfera estar mais concentrada em torno do seu eixo, do que o cilindro de mesma massa (M) e raio (R).

O conceito de momento de inércia também pode ser observado ao se calcular o momento de inércia (I) da roda de uma bicicleta, como na Fig.(3.76) de raio $33\ \mathrm{cm}$, sendo o raio do toróide (pneu) de $3\ \mathrm{cm}$ (maciço).

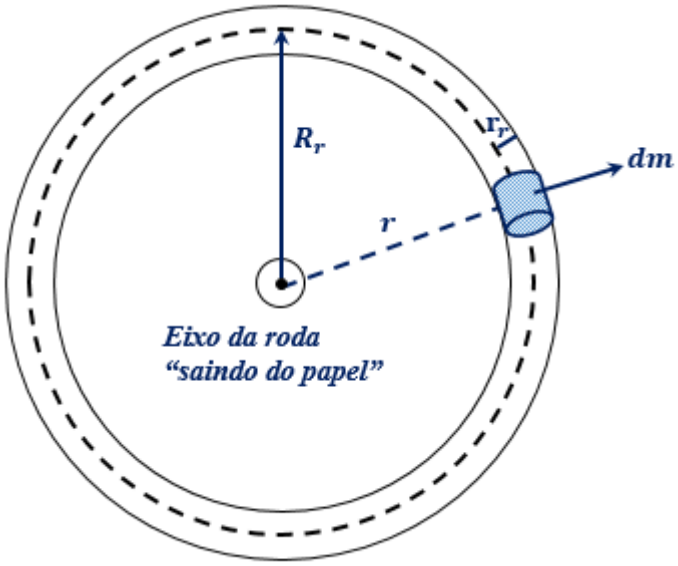


Figura 3.76. Momento de inércia de uma roda

Cálculo do elemento de massa:

$$\rho = \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dv}} \therefore \mathrm{dm} = \rho.[\pi \mathrm{r}_\mathrm{T}^2 \mathrm{dL}] \quad (3.344)$$

Cálculo do momento de inércia:

$$\mathrm{I} = \int \mathrm{r}^2.\mathrm{dm} \quad (3.345)$$

$$\mathrm{I} = \int_0^{2\pi \mathrm{R_r}} \mathrm{R}_\mathrm{r}^2.\rho.\pi \mathrm{R}_\mathrm{T}^2.\mathrm{dL} \quad (3.346)$$

$$\mathrm{I} = \rho.\mathrm{R}_\mathrm{r}^2.\pi.\mathrm{R}_\mathrm{T}^2[\mathrm{L}]_0^{2\pi \mathrm{R_r}} \quad (3.347)$$

$$\mathrm{I} = \rho.\mathrm{R}_\mathrm{r}^3.2.\pi^2.\mathrm{R}_\mathrm{T}^2,\ \mathrm{M} = \rho.\mathrm{V} = \rho.\pi^2.\mathrm{R}_\mathrm{T}^2.\mathrm{R_r}.2 \quad (3.348)$$

$\mathrm{I} = \mathrm{M}.\mathrm{R}_\mathrm{r}^2$, conhecemos $\mathrm{R_r}$ e massa (M).

Como a massa da roda está distribuída na periferia da mesma, o momento de inércia é muito alto.

A Tab. (3.1) mostra o equacionamento de um movimento em relação a translação e rotação.

Tabela 3.1: Correspondências entre movimentos de translação e rotação, (Adaptado de DONOSO, 2014)

Translação pura		Rotação pura	
Posição	X	Posição angular	Θ
Velocidade	$\mathrm{v} = \mathrm{dx/dy}$	Velocidade angular	$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{dt}$
Aceleração	$a = \mathrm{dv/dt}$	Aceleração angular	$\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{dt}$
Massa	m	Momento de inércia	I
Segunda lei de Newton	$\mathrm{F_{net}} = \mathrm{m}a$	Segunda lei de Newton para rotação	$\tau_{\mathrm{net}} = \mathrm{I}\alpha$
Trabalho	$\mathrm{W} = \int \mathrm{F dx}$	Trabalho	$\mathrm{W} = \int \tau \mathrm{d}\theta$
Energia cinética	$\mathrm{K} = \frac{1}{2}\mathrm{mv}$		

Translação pura		Rotação pura	
Potência	$P = Fv$	Energia cinética	$K = \frac{1}{2} I\omega^2$
Teorema da energia cinética	$W = \Delta K$	Potência	$P = \tau\omega$
		Teorema da energia cinética de rotação	$W = \Delta K$

A Fig.(3.77) representa a determinação do vetor $\vec{\omega}$:

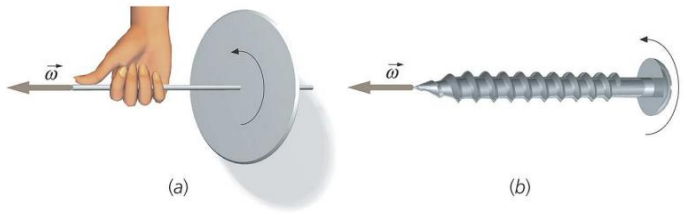


Figura 3.77. Natureza vetorial da rotação, (Adaptado de DONOSO, [2014])

O sentido do giro de uma roda varia de acordo com cada situação, sendo assim o momento angular é dado a partir deste sentido.

Figura 3.78. Primeira roda gigante (1893), (Adaptado de DONOSO, [2014])

A Fig.(3.79) mostra-se a conservação do momento angular $(\vec{\mathrm{L}})$:

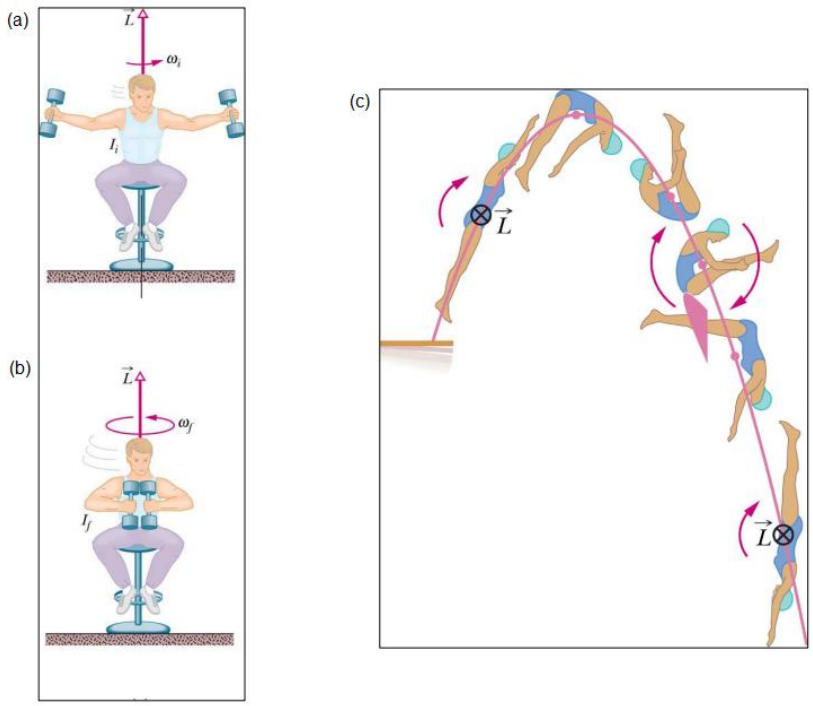


Figura 3.79. Conservação do momento angular, (a) Rotação no Eixo/Braços Abertos, (b) Rotação no Eixo/Braços Fechados, (c) Movimento de uma pessoa no lançamento oblíquo. (Adaptado de DONOSO, [2014])

3.12 Movimento Relativo

O movimento é dito relativo, quando no mínimo existem dois movimentos independentes e dois referenciais (sendo um deles fixo e o outro um referencial móvel), daí se compara o movimento do objeto móvel, em relação ao movimento do mesmo com o referencial fixo.

Imagine um avião saindo de uma cidade P (oeste), indo para uma cidade Q (leste) com velocidade $\vec{\mathrm{v}}_{av}$ (velocidade do avião em relação ao referencial móvel, que é o vento) e durante este deslocamento do avião ocorre um vento soprando de oeste para leste com velocidade $\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{vT}}$ (velocidade do vento em relação ao referencial fixo, que é a Terra), logo quer-se determinar a velocidade do avião em relação a Terra. Assim escreve-se:

$$\vec{v}_{aT} = \vec{v}_{av} + \vec{v}_{vT} \tag{3.349}$$

$\vec{v}_{aT}$, é a velocidade do avião em relação a Terra (ref. fixo).

$\vec{v}_{av}$, é a velocidade do avião em relação ao vento (ref. móvel).

$\vec{v}_{vT}$, é a velocidade do vento (ref. móvel) em relação a Terra (ref. fixo).

Neste caso, de P para Q, tem-se: $v_{aT} = v_{av} + v_{vT}$.

Caso o avião deslocar-se de Q para P, tem-se: $v_{aT} = v_{av} - v_{vT}$.

Agora considere o avião indo de P para Q e o vento soprando de norte para o sul, como se deve proceder para que o avião saia de P e chegue ao seu destino, a cidade Q?

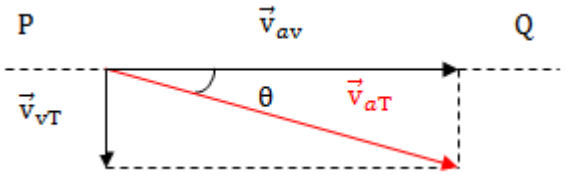


Figura 3.80. Composição de velocidades

$\vec{v}_{aT} = \vec{v}_{av} + \vec{v}_{vT}$, $\vec{v}_{av}$ é perpendicular a $\vec{v}_{vT}$.

aplicando-se o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$v_{aT} = \sqrt{v_{av}^2 + v_{vT}^2} \tag{3.350}$$

Cálculo do ângulo θ:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_{vT}}{v_{av}} \therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{vT}}{v_{av}}\right) \tag{3.351}$$

Logo, deve-se inclinar o avião, como mostra a Fig.(3.81), para que o avião chegue ao seu destino.

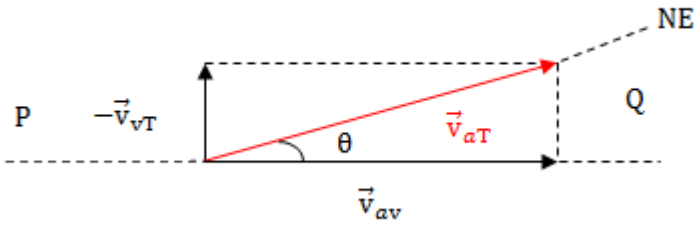


Figura 3.81. Composição de velocidades

A componente do avião $(\vec{v}_{aT})_N$ na direção norte deve ser anulada pela velocidade do vento, logo o avião chegará em Q, desde que ele desloque-se na direção de NE.

Para uma melhor compreensão do movimento relativo de um corpo em relação a um outro, considere o caso em que um piloto deseja voar para leste, de A para B e, em seguida, voar para oeste, retornando a cidade A. A velocidade do avião no ar é $\vec{v}'$, cujo módulo é de $250\ m/s$ e a velocidade do vento (ar) em relação ao solo é $\vec{u}$, cujo módulo é de $20\ m/s$. A distância entre A e B é L, de módulo $10^6\ m$. Faz-se as análises abaixo.

A. Se $u = 0$, mostre que o tempo de ida e volta é: $t_0 = \frac{2L}{v'}$.

Ida: $t_i = \frac{L}{v'}$; Volta: $t_v = \frac{L}{v'}$; onde $t_0 = t_i + t_v = \frac{L}{v'} + \frac{L}{v'} = \frac{2L}{v'}$.

$$t_0 = \frac{2L}{v'};\ t_0 = \frac{2.10^6}{250} = 8.10^3\ s \tag{3.352}$$

B. Suponha-se que a velocidade do vento atua de oeste para leste (A para B) O tempo de ida e volta será:

$$t = \frac{t_0}{1-\frac{u^2}{v'^2}} \tag{3.353}$$

$t_i = \frac{L}{v'+u}$; $t_v = \frac{L}{v'-u}$, obviamente que $v' > u$.

então,

$$t = t_i + t_v = \frac{L}{v+u} + \frac{L}{v-u} = \frac{L(v'-u)+L(v'+u)}{(v'+u).(v'-u)} = \frac{Lv'-Lu+Lv'+Lu}{v'^2-u^2} \quad (3.354)$$

$$t = \frac{2Lv'}{v'^2-u^2} = \frac{2L}{\frac{v'}{v'^2}(v'^2-u^2)} = \frac{t_0}{1-\frac{u^2}{v'^2}} \therefore t = \frac{t_0}{1-\left(\frac{u}{v'}\right)^2} \quad (3.355)$$

$$t = \frac{8000}{1-\left(\frac{20}{250}\right)^2} \therefore t = 8051\ s \quad (3.356)$$

C. Suponha que a velocidade do vento esteja dirigido do sul para o norte.

$$t_i = \frac{L}{\sqrt{v'^2-u^2}};\ \vec{v}' = \vec{v} + \vec{u},\ v = \sqrt{v'^2 - u^2} \quad (3.357)$$

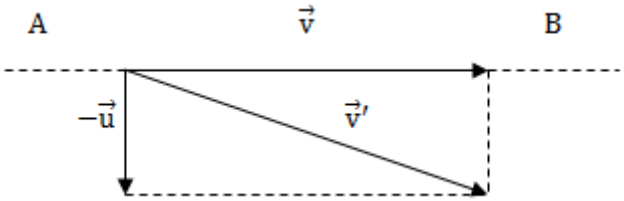


Figura 3.82. Decomposição de velocidades

$$t_v = \frac{L}{\sqrt{v'^2-u^2}};\ \vec{v}' = \vec{v} + \vec{u},\ v = \sqrt{v'^2 - u^2} \quad (3.358)$$

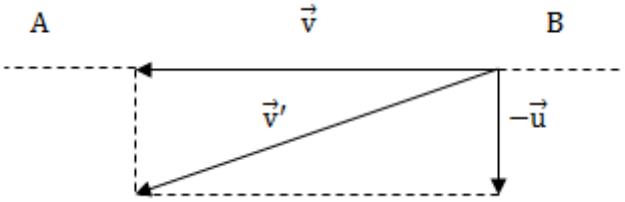


Figura 3.83. Decomposição de velocidades

$$t = t_i + t_v \therefore t = \frac{2L}{\sqrt{v'^2-u^2}} = \frac{2L}{\frac{v'}{v'}\left(\sqrt{v'^2-u^2}\right)} = \frac{t_0}{\sqrt{\frac{v'^2}{v'^2}-\frac{u^2}{v'^2}}} \quad (3.359)$$

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{v'}\right)^2}} \quad (3.360)$$

$$t = \frac{8000}{\sqrt{1-\left(\frac{20}{250}\right)^2}} = 8103{,}73\ s \tag{3.361}$$

CAPÍTULO IV

INTRODUÇÃO À ROBÓTICA EDUCACIONAL

A criatividade ao longo da história, mostra que o homem de geração em geração vem criando novos materiais, novas máquinas, avanços na medicina, avanços na indústria de cosméticos. Consequentemente com laboratórios mais equipados, é possível conseguir melhores resultados ao final de um dado processo.

A utilização de mecanismos robóticos é cada vez mais empregada em aplicações industriais. No meio educacional, a robótica vem incentivando e motivando os estudantes a descobrir novos robôs, que modificarão os modos de agir da sociedade.

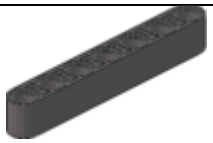
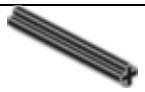
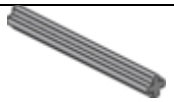
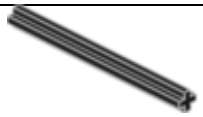
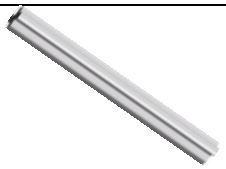
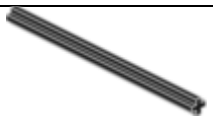
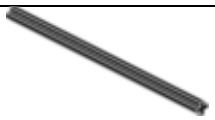
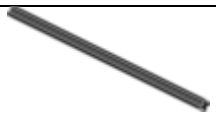
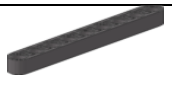
O kit MINDSTORMS NXT da LEGO, é composto por um conjunto de peças tradicionais da LEGO, um processador (*NXT Intelligent Brick*) que é o "cérebro" do robô, além de motores e sensores. Com estes kits NXT e possível construir uma infinidade de protótipos. Os motores e sensores NXT, permitem com muita facilidade, a montagem de protótipos que se movimentam e interagem com o ambiente, realizando tarefas diversas no cotidiano do homem.

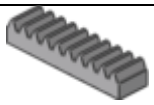
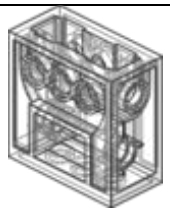
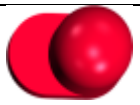
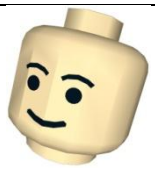
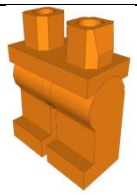
Neste capítulo foram construídos alguns protótipos com a finalidade de mostrar na prática alguns fenômenos abordados neste trabalho.

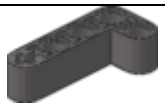
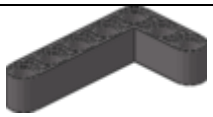
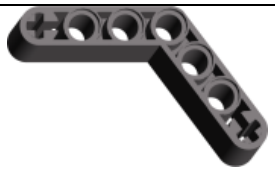
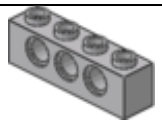
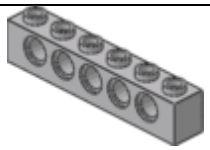
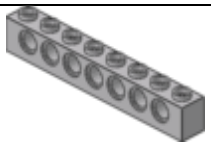
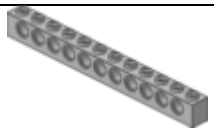
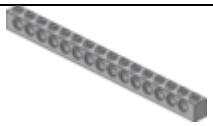
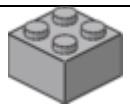
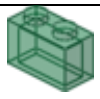
Na Tab.(4.1) são mostradas as peças do kit Lego que foram utilizadas na confecção dos protótipos dos experimentos.

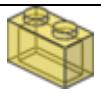
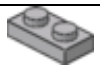
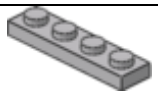
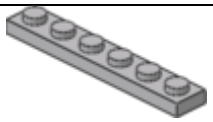
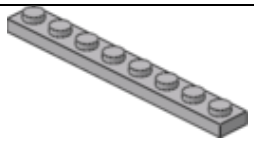
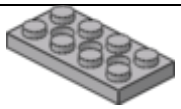
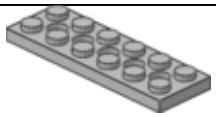
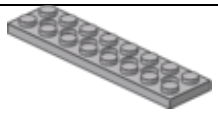
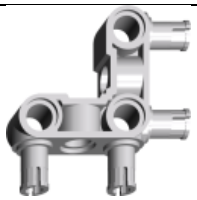
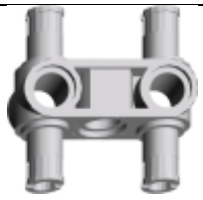
Tabela 4.1: Catalogo das peças do kit Lego

Conector Angular #2 180°	Conector Angular #3 157.5°	Conector Angular #4 135°

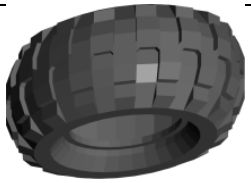
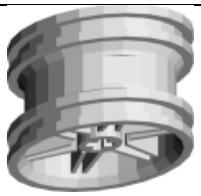
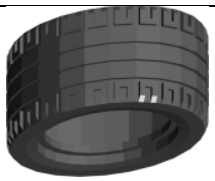
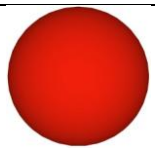
Conector Angular #5 112.5°	Conector Angular #6 90°	Cinta de Borracha Grande (Amarela)
Cinta de Borracha Média (Vermelha)	Viga 3	Viga 5
 Viga 7	Eixo 2 Entalhado	Eixo 3
Eixo 3 com Botão	 Eixo 4	 Eixo 5
Eixo 5.5 com Parada	 Eixo 6	 Eixo 7
Viga 11	Viga 13	Viga 15
 Eixo 8	 Eixo 10	 Eixo 12
Viga 3x7 Braço Dobrado 53.5	Viga 4x6 Braço Dobrado 53.5	 Viga 9

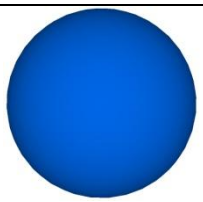
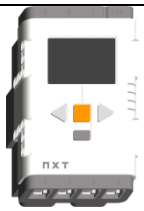
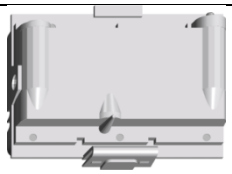
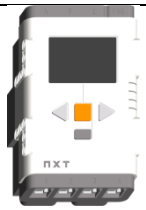
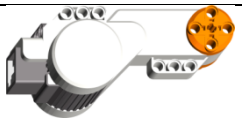
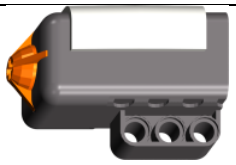
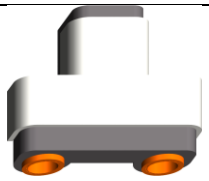
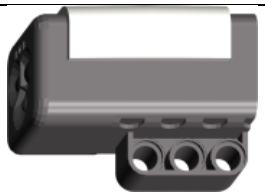
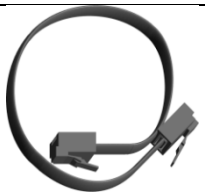
Engrenagem 8 Dentes	Engrenagem 12 Dentes Chanfrada	Engrenagem 16 Dentes
Rosca sem Fim	 Cremalheira 1x4	Cremalheira 1x8 com Furos
Engrenagem 12 Dentes Bichanfrada	Roda Maçaneta	Gira Discos
Engrenagem 40 Dentes	 Caixa de Engrenagens 2x4x3 & 1/3	Diferencial
Engrenagem 36 Dentes Bichanfrada	Engrenagem Coroa 24 Dentes Tipo III (Padrão X)	Engrenagem 24 Dentes
Engrenagem 20 Dentes Bichanfrada	 Minifig Boné	Minifig Cabelo
 Minifig Cabeça	 Minifig Pernas	Minifig Torso

Bucha	1/2 Bucha	 Viga 2x4 Braço Dobrado 90
 Viga 3x5 Dobrada 90	Viga 3x3.8x7 Braço Dobrado 45 Duplo	 Viga 4x4 Braço Dobrado 53.5
Triângulo	Viga 3x5x0.5 Braço Dobrado 90 Quarto da Elipse	 Tijolo 1x4 com Furos
 Tijolo 1x6 com Furos	 Tijolo 1x8 com Furos	 Tijolo 1x12 com Furos
Tijolo 1x14 com Furos	 Tijolo 1x16 com Furos	Tijolo 1x2
Tijolo 1x2 com Furo X	Tijolo 1x2 com Furo	 Tijolo 2x2
Tijolo 2x2 Redondo	 Tijolo 1x2 Transparente Verde	Tijolo 1x2 Transparente Vermelho

 Tijolo 1x2 Transparente Amarelo	 Placa 1x2	 Placa 1x4
 Placa 1x6	 Placa 1x8	Placa 2x2 Redonda
 Placa 2x4 com Furos	 Placa 2x6 com Furos	 Placa 2x8 com Furos
Junta Axial Dupla Flexível	Junta de Eixos Perpendicular	Pino 3L Duplo
Junta de Eixos Perpendicular 3L	Junta de Eixos Perpendicular Dupla com Fenda	Junta de Eixos Perpendicular com 2 Furos
 Junta de Eixos Perpendicular 3L com 6 Pinos	 Junta de Eixos Perpendicular 3L com 4 Pinos	Junta de Pinos Dobrada Perpendicular
Junta de Eixos sem Cumes	Junta de Pinos Redonda	Junta de Eixos

Junta Axial Perpendicular Longa	Conector Axial Perpendicular	Braço de Direção com Conectores
Junta de Eixos Perpendicular Dupla	Junta de Pinos Dupla Perpendicular	Junta Universal
Eixo-Pino	Eixo-Pino com Atrito	Eixo-Bola
Eixo 3x0.5 Braço com Pino e X	Pino	Pino ½
Pino ¾	Pino Longo	Pino Longo com Atrito
Pino Longo com Bucha de Parada	Pino com Atrito	Pino-Bola com Atrito
Flecha (Completa)	Canhão 2x6x3	Elo de Corrente
Pinça Suukorak	Dente 1x3 com Furo X	Gancho Metálico Grande

Ladrilho com Encaixe	Link de Direção 6L Tipo 2	Link de Direção 9L
Manivela de Reversão	Excêntrico	Prato 2x2 Redondo
Cone 1x1	Tijolo de Luz e Som 1x2 com Uma Lâmpada	Esteira
Pneu 81.6x15	Roda 81.6x15	 Pneu 56x26 Balão
 Roda 43.2x22 sem Furos (Padrão X)	 Pneu 43.2x22 ZR	Roda 18x14 com Furos Passantes
 Bola 52 mm Vermelha	Roda-Polia	Pneu para Roda-Polia

 Bola 52 mm Azul	Pneu 24x14 Radial	 Mindstorms NXT
 Bateria 7.4V Recarregável	 Mindstorms NXT 2.0	 Motor NXT
Sensor de Luz	Sensor de Som	 Sensor de Toque
 Sensor Ultrassônico	 Sensor de Cor	 Cabo 20 cm
Cabo 35 cm	Cabo 50 cm	Cabo de Conversão 35 mm
Cabo USB		

4.1 Experimento I: Movimento Retilíneo Uniforme (MRU)

Este experimento consiste na construção do carrinho (MRU) com o comando programado de 1,5 em 1,5 s, o “brick” recebe o sinal do sensor que registra além do tempo, a distância que o carrinho encontra-se da parede.

Foi utilizado para tal experimento, um carrinho montado com sensor, montado com as peças do kit Lego, como mostra a Fig.(4.1)

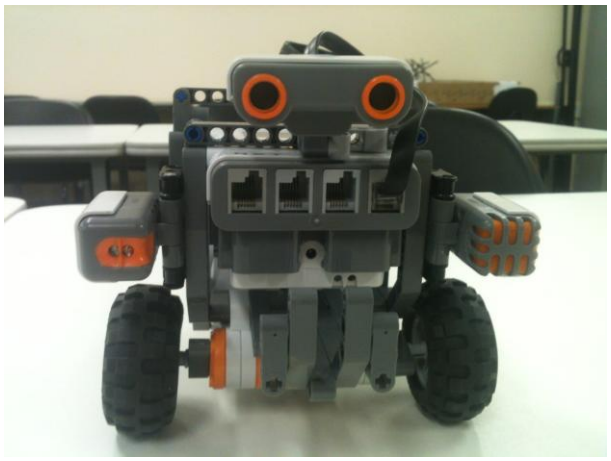


Figura 4.1. Protótipo de um carro montado com peças Lego

A Tab.(4.2) apresenta as peças do kit Lego utilizadas na construção do carrinho:

Tabela 4.2. Relação das peças

QUANTIDADE	PEÇAS
11	Viga 3
4	Viga 7
1	Viga 5
2	Viga 9
2	Viga 11
1	Viga 13

QUANTIDADE	PEÇAS
1	Eixo 3
9	Eixo 5
3	Eixo 8
2	Viga 2x4 dobrado com $90°$
2	Viga 3x5 dobrado com $90°$
6	Viga 3x3 dobrado com $45°$
2	Pino 3L duplo
8	Junta de eixo com 2 furos
7	Junta de eixo 3L
15	Eixo-Pino com atrito
4	Bucha
14	Meia bucha
1	Junta de eixo 3L com 6 pinos
1	Viga 3x0,5 braço com pino X
34	Pino com atrito
14	Pino duplo com atrito
1	Brick
2	Servo motor
1	Sensor ultrassônico
2	Junta de eixo perpendicular
2	Roda 43,2x22 sem furos padrão X
2	Cabo 35 cm
1	Cabo 20 cm
2	Roda-Polia

O experimento MRU da seguinte maneira:

No instante $t_0 = 0$, tem-se o carrinho à $1{,}03\ \mathrm{m}$ da parede com velocidade $\vec{v}$. Após $1{,}546\ s$ o carrinho encontra-se à $0{,}75\ \mathrm{m}$ de distância da parede, já no instante $3{,}057\ s$ o carrinho passa por uma posição de $0{,}20\ \mathrm{m}$ da parede. Estes dados são apresentados na Tab. (4.3):

Tabela 4.3. Posição x Tempo

Posição (m)	0	0,28	0,57	0,83
Tempo (s)	0	1,546	3,057	4,568

Ao se construir o gráfico posição x tempo, a união dos pontos onde encontra-se uma reta. A inclinação deste gráfico (Fig.(4.2)) nos fornece o módulo da velocidade.

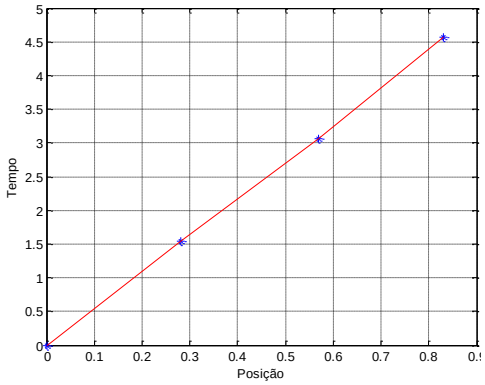


Figura 4.2. Posição x Tempo

Trecho de $0 \rightarrow 4{,}568 \ \therefore \ \mathrm{v_m} = \frac{0{,}83}{4{,}568} = 0{,}1817 \ \mathrm{m/s}$

$$\begin{cases} \text{Trecho } 1\text{: } 0 \rightarrow 1{,}546 \ \therefore \ \mathrm{v_1} = \frac{0{,}28}{1{,}546} = 0{,}1811 \ \mathrm{m/s} \\ \text{Trecho } 2\text{: } 1{,}546 \rightarrow 3{,}057 \ \therefore \ \mathrm{v_2} = \frac{0{,}29}{1{,}511} = 0{,}1919 \ \mathrm{m/s} \\ \text{Trecho } 3\text{: } 3{,}057 \rightarrow 4{,}568 \ \therefore \ \mathrm{v_3} = \frac{0{,}26}{1{,}511} = 0{,}1721 \ \mathrm{m/s} \end{cases}$$

Nota-se que a velocidade não é a mesma, tendo valores ligeiramente diferentes ao longo do trajeto, porém, os valores da velocidade são muito próximos.

Pode-se concluir que o movimento do carrinho é um Movimento Retilíneo Uniforme, onde a velocidade se manteve constante em $\mathrm{v} = 0{,}1817 \ \mathrm{m/s}$.

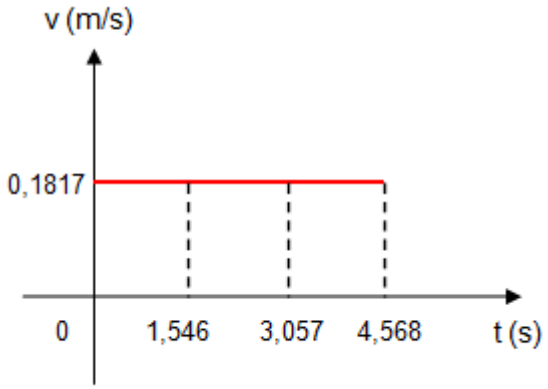


Figura 4.3. Velocidade x Tempo

4.2 Experimento II: Queda Livre dos Corpos (MRUV)

Este experimento consiste em descrever os passos da construção da torre (Q.L)/MRUV.

Com um auxílio de uma torre montada com peças do kit Lego, onde tem-se dois sensores de luz situados à $0{,}52\ \mathrm{m}$ de distância um do outro na vertical. Uma bola é abandonada próximo ao sensor superior, e após percorrer $0{,}51\ \mathrm{m}$ o sensor de baixo registra o tempo de queda da bola. O objetivo é determinar a aceleração da gravidade local. Dados: $\mathrm{y_0} = 0{,}51\ \mathrm{m}; \mathrm{y} = 0\ \mathrm{m};\ \mathrm{t_q} = 0{,}302\ \mathrm{s}$.

A referida torre é mostrada na Fig.(4.4) que segue:

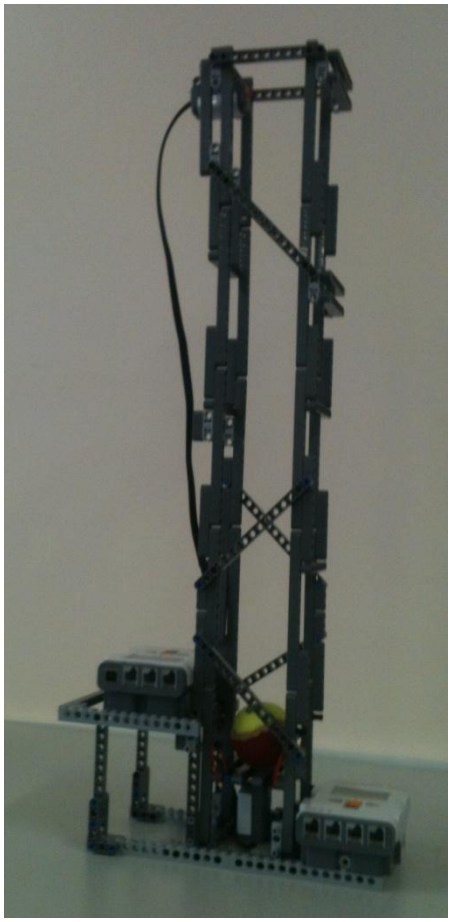


Figura 4.4. Torre construída com kit Lego

A Tab.(4.4) apresenta as peças utilizadas para o experimento de queda livre:

Tabela 4.4. Relação das peças

QUANTIDADE	PEÇAS
2	Brick
1	Sensor de luz
1	Sensor de toque
4	Cinta de borracha média
1	Cabo 35 cm
1	Cabo 50 cm
2	Junta de eixo perpendicular dupla

QUANTIDADE	PEÇAS
2	Eixo entalhado
2	Viga 3
11	Viga 7
17	Viga 9
6	Viga 11
3	Viga 13
23	Viga 15
6	Viga 3x5 dobrada de $90°$
131	Pino com atrito
18	Eixo-Pino com atrito
5	Pino longo com atrito
2	Eixo 3
6	Tijolo 1x14
12	Junta de eixo perpendicular 3L com 6 pinos
12	Junta de eixo perpendicular 3L com 4 pinos
7	Junta de eixo perpendicular com 2 furos
4	Junta de eixo perpendicular
4	Pino-Bola com atrito
4	Pino 3L duplo

O diagrama da torre em questão é mostrado na Fig.(4.5):

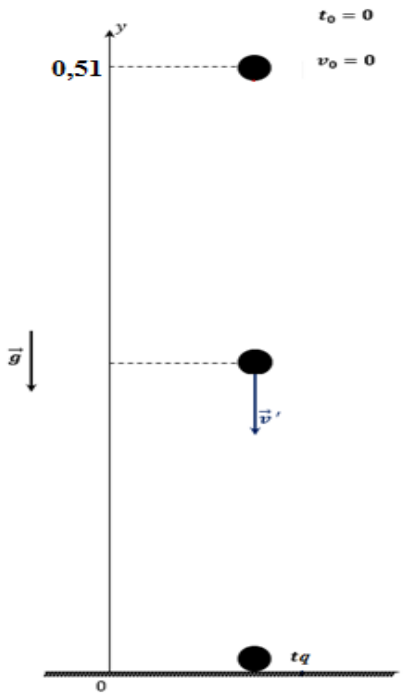


Figura 4.5. Queda livre

A função horária da posição do movimento retilíneo uniformemente variado é: $\mathrm{y} = \mathrm{y}_0 + \mathrm{v}_0\mathrm{t} + \frac{1}{2}at^2$.

Descrição:

$\mathrm{y} = 0$, a bola toca a base da torre.

$\mathrm{y}_0 = 0{,}51\ \mathrm{m}$, altura inicial da bola.

$\mathrm{v}_0 = 0$ (4.1)

$a = \mathrm{g}$, é o valor a ser encontrado.

então:

$0 = 0{,}51 - \frac{1}{2}\mathrm{g}.(0{,}302)^2 \rightarrow 0 = 0{,}51 - 0{,}0456\ \mathrm{g} \rightarrow \mathrm{g_E} = 11{,}18\ \mathrm{m/s^2}$ (4.2)

Sabe-se que o valor correto de $\mathrm{g_c} = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, pode-se calcular o erro relativo cometido no experimento:

$$\varepsilon_r = \frac{|g_c - g_E|}{g_c} = \frac{|9{,}81 - 11{,}18|}{9{,}81} = \frac{1{,}37}{9{,}81} = 0{,}139 \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_r = 13{,}9\% \quad (4.4)$$

O erro encontrado se deve, no mínimo, a três fatores, que são:

A. A altura é muito pequena.

B. Na maneira de se soltar a bola pois, neste caso a mesma foi solta com a mão, o que pode ocasionar uma defasagem de tempo ao soltá-la.

C. Os sensores utilizados são para objetos maiores, o que compromete as medidas no tempo de queda.

Porém, neste caso, não se tem um erro que descaracterize o experimento pois, foi possível mostrar que mesmo para um experimento simples, se verifica a presença do campo gravitacional.

4.3 Experimento III: Movimento Circular Uniforme (MCU)

Descrever os passos (etapas) da construção MCU. A central brick é programada para registrar um ângulo $\theta = 116°$ de 2 em $2\,s$, é ligada a um servo motor que tem uma viga apoiada em uma de suas extremidades e está presa ao servo motor e na outra, encontra-se um pequeno objeto P que descreve MCU. O comprimento da viga é de $10\,\mathrm{cm}$. O experimento é mostrado na Fig.(4.6):

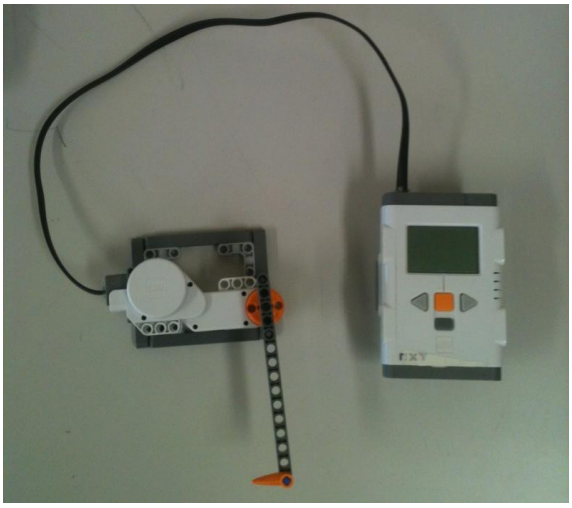


Figura 4.6. Protótipo construído para descrever o Movimento Circular Uniforme (MCU)

Na Tab.(4.5) a relação das peças kit Lego utilizados para esta construção:

Tabela 4.5 Relação das peças

QUANTIDADE	PEÇAS
1	Brick
1	Servo motor
1	Cabo 50 cm
4	Viga 9
4	Junta de eixo perpendicular 3L com 6 pinos
1	Junta de eixo perpendicular 3L com 4 pinos
1	Viga 15
1	Dente 1x3 com furo X
1	Eixo-Pino com atrito
7	Pino com atrito

O ponto P material apoiado em uma haste (raio) executa-se Movimento Circular Uniforme “varrendo” $116°$ em cada $2\ s$. Sabe-se que o raio vale $0{,}1\ \mathrm{m}$. Se a

circunferência completa tem $360°$, então, o tempo gasto (período) para efetuar uma volta completa é $\mathrm{T} = 6{,}2\ \mathrm{s}$.

$$\left.\begin{matrix}116° - 2\ \mathrm{s} \\ 360° - \mathrm{T}\end{matrix}\right\} \mathrm{T} = \frac{2(360)}{116} = 6{,}2\ \mathrm{s} \tag{4.5}$$

Com os dados da Eq.(4.5), pode-se calcular:

A. A velocidade linear do ponto P material.

$$\mathrm{v} = \frac{\Delta \mathrm{s}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{2\pi \mathrm{r}}{\mathrm{T}} = \frac{2\pi.0{,}1}{6{,}2} \rightarrow \mathrm{v} = 0{,}10\ \mathrm{m/s} \text{ ou } \mathrm{v} = 10\ \mathrm{cm/s} \tag{4.6}$$

B. A velocidade angular do ponto P material.

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} = \frac{2.3{,}1415}{6{,}2} \therefore \omega = 1{,}01\ \mathrm{rad/s} \text{ ou } \omega = 58°/\mathrm{s} \tag{4.7}$$

C. A aceleração normal ao qual o ponto P está submetido.

$$a_{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{R}} = \frac{(0{,}10)^2}{0{,}1} \therefore a_{\mathrm{N}} = 0{,}1\ \mathrm{m/s^2} \tag{4.8}$$

D. O ângulo “varrido” pelo ponto P durante $3{,}2\ \mathrm{s}$.

$$\omega = \frac{\theta - \theta_0}{\mathrm{t}} \therefore \theta = \theta_0 + \omega \mathrm{t} \therefore \theta = 1{,}01.(3{,}2) \therefore \theta = 3{,}232 \text{ radianos} \tag{4.9}$$

Em graus o ângulo é, $\theta = 185{,}2°$.

E. A distância percorrida pelo ponto P durante $3{,}2\ \mathrm{s}$.

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{s} - \mathrm{s}_0}{\mathrm{t}} \therefore \mathrm{s} = \mathrm{s}_0 + \mathrm{v.t} \therefore \mathrm{s} = 0{,}10.(3{,}2) \therefore \mathrm{s} = 0{,}32\ \mathrm{m} \tag{4.10}$$

Outra forma de se obter a distância:

$$\mathrm{s} = \mathrm{R}.\theta \therefore \mathrm{s} = 0{,}1.3{,}2 \therefore \mathrm{s} = 0{,}32\ \mathrm{m} \tag{4.11}$$

F. Se aumentar a velocidade de rotação para $2{,}02\ \mathrm{rad/s}$, quantos graus o ponto P varreria no intervalo de $3{,}2\ s$?

$$\omega' = 2\omega \therefore \theta' = \omega' \mathrm{t} \tag{4.12}$$

O ângulo θ' seria o dobro ao da prática realizada, logo, $\theta' = 370{,}4°$, mais do que uma volta $360°$.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Foram estudados inicialmente conceitos fundamentais da matemática básica que serviram de apoio para o restante do trabalho. Em seguida foi feito um estudo acerca do movimento retilíneo uniforme, movimento retilíneo uniformemente variado, movimentos curvilíneos bem como conceitos envolvendo torque e momento angular. Foram construídos vários exemplos de aplicações dos conteúdos estudados neste trabalho tanto em problemas didáticos, quanto em problemas passíveis de serem encontrados na prática.

Em seguida foram abordados vários outros tipos de movimentos como por exemplo, movimentos no plano, movimentos de rotação e movimentos relativos. Também foram trabalhados vários tipos de problemas envolvendo os vários tópicos abordados, possibilitando assim uma compreensão diferenciada de aspectos físicos complexos.

Com o objetivo de verificar na prática os fenômenos estudados, foram desenvolvidos protótipos, afim de implementá-los utilizando os kits Lego NXT, de onde se pôde verificar na prática os resultados teóricos estudados.

Com este trabalho, espera-se que se tenha uma compreensão mais elaborada dos movimentos de translação e de rotação que ocorrem com as máquinas no decorrer do tempo.

O conhecimento é construído passo a passo, degrau a degrau, porém, nenhum passo ou degrau é igual ao outro, são êxitos ou, dificuldades diferentes. Então, ao se estudar um movimento, tem-se que analisar grandeza por grandeza. A ideia geral é que se disponha das ferramentas adequadas para que o estudo do movimento não fique fragmentado, tendo assim, uma melhor performance no conhecimento adquirido ao longo da vida.

O balanceamento de forças e energia são fundamentais na resolução de sistemas mecânicos. Enfim, o domínio dos conceitos básicos da matemática, os

princípios e as leis da física, facilita aos estudantes de ciências a desenvolverem novas tecnologias.

Como perspectivas de trabalhos futuros, pretende-se aplicar a robótica educacional para a experimentação de vários tipos de fenômenos físicos. Com isto, será possível visualizar na prática, vários fenômenos bem conceituados teoricamente.

Capítulo VI

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] DONOSO, J. P. *Rotação, torque e momento angular*. [São Carlos]: Instituto de Física de São Carlos – IFSC, [2014]. Disponível em: <www.is.fc.usp.br>. Acesso em: 16 jan. 2014.

[2] HALLIDAY, D. et al. *Fundamentos de Física:* Mecânica. Tradução Flávio Menezes de Aguiar et. al. Rio de Janeiro: LTC, v.1, 2006. ISBN: 85-216-1484-5.

[3] LIMA, E. L. *Coordenadas no Plano, SBM*. Rio de Janeiro, 2003. ISBN: 85-85818-04-2.

[4] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica*. 4. ed. São Paulo: Blucher, v.1, 2002. ISBN: 978-85-212-0298-1.

[5] TIPLER, P. A. *Física para cientistas e engenheiros*: Mecânica, Oscilações e Ondas. Tradução Paulo Machado Mors. Rio de Janeiro: LTC, v.1, 2011. ISBN: 978-85-216-1710-5.

[6] YOUNG, H. D. *Sears & Zemansky's*. Tradução Sonia Midori Yamamoto. 12. ed. São Paulo, 2008. ISBN: 978-85-88639-30-0.