Ensino de Termodinâmica Através do Cubo De Rubik:

Um Guia Para professores de Física

Geovani R. da Silva

2015

Sumário

1 - Como utilizar o cubo de Rubik nas aulas de Física

Neste guia, vamos utilizar o cubo de Rubik para compreender alguns conceitos de Termodinâmica, tais como: reversibilidade e irreversibilidade, entropia e seu caráter estatístico, segunda lei da Termodinâmica, demônio de Maxwell e a distribuição de Maxwell-Boltzmann.

O guia tem o objetivo de estimular a .discussão sobre como trabalhar alguns conceitos de termodinâmica a partir do cubo de Rubik. Dessa forma temos o intuito de propiciar um ambiente de discussão e reflexão sobre utilização do cubo de Rubik, a fim de que os professores possam avaliar as potencialidades deste recurso pedagógico. Para tanto, o guia foi dividido em três momentos: em um primeiro momento apresentamos o cubo com destaque para seu potencial lúdico e educativo; sua termologia; seus movimentos. Em seguida, realizamos uma discussão e como alguns conceitos de termodinâmica tais como irreversibilidade, entropia, 2ª lei da Termodinâmica etc., podem ser trabalhados e ilustrados a partir do cubo de Rubik. E por fim, aplicamos a estratégia do cubo na compreensão de alguns aspectos importantes da termodinâmica não relacionada em livros textos do ensino médio e nem em materiais de apoio ao professor e aos estudantes do ensino médio.

1.1 – Como utilizar esse guia

Inicialmente explicamos o porquê de usar o cubo de Rubik, e mostramos como ele funciona. Indicamos um link para ver outras técnicas de resolução do cubo.

Os tópicos em destaque em azul e marcados com um cubinho correspondem a atividades propostas em sala de aula. Essa atividade é fundamental para a compreensão dos conceitos desenvolvidos nesse tópico, pois possibilita ao professor uma discussão clara com os estudantes, a fim de sanar qualquer mal entendido no desenvolvimento das atividades proposta.

Cada tópico traz itens que contem exemplos físicos através de conceitos ou gráficos. E também traz alguns exercícios com o intuito de fixar o conteúdo abordado e no final uma série de exercícios gerais para sedimentar os conceitos abordados ao longo desse guia.

Os tópicos destacados em amarelo discutem fatos e curiosidades que podem enriquecer a aula. Esta seção trata de alguma discussão extra que possa enriquecer a aula. Também trata de um fato interessante relacionado ao tema que está sendo desenvolvido, possibilitando ao aluno uma maior compreensão dos conceitos abordados em termodinâmica, mecânica estatística ou ao cubo de Rubik.

O tópico em marrom com um símbolo de um mouse traz links para os alunos apreenderem outras técnicas não utilizadas nesse material.

Os comentários que aparecem ao longo do guia têm como objetivo de extrapolar os conceitos inseridos no guia, possibilitando ao professor o desenvolvido das atividades com maior profundidade nos temas de termodinâmica, mecânica estatística ou do cubo de Rubik.

1.2 – Onde Encontrar

Nesta seção, montamos um guia rápido para o professor encontrar onde os diversos tópicos estão no texto.

Na seção 2.1, *"Por que usar o cubo?"*, discutimos brevemente a proposta de ***Ensino-Aprendizagem*** utilizando o cubo de Rubik, e descrevemos porque o cubo de Rubik oferece uma oportunidade de se aprender de forma diferente e motivadora.

Na seção 2.2, "Como Funciona o cubo?", fazemos uma breve ***Introdução ao Cubo de Rubik,*** discutiremos sua ***Mecânica*** (montagem, peças, etc.) e também apresentamos uma ***Notação*** simples para descrever os movimentos executados no cubo. Nesta seção apresentamos exemplos de atividades em sala de aula que tem como objetivo consolidar alguns dos conceitos expostos e familiarizar o aluno com o cubo.

Na subseção 2.3, "Resolvendo o cubo", apresentamos um método simples que utiliza apenas 3 sequências de movimento para mudar ou ajustar peças diferentes. Esta seção se destina a leitores não familiarizados com a resolução do cubo e pode ser saltada sem perda de continuidade.

Na seção 2.4, "Resolvendo o cubo em sala de aula", apresentamos uma proposta de atividade para o professor utilizar o cubo de Rubik, de forma que não precisa ocupar um tempo demasiadamente grande em sala de aula.

Na seção 2.5, "Benefícios do uso do cubo de Rubik no ensino", analisamos os aspectos da **autoconfiança**, promoção de **aprendizagem**, percepção **espacial**, necessidade de prática que o cubo promove.

Na seção 3.1, "Irreversibilidade e reversibilidade no cubo", é discutido a irreversibilidade experimentada por quem manipula o cubo, através de uma atividade em sala de aula.

Na seção 3.2, "Termodinâmica e Mecânica estatística", analisamos o campo da termodinâmica e o campo da mecânica estatística, analisando os aspectos macroscópicos e microscópicos pelo par Termodinâmica e mecânica estatística.

Na seção 4.1, "Microestado no cubo", discutimos os estados que podemos ser atingidos no cubo, a partir do estado fundamental (cubo resolvido) e analisamos as restrições impostas para se determinar o número total de microestados.

Na seção 4.2, “Exemplos físicos”, comentamos as grandezas macroscópicas de um macroestado e as grandezas microscopias de um microestado, além dos exemplos que sedimenta essa seção.

Na seção 5.1, “Vetor de cor e o cubo”, discutimos uma proposta para descrever a coloração de uma face e definir um vetor de seis dimensões, denominado vetor de cor, que exprime o quanto uma face está embaralhada ou não.

Na seção 5.2, “Entropia e o cubo de Rubik”, analisamos a distribuição de cores em uma face, relacionando-a com o vetor de cor através de um gráfico. Também discutimos o significado da palavra entropia, analisando o seu lado probabilístico.

Na seção 5.3, ”Entropia e Segunda lei da Termodinâmica”, enunciamos o conceito da segunda lei da termodinâmica, analisando as implicações dos movimentos realizados com o cubo no vetor de cor e o seu comportamento em relação à segunda lei.

Na seção 6.1, “Demônio de Maxwell e o cubo”, discutimos a ideia proposta por Maxwell para violar a segunda lei da termodinâmica e como um cubista especialista pode resolver o cubo de forma rápida. Refletimos em cima do princípio de Landauer’s.

Na seção 6.2, “Exemplos físicos”, mostramos alguns exemplos para o demônio de Maxwell, através de um gás contido num recipiente separado por uma pequena porta.

Na seção 7, “Distribuição de Maxwell-Boltzmann”, analisamos a distribuição de velocidades de partículas em gases ideais. Definimos a função distribuição de Maxwell

Na seção 7.1, “Distribuição de cores no cubo”, discutimos uma proposta para descrevemos de quantas maneiras é possível distribuir as cores, azul, verde, laranja, vermelho, branco e amarelo nos noves quadrados da face. Definimos uma expressão que relaciona essa distribuição, o vetor de cor e o número de microestado.

Na seção 7.2, “Exemplos físicos”, analisamos de que maneira a distribuição de Maxwell-Boltzmann é utilizada para explicar alguns fenômenos importantes na natureza.

Na seção 8, apresentamos uma série de exercícios para serem realizados com o intuito de rever os conteúdos abordados nesse guia, utilizando o cubo de Rubik.

Na seção 9, descrevemos a resolução comentada dos exercícios propostos. Esta seção o professor poderá deixar na forma como se encontra, ou então fazer de acordo suas necessidades.

2 – O Cubo de Rubik e o Ensino de Física

Nesta seção, apresentamos o leitor ao Cubo de Rubik e suas perspectivas no ensino de Física.

2.1 - Por que usar o cubo?

A habilidade de solução de problemas desempenha um papel importante no ensino aprendizagem da física. Uma grande habilidade na resolução de problemas, usualmente denota um alto desenvolvimento de competências reguladoras (planejamento, monitoramento, avaliação) e transformadoras (questionamento, formulação de hipóteses, investigação e interpretação) importantes para o aprendizado (veja a Ref. [1]). Infelizmente, muitas vezes o ensino tradicional leva os estudantes a resolver problemas puramente de forma mecânica (veja a Ref. [2]): o problema proposto no livro solicita uma determinada quantia e fornecem estritamente os dados necessários, então “letras vêm à memória”, as fórmulas onde aparecem essas letras são utilizadas, se inserem os números nessas fórmulas, e – problema resolvido!

Problemas deste tipo, que não demandam raciocínio, comuns em livros texto de física, são bastante distantes dos problemas que ocorrem na vida real. Resolver problemas especificamente de física e matemática, exigem a aplicação de uma teoria/conhecimento previamente dominado (veja a Ref. [3]), capacidade de compreensão do problema, capacidade de planejamento, de execução e de análise (veja a Ref. [4]). Na busca de mudar esse quadro, diversas estratégias têm sido empregadas, entre elas o uso de atividades manipulativas, jogos e desafios. Propomos continuar essa estratégia explorando mecanismos para utilizar o cubo de Rubik no ensino de Física.

O cubo de Rubik é um quebra cabeça considerado difícil, que desafia o raciocínio espacial, a memória e a capacidade de planejamento. A dificuldade e frustração com as seguidas falhas nas tentativas de se resolver o cubo são semelhantes às enfrentadas pelos estudantes ao se depararem com problemas mais complexos de Física. Mas como no caso do cubo de Rubik, a dificuldade da tarefa e o fato de conseguir resolver, após muito trabalho faz toda a frustração valer a pena: sente-se orgulho da realização e satisfação por aprender algo novo. Sente-se que se podemos aprender uma tarefa difícil como o cubo, também podemos aprender outras disciplinas complexas.

O aumento na autoconfiança dos estudantes não é o único benefício do cubo no ensino. Do ponto de vista de resolução de problemas, um grande apelo do cubo de Rubik é seu resultado final. É perfeitamente claro, quando ele está resolvido ou não. Não há nenhuma ambiguidade na resposta, a única maneira de melhora-la é atingi-la mais rapidamente. Do ponto de vista do ensino de física, o apelo do cubo de Rubik é a possibilidade de utiliza-lo para introduzir e ilustrar conceitos modernos de física, oferecendo um modelo educacional para explorar um mundo desconhecido de maneira cientifica. As regras de movimento do cubo (impostas por suas simetrias) fixam leis de conservação, que reduzem o número de estados permitidos, mas que fazem com que seja difícil chegar a um estado desejado (ver Ref. [6]). A impossibilidade de se atingir qualquer padrão imaginado abre campo para a discussão da ergodicidade do problema. O grande número de estados sugere uma abordagem estatística para expressar a irreversibilidade experimentada por quem manipula o cubo (ver Ref. [7]). E mesmo as simetrias do Eightfald way presente no modelo de quarks pode ser ilustrada com o uso do cubo de Rubik (ver Ref. [8]). Tais características tornam o cubo de Rubik uma ferramenta educacional promissora para professores de física em diversos níveis de ensino. Ainda podemos citar:

● O cubo oferece uma oportunidade de aprender alguns conceitos de Termodinâmica de forma diferente a abordadas nos livros didáticos e na sala de aula pelo professor.

● Torna a física mais significativa e motivadora.

● Relaciona a Termodinâmica com um brinquedo do cotidiano do aluno.

● Amplia a habilidade de resolução de problemas.

● Aguça a curiosidade dos alunos e todos participam da atividade.

2.2- Como funciona o cubo?

O cubo de Rubik é um quebra-cabeça tridimensional, cujo objetivo é fazer com que cada lado do cubo tenha apenar uma cor, como mostrado na Figura 1.

Figura 1: Diagrama de um cubo de Rubik resolvido. Os seis lados são: superior (S), frontal (F), e direito (D) os lados são visíveis. Os restantes: lados esquerdo (E), traseiro (T) e inferior (I) que são mostradas pelas imagens projetadas.

Cada uma das três divisões horizontais do cubo é chamada de linha, ao passo que denomina coluna cada uma das três divisões verticais do cubo. O cubo é construído de tal maneira que linhas e colunas podem girar para ambos os lados. Assim a cada instante pode-se realizar 12 movimentos de ¼ de volta no sentido horário ou anti-horário com as seis faces do cubo, mudando sua configuração. Dessa forma mesmo após alguns poucos movimentos, as cores do cubo terminam embaralhadas. O desafio do quebra cabeça é retornar as peças para suas posições originais.

É difícil entender a mecânica do cubo sem primeiro conhecer os seus componentes. O cubo de Rubik consiste em dois componentes distintos: o núcleo e as peças (cubos) exteriores. A forma do núcleo consiste em um cubo central imaginário com seis braços octogonais ligados a cada uma das faces (Figura 2). Cada octógono é anexado ao cubo central permitindo a rotação livre em qualquer direção. As faces octogonais de cada um desses braços são perpendiculares ao cubo imaginário.

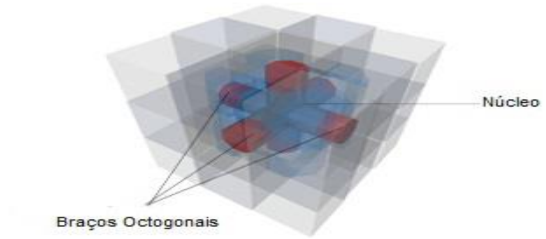


Figura 2: Diagrama do núcleo de um cubo de Rubik. O núcleo permite que cada linha e coluna do cubo girem para ambos os lados.

As peças (cubos) exteriores são anexadas ao núcleo e podem ser divididas em três tipos: as centrais, as laterais e vértices (Figura 3).

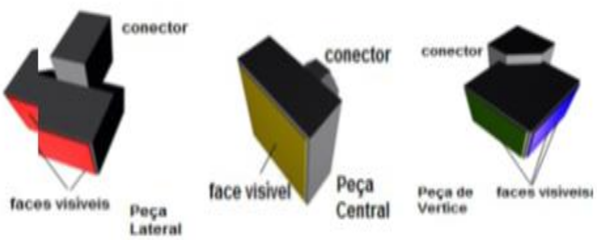
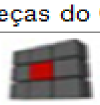
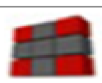
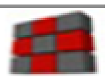


Figura 3: Peças exteriores do Cubo de Rubik.

Tabela 1: Peças do Cubo de Rubik

			
# peças	6	8	12
# faces	1	3	2

Há um total de seis peças centrais (Tabela 1), cada uma tem apenas uma face visível na construção final do cubo. Cada peça central é ligada perpendicularmente a um dos braços octogonais, as peças centrais nunca se movem em relação ao núcleo. Há doze peças laterais que formam as arestas do cubo, cada uma destas peças possui duas faces visíveis. Estas peças são conectadas ao núcleo por conectores cúbicos localizados nas faces não visíveis. Finalmente, há oito peças de vértice, cada uma com três faces visíveis. Cada peça do vértice possui um conector localizado na aresta oposta a de suas faces visíveis. Os conectores das peças laterais e de vértice se encaixam nas arestas dos braços octogonais (Figura 3).

Cada face pode girar com rotações de múltiplos de $\pi/4$, tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário. Podemos indicar os movimentos de ¼ de volta em sentido horário por F, T, S, D, E e I. Podemos indicar os movimentos inversos por F^{-1}, T^{-1}, S^{-1}, D^{-1}, E^{-1} e I^{-1}. Observe que cometemos um abuso de notação, visto que uma letra designa tanto uma face (e.g. F a face frontal) quanto o movimento de girar de um quarto de volta esta face em sentido horário (Figura 4).

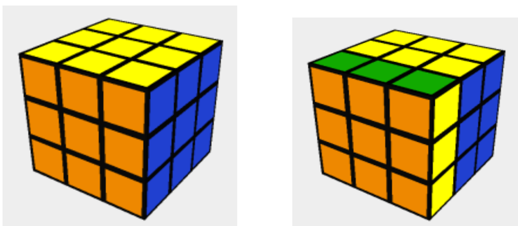
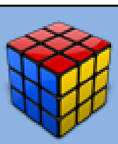


Figura 4: Movimento F. Fonte: dos autores

Nem todas as configurações são possíveis. Por exemplo, as peças de vértices não podem ser trocadas com as laterais, etc.

SAIBA +

Uma sequência finita de movimentos é chamada de algoritmo. Um algoritmo deve ser pensado como um conjunto de instruções indivisível a ser executado em bloco. Por exemplo: se K = FES, executar K significa fazer F depois E, depois S, sem interrupções.



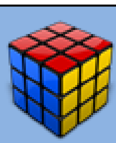
Atividade em sala de aula

Na multiplicação usual, a ordem dos fatores não altera o resultado, essa propriedade é denominada de comutatividade. Fazendo movimentos de ¼ de volta com o cubo, verifique quais operações/algoritmos abaixo são comutativas e quais são não comutativas:

a) FT= TF; b) DE=ED; c) ST= FE

A atividade acima tem a finalidade de mostrar que alguns movimentos no cubo provocam o mesmo resultado, por isso são denominados de comutatividade.

A operação que desfaz uma operação específica é chamada de inverso da operação e o inverso é representado por -1 no expoente. Então, L^{-1} representa o movimento oposto de L. No cubo o movimento de não fazer nada, ou seja, deixar o cubo exatamente como era antes é denominado de identidade. Por exemplo, FF^{-1} = i (identidade).



Atividade em sala de aula

Para os algoritmos abaixo, quais podem representar uma identidade.

a) F ; b) F^4 = FFFF c) F^5 = FFFFF

O que você pode concluir dos itens “a” e “c”.

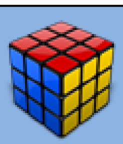
Observamos nessa atividade que alguns movimentos no cubo tem o mesmo efeito, independentemente de sua ordem.

A partir do cubo resolvido ao fazer um algoritmo conhecido (K = FES), podemos resolver o cubo, simplesmente aplicando um algoritmo inverso ($K^{-1} = S^{-1}E^{-1}F^{-1}$). Aqui o professor poderá propor uma atividade no cubo, a partir dele resolvido, de uma sequência de movimentos conhecido e o aluno encontrar a solução para o cubo.

Um dos fenômenos da natureza que pode ser observados no cubo é que rotações em três dimensões não comutam! De fato, este é um fator importante que explica a dificuldade de resolução do cubo.

A despeito de seu sucesso comercial, o Cubo foi originalmente usado no Ensino de raciocínio espacial aos alunos de arquitetura na Faculdade de Artes Aplicadas de

Budapest, onde Erno Rubik lecionava. Por exemplo, o padrão colorido do cubo oferece a oportunidade para que os alunos observem que rotações em 3 dimensões não comutam.



Atividade em sala de aula

Sugerira que os alunos façam rotações de $\pi/_2$ do cubo como um todo.

Primeiro, giramos o cubo no sentido anti-horário em torno do eixo vertical (y) e em seguida uma rotação no sentido horário em torno do eixo horizontal-x (Veja a Figura N).

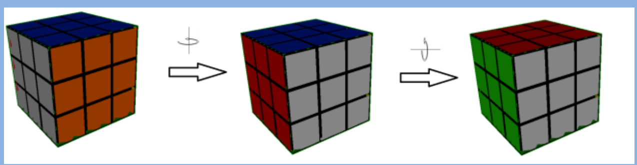


Figura N: Rotação no eixo vertical e seguida de Rotação no eixo Horizontal.

Em seguida, façamos o processo na ordem contrária: A rotação entorno do eixo horizontal-x e seguida a rotação no eixo vertical (Figura M).

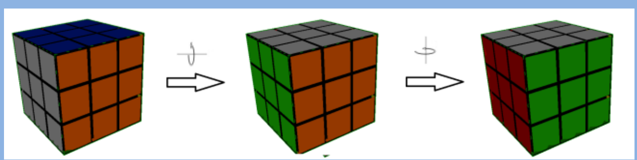


Figura M: Rotação no eixo vertical e seguida de Rotação no eixo Horizontal.

Como pode ser constatado o resultado depende da ordem das rotações!

A atividade acima pode ser repetida com outros objetos disponíveis em sala de aula como cadernos e livros e os alunos podem ser incentivados a experimentar outras combinações de rotações.

A não comutatividade de rotações em três dimensões fornece um exemplo clássico de operações não comutativas, que diferem bastante das operações tradicionais com números reais.

As rotações em três dimensões podem ser descritas por matrizes. No caso de rotações $\pi/_2$ em torno do eixo x temos:

$$R_x^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, R_x^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde os índices + e – indicam os sentidos anti-horário e horário respectivamente. Para as rotações em torno do eixo y temos:

$$R_y^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R_y^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

finalmente para as rotações em torno do eixo z temos:

$$R_z^- = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_z^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O primeiro conjunto de operações sugerido na atividade corresponde a

$$R_y^+ R_x^- = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Já o segundo conjunto de operações corresponde a

$$R_x^- R_y^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para sermos mais precisos, é necessário termos um esquema matemático para orientar o cubo. Vamos a orientação espacial para os eixos X,Y,Z dada na Figura K abaixo:

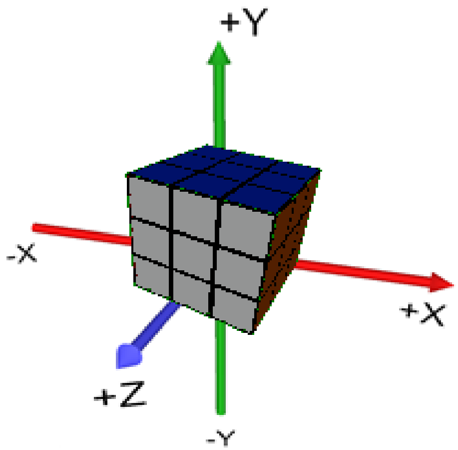


Figura K: Orientação dos eixos coordenados e do cubo da Atividade.

Nossa convenção, identificaremos cada orientação do cubo por uma matriz 3 x 3 da seguinte forma (seguimos o esquema de cores da figura da atividade).

Eixos	X	Y	X
Vermelho - Laranja	-	-	-
Verde – Azul	-	-	-
Amarelo – Branco	-	-	-

Indicaremos por 0 quando um eixo do cubo não estiver alinhado com o eixo coordenado, por +1 quando o eixo do cubo estiver alinhado na mesma direção do eixo coordenado (cor final na direção positiva do eixo). Caso a orientação seja oposta indicaremos por -1. Com isso o cubo original da atividade (Figura K) corresponde a matriz identidade :

Eixos	X	Y	X
Laranja - Vermelho	1	-	-
Verde – Azul	-	1	-
Amarelo – Branco	-	-	1

Com isso, o processo indicado na Figura G pode ser traduzido para a notação matricial.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_z^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

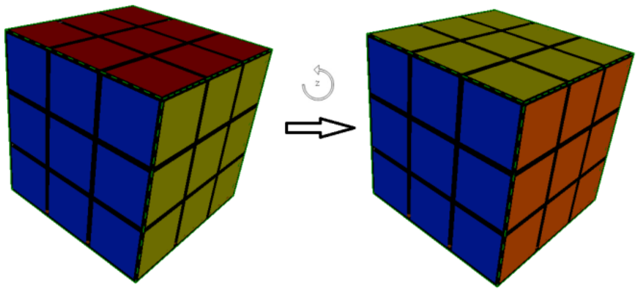


Figura G: Uma rotação de $^{\pi}/_{2}$ em torno do eixo Z no sentido anti-horário.

Na atividade proposta em sala de aula é interessante comentar que se os alunos não tiveram visto ainda matrizes, devido a grade curricular proposta pelo estado, essa atividade ainda pode ser realizada através das rotações no cubo e deixando de lado a representação matricial.

2.3 - Resolvendo o cubo

Infelizmente, geralmente não sabemos de antemão qual algoritmo levou o cubo do estado original ao seu novo estado. Por isso, foram desenvolvidos diversos métodos para a resolução do cubo. Tais métodos utilizam diferentes sequencias de movimentos ou dividem o problema de resolver o cubo em diferentes problemas menores que uma vez resolvidos conduzem a solução final. É importante que o docente se familiarize com algum destes métodos, pois durante as atividades em sala de aula várias vezes será necessário retornar o cubo a seu estado resolvido.

Hoje em dia existe uma infinidade de métodos para resolver o cubo de Rubik, muitos dos quais disponíveis na web (veja: www.ryanheise.com/cube/beginner).

Apresentamos aqui um método simples, que utiliza apenas 3 sequencias de movimento para mudar ou ajustar peças diferentes. Na terminologia empregada nesta seção ajustar uma peça significa a alterar a direção das cores de uma peça (Figura 5).

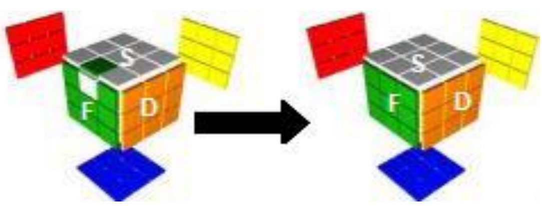


Figura 5: Ajustar uma peça

Comutar duas peças refere-se a trocar a posição de duas peças diferentes (Figura 6).

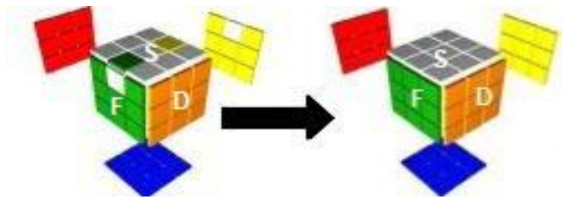


Figura 6: Comutar duas peças

Sequencia I – Um movimento para ajustar dois vértices consecutivos (nada mais é alterado) (Figura 7): i. Segurar o cubo de modo que os dois vértices a serem ajustados estejam na face superior; ii. Gire a coluna central para cima; iii. Gire a linha superior para esquerda; iv. Repita as etapas 2 e 3 mais duas vezes; v. Gire a linha superior para esquerda; vi. Gire a coluna central para baixo; vii. Repita os passos 5 e 6 mais duas vezes; viii. Rodar a linha superior para a esquerda duas vezes.

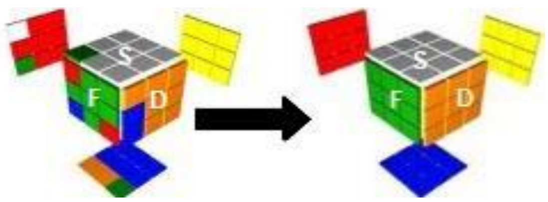


Figura 7: Ajustar vértices consecutivos

Sequencia II – Um movimento para ajustar três vértices de uma face (altera arestas adjacentes) (Figura 8): i. Segure o cubo de forma que as arestas a serem alteradas estejam na face superior e voltadas para você e o canto inalterado fique na parte superior direita; ii. Gire a linha superior para a direita; iii. Gire a face frontal no sentido horário duas vezes; iv. Gire a linha superior para esquerda; v. Gire a face frontal no sentido horário; vi. Gire a linha superior para a direita; vii. Gire a face frontal no sentido horário; viii. Gire a linha superior para esquerda; ix. Gire a face superior no sentido horário duas vezes.

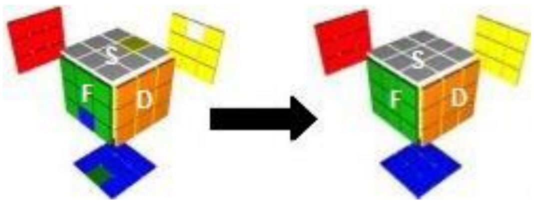


Figura 8: Ajustar três cantos

Sequencia 3 – Um movimento para mudar as posições de três peças laterais em um mesmo plano (altera nada mais) (Figura 9): i. Segurar o cubo de modo que o plano a ser alterado seja uma coluna central; ii. Posicione a quarta peça lateral no plano inferior e na face oposta a que esta próxima de você; iii. Gire a coluna central; iv. Gire a linha superior para a esquerda duas vezes; v. Gire a coluna central para baixo; vi. Gire a linha superior para a esquerda duas vezes.

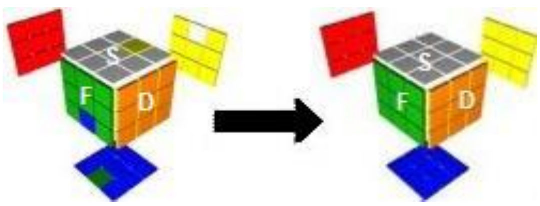
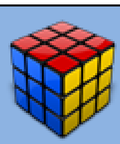


Figura 8: Mudar a posição das arestas na mesma face

Estas três sequencias de movimento são vantajosas, pois seus efeitos são facilmente compreendidos e são de simples memorização. O planejamento de um algoritmo para resolver o cubo de Rubik utilizando estas três seria um projeto de ciências bastante interessante e factível para alunos que demonstrem gosto por resolver quebra-cabeças. O objetivo neste trabalho seria determinar se as três sequências de movimentos são suficientes para resolver o cubo. Em outras palavras, se é possível resolver o cubo com apenas estas três sequências de movimento, ou se seriam necessários movimentos adicionais.



Atividade em sala de aula

O planejamento de um algoritmo para resolver o Cubo de Rubik utilizando estes três seria um projeto de ciências bastante interessante e factível para alunos que demonstrem gosto por resolver quebra-cabeças, boa capacidade de raciocínio espacial e/ou já conheçam como resolver o cubo de Rubik.

O objetivo do aluno neste trabalho seria determinar se as três sequencias de movimentos são suficientes para resolver o cubo. Em outras palavras, se é possível resolver o cubo com apenas estes três sequencias de movimento, ou se seriam necessários movimentos adicionais.

Uma estratégia para resolver o cubo de Rubik utilizando estes 3 movimentos poderia ser dividida em 5 passos:

Passo 1: Fazer uma cruz em um lado do cubo. Fazer a cruz é simplesmente uma questão de inserção uma a uma cada uma das 4 peças laterais, um a um, em torno da peça central sem remover as peças que já foram colocadas. Gire a cruz até algumas das cores das peças laterais que formam a cruz combinem com as peças nos lados de cubo. Se apenas uma cor combinar, continue rotacionando a cruz; É sempre possível obter a combinação de duas cores.

No caso de se obter apenas duas peças laterais combinando, as peças laterais que não combinarem deve ser trocadas de posição. Existem duas possibilidades diferentes. Ou as duas peças laterais a serem trocadas estão próximas umas das outras, ou estão em lados opostos do cubo. Ambos os casos podem ser tratados pela mesma estratégia. Em primeiro lugar, desloque uma destas peças para a face oposta do cubo. Dessa forma se pode mover a camada oposta de forma independente da camada onde foi feita a cruz. A seguir, gire a peça trocada sobre a camada superior até que ela fique posicionada diretamente acima da sua posição correta. Finalmente, gire esta peça novamente para a camada onde está a cruz. Este mesmo movimento também moverá a outra peça trocada para a camada oposta, onde ela pode ser levada para a posição correta utilizando a mesma estratégia no sentido inverso. Ao fim deste procedimento o cubo deve se encontrar num padrão análogo ao da Figura 10. Este é um passo muito importante, visto que ele deverá ser repetido nos demais lados do cubo a fim de resolvê-lo.

Figura 10: Posição do cubo ao final do Passo 1

Passo 2: Obtenha uma face de uma mesma cor. Para tanto se devem inserir as 4 peças de vértice correspondente na camada onde foi feita a cruz. Neste ponto teremos 1/3 do cubo resolvido, como mostra a Figura 11.

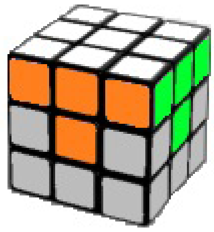


Figura 11: Posição do cubo final do Passo 2

Passo 3: Monte a camada intermediária. O objetivo aqui é inserir uma peça lateral da camada superior na camada intermediária e não bagunçar o restante do cubo já resolvido. Ao fim deste passo teremos resolvido 2/3 do cubo, como mostra a figura 12.

Figura 12: Posição do cubo ao final do Passo 3

Passo 4: Sem bagunçar o que já está resolvido, construir uma cruz na face oposta do cubo e colocar as peças laterais de cores correspondentes em suas posições corretas.

Passo 5: Neste momento o cubo deve se encontrar de forma equivalente a mostrada na Figura 13. Agora basta mover a posição correta e orientação correta. O cubo esta resolvido.

Figura 13: Posição do cubo ao final do Passo 4

2.4 – Resolvendo o cubo em sala de aula

Ao se utilizar o cubo de Rubik em sala de aula eventualmente temos que ensinar a resolvê-lo. Utilizando-se os movimentos e a estratégia da seção anterior, é possível ensinar de forma simples e com grande grau de eficácia. No entanto, seria mais interessante ensinar a resolvê-lo aos poucos, diluindo a solução do cubo ao longo de várias aulas à medida que se utiliza o cubo para ilustrar e discutir conteúdos de física como simetrias, leis de conservação, entropia e irreversibilidade. Dessa forma as atividades voltadas para a resolução do cubo não necessariamente precisam ocupar um tempo demasiadamente grande em sala de aula. Com isso em mente, abaixo se delineia uma proposta de atividades que não devam ocupar mais que 20 minutos de cada aula, considerando que estas atividades não tem de maneira imediata uma conexão explicita com o ensino de Física.

Aula 1: Ensinar os estudantes as 3 sequencias de movimento apresentadas na seção 2.3.

Aula 2: Ensinar os estudantes a usar os movimentos descritos para fazer uma cruz em um lado do cubo (Passo 1). Exercício: Completar o Passo 1 em cinco minutos.

A maioria dos estudantes deverá conseguir resolver este exercício com facilidade. Proponha aos estudantes que não consigam executar a tarefa, refazer o exercício no inicio da aula seguinte.

Aula 3: Ensinar aos estudantes a realizar o Passo 2: fazer com que toda uma face do cubo tenha a mesma cor. Exercício: Completar o Passo 2 em cinco minutos.

A esta altura deverá ser claramente perceptível à natureza sequencial deste método de resolução do cubo, uma vez que os alunos não poderão executar o Passo 2 se não concluírem primeiro o Passo 1. Este é um ponto importante e deve ser bastante enfatizado, sendo que o docente poderá fazer diversas referências a ele quando tratar de outros temas que são sequenciais por natureza. Essa rotina pode ser repetida sistematicamente para cada passo, observando-se o progresso dos alunos.

Na aula seguinte após ensinar a executar o 5 passo, dê aos alunos cinco minutos para resolver todo o cubo de Rubik. A maioria dos estudantes deverá conseguir fazê-lo dentro deste prazo com pouco ou nenhuma das dificuldades que tenham apresentado semanas antes.

Para se demonstrar o papel da prática contínua, atividades com o cubo podem ser utilizadas regularmente desafiando os estudantes a superar os seus melhores tempos de resolução.

Para aprender uma técnica prática de resolução do cubo muito utilizada, consulte o site www.montarcubomagico.com/metodo-de-camadas.

2.5 – Benefícios do uso do cubo de Rubik no ensino

Nas próximas seções apresentamos os como utilizar o cubo para ilustrar conceitos de Física, em especial de termodinâmica e mecânica estatística. No entanto, vale a pena destacar alguns benefícios gerais de se ensinar a resolver o cubo de Rubik (veja a Ref. [2]). Eis alguns benefícios que podem ser esperados no uso do cubo de Rubik em sala de aula:

Aumentar a autoconfiança nos alunos, especialmente com desempenho insuficiente.

Em muitos casos, pessoas que mostram proficiência na solução do cubo apresentam dificuldades na escola. Tais pessoas tendem a gostar da abordagem mais prática e demonstram disposição para gastar horas de seu tempo praticando e tentando melhorar. Incorporar este tipo de atividade no ensino de física pode estimular estes estudantes, mostrando que suas competências são importantes para o estudo da disciplina. Na outra ponta, os alunos que aprendem a resolver o cubo tendem a sentir-se bem consigo mesmas, uma vez que a maioria da população em geral não pode resolvê-lo. Pode se dizer que estes alunos sentem que se eles podem resolver o cubo, então certamente eles podem fazer qualquer outra coisa que os professores peçam a eles. Em outras palavras, eles aprendem que se trabalharem duros o suficiente, eles podem ser bem sucedido.

Promoção da aprendizagem cooperativa.

Como têm sido observados no uso de jogos e atividades lúdicas no ensino os alunos geralmente preferem trabalhar com seus colegas de classe, desde que eles obtêm ajuda de qualidade. Os professores também descrevem bastante satisfação ao ver estudantes trabalharem juntos, como eles ajudam uns aos outros e como o desempenho destes estudantes aumenta.

Ilustrar métodos de resolução de problemas.

O raciocínio sequencial necessário para resolver o cubo é aplicável a muitos outros tipos de problemas. Por exemplo, antes dos alunos poderem resolver para a densidade de um objeto, por exemplo, eles devem primeiro conhecer a sua massa e volume. Ao quebrar os problemas em etapas, mesmo os mais complexos podem ser resolvidos. Na verdade, todo o progresso científico ocorre em passos incrementais, com uma descoberta levando a outra. Aprender a resolver o cubo de Rubik é uma boa oportunidade para o professor discutir com seus alunos como o progresso científico e tecnológico ocorre.

Melhora da percepção espacial.

O cubo de Rubik é uma excelente ferramenta para melhorar o raciocínio espacial, uma vez que para resolver o cubo não basta apenas memorizar uma solução, mas planejar a manipulação de objetos tridimensionais. Este raciocínio visuo-espacial é infelizmente muitas vezes negligenciado no ensino de ciências. Muitos problemas em física, matemática e engenharia são de natureza espacial. Da compreensão e raciocínio sobre átomos em uma molécula, ao projeto de sistemas mecânicos e eletrônicos, tais como robôs, layout de um circuito integrado em microeletrônica, da distribuição de tensões e forças de compressão em um sistema estrutural, continuamente se exige a capacidade de visualizar e raciocinar espacialmente.

Memória de longo prazo

Eventualmente, os alunos tornam-se tão proficientes em resolver o cubo de Rubik que podem resolvê-lo sem realmente pensar sobre isso. Sua memória motora assume e eles resolvem o cubo praticamente sem raciocinar.

SAIBA +

O cubo mágico é denominado cubo de Rubik em homenagem a seu inventor o húngaro Ernö Rubik. Rubik fabricou o seu primeiro protótipo em 1974, para ilustrar o conceito da terceira dimensão para alunos de arquitetura. Nesse mesmo ano ganhou o prêmio alemão do "jogo do ano". Ernö Rubik demorou um mês para resolver o cubo pela primeira vez. O cubo começou a ser comercializado em 1980, e em janeiro de 2000, mais de 350 milhões de cubos já haviam sido vendidos em todo o mundo, tornando o jogo mais vendido. O cubo de Rubik tornou-se um ícone da década de 80.

A versão mais comum do cubo de Rubik é a 3x3x3, confeccionada geralmente em plástico, composto por 6 faces de 6 cores diferentes, com arestas de aproximadamente 5,5 cm. Existem também as versões, 2x2x2, 4x4x4 e 5x5x5.

3 - Irreversibilidade, Reversibilidade.

As leis básicas da mecânica, usualmente, descrevem processos chamados *Reversíveis*. Isto quer dizer que se seguirmos a evolução de um sistema isolado de partículas durante um intervalo de tempo

t, e invertemos, instantaneamente, os momentos de todas as partículas, deixando o sistema evoluírem livremente em outro intervalo de tempo t, o sistema retornaria ao estado original, mas com todos os momentos invertidos.

No entanto, em alguns os fenômenos macroscópicos que envolvem um grande número de componentes microscópicas, observam-se um comportamento descrito como *Irreversível*. Tais fenômenos são descritos por conceitos "efetivos", i.e. produzido pela combinação de diversos outros fatores, tais como atrito, viscosidade, difusão, condução de calor, etc... cujas leis fenomenológicas não são simétricas sob-reversão temporal. Por exemplo: a difusão de moléculas de ar numa sala. As colisões entre as moléculas e as paredes da sala são reversíveis, mas as perdas de energia e momento para fora do interior da sala (sistema) produzem comportamentos irreversíveis. Em termos mecânicos, o atrito e a viscosidade nunca agem a favor do movimento e do escoamento produzindo fenômenos macroscópicos irreversíveis.

Por outro lado, a termodinâmica, nos fornece diversos outros exemplos de fenômenos irreversíveis. Por exemplo, se dois corpos são colocados em contato o calor flui sempre do corpo de maior temperatura para o corpo de menor temperatura; um gás se difunde de uma região de maior concentração para uma região de menor concentração. Nesta seção, usaremos o cubo de Rubik para ilustrar estes fenômenos, procurando compreender de que forma os comportamentos "efetivamente" irreversíveis surgem do efeito cumulativo de fenômenos puramente reversíveis.

3.1- Irreversibilidade e reversibilidade no cubo.

A ideia dessa subseção é mostrar que no cubo de Rubik sempre é possível desfazer os movimentos realizados num macro (sequencia de movimentos que se realiza no cubo). No entanto, um cubista inexperiente usualmente terá bastante dificuldade em retornar o cubo a sua configuração original. O que caracteriza a irreversibilidade experimentada por quem manipula o cubo de Rubik é o número muito grande de rearranjos que se pode obter com ele.

As atividades que serão desenvolvidas nessa seção tem o objetivo de esclarecer e sedimentar os conceitos de reversibilidade e irreversibilidade no cubo de Rubik. É importante desenvolver essa atividade em sala de aula e comentar que todos os movimentos no cubo são reversíveis.

Atividade em sala de aula

Divida os alunos em pequenos grupos. Peça a um aluno do grupo para fazer a seguinte sequência FES e depois peça a outro aluno para retornar seguir a sequência $S^{-1}E^{-1}F^{-1}$. (Aqui fácil de se observar que ele vai voltar o cubo para sua configuração resolvida).

A atividade acima serve para relembrar aos estudantes que todos os movimentos do cubo podem ser individualmente revertidos. Assim individualmente cada um destes processos é reversível.

A atividade seguinte vai mostrar como é verificado o processo irreversível no cubo.

Atividade em sala de aula

Peça aos alunos do grupo que façam 10 movimentos aleatórios no cubo resolvido e depois peça a outro do grupo aluno *(preferencialmente um que não seja um cubista experiente)*, que volte a coloração inicial, com os 10 movimentos ou menos. (O objetivo aqui é verificar que nem sempre é possível voltar ao cubo resolvido).

Desenvolvendo a atividade anterior o professor poderá discutir como o efeito cumulativo de processos reversíveis pode gerar um processo irreversível. Aqui o importante é que o estudante realmente entenda que a irreversibilidade experimentada por quem manipula o cubo de Rubik está associada com o número muito grande de configurações e de movimentos possíveis, sendo que apenas alguns deles restauram o cubo ao seu estado original.

É importante destacar que esta não é uma questão se ter um cubista experiente ou não. Esse fato deve ser retirado da discussão logo de início. Imagine uma situação, onde os movimentos do cubo ocorrem de maneira completamente aleatória. Este é justamente o papel do cubista inexperiente, na atividade anterior. A probabilidade que ele reverta por acaso os movimentos que levaram o cubo ao seu novo estado é bastante pequena.

É importante conectar a discussão motivada pelas atividades com o cubo, com fenômenos físicos mais usuais, afim de não se perder o foco da discussão. Para isso é importante se ter em mente algumas situações-exemplos, onde a natureza irreversível do processo decorra da pequena probabilidade de ocorrer espontaneamente o processo inverso.

Por exemplo, suponha que dois recipientes de mesmo volume estejam conectados por um pequeno orifício (veja a

Figura 14). O recipiente a esquerda contém mais partículas que o recipiente à direita. Se cada uma das partículas tiver uma probabilidade P de passar para o outro recipiente, então a probabilidade de uma partícula qualquer do recipiente a esquerda ir para o recipiente a direita é maior, visto que na esquerda temos mais partículas.

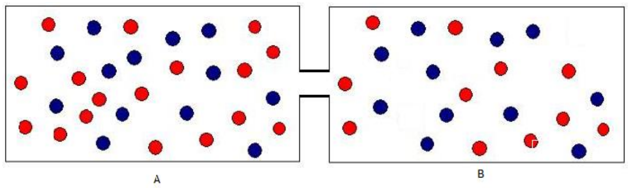
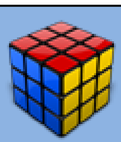


Figura 14: Dois recipientes conectados. Usualmente, a probabilidade de uma partícula do recipiente A (com mais partículas) passar para o recipiente B (menos partículas) é maior do que o caso contrário.



Atividade em sala de aula

Suponha que um vidro de perfume tem de volume 100 uv (unidades de volume) e contém 100 “partículas de perfume”. Quando ovidro é aberto em um quarto fechado de volume 10.000 uv, ele evapora lentamente, até que as moléculas do perfume estejam espalhadas por todo o quarto. Nosso objetivo é discutir do ponto de vista estatístico/probabilístico se este processo é reversível ou irreversível.

Para a atividade anterior, o docente pode, por exemplo, considerar que a probabilidade de se encontrar cada uma das “partículas de perfume” no vidro é de $\frac{1}{100}$ (i.e. volume do vidro / volume do quarto). Para se encontrar todas as 100 “partículas de perfume” no vidro a probabilidade seria de $\left(\frac{1}{100}\right)^{100}$, o que é desprezível frente, por exemplo, a probabilidade de não encontrarmos nenhuma das partículas no vidro que é de $\left(\frac{99}{100}\right)^{100} \approx 0{,}366$. Assim o processo é irreversível.

3.2 – Termodinâmica e Mecânica Estatística.

A conexão entre os fenômenos macroscópicos (aqui entendidos como fenômenos envolvendo um grande número de partículas) e fenômenos microscópicos (aqui, fenômenos com um pequeno número de partículas) em física é bem ilustrada pelo par termodinâmica e Mecânica Estatística.

O objetivo da termodinâmica é descrever e prever transformações em sistemas físicos. Em particular, ela está interessada nas chamadas Transformações Termodinâmica, i.e. todo processo pelo qual um sistema termodinâmico evolui entre seus estados de equilíbrio. Um Estado de equilíbrio é o estado de um sistema isolado onde as variáveis macroscópicas que o caracterizam (e.g. pressão, energia interna, volume, temperatura...) não variam mais com o tempo (veja Ref. [9]). Assim a termodinâmica (de sistemas no equilíbrio) visa fornecer uma descrição completa das propriedades de um sistema cujos parâmetros macroscópicos não estejam mais variando com o tempo. As transformações termodinâmicas são perturbações externas ao sistema que o fazem mudar entre os diversos estados de equilíbrio.

Enquanto a termodinâmica descreve macroscopicamente a interação do sistema mais vizinhança, a mecânica estatística tem como objetivo explicar as propriedades macroscópicas do sistema a partir de seus componentes individuais (microscópicas). Deste ponto de vista, a Mecânica Estatística segue uma filosofia reducionista; buscando explicar o todo a partir de seus constituintes, enquanto a Termodinâmica é holística e fenomenológica.

Uma vez que a descrição de um sistema composto por muitas partículas seria bastante complexa, a Mecânica Estatística busca contornar esta dificuldade através de uma descrição probabilística dos fenômenos microscópicos, que pode ser obtida através da imposição de algumas hipóteses e simplificações que permitem analisar os fenômenos microscópicos de um modo claro e razoavelmente tranquilo através de suas equações e teoremas.

Vamos procurar analisar de forma clara na seção seguinte, o teorema H. Para isso, consideremos um gás diluído (por simplicidade) na ausência de forças externas. Por meio do teorema H, vamos mostrar que esta é uma condição necessária para o equilíbrio.

SAIBA + Historias do teorema H

Aos 22 anos, Ludwig E. Boltzmann dedica-se a pesquisa para descobrir o que se tornaria a 2ª lei da termodinâmica. Em 1872, surgi o resultado com o Teorema H. O teorema dizia que existe uma integral H de uma certa função da posição e da velocidade de uma molécula, que “sempre” decresce com o tempo. A inserção da palavra “sempre” tornou o teorema um alvo de críticas e durante 25 anos, Boltzmann retornaria ao teorema para o desenvolver.

Em 1877 ele revê publicamente o seu teorema para responder uma crítica de J.J. Loschmidt. A segunda em 1894, foi uma ressurreição da crítica de Loschmidt, em resposta a uma suplica de um físico escocês; essa crítica levou à hipótese estatística necessária a demonstração do teorema H. A terceira, em 1896, para responder a uma crítica de Zermelo, chamada “paradoxo da recorrência”, a resposta foi mais uma oportunidade para afirmar o caráter estatístico do Teorema H.

Para aprender sobre as objeções históricas ao teorema H, veja o link:

HTTPS://en.wikipedia.org/wiki/Loschmidt%27s_paradox

4 - Macroestados e Microestados

Um possível estado de equilíbrio termodinâmico pode ser caracterizado por suas variáveis macroscópicas observáveis, (e.g. em um gás a pressão, temperatura, volume...). Por outro lado um microestado corresponde a cada uma das possíveis configurações do conjunto de componentes do sistema (e.g. a posição e o momento de cada um dos átomos do gás).

Geralmente, diversas configurações microscópicas distintas (i.e. microestados) correspondem a um mesmo conjunto de variáveis macroscópicas (i.e. ao mesmo macroestado). Isso implica que dado um microestado podemos determinar o macroestado correspondente do sistema, mas o contrário não é verdadeiro: Em geral há muitos microestados distintos compatíveis com o mesmo macroestado. A figura 15 abaixo ilustra essa ideia.

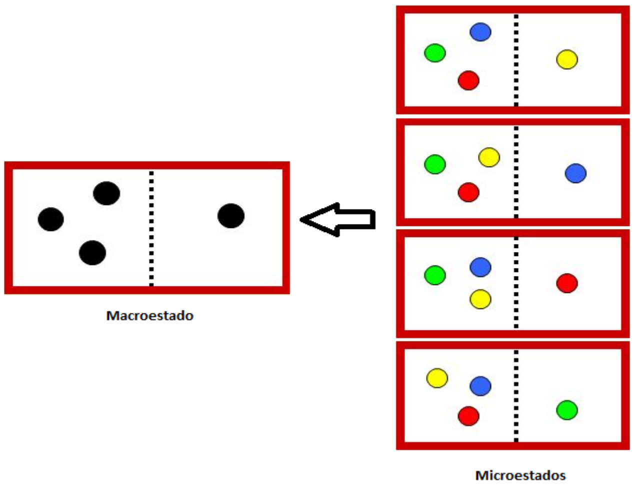


Figura 15: À esquerda temos um macro estado (Esquerda 3 bolas, Direita 1 bola). A direta tem os 4 microestados correspondentes.

Uma das hipóteses fundamentais da Mecânica Estatística é que todos os microestados que correspondem a uma mesma propriedade macroscópica (tipicamente energia) tem igual probabilidade de ocorrer. Uma implicação imediata desta hipótese, é que, em geral, macroestados que correspondam a um maior número de microestados tem maior probabilidade de ocorrer.

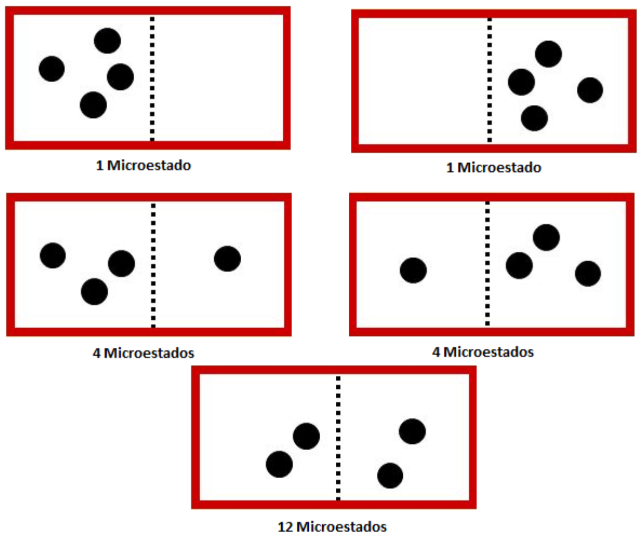


Figura 16: Os diferentes macroestados do sistema de 4 bolas e o número de macroestados correspondentes.

Na Figura 16, se todos os microestados do sistema de 4 bolas tiverem a mesma probabilidade. Então o macroestado 2/2, i.e. 2 bolas à esquerda e 2 bolas à direita têm 12 possibilidades em 22 de ocorrer, ou seja, ele tem uma probabilidade de aproximadamente 54,54% de ocorrer. Isso significa que mesmo que observemos o sistema inicialmente com 4 bolas a esquerda, à medida que o sistema evolui será mais provável observá-lo no estado 2/2.

O comportamento descrito acima, se tornará mais e mais pronunciado à medida que o número de partículas do sistema cresce. De fato, num sistema de 400 bolas o estado mais provável é o 200/200, 200 bolas à esquerda e 200 bolas à direita, tem $\frac{400!}{200!} \approx 10^{119}$microestados correspondentes de um total de $2^{400} \approx 2{,}582 \times 10^{120}$ microestados. O macroestado 200/200 ocorre com uma probabilidade de aproximadamente $\frac{10}{258} \approx 3{,}88\%$, no entanto os macroestados cuja diferença de partículas entre o lado direito e esquerdo seja menor ou igual a 20 partículas (5% do total) correspondem a aproximadamente $2{,}581 \times 10^{120}$ microestados. Assim, aproximadamente $99{,}64\%$ das ocasiões observaremos o sistema no estado 200/200, com uma flutuação menor que 5%!

Do exposto acima podemos definir a multiplicidade como sendo o número de microestados que correspondem a um dado macroestado. Note da figure 15 e 16, que diferentes macroestados podem ter diferentes multiplicidade. Portanto, o macroestado mais provável é aquele em que sua multiplicidade é maior. Também podemos observar que macroestado ordenado tem baixa multiplicidade e macroestado desordenado tem alta multiplicidade (como veremos em seções posteriores maior entropia, pois a entropia é proporcional à multiplicidade).

SAIBA +

Expansão Binomial

O número de microestados num sistema de N bolas como o descrito nesta seção é dado pelo número de formas distintas de se colocar as bolas a direta ou a esquerda. O número de microestados do tipo $M/(N-M)$, ou seja com M bolas a esquerda e $(N-M)$ bolas a direita, é dado por $\frac{N!}{M!(N-M)!}$. Usando a chamada expansão binomial:

$$(x+y)^N = \sum_{M=0}^{N} \frac{N!}{M!\,(N-M)!} x^M y^{N-M}$$

Vemos (fazendo $x = y = 1$) que o número total de microestados é 2^N.

4.1 – Microestados do Cubo

Dizemos que o cubo em sua configuração resolvida (figura 17) esta em seu estado fundamental.

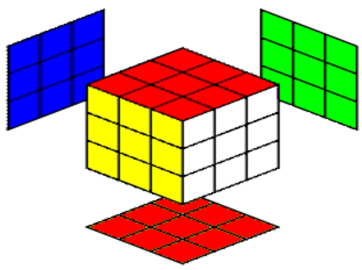


Figura 17: Estado fundamental do cubo.

Observamos na figura 17 que o estado fundamental (macroestado, formado por seis faces) e por um microestado, dado pelas suas com suas cores em cada face.

Ao realizamos movimentos no sentido horário ou anti-horário no cubo, mudamos o estado fundamental e uma cor diferente nas peças laterais ou de vértices, representa na face um microestado diferente, figura 18.

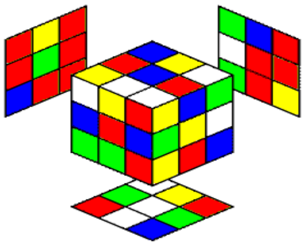


Figura18. Seis microestados diferentes das faces do cubo de Rubik.

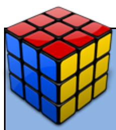
O cubo de Rubik tem 6 faces (Tabela 1) e cada face tem 9 peças, no total temos 54 peças. Cada movimento cria no cubo um novo microestado, que pode ser calculado por 54!. Mas, o número de microestado seria melhor obtido por $\frac{54!}{(9!)^6}$, lembre-se que cada face possui 9 peças com a mesma cor, quando no estado fundamental.

Quando mudamos as faces do cubo através de movimentos, percebemos que nem todos os microestados são possíveis. Ao fazer a sequência no cubo a partir do estado fundamental SSS, ela provoca no cubo o mesmo efeito se fizermos o movimento S^{-1}, ou seja, SSS = S^{-1}. Portanto, devemos contar somente um microestado.

O cubo possui 8 peças de vértice, 12 peças laterais e 6 peças centrais (Tabela 1). As peças de centro não geram microestados distintos, pois elas permanecem no mesmo local. As peças de vértices possuem 3 cores e podem girar, salvo uma, sem que nada mais mude no cubo. Uma vez que a orientação do último vértice será determinada pela orientação dos demais, o número de microestados possíveis são 3^7. O mesmo vale para a orientação das peças laterais, então o número de microestados para elas são 2^{11}. No entanto, apenas a metade dos microestados possíveis, uma vez que não é possível permutar duas peças laterais sem trocar também a posição de duas percas de vértices e vice-versa, ou seja, 8!12!/2. Então, podemos finalizar concluindo que o número total de microestados acessíveis no cubo é:

$(12!8!/2).2^{11}.3^7 \approx 4{,}3.10^{19}$

Para o cubo montado corretamente todos os microestados são acessíveis e com isso observamos que o cubo é ergódigo.



Atividade de sala de aula.

O objetivo aqui é possibilitar ao aluno a determinar o número total de microestado no cubo e verificar que algumas posições não é possível. Considere cada peça de vértice e lateral e calcule quantas posições e microestados possíveis para cada uma? Agora determine o número total de microestados no cubo de Rubik. Não esqueça de levar em consideração o número total de cada peça e suas possibilidades possíveis no cubo de Rubik.

Número de Deus

O chamado "Número de Deus" é o número máximo de movimentos necessários para retornar o cubo ao estado fundamental de qualquer um de seus microestados possíveis. Este número pode parecer baixo, mas na verdade a maior parte dos microestados pode ser resolvido com ainda menos movimentos!

Apenas cerca de 490 milhões de microestados requerem 20 movimentos para retornar ao estado fundamental (i.e. pouco mais de $10^{-9}\%$ do total de microestados). O número de microestados que podem ser resolvidos em 19 movimentos é de aproximadamente $1{,}5 \times 10^{18}$ (i.e. cerca de $3{,}48\%$ dos microestados).

4.2 – Exemplos físicos

O macroestado é constituído pelas grandezas macroscópicas, observáveis de forma direta por volume, temperatura e pressão.

O microestado é constituído pelas grandezas microscópicas, livre caminho médio, frequência de colisão, energia média e velocidade média quadrática.

Uma expansão adiabática de um gás ideal. Nessa transformação as grandezas macroscópicas e microscópicas variam durante a transformação.

● Comentários

● O macroestado de um cubo pode ser caracterizado pelo seu vetor de cor (que será visto na próxima seção), constituído de 5 parâmetros livres e um fixo. É importante observar que as componentes do vetor de cor sempre se conservam, para qualquer macroestado em que o cubo se encontra, pois no cubo temos 6 cores para serem distribuídas para nove posições possíveis.

Número de movimentos

Jessica Fridrich em 1982 inventou uma técnica denominada de "baldeação" que consiste em fazer uma cruz em uma das faces, por exemplo, em amarelo. Com a cruz no lugar certo é possível resolver qualquer configuração do cubo com uma média de 56 movimentos.

● Uma questão muito interessante é o tempo para resolver o cubo por um humano. O recorde mundial de menor tempo para solucionar o cubo de Rubik, pertence a Lucas Etter de 14 anos. Em 2015 ele concluiu em apenas 4,904 segundos.

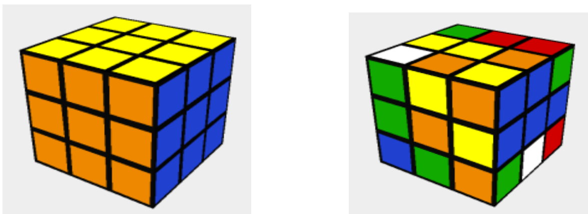
● O problema fundamental perseguido por Boltzmann era como sistemas macroscópicos podiam apresentar irreversibilidade se as leis que regem o mundo microscópico são reversíveis. A resposta veio ao estudar as colisões aleatórias entre moléculas de um gás.

5 - Entropia e Segunda Lei da Termodinâmica.

O "universo" do cubo de Rubik é feito de aproximadamente 10^{19} microestados, e apenas um corresponde ao estado resolvido (estado fundamental). É por essa razão que um leigo se perde rapidamente nesse "universo". Alguns movimentos aleatórios fazem com que o cubo ordenado (estado fundamental) se transforme em um cubo colorido.

5.1- Vetor de cor e o Cubo

O macroestado de uma face pode ser definido por uma equação matemática que descreve a "coloração" dessa face. Leve as cores em ordem alfabética, a partir de seus nomes em inglês: Azul(B), Verde(G), Laranja (O), Vermelho(R), Branco(W) e Amarelo(Y), pois em português haveria uma duplicidade com o verde e o vermelho em seus símbolos. Vamos descrever a coloração da face pelos números de quadrados azuis, o número de quadrados verdes, o número de quadrados laranja e etc., nesta face. Assim a coloração da face frontal (quadrado central laranja) na Figura 19 "a", pode ser descrita pelos números inteiros (0,0,9,0,0,0) enquanto a coloração da face frontal (quadrado central laranja) na figura 19 "b" é dada pelos números inteiros (1,3,3,0,0,2). Em outras palavras a coloração da face corresponde a um vetor de seis dimensões **C** = $(c_1,c_2.c_3,c_4,c_5,c_6)$, que denominaremos vetor de cor. O comprimento deste vetor mede a ordem da face. No exemplo da figura 9a, o comprimento do vetor de cor dessa face é $C_s = \sqrt{0^2+0^2+9^2+0^2+0^2+0^2} = \sqrt{81} = 9$, e na figura 9b, o comprimento do vetor de cor é $C_s = \sqrt{1^2+3^2+3^2+0^2+0^2+2^2} = \sqrt{23}$. Assim, se fizermos algumas voltas no sentido horário ou anti-horário no cubo, a partir do estado fundamental, observamos que o comprimento do vetor de cor diminui desde o seu valor máximo (no estado fundamental) C = 9 para C < 5. Note também, que a soma das componentes do vetor de cor sempre resulta em nove. Na figura 19a temos: (0 +0 + 9 + 0 + 0 + 0) = 9 e na figura 19b vem (1 + 3 + 3 + 0 + 0 + 2) = 9.



(a) (b)

Figura19a:cubo resolvido e 19b:cubo embaralhado

Um experimento instrutivo é verificar o comportamento do comprimento do vetor de cor de uma face após alguns movimentos aleatórios com o cubo. Começando com o cubo no estado fundamental (façamos alguns movimentos aleatórios com o mesmo). Um possível resultado deste experimento esta descrito nos Gráficos 1 e 2. Podemos notar que o comprimento do vetor de cor da face decresce rapidamente, para um valor ligeiramente inferior a 5 (Gráfico 1) e seu valor passa a flutuar em torno deste valor de equilíbrio (Gráfico 2).

É importante notar que os movimentos permitidos pelo cubo de Rubik fazem com que faces adjacentes interajam, trocando os cubos coloridos entre si. Assim, mesmo que tentemos propositalmente ordenar uma face (i.e fazer o comprimento do vetor de cor desta face aumentar) essas interações, usualmente, tendem a desordenar as outras faces. Da mesma forma que o universo do cubo, no mundo real sistemas físicos em geral interagem e suas propriedades são determinadas por estados de equilíbrio, que para serem modificados alteram o equilíbrio de sistemas vizinhos.

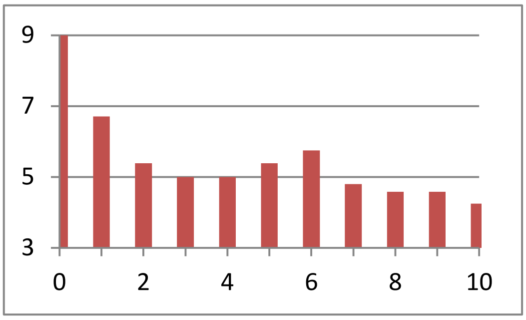


Gráfico 1 – Variação do comprimento do vetor de cor nos primeiros 10 movimentos.

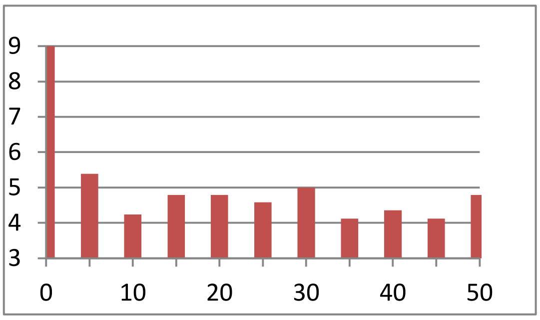


Gráfico 2 – Variação do comprimento do vetor de cor nos primeiros 50 movimentos

Nossa observação experimental do cubo mostra que o comprimento do vetor de cor tende a decrescer com movimentos aleatórios, apesar disso do ponto de vista teórico todos os movimentos são reversíveis (i.e. se um movimento leva o cubo de um estado A para o estado B, existe um movimento que leva o cubo de B para A). Em outras palavras parece haver uma "direção preferencial" para as transformações no cubo, uma "seta do tempo". Analogamente, enquanto acreditasse que processos físicos no nível microscópico são temporalmente simétricos, no nível macroscópico, muitas vezes, aparentemente este não é o caso: existe uma direção preferencial ou "seta do tempo". De fato, nossa pequena experiência ilustra uma versão da segunda lei da termodinâmica para o cubo de Rubik. Assim, mais do que uma atividade lúdica o cubo nos permite ensinar termodinâmica de uma forma desafiadora.

Atividade em sala de aula

Nessa atividade o objetivo é determinar o vetor de cor e relacionar o número de cubinhos ocupados em uma face. Para isso, faça 10 movimentos aleatórios em seu cubo de Rubik. Calcule o vetor de cor da face frontal e para as outras faces. Determine o módulo do vetor de cor do cubo. Calcule também o vetor de cor médio dos grupos da sala? Para a face frontal, quantos cubinhos não estão sendo ocupado por nenhuma das seis cores? E por uma cor? Por duas cores? Quantos cubinhos estão sendo ocupados por três cores?

5.2- Entropia e o cubo de Rubik

Se continuarmos a fazer movimentos aleatórios com o cubo por algum tempo, podemos coletar dados estatísticos sobre a coloração das faces. É curioso notar que estados de máxima mistura de cores (i.e. os possíveis rearranjos de (2,2,2,1,1,1)) são bastante raros. Os estados mais frequentes são rearranjos de (3,2,2,1,1,0), isso ocorre pois este estado pode ser formado pelo maior número de microestados diferentes, e portanto possuem a maior entropia (entropia está relacionada com o número de possibilidades que o sistema físico pode escolher, ou seja, a entropia de uma partição de cor é o logaritmo de microestados que têm essa partição de cor). De fato, todos os rearranjos do tipo (3,2,2,1,1,0), possuem C = $\sqrt{19} \cong 5$ e como consequência é entorno deste valor que flutua o valor do vetor de cor C como visto nos gráficos 1 e 2.

Um segundo experimento pode instrutivo para esclarecer como as propriedades do sistema flutuam entorno dos valores de equilíbrio. Seja N_r o número de cores em uma face que ocupam exatamente r quadrados nesta face. Por exemplo, os estados de máxima entropia (3,2,2,1,1,0) tem $N_0 = 1$, $N_1 = 2$, $N_2 = 2$, $N_3 = 1$ e todos os demais N_{rs} iguais à zero (N_1 representa o número de cores que estão ocupando apenas um quadrado). Nosso experimento consiste em embaralhar o cubo e determinar a distribuição de cores, i.e., os N_r em uma face e repetir este procedimento até termos um número suficientemente grande de dados. Para 50 configurações aleatórias do cubo obtivemos a distribuição expressa no Gráfico 3.

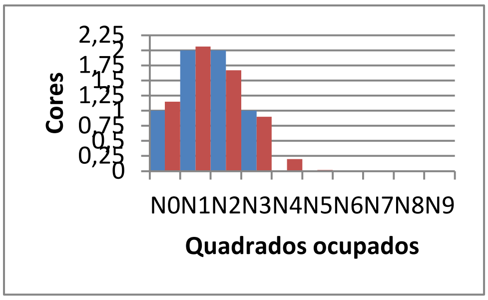


Gráfico 3 – Distribuição de cores em uma face. Em azul a distribuição mais frequente, em vermelho a distribuição média.

Como esperado a distribuição média está muito próxima da distribuição mais provável. Como discutido isso ocorre, pois a máxima entropia sinaliza a situação de equilíbrio para o sistema. Mas, o gráfico 10, também nos reserva uma agradável surpresa, ele lembra a forma bem conhecida da distribuição de Maxwell.

Vamos agora compreender o conceito de entropia e relacionar com o vetor de cor. A entropia é uma medida do número de microestados acessíveis consistentes com o estado macroscópico de um sistema termodinâmico. Formalmente podemos escrever:

$S = k \ln \Omega$, onde S denota a entropia do sistema, k é uma constante de proporcionalidade (chamada constante de Boltzmann) e Ω representa o número de microestados correspondente a um dado vetor de cor. Um macroestado é o estado do sistema descrito por varáveis empíricas medidas macroscopicamente, tais como temperatura, pressão, volume, número de partículas, magnetização, energia total. Um macroestado é o que observamos como resultado dos efeitos coletivo do estado dos diversos subcomponentes do sistema. Cada uma das configurações dessa coleção de subcomponentes é o que chamamos de microestado. Usualmente há diversos microestados distintos que resultam em um mesmo macroestado. Assim, a entropia é uma medida de quantos microestados resultam naquelas propriedades macroscópicas observadas, ou em outras palavras de quantas configurações diferentes o sistema pode se apresentar e ainda sim ter as mesmas propriedades de larga escala.

A equação acima pode ser reescrita em termos da probabilidade p_n de se encontrar o sistema no enésimo microestado.

$S = -k \sum_n p_n \ln p_n$, onde ($p_1 + p_2 + \cdots p_n = 1$).

Para $\Omega = 2 \rightarrow p_1 + p_2 = 1 \rightarrow p_2 = 1 - p_1 \rightarrow S = - k(p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2) \rightarrow s = - k\, [p_1 \ln p_1 + (1 - p_1). \ln(1 - p_1)]$, derivando a equação em relação à p_1 e igualando a zero, vem:

$\ln p_1 = \ln(1 - p_1) \rightarrow p_1 = 1 - p_1 \rightarrow 2p_1 = 1 \rightarrow$ $\rightarrow p_1 = \frac{1}{2} \rightarrow$ portanto : $p_k = \frac{1}{\Omega}$.

Macroscopicamente, a entropia é uma medida da capacidade do sistema de realizar transformações, de maneira bastante análoga a nossa ideia de energia como uma medida da capacidade do sistema de realizar trabalho. De fato, a palavra entropia foi cunhada justamente a fim de explorar esta analogia unido o prefixo "em" à expressão grega *ή τροπή*, que significa transformação.

Em geral, ao passar por transformações a energia de um sistema se distribui pelos seus vários constituintes, além disso, energia e partículas são trocadas com o ambiente no qual se encontra o sistema. Isso permite que o sistema acesse um número cada vez maior de microestados, o que resulta em um aumento da entropia do sistema. Quando a entropia do sistema atingir seu valor máximo, as propriedades macroscópicas do sistema não mais se modificam, e atingimos o chamado equilíbrio.

Para aprofundar no assunto acesse os sites:

https://pt.wikipedia.org/wiki/segunda lei_da_temodinâmica.

Cejarj.cecierj.edu.br/pdf_mod2_CN/Uni05_Mod2_Fís.pdf

www.ufrgs.br/napead/repositorio/.../leis...termodinamica/segunda-lei.php

Atividade em sala de aula

O objetivo desta atividade e obter o vetor de cor e o número de microestados Ω. Para figura 20, calcule o vetor de cor na face frontal e superior.

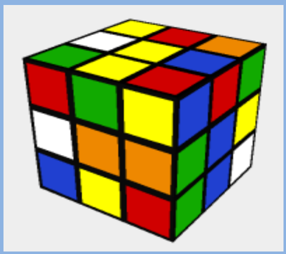


Figura20- cubo embaralhado

Agora analisando somente as peças laterais, calcule o número de microestados Ω e a entropia.

Dada a figura 21 abaixo, calcule o vetor de cor da face frontal e superior.

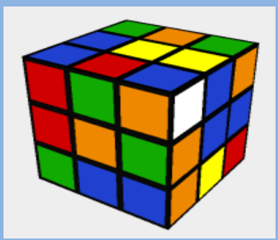


Figura21: cubo embaralho

Com o seu cubo de Rubik, faça 30 movimentos aleatórios e calcule o vetor para as faces frontal e inferior.

Considerando o conceito do vetor de cor e da entropia, explique que relação você pode tirar em relação a essas duas grandezas.

5.3 - Entropia e Segunda Lei da Termodinâmica.

Entropia está relacionada com o número de possibilidades que o sistema físico pode escolher. No cubo, quanto mais movimentos é realizado, maior a possibilidade de o cubo ficar mais embaralhado e consequentemente maior entropia.

A 2ª lei da Termodinâmica diz: “Todo sistema termodinâmico tem uma função de estado extensiva, a entropia do sistema, que pode ser definida a menos de uma constante arbitrária. A variação infinitesimal da entropia do sistema (dS) satisfaz a desigualdade”, ou que em qualquer processo termodinâmico a entropia do sistema mais vizinhança permanece constante ou aumenta. Matematicamente podemos escrever:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}$$

No cubo observamos que o vetor de cor tende a decrescer com movimentos aleatórios para que a segunda lei da termodinâmica seja observada $dS > 0$.

Comentários

● O sinal de igual na equação acima, só vale nas transformações infinitesimais reversíveis, enquanto o sinal de maior vale em qualquer transformação não reversível.

● É a variação da entropia que nos explica porque os sistemas evoluem naturalmente num sentido do tempo, de modo que a entropia do sistema + vizinhança cresça.

● A 2ª lei estabelece a irreversibilidade de fenômenos de Mecânica Estatística, e especialmente na transferência de calor, traduzindo-se em um aumento de entropia e podemos observar essa propriedade no cubo devido ao grande número de microestado experimentado para quem manipula o cubo.

● Em sistemas limitados por fronteiras adiabáticas o valor da entropia cresce (processo irreversível) até que no equilíbrio ela atinge o valor máximo que analiticamente pode ser expresso:

$dS = 0$ e $d^2S < 0$, no equilíbrio.

● Não é possível a passagem espontânea de calor de um corpo frio para um corpo quente.

● Não é possível haver uma transformação completa de calor em trabalho.

● Não é possível a passagem espontânea de um sistema desorganizado espacialmente para um sistema mais organizado espacilamente.

● Em processos reversíveis a entropia permance constante, ou seja, a variação da entropia é nula ($\Delta S = 0$). As condições de reversibilidade são:

1 – Não há trabalho de forças de atrito, de forças viscosas ou de outras forças dissipativas que produzem calor.

2 – A condução térmica só ocorre isotermicamente.

Outro aspecto interessante ressaltar sobre a entropia é o que veremos a seguir.

A grande pergunta que físicos e matemáticos fazem é: o que realmente representa a entropia? Por que, a dificuldade para definir a entropia ao longo da História?

Podemos observar no outono, quando as folhas mudam de cor e caem das árvores, elas o fazem de forma aleatória. As folhas não caem em pilhas, elas simplesmente caem.

Se soltarmos um baralho de cartas, elas não se organizam por naipe ou por números. Não podemos jogar um ovo quebrado no chão e ele voltar na sua forma original. Então, por que isso ocorre?

A entropia é uma tendência para os sistemas de avançar para desordem. É uma quantificação dessa desordem. A razão de um baralho de cartas não se reorganizar quando solto é porque, naturalmente mais fácil, para ele permanecer não ordenado. Há apenas uma possibilidade para o baralho estar em ordem e, portanto sua entropia é nula ($\ln 1 = 0$).

Boltzmann demonstrou, em 1877, que a entropia cresce à medida que cresce o número de possibilidades possíveis ao sistema, tal como está gravada em sua lápide.

$$S = k.\log\Omega$$

A entropia ao longo do desenvolvimento da sociedade foi sendo aplicada em outros ramos do conhecimento. Um desses ramos é a termodinâmica computacional através da entropia da informação.

Podemos dizer que informação, de acordo com alguns autores, é um termo que vem sendo empregado a partir da década de 50. É usado para significar mensagens, notícias, novidades, dados, símbolos e sugestões. Diferente da energia, a informação é algo que se cria e que existe cada vez mais em maior quantidade no nosso universo. Segundo Zdenek Zeman, "a expressão da informação de um sistema tem por base, como se sabe, a fórmula matemática da entropia negativa". Informação, pode exprimir, também, a medida da ordem de um sistema nervoso ou de um sistema social.

A teoria da informação teve inicialmente como destaque as questões técnicas, sendo uma das primeiras teorias a separar com nitidez a informação da significação. Ela está situada dentro da cibernética, onde a informação se mostra como uma medida probabilística. Esta teoria tem um grande interesse pelo funcionamento dos sinais, pelas transformações energéticas mediante a codificação da mensagem e sua decodificação. Ela trabalha com os seguintes conceitos: ruído, redundância, entropia e imprevisibilidade.

A teoria da informação não estuda uma língua pelo número de símbolos alfabéticos que a compõem, mas sim pela análise à redundância na língua, considerando que o inverso da entropia é a redundância. Uma língua entrópica dispõe de um vocabulário rico, com palavras diferenciadas, que mostram o poder das combinatórias; uma língua pouco entrópica é pobre e repetitiva.

Shannon se preocupava com a quantidade de informação em uma frase e por isso criou uma medida para identificar o grau de incerteza em canais de informação. Ele emprestou a ideia de Entropia da Física para organizar a teoria da informação matemática.

SAIBA +

Na década de 50 Claude Shannon desenvolveu uma teoria que tinha aplicação na teoria da comunicação e estatística. Ela foi inicialmente desenvolvida na compreensão de dados, para transmissão e armazenamento desses.

Informação é um conceito amplo, mas para qualquer distribuição de probabilidade é possível conceituar uma quantidade denominada "entropia" que expressa uma medida de informação. Entropia é uma medida da incerteza de uma variável aleatória, dada pela equação:

$$S = \sum_{i}^{n} p_i . ln(\frac{1}{p_i})$$

onde p_i representa a probabilidade de evento da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta.

Podemos observar que quanto menos informação sobre um sistema, maior será sua entropia. A quantidade de informação de uma mensagem é entendida na teoria de informação como sendo o menor número de bits, unidade de informação necessários para conter todos os valores ou significados desta mensagem.

6 – Demônio de Maxwell.

6.1 - Cubo

O demônio de Maxwell é um experimento mental projetado por Maxwell em 1871, para mostrar que a segunda lei da termodinâmica é verdadeira apenas estatisticamente. A 2ª lei estabelece a irreversibilidade de fenômenos de mecânica estatística, traduzindo-se num aumento continuo da entropia. A experiência do demônio propõe um método que permite retornar a um estado de temperatura desigual, sem gastar energia e diminuindo a entropia, o que viola em princípio a segunda lei da termodinâmica. O demônio gasta energia e segundo o princípio de Landauer's para apagar essa informação ele gasta energia de $kT\ln 2$. Como sabemos a eliminação de informação é um processo irreversível que termodinamicamente aumenta a entropia.

A função do demônio de Maxwell é violar a segunda lei da Termodinâmica, ou seja, propor uma situação em que a entropia do sistema + vizinhança diminua. No cubo, como observamos acima, à medida que o vetor de cor decresce a entropia do cubo aumenta. Então, poderíamos pensar numa situação em que o vetor de cor aumentasse, para que a entropia do cubo diminuísse. Nessa perspectiva à medida que resolvemos o cubo o vetor de cor tende a aumentar, pois o número de microestados vai diminuindo e consequentemente a entropia do cubo tende a diminuir. No entanto o ato de resolver o cubo está gastando "energia mental", para reajustar o cubo à sua configuração de fabrica, o que faz a entropia aumentar.

6.2 – Exemplos Físicos

Podemos visualizar a proposta de Maxwell por esse exemplo:

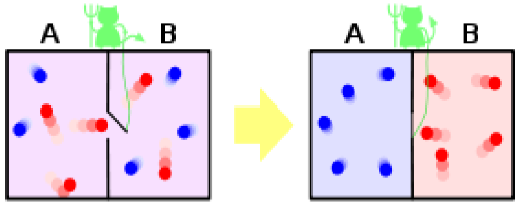


Figura22: wikimedia commons

Um gás contido num recipiente separado por uma parede com uma pequena porta em que o demônio permite passar as partículas que tem velocidade maior do que a média para o lado esquerdo e as partículas que tem velocidades menores que a média para a direita e dessa forma criando um desequilíbrio térmico. Dessa forma o sistema termodinâmico constituído pelo gás separado pela parede jamais entraria em equilíbrio térmico. Muitos anos passaram até que os cientistas conseguiram enxergar a grande sacada de Maxwell na elaboração do problema proposto tentando evitar um triste fim para a natureza humana, que seria a morte térmica do universo.

A partir da analise do saiba mais da página abaixo, poderemos compreender uma das propostas para o demônio de Maxwell.

Princípio de Landauer's

Em 1961 Rolf Landauer foi o primeiro a argumentar um princípio físico pertencente ao limite teórico mais baixo de consumo de energia de computação. Ele afirma que qualquer manipulação irreversível de informações, tais como a eliminação de um bit ou a fusão de dois caminhos de caçulo, deve ser acompanhada por um aumento na entropia de informação.

O princípio de Landauer afirma que existe uma quantidade mínima possível de energia necessária para apagar um bit de informação, conhecido como o limite de Landauer: $kT\ln 2$.

Outra forma de enunciar o princípio de Landauer é que, se um observador perde informações sobre um sistema físico, o observador perde a capacidade de extrair trabalho a partir desse sistema.

A 20°C, o limite de Landauer representa uma energia de aproximadamente 0,0172 eV. Teoricamente, a memória do computador à temperatura ambiente operando no limite de Landauer poderia ser mudada a uma taxa de um bilhão de bits por segundo, com apenas 2,85 bilionésimos de watts de potência sendo despendidos na mídia de memória. Os computadores modernos usam milhões de vezes mais energia.

Atividade em sala de aula

O objetivo é analisar o demônio de Maxwell.

A figura 22 representa o demônio de Maxwell, um ser hipotético criado por Maxwell para violar a segunda lei da termodinâmica, pois ele encontrava-se inconformado com a possibilidade da morte térmica do universo, consequência da 2ª lei. Esse demônio poderia selecionar as moléculas de um gás de forma que as mais rápidas passam para um lado e as mais lentas para o outro lado. Pensando num cubista inexperiente (a maioria de nossos alunos são), peça a um aluno para fazer alguns movimentos no cubo (por exemplo, 10). Peça a outro aluno para resolver o cubo com um número menor de movimento.

Com um cubo embaralho discuta com os estudantes, qual seria a técnica a ser utilizada para resolver o cubo em um menor número de movimentos? Obs; sem utilizar um computador ou algo similar.

Para saber mais sobre o demônio de Maxwell:

www.todasasconfiguracoes.com/tag/demonio-de-maxwell/

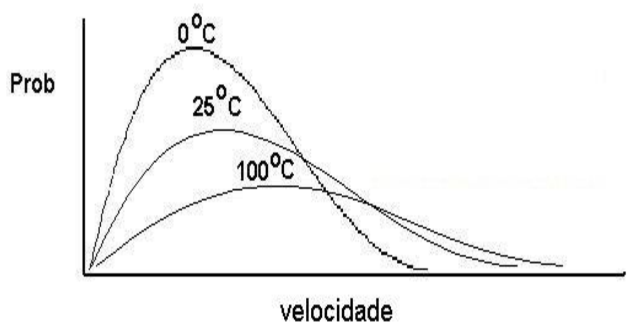
7 – Distribuição de Maxwell- Boltzmann

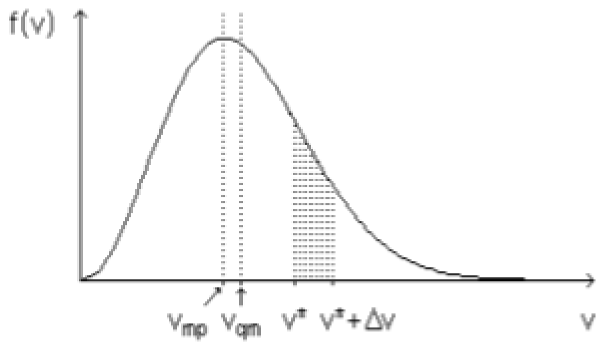
A distribuição de Maxwell é o nome pelo qual os físicos descrevem a distribuição de velocidades de partículas em gases ideais. Naqueles em que as partículas se movem livremente dentro de um recipiente estacionário sem interagir umas com as outras, exceto durante breves colisões em que trocam energia e quantidade de movimento umas com as outras ou com o seu ambiente térmico.

Uma consequência importante do modelo cinético é a relação $E_c = (3/2)k_BT \rightarrow (1/2)mv^2_{qm} = (3/2)k_BT$, onde v^2_{qm} é o valor médio dos quadrados dos módulos das velocidades. Sabemos que as velocidades das moléculas não têm, todas elas, módulos iguais. As moléculas de uma amostra de gás têm velocidades com módulos que vão de zero a infinito. Para uma amostra de gás ideal em equilíbrio térmico, a função que dá a distribuição das moléculas pelos módulos das velocidades, chamada função distribuição de Maxwell, é:

$$F(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

Note que esta função aumenta parabolicamente de zero para pequenas velocidades, chega a um máximo, e a partir daí diminui exponencialmente. À medida que a temperatura aumenta, a posição do máximo se desloca para direita. A área sob essa curva é sempre unitária, por definição.





Na figura acima a área pontilhada representa a fração das moléculas cujas velocidades têm módulos entre v^* e $v^* + \Delta v$. Assim, a função f(v) representa a fração das moléculas cujas velocidades têm módulos v^* e $v^* + \Delta v$ por intervalo unitário de módulo de velocidade. A área pontilhada também representa a probabilidade de encontrar uma molécula com velocidade entre v* e v* + Δv.

7.1- Cubo

Atividade em Sala de Aula

Peça aos alunos para fazerem 50 movimentos aleatórios no cubo. Podemos observar a distribuição de cores no gráfico abaixo. Notamos que ela lembra uma distribuição de Maxwell.

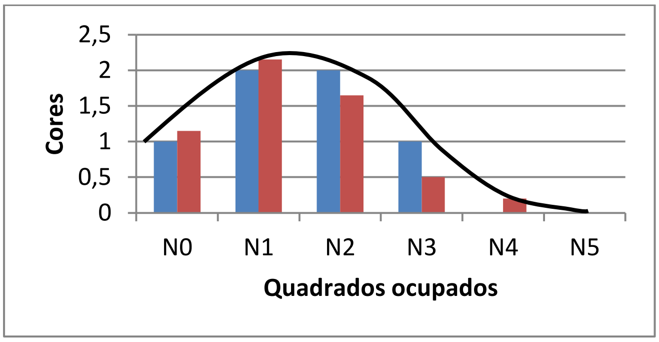


Gráfico 4:Distribuição de Cores em uma face. Em azul a distribuição mais frequente, em vermelho a distribuição média.

A questão da distribuição de cores em uma face do cubo pode ser descrita pelo seguinte problema de contagem: De quantas maneiras é possível distribuir as cores(B,G,O,R,W,Y) nos nove quadrados da face? O número de cores que ocupam exatamente r quadrados deve obedecer as seguintes relações (N_r's):

$N_0 + N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 + N_8 + N_9 = 6$ (1)

$0N_0 + 1N_1 + 2N_2 + 3N_3 + 4N_4 + 5N_5 + 6N_6 + 7N_7 + 8N_8 + 9N_9 = 9$ (2)

A equação (1) expressa o fato que existem 6 cores possíveis, e enquanto a equação 2 expressa que estas cores ocuparão os noves quadrados da face. Assim os nove lugares da face devem ser distribuídos entre seis cores, cada uma possuindo um determinado vetor de cor $\mathbf{c}(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6)$. Com isso a expressão para o número total de microestados pode ser escrito por:

$$\Omega = \frac{6!}{N_1!\,N_2!\,N_3!\ldots N_9!}.$$

Dividindo as equações (1) e (2) por 6 podemos reinterpreta-las em termos de probabilidades:

$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 = 1$

$0p_0 + 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 6p_6 + 7p_7 + 8p_8 + 9p_9 = 3/2$

A situação de equilíbrio, ou seja, a situação de maior entropia é obtida maximizando a equação $S = kln\Omega$, sujeita as restrições impostas pelas equações acima. Procedendo desta maneira (utilizando, por exemplo, multiplicadores de Lagrange), obtemos:

$$N_r = \frac{6}{Z}e^{-kr},$$

onde $k \cong 0{,}492$ e $Z = \sum_{r=1}^{9} e^{-kr}$.

Note que esta expressão é (monotonicamente) decrescente com o valor de r, o que é ligeiramente diferente do comportamento obtido no gráfico 3. Com isso a expressão para o número total de microestados precisa ser alterada:

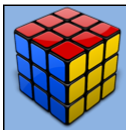
$$\Omega = \frac{6!}{N_1!N_2!N_3!\ldots N_9!} \times \frac{9!}{C_1!C_2!C_3!C_4!C_5!C_6!}.$$

Com isso a entropia estatística dada pela equação $\mathrm{S} = \mathrm{k}\ln\Omega$ toma o valor máximo apenas para a distribuição em azul no gráfico. 'Podemos ver que a distribuição de cores em um cubo de Rubik embaralhado pode ser analisada de uma maneira similar â forma como a Física Estatística analisa a distribuição de energia nas partículas de um gás.

7.2 – Exemplos Físicos

● A distribuição de Maxwell-Boltzmann é utilizada para explicar a condução de calor em gases.

● Através dela podemos observar que as velocidades das partículas deveriam ser diferentes devido às colisões entre moléculas.



Atividade em sala de aula

1) A partir do cubo resolvido peça aos alunos para fazerem movimentos no cubo (por exemplo, 10 ,30, 50, 70) e construir um gráfico da distribuição de cores em função dos números de quadrados ocupados.

2) Faça 20 movimentos no seu cubo e calcule o número total de microestados para a face frontal.

3) Faça a sequencia de movimento em seu cubo: FSEIDTS^{-1}F^{-1}. Determine o número total de microestados e a entropia para a face superior.

4) Faça os movimentos a partir do cubo no estado fundamental: SFETDIFE^{-1}SD^{-1}T^{-1}. Calcule o número total de microestados e a entropia para a face direita e para face esquerda. Compare.

A atividade acima tem a finalidade de mostrar que o número de microestados para cada face do cubo de Rubik tem um valor diferente.

Equipartição da Energia

A equação da energia cinética molecular translacional média ‹k› = $\frac{3}{2}KT$. Ela relaciona a energia cinética molecular média (uma grandeza microscópica) com a temperatura (uma grandeza macroscópica). Então,

$$\frac{1}{2} m\langle v^2\rangle = \frac{3}{2} kT \qquad (1)$$

O fator 3 surge na equação da velocidade quadrática media ‹v^2›, em razão da equivalência da três direções espaciais:

$$\langle v^2\rangle = \langle v_x^2\rangle + \langle v_y^2\rangle + \langle v_z^2\rangle = 3\langle v_x^2\rangle$$

O sistema não depende do referencial,

$$\frac{1}{2} m\langle v_x^2\rangle = \frac{1}{2} m\langle v_y^2\rangle = \frac{1}{2} m\langle v_z^2\rangle = \frac{1}{2} kT$$

O fator 3 da equação 1 está relacionado com os três graus de liberdade translacionais de uma molécula monoatômica. Então:

$$\langle E\rangle = 3(\tfrac{1}{2} kT)$$

O teorema de equipartição da energia diz: ‘Para um sistema de moléculas à temperatura T, cada molécula com λ graus de liberdade, a energia mecânica média’ é:

$$\langle E\rangle = \lambda\,(\tfrac{1}{2} kT)$$

Está equação implica que, a cada gruas de liberdade, está associada, em média, uma quantidade de (½)kT de energia mecânica.

8 – Exercícios utilizando o cubo.

8.1 – Considere apenas as peças de vértice. Peça a um aluno para verificar o número de microestados acessíveis para essas peças (cubinhos) e utilizando a equação da entropia $S = k \ln\Omega$, calcule a entropia só com essas possibilidades.

8.2 – Considere agora somente as peças laterais. Peça a outro aluno para verificar o número de microestados acessíveis para essas peças e com a mesma equação anterior calcule a entropia.

8.3 – Com os resultados anteriores o que você pode concluir a respeito da entropia.

8.4 – Agora, considere todas as possibilidades que o cubo oferece para ser embaralhado e calcule a entropia para o cubo considerando todos os estados acessíveis. Calcule também a entropia para o cubo resolvido.

8.5 – Compare os resultados obtidos no item anterior com a analise do vetor de cor.

8.6 – Este exercício tem a finalidade de mostrar que rotações em três dimensões não comutam. Com dois cubos no estado padrão de fábrica, peça a um aluno para fazer um movimento de uma volta com a face vermelha e depois com a face amarela (RY). Com o outro cubo faça uma volta com a face amarela e depois uma volta com a face vermelha (YR). Compare os resultados.

8.7 – A partir do cubo resolvido, peça a alguns alunos para fazerem vários movimentos aleatórios com o cubo de forma a obter o menor vetor de cor. Com esse exercício pode-se discutir a questão do significado de máxima entropia e a questão da morte térmica do Universo.

8.8 – Considere dois cubos resolvidos. No primeiro faça FDESIT e no segundo faça os movimentos $T^{-1}I^{-1}S^{-1}E^{-1}D^{-1}F^{-1}$. Discuta sobre a solução e resolva o cubo.

8.9 – A segunda lei da termodinâmica estabelece para um sistema que não há troca de calor $\Delta S \geq 0$. O que podemos dizer em relação ao vetor de cor?

8.10 – Uma aluna com seu cubo resolvido e face branca voltada para baixo, face vermelha voltada para frente, fez os seguintes movimentos: $EFSTDIS^{-1}E^{-1}T^{-1}F^{-1}$. A partir dessa sequência calcule o vetor de cor e a entropia para a face frontal.

8.11 – Em relação ao exercício anterior, calcule o vetor de cor e a entropia para a face traseira.

8.12 – Vamos definir um vetor para um jogo de cartas, denominado vetor de naipe. Como um baralho normal tem quatro naipes: [paus(p), copas(c), ouro (o) e espada (e)]. Então o nosso vetor terá quatro dimensões $\mathbf{C = c_1 + c_2 + c_3 + c_4}$. Cujo módulo do vetor é:

$$C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2}$$

Em um jogo de pôquer Eliton e Adriano saíram com os seguintes jogos, respectivamente:

Royal flush

Junk

Para cada jogo acima, calcular o vetor de naipe.

8.13 – Em relação ao exercício anterior e lembrado das probabilidades de um jogo de pôquer, o que podemos afirmar em relação ao vetor de naipe para jogos diferentes?

8.14 – Sabemos da mecânica estatística que o macroestado mais provável de um sistema é o que tem o maior número de microestados. Isso quer dizer que o macroestado mais provável de um sistema é o que possui maior entropia. Lembrando novamente das probabilidades num jogo de pôquer e retornando ao exercício 8.13, diga qual dos dois jogos é mais comum de aparecer?

8.15 - Para a tabela de pôquer abaixo, calcule o vetor de naipe para cada macro diferente.

8.16 – Em relação ao exercício anterior e lembrando-se do conceito de entropia digam quais desses jogos são mais prováveis de aparecer?

8.17 - Considere a figura abaixo e calcule o vetor de naipe.

9- Resolução comentada dos exercícios.

Exercícios utilizando o cubo

Exercício 8.1

Vimos que:

$\Omega = 2^{11} = 2048$

$S = k \ln\Omega \rightarrow S = k \ln 2048 \rightarrow S = 7{,}6\ k$

Exercício 8.2

$\Omega = 3^7 = 2187 \rightarrow S = k\ln\Omega$

$S = k \ln 2187 \rightarrow S = 7{,}7\ k$

Exercício 8.3

A entropia é proporcional ao número de microestado, ou seja, S α lnΩ

Exercício 8.4

Vimos que: $\Omega = 4{,}3.10^{19} \rightarrow S = k\ln\Omega$

$S = k\ln 4{,}3.10^{19} \rightarrow S = 45\ k$

Exercício 8.5

Quanto mais embaralhamos o cubo, menor o vetor de cor e maior a entropia.

Exercício 8.6

Percebemos que rotações em 3D não comutam, ou seja, $RY \neq YR$

Exercício 8.7

Como sabemos menor vetor de cor, maior entropia. A entropia está relacionada com a degradação de energia, isto quer dizer que a energia disponível estaria diminuindo, atingindo um estado de uniformidade absoluta e todos os processos físicos, químicos e biológicos cessariam.

Exercício 8.8

O processo deve mostrar para os alunos que os movimentos do segundo e a solução do primeiro e vice versa de trás para frente. As soluções são:

1º $T^{-1}I^{-1}S^{-1}E^{-1}D^{-1}F^{-1}$

2° FDESIT

Exercício 8.9

O vetor de cor permanece constante ou diminui.

Exercício 8.10

As cores da face são:0B,2G,1O,1R,3W,2Y

$C = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2}$

$C = \sqrt{19} \rightarrow C = 4{,}4$

$N_0 = 1$; $N_1 = 2$; $N_2 = 2$; $N_3 = 1$, restante zero

$$\Omega = \frac{6!}{1!2!2!1!0!0!} \times \frac{9!}{0!2!1!1!3!2!}$$

$$\Omega = \frac{6.5.4.3.2!}{1.2.1.2!1.1} \text{ x } \frac{9.8.7.6.5.4.3!}{1.2.1.1.1.3!.2.1} = 2721600$$

$S = k.\ln 2721600 \rightarrow S = 14{,}82\ k$

Exercício 8.11

As cores são:2B,0G,1O,1R,3W,2Y

C = $\sqrt{2+\ 0+1^2+\ 1^2+\ 3^2+\ 2^2}$

C = $\sqrt{19}$ → C = 4,4

$N_0 = 1$; $N_1 = 2$; $N_2 = 2$; $N_3 = 1$

$N_4=N_5=N_6=N_7=N_8=N_9= 0$

$\Omega = \frac{6.5.4.3.2!}{1.2.1.2!.1..1} \times \frac{9.8.7.6.5.4.3!}{1.2.1.1.1.3!.2.1} = 2721600$

S = k.ln2721600 → S = 14,82 k

Exercício 8.12

A equação do vetor de naipe é:

Royal

C = $\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2}$

C = $\sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2 + 0^2}$

C = 5

Junk

C = $\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2}$

C = $\sqrt{7}$ → C = 2,6

Exercício 8.13

Quanto maior o vetor de naipe, menor é o número de estados acessíveis e menores a entropia.

Exercício 8.14

A probabilidade maior é do Junk.

Exercício 8.15

1° C = $\sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2 + 0^2}$ C = 5

2° C = $\sqrt{0^2 + 0^2 + 5^2 + 0^2}$ C = 5

3° C = $\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2}$ C = 5

4° C = $\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2}$ C = 5

5° C = $\sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2}$ C = 5

6° C = $\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}$ C = $\sqrt{7}$

7° C = $\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2}$C= $\sqrt{10}$

8° C = $\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2}$ C = $\sqrt{7}$

9° C = $\sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2 + 1^2}$ C = $\sqrt{9}$

10°C= $\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}$ C = $\sqrt{7}$

Exercício 8.16

Sabemos que os eventos mais prováveis são aqueles que possuem maior entropia, ou seja, maior de número de estados acessíveis. Portanto, os jogos que possui maior chance de aparecer são: Haigh Card, One Pair e Two Pair. Esses possuem altas probabilidades. Mas, mais comum é o Junk (qualquer cinco cartas, traduzindo, lixo) tem mais de 2 milhões de probabilidades de ocorrer.

Exercício 8.17

O vetor de naipe será:

C = $\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2}$ C = $\sqrt{7}$

Referências

[1] – Elshout, J.J. and Vienman,M.V.J. Relation between intellectual ability and working method as predictors of learning. The Journal of Educational Research, 85(3): 134-143, 1992.

[2] – Styer, D.F. Getting there is half the fun. American Journal of Physics, 66:105-106,1992.

[3] – Heller,P. and Hollabaugh,M. Teaching problem solving through cooperative grouping. Part 2: Designing problems and structuring groups. American Journal of Physics, 60(7):637-644, 1992.

[4] – Polya,G. a arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Interciências,2, 1978.

[5] – Borko,H.; Eisenhart,M.; Brown,C.; Underhill,R.G.; Jones,D. and Agaid,P.C. Learning to teach hard mathematics. Do novice teachers and their instructors give up too easily. Journal for research in mathematics education, 23(3): 194-222, 1992.

[6] – Joyner,D. Adventures in group theory: rubik’s machine & other mathematical toys. The mathematics education, 23(3):194-222, 1992.

[7] – Max,G.; Gajzago,E. and Gnadig,P. The universe of Rubik’s cube. European Journal of Physics, 3(1):39, 1982.

[8] – Golomb,S. W. Rubik’s cube and model of quark confinement. American Journal of Physics.49(11): 1030-1031, 1981.