



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO  
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO



**Oliviana Xavier do Nascimento**

**PROBLEMA DE CARREGAMENTO EM UM ÚNICO CONTÊINER:  
ABORDAGEM EXATA E RESTRIÇÕES PRÁTICAS**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

CATALÃO – GO, 2018

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR  
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES  
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico:     Dissertação     Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Oliviana Xavier do Nascimento

Título do trabalho: **Problema de carregamento em um único contêiner: abordagem exata e restrições práticas**

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento  SIM     NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Oliviana Xavier do Nascimento  
Assinatura do(a) autor(a)<sup>2</sup>

Ciente e de acordo:

Thiago Alves de Queiroz  
Assinatura do(a) orientador(a)<sup>2</sup>

Data: 11 / 12 / 2018

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

<sup>2</sup> A assinatura deve ser escaneada.

OLIVIANA XAVIER DO NASCIMENTO

PROBLEMA DE CARREGAMENTO EM UM ÚNICO CONTÊINER:  
ABORDAGEM EXATA E RESTRIÇÕES PRÁTICAS

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem e Otimização pela Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão.

Orientador:  
Thiago Alves de Queiroz

CATALÃO – GO

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Nascimento, Oliviana Xavier do  
Problema de Carregamento em um Único Contêiner: Abordagem Exata e Restrições Práticas [manuscrito] / Oliviana Xavier do Nascimento. - 2018.  
CXLII, 142 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Alves de Queiroz.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão, Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização, Catalão, 2018.  
Bibliografia. Apêndice.  
Inclui gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Problema de Carregamento em Contêineres. 2. Restrições Práticas. 3. Programação Linear Inteira. 4. Programação por Restrições. 5. Método Exato. I. Queiroz, Thiago Alves de, orient. II. Título.

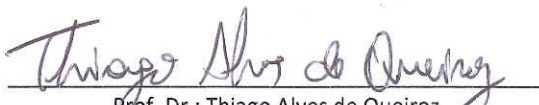
CDU 658.5

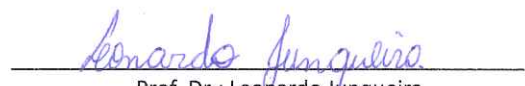


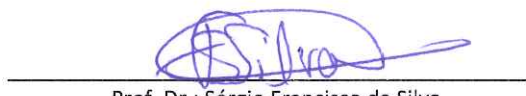
### Ata de Defesa Pública – Dissertação de Mestrado

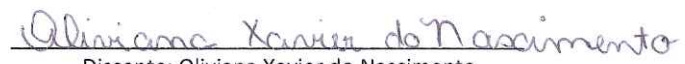
Aos vinte e sete dias do mês de novembro do ano de 2018, às 14h:00min, reuniram-se os componentes da banca examinadora, professores Dr. Thiago Alves de Queiroz (presidente e orientador), Dr. Leonardo Junqueira, e Dr. Sérgio Francisco da Silva para, em sessão pública realizada no Laboratório de Controle Operacional, Sala 03, Bloco J, da Regional Catalão (RC), da Universidade Federal de Goiás (UFG), procederem com a avaliação do trabalho intitulado: “*Problema de Carregamento em um Único Contêiner: Abordagem Exata e Restrições práticas*”, em nível de Mestrado, área de concentração *Modelagem e Otimização*, de autoria de Oliviana Xavier do Nascimento, discente do Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização (PPGMO) da UFG/RC. A sessão foi aberta pelo presidente da banca, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida a discente que, dentro do tempo regulamentar, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu a candidata, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação do trabalho. Os membros da banca consideraram o trabalho final: (  ) **Aprovado** ou (  ) **Reprovado**. Cumpridas as formalidades de pauta, às 16 h: 40 min a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, Thiago Alves de Queiroz, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pela discente e, posteriormente, será homologada pelo Colegiado do PPGMO.

Catalão-GO, 27 de novembro de 2018.

  
Prof. Dr.: Thiago Alves de Queiroz  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e  
Otimização, UFG/RC.  
(Presidente da Banca)

  
Prof. Dr.: Leonardo Junqueira  
Departamento de Engenharia de Produção, Escola  
Politécnica, Universidade de São Paulo.

  
Prof. Dr.: Sérgio Francisco da Silva  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e  
Otimização, UFG/RC.

  
Discente: Oliviana Xavier do Nascimento  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e  
Otimização, UFG/RC.



*À minha mãe, minha irmã, meus avós e à Emily, com carinho.*



---

# Agradecimentos

---

À Deus.

À minha família, em especial à minha mãe, à minha avó, à minha irmã e à minha tia Eliana pela confiança e pelo apoio em todos os sentidos.

Ao meu orientador, professor Thiago Alves de Queiroz, pelos incentivos, conselhos, pela orientação, presença, paciência e por toda ajuda.

Aos meus professores da graduação e do mestrado pelos ensinamentos.

À Emily, minha sobrinha, pelo carinho, pela admiração, pelos abraços e por trazer uma leveza à minha vida que foi essencial para renovar minhas energias em diversos momentos.

Aos amigos, em especial, à Joice e à Nayara Macedo, que dividiram casa comigo do início ao fim do mestrado, fazendo parte dos meus dias e convivendo comigo nos meus melhores e nos meus piores momentos e à Amanda, à Nayara Felício, à Naiane Dias e à Gislene Fonseca, por terem sido companhia, ouvidos, colo, abraços e abrigo em diversos momentos durante essa trajetória.

À Liliane, à Lorrane Cristina, à Kamyla, à Jéssica, à Luciana, ao Vinícius Loti e ao Ricardo que, por fazerem parte do mesmo laboratório de pesquisa, acabaram se tornando meus amigos e pessoas com as quais pude conversar bastante sobre este trabalho e sobre outras coisas também.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que, de alguma forma, contribuíram para o meu desenvolvimento acadêmico e pessoal nessa etapa, o meu muito obrigada.



*“Todo começo é grande,  
está numa altura acima de nós,  
e só se a gente continuar,  
se persistirmos no caminho,  
é que o superamos.”*  
*João Anzanello Carrascoza*



# RESUMO

XAVIER DO NASCIMENTO, OLIVIANA. *Problema de Carregamento em um Único Contêiner: Abordagem Exata e Restrições práticas*. 2018. 142 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem e Otimização) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

Este trabalho apresenta uma abordagem para resolver o Problema de Carregamento em um único Contêiner. O objetivo deste problema é decidir quais itens devem ser carregados dentro do contêiner visando maximizar o valor do empacotamento. A abordagem integra modelos de programação inteira e programação por restrições dentro de um escopo iterativo. Além disso, consideram-se treze restrições práticas dentro do problema. Essas restrições são para assegurar o carregamento completo de itens de um mesmo cliente, que itens conflitantes não sejam empacotados no mesmo contêiner, a satisfação das condições de prioridade, a estabilidade vertical e horizontal da carga, a satisfação das condições de fragilidade dos itens, respeitar a ordem de entrega associada aos itens, assegurar o balanceamento da carga, que o empacotamento resultante possa ser separado por meio de cortes que vão de uma extremidade a outra do contêiner sem que itens sejam fragmentados no processo, o carregamento manual, o agrupamento e a separação de itens no contêiner, e que os itens possam ser empacotados em diferentes orientações. Formulações matemáticas são desenvolvidas para cada uma delas. As formulações consistem na principal contribuição que essa pesquisa traz, uma vez que há uma lacuna na literatura com relação a trabalhos que trazem formulações para restrições práticas do problema estudado. Outras contribuições são a integração de modelos de programação inteira e programação por restrições, a apresentação de uma nova relaxação de programação inteira para o problema, um corte e restrições para a redução de simetrias. Por fim, instâncias da literatura são resolvidas. Os resultados mostraram que as maiores perdas de volume foram observadas quando se considerou as restrições de carregamento completo, enquanto que as menores perdas de volume foram observadas quando se considerou a restrição de agrupamento. Os maiores aumentos no tempo computacional foram observados quando se considerou a restrição de estabilidade vertical. Os resultados também mostraram que a nova relaxação proposta, as restrições para redução de simetrias e o corte trazem contribuições no que diz respeito ao tempo computacional e à quantidade de instâncias resolvidas na otimalidade.

**Palavras-chaves:** Problema de Carregamento em Contêineres, Restrições Práticas, Programação Linear Inteira, Programação por Restrições, Método Exato.



# ABSTRACT

XAVIER DO NASCIMENTO, OLIVIANA. *Single Container Loading Problem: Exact Approach and Practical Constraints*. 2018. 142 f. Master Thesis in Modelling and Optimization – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

This work presents an approach to solve the single container loading problem. The goal is to decide which items should be loaded inside the container in order to maximize the packed value. The approach is divided into two steps. The approach integrates integer programming and constraint programming models within an iterative scope. In addition, thirteen practical constraints are considered. These constraints are used to ensure complete shipment of items from the same customer, separation of conflicting items, priority conditions, vertical and horizontal cargo stability, items' fragility, multi-drop situations, load balancing, that the resulting packing can be separated by cuts that go from one side to the other of the container without items being fragmented during the cutting, manual loading, separation of different customer's items within the container, grouping of items and that items can be packed in different orientations. Mathematical formulations are developed for each one of them. The formulations are the main contribution of this research since there is a gap in the literature with respect to works that present mathematical formulations to practical constraints in the studied problem. Other contributions are the integration of integer programming and constraint programming models, the presentation of a new relaxation of integer programming to the problem, a new cut, and constraints for the reduction of symmetries. Instances from the literature are solved. The results showed that the largest losses of container's volume are for the complete shipment constraint, while the smallest losses of container's volume are for the grouping of items. The largest runtimes happen for the cargo vertical stability. The results also showed that the proposed relaxation, the constraints for symmetries breaking and the cut bring contributions with respect to the computational time and the number of instances solved to optimality.

**Keywords:** Container Loading Problem, Practical Constraints, Integer Linear Programming, Constraint Programming, Exact Method.



---

# LISTA DE FIGURAS

---

Figura 2.1 – Porcentagem dos artigos da Tabela 2.1 conforme o tipo de abordagem. . . . .	39
Figura 2.2 – Quantidade de trabalhos em (%) da Tabela 2.2 por restrição prática. . . . .	47
Figura 3.1 – Representação do empacotamento de um item conforme o sistema de coordenadas adotado. . . . .	50
Figura 3.2 – Fluxograma da abordagem exata de dois níveis para o PCUC. . . . .	51
Figura 3.3 – Exemplo de um empacotamento que satisfaz a restrição (3.17) para um ponto $(s, t)$ . . . . .	56
Figura 4.1 – Área de contato entre a base do item $j$ com o topo de $i$ . . . . .	64
Figura 4.2 – Área de contato entre a face traseira do item $j$ com a face frontal do item $i$ em (a) e área de contato entre a face esquerda do item $j$ com a face direita do item $i$ em (b). . . . .	66
Figura 4.3 – Exemplo de empacotamento sem apoio das bases e das faces traseira e esquerda das caixas em (a) e com apoio em (b). . . . .	66
Figura 4.4 – Ilustração da região proibida para o item $j$ . . . . .	69
Figura 4.5 – Exemplo com a restrição de ordem de entrega com $X_j + l_j > X_i$ em (a) e $X_j \geq X_i + l_i$ em (b). . . . .	70
Figura 4.6 – Ilustração do envelope para a restrição de balanceamento de carga. . . . .	71
Figura 4.7 – Exemplo de empacotamento guilhotinado e não guilhotinado. . . . .	72
Figura 4.8 – Ilustração do conceito de estágios de corte em empacotamentos tridimensionais. . . . .	73
Figura 4.9 – Ilustração do comportamento das restrições (4.30) para cortes perpendiculares ao eixo $z$ . . . . .	75
Figura 4.10 – Ilustração do comportamento das restrições (4.31) para cortes perpendiculares ao eixo $y$ . . . . .	76
Figura 4.11 – Projeção de sub-blocos $B_{2n}$ sobre o plano $xy$ e posições possíveis para empacotar os itens $i$ e $j$ em um dos sub-blocos. . . . .	77
Figura 4.12 – Ilustração da restrição de carregamento manual conforme Ramos, Oliveira e Lopes (2016). . . . .	78

Figura 4.13 – Exemplos de empacotamento gerados a partir de diferentes possibilidades da restrição de carregamento manual, com $T_{braço} = 1$ . . . . .	80
Figura 4.14 – Empacotamento que não considera a restrição de separação. . . . .	81
Figura 4.15 – Empacotamento que considera a restrição de separação. . . . .	81
Figura 4.16 – Orientação permitidas para um mesmo item. . . . .	83
Figura 5.1 – Volume médio empacotado no contêiner em cada experimento para cada classe de instância. . . . .	100
Figura 5.2 – Soluções para a instância da Classe 5 descrita na Tabela 5.12, para os casos sem restrições práticas, com carregamento completo, prioridade, fragilidade e estabilidade vertical e horizontal. . . . .	105
Figura 5.3 – Soluções para a instância da Classe 5 descrita na Tabela 5.12, para ordem de entrega, balanceamento de carga, carregamento manual, corte guilhotinado e agrupamento. . . . .	107
Figura 5.4 – Solução para a instância da Classe 5 descrita na Tabela 5.12, para a restrição de grafo de conflitos. . . . .	107
Figura 5.5 – Solução para a instância da Classe 5 descrita na Tabela 5.12, para a restrição de limite de peso. . . . .	108
Figura 5.6 – Solução para a instância da Classe 5 descrita na Tabela 5.12, para a restrição de separação. . . . .	108
Figura 5.7 – Solução para a instância da Classe 5 descrita na Tabela 5.12, para o caso com múltiplas orientações. . . . .	109

---

# LISTA DE TABELAS

---

Tabela 2.1 – Métodos de solução utilizados em 76 trabalhos sobre problemas de carregamento em contêineres. . . . .	38
Tabela 2.2 – Restrições práticas abordadas em 76 trabalhos da literatura. . . . .	46
Tabela 4.1 – Exemplo ilustrativo para as restrições de prioridade em (4.3). . . . .	61
Tabela 4.2 – Exemplo utilizado para ilustrar a restrição de carregamento manual. . . . .	80
Tabela 5.1 – Etapas consideradas nos experimentos realizados. . . . .	91
Tabela 5.2 – Informações sobre as classes de instâncias. . . . .	92
Tabela 5.3 – Comparação média entre as abordagens nos Experimentos 1, 2 e 3. . . . .	93
Tabela 5.4 – Resultados para os Experimentos 1, 2 e 3 com 10 tipos itens. . . . .	94
Tabela 5.5 – Resultados para os Experimentos 1, 2 e 3 para instâncias com 5 tipos itens. . . . .	95
Tabela 5.6 – Média dos resultados com restrições práticas por grupos de instâncias (Parte 1) . . . . .	97
Tabela 5.7 – Média dos resultados com restrições práticas por grupos de instâncias (Parte 2) . . . . .	98
Tabela 5.8 – Porcentagem de instâncias com solução ótima e limitante superior. . . . .	99
Tabela 5.9 – <i>Ranking</i> das restrições em relação a perda de volume para a Classe 5. . . . .	101
Tabela 5.10 – Tempo médio gasto em cada experimento. . . . .	102
Tabela 5.11 – Resultados dos testes estatísticos considerando o Experimento 3 como referência. . . . .	103
Tabela 5.12 – Dados da instância da Classe 5 usada para mostrar as soluções. . . . .	104
Tabela A.1 – Lista das tabelas com os resultados para cada restrição prática. . . . .	125
Tabela A.2 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC sem restrições práticas. . . . .	126
Tabela A.3 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de carregamento completo. . . . .	127
Tabela A.4 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de grafo de conflitos. . . . .	128
Tabela A.5 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de prioridade. . . . .	129

Tabela A.6 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de limite de peso. . . . .	130
Tabela A.7 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de estabilidade vertical. . . . .	131
Tabela A.8 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de estabilidade vertical e horizontal. . . . .	132
Tabela A.9 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de fragilidade. . . . .	133
Tabela A.10 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de fragilidade por pressão. . . . .	134
Tabela A.11 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de ordem de entrega. . . . .	135
Tabela A.12 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de balanceamento de carga. . . . .	136
Tabela A.13 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de corte guilhotinado para o caso com 3 estágios. . . . .	137
Tabela A.14 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de corte guilhotinado para o caso com 4 estágios. . . . .	138
Tabela A.15 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de carregamento manual. . . . .	139
Tabela A.16 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de separação. . . . .	140
Tabela A.17 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de agrupamento. . . . .	141
Tabela A.18 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de orientação. . . . .	142

---

# SUMÁRIO

---

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>21</b>
1.1	Objetivos e Justificativas	26
1.2	Metodologia	27
1.3	Organização do Trabalho	28
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b>	<b>31</b>
2.1	Trabalhos sem Restrições Práticas	31
2.2	Trabalhos com Restrições Práticas	39
<b>3</b>	<b>ABORDAGEM EM DOIS NÍVEIS PARA O PCUC</b>	<b>49</b>
3.1	Visão Geral do Problema e da Abordagem	49
3.2	Primeiro Nível: Resolvendo o 1PM	51
3.3	Segundo Nível: Resolvendo o 3PEO	53
3.3.1	Relaxação para o 3PEO	53
3.3.2	Modelo de programação por restrições para o 3PEO	56
3.3.3	Cortes	57
3.4	Resolução dos Modelos Matemáticos	58
<b>4</b>	<b>RESTRICÇÕES PRÁTICAS</b>	<b>59</b>
4.1	Carregamento Completo	60
4.2	Grafo de Conflitos	60
4.3	Prioridade	60
4.4	Limite de Peso	63
4.5	Estabilidade Vertical e Horizontal	63
4.6	Fragilidade	67
4.6.1	Limite no número de caixas	67
4.6.2	Pressão máxima admissível	68
4.7	Ordem de Entrega	68
4.8	Balanceamento de Carga	71
4.9	Corte Guilhotinado	72
4.9.1	3 estágios de corte	74
4.9.2	4 estágios de corte	75
4.10	Carregamento Manual	77

4.11	Separação	80
4.12	Agrupamento	81
4.13	Orientação	82
4.13.1	Múltiplas orientações na relaxação para o 3PEO	84
4.13.2	Múltiplas orientações para o modelo de PR	87
5	EXPERIMENTOS E RESULTADOS	89
5.1	Resultados para os Experimentos 1, 2 e 3	93
5.2	Resultados com as Restrições Práticas	96
5.2.1	Otimalidade	96
5.2.2	Volume empacotado	99
5.2.3	Tempo de resolução	101
5.2.4	Teste estatístico	102
5.3	Exemplo de Soluções	104
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	111
	REFERÊNCIAS	115
APÊNDICE A	TABELAS COM OS RESULTADOS DE CADA EXPERIMENTO	125

## Capítulo 1

---

# INTRODUÇÃO

---

No contexto de transporte e carregamento de mercadorias em recipientes, como contêineres e baús de caminhões, muitos são os processos ou cenários que podem ser explorados a fim de serem melhorados em um ou mais aspectos. Alguns exemplos são os processos que envolvem tomadas de decisões relacionadas a como arranjar as mercadorias dentro dos recipientes. Em geral, busca-se, nesses processos, arranjar os itens dentro de um ou mais recipientes a fim alcançar algum objetivo, que pode ser minimizar o número de contêineres utilizados, maximizar o valor ou volume carregado considerando apenas um contêiner e minimizar a altura, a largura ou comprimento do contêiner requerido para empacotar os itens (WÄSCHER; HAUSSNER; SCHUMANN, 2007; BORTFELDT; WÄSCHER, 2013)

O caso em que se busca maximizar o valor ou volume carregado em um único contêiner é definido na literatura como Problema de Carregamento em um Único Contêiner (PCUC). Este problema busca, além de maximizar o valor ou volume carregado, garantir que os itens escolhidos para compor o carregamento possam ser arranjados sem sobreposição e inteiramente dentro do contêiner, isto é, nenhum item pode ocupar o volume total ou parcial que é ocupado por outro item no empacotamento e ter alguma parte sua para além das dimensões do contêiner (SCHEITHAUER, 2017). Além da não sobreposição de itens e extrapolação das dimensões do contêiner, há outros aspectos que foram discutidos em Bischoff e Ratcliff (1995) e que podem ser incorporados ao problema com o intuito de tornar a solução encontrada mais coerente com as demandas dos contextos de aplicação do problema. Tais aspectos são conhecidos na literatura como restrições práticas e estão descritos a seguir:

- **Grafo de conflitos:** garante que os itens que possuem conflitos entre si (por exemplo, alimentos e produtos de limpeza) não sejam carregados juntos no contêiner.
- **Carregamento completo de itens de um mesmo cliente:** garante que se um item de um cliente for levado no contêiner, os demais itens do cliente também devem ser carregados. Este tipo de restrição é importante em situações relacionadas ao transporte

de máquinas cujas peças são carregadas em caixas diferentes. Neste caso, espera-se que todas as caixas que contêm as peças de uma mesma máquina sejam carregadas no mesmo contêiner.

- **Prioridade:** garante que os itens de maior prioridade estejam presentes no carregamento.
- **Ordem de entrega ou múltiplos destinos:** garante que itens dos clientes que são visitados primeiro devem ser retirados do contêiner sem que os itens dos clientes que serão visitados depois precisem ser remanejados.
- **Estabilidade:** divide-se em estabilidade vertical e estabilidade horizontal. A estabilidade vertical, também denominada estabilidade estática, garante que as caixas não se desloquem estando a carga em condições de equilíbrio, isto é, que elas suportem a ação da gravidade estando a carga parada, ao passo que a estabilidade horizontal, também denominada estabilidade dinâmica, garante que as caixas não se desloquem estando a carga em movimento, isto é, que as caixas resistam à ação da inércia.
- **Fragilidade:** garante que as caixas não sejam danificadas por excesso de peso sobre elas, limitando o peso ou número de outras caixas que podem ficar diretamente sobre elas.
- **Limite de peso:** garante que o peso do empacotamento resultante não ultrapasse o peso máximo suportado pelo contêiner.
- **Balanceamento de carga:** preocupa-se com a distribuição de peso dentro do contêiner. Para isso, esta restrição impõe que o centro de gravidade do empacotamento esteja dentro de uma região segura.
- **Separação de itens:** garante que itens que não podem ser empacotados próximos fiquem a uma certa distância mínima uns dos outros.
- **Agrupamento:** garante que itens de um mesmo grupo sejam posicionados em locais próximos dentro do contêiner.
- **Complexidade do padrão de empacotamento:** preocupa-se com a manipulação do empacotamento resultante. A restrição mais comum é a de corte guilhotinado. Esta restrição garante que, para uma sequência de cortes efetuados por uma guilhotina, o empacotamento poderá ser separado sem que nenhuma caixa seja fragmentada em duas ou mais partes. Outras restrições relacionadas à complexidade do padrão de empacotamento se preocupam com a forma com que o empacotamento será descarregado. Se o descarregamento for realizado por operadores humanos, todas as caixas precisam ser alcançadas pelos braços dos descarregadores. A situação muda um

pouco se o descarregamento for realizado usando robôs. Neste caso, pressupõe-se que estes tenham um alcance maior do que os operadores humanos.

- **Orientação:** permite que as caixas possam ser rotacionadas no momento do empacotamento dentro do contêiner. Pode-se permitir que as caixas tenham até seis orientações diferentes.

Quanto a complexidade, o PCUC é um problema NP-difícil (GAREY; JOHNSON, 1979). Isso significa que, dependendo da quantidade de itens e do tamanho do contêiner, ainda pode ser difícil alcançar a solução ótima do problema em tempo viável. Quando se fala em resolver o PCUC, algumas técnicas de otimização podem ser usadas. Uma delas é a programação linear inteira (PI). Em geral, essa técnica consiste no desenvolvimento de modelos matemáticos lineares para o problema que se deseja resolver e na aplicação de métodos baseados em busca e ramificação em árvore, como, por exemplo, os métodos *branch-and-bound* e *branch-and-cut* para resolver os modelos.

Uma característica da PI, que a diferencia da programação linear (PL), é que as variáveis de decisão presentes no modelo, responsáveis por armazenar as informações desconhecidas acerca do problema, só podem assumir valores inteiros (ou binários), enquanto que na PL, as variáveis de decisão podem assumir valores no conjunto dos reais (ARENALES *et al.*, 2007). Os modelos de PL e PI consideram uma função objetivo, que indica o objetivo que se deseja alcançar com a resolução do modelo, podendo ser de maximizar ou minimizar, além de um conjunto de restrições relacionadas ao problema que está sendo resolvido. No caso do PCUC, a PI pode ser usada para representar o problema através de modelos de programação linear inteira e, a partir da resolução desses modelos, pode-se encontrar o melhor subconjunto de itens a ser carregado no contêiner.

Convém salientar que, relacionado ao PCUC, há um problema de decisão, que busca determinar se existem coordenadas onde os itens possam ser empacotados de forma ortogonal às paredes do contêiner e de forma que não ocorra sobreposição de itens. Logo, mais do que determinar um subconjunto de itens de máximo valor, torna-se necessário garantir que os itens do subconjunto selecionado caibam todos sem sobreposição no contêiner, o que sugere resolver o Problema de Empacotamento Ortogonal Tridimensional para os itens que se deseja empacotar no contêiner (3PEO). O 3PEO recebe como entrada os itens que se deseja empacotar e busca por coordenadas para posicionar os itens de forma que eles não se sobreponham e fiquem inteiramente contidos dentro do contêiner. Além disso, os itens são empacotados de forma ortogonal as paredes do contêiner (MESYAGUTOV; SCHEITHAUER; BELOV, 2012).

Para problemas de decisão, como o 3PEO, uma técnica de resolução que pode ser utilizada, além da PI, é a programação por restrições (PR). Essa última técnica se caracteriza por apresentar modelos compostos por restrições, de forma que a sua resolução envolve

obter informações dessas restrições a fim de efetuar reduções no domínio das variáveis de decisão do problema e, com isso, diminuir o espaço de combinações de valores possíveis para as variáveis. O foco da PR, ao contrário da PI, não é encontrar a melhor atribuição de valores para as variáveis do problema (isto é, a melhor solução) e sim encontrar uma atribuição que satisfaça todas as restrições.

Além de técnicas de redução de domínio, a PR pode empregar estratégias construtivas para alcançar uma solução do problema. Nestas técnicas, a ideia é escolher, heurística-mente, a cada passo, uma variável de decisão e atribuir a ela um valor de seu domínio, até que a solução seja construída por meio da atribuição de valores para todas as variáveis de decisão (TAVARES, 2000). À medida que as variáveis de decisão vão recebendo valores, as técnicas de avaliação das restrições e redução de domínio vão sendo empregadas para tornar tais domínios cada vez menores. Com isso, fica mais fácil provar a infactibilidade das soluções que estão sendo construídas, isto é, provar que as atribuições de valores que já foram feitas vão causar a impossibilidade de se atribuir valores dentro do domínio de uma ou mais variáveis (MESYAGUTOV; SCHEITHAUER; BELOV, 2012).

Diante disso, este trabalho busca, primeiramente, apresentar uma abordagem exata para resolver o PCUC, isto é, que garante uma solução ótima do problema e que, além disso, combine PI e PR. Em seguida, busca-se mostrar como modelar e incorporar na abordagem restrições práticas, a saber: grafo de conflitos, carregamento completo de itens de um mesmo cliente, prioridade, limite de peso, estabilidade vertical e horizontal, fragilidade, ordem de entrega, balanceamento de carga, corte guilhotinado, carregamento manual, agrupamento, separação e orientação.

A abordagem proposta busca resolver o problema em duas etapas. A primeira etapa consiste em selecionar um subconjunto de itens de valor máximo por meio da resolução da relaxação unidimensional do PCUC, isto é, por meio da desconsideração das questões geométricas do problema, que visam determinar os pontos onde os itens são empacotados no contêiner. Essa relaxação é modelada e resolvida usando PI. Na segunda etapa, o objetivo é verificar se o subconjunto de itens selecionado pode ser empacotado sem sobreposição e de forma que os itens fiquem contidos inteiramente dentro do contêiner. Contudo, na abordagem, a verificação é dividida em duas subetapas. Primeiro, resolve-se outra relaxação de PI. Esta relaxação tem por objetivo detectar, mais rapidamente, subconjuntos inviáveis quanto a restrição de não sobreposição. A segunda subetapa consiste na resolução de um modelo de PR e só é executada no caso da primeira subetapa falhar. Caso uma das duas subetapas não aprove o subconjunto selecionado, um corte é inserido na relaxação unidimensional indicando que um subconjunto diferente precisa ser selecionado. O novo subconjunto é submetido novamente à etapa de verificação. O procedimento é interrompido quando um subconjunto viável para o empacotamento é encontrado ao fim da segunda etapa. Os modelos que compõem a abordagem são resolvidos usando o pacote IBM ILOG CPLEX Optimization

Studio na versão 12.8.

Durante o desenvolvimento da abordagem, verificou-se que, dependendo da instância do problema que se está resolvendo, a quantidade de subconjuntos para a relaxação unidimensional do PCUC é grande e que, dentre esses subconjuntos, há muitos subconjuntos que são simétricos, isto é, contendo exatamente a mesma quantidade de itens de um mesmo tipo. Se um subconjunto de itens não pode ser empacotado no contêiner, um outro subconjunto simétrico a ele também não poderá. Logo, evitar que a abordagem selecione subconjuntos simétricos aos já provados inviáveis colabora para que a abordagem não fique estacionada em um mesmo valor de limitante e alcance mais rápido uma solução ótima do problema.

Tendo em vista que a grande quantidade de simetrias pode atrapalhar o desempenho da abordagem desenvolvida para o problema, preocupou-se em desenvolver neste trabalho restrições para fazer com que, ao se resolver a relaxação unidimensional do PCUC, não se tenha no espaço de combinações possíveis para o problema, uma quantidade muito grande de subconjuntos simétricos. Com isso, consegue-se alcançar a solução ótima visitando muito menos subconjuntos, isto é, fazendo menos chamadas a relaxação unidimensional, bem como a relaxação da etapa de verificação da viabilidade e ao modelo de programação por restrições.

O tipo de abordagem desenvolvida nesta pesquisa para resolver o PCUC foi também considerada em outros trabalhos, como, por exemplo, em [Baldacci e Boschetti \(2007\)](#) e [Queiroz \*et al.\* \(2017\)](#) para resolver o problema da mochila bidimensional. Contudo, [Baldacci e Boschetti \(2007\)](#) e [Queiroz \*et al.\* \(2017\)](#) não utilizaram a relaxação de PI que compõe a primeira subetapa da etapa de verificação da viabilidade de se empacotar o subconjunto. No que diz respeito a essa relaxação não foram encontrados na literatura trabalhos que fizeram uso ou menção dela. Assim, o seu uso na abordagem para resolver o PCUC se configura também como uma das contribuições que este trabalho traz. A ideia dessa relaxação é fazer com que a etapa de verificação da viabilidade de se empacotar subconjuntos ocorra de forma mais rápida.

Com relação às restrições práticas, poucos são os trabalhos que trazem formulações matemáticas para as mesmas. Como exemplo, tem-se [Junqueira, Morabito e Yamashita \(2012\)](#), que trazem formulações para tratar a estabilidade vertical e horizontal no carregamento de contêineres e questões relativas a fragilidade dos itens; [Queiroz e Miyazawa \(2013\)](#), que trazem formulações para tratar ordem de entrega e balanceamento de carga no problema da mochila bidimensional; e, [Vancroonenburg \*et al.\* \(2014\)](#) que trazem formulações para tratar prioridade no carregamento de aeronaves.

A maioria dos trabalhos que abordaram restrições práticas descrevem como elas foram tratadas, mas abrem mão de apresentar formulações matemáticas para descrevê-las. Isso se justifica pelo fato de muitas dessas restrições aparecerem em trabalhos que fizeram

o uso de heurísticas para resolver o problema. Como exemplo, pode-se citar o trabalho de Eley (2002), que utilizou uma heurística de posicionamento baseada em blocos para preencher o contêiner, considerando a condição de orientação. Eley (2002) menciona que são testadas todas as combinações de como posicionar um item nos espaços vazios, levando em consideração todas as orientações permitidas para o respectivo item, porém, não são apresentadas restrições estruturadas em formulações matemáticas para que o empacotamento dos itens respeitem as orientações permitidas. Nesse sentido, o presente trabalho traz também, como contribuição, formulações matemáticas para várias restrições reais discutidas em Bischoff e Ratcliff (1995).

Por fim, experimentos computacionais são realizados sobre instâncias da literatura. Eles têm por objetivo comprovar a viabilidade da abordagem e verificar o que acontece com o volume empacotado e com o tempo de resolução quando as restrições práticas tratadas são consideradas na abordagem proposta, sendo considerada uma restrição por vez no problema.

## 1.1 Objetivos e Justificativas

Em consonância com o exposto inicialmente, o objetivo geral deste trabalho é desenvolver uma abordagem exata para resolver o PCUC, *a priori* sem considerar restrições práticas e, em seguida, mostrar como tratar, na abordagem apresentada, as restrições de carregamento completo, grafo de conflitos, prioridade, limite de peso, estabilidade vertical e horizontal, fragilidade, ordem de entrega, balanceamento de carga, corte guilhotinado, carregamento manual, agrupamento e separação de itens, e orientação. A partir do objetivo geral, definem-se os seguintes objetivos específicos:

- Investigar e desenvolver uma abordagem que usa modelos de programação linear inteira e programação por restrições para resolver o PCUC;
- Mostrar como tratar, dentro da abordagem apresentada, diferentes restrições práticas que surgem de situações reais;
- Implementar e realizar testes computacionais nos quais a abordagem apresentada será utilizada para resolver instâncias da literatura do problema;
- Mensurar o impacto da inserção de cada restrição prática no que diz respeito ao volume empacotado e tempo de resolução das instâncias.

Um dos motivos para a realização desta pesquisa consiste no fato do PCUC ser um problema NP-Difícil (GAREY; JOHNSON, 1979), de forma que não se espera encontrar uma solução ótima para o problema em tempo polinomial a menos que  $P = NP$ . Um segundo

motivo está relacionado ao fato do PCUC ser um problema prático, que aparece em contextos reais importantes, como empresas que lidam com o transporte de carga em contêineres, caminhões, navios, trens e aviões (BORTFELDT; WÄSCHER, 2013). Outro motivo está relacionado com as contribuições que esta pesquisa traz para a literatura. Nesse sentido, cabe destacar as seguintes contribuições:

- Integração de modelos de PI e PR;
- Apresentação de uma relaxação para o problema de verificar a viabilidade de empacotamentos tridimensionais, o qual aparece como subproblema no PCUC, em outros problemas de empacotamento e também em problemas de roteamento de veículos com restrições de carregamento;
- Desenvolvimento de restrições de simetria e de um corte para o problema.
- Desenvolvimento de formulações matemáticas para restrições práticas relacionadas ao PCUC;
- Estudo sobre o impacto destas restrições na resolução de casos particulares do problema.

Com relação a relaxação, cabe destacar que não foram encontrados trabalhos relacionados, o que a posiciona como uma novidade para a literatura. Ao mesmo tempo, existe uma carência de formulações matemáticas para as restrições práticas que surgem em problemas de corte e empacotamento. Logo, o desenvolvimento de formulações para tais restrições se configura como uma contribuição importante, bem como a análise do impacto da inserção de tais restrições na abordagem para o PCUC. Com relação à integração de modelos de PI e PR, não se encontrou trabalhos que fizessem tal integração para resolver problemas de carregamento em contêineres.

## 1.2 Metodologia

De acordo com Gil (2009), as pesquisas podem ser classificadas com base em seus objetivos, podendo ser exploratórias, descritivas e explicativas. Com base nos procedimentos técnicos utilizados, elas podem ser do tipo bibliográfica, documental, experimental, levantamento de dados, estudo de campo, estudo de caso e pesquisa-ação. Forte (2004) as classificam ainda em relação à natureza das variáveis utilizadas, podendo ser quantitativas e qualitativas. Com base nesses autores, esta pesquisa é classificada da seguinte maneira:

- Com base nos objetivos, a pesquisa é descritiva, pois estabelece relações entre as variáveis, buscando descrevê-las dentro do contexto estudado (GIL, 2009). Em outras

palavras, a pesquisa toma como variáveis a abordagem para o problema, as restrições práticas, as respostas obtidas com os experimentos realizados na presença e na ausência de restrições práticas, sendo elas tempo gasto na resolução, volume empacotado, quantidade de instâncias do problema resolvidas na otimalidade, e, por fim, todas essas variáveis são descritas ao longo do trabalho a fim de alcançar os objetivos pretendidos.

- Com base nas variáveis utilizadas, a pesquisa é quantitativa, pois utiliza números para analisar as hipóteses levantadas e estabelecer conclusões sobre elas (DALFOVO; LANA; SILVEIRA, 2008).
- Com base nos procedimentos técnicos utilizados, a pesquisa é bibliográfica, pois é desenvolvida com base em materiais decorrentes de pesquisas anteriores, como livros, artigos, teses, entre outros (SEVERINO, 2007). Ela também é considerada experimental, pois experimentos computacionais são realizados a fim de alcançar alguns dos objetivos do trabalho.

Com isso, desenvolveu-se uma abordagem exata de dois níveis que utiliza modelos de programação linear inteira e programação por restrições. Desenvolveu-se também formulações para restrições que tratam de aspectos práticos do PCUC a fim de tornar a modelagem do problema mais coerente com o que ocorre na prática do carregamento de mercadorias. A abordagem e as restrições foram codificadas em linguagem de programação C++. Utilizou-se os algoritmos padrão do IBM ILOG CPLEX, para programação linear inteira e programação por restrições, para resolver os modelos que compõem a abordagem. Em seguida, realizaram-se experimentos computacionais, em um primeiro momento, sem restrições práticas, e depois considerando cada restrição individualmente. No caso das restrições de estabilidade vertical e estabilidade horizontal, realizaram-se testes considerando somente a restrição de estabilidade vertical e considerando a estabilidade vertical e horizontal ao mesmo tempo. Logo, as restrições foram testadas individualmente na abordagem com o fim de medir o impacto de cada uma delas individualmente.

Na análise dos resultados, buscou-se observar a quantidade de instâncias para as quais foi possível alcançar uma solução ótima e a quantidade de instâncias para as quais foi possível encontrar somente um limitante superior; o tempo médio e o volume médio empacotado para cada experimento. Com essas medidas foi possível avaliar o desempenho da abordagem e o impacto da inserção das restrições práticas no problema.

### 1.3 Organização do Trabalho

O trabalho está organizado em seis capítulos, em que o primeiro capítulo trouxe uma introdução sobre o problema tratado, isto é, o PCUC, assim como uma visão geral da abor-

dagem exata para lidar com ele e das restrições a serem modeladas. Foram apresentados também os objetivos, as justificativas e a metodologia empregada no trabalho. Os demais capítulos:

- **Capítulo 2:** traz a revisão sobre trabalhos relacionados ao PCUC e suas restrições práticas;
- **Capítulo 3:** apresenta o funcionamento detalhado da abordagem e os modelos que a compõem;
- **Capítulo 4:** apresenta as restrições e as suas formulações para o carregamento completo, conflito entre itens, questões de prioridade, limite de peso, estabilidade de carga, fragilidade, ordem de entrega, balanceamento de carga, corte guilhotinado, carregamento manual, separação e agrupamento de itens, e questões de orientação;
- **Capítulo 5:** apresenta os detalhes dos experimentos realizados a fim de alcançar os objetivos do trabalho, os resultados alcançados e a discussão sobre os mesmos;
- **Capítulo 6:** apresenta as considerações finais do trabalho, com indicativo de pesquisas futuras a serem realizadas.



## Capítulo 2

---

# REVISÃO DA LITERATURA

---

Este capítulo traz a revisão da literatura sobre métodos já empregados na resolução do problema de carregamento de contêineres no seu aspecto natural, sem considerar restrições práticas. Depois, trabalhos envolvendo o mesmo problema, mas com restrições práticas, são revisados, buscando mostrar de forma breve o que a literatura dispõe sobre o tema.

### 2.1 Trabalhos sem Restrições Práticas

Muitos dos métodos existentes para resolver problemas de carregamento em contêineres trabalham com dois componentes principais. De um lado, tem-se uma estratégia para posicionar os itens dentro do contêiner e, dessa forma, gerar empacotamentos a partir do conjunto de itens disponível. De outro lado, tem-se um método responsável por avaliar os empacotamentos gerados e ditar regras para perturbar tais empacotamentos como, por exemplo, reposicionar, retirar e/ou acrescentar itens, buscando, com tal “perturbação”, melhorar o empacotamento a cada passo e, assim, tentar alcançar a melhor solução possível para o problema.

Com relação às estratégias de posicionamento dos itens no contêiner, pode-se mencionar as técnicas de construção de camadas ou blocos, que são as chamadas heurísticas construtivas. Nessas estratégias, os itens são organizados em blocos ou camadas e depois as camadas ou blocos de itens vão sendo empacotados no contêiner conforme uma regra de preenchimento, que pode ser do fundo do contêiner para a frente ou do chão para o topo, entre outras. Como exemplo de trabalhos que utilizaram a técnica de construção de camadas, tem-se [George e Robinson \(1980\)](#), [Bischoff e Ratcliff \(1995\)](#), [Bortfeldt e Gehring \(2001\)](#), [Pisinger \(2002\)](#), [Ceschia, Schaerf e Stützle \(2013\)](#), [Ramos \*et al.\* \(2016\)](#) e [Sheng \*et al.\* \(2017\)](#). Como exemplos de trabalhos que utilizaram a técnica de construção de blocos, pode-se mencionar [Eley \(2002\)](#), [Zhang, Peng e Leung \(2012\)](#) e [Zhu \*et al.\* \(2012\)](#).

A abordagem de [George e Robinson \(1980\)](#), por exemplo, consistiu em identificar um

espaço vazio a ser preenchido no contêiner e, depois, aplicar a técnica de construção de camadas para preencher o espaço identificado. Optou-se por construir camadas contendo itens do mesmo tipo, que podem ser vistas como paredes ou pilhas de itens que tendem a ter largura e altura iguais às do contêiner e profundidade variável. Segundo [George e Robinson \(1980\)](#), a profundidade de uma camada é determinada pela profundidade do primeiro item posicionado na camada. Como nem sempre é possível ter itens com a mesma profundidade em uma camada, os autores adotaram alguns critérios para selecionar/priorizar os itens que fazem parte de uma determinada camada. Um desses critérios é escolher itens de tipos que aparecem com mais frequência na camada que está sendo construída. Outro critério adotado por [George e Robinson \(1980\)](#) consistiu em escolher itens de maior profundidade, justamente para se ter estes mais ao fundo nas camadas e itens de menor profundidade situados em posições mais à frente nas camadas. A intenção com esses critérios é construir camadas mais homogêneas, já que nem sempre é possível construir camadas com itens do mesmo tipo. Os autores aplicaram a abordagem para resolver casos reais de empacotamento de itens em contêineres, já que foram contratados como consultores por uma empresa do ramo. A abordagem retornou para os tomadores de decisão da empresa uma espécie de gráfico que indica a posição de empacotamento de cada pilha de itens.

[Pisinger \(2002\)](#), que também utilizou camadas, pontuou que, minimizando os espaços vazios entre os itens, não há necessidade de preenchê-los com espuma ou outros materiais e também contribui para a estabilidade do empacotamento. [Ramos et al. \(2016\)](#) utilizaram um processo iterativo para selecionar o tipo de item para compor a camada e o melhor espaço possível para empacotar a camada formada de itens do mesmo tipo.

[Eley \(2002\)](#) propôs construir blocos homogêneos, com itens do mesmo tipo. Segundo [Eley \(2002\)](#), blocos homogêneos são mais fáceis de serem organizados dentro do contêiner e isso corrobora para que o carregamento seja realizado de forma mais rápida. Além disso, [Eley \(2002\)](#) salientou que blocos formados por itens do mesmo tipo tornam mais difícil o deslizamento dos itens nas pilhas, o que de certa forma contribui para a estabilidade do carregamento. [Zhu et al. \(2012\)](#) identificaram características presentes nas abordagens que contribuem para a eficácia das estratégias de posicionamentos de itens. Os autores descobriram, por exemplo, que os tipos de blocos gerados, a representação do espaço livre e a função de avaliação do bloco contribuem significativamente para a eficácia da abordagem de solução. Eles descobriram também que a forma de buscar por blocos (construir os blocos) não impacta significativamente no desempenho da abordagem.

Com relação à métodos de otimização, alguns autores optaram por utilizar meta-heurísticas. Meta-heurísticas são estratégias de busca guiadas pelo objetivo que se deseja alcançar e, geralmente, são pouco dependentes do problema que está sendo resolvido ([RUSSELL; NORVIG, 2010](#)). Sobre meta-heurísticas, [Ramos et al. \(2016\)](#) reforçaram que elas são métodos que podem ser aplicados a vários tipos de problemas e que um dos objetivos princi-

pais é melhor explorar o espaço de busca e, assim, escapar de soluções ótimas locais. Como exemplos de meta-heurísticas, tem-se a busca tabu, o recozimento simulado e algoritmos bioinspirados, como os algoritmos genéticos, colônia de formigas e vagalumes, e enxame de partículas.

Nas estratégias que utilizaram algoritmos genéticos e suas variações, a população inicial, geralmente, envolve cromossomos com sequências de itens a serem empacotados. Para cada cromossomo (isto é, para cada sequência de itens), aplica-se a estratégia de posicionamento adotada (construção de blocos ou camadas) para arranjar os itens da sequência no contêiner. Depois, o empacotamento resultante é avaliado por meio de uma função de aptidão. Em Ramos *et al.* (2016), por exemplo, a função de aptidão levou em consideração três aspectos: o volume total carregado, a estabilidade estática e o balanceamento da carga.

Outros exemplos de abordagens que utilizaram algoritmos genéticos para tratar problemas de carregamento em contêineres podem ser encontrados nos trabalhos de Gehring e Bortfeldt (1997), Araújo e Pinheiro (2010), Gonçalves e Resende (2012), Zheng, Chien e Gen (2015), Huang, Hwang e Lu (2016) e Jamrus e Chien (2016). Em Zheng, Chien e Gen (2015), o problema resolvido por meio de um algoritmo genético de chaves aleatórias foi do tipo multiobjetivo. Os autores buscaram maximizar a utilização do contêiner e o valor do empacotamento. Para isso, eles buscaram por soluções não dominadas para construir a curva de Pareto. Assim, a melhora de um objetivo em um problema está condicionada a piora de outro, ou seja, a solução encontrada dificilmente atenderá os dois objetivos com o mesmo grau de satisfação, sendo, portanto, um meio termo para ambos (LOBATO, 2008). Em Gonçalves e Resende (2012) foi utilizado o algoritmo genético de chaves aleatórias viciadas com a ideia de empacotar os itens em espaços maximais.

Na abordagem de Bortfeldt (2012), utilizou-se, durante a busca, três componentes principais, sendo eles a solução corrente, uma lista de caixas ainda não empacotadas e uma lista de posições livres e permitidas para o empacotamento dessas caixas. No início da busca, a solução corrente é vazia, todas as caixas estão disponíveis para o empacotamento e as posições livres e permitidas são todas as posições factíveis para posicionar as caixas com relação ao canto inferior esquerdo traseiro. A ideia da busca é que a solução seja construída a cada passo, ou seja, uma caixa é empacotada e, então, as listas de caixas e posições livres são atualizadas.

Como mencionado anteriormente, a busca tabu é um exemplo de meta-heurística. Ela é um procedimento iterativo que atua evitando a repetição de soluções durante o processo de busca ou otimização. Isso se deve a uma memória adaptativa denominada lista tabu. A lista tabu guarda movimentos realizados em iterações anteriores e não permite a realização destes movimentos em iterações posteriores por um determinado período de tempo. Desta forma, o espaço de busca é melhor explorado e a convergência para ótimos locais tende a ser evitada (GLOVER, 1989).

Assim como os algoritmos genéticos, a busca tabu foi utilizada por alguns autores que resolveram problemas de carregamento de itens em contêineres, com exemplos em [Bortfeldt, Gehring e Mack \(2003\)](#), [Liu \*et al.\* \(2011\)](#) e [Tao e Wang \(2015\)](#). A proposta em [Tao e Wang \(2015\)](#) utiliza essa meta-heurística para encontrar as rotas para veículos de carga. O método armazena as rotas já encontradas na lista de soluções que não devem ser visitadas por um período de tempo, evitando, dessa forma, que soluções já encontradas sejam revisitadas e propiciando que o espaço de busca seja melhor explorado. Para traçar o plano de empacotamento para os veículos de cada rota, utilizou-se uma heurística de empacotamento em que o objetivo principal é diminuir o desperdício gerado ao posicionar os itens no contêiner. No início, o único ponto disponível para o empacotamento é o ponto de origem do sistema de coordenadas. À medida com que os itens vão sendo empacotados, novos pontos vão surgindo para posicionar os demais itens. Geometricamente, tais pontos podem ser observados traçando-se uma sequência de segmentos de reta que acompanham o topo dos itens que estão empacotados mais acima no recipiente, formando uma linha sobre os itens empacotados. Assim, os pontos válidos para o empacotamento são aqueles em que a linha sobre os itens já empacotados sofre um declive da vertical para a horizontal. Nesse sentido, a estratégia se assemelha a estratégia de geração dos *corner points*, contudo, estes surgem quando o declive acontece da horizontal para vertical. Em seguida, os itens ainda não empacotados são avaliados com relação aos pontos disponíveis para o empacotamento por meio de uma função de avaliação que leva em consideração, dentre outras questões, sobreposição e o desperdício gerado ao se empacotar o item no ponto. Por fim, escolhe-se a combinação de item e o ponto que obteve melhor desempenho ao ser avaliado.

Outra meta-heurística utilizada em trabalhos que trataram de problemas de carregamento em contêineres foi o recozimento simulado (do inglês, *simulated annealing*). Esta meta-heurística é baseada no processo de resfriamento de materiais, o qual tem por objetivo aumentar e depois reduzir a temperatura do material a fim de diminuir a sua energia e alcançar um estado fundamental, que pode ser associado com o estado em que se alcança a solução ótima para um problema de otimização ([GLOVER, 1986](#)). Com base no algoritmo encontrado em [Colin \(2007\)](#), o recozimento simulado, para um problema de minimização, inicia com uma solução, que também é tida como a solução corrente e a melhor solução conhecida até então, e com uma temperatura inicial relativamente alta. Ao longo de  $k$  iterações, o algoritmo escolhe aleatoriamente uma solução na vizinhança da solução atual. Calcula-se a diferença entre o custo da solução encontrada e o custo da solução corrente (atual). Se a diferença é negativa, significa que a função objetivo diminuiu com a nova solução (isto é, tem-se um problema de minimização). Neste caso, a melhor solução e a solução corrente passam a ser a solução que foi encontrada na vizinhança da solução atual. Se a diferença for positiva, significa que a função objetivo aumentou. Neste caso, a solução vizinha é aceita com uma certa probabilidade. Em seguida, a temperatura é reduzida. O processo iterativo termina quando a temperatura for inferior a um certo valor de temperatura mínima. Como

exemplo de trabalhos que utilizaram recozimento simulado no contexto de carregamento de contêineres, tem-se Mack, Bortfeldt e Gehring (2004), Egeblad e Pisinger (2009), Pace *et al.* (2015) e Ghomi, Amour e Abdul-Kader (2017). Em Mack, Bortfeldt e Gehring (2004), por exemplo, encontra-se uma comparação entre busca tabu e recozimento simulado. Os resultados obtidos por tais autores mostraram uma vantagem de 0,53% do recozimento simulado sobre a busca tabu.

Além desses trabalhos, há Hifi, Saleh e Wu (2015), que utilizaram um algoritmo inspirado em colônia de formigas. Outros trabalhos, como os de Christensen e Rousøe (2009), Bortfeldt (2012), Araya e Riff (2014), Sheng *et al.* (2016) e Sheng *et al.* (2017), propuseram utilizar busca em árvore para resolver o problema.

Christensen e Rousøe (2009) utilizaram busca gulosa para percorrer a árvore. Em uma estratégia de busca gulosa, o objetivo é expandir o nó que parece ser o mais promissor com relação ao critério que se deseja alcançar no momento (RUSSELL; NORVIG, 2010). Assim, em Christensen e Rousøe (2009), busca-se escolher uma caixa que traz o melhor aproveitamento do contêiner enquanto houver caixas que possam ser empacotadas e, assim, tenta-se encontrar uma maneira factível de empacotar a caixa escolhida, respeitando as orientações permitidas para a mesma. Depois de empacotar todas as caixas possíveis, calcula-se o valor de solução e compara-o com o valor da solução corrente. Se a nova solução for melhor do que a corrente, descarta-se a solução anterior e a nova solução passa a ser a corrente. Em Araya e Riff (2014), os autores apontaram que a estratégia de busca em árvore pode ser vista como um *branch-and-bound*, em que os nós mais promissores são expandidos e explorados. Em Sheng *et al.* (2016) foi utilizada uma árvore ternária.

Em Sheng *et al.* (2017), os itens são selecionados pela resolução de um modelo da mochila unidimensional, que busca por uma solução de máximo valor (ou volume) de forma que o volume do contêiner não seja excedido. Para o empacotamento das camadas de itens, os autores utilizaram um algoritmo de busca em árvore. Neste algoritmo, a cada nó, cria-se um conjunto de camadas ao longo do eixo  $x$  a fim de escolher a camada com maior taxa de preenchimento (primeiro nó filho). Depois, cria-se um conjunto de camadas ao longo do eixo  $y$  visando escolher novamente a camada com maior taxa de preenchimento (segundo nó filho). Por fim, compara-se a camada relacionada ao eixo  $x$  com a que foi obtida para o eixo  $y$ , tal que a melhor camada é escolhida como o terceiro nó filho.

No que diz respeito a métodos exatos para o PCUC, alguns exemplos podem ser encontrados em Scheithauer (1992), Martello, Pisinger e Vigo (2000), Hifi (2004), Junqueira, Morabito e Yamashita (2012). Dentre esses autores, Martello, Pisinger e Vigo (2000) propuseram um algoritmo *branch-and-bound*, enquanto que Junqueira, Morabito e Yamashita (2012) propuseram um modelo de programação linear inteira que é resolvido por meio de um método *branch-and-cut*.

O método *branch-and-bound* divide o problema original em problemas menores.

Cada subproblema consiste em um problema de programação linear. A resolução desses subproblemas resulta em soluções infactíveis ou factíveis. Os subproblemas com solução infactível são eliminados. Se a solução de um subproblema for factível e inteira, ela é considerada candidata à solução ótima do problema original. O valor que essa solução produz na função objetivo é tido como um limitante para o valor da solução ótima se ele for o melhor encontrado até então. Esses limitantes são usados para eliminar soluções candidatas que não conduzem à solução ótima. Se o subproblema resultar em uma solução não inteira, ele é dividido (ramificado) em outros dois subproblemas. Esse processo de busca por uma solução ótima é interrompido quando não há mais subproblemas a serem resolvidos. Quando o problema não possui função objetivo, isto é, quando o problema é de factibilidade, os subproblemas são resolvidos até que uma solução factível seja encontrada (BELFIORE; FÁ-VERO, 2013). No método *branch-and-cut*, segue-se a mesma ideia do *branch-and-bound*, o que muda é que são inseridas restrições funcionais (cortes ou desigualdades válidas) a cada subproblema para tentar diminuir o espaço de busca (ARENALES *et al.*, 2007).

Assim como Junqueira, Morabito e Yamashita (2012), Cardoso *et al.* (2013) e Ghomi, Amour e Abdul-Kader (2017) também propuseram modelos de programação linear inteira. Cardoso *et al.* (2013) enfrentaram problemas relacionados ao alto consumo de memória durante a resolução do modelo. Ghomi, Amour e Abdul-Kader (2017) observaram que, ao se resolver instâncias com 5 tipos de caixas, o método levou, em média, 53 segundos para encontrar a solução ótima. Todavia, esse tempo aumentou para resolver instâncias com 7 tipos de caixas, sendo preciso 4 horas. Para instâncias com 8 de tipos de caixas, o método gastou 21 horas, enquanto três dias (72 horas) foram necessários para encontrar a solução ótima de instâncias com 9 tipos de caixas.

Com relação a questão dos métodos exatos demorarem a encontrar uma solução ótima para o problema, Scheithauer (1999) apontou que isso se deve pela carência de estratégias para encontrar equivalências no domínio das variáveis e padrões de empacotamento, bem como pela falta de limitantes apertados para o problema. Então, Scheithauer (1999) propôs duas formas de obter limitantes para o PCUC. A primeira forma consiste na *1D bar relaxation* e a segunda na relaxação baseada na construção de fatias (camadas bidimensionais).

A *1D bar relaxation* considera um conjunto de barras de espessura unitária. Para cada dimensão do problema é associada um tipo de barra de tamanho diferente. Como o PCUC é um problema tridimensional, Scheithauer (1999) trabalhou com barras de tamanhos equivalentes à largura, ao comprimento e à altura. A ideia é fazer com que soma das larguras, comprimentos e alturas referentes aos itens empacotados sobre as barras não exceda a largura, o comprimento e altura das barras, respectivamente. A relaxação baseada na construção de fatias considera camadas de espessura unitária ortogonais à direção da largura ou ortogonais à direção do comprimento. Tem-se, então, que parte dos itens podem estar localizados nestas camadas e, com isso, é possível construir um padrão de empacotamento

bidimensional para os itens. Para resolver as relaxações, [Scheithauer \(1999\)](#) utilizou a técnica de geração de colunas.

[Hokama, Miyazawa e Xavier \(2016\)](#) resolveram o problema de roteamento de veículos com restrições de empacotamento tridimensionais, com uma abordagem exata do tipo *branch-and-cut*. Para resolver o problema de empacotar os itens dentro do recipiente do veículo, os autores utilizaram programação por restrições com a estratégia de posições relativas. Esta estratégia utiliza posições relativas, *a priori*, para saber, dado dois itens  $i$  e  $j$ , se o item  $j$  está empacotado acima ou abaixo, à direita ou à esquerda, à frente ou atrás do item  $i$ . A técnica das posições relativas também foi utilizada por [Mesyagutov, Scheithauer e Belov \(2012\)](#), porém, em um método do tipo *branch-and-prune*. Para executar a poda de soluções inviáveis, os autores utilizaram, dentre outras relaxações, as que foram propostas por [Scheithauer \(1999\)](#). Outros trabalhos na mesma linha do problema resolvido em [Hokama, Miyazawa e Xavier \(2016\)](#) são os de [Moura e Oliveira \(2009\)](#), [Ceschia, Schaerf e Stütze \(2013\)](#), [Ruan et al. \(2013\)](#) e [Junqueira e Morabito \(2015\)](#).

Por fim, a Tabela 2.1 esquematiza 76 trabalhos que abordaram o problema de carregamento em contêineres aos métodos de solução e estratégias que foram desenvolvidos para tal problema. Muitos trabalhos citados e/ou comentados anteriormente encontram-se neste quadro. Por motivos de espaço, abreviou-se o título dos métodos. Assim, um “X” associado à coluna “Est. Const.” indica que o trabalho utilizou estratégias construtivas como blocos, camadas, torres, paredes e entre outras que constroem o empacotamento a cada passo; “B. Local” indica que o trabalho utilizou busca local; “A. G” indica que trabalho utilizou um algoritmo genético; “B. Tabu” refere-se a busca Tabu; “R. Simulado” refere-se a recozimento simulado; “Col. Form.” indica que o trabalho utilizou um algoritmo bioinspirado no comportamento de colônia de formigas; “B. Árvore” refere-se a busca em árvores; “A. guloso” refere-se a utilização de um algoritmo do tipo guloso; “B. Vizinh.” refere-se a algum método de busca em vizinhança, como a busca em vizinhança variável; “M. Exato” indica que o trabalho propôs uma abordagem que resolve o problema por meio de um método que garante a solução ótima para o problema, como *branch-and-bound* ou *branch-and-cut*; “Prog. Din.” indica que o trabalho utilizou a técnica de programação dinâmica, que trabalha dividindo o problema original em subproblemas que se relacionam entre si; “Ger. Col.” refere-se a técnica de geração de colunas, que se baseia no fato do método Simplex não exigir que todas as variáveis do problema estejam disponíveis ao mesmo tempo, podendo, portando, iniciar a resolução com um conjunto reduzido de variáveis (isto é, um conjunto reduzido de colunas) e ir acrescentando outras variáveis (novas colunas) à resolução do problema à medida que for necessário ([IBM, 2017](#)); e, por fim, “PR” refere-se a técnica de programação por restrições.

Com base no levantamento apresentado na Tabela 2.1, construiu-se o gráfico da Figura 2.1, que indica a porcentagem de artigos para cada técnica de resolução mencionada. Como há artigos que fizeram uso de mais de uma técnica, a soma das porcentagens para

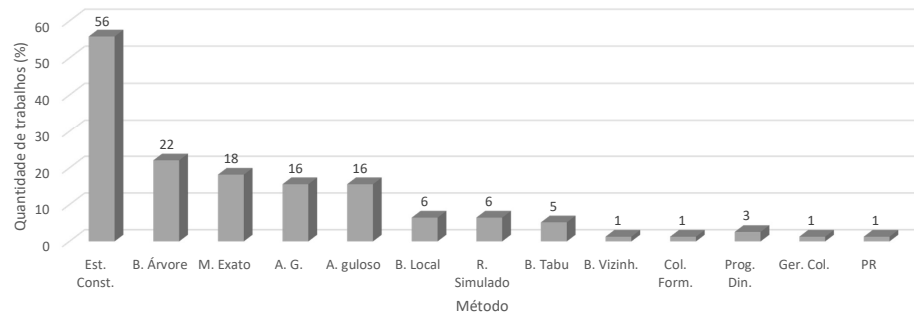
Tabela 2.1 – Métodos de solução utilizados em 76 trabalhos sobre problemas de carregamento em contêineres.

	Est. Const.	B. Local	A. G.	B. Tabu	R. Simulado	Col. Form.	B. Árvore	A. guloso	B. Vizin.	M. Exato	Prog. Din.	Ger. Col.	PR
George e Robinson (1980)	X												
Scheithauer (1992)										X			
Bischoff e Ratcliff (1995)	X												
Chen, Lee e Shen (1995)										X			
Gehring e Bortfeldt (1997)	X		X										
Xue e Lai (1997)	X												
Chien e Wu (1998)	X							X					
Ratcliff e Bischoff (1998)	X												
Davies e Bischoff (1999)	X												
Martello, Pisinger e Vigo (2000)										X			
Padberg (2000)										X			
Bortfeldt e Gehring (2001)	X		X										
Eley (2002)	X						X	X					
Hifi (2002)										X			
Pisinger (2002)	X						X						
Bortfeldt, Gehring e Mack (2003)				X									
Eley (2003)										X			
Mongeau e Bes (2003)										X			
Silva, Soma e Maculan (2003)								X					
Chien e Deng (2004)	X												
Mack, Bortfeldt e Gehring (2004)				X	X								
Pimpawat e Chaiyaratana (2004)	X		X										
Bischoff (2006)	X												
Araújo e Armentano (2007)	X												
Parreño <i>et al.</i> (2008)	X							X					
Wang, Li e Levy (2008)	X												
Chien <i>et al.</i> (2009)	X												
Christensen e Rousøe (2009)							X	X					
Egeblad e Pisinger (2009)					X								
Moura e Oliveira (2009)								X					
Araújo e Pinheiro (2010)	X		X										
Fanslau e Bortfeldt (2010)	X						X						
He e Huang (2010)	X												
Kang, Jang e Yoon (2010)	X												
Fanslau e Bortfeldt (2010)	X						X						
Liu <i>et al.</i> (2011)				X									
Ren, Tian e Sawaragi (2011)	X						X	X					
Bortfeldt (2012)							X						
Gonçalves e Resende (2012)	X		X										
Junqueira, Morabito e Yamashita (2012)										X			
Zhang, Peng e Leung (2012)	X												
Zhu <i>et al.</i> (2012)	X							X	X				
Cardoso <i>et al.</i> (2013)										X			
Ceschia, Schaerf e Stützle (2013)	X	X											
Junqueira <i>et al.</i> (2013)										X			
Queiroz <i>et al.</i> (2012)											X		
Ruan <i>et al.</i> (2013)	X												
Wang, Lim e Zhu (2013)	X						X						
Alonso <i>et al.</i> (2014)	X							X					
Araya e Riff (2014)							X	X					
Liu <i>et al.</i> (2014)	X						X						
Gonçalves e Queiroz (2014)										X			
Bortfeldt <i>et al.</i> (2015)							X		X				
Hifi, Saleh e Wu (2015)		X				X							
Junqueira e Morabito (2015)	X												
Lurkin e Schyns (2015)										X			
Mahvash, Awasthi e Chauhan (2015)												X	
Martínez, Alvarez-Valdes e Parreño (2015)	X							X					
Pace <i>et al.</i> (2015)	X	X			X		X						
Tao e Wang (2015)				X									
Zhang, Wei e Lim (2015)	x		X										
Zheng, Chien e Gen (2015)			X										
Bruns, Knust e Shakhlevich (2016)	X												
Gonzalez, Miranda e Leon (2016)			X										
Hokama, Miyazawa e Xavier (2016)	X						X						X
Huang, Hwang e Lu (2016)			X										
Jamrus e Chien (2016)			X							X			
Ramos <i>et al.</i> (2016)	X		X										
Tian <i>et al.</i> (2016)							X						
Trivella e Pisinger (2016)		X											
Le e Knust (2017)										X			
Männel e Bortfeldt (2017)	X						X	X					
Ghomi, Amour e Abdul-Kader (2017)					X					X			
Sheng <i>et al.</i> (2017)	X				X								
Ramos, Silva e Oliveira (2018)	X		X										
Xiang e Ding-you (2018)	X	X											

Fonte – a autora.

cada técnica pode totalizar um valor maior do que 100%.

Figura 2.1 – Porcentagem dos artigos da Tabela 2.1 conforme o tipo de abordagem.



Fonte – a autora.

## 2.2 Trabalhos com Restrições Práticas

A restrição de carregamento completo de itens foi tratada em poucos trabalhos na literatura. Encontraram-se os trabalhos de [Eley \(2003\)](#), [Gonçalves e Queiroz \(2014\)](#), [Queiroz et al. \(2017\)](#) e [Sheng et al. \(2017\)](#). [Eley \(2003\)](#) e [Sheng et al. \(2017\)](#) trataram a restrição dentro de uma heurística. [Gonçalves e Queiroz \(2014\)](#) trataram numa abordagem exata. Por outro lado, [Queiroz et al. \(2017\)](#) trataram a restrição dentro de uma heurística e de uma abordagem do tipo *branch-and-cut*.

A restrição de grafo de conflitos pode ser encontrada, dentre outros trabalhos, nos de [Yamada, Kataoka e Watanabe \(2002\)](#), [Eley \(2003\)](#), [Pferschy e Schauer \(2009\)](#), [Akeb, Hifi e Mounir \(2011\)](#) e [Queiroz et al. \(2017\)](#). [Yamada, Kataoka e Watanabe \(2002\)](#) trataram a questão de itens conflitantes, porém, junto ao problema da mochila unidimensional. Eles consideraram uma restrição disjuntiva, que estabelece que se dois itens são conflitantes, somente um deles pode ser levado no contêiner. Em [Eley \(2003\)](#), dividiu-se os itens em dois conjuntos (por exemplo, conjuntos A e B). Em seguida, estabeleceu-se uma regra que afirma que os conjuntos A e B devem ser separados. Para se alcançar esta condição, [Eley \(2003\)](#) resolveu o problema para o conjunto A e depois para o conjunto B, selecionando itens dos dois conjuntos. Depois, juntou-se os itens selecionados e resolveu-se o problema considerando uma restrição análoga a considerada em [Yamada, Kataoka e Watanabe \(2002\)](#). Em [Akeb, Hifi e Mounir \(2011\)](#), os autores propuseram um método que combina busca local e modelos de programação linear inteira, que são resolvidos por meio de um *branch-and-bound*. Nos modelos, os autores consideraram a mesma restrição disjuntiva considerada em [Yamada, Kataoka e Watanabe \(2002\)](#). Em [Queiroz et al. \(2017\)](#), a restrição de grafo de conflitos foi tratada no problema da mochila bidimensional. Os autores propuseram métodos exatos e uma heurística baseada em busca tabu e recozimento simulado, além de utilizarem uma estratégia construtiva para empacotar os itens no recipiente, sendo que a restrição de grafo de

conflitos foi tratada da mesma forma que em [Yamada, Kataoka e Watanabe \(2002\)](#).

Para tratar a prioridade no carregamento de itens, [Ren, Tian e Sawaragi \(2011\)](#), [Wang, Lim e Zhu \(2013\)](#) e [Tian \*et al.\* \(2016\)](#) propuseram empacotar primeiro os itens de alta prioridade. Depois, busca-se empacotar os itens de prioridade inferior caso haja espaço suficiente no contêiner. Outra estratégia para tratar prioridade foi proposta por [Sheng \*et al.\* \(2017\)](#). Tal estratégia seleciona um subconjunto  $O'$  de itens com alta prioridade. Itens com alta prioridade para os autores são pedidos já expirados, com prazos de entrega mais recentes. Em seguida, verifica-se se todos os itens do subconjunto  $O'$  podem ser empacotados sem sobreposição no contêiner. Em caso positivo, seleciona-se um subconjunto  $R'$  de itens de baixa prioridade (pedidos não expirados) e verifica-se se o conjunto  $R' \cup O'$  pode ser empacotado dentro do contêiner. Assim, busca-se selecionar subconjuntos  $R'$  para serem testados novamente, até encontrar algum que caiba sem sobreposição no contêiner.

Ainda com relação a restrição de prioridade, [Vancroonenburg \*et al.\* \(2014\)](#) formularam uma restrição que só empacota os itens com um nível de prioridade inferior se todos os itens com um nível de prioridade superior puderem ser empacotados. Um problema dessa estratégia é a perda de volume empacotado, pois se nem todos os itens de uma dada prioridade são empacotados no contêiner, a restrição impede que os itens de prioridade inferior sejam arranjados nos espaços restantes. Nota-se ainda que [Ren, Tian e Sawaragi \(2011\)](#), [Wang, Lim e Zhu \(2013\)](#), [Tian \*et al.\* \(2016\)](#) e [Sheng \*et al.\* \(2017\)](#) preocuparam-se com o empacotamento de itens de baixa prioridade caso sobre espaço no contêiner. Porém, tais autores, ao contrário de [Vancroonenburg \*et al.\* \(2014\)](#), desenvolveram heurísticas, sendo então mais intuitivo considerar o preenchimento do contêiner com itens de diferentes prioridades. [Jamrus e Chien \(2016\)](#) consideraram a prioridade no momento de montar os cromossomos. Os genes que compõem os cromossomos (no caso, os itens) devem ser aqueles que possuem prioridade maior para o carregamento.

A restrição de fragilidade pode ser encontrada, dentre outros trabalhos, nos de [Bischoff \(2006\)](#), [Junqueira, Morabito e Yamashita \(2012\)](#), [Ceschia, Schaerf e Stütze \(2013\)](#), [Queiroz e Miyazawa \(2013\)](#), [Bruns, Knust e Shakhlevich \(2016\)](#) e [Le e Knust \(2017\)](#). [Bischoff \(2006\)](#), [Junqueira, Morabito e Yamashita \(2012\)](#), [Ceschia, Schaerf e Stütze \(2013\)](#), [Queiroz e Miyazawa \(2013\)](#) consideraram que cada caixa permite uma pressão máxima em sua face superior e, então, assumiram que a pressão total acima de toda caixa frágil não deve ultrapassar a pressão permitida. [Bruns, Knust e Shakhlevich \(2016\)](#) e [Le e Knust \(2017\)](#) consideraram diretamente a quantidade de itens que cada caixa frágil suporta, ao invés da pressão.

Com relação à estabilidade vertical e horizontal, a literatura tem considerado com mais frequência uma condição de fator de suporte. Essa condição impõe que as bases e as laterais das caixas estejam completamente ou parcialmente suportadas por outras caixas ou pelo chão ou pelas paredes do contêiner. Abordagens que trataram a estabilidade dessa forma podem ser encontradas em [Junqueira, Morabito e Yamashita \(2012\)](#), [Ceschia, Schaerf](#)

e Stütze (2013), Bortfeldt *et al.* (2015) e Oliveira, Queiroz e Lima (2016). Por outro lado, há abordagens que trataram a estabilidade por meio da teoria de equilíbrio estático de corpos rígidos, impondo que o carregamento é estável se as resultantes das forças e de momentos aplicados ao centro de massa de cada caixa são nulas (RAMOS *et al.*, 2016; RAMOS; SILVA; OLIVEIRA, 2018). Silva, Soma e Maculan (2003), Queiroz e Miyazawa (2014) e Oliveira, Queiroz e Lima (2016) também consideraram a condição de estabilidade sob o equilíbrio estático de corpos rígidos.

A restrição de ordem ou múltiplos destinos pode ser definida por meio de critérios de visibilidade, alcançabilidade e separação (MARTÍNEZ; ALVAREZ-VALDES; PARREÑO, 2015). Aquelas baseadas em visibilidade levam em consideração apenas o critério de que os itens que vão ser entregues posteriormente não podem ser empacotados em regiões que, visualmente, bloqueiem a retirada dos itens que devem ser entregues inicialmente. Christensen e Rousøe (2009) e Queiroz e Miyazawa (2013) trabalharam com a restrição de ordem baseada em visibilidade. A restrição de ordem baseada em alcançabilidade e visibilidade leva em consideração, além do não bloqueio visual entre os itens, o alcance da pessoa ou máquina que irá realizar o descarregamento. Neste caso, os itens dos clientes que são visitados posteriormente não podem impedir o alcance dos itens dos clientes que são visitados primeiro. A restrição de ordem baseada em separação faz com que os itens de cada cliente fiquem agrupados e ao mesmo tempo separados dos itens de outros clientes. A restrição de ordem proposta em Junqueira e Morabito (2015) pode ser vista como baseada em separação. Assim, Junqueira e Morabito (2015) separaram os conjuntos dos itens de cada cliente empacotando um de cada vez e impondo que cada conjunto não deve ultrapassar uma determinada coordenada do contêiner ou caminhão. Os itens de cada cliente ficam juntos e separados dos itens de outros clientes e podem ser retirados do contêiner ou caminhão sem que outras caixas precisem ser remanejadas, além de garantir a alcançabilidade. Martínez, Alvarez-Valdes e Parreño (2015) desenvolveram um algoritmo que se adapta conforme a maneira de considerar a restrição de ordem de entrega.

Tao e Wang (2015) propuseram empacotar os itens na ordem inversa a ordem de entrega (do último cliente para o primeiro) e associaram a questão da fragilidade à ordem de entrega, impondo que os itens mais resistentes devem ser entregues por último e que os itens mais frágeis devem ser entregues primeiro. Bortfeldt (2012) também propuseram empacotar primeiro os itens que serão entregues por último.

A restrição de balanceamento de carga é importante para garantir que o peso da carga esteja bem distribuído no contêiner ou caminhão, uma vez que uma carga mal balanceada pode acarretar no tombamento do veículo ou em fazer com que ele fique mais inclinado (isto é, pendendo mais para um lado da pista) e, por conseguinte, mais suscetível a ocorrência de acidentes. Para garantir o balanceamento de carga, muitos trabalhos têm imposto que o centro de gravidade do empacotamento esteja em uma região segura do contêiner,

que é definida a partir de um certo percentual de distância das bordas do contêiner, sendo enxergada como um envelope dentro do contêiner (JUNQUEIRA; QUEIROZ, 2015). A restrição de balanceamento também é importante para garantir a economia de combustível, principalmente no transporte de carga. De acordo com Mongeau e Bes (2003), se for possível garantir que o centro de gravidade de um avião sofra um deslocamento inferior a 75 centímetros, consegue-se uma economia de 4000 quilogramas de combustível em um voo de mais de 10000 quilômetros.

Exemplos de abordagens que consideraram a restrição de balanceamento de carga podem ser encontrados em Mongeau e Bes (2003), Akeb, Hifi e Mounir (2011), Baldi, Perboli e Tadei (2012), Queiroz e Miyazawa (2013) e Ramos, Silva e Oliveira (2018). Mongeau e Bes (2003) consideraram a restrição de balanceamento em uma abordagem para otimizar a quantidade de carga levada em uma aeronave. Os autores preocuparam-se em posicionar o centro de gravidade ao longo do eixo longitudinal da aeronave. Os autores buscaram garantir uma região segura para o centro de gravidade da carga colocada em cada compartimento do porão da aeronave. Baldi, Perboli e Tadei (2012) e Queiroz e Miyazawa (2013) também consideraram que o centro de massa do empacotamento deve ficar em um região segura do recipiente. Em Ramos, Silva e Oliveira (2018), os autores incorporaram o balanceamento de carga na função de avaliação do empacotamento construído ao longo do procedimento heurístico adotado. Os autores levaram em consideração o diagrama de distribuição de carga, que é um gráfico bidimensional que mostra a carga máxima admissível de um veículo em função do comprimento ou posição transversal do seu centro de gravidade.

A restrição de corte guilhotinado em problemas de corte e empacotamento tridimensionais é encontrada nos trabalhos de Morabito e Arenales (1994), Chien e Wu (1998), Hifi (2002), Hifi (2004), Egeblad e Pisinger (2009), Amossen e Pisinger (2010), Fanslau e Bortfeldt (2010), Queiroz *et al.* (2012) e Gonzalez, Miranda e Leon (2016). Morabito e Arenales (1994) propuseram uma abordagem baseada em grafos. Chien e Wu (1998) desenvolveram um método que divide o recipiente em camadas que seriam provenientes de cortes guilhotinados efetuados em alguma dimensão do contêiner. A ideia dos autores foi resolver dois problemas unidimensionais para cada camada. Por exemplo, se as camadas são geradas por meio de cortes perpendiculares à altura, resolve-se um problema em que se deseja empacotar os itens ao longo da largura e outro problema em que se deseja empacotar os itens ao longo do comprimento. Os autores buscaram, em cada problema, empacotar a maior quantidade de itens, respeitando a capacidade da dimensão tratada, resolvendo um problema da mochila unidimensional. A ideia por trás desse procedimento é gerar o melhor padrão de corte para cada camada.

Hifi (2002) baseou-se no método proposto por Gilmore e Gomory (1965) para o caso bidimensional. No método de Gilmore e Gomory (1965), trabalhou-se com dois estágios de corte, isto é, a guilhotina pode mudar de direção no máximo duas vezes durante o processo

de corte. Buscou-se, então, gerar faixas verticais ou horizontais compostas de itens que são escolhidos por meio da resolução de mochilas unidimensionais. Depois, buscou-se escolher a melhor combinação de faixas para o empacotamento final, o que foi feito por meio da resolução de outro problema do tipo mochila unidimensional, em que se buscou maximizar o valor total associado às faixas empacotadas. Em [Hifi \(2002\)](#) encontra-se a extensão para o caso tridimensional da abordagem de [Gilmore e Gomory \(1965\)](#), que é gerada considerando, ao invés de faixas, camadas ou blocos, em que as camadas podem ser provenientes de cortes perpendiculares com relação à qualquer uma das três dimensões do contêiner. Em [Hifi \(2004\)](#), a ideia para tratar corte guilhotinado é análoga à que foi adotada em [Hifi \(2002\)](#). O que muda de um trabalho para o outro são os métodos adotados para a resolução dos problemas de otimização. Com relação a isso, em [Hifi \(2002\)](#) utilizou-se algoritmos heurísticos e em [Hifi \(2004\)](#) utilizou-se um método exato de busca em grafos, em que se adotou a estratégia de busca em profundidade.

[Egeblad e Pisinger \(2009\)](#) propuseram um método que representa empacotamentos factíveis por meio da organização dos itens em três sequências. Na primeira sequência, o item  $i$  precede o item  $j$  se  $i$  está empacotado à esquerda, acima ou na frente de  $j$ . Na segunda sequência,  $i$  precede o  $j$  se  $i$  está empacotado à esquerda, abaixo ou na parte de trás de  $j$ . Na terceira sequência, o  $i$  precede o  $j$  se  $i$  está empacotado à direita, abaixo ou na frente de  $j$ . Em seguida, os autores propuseram restrições baseadas nessas relações de precedência para determinar onde cada item deve ser empacotado. Uma dessas restrições estabelece que se o item  $i$  precede o item  $j$  na primeira e na segunda sequências, mas não na terceira,  $i$  deve ser empacotado à esquerda de  $j$ . Tal método foi incorporado dentro de um recozimento simulado que guia a busca para uma boa solução.

[Amossen e Pisinger \(2010\)](#) utilizaram programação por restrições para tratar a restrição de corte guilhotinado. Na abordagem, os autores trabalharam com a ideia de relações, que busca identificar onde um item está empacotado com relação a outro item já empacotado no contêiner, isto é, se ele está empacotado à esquerda, à direita, atrás, na frente, acima ou abaixo. Os autores utilizaram grafos para trabalhar com as relações e, com base nos grafos, os autores mostraram como identificar casos possíveis e impossíveis de guilhotinar. Para buscar pelos casos possíveis de guilhotinar, os autores propuseram um algoritmo que inicia por um nó do grafo. Os nós no grafo representam os itens. A partir disso, o algoritmo gera dois grupos sobre os itens. Um deles contém o item e o outro não contém. Em seguida, o algoritmo busca identificar se existe alguma coordenada  $k$  pertencente a dimensão  $d$  em que se possa isolar os dois conjuntos sem que nenhum item fique com uma parte em um conjunto e outra parte em outro conjunto. Se tal coordenada existir, então é possível executar um corte guilhotinado sobre o empacotamento. Essa ideia é estendida para todos os conjuntos de itens gerados à medida que os cortes são identificados. O algoritmo finaliza quando não houver coordenada em que se possa isolar os itens em conjuntos.

Fanslau e Bortfeldt (2010) organizam os itens em blocos, de forma que os itens possam ser separados por meio de corte guilhotinados. Queiroz *et al.* (2012) utilizaram fórmulas recursivas para tratar o problema da mochila tridimensional com restrições de corte guilhotinado. As fórmulas representam o volume de caixas que pode ser cortado do contêiner. Por meio das fórmulas apresentadas, os autores desenvolveram um algoritmo de programação dinâmica. Gonzalez, Miranda e Leon (2016) utilizaram algoritmo genético como método para buscar pela melhor solução. Como heurística de posicionamento, tais autores utilizaram construção de camadas, tomando cuidado para posicionar as camadas no contêiner de forma a permitir a execução de cortes guilhotinados.

Restrições para facilitar o alcance dos itens pelo pessoal encarregado de fazer o descarregamento ou o carregamento do contêiner (as chamadas restrições de carregamento manual) aparecem em trabalhos como o de Martínez, Alvarez-Valdes e Parreño (2015) e Ramos, Oliveira e Lopes (2016). Martínez, Alvarez-Valdes e Parreño (2015) associaram carregamento manual à ordem de entrega. Assim, além de se preocupar que o empacotamento final possibilite a retirada dos itens do contêiner conforme a ordem de entrega, os autores preocuparam-se com a alcançabilidade de tais itens no momento de descarregamento do contêiner. Ramos, Oliveira e Lopes (2016) propuseram uma restrição que impõem que se a projeção de dois itens se intercepta sobre o chão do contêiner, indicando que um item está em cima e o outro embaixo, então a distância entre o término desses itens no eixo de retirada dos itens do contêiner deve ser no máximo igual a distância que o braço do trabalhador consegue alcançar. Dessa forma, garante-se que os itens localizados mais abaixo não fiquem muito deslocados para frente e que os itens que estão mais no topo não fiquem muito deslocados para o fundo do contêiner, tornando possível e mais fácil o acesso do trabalhador a todos os itens do carregamento.

Com relação a trabalhos que abordaram a restrição de agrupamento, tem-se as contribuições de Haessler e Talbot (1990) e Jung e Noh (2014). Haessler e Talbot (1990) propuseram empacotar os itens em pilhas de tal forma que pilhas contendo itens de um mesmo grupo fiquem próximas umas das outras e que os itens de um mesmo grupo fiquem próximos dentro da pilha. A abordagem de empacotamento de Haessler e Talbot (1990) pressupõe ordenar os itens conforme a sequência que eles devem ser colocados no contêiner no momento de empacotar. Logo, a ideia é fazer a ordenação de tal forma que itens de um mesmo grupo, quando colocados no contêiner, seguindo a ordem pré-estabelecida, fiquem próximos. Por outro lado, em Jung e Noh (2014), foi proposto agrupar, em regiões próximas, itens com características semelhantes. Para isso, os autores propuseram criar, uma vez que um item de um determinado grupo é empacotado em um ponto no contêiner, uma região em torno desse item na qual itens com características semelhantes, isto é, do mesmo grupo, podem ser empacotados, compartilhando da mesma orientação.

Dentre as restrições práticas, a restrição de separação busca garantir que itens de um

mesmo grupo fiquem próximos e ao mesmo tempo separados de itens pertencentes a grupos diferentes. Com relação a essa restrição, uma abordagem capaz de separar os itens em grupos dentro do contêiner é a abordagem de [Junqueira e Morabito \(2015\)](#), definida para garantir a retirada dos itens conforme a ordem em que eles devem ser entregues aos seus clientes. Nessa abordagem, definem-se coordenadas com relação ao eixo de retirada dos itens para estabelecer os limites da região reservada para o empacotamento dos itens de um determinado cliente. Assim, o contêiner fica dividido em regiões separadas por paredes imaginárias. Como os autores trataram ordem de entrega, a ideia é começar empacotando os itens do último cliente a ser visitado e definir uma coordenada a partir da qual os itens do penúltimo cliente devem ser empacotados e, assim, sucessivamente, até chegar aos itens do primeiro cliente a ser visitado. [Martínez, Alvarez-Valdes e Parreño \(2015\)](#), que também trataram a questão do empacotamento estar coerente com a ordem de entrega, propuseram separar os itens de cada cliente em regiões distintas dentro do contêiner.

As restrições de orientação buscam determinar as formas com que os itens podem ser rotacionados no momento de empacotá-los no contêiner. Há trabalhos que apresentam abordagens em que os itens não podem ser rotacionados. Contudo, preocupou-se aqui em levantar os trabalhos em os itens podem ser rotacionados em torno de ao menos um de seus eixos. Exemplos de abordagens em que isso é possível podem ser encontradas nos trabalhos de [Gehring e Bortfeldt \(1997\)](#), [Eley \(2002\)](#), [Christensen e Rousøe \(2009\)](#), [Bortfeldt \(2012\)](#), [Junqueira, Morabito e Yamashita \(2012\)](#) e [Reil, Bortfeldt e Mönch \(2018\)](#).

As restrições práticas também aparecem em problemas como os que lidam com a organização de contêineres em terminais e depósitos. Nesse sentido, [Le e Knust \(2017\)](#) mostraram que o raciocínio empregado ao se tratar de problemas de carregamento em um único contêiner com restrições práticas pode ser estendido para problemas de carregamento em terminais e depósitos. No trabalho de [Le e Knust \(2017\)](#), as caixas passaram a ser enxergadas como os contêineres e o contêiner é tido como o terminal ou depósito. Na abordagem, os contêineres são organizados em pilhas. Em virtude disso, os autores preocuparam-se com aspectos relacionados a fragilidade dos contêineres e impuseram restrições para garantir que contêineres mais pesados não sejam empacotados sobre contêineres mais leves. Os autores também se preocuparam com a ordem de retirada para efetivar a entrega dos contêineres no terminal. Mais trabalhos que abordaram restrições práticas são apresentados na Tabela 2.2. Nesta tabela há um levantamento de 76 trabalhos que abordaram restrições práticas. Para cada trabalho, informa-se qual ou quais restrições práticas foram consideradas.

Por fim, a Figura 2.2 mostra, como base no levantamento da Tabela 2.2, a porcentagem de trabalhos para cada restrição prática. Dessa forma, tem-se, dentre estes 77 trabalhos levantados, que a restrição de estabilidade de carga é a que mais aparece, seguida da restrição de orientação. A restrição menos observada foi a de carregamento manual.

Tabela 2.2 – Restrições práticas abordadas em 76 trabalhos da literatura.

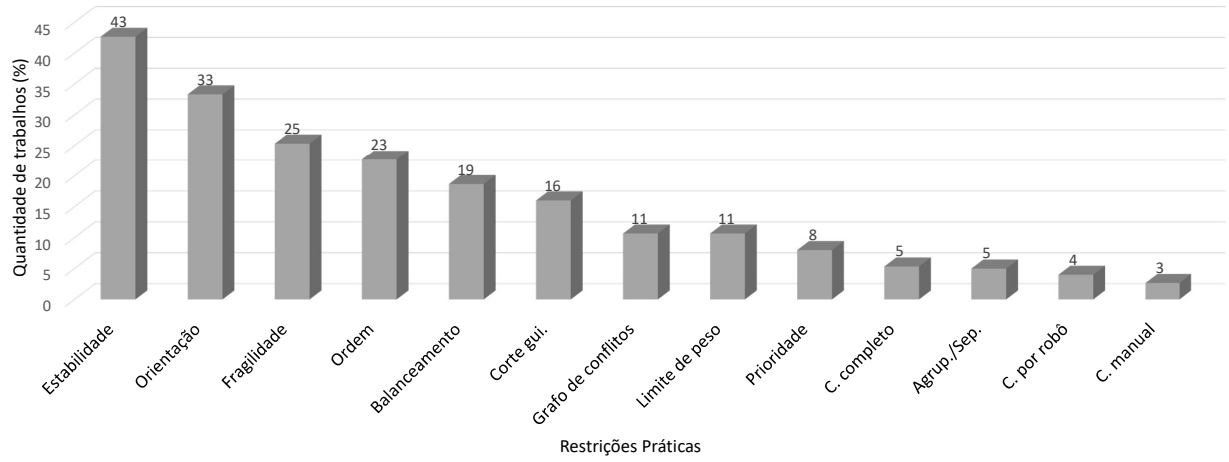
Trabalho	Restrições Práticas												
	C. Completo	Conflitos	Prioridade	Estabilidade	Fragilidade	Ordem	Balanciamento	Corte guiado	Orientação	Limite de peso	C. robô	C. manual	Agrup/Sep
Haessler e Talbot (1990)													X
Morabito e Arenales (1994)				X				X					
Gehring e Bortfeldt (1997)				X	X		X		X	X			
Ratcliff e Bischoff (1998)				X	X								
Chien e Wu (1998)				X				X	X				
Martello, Pisinger e Vigo (2000)											X		
Davies e Bischoff (1999)							X						
Eley (2002)									X				
Hifi (2002)				X				X	X				
Pisinger (2002)									X				
Yamada, Kataoka e Watanabe (2002)		X											
Eley (2003)	X	X											
Mongeau e Bes (2003)							X						
Silva, Soma e Maculan (2003)													
Hifi (2004)								X					
Bischoff (2006)					X								
Martello <i>et al.</i> (2007)											X		
Epstein, Levin e Stee (2008)		X											
Christensen e Rousøe (2009)					X	X			X				
Egeblad e Pisinger (2009)								X	X		X		
Miyazawa e Wakabayashi (2009)									X				
Moura e Oliveira (2009)						X							
Pferschy e Schauer (2009)		X											
Amossen e Pisinger (2010)								X					
Araújo e Pinheiro (2010)							X						
Fanslau e Bortfeldt (2010)				X				X	X				
Akeb, Hifi e Mounir (2011)		X											
Ren, Tian e Sawaragi (2011)			X										
Baldi, Perboli e Tadei (2012)							X						
Bortfeldt (2012)				X	X	X			X	X			
Gonçalves e Resende (2012)				X					X				
Junqueira, Morabito e Yamashita (2012)				X	X				X				
Zhang, Peng e Leung (2012)				X					X				
Ceschia, Schaerf e Stütze (2013)				X	X	X							
Fernández <i>et al.</i> (2013)							X		X				
Junqueira <i>et al.</i> (2013)				X	X	X							
Queiroz e Miyazawa (2013)					X	X	X						
Queiroz <i>et al.</i> (2012)								X					
Ruan <i>et al.</i> (2013)				X	X	X			X	X			
Wang, Lim e Zhu (2013)			X										
Alonso <i>et al.</i> (2014)				X			X		X				
Araya e Riff (2014)				X									
Gonçalves e Queiroz (2014)	X			X			X						
Joung e Noh (2014)													X
Liu <i>et al.</i> (2014)				X				X	X				
Queiroz e Miyazawa (2014)				X									
Vancroonenburg <i>et al.</i> (2014)			X										
Bortfeldt <i>et al.</i> (2015)				X	X	X			X	X			
Hifi, Saleh e Wu (2015)		X											
Junqueira e Morabito (2015)				X		X							X
Lurkin e Schyns (2015)							X			X			
Mahvash, Awasthi e Chauhan (2015)				X	X	X							
Martínez, Alvarez-Valdes e Parreño (2015)						X					X		X
Pace <i>et al.</i> (2015)						X	X			X			
Ramos <i>et al.</i> (2015)				X									
Tao e Wang (2015)				X	X	X							
Zhang, Wei e Lim (2015)				X	X	X			X				
Bruns, Knust e Shakhlevich (2016)					X								
Gonzalez, Miranda e Leon (2016)								X					
Hokama, Miyazawa e Xavier (2016)						X							
Jamrus e Chien (2016)			X		X				X				
Oliveira, Queiroz e Lima (2016)				X									
Ramos, Oliveira e Lopes (2016)				X							X		
Ramos <i>et al.</i> (2016)				X									
Salem <i>et al.</i> (2016)		X											
Tian <i>et al.</i> (2016)			X										
Trivella e Pisinger (2016)							X						
Zachariadis, Tarantilis e Kiranoudis (2016)						X							
Le e Knust (2017)					X								
Ghomi, Amour e Abdul-Kader (2017)				X					X				
Männel e Bortfeldt (2017)				X	X				X	X			
Queiroz <i>et al.</i> (2017)	X	X											
Sheng <i>et al.</i> (2017)	X		X	X				X	X				
Ramos, Silva e Oliveira (2018)				X			X						
Reil, Bortfeldt e Münch (2018)				X	X	X			X	X			
Xiang e Ding-you (2018)							X						

Fonte – a autora.

A partir do levantamento mostrado na Tabela 2.2, observa-se que é grande o interesse da literatura em se trabalhar com as restrições práticas. No entanto, nota-se que há poucos autores propondo formas de usá-las em modelos matemáticos. Com isso, este trabalho

busca colaborar com a literatura com relação ao tratamento de restrições práticas em modelos matemáticos.

Figura 2.2 – Quantidade de trabalhos em (%) da Tabela 2.2 por restrição prática.



Fonte – a autora.



## Capítulo 3

---

# ABORDAGEM EM DOIS NÍVEIS PARA O PCUC

---

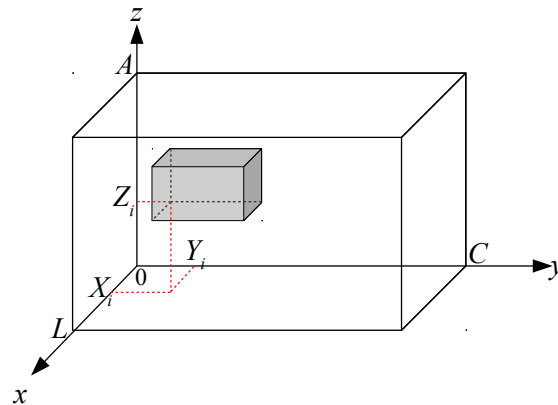
Este capítulo traz na Seção 3.1 uma visão geral sobre o PCUC e sobre a abordagem utilizada para resolvê-lo. A abordagem é dividida em dois níveis, que são detalhados, respectivamente, nas seções 3.2 e 3.3. Os níveis são compostos de modelos de programação inteira e programação por restrições. Por fim, apresenta-se, na seção 3.4, a forma com que tais modelos são resolvidos.

### 3.1 Visão Geral do Problema e da Abordagem

O Problema de Carregamento em único contêiner (PCUC) considera um conjunto inicial  $K$  de  $m$  tipos de itens e um contêiner  $R$ . Assume-se que  $R$  possui largura  $L$ , comprimento  $C$  e altura  $A$ . Cada tipo de item  $k \in K$  possui largura  $l_k$ , comprimento  $c_k$ , altura  $a_k$ , valor  $v_k$  e um número de cópias ou réplicas iguais a  $b_k$ . O conjunto total de itens disponíveis considerando as cópias de cada tipo é denotado por  $I$  e é definido como sendo  $I = \{1, \dots, \sum_{k=1}^m b_k\}$ . Quando se fala em largura, comprimento e altura, entende-se que estas dimensões estão associadas, respectivamente, aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , conforme mostra a Figura 3.1. Considera-se ainda que cada item é empacotado com relação a seu canto inferior esquerdo traseiro. Assim, o objetivo do problema é determinar quantos itens de cada tipo devem ser empacotados no contêiner e a posição em que cada item deve ser empacotado para que o valor do empacotamento seja máximo. Os itens escolhidos para o carregamento não devem se sobrepor quando colocados inteiramente dentro do contêiner.

A Figura 3.1 mostra também a posição  $p_i = (X_i, Y_i, Z_i)$  onde o item  $i$  é empacotado no contêiner. A determinação dessa posição, para cada item  $i$ , deve ser feita de forma a satisfazer a condição de não sobreposição, ou seja, as posições  $p_i$  devem ser determinadas de forma que nenhum item ocupe qualquer espaço ocupado por outro item.

Figura 3.1 – Representação do empacotamento de um item conforme o sistema de coordenadas adotado.



Fonte – a autora.

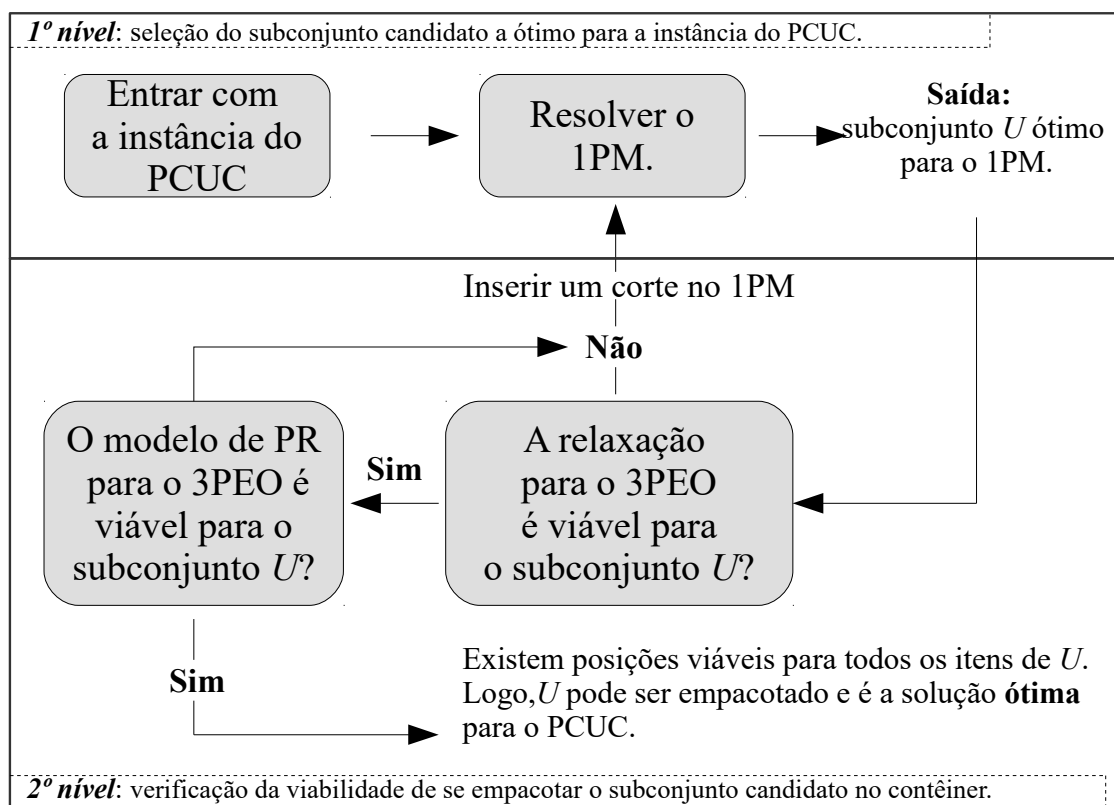
A determinação da posição  $p_i$  onde cada item  $i$  deve ser empacotado também depende da existência de questões práticas, como por exemplo, restrições que estabelecem que os itens não se desloquem durante o transporte, ou de forma que seja possível retirar do contêiner os itens de um cliente sem que os itens de outro cliente bloqueiem tal retirada. De forma similar ocorre com a escolha dos itens para o carregamento, uma vez que ela depende se há ou não restrições voltadas à prioridade de certos itens sobre outros, ao carregamento completo de itens do mesmo grupo, à ocorrência de itens que não podem ser empacotados juntos no mesmo contêiner, entre outras restrições discutidas no capítulo anterior.

A abordagem para resolver o PCUC é esquematizada no fluxograma da Figura 3.2. Nessa abordagem, entra-se, primeiramente, com uma instância do PCUC. Essa instância contém informações sobre os itens e o contêiner do caso particular que se está lidando. Tais informações referem-se aos parâmetros mencionados na definição do problema. Após obter as informações da instância, calcula-se o domínio de pontos a ser utilizado no momento de empacotar os itens. Este domínio é obtido removendo as coordenadas consideradas desnecessárias. Utiliza-se, para isso, a estratégia *Reduced Raster Points*. Em seguida, relaxa-se o PCUC, que é um problema tridimensional, para um problema unidimensional. Faz-se isso desconsiderando às questões de posicionamento e sobreposição dos itens. Quando isso é feito, recai-se sobre o Problema da Mochila Unidimensional (1PM), que é resolvido, obtendo um subconjunto de itens de máximo valor. Este subconjunto é considerado um candidato a ótimo do PCUC, isto é, um limitante superior, indicando que o subconjunto ótimo foi selecionado ou que será outro subconjunto cujo valor é menor do que o valor desse limitante. Assim, faz-se necessário resolver o *Problema de Empacotamento Ortogonal Tridimensional* (3PEO), que tem por objetivo verificar se os itens do subconjunto escolhido podem ser empacotados.

Para resolver o 3PEO, utiliza-se, a priori, uma relaxação de PI, sendo denotada por

rel-3PEO. Esta relaxação recebe como entrada os itens do subconjunto selecionado ao se resolver o 1PM. O objetivo, nesta etapa, é verificar de forma mais rápida se o subconjunto é inviável para o empacotamento. Se a inviabilidade for constatada, resolve-se a relaxação relacionada ao 1PM com um corte na formulação, visando selecionar um subconjunto diferente. Por outro lado, se a resolução da relaxação para o 3PEO retornar uma resposta viável, então se resolve o modelo de programação por restrições para o 3PEO. Se a resolução deste modelo retornar que é viável empacotar o subconjunto, então a solução ótima foi encontrada, caso retorne inviável, resolve-se a relaxação relacionada ao 1PM com o corte para a seleção de um subconjunto diferente. Na Figura 3.2,  $U$  está se referindo ao subconjunto de itens que é selecionado quando o 1PM é resolvido.

Figura 3.2 – Fluxograma da abordagem exata de dois níveis para o PCUC.



Fonte – a autora.

## 3.2 Primeiro Nível: Resolvendo o 1PM

Entende-se por relaxação o ato de tornar mais flexível alguma restrição do problema ou o ato de resolver o problema sem considerar alguma de suas restrições (ARENALES *et al.*, 2007). Isso significa que algum aspecto do problema deixa de ser exigido ou que algum aspecto está sendo relaxado a ponto de tornar o espaço de soluções para o problema menos restrito. Um exemplo de relaxação, que é bastante utilizada na resolução de problemas de

programação inteira, consiste em relaxar o domínio das variáveis de decisão, permitindo que elas assumam valores contínuos e não somente valores inteiros. Quando isso é feito, diz-se que a condição de integralidade das variáveis foi relaxada (BELFIORE; FÁVERO, 2013).

A intenção por trás de uma relaxação para um problema de otimização é a obtenção, geralmente rápida, de limitantes (inferiores ou superiores) para o valor da solução ótima (ARENALES *et al.*, 2007). Para problemas de maximização, como o PCUC, tem-se que as relaxações conduzem a limitantes superiores (SCHEITHAUER, 2017). Isso significa que se um valor é tido como um limitante superior para um problema de maximização, o valor da solução ótima para o referido problema é um valor menor ou igual ao limitante superior.

Uma maneira de relaxar o PCUC e obter um limitante superior para o mesmo é deixando de considerar as questões geométricas do problema, isto é, a posição em que cada item é empacotado no contêiner. Quando se faz isso, recai-se sobre o problema da mochila unidimensional, isto é, o 1PM. A resolução do 1PM busca escolher um subconjunto de itens de valor máximo para o carregamento e de tal forma que tais itens não excedam a capacidade do contêiner, que, neste caso, diz respeito ao volume. Dessa forma, tem-se que o valor ótimo do 1PM é um limitante superior para o valor ótimo do PCUC.

Um modelo para o 1PM é apresentado em (3.1)-(3.4) e leva em consideração uma variável de decisão  $r_i$ , que assume valor 1 se o item  $i$  é carregado e valor 0 caso  $i$  não seja carregado. A função objetivo é dada em (3.1) e visa maximizar o valor do carregamento. A restrição (3.2) garante que o volume dos itens escolhidos não excederá o volume total do contêiner. As restrições (3.3) impõem que itens do mesmo tipo com índices maiores só sejam levados se forem levados os itens com índices menores do respectivo tipo. Nessa restrição,  $I_k^*$  é o conjunto de índices dos itens do tipo  $k$ , para  $k \in K$ , com exceção do índice de maior valor. A intenção com essa restrição é quebrar simetrias entre as soluções possíveis para o problema. Soluções simétricas, no caso do PCUC, consistem em combinações diferentes para as variáveis de decisão, mas que, quando olhadas a fundo, representam o mesmo conjunto de itens. Por fim, o domínio da variável de decisão  $r_i$  está em (3.4).

$$\text{Maximizar } \sum_{i \in I} v_i r_i \quad (3.1)$$

$$\sum_{i \in I} (l_i c_i a_i) r_i \leq LCA \quad (3.2)$$

$$r_i \geq r_{i+1}, \quad \forall k \in K, i \in I_k^* \quad (3.3)$$

$$r_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I \quad (3.4)$$

Para exemplificar o conceito de soluções simétricas, considere um conjunto composto por 3 tipos de itens. Os itens 1, 2, 3 e 4 são do tipo 1, os itens 5, 6 e 7 do tipo 2 e os itens 8, 9 e 10 são do tipo 3. Para este conjunto, a solução composta pelos itens 1, 2, 5, 6, 9 e 10 é simétrica à solução composta pelos itens 3, 4, 5, 7, 8, 9, porque, ambas representam o mesmo conjunto de itens. Em ambas as soluções há dois itens de cada tipo. Para cada item em uma solução, existe um item igual (simétrico) a ele na outra solução, embora com índice diferente. Com isso, se uma das soluções é inviável, a outra também é. Logo, evitar que a abordagem selecione subconjuntos simétricos aos que já foram verificados inviáveis tende a contribuir para que se alcance a solução ótima do problema mais rapidamente.

### 3.3 Segundo Nível: Resolvendo o 3PEO

Uma vez que o subconjunto  $U$  é selecionado, o valor da função objetivo (3.1) associado a ele é um limitante superior para o PCUC. Uma vez que um limitante superior é encontrado, tal solução é considerada ótima para o PCUC se os itens associados a ela puderem ser empacotados sem sobreposição e inteiramente dentro do contêiner. A verificação da viabilidade de se empacotar  $U$  no contêiner pode ser feita por meio da resolução do Problema de Empacotamento Ortogonal Tridimensional (3PEO) para os itens de  $U$ . O 3PEO busca determinar posições viáveis para empacotar todos os itens de um dado conjunto. Se isso for possível, diz-se que é viável (factível) empacotar os itens de  $U$ . Caso contrário, o conjunto é considerado inviável (infactível) quanto ao empacotamento (MESYAGUTOV; SCHEITHAUER; BELOV, 2012).

O 3PEO é resolvido neste trabalho por um modelo de programação por restrições (PR). Porém, faz-se inicialmente a resolução de um modelo de PI, que consiste em um modelo relaxado para o 3PEO, para tentar detectar mais rápido se  $U$  é infactível e, assim, evitar chamadas ao modelo de PR.

#### 3.3.1 Relaxação para o 3PEO

Propõe-se neste trabalho uma relaxação para o 3PEO. Tal relaxação considera o contêiner discretizado em retas que incidem perpendicularmente aos planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$ . Assim, impõem-se que as somas das larguras, comprimentos e alturas dos itens que interceptam as respectivas retas não ultrapassem a largura, o comprimento e a altura do contêiner.

Para formular a nova relaxação para o 3PEO, considera-se que o índice  $i$  é usado para referenciar os itens e que os índices  $p$  e  $s$ ,  $q$  e  $t$  e  $r$  e  $u$  estão associados com as posições em que os itens são empacotados nos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Assim, consideram-se as variáveis de decisão:  $\beta_{ipq}$ ,  $\gamma_{ipr}$  e  $\delta_{iqr}$ . Elas estão associadas, respectivamente, aos planos  $xy$ ,

$xz$  e  $yz$  e são definidas da seguinte forma:

$$\beta_{ipq} = \begin{cases} 1, & \text{se o item } i \text{ é empacotado na posição } (p, q) \text{ com relação ao plano } xy. \\ 0, & \text{caso ocorra o contrário.} \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\gamma_{ipr} = \begin{cases} 1, & \text{se o item } i \text{ é empacotado na posição } (p, r) \text{ com relação ao plano } xz. \\ 0, & \text{caso ocorra o contrário.} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\delta_{iqr} = \begin{cases} 1, & \text{se o item } i \text{ é empacotado na posição } (q, r) \text{ com relação ao plano } yz. \\ 0, & \text{caso ocorra o contrário.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Além disso, consideram-se os conjuntos  $X_d$ ,  $Y_d$ ,  $Z_d$ ,  $X_r$ ,  $Y_r$  e  $Z_r$  de coordenadas possíveis para empacotar os itens nos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Os conjuntos  $X_d$ ,  $Y_d$  e  $Z_d$  são calculados, respectivamente, em (3.8), (3.9) e (3.10) e consistem dos *canonical dissections* ou *normal patterns* (HERZ, 1972). Os conjuntos  $X_r$ ,  $Y_r$  e  $Z_r$  são calculados, respectivamente, em (3.11), (3.12) e (3.13), sendo denominados de *reduced raster points* (SCHEITHAUER; TERNO, 1996).

$$X_d = \{p \in \mathbb{Z} \mid p = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i l_i, 0 \leq p \leq L, 0 \leq \varepsilon_i \leq b_i, \varepsilon_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, m\} \quad (3.8)$$

$$Y_d = \{q \in \mathbb{Z} \mid q = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i c_i, 0 \leq q \leq C, 0 \leq \varepsilon_i \leq b_i, \varepsilon_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, m\} \quad (3.9)$$

$$Z_d = \{r \in \mathbb{Z} \mid r = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i a_i, 0 \leq r \leq A, 0 \leq \varepsilon_i \leq b_i, \varepsilon_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, m\} \quad (3.10)$$

$$X_r = \{(L - p)_x \mid p \in X_d\}, \text{ em que } (L - p)_x = \max\{a \in X_d \mid a \leq L - p\}. \quad (3.11)$$

$$Y_r = \{(C - q)_y \mid q \in Y_d\}, \text{ em que } (C - q)_y = \max\{b \in Y_d \mid b \leq C - q\}. \quad (3.12)$$

$$Z_r = \{(A - r)_z \mid r \in Z_d\}, \text{ em que } (A - r)_z = \max\{c \in Z_d \mid c \leq A - r\}. \quad (3.13)$$

Os *discretization points* e os *reduced raster points* são obtidos a partir da ideia de tentar retirar do domínio de coordenadas para empacotar os itens as coordenadas desnecessárias para posicionar os mesmos. Os *reduced raster points* são obtidos a partir dos *discretization points* e, por isso, a malha de pontos *reduced raster points* tende a ser mais reduzida com

relação à quantidade de pontos do que a malha de *discretization points*. Os conjuntos de coordenadas  $X_i$ ,  $Y_i$  e  $Z_i$ , onde o item  $i$  pode ser empacotado, são definidos, respectivamente, em (3.14), (3.15) e (3.16), para todo  $i \in I$ . Em (3.14), (3.15) e (3.16),  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  podem ser  $X_d$ ,  $Y_d$  e  $Z_d$ , caso a malha de pontos escolhida seja os *canonical dissections*, ou  $X_r$ ,  $Y_r$  e  $Z_r$ , caso se utilize os *reduced raster points*.

$$X_i = \{p \in X \mid 0 \leq p \leq L - l_i\}, \quad \forall i \in U \quad (3.14)$$

$$Y_i = \{q \in Y \mid 0 \leq q \leq C - c_i\}, \quad \forall i \in U \quad (3.15)$$

$$Z_i = \{r \in Z \mid 0 \leq r \leq A - a_i\}, \quad \forall i \in U \quad (3.16)$$

Diante disso, tem-se que a relaxação para o 3PEO é formulada em (3.17)-(3.26), a saber:

$$\sum_{i \in U} \sum_{\{p \in X_i \mid s - l_i + 1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in Y_i \mid t - c_i + 1 \leq q \leq t\}} a_i \beta_{ipq} \leq A, \quad \forall s \in X_r, t \in Y_r \quad (3.17)$$

$$\sum_{i \in U} \sum_{\{p \in X_i \mid s - l_i + 1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{r \in Z_i \mid u - a_i + 1 \leq r \leq u\}} c_i \gamma_{ipr} \leq C, \quad \forall s \in X_r, u \in Z_r \quad (3.18)$$

$$\sum_{i \in U} \sum_{\{q \in Y_i \mid t - c_i + 1 \leq q \leq t\}} \sum_{\{r \in Z_i \mid u - a_i + 1 \leq r \leq u\}} l_i \delta_{iqr} \leq L, \quad \forall t \in Y_r, u \in Z_r \quad (3.19)$$

$$\sum_{t \in Y_i} \beta_{ist} = \sum_{u \in Z_i} \gamma_{isu}, \quad \forall i \in U, \quad \forall s \in X_r \quad (3.20)$$

$$\sum_{s \in X_i} \beta_{ist} = \sum_{u \in Z_i} \delta_{itu}, \quad \forall i \in U, \quad \forall t \in Y_r \quad (3.21)$$

$$\sum_{s \in X_i} \gamma_{isu} = \sum_{t \in Y_i} \delta_{itu}, \quad \forall i \in U, \quad \forall u \in Z_r \quad (3.22)$$

$$\sum_{p \in X_i} \sum_{q \in Y_i} \beta_{ipq} = 1, \quad \forall i \in U \quad (3.23)$$

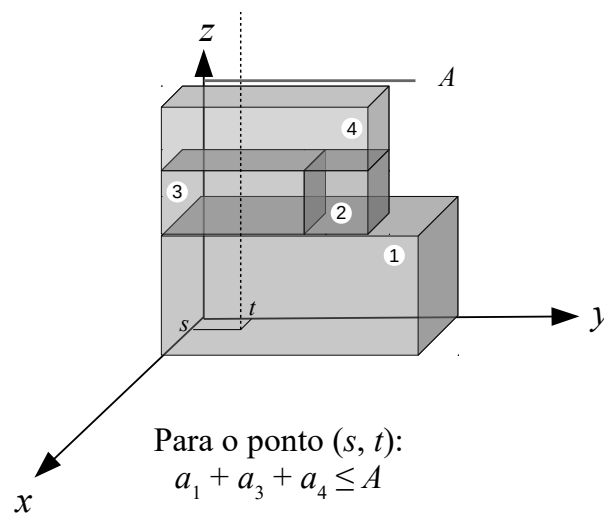
$$\beta_{ipq} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in U, \quad \forall p \in X_r, \quad \forall q \in Y_r \quad (3.24)$$

$$\gamma_{ipr} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in U, \quad \forall p \in X_r, \quad \forall r \in Z_r \quad (3.25)$$

$$\delta_{iqr} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in U, \quad \forall q \in Y_r, \quad \forall r \in Z_r \quad (3.26)$$

Na formulação (3.17)-(3.26), as restrições em (3.17) impõem que, para cada reta que é perpendicular a um ponto  $(s, t)$  no plano  $xy$ , a soma das alturas dos itens que interceptam tal reta deve ser menor ou igual a altura do contêiner. Um exemplo dessas restrições é ilustrado na Figura 3.3 para um ponto  $(s, t)$ . As restrições em (3.18) impõem que, para cada reta que é perpendicular a um ponto  $(s, u)$  no plano  $xz$ , a soma dos comprimentos dos itens que interceptam tal linha deve ser menor ou igual ao comprimento do contêiner. As restrições (3.19) impõem que, para cada reta que é perpendicular a um ponto  $(t, u)$  no plano  $xz$ , a soma das larguras dos itens que interceptam tal reta deve ser menor ou igual a largura do contêiner. As restrições (3.20), (3.21) e (3.22) garantem que existe uma coordenada  $s$  no eixo  $x$  para empacotar o item  $i$  se e somente se existirem coordenadas  $t$  e  $u$  nos respectivos eixos  $y$  e  $z$  para empacotar  $i$ . As restrições (3.23), devido às restrições (3.20), (3.21) e (3.22), indicam que todo item  $i$  de  $U$  precisa ser empacotado em alguma posição  $(p, q, r)$ . Em (3.24), (3.25) e (3.26) são apresentados os domínios das variáveis de decisão.

Figura 3.3 – Exemplo de um empacotamento que satisfaz a restrição (3.17) para um ponto  $(s, t)$ .



Fonte – a autora.

### 3.3.2 Modelo de programação por restrições para o 3PEO

Na relaxação apresentada para o 3PEO, se ao menos uma das restrições não for satisfeita, tem-se que o subconjunto  $U$  não pode ser empacotado no contêiner. Se todas as restrições forem satisfeitas, tem-se que a formulação é viável, contudo, não é possível afirmar que os itens podem ser arranjados no contêiner de forma que nenhum item ocupe o espaço ocupado por outro item. Isso se deve ao fato da relaxação possuir uma forma relaxada

das restrições de não sobreposição. Logo, no caso de viabilidade, torna-se ainda necessário resolver o 3PEO.

Um modelo de programação por restrições (PR) leva em consideração um conjunto de variáveis de decisão e restrições. Cada variável de decisão possui um domínio, geralmente finito, que é o conjunto de valores possíveis que ela pode assumir. O objetivo é encontrar uma combinação de valores que satisfaça todas as restrições do problema. Assim, um modelo básico de programação por restrições para o 3PEO consiste em definir a condição em (3.27) para todo par de itens  $i$  e  $j$  do subconjunto  $U$  a ser analisado (MESYAGUTOV; SCHEITHAUER; BELOV, 2012; SCHEITHAUER, 2017). Em outras palavras, tais restrições estabelecem que se o item  $i$  é empacotado em um ponto  $(X_i, Y_i, Z_i)$ , o item  $j$  (diferente de  $i$ ) deve ser empacotado em um ponto  $(X_j, Y_j, Z_j)$  de tal forma que  $j$  fique acima, abaixo ou em um dos lados do item  $i$ . Se a restrição for satisfeita para todo par de itens  $i$  e  $j$ , tem-se que o subconjunto  $U$  pode ser empacotado sem sobreposição dentro do contêiner. Os domínios das variáveis de decisão  $X_i$ ,  $Y_i$  e  $Z_i$  estão definidos, respectivamente, em (3.14), (3.15) e (3.16).

$$X_i + l_i \leq X_j \vee X_j + l_j \leq X_i \vee Y_i + c_i \leq Y_j \vee Y_j + c_j \leq Y_i \vee Z_i + a_i \leq Z_j \vee Z_j + a_j \leq Z_i, \quad (3.27)$$

$$\forall i, j \in U$$

### 3.3.3 Cortes

Toda vez que um subconjunto  $U$  não pode ser empacotado no contêiner, um corte precisa ser inserido no modelo do 1PM para que um subconjunto diferente seja encontrado da próxima vez que o 1PM for resolvido. Um corte que pode ser utilizado para isso é o corte definido pela desigualdade (3.28). Nesse corte, a soma no lado esquerdo da desigualdade (3.28) envolve todos os itens de  $U$ . A imposição de que essa soma seja menor ou igual a  $|U| - 1$  garante que, da próxima vez que o 1PM for resolvido, caso  $U$  seja selecionado novamente, ao menos um de seus itens devem ser deixado de fora.

$$\sum_{i \in U} r_i \leq |U| - 1 \quad (3.28)$$

No entanto, o corte (3.28) é considerado como um corte fraco, principalmente quando há várias cópias de cada tipo de item. Com isso, um corte melhor se faz necessário a fim de diminuir o espaço de busca e, assim, contribuir para que se encontre o subconjunto ótimo mais rapidamente. Tendo isso em vista, propõe-se a substituição do corte (3.28) pelo corte representado na desigualdade (3.29). Neste último corte, já não se considera as variáveis associadas a todos os itens de  $U$  como no corte antigo. Por outro lado, consideram-se as variáveis associadas aos itens de um subconjunto  $U'$ . Cada elemento de  $U'$  diz respeito ao

último item (isto é, de maior índice) de cada tipo  $k$  presente em  $U$ . Com isso, entram no corte as variáveis associadas ao último item de cada tipo  $k$  presente na solução encontrada para o 1PM, fazendo com que ao menos um item pertencente ao conjunto  $U'$  não esteja presente no próximo subconjunto a ser encontrado.

$$\sum_{i \in U'} r_i \leq |U'| - 1 \quad (3.29)$$

A escolha por considerar os últimos itens de cada tipo no corte (3.29) se baseia na restrição (3.3) para simetrias considerada no modelo do 1PM. Como essa restrição impõem que os últimos itens de cada tipo só sejam levados se os itens anteriores (isto é, de menor índice) do mesmo tipo forem levados. Eliminar pelo menos um dentre os itens de maior índice de cada tipo não prejudicará a escolha quanto aos demais itens de índices menores.

### 3.4 Resolução dos Modelos Matemáticos

Os modelos que compõem a abordagem são resolvidos, iterativamente, conforme o fluxograma da Figura 3.2 usando o pacote IBM ILOG CPLEX Optimization Studio. Este pacote conta com algoritmos voltados à resolução de problemas de programação linear inteira, não linear e programação por restrições. Para resolver problemas de programação inteira, o pacote utiliza um algoritmo padrão baseado no método *branch-and-cut*. Neste método, resolvem-se relaxações de problemas lineares inteiros, tal que novos problemas vão aparecendo a partir da inserção de restrições para eliminar soluções fracionárias (*branch*), enquanto cortes são inseridos para eliminar problemas que não são promissores e evitar a criação de novos problemas (*cut*) (MESYAGUTOV; SCHEITHAUER; BELOV, 2012).

Para resolver problemas de programação por restrições, o IBM ILOG CPLEX conta com um algoritmo do tipo *branch-and-prune*. Assim, o problema original é ramificado em novos problemas a partir da atribuição de valores para as variáveis conforme o domínio de cada uma (*branch*). Em cada novo problema, aplicam-se técnicas de redução de domínio, como por exemplo, a propagação de restrições, e também técnicas para provar a infactibilidade da solução que está sendo construída (*prune*).

Geralmente, a ordem com que as variáveis e os valores são escolhidos na programação por restrições é determinada por meio de métodos heurísticos (TAVARES, 2000). Uma das heurísticas segue o princípio de tentar primeiro aonde é mais provável falhar (MESYAGUTOV; SCHEITHAUER; BELOV, 2012). A ideia é eliminar o quanto antes soluções parciais que não conduzem a uma solução factível. Outra heurística consiste em tentar primeiro as variáveis que possuem o menor valor dentro do domínio, visando diminuir a quantidade de novos problemas resolvidos.

## Capítulo 4

---

# RESTRIÇÕES PRÁTICAS

---

Restrições práticas no contexto de problemas de empacotamento capturam aspectos do contexto real dos problemas. Essas restrições trazem considerações que influenciam na escolha dos itens a serem carregados no contêiner e nas posições em que eles podem ser posicionados. A importância dessas restrições está ligada aos contextos práticos de tomada de decisão, que requerem a consideração de aspectos que vão além dos relacionados à satisfação da não sobreposição e dos itens estarem inteiramente dentro do recipiente. Diante disso, este capítulo apresenta como modelar e incorporar, na abordagem discutida no capítulo anterior para o PCUC, treze restrições que capturam questões que ocorrem na prática do carregamento de itens em contêineres. Essas restrições, segundo [Bischoff e Ratcliff \(1995\)](#), fazem parte de um grupo de mais de dez restrições importantes quando se trata de tal problema.

As restrições tratadas aqui são para garantir o carregamento completo de itens de um mesmo cliente, impedir que itens conflitantes sejam empacotados juntos no contêiner (restrição de grafo de conflitos), tratar questões de prioridade no envio de itens, limite de peso, estabilidade vertical e horizontal do carregamento, fragilidade dos itens, balanceamento de carga, ordem de entrega, corte guilhotinado, carregamento manual, agrupamento e separação de itens e orientação. As restrições de carregamento completo, grafo de conflitos, prioridade e limite de peso influenciam na escolha de quais itens empacotar no contêiner, ao passo que as restrições de estabilidade vertical, estabilidade horizontal, fragilidade, balanceamento de carga, ordem de entrega, corte guilhotinado, carregamento manual, agrupamento, separação e orientação impactam na posição em que os itens são arranjados dentro do contêiner. Dessa forma, as restrições que impactam na escolha dos itens a serem carregados devem ser consideradas ao resolver o modelo para o 1PM (que é utilizado para escolher os itens), enquanto que as restrições que impactam no posicionamento dos itens devem ser consideradas no modelo de programação por restrições para o 3PEO (que contém variáveis para indicar as posições em que os itens devem ser empacotados no contêiner). Logo, utiliza-se as variáveis já definidas para esses modelos para modelar as restrições e, quando

necessário, novas variáveis são consideradas.

## 4.1 Carregamento Completo

Considera-se que existem  $NC$  clientes para os quais os itens devem ser entregues e que  $A_d$  representa o conjunto que contém os itens que devem ser entregues ao cliente  $d$ , para  $d = 1, \dots, NC$ . As restrições em (4.1), inseridas no modelo para o 1PM, impõem que se um item do cliente  $d$  for escolhido para o empacotamento, todos os demais itens deste cliente devem ser empacotados também.

$$|A_d| r_i \leq \sum_{j \in A_d} r_j, \quad \forall d = 1, \dots, NC, \quad i \in A_d \quad (4.1)$$

Assim, se um item do cliente  $d$  é escolhido para o carregamento, então  $r_i$  assume valor 1 e, então, o lado esquerdo da desigualdade em (4.1) torna-se igual a quantidade de itens do cliente  $d$ . Quando isso ocorre, tem-se que a desigualdade em (4.1) só é satisfeita se todos os itens do cliente  $d$  forem levados no carregamento. Desse modo, o lado direito da desigualdade também se torna igual a quantidade de itens do cliente  $d$ .

## 4.2 Grafo de Conflitos

Em contextos práticos é comum que alguns itens não possam ser empacotados juntos no mesmo recipiente devido às suas especificidades técnicas, de forma que se impõe um grafo de conflitos  $G = (I, E)$ , em que  $I$  é o conjunto total de itens disponíveis considerando as cópias de cada tipo, ou seja, os vértices do grafo, e  $E$  o conjunto de arestas do grafo, de modo que cada aresta  $(i, j)$  em  $E$  impõe que os itens  $i$  e  $j$  são conflitantes, isto é, não podem ser colocados juntos no recipiente (ou empacota o item  $i$ , ou o  $j$ , ou não empacota nenhum).

Para lidar com os conflitos entre os itens, faz-se a inserção das restrições (4.2) no modelo do 1PM, para cada par de itens  $i$  e  $j$  conflitantes. A restrição garante que se dois itens são conflitantes, no máximo um dos itens é carregado, de forma que a solução encontrada é aquela de máximo valor composta por itens não conflitantes entre si.

$$r_i + r_j \leq 1, \quad \forall (i, j) \in E \quad (4.2)$$

## 4.3 Prioridade

A decisão de quais itens carregar no contêiner para que o valor do empacotamento seja máximo está ligada ao fato de que alguns itens possuem prioridade sobre outros para

estarem no carregamento. Isso se deve, por exemplo, à presença de itens com prazos de entrega mais urgentes do que os de outros itens (BISCHOFF; RATCLIFF, 1995).

A restrição de prioridade é modelada em (4.3), sendo baseada na restrição proposta por Vancroonenburg *et al.* (2014), para tratar prioridade no carregamento de itens em aeronaves, e incorporada no modelo para o 1PM. Tal restrição considera que os itens são agrupados em níveis de prioridade  $p = 1, \dots, NP$ , em que  $NP$  é o número de níveis de prioridade. Itens com prioridade  $p = 1$  são mais importantes do que itens com prioridade  $p = 2$  e, assim sucessivamente, até  $p = NP$ . Em (4.3),  $P_p$  é o conjunto de itens com prioridade  $p$  e  $P_{p-1}$  é o conjunto em um nível de prioridade anterior, que é mais importante do que o nível  $p$ . Logo, impõe-se que os itens de um nível de prioridade inferior (prioridade  $p$ ) só podem ser carregados se todos os itens de um nível de prioridade superior (prioridade  $p - 1$ ) forem carregados.

$$|P_{p-1}| r_i \leq \sum_{j \in P_{p-1}} r_j, \quad p = 2, \dots, NP, \quad \forall i \in P_p \quad (4.3)$$

Como exemplo, suponha a existência de 10 itens, cada um com prioridade  $p$  conforme mostra a Tabela 4.1. Para este exemplo, o conjunto  $P_1$  contém os itens de prioridade 1, que são os itens que tem maior prioridade para estarem presentes no carregamento, sendo composto pelos itens 1, 4, 7 e 10. O conjunto  $P_2$  é formado pelos itens 2, 5 e 8. O conjunto  $P_3$  é composto pelos itens 3, 6 e 9. Dessa forma, os itens de  $P_2$  só podem ser levados se todos os itens de  $P_1$  forem levados, e o mesmo se estende aos itens de prioridade  $P_3$ .

Tabela 4.1 – Exemplo ilustrativo para as restrições de prioridade em (4.3).

Item	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prioridade	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1

Fonte – a autora.

As restrições de prioridade para o exemplo na Tabela 4.1 iniciam com os itens de prioridade 2, visto que é necessário estabelecer restrições para todos os itens e de todos os níveis de prioridade a partir do nível 2. O primeiro item de  $P_2$  a ser trabalhado é o item 2, representado pela variável  $r_2$ , resultando na restrição (4.4). Assim, o item 2 só pode ser carregado, isto é,  $r_2 = 1$  se as variáveis  $r_1, r_4, r_7$  e  $r_{10}$  assumirem todas valor 1, ou seja, se os itens de  $P_1$  forem carregados. Os itens pertencentes a um conjunto de prioridade menos importante só são levados se todos os itens dos conjuntos de prioridade mais importantes forem levados também. Analogamente, tem-se restrições para os próximos itens de  $P_2$  em (4.5) e (4.6), e as restrições para os itens de  $P_3$  em (4.7), (4.8) e (4.9).

$$|P_1| r_2 \leq \sum_{j \in P_1} r_j \quad (4.4)$$

$$4r_2 \leq r_1 + r_4 + r_7 + r_{10}$$

$$4r_5 \leq r_1 + r_4 + r_7 + r_{10} \quad (4.5)$$

$$4r_8 \leq r_1 + r_4 + r_7 + r_{10} \quad (4.6)$$

$$3r_3 \leq r_2 + r_5 + r_8 \quad (4.7)$$

$$3r_6 \leq r_2 + r_5 + r_8 \quad (4.8)$$

$$3r_9 \leq r_2 + r_5 + r_8 \quad (4.9)$$

Um ponto positivo de tratar a prioridade como na (4.3) vem do fato dessas restrições permitirem que os itens menos importantes só sejam empacotados se todos os mais importantes forem levados, podendo levar a uma diminuição no número de configurações possíveis para o empacotamento. Do ponto de vista de tempo computacional, a ideia é que fique mais rápido resolver o problema dessa forma. No entanto, do ponto de vista de volume empacotado, isso não pode ser vantajoso, pois, caso nem todos os itens de um conjunto com prioridade superior sejam empacotados, itens com prioridade inferior não podem ser empacotados, mesmo que haja espaço no contêiner.

Uma alternativa para as restrições de prioridade em (4.3) diz respeito a resolver um problema multiobjetivo. Assim, a prioridade deixa de ser considerada como uma restrição e é considerada como um segundo objetivo a ser alcançado, isto é, maximizar o volume carregado e a quantidade de itens com alta prioridade presentes no carregamento. Uma maneira de resolver esse problema multiobjetivo é utilizando o método da Soma Ponderada, em que, com base no peso atribuído a cada fator da soma (isto é, a cada objetivo buscado), é possível determinar uma solução priorizando o volume empacotado ou ter itens com grau de prioridade alta na solução (ou vice-versa), além de ser possível obter uma solução considerada um meio termo para os dois objetivos. Contudo, para realizar tal estudo, faz-se necessário resolver a abordagem exata várias vezes, considerando pesos diferentes para os dois objetivos, demandando um tempo computacional muito maior do que resolver a abordagem uma única vez com as restrições (4.3).

## 4.4 Limite de Peso

A restrição de limite de peso busca garantir que o peso total dos itens carregados não exceda a quantidade de peso que o contêiner suporta, sendo incorporadas no modelo para o 1PM. Seja então  $\omega_R$  o peso máximo que o contêiner suporta e  $\omega_i$  o peso de cada item  $i \in I$ . Assim, a soma de todos os pesos dos itens empacotados deve ser no máximo igual ao peso  $\omega_R$ , conforme a restrição (4.10).

$$\sum_{i \in I} \omega_i r_i \leq \omega_R \quad (4.10)$$

## 4.5 Estabilidade Vertical e Horizontal

A estabilidade do carregamento pode ser dividida em dois tipos: vertical e horizontal. A estabilidade vertical busca garantir que os itens não se desloquem com relação ao eixo  $z$ , ou seja, que eles consigam suportar a ação da gravidade, enquanto que a estabilidade horizontal busca garantir que eles não se desloquem com relação aos eixos  $x$  e  $y$ , isto é, permaneçam inertes (JUNQUEIRA; MORABITO; YAMASHITA, 2012).

Para tratar a estabilidade vertical e horizontal, a literatura tem comumente empregado um tipo de restrição baseada no suporte da base e das faces traseira e esquerda de cada item no carregamento (RAMOS *et al.*, 2016). Assim, busca-se garantir que todo item tenha um percentual  $\alpha \in [0, 1]$  da área de sua base suportada pelos itens que estão empacotados imediatamente abaixo e em contato direto com ele, um percentual  $\lambda \in [0, 1]$  da área de sua face traseira, apoiada pelos itens que estão localizados imediatamente atrás e em contato direto e um percentual  $\mu \in [0, 1]$  da área da face lateral esquerda apoiada pelos itens que estão empacotados imediatamente à esquerda e em contato direto.

Junqueira, Morabito e Yamashita (2012) propuseram uma formulação para tratar a estabilidade vertical e outra formulação para tratar estabilidade horizontal. A partir disso, fez-se uma adaptação de tais formulações para as abordagens deste trabalho através das restrições (4.11), (4.12) e (4.13), voltadas à estabilidade vertical, e, analogamente, adaptadas para a estabilidade horizontal.

As restrições em (4.11) e (4.12) são do tipo “se-então” e incorporadas ao modelo de PR para o 3PEO. As restrições em (4.11) estabelecem para um dado par de itens  $i, j$ , que se  $i$  está empacotado imediatamente abaixo de  $j$ , a variável auxiliar  $\sigma_{ji}$  assume o valor da área de contato entre os dois itens. As restrições em (4.12) estabelecem que se o item  $i$  não está empacotado imediatamente abaixo de  $j$ , a variável auxiliar  $\sigma_{ji}$  assume valor zero. O item  $i$  está empacotado imediatamente abaixo de  $j$  se as projeções de suas bases, sobre o plano  $xy$ , se interceptam e se a coordenada no eixo  $z$  onde  $i$  termina é igual a coordenada em que  $j$  é empacotado, sendo representado no lado esquerdo de (4.11), que se refere ao “se”.

A área de contato entre dois itens  $i$  e  $j$  é calculada pela multiplicação entre  $L_{ij}^{[1]}$  e  $C_{ij}^{[1]}$ . A Figura 4.1 ilustra a área de contato entre dois itens. Assim, as restrições (4.13) estabelecem que a soma das áreas de contato de  $j$  com todos os itens que estão empacotados imediatamente abaixo e em contato com ele deve ser no mínimo igual a  $\alpha$  por cento da área da base de  $j$ .

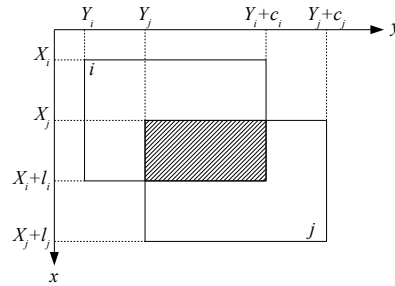
$$\begin{aligned} (Z_j = Z_i + a_i \wedge Z_j - a_i \geq 0 \wedge X_i > X_j - l_i \wedge X_i < X_j + l_j \wedge Y_i > Y_j - c_i \wedge Y_i < Y_j + c_j) \quad (4.11) \\ \longrightarrow \sigma_{ji} = L_{ij}^{[1]} C_{ij}^{[1]}, \quad \forall i, j \in U \end{aligned}$$

onde  $L_{ij}^{[1]} = \min(X_i + l_i, X_j + l_j) - \max(X_i, X_j)$  e  $C_{ij}^{[1]} = \min(Y_i + c_i, Y_j + c_j) - \max(X_i, X_j)$ .

$$\begin{aligned} \neg(Z_j = Z_i + a_i \wedge Z_j - a_i \geq 0 \wedge X_i > X_j - l_i \wedge X_i < X_j + l_j \wedge Y_i > Y_j - c_i \wedge Y_i < Y_j + c_j) \quad (4.12) \\ \longrightarrow \sigma_{ji} = 0, \quad \forall i, j \in U, \end{aligned}$$

$$\sum_{i \in U} \sigma_{ji} \geq \alpha l_j c_j, \quad \forall j \in U \quad (4.13)$$

Figura 4.1 – Área de contato entre a base do item  $j$  com o topo de  $i$ .



Fonte – adaptada de [Junqueira, Morabito e Yamashita \(2012\)](#).

As restrições (4.14)-(4.19) são incorporadas ao modelo de PR para o 3PEO para tratar a estabilidade horizontal. A variável auxiliar  $\rho_{ji}$  representa o contato entre a face traseira do item  $j$  com a face frontal do item  $i$ , quando ocorre contato, e a variável  $\tau_{ji}$  representa o contato entre a face lateral direita do item  $i$  e a face lateral esquerda do item  $j$ . Assim, as restrições (4.14) e (4.15), uma vez definidas para todos os pares de itens  $i$  e  $j$ , calculam o área de contato  $\rho_{ji}$  entre o item  $i$  e o item  $j$ . De forma semelhante, as restrições (4.17) e (4.18) calculam a área de contato  $\tau_{ji}$  entre  $i$  e  $j$ . As restrições em (4.16) estabelecem que a soma das áreas de todos os itens que estão empacotados imediatamente atrás e em contato com o item  $j$  seja no mínimo igual a  $\lambda\%$  da área da face traseira de  $j$ . As restrições em (4.19)

estabelecem que a soma das áreas de todos os itens que estão empacotados imediatamente ao lado esquerdo e em contato com  $j$  seja no mínimo  $\mu\%$  da área da face lateral esquerda de  $j$ . A área de contato entre a face traseira da caixa  $j$  e a face dianteira da caixa  $i$  está ilustrada na Figura 4.3. A Figura 4.3 também ilustra a área de contato entre a face lateral esquerda da caixa  $j$  e a face lateral direita da caixa  $i$ .

$$\begin{aligned} (X_j = X_i + l_i \wedge X_j - l_i \geq 0 \wedge Y_i > Y_j - c_i \wedge Y_i < Y_j + c_j \wedge Z_i > Z_j - a_i \wedge Z_i < Z_j + a_j) \quad (4.14) \\ \longrightarrow \rho_{ji} = C_{ij}^{[1]} A_{ij}^{[1]}, \quad \forall i, j \in U \end{aligned}$$

onde  $C_{ij}^{[1]} = \min(Y_i + c_i, Y_j + c_j) - \max(Y_i, Y_j)$  e  $A_{ij}^{[1]} = \min(Z_i + a_i, Z_j + a_j) - \max(Z_i, Z_j)$ .

$$\begin{aligned} \neg (X_j = X_i + l_i \wedge X_j - l_i \geq 0 \wedge Y_i > Y_j - c_i \wedge Y_i < Y_j + c_j \wedge Z_i > Z_j - a_i \wedge Z_i < Z_j + a_j) \quad (4.15) \\ \longrightarrow \rho_{ji} = 0, \quad \forall i, j \in U, \end{aligned}$$

$$\sum_{i \in U} \rho_{ji} \geq \lambda c_j a_j, \quad \forall j \in U \quad (4.16)$$

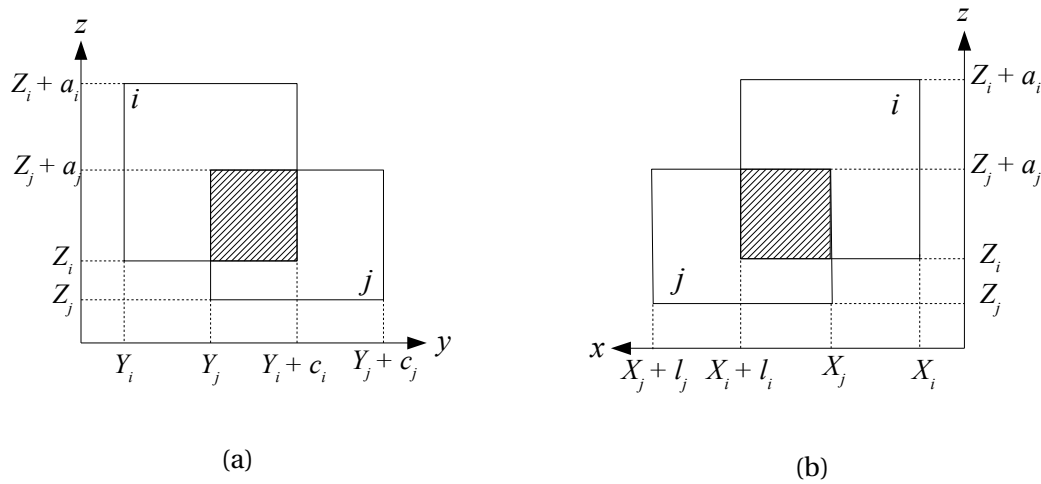
$$\begin{aligned} (Y_j = Y_i + c_i \wedge Y_j - c_i \geq 0 \wedge X_i > X_j - l_i \wedge X_i < X_j + l_j \wedge Z_i > Z_j - a_i \wedge Z_i < Z_j + a_j) \quad (4.17) \\ \longrightarrow \tau_{ji} = L_{ij}^{[1]} A_{ij}^{[1]}, \quad \forall i, j \in U \end{aligned}$$

onde  $L_{ij}^{[1]} = \min(X_i + l_i, X_j + l_j) - \max(X_i, X_j)$  e  $A_{ij}^{[1]} = \min(Z_i + a_i, Z_j + a_j) - \max(Z_i, Z_j)$ .

$$\begin{aligned} \neg (Y_j = Y_i + c_i \wedge Y_j - c_i \geq 0 \wedge X_i > X_j - l_i \wedge X_i < X_j + l_j \wedge Z_i > Z_j - a_i \wedge Z_i < Z_j + a_j) \quad (4.18) \\ \longrightarrow \tau_{ji} = 0, \quad \forall i, j \in U, \end{aligned}$$

$$\sum_{i \in U} \tau_{ji} \geq \mu l_j a_j, \quad \forall j \in U \quad (4.19)$$

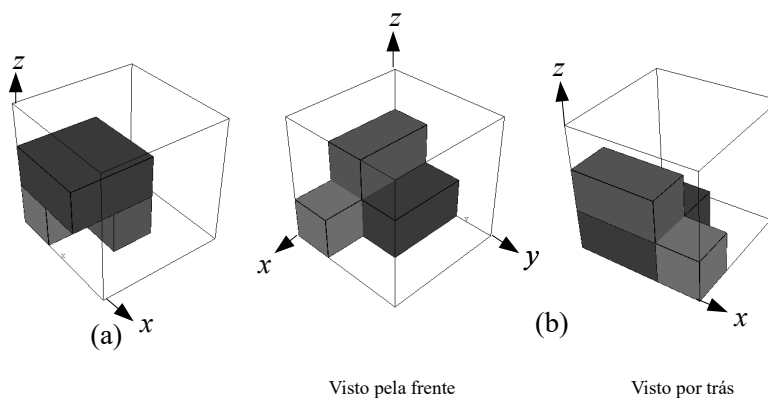
Figura 4.2 – Área de contato entre a face traseira do item  $j$  com a face frontal do item  $i$  em (a) e área de contato entre a face esquerda do item  $j$  com a face direita do item  $i$  em (b).



Fonte – adaptada de Junqueira, Morabito e Yamashita (2012).

A Figura 4.3 mostra um mesmo conjunto de itens em duas situações. A situação (a) ilustra os itens com apoio incompleto de suas bases e faces traseira e lateral esquerda por parte dos itens que estão imediatamente abaixo, atrás e à esquerda, respectivamente. A situação (b) mostra os itens posicionados de forma a ter suas bases e faces lateral esquerda completamente apoiadas pelas faces das caixas empacotadas imediatamente abaixo, atrás ou à esquerda.

Figura 4.3 – Exemplo de empacotamento sem apoio das bases e das faces traseira e esquerda das caixas em (a) e com apoio em (b).



Fonte – a autora.

## 4.6 Fragilidade

Uma questão importante relacionada à organização dos itens no contêiner diz respeito a evitar que itens sejam empacotados de forma que possam danificar itens considerados frágeis. Para os itens tidos como frágeis é comum virem associadas indicações especificando a quantidade máxima de itens que podem ser empacotados sobre eles ou a pressão máxima suportada por cada item (JUNQUEIRA; MORABITO; YAMASHITA, 2012). Assim, as restrições relacionadas à fragilidade dos itens são inseridas no modelo de PR para o 3PEO.

As restrições mencionadas buscam garantir que a quantidade de itens colocados sobre cada item frágil respeite a quantidade permitida pelo item ou que a pressão máxima exercida sobre cada item frágil não seja maior do que a pressão máxima por eles suportada. No entanto, como quantidade de itens e pressão são grandezas distintas, torna-se necessário definir restrições ligeiramente diferentes para modelar cada uma dessas situações. Assim, na subseção 4.6.1, discutem-se restrições para o caso que considera uma quantidade máxima de caixas sobre cada caixa frágil e, na subseção 4.6.2, discute-se sobre a pressão máxima suportada pelas caixas frágeis.

### 4.6.1 Limite no número de caixas

As restrições (4.20), (4.21) (4.22) modelam o caso em que sobre cada item  $i$  frágil só seja empacotada, no máximo, a quantidade de itens permitida. Essas restrições consideram  $F$  como o conjunto de todos os itens frágeis de  $U$  e  $f_i$  como a quantidade de itens que podem ser empacotados sobre cada item  $i$  de  $F$ . A ideia é fazer com que não mais do que  $f_i$  itens sejam colocados acima do item  $i$ .

Para a modelagem, torna-se necessário considerar uma variável de decisão auxiliar  $\varphi_{ij}$  definida para todo par de itens  $i$  e  $j$ . As restrições em (4.20) estabelecem que  $\varphi_{ij}$  assume 1 se o item  $j$  é empacotado acima de  $i$  e tem a sua base projetada sobre o topo de  $i$  gerando alguma interseção. Por outro lado, as restrições em (4.20) impõem que  $\varphi_{ij}$  assume valor 0, caso ocorra o contrário, que é os itens  $i$  e  $j$  não terem nenhuma projeção em comum. Por fim, as restrições em (4.22) garantem que, sobre cada item frágil  $i$ , pode existir no máximo  $f_i$  outros itens.

$$\begin{aligned} & ((Z_j \geq Z_i + a_i) \wedge (X_j < X_i + l_i) \wedge (X_j + l_j > X_i) \wedge (Y_j < Y_i + c_i) \wedge (Y_j + c_j > Y_i)) \\ & \longrightarrow \varphi_{ij} = 1, \quad \forall i, j \in U \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} & \neg((Z_j \geq Z_i + a_i) \wedge (X_j < X_i + l_i) \wedge (X_j + l_j > X_i) \wedge (Y_j < Y_i + c_i) \wedge (Y_j + c_j > Y_i)) \\ & \longrightarrow \varphi_{ij} = 0, \quad \forall i, j \in U \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\sum_{j \in U} \varphi_{ij} \leq f_i, \quad \forall i \in F \quad (4.22)$$

### 4.6.2 Pressão máxima admissível

As restrições de fragilidade por pressão buscam garantir que a pressão exercida sobre cada item  $i$  pelos itens que estão empacotados acima não exceda a pressão máxima admissível para  $i$ . Para garantir que essa condição seja respeitada, definem-se as restrições (4.23), (4.24) e (4.25) com base nas restrições propostas por [Junqueira, Morabito e Yamashita \(2012\)](#).

As restrições (4.23), (4.24) e (4.25) levam em consideração que cada item  $i$  em  $U$  possui peso  $\omega_i$  e suporta uma pressão máxima  $\eta_i$ . Assim, considera-se uma variável de decisão  $\varphi_{ij}$ , definida para todo item  $i \in U$ , que representa a pressão exercida pelo item  $j$ , que está acima de  $i$ , e possui domínio inteiro  $D(\varphi_{ij}) = \{\varphi_{ij} \in \mathbb{Z} \mid 0, \dots, \eta_i\}$ , impondo que ela pode assumir qualquer valor entre 0 e a pressão máxima suportada por  $i$ . Dessa forma, as restrições (4.23), definidas para todo par de itens  $i$  e  $j$ , impõem que se o item  $j$  está acima do item  $i$  de forma que ocorra interseção entre suas projeções no plano  $xy$ , então  $\varphi_{ij}$  representa a pressão exercida por  $j$  sobre  $i$ , que é calculada como  $\frac{\omega_j}{l_j c_j}$ . Caso o item  $j$  não esteja acima do item  $i$  (situação representada pelo lado esquerdo das restrições (4.24)),  $\varphi_{ij}$  recebe valor 0. Por fim, as restrições (4.25) impõem que a soma das pressões exercidas pelos itens que estão acima de  $i$  deve ser no máximo igual a pressão admissível  $\eta_i$ .

$$\begin{aligned} & ((Z_j \geq Z_i + a_i) \wedge (X_j < X_i + l_i) \wedge (X_j + l_j > X_i) \wedge (Y_j < Y_i + c_i) \wedge (Y_j + c_j > Y_i)) \\ & \longrightarrow \varphi_{ij} = \frac{\omega_j}{l_j c_j}, \quad \forall i, j \in U \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} & \neg((Z_j \geq Z_i + a_i) \wedge (X_j < X_i + l_i) \wedge (X_j + l_j > X_i) \wedge (Y_j < Y_i + c_i) \wedge (Y_j + c_j > Y_i)) \\ & \longrightarrow \varphi_{ij} = 0, \quad \forall i, j \in U \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\sum_{j \in U} \varphi_{ij} \leq \eta_i, \quad \forall i \in U \quad (4.25)$$

## 4.7 Ordem de Entrega

A restrição de ordem de entrega torna mais prático o caso em que um grupo de itens deve ser entregue a um determinado cliente, satisfazendo um roteiro de entrega. A ordem é definida de acordo com a rota estabelecida para o veículo que transporta o empacotamento e deve ser gerada de forma a evitar o remanejamento interno dos itens durante a operação

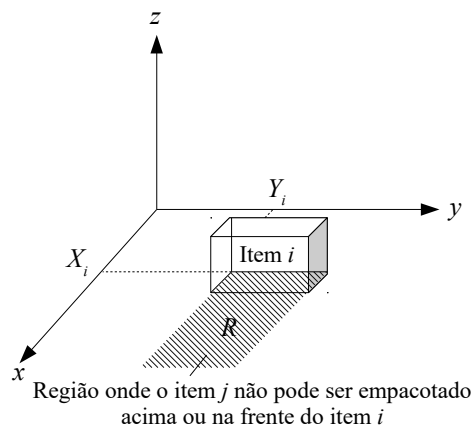
de descarregamento, situação que é bastante comum nas entregas (QUEIROZ; MIYAZAWA, 2013). Restrições de ordem podem ser modeladas assumindo que, se um item  $i$  é empacotado em um ponto dentro do recipiente, itens que possuem ordens de entrega superiores a este item, isto é, que devem ser entregues depois de  $i$ , não devem bloquear a retirada de  $i$ . A retirada dos itens é feita pela frente do contêiner, isto é, ao longo do eixo  $x$  e sempre retirando primeiro a caixa que está mais acima na pilha de caixas e mais próxima do descarregador ao longo do eixo  $x$ .

Considere, então, que existem  $NC$  clientes para os quais os itens devem ser entregues e que  $o_i = d$  representa o  $d$ -ésimo cliente a ser visitado e tal que o item  $i$  deve ser entregue, para  $d = 1, 2, \dots, NC$ . As restrições (4.26), para serem consideradas no modelo de PR para o 3PEO, são definidas para todo par de itens  $i$  e  $j$  tais que  $j$  deve ser entregue depois de  $i$ , garantem que os itens podem ser retirados do contêiner conforme a ordem em que eles devem ser entregues aos clientes. Esta restrição faz com que  $i$  seja empacotado em alguma coordenada acima (eixo  $z$ ) ou ao lado (eixo  $y$ ) de  $j$ , caso  $j$  bloqueie a retirada do item  $i$ . A Figura 4.4 ilustra a restrição de ordem, indicando a região em que o item  $j$ , que deve ser entregue depois, não pode ser empacotado.

$$X_j + l_j > X_i \wedge ((Y_j \leq Y_i \wedge Y_j + c_j > Y_i) \vee (Y_j \geq Y_i \wedge Y_i + c_i > Y_j)) \quad (4.26)$$

$$\longrightarrow Z_i \geq Z_j + a_j, \quad \forall i, j \in U$$

Figura 4.4 – Ilustração da região proibida para o item  $j$ .

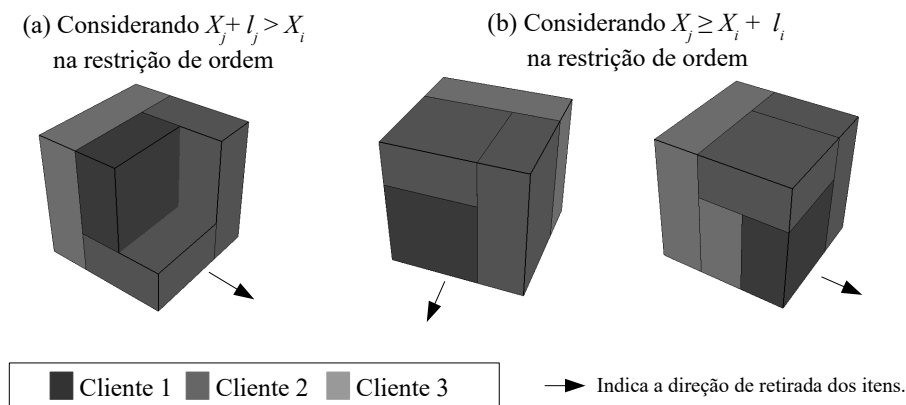


Fonte – a autora.

Um questionamento que pode surgir com relação a forma com que a restrição de ordem está sendo modelada é sobre considerar  $X_j \geq X_i + l_i$  em (4.26) ao invés de considerar  $X_j + l_j > X_i$  como está sendo feito. A condição  $X_j + l_j > X_i$ , nas restrições (4.26), diz que o item  $j$  tem seu fim, no eixo  $x$ , depois que o item  $i$  é empacotado no mesmo eixo, isto é, em

qualquer coordenada maior do que  $X_i$ . Por outro lado, a condição  $X_j \geq X_i + l_i$  impõe que o item  $j$  é empacotado logo após o fim do item  $i$  no eixo  $x$ . Em outras palavras, uma vez que se considera  $X_j \geq X_i + l_i$  é possível ter itens que devem ser entregues depois empacotados acima de itens que devem ser entregues antes, porque, para esses casos, a condição  $Z_i \geq Z_j + a_j$ , que implica que o item  $i$  (que deve ser entregue antes) seja empacotado em alguma altura  $Z_i$  acima do item  $j$  (que deve ser entregue depois), não é lançada. Para ilustrar essa questão, a Figura 4.5 ilustra dois empacotamentos diferentes para um mesmo conjunto de itens. A ordem de entrega dos itens da Figura 4.5 é primeiro os itens do cliente 1, depois os do cliente 2 e, por fim, os itens dos cliente 3.

Figura 4.5 – Exemplo com a restrição de ordem de entrega com  $X_j + l_j > X_i$  em (a) e  $X_j \geq X_i + l_i$  em (b).



Fonte – a autora.

O empacotamento (a) na Figura 4.5 foi gerado considerando as restrições em (4.26), isto é, com  $X_j + l_j > X_i$ . O empacotamento (b) foi gerado considerando  $X_j \geq X_i + l_i$ . Observa-se que, no empacotamento (a), os itens podem ser retirados conforme a ordem de entrega, visto que não há itens de ordem superior bloqueando a retirada de itens de ordem inferior, nem na frente, nem acima. Já, no empacotamento (b), existe um item do cliente 2 empacotado acima de um item do cliente 1. Como o cliente 2 é visitado após o cliente 1, tem-se que o item do cliente 1 deveria estar acima do item do cliente 2 e não ao contrário, como mostra o empacotamento (b).

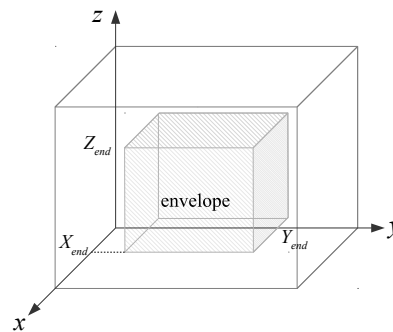
A situação mostrada no empacotamento (b) da Figura 4.5 ocorre justamente porque a restrição do lado direito de (4.26) não é lançada já que a situação de bloqueio não é verificada dada a presença da condição  $X_j \geq X_i + l_i$  no lado esquerdo. Contudo, para este exemplo, não há como colocar o item do cliente 1 acima do cliente 2 sem que nenhum item de ordem superior bloqueie ou fique acima de algum item de ordem inferior. Assim, no empacotamento (a), um item do cliente 3 foi deixado para trás para evitar que a situação (b) ocorresse, que é uma situação em que remanejar é necessário. Como o exemplo foi gerado utilizando a abor-

dagem exata proposta no trabalho, certamente, o item que foi deixado é aquele que menor compromete o volume final do carregamento.

## 4.8 Balanceamento de Carga

O balanceamento de carga preocupa-se com a distribuição do peso do empacotamento dentro do recipiente. Este peso precisa estar bem distribuído (balanceado) para evitar que ocorram situações como o deslocamento da carga durante o transporte ou o tombamento do veículo. Para que o peso da carga esteja balanceado, o centro de gravidade do empacotamento deve estar em uma região “segura” dentro do recipiente. Alguns autores, como Kaluzny e Shaw (2009) e Queiroz e Miyazawa (2013), consideraram esta região como um envelope definido pelos intervalos  $[X_{start}, X_{end}]$  e  $[Y_{start}, Y_{end}]$  nos respectivos eixos  $x$  e  $y$ . A Figura 4.6 ilustra o envelope.

Figura 4.6 – Ilustração do envelope para a restrição de balanceamento de carga.



Fonte – a autora.

Para obter o centro de gravidade de um empacotamento, primeiramente, cada item  $i$  é tido como um elemento de massa  $m_i$  com densidade uniforme e o campo gravitacional também é considerado uniforme. Em seguida, calcula-se o centro de massa do empacotamento, que coincide com o centro de gravidade por considerar um campo gravitacional uniforme (TIPLER; MOSCA, 2011). O centro de massa de um corpo é um ponto onde se assume que toda a massa do corpo está concentrada e pode ser calculado como:

$$\vec{CM} = \frac{\sum_i \vec{\chi}_i}{\sum_i m_i} \quad (4.27)$$

em que  $\vec{\chi}_i$  é a posição do centro geométrico do  $i$ -ésimo item com relação a um referencial inercial, que neste caso é a coordenada  $(0,0,0)$ . Com base nesta equação, definem-se as restrições (4.28) e (4.29) para serem inseridas no modelo de PR do 3PEO. Elas garantem que o centro de massa do empacotamento com relação ao eixo  $x$  fique dentro do intervalo  $[X_{start},$

$X_{end}$ ]. Restrições similares são definidas para os eixos  $y$  e  $z$  trocando  $l_i$  por  $c_i$  e  $a_i$  e os intervalos para  $[Y_{start}, Y_{end}]$  e  $[Z_{start}, Z_{end}]$ .

$$\frac{\sum_{i \in U} m_i \left( X_i + \frac{l_i}{2} \right)}{\sum_{i \in U} m_i} \geq X_{start} \quad (4.28)$$

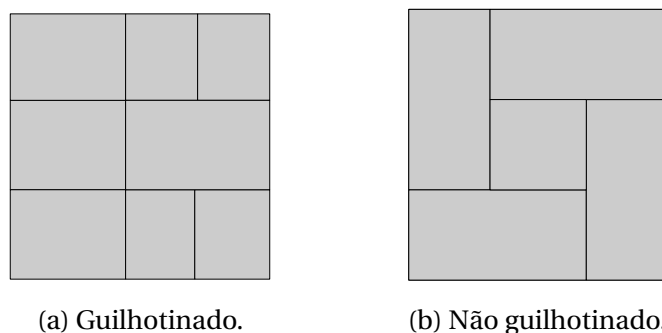
$$\frac{\sum_{i \in U} m_i \left( X_i + \frac{l_i}{2} \right)}{\sum_{i \in U} m_i} \leq X_{end} \quad (4.29)$$

## 4.9 Corte Guilhotinado

A consideração da restrição de corte guilhotinado é bastante útil em problemas em que se deseja obter itens retangulares de placas de madeira, papel, aço, vidro e entre outros materiais. Tal restrição garante que os itens desejados sejam obtidos por uma sequência de cortes guilhotinados, que são cortes que vão em linha reta de uma extremidade à outra da placa, sem que nenhum item seja fragmentado em alguma de suas dimensões durante o processo de corte. Assim, a resolução do problema de empacotamento fornece o traçado para que o corte aconteça da forma desejada e assemelha-se ao ato de “riscar” a placa antes do corte para obter os itens de forma guilhotinada.

A Figura 4.7(a) mostra um exemplo de empacotamento bidimensional guilhotinado e a Figura 4.7(b) mostra um padrão de empacotamento não guilhotinado. Nota-se que, no empacotamento (a), os itens podem ser separados por meio de cortes guilhotinados, ao passo que, no empacotamento (b) não há como efetuar cortes em linha reta de uma extremidade a outra sem que nenhum item seja fragmentado.

Figura 4.7 – Exemplo de empacotamento guilhotinado e não guilhotinado.



Fonte – a autora.

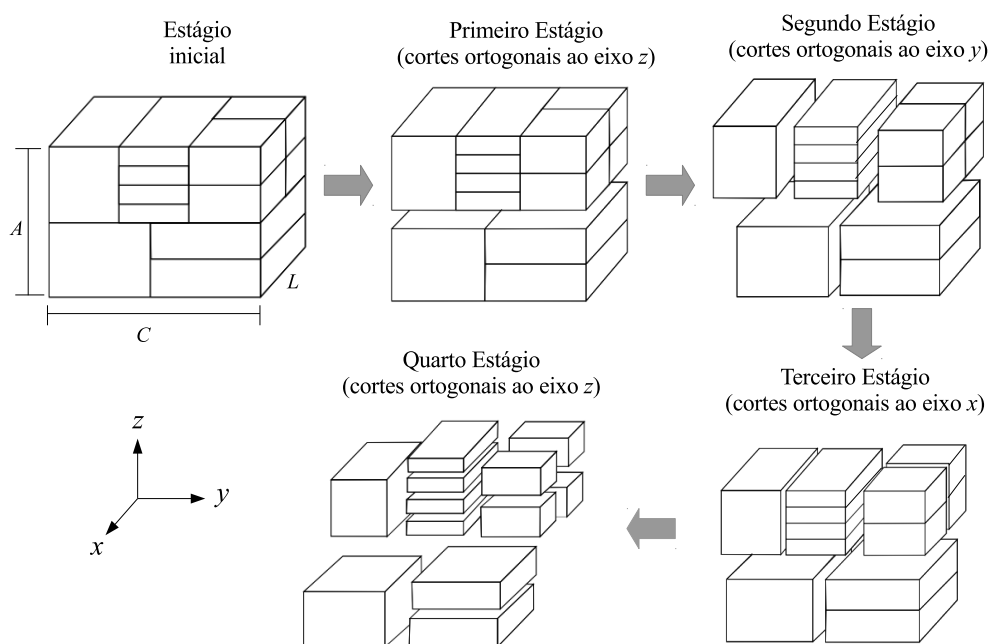
Da mesma forma que no corte de placas bidimensionais, a restrição de corte guilhotinado aplicada à problemas tridimensionais, como o PCUC, busca garantir que os itens possam ser separados por meio de cortes guilhotinados sem que nenhum item seja fragmentado

em alguma de suas dimensões. Embora muito pouco utilizada em problemas desse tipo, tal restrição pode trazer contribuições interessantes quando aplicadas nesses problemas. Uma delas está relacionada ao manuseio dos itens, visto que muitas empresas o fazem por meio de empilhadeiras e braços robóticos. Outra aplicação diz respeito ao corte de blocos de espumas para a produção de colchões e outros estofados.

Em se tratando de cortes guilhotinados, um conceito importante é o de estágios de corte, que é entendido como a direção em que a guilhotina se encontra em uma dada sequência de cortes. Assim, toda vez em que é necessário trocar a direção da guilhotina, um novo estágio de corte é considerado. Para ilustrar o conceito de estágios de corte em empacotamentos tridimensionais, considera-se a Figura 4.8, que mostra um empacotamento em seu estágio inicial (ainda não separado) e o que ocorre com ele ao longo de 4 estágios de corte.

No exemplo da Figura 4.8, os cortes do primeiro estágio são realizados de forma perpendicular ao eixo  $z$ , já que cortes perpendiculares aos eixos  $x$  e  $y$  não são possíveis, pois acarretam em fragmentação de itens. Dessa forma, são gerados blocos que possuem a mesma largura e o mesmo comprimento do contêiner e alturas variadas. No segundo estágio de corte, cada um dos blocos obtidos no estágio anterior é cortado de forma perpendicular ao eixo  $y$ . No terceiro estágio, os cortes são realizados de forma perpendicular ao eixo  $x$  sobre os blocos obtidos no segundo estágio. E, no quarto estágio, os blocos gerados no terceiro estágio são cortados de forma perpendicular ao eixo  $z$ . Os blocos gerados ao fim do quarto estágio geralmente consistem nos próprios itens, ou ainda pode ser preciso um estágio adicional, porém apenas para separar os itens de partes consideradas como desperdício.

Figura 4.8 – Ilustração do conceito de estágios de corte em empacotamentos tridimensionais.



Diante disso, o objetivo desta seção é apresentar restrições para serem inseridas no modelo de PR do 3PEO, que, uma vez satisfeitas, garantem a existência de coordenadas  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$  para empacotar todos os itens do conjunto  $U$  de tal forma que eles possam ser separados de forma guilhotinada, com até 4 estágios de corte, sendo o corte das sobras não contabilizado como um estágio de corte. Assim, apresenta-se primeiro as restrições que garantem a separação do empacotamento em até 3 estágios de corte, na subseção 4.9.1, e, em seguida, apresenta-se o caso em que tal separação pode ser alcançada em até 4 estágios, na subseção 4.9.2. As restrições desenvolvidas garantem empacotamentos que podem ser separados conforme a sequência de estágios de corte na Figura 4.8.

### 4.9.1 3 estágios de corte

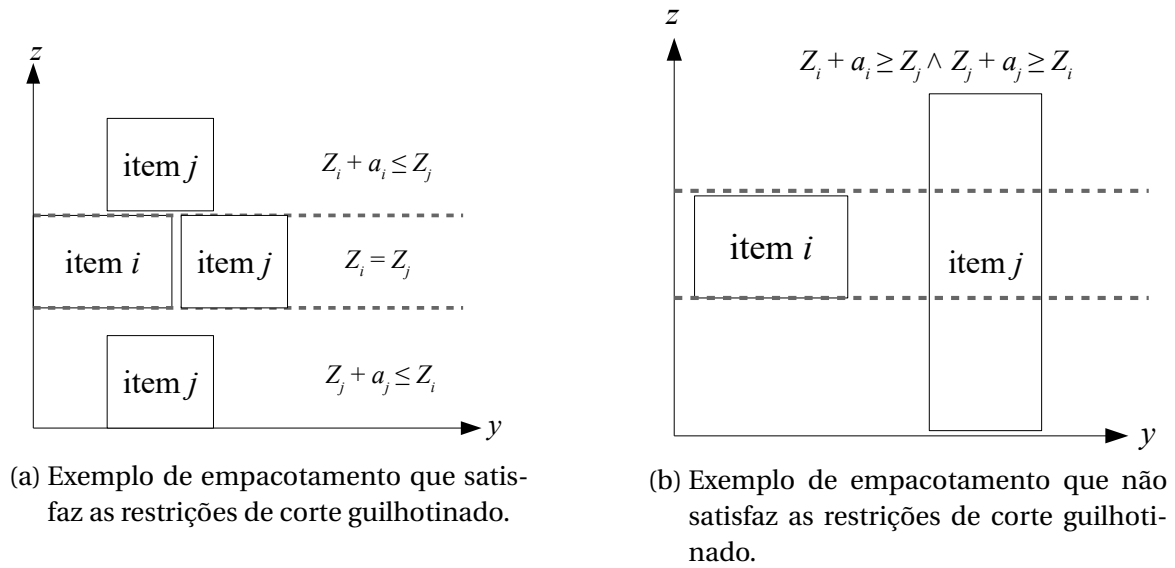
As restrições para o caso em que se deseja separar o empacotamento em até 3 estágios de corte levam em consideração que, quando os cortes são efetuados no primeiro estágio, sobre o eixo  $z$ , obtêm-se  $n$  blocos  $B_n$  de largura  $L$ , comprimento  $C$  e altura  $\overline{a}_n$ . Para que os itens não sejam fragmentados após os cortes, os mesmos precisam ser posicionados no contêiner de forma que eles fiquem inteiramente contidos dentro dos blocos  $B_n$ . Para que isso seja possível, impõem-se as restrições em (4.30) para todo par de itens  $i$  e  $j$ . Elas estabelecem que, se  $i$  está posicionado na coordenada  $Z_i$ , então  $j$  pode ser posicionado na mesma coordenada  $Z_i$ , isto é,  $Z_j = Z_i$ , ou em coordenadas acima de  $i$ , isto é,  $Z_j \geq Z_i + a_i$ , ou abaixo de  $i$ , isto é,  $Z_j + a_j \leq Z_i$ .

$$Z_j = Z_i \vee Z_i + a_i \leq Z_j \vee Z_j + a_j \leq Z_i, \quad \forall i, j \in U \quad (4.30)$$

A Figura 4.9 mostra como as restrições (4.30) atuam no sentido de viabilizar os cortes do primeiro estágio. Em (4.30)(a), há um exemplo de empacotamento em que é possível executar cortes perpendiculares ao eixo  $z$ . As possibilidades descritas pelas restrições (4.30) para empacotar cada par de itens  $i$  e  $j$  são ilustradas na Figura (4.30)(a). Se, para cada par, ao menos uma delas é satisfeita, tem-se que é possível executar os cortes do primeiro estágio. Por outro lado, em (4.30)(b) tem-se um empacotamento em que não é possível executar cortes perpendiculares ao eixo  $z$  sem que itens sejam fragmentados. Para este empacotamento nenhuma das possibilidades de posicionamento expressas nas restrições (4.30) é satisfeita.

No segundo estágio, cortes perpendiculares ao eixo  $y$  devem ser executados sobre os blocos gerados no primeiro estágio, gerando novos blocos. Para isso, faz-se necessário estender para o eixo  $y$  o raciocínio desenvolvido para o eixo  $z$ . Assim, impõem-se as restrições (4.31) que estabelecem que, se, no eixo  $z$ , o item  $i$  está posicionado na mesma coordenada que o item  $j$ , o item  $j$  pode ser posicionado na mesma coordenada  $Y_i$ , isto é,  $Y_j = Y_i$ , ou em coordenadas à direita de  $i$ , isto é,  $Y_j \geq Y_i + c_i$ , ou à esquerda de  $i$ , isto é,  $Y_j + c_j \leq Y_i$ .

Dessa forma, garante-se que, ao executar cortes guilhotinados perpendiculares ao

Figura 4.9 – Ilustração do comportamento das restrições (4.30) para cortes perpendiculares ao eixo  $z$ .

Fonte – a autora.

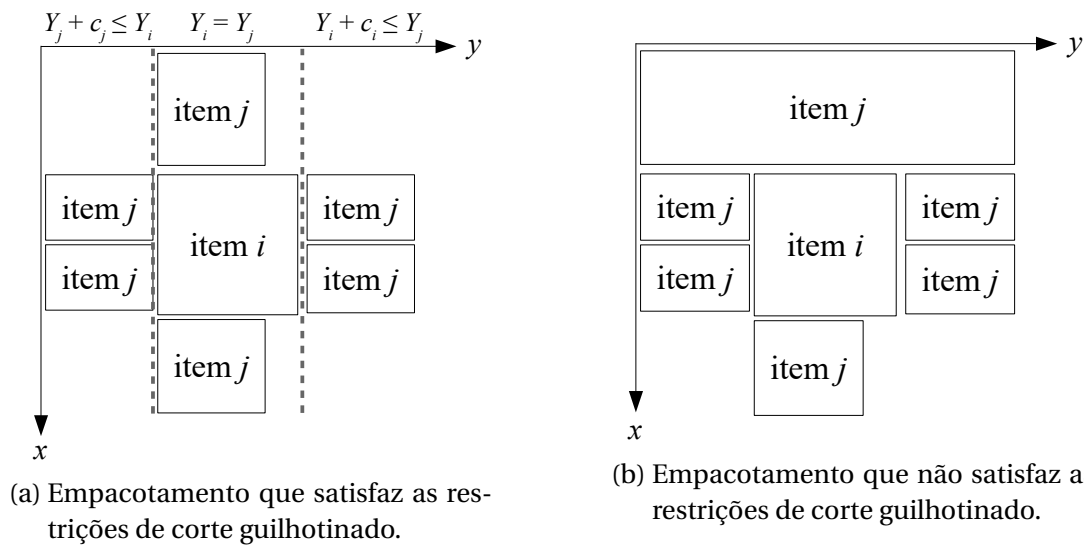
eixo  $y$  sobre cada bloco  $(L, C, \overline{a_n})$ , os itens ficarão inteiramente contidos dentro dos novos blocos, conforme mostra a Figura 4.10(a). Em outras palavras, as restrições (4.31) evitam que ocorram situações como na Figura 4.10(b), que se configura como um caso impossível de guilhotinar com relação ao eixo  $y$ . As restrições (4.31) ainda são suficientes para garantir o terceiro estágio de corte, pois para se ter este estágio não é necessário impor nenhuma limitação com relação ao posicionamento no eixo  $x$ .

$$Z_i = Z_j \longrightarrow Y_j = Y_i \vee Y_i + c_i \leq Y_j \vee Y_j + c_j \leq Y_i, \quad \forall i, j \in U \quad (4.31)$$

#### 4.9.2 4 estágios de corte

Para o caso em que se deseja separar o carregamento em até quatro estágios de corte, não basta definir, para o eixo  $x$ , restrições análogas às que foram definidas para os eixos  $z$  e  $y$  nas respectivas restrições (4.30) e (4.31) e acrescentá-las a essas últimas restrições. Assim, torna-se necessário redefinir a abordagem utilizando novas variáveis. O raciocínio empregado nas restrições (4.30) e (4.31) é útil para se obter padrões de cortes em 3 estágios. Em vista disso, ele é considerado dentro da abordagem para 4 estágios com modificações.

Para o caso com 4 estágios de corte, define-se as variáveis de decisão auxiliares  $B_i$  para todo item  $i \in U$ . Essas variáveis indicam o bloco em que o item  $i$  é empacotado. Define-se ainda as variáveis  $S_n$  e  $E_n$  para indicar as coordenadas de início e fim de cada bloco  $n$ , em que  $n = 1, \dots, \left\lfloor \frac{A}{\widehat{a}_i} \right\rfloor$ , sendo  $\widehat{a}_i = \min_{\{i \in I\}} \{a_i\}$ . Com base nestas variáveis, tem-se as restrições (4.32) - (4.35).

Figura 4.10 – Ilustração do comportamento das restrições (4.31) para cortes perpendiculares ao eixo  $y$ .

Fonte – a autora

As restrições (4.32), (4.33) e (4.34) são para garantir o primeiro estágio de corte. Assim, para dois itens  $i$  e  $j$  empacotados no mesmo bloco, as restrições em (4.32) determinam as coordenadas de início e fim do bloco a partir das coordenadas  $Y_i$  e  $Y_j$ . Contudo, as restrições em (4.32) não conseguem determinar o início e o fim de um bloco caso ele contenha apenas um item empacotado. Por esse motivo, definem-se as restrições em (4.33), que garantem que as coordenadas  $Z_i$  e  $Z_i + a_i$  de qualquer item  $i$  no bloco  $n$  estejam no intervalo  $[S_n, E_n]$ , além de impor que a altura do bloco  $n$  é pelo menos a altura de  $i$ .

As restrições em (4.34) garantem a não sobreposição de blocos. As restrições em (4.35) garantem o segundo estágio de corte, sendo definidas para itens  $i$  e  $j$  que estão no mesmo bloco, estabelecendo que se o item  $i$  é posicionado na coordenada  $Y_i$ , o item  $j$  pode ser posicionado na mesma coordenada  $Y_i$ , isto é,  $Y_j = Y_i$ , ou em coordenadas à direita do item  $i$ , isto é,  $Y_j ≥ Y_i + c_i$ , ou à esquerda do item  $i$ , isto é,  $Y_j + c_j ≤ Y_i$ . As restrições em (4.36) garantem o terceiro e quarto estágios de corte. Elas são definidas para todo par de itens  $i$  e  $j$  que estão no mesmo bloco e tais que as coordenadas  $Y_i$  e  $Y_j$  são iguais. Quando os itens pertencem ao mesmo bloco  $B_n$  e as coordenadas  $Y_i$  e  $Y_j$  coincidem, significa que tais itens pertencem ao mesmo sub-bloco  $B2$  resultante do segundo estágio de corte.

Para que se tenha o quarto estágio é necessário garantir um padrão de dois estágios com relação ao plano  $xz$  em cada sub-bloco  $B2$ , o que é alcançado pelo lado direito das restrições (4.36), que impõem, dado um par de itens  $i$  e  $j$ , que  $j$  pode ser empacotado atrás de  $i$ , isto é,  $X_j + l_j ≤ X_i$  ou na frente de  $i$ , isto é,  $X_i + l_i ≤ X_j$  ou acima de  $i$ , isto é, em alguma coordenada  $Z_j$  maior ou igual que  $Z_i + a_i$  quando  $X_j = X_i$ . A Figura 4.11 ilustra as projeções sobre o plano  $xy$  de tais sub-blocos e as possíveis posições para se empacotar um par de itens em um sub-bloco.

$$B_i = B_j \longrightarrow S_{B_i} \leq \min(Z_i, Z_j) \wedge E_{B_i} \geq \max(Z_i + a_i, Z_j + a_j), \quad \forall i, j \in U \quad (4.32)$$

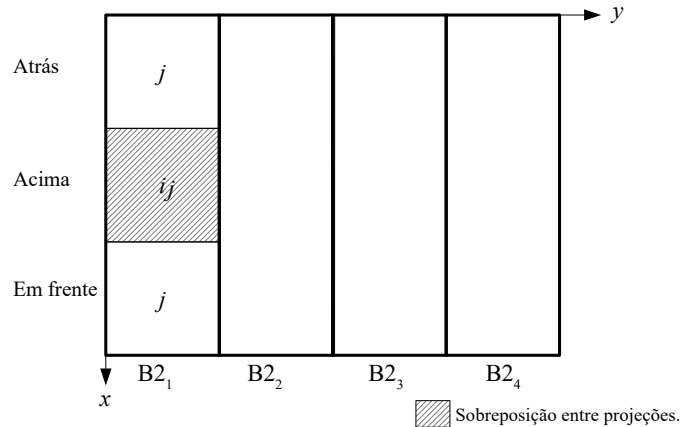
$$B_i = n \longrightarrow Z_i \geq S_n \wedge Z_i + a_i \leq E_n \wedge E_n - S_n \geq a_i, \quad \forall i \in U, n = 1, \dots, \left\lfloor \frac{A}{\hat{a}_i} \right\rfloor \quad (4.33)$$

$$E_n \leq S_t \vee E_t \leq S_n, \quad n, t = 1, \dots, \left\lfloor \frac{A}{\hat{a}_i} \right\rfloor \quad (4.34)$$

$$B_i = B_j \longrightarrow Y_j = Y_i \vee Y_j \geq Y_i + c_i \vee Y_j + c_j \leq Y_i, \quad i, j \in U \quad (4.35)$$

$$B_i = B_j \wedge Y_i = Y_j \longrightarrow X_j = X_i \vee X_j \geq X_i + c_i \vee X_j + l_j \leq Y_i, \quad i, j \in U \quad (4.36)$$

Figura 4.11 – Projeção de sub-blocos  $B2_n$  sobre o plano  $xy$  e posições possíveis para empacotar os itens  $i$  e  $j$  em um dos sub-blocos.

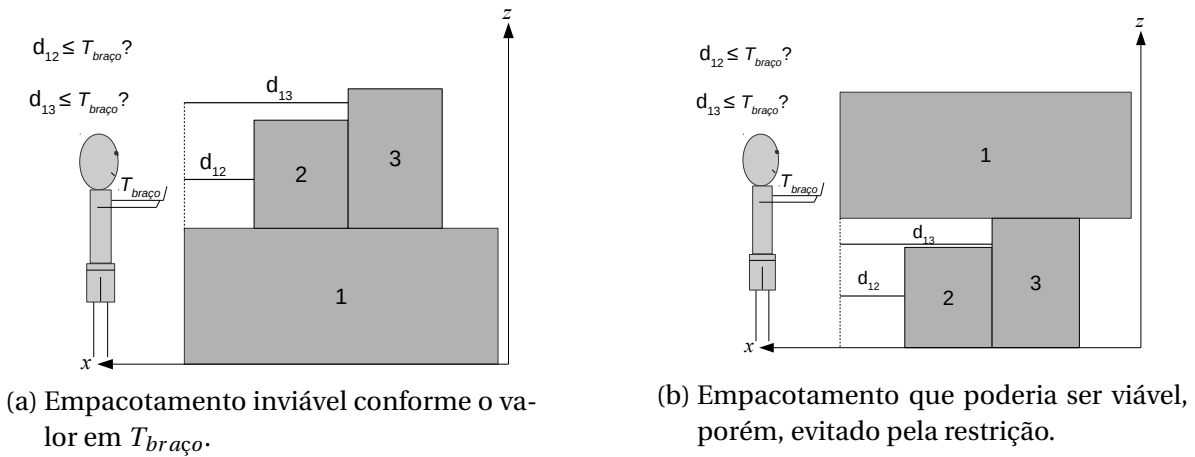


Fonte – a autora.

## 4.10 Carregamento Manual

De acordo com [Bischoff e Ratcliff \(1995\)](#), as restrições de carregamento manual fazem parte de um grupo de restrições que se preocupam com a complexidade do padrão de empacotamento. Dentre essas restrições estão também as restrições de corte guilhotinado e as restrições de carregamento por robô, que englobam o carregamento feito por sistemas automatizados, como transportadores, braços robóticos e empilhadeiras. No caso da restrição de carregamento manual, a preocupação é com a alcançabilidade dos trabalhadores no momento de carregar e descarregar os itens no contêiner. A ideia é que os itens que são

Figura 4.12 – Ilustração da restrição de carregamento manual conforme Ramos, Oliveira e Lopes (2016).



Fonte – Adaptada de Ramos, Oliveira e Lopes (2016).

posicionados mais ao alto dentro do contêiner não fiquem deslocados para o fundo, dificultando, assim, o alcance do braço do trabalhador.

Ramos, Oliveira e Lopes (2016) propuseram uma restrição cuja ideia está expressa nas restrições (4.37), impondo que se o item  $j$  está abaixo do item  $i$ , isto é, se as projeções dos itens  $i$  e  $j$  sobre o plano  $xy$  se sobrepõem e se a coordenada de término do item  $j$  no eixo  $z$  é menor ou igual a coordenada de início do item  $i$  no mesmo eixo, então a distância entre o fim da caixa  $j$  e o fim da caixa  $i$  deve ser, no máximo, igual ao comprimento de alcance do braço do trabalhador, que está sendo denotado por  $T_{braço}$ . A distância entre o fim da caixa  $j$  e o fim da caixa  $i$  é representada por  $|(X_j + l_j) - (X_i + l_i)|$ . Esses autores consideraram a distância no eixo  $x$ , para o sentido positivo do eixo  $x$  indicando o sentido de retirada dos itens do contêiner.

$$Z_j + a_j \leq Z_i \wedge X_j < X_i + l_i \wedge X_i < X_j + l_j \wedge Y_j < Y_i + c_i \wedge Y_i < Y_j + c_j \quad (4.37)$$

$$\longrightarrow |(X_j + l_j) - (X_i + l_i)| \leq T_{braço}$$

A fim de ilustrar a restrição de carregamento manual conforme tratado em Ramos, Oliveira e Lopes (2016), apresenta-se a Figura 4.12(a). A Figura 4.12a mostra três itens. Os itens 2 e 3 se encontram acima do item 1, isto é, satisfazem o lado esquerdo de (4.37). Assim, precisa-se verificar se as distâncias entre os itens 1 e 2 e entre os itens 1 e 3 estão coerentes com o alcance do braço do trabalhador (lado direito de (4.37)). Se sim, o empacotamento pode permanecer como está. Se não, os itens 2 e 3 (os dois ou apenas um deles) devem ser posicionados mais à frente (em direção ao trabalhador). Contudo, considere que o valor de  $T_{braço}$  seja igual a distância  $d_{12}$  entre os itens 1 e 2 (que é tomada com referência à posição em que eles se encontram na Figura 4.12(a)). Nessa situação, um entre os itens 2 e 3 não poderá ser levado, pois a distância entre o seu término e o término do item 1 será maior do

que o alcance do braço do trabalhador.

Por outro lado, suponha que os itens 2 e 3 sejam empacotados abaixo do item 1, como ilustra a Figura 4.12(b). Nessa situação, o trabalhador consegue alcançar os 3 itens sem problemas, já que ele pode retirar o item 1 primeiro, depois o item 2 e, por fim, o item 3. Isso é possível mesmo que a distância entre algum dos itens seja maior do que  $T_{braço}$ . Contudo, a restrição (4.37) poderá fazer com que um dos itens não seja empacotado, pelo fato da distância entre o seu fim e o fim do item 1 ser maior do que  $T_{braço}$ .

Diante do exemplo mostrado na Figura 4.12a, torna-se necessário observar em que situações as restrições de carregamento manual devem ser lançadas. Em Ramos, Oliveira e Lopes (2016), por exemplo, as restrições são consideradas para todos os pares de itens  $i$  e  $j$ , tais que  $j$  se encontra abaixo de  $i$ . Logo, mesmo que os itens fossem deslocados para baixo, a restrição continuaria sendo lançada obrigando um, entre os itens 2 e 3, de serem deixados para trás. Para contornar essa situação, propõe-se acrescentar a condição  $X_j + l_j > X_i + l_i$  no lado esquerdo de (4.37), resultando nas restrições (4.38), que permitem que itens que não puderem ser empacotados acima de certos itens sejam empacotados abaixo destes.

$$Z_j + a_j \leq Z_i \wedge X_j + l_j > X_i + l_i \wedge X_j < X_i + l_i \wedge X_i < X_j + l_j \wedge Y_j < Y_i + c_i \wedge Y_i < Y_j + c_j \quad (4.38)$$

$$\longrightarrow |X_j + l_j - (X_i + l_i)| \leq T_{braço}, \quad \forall i, j \in U$$

Outro ponto mencionado por Ramos, Oliveira e Lopes (2016) diz respeito à altura do carregamento. Em se tratando do carregamento manual não é desejável que os itens sejam empacotados em alturas acima da altura máxima de alcance do braço do trabalhador (denotada aqui por  $A_{max}$ ). Para tanto, considera-se, além das restrições (4.38), as restrições (4.39).

$$Z_i \leq A_{max}, \quad \forall i \in U \quad (4.39)$$

Diante disso, adotam-se as restrições (4.38) e (4.39) para lidar com a questão do carregamento manual dos itens, inseridas no modelo de PR para o 3PEO. Para justificar essa escolha, considera-se um exemplo com dois tipos de itens, com volume  $v_i$ , largura  $l_i$ , altura  $a_i$ , quantidade de cópias  $b_i$  e clientes especificados na Tabela 4.2, e  $T_{braço} = 1$ . Para os itens deste exemplo, a Figura 4.13(a) traz a visualização do empacotamento sem considerar as restrições de carregamento manual, de forma que todos os itens podem ser carregados. Na Figura 4.13(b), o empacotamento considera (4.37) proposta para o eixo  $x$ . Nesse caso, apenas duas cópias do item do tipo 2 são empacotadas, pois se o terceiro item for levado, então a distância entre o seu fim e o fim do item do tipo 1, no eixo  $x$ , será igual a 2, ultrapassando o valor de  $T_{braço}$ . Em seguida, na Figura 4.13(c), tem-se o empacotamento satisfazendo (4.37) e (4.39), que limita a altura em que os itens podem ser empacotados. Nesse caso, dois dos

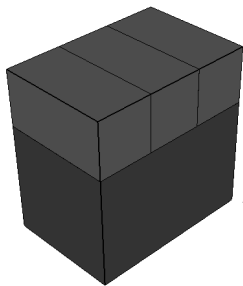
três itens do tipo 2 são levados. Por fim, na Figura 4.13(d), tem-se o empacotamento gerado considerando (4.38), que impõem que o lado direito só seja lançada caso os itens abaixo estejam deslocados para a frente com relação ao item de cima, e com (4.39), que limita a altura máxima. Nota-se que, neste último caso, todas as três cópias do item do tipo 2 são levadas.

Tabela 4.2 – Exemplo utilizado para ilustrar a restrição de carregamento manual.

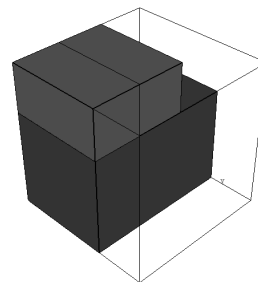
item do tipo $i$	$v_i$	$l_i$	$c_i$	$a_i$	$b_i$	Cliente
1	12	3	2	2	1	1 (cinza escuro)
2	2	1	2	1	3	2 (cinza intermediário)

Fonte – a autora.

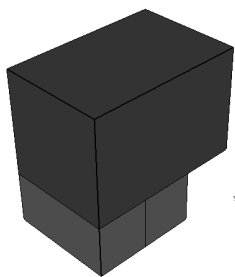
Figura 4.13 – Exemplos de empacotamento gerados a partir de diferentes possibilidades da restrição de carregamento manual, com  $T_{braço} = 1$



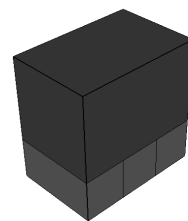
(a) Exemplo de empacotamento sem restrições para carregamento manual.



(b) Empacotamento satisfazendo (4.37).



(c) Empacotamento satisfazendo (4.37) e (4.39), com  $A_{max} = 1$



(d) Empacotamento satisfazendo (4.38) e (4.39), com  $A_{max} = 1$ .

Fonte – a autora.

## 4.11 Separação

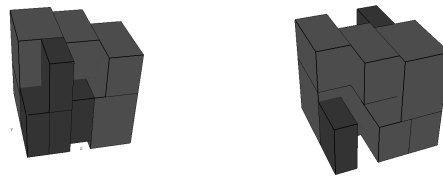
A restrição de separação busca garantir que itens de grupos diferentes fiquem separados a uma certa distância uns dos outros dentro do contêiner. Essa exigência é bastante

comum quando há itens que não podem entrar em contato e é útil também para separar itens de grupos/destinos diferentes. Por outro lado, impor que itens de grupos diferentes fiquem separados pode contribuir para geração de instabilidade devido a ocorrência de buracos e, assim, pode ocorrer o deslocamento dos itens durante o transporte. Em tais casos é comum que os buracos sejam preenchidos com materiais como papelão ou espuma.

Para garantir que os itens de grupos diferentes fiquem separados por uma distância  $\beta$ , considera-se a inserção das restrições (4.40) no modelo de PR para o 3PEO. As restrições são definidas para todos os pares de itens  $i$  e  $j$  tais que  $i$  e  $j$  são de grupos diferentes. O grupo de cada item é representado por  $g_i$ . Com isso, dois itens de grupos diferentes devem ser organizados tais que um deles deve começar a uma distância  $\beta$  do fim do outro em qualquer um dos três eixos. Para ilustrar a restrição de separação, apresenta-se nas Figuras 4.14 e 4.15 exemplos de empacotamentos sem e com a restrição de separação (para  $\beta = 1$ ). As Figuras mostram o mesmo empacotamento visto de ângulos diferentes.

$$\begin{aligned} X_j \geq X_i + l_i + \beta \vee X_i \geq X_j + l_j + \beta \vee Y_j \geq Y_i + c_i + \beta \vee Y_i \geq Y_j + c_j + \beta \\ \vee Z_j \geq Z_i + a_i + \beta \vee Z_i \geq Z_j + a_j + \beta, \quad \forall i, j \mid g_i \neq g_j \end{aligned} \quad (4.40)$$

Figura 4.14 – Empacotamento que não considera a restrição de separação.



Fonte – a autora.

Figura 4.15 – Empacotamento que considera a restrição de separação.



Fonte – a autora.

## 4.12 Agrupamento

A restrição de agrupamento impõe que itens pertencentes a um mesmo grupo sejam empacotados o mais próximo possível uns dos outros dentro do contêiner. Alcançar este

estado para um empacotamento não é tão simples como separar itens de grupos diferentes. Com isso, impor que os itens de um mesmo grupo fiquem a no máximo uma distância fixa  $v$  pode ser difícil, já que a distância entre dois itens do mesmo grupo pode ser maior do que  $v$  e, ainda assim, os itens podem estar agrupados. Este tipo de situação é comum quando itens do mesmo grupo são empacotados lado a lado.

Uma proposta é impor que a distância entre dois itens de um mesmo grupo seja no máximo igual a uma distância que varia em função da soma das larguras, comprimentos e alturas dos itens do respectivo grupo. Assim, a ideia é que, para cada grupo, a distância máxima entre os itens seja diferente. Para determinar a distância máxima permitida para os itens de cada grupo  $gr$ , calcula-se o máximo entre a soma das larguras, comprimentos e alturas do respectivo grupo tal como é mostrado em (4.41). Considera-se a existência de  $NG$  grupos aos quais cada item está associado a algum deles.

$$d_{max}(gr) = \max \left( \sum_{i \in gr} l_i, \sum_{i \in gr} c_i, \sum_{i \in gr} a_i \right) v, \quad gr = 1, \dots, NG \quad (4.41)$$

A partir disso, definem-se as restrições (4.42) como forma de fazer com que os itens fiquem, de certa maneira, agrupados, de forma que  $g_i$  representa, assim como na restrição de separação, o grupo  $gr$ . Essas restrições impõem que se dois itens  $i$  e  $j$  pertencem ao mesmo grupo  $gr$ , isto é,  $g_i = g_j$ , então a distância euclidiana entre eles deve ser no máximo igual à distância máxima  $d_{max}(gr)$ . A distância  $d_{max}(gr)$  para os itens de determinado grupo  $gr$  consiste no máximo entre as somas das larguras, comprimentos e alturas dos itens desse grupo, multiplicado por um parâmetro de agrupamento  $v \in [0, 1]$ , que deve ser considerado para que os itens estejam agrupados.

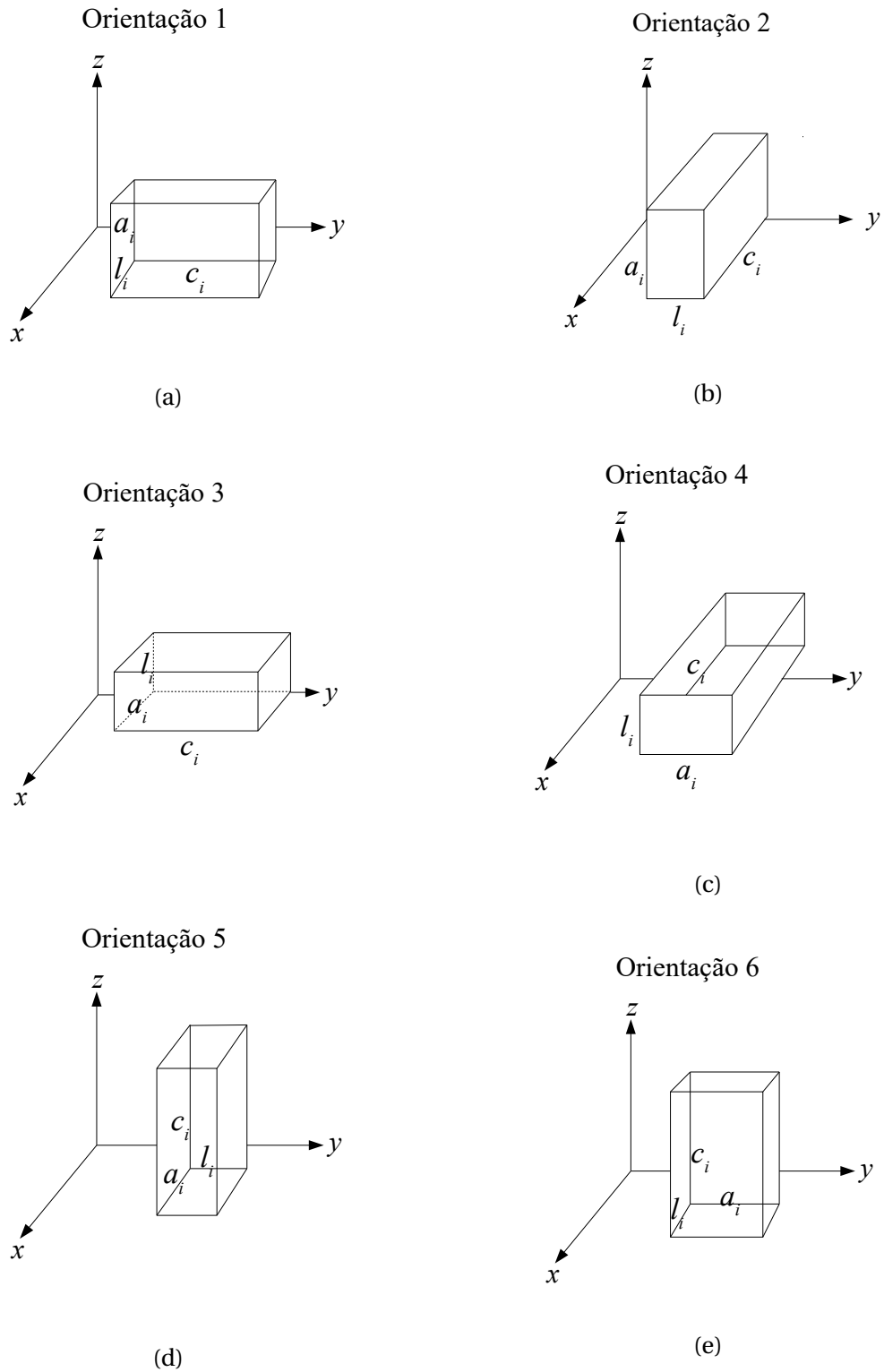
$$\sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} \leq d_{max}(g_i), \quad \forall i, j \in U \mid g_i = g_j \quad (4.42)$$

### 4.13 Orientação

Restrições de orientação buscam estabelecer as formas com que os itens podem ser rotacionados em torno de seus eixos no momento de procurar por pontos viáveis dentro do contêiner. Até aqui se considerou que os itens não podem ser rotacionados ao realizar o empacotamento, acarretando em uma única forma de arranjá-los no contêiner (isto é, uma única orientação). Esta orientação está ilustrada na Figura 4.16(a).

Ao permitir que os itens possam ser rotacionados, aumenta-se o número de possibilidade de posiciona-los dentro do contêiner. Dependendo das características do item que se está armazenando no contêiner, pode-se permitir a rotação em torno de todos os eixos, resultando em seis formas de orientar um mesmo item. Tais formas estão ilustradas na Figura 4.16. Em alguns casos, como no transporte de vidrarias, rotacionar as caixas em torno do

Figura 4.16 – Orientação permitidas para um mesmo item.



Fonte – a autora.

eixo  $x$  ou  $y$  ou não é aconselhável, pois pode ocasionar danos às peças armazenadas. Nesse caso, a melhor opção seria permitir rotação somente em torno do eixo do  $z$ , fazendo com que só a base seja girada no momento de verificar a melhor orientação para cada item.

Para permitir que a abordagem que resolve o PCUC consiga posicionar os itens em mais de uma orientação, torna-se necessário fazer algumas alterações no modelo de PR e também nas restrições da relaxação para o 3PEO. Assim, apresenta-se na subseção 4.13.1 as alterações necessárias para a relaxação para o 3PEO, enquanto a subseção 4.13.2 tem as restrições a serem incorporadas no modelo de PR para o 3PEO.

### 4.13.1 Múltiplas orientações na relaxação para o 3PEO

A relaxação para o 3PEO leva em consideração a posição em que os itens são posicionados nos planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$ . Algumas modificações são necessárias para incorporar as múltiplas orientações de um mesmo item. A primeira modificação é com relação as variáveis de decisão. Optou-se por acrescentar mais um índice nas variáveis relacionado a orientação em que o item é empacotado. Assim, as variáveis de decisão são redefinidas para:

$$\beta_{iopq} = \begin{cases} 1, & \text{se o item } i \text{ é empacotado na posição } (p, q) \text{ com relação ao} \\ & \text{plano } xy, \text{ na orientação } o. \\ 0, & \text{caso ocorra o contrário.} \end{cases} \quad (4.43)$$

$$\gamma_{iopr} = \begin{cases} 1, & \text{se o item } i \text{ é empacotado na posição } (p, r) \text{ com relação ao} \\ & \text{plano } xz, \text{ na orientação } o. \\ 0, & \text{caso ocorra o contrário.} \end{cases} \quad (4.44)$$

$$\delta_{ioqr} = \begin{cases} 1, & \text{se o item } i \text{ é empacotado na posição } (q, r) \text{ com relação} \\ & \text{plano } yz, \text{ na orientação } o. \\ 0, & \text{caso ocorra o contrário.} \end{cases} \quad (4.45)$$

A segunda modificação é com relação as restrições. Por exemplo, o primeiro conjunto de restrições (3.17) impõe que para cada reta que é perpendicular a um ponto  $(s, t)$  no plano  $xy$ , a soma das alturas dos itens que interceptam tal reta deve ser menor ou igual a altura do contêiner. Contudo, se um item que intercepta essa reta for empacotado com as orientações 3 ou 4, conforme a Figura 4.16, não é a altura do item que deve ser somada, mas sim a largura. O mesmo é válido para as orientações 5 e 6, sendo que comprimento dos itens deve ser somado.

Como exemplo, para reformular as restrições (3.17) da relaxação para o 3PEO, torna-se necessário levar em consideração que os parâmetros  $l_i$ ,  $c_i$  e  $a_i$ , associados às variáveis de decisão, dependem da orientação do item na respectiva variável. Diante disso, obtêm-se as respectivas restrições (3.17), que consideram múltiplas orientações para os itens. De forma similar, faz-se o mesmo sobre as demais restrições da relaxação para o 3PEO, de forma a obter as restrições (4.46)-(4.55), que consideram múltiplas orientações.

$$\sum_{i \in U} \sum_{o=1}^6 \sum_{\{p \in X_i^* | s - l_i^* + 1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in Y_i^* | t - c_i^* + 1 \leq q \leq t\}} a_i^* \beta_{iopq} \leq A, \quad \forall s \in X_r, t \in Y_r, \quad (4.46)$$

$$\sum_{i \in U} \sum_{o=1}^6 \sum_{\{p \in X_i | s - l_i^* + 1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{r \in Z_i | u - a_i^* + 1 \leq r \leq u\}} c_i^* \gamma_{iopr} \leq C, \quad \forall s \in X_r, u \in Z_r \quad (4.47)$$

$$\sum_{i \in U} \sum_{o=1}^6 \sum_{\{q \in Y_i | t - c_i^* + 1 \leq q \leq t\}} \sum_{\{r \in Z_i | u - a_i^* + 1 \leq r \leq u\}} l_i^* \delta_{ioqu} \leq L, \quad \forall t \in Y_r, u \in Z_r \quad (4.48)$$

em que:

- se  $o = 1$ , então  $l_i^* = l_i$ ,  $c_i^* = c_i$  e  $a_i^* = a_i$ ,  $X_i^* = \{s \in X \mid 0 \leq s \leq L - l_i\}$  e  $Y_i^* = \{t \in Y \mid 0 \leq t \leq C - c_i\}$ ;
- se  $o = 2$ , então  $l_i^* = c_i$ ,  $c_i^* = l_i$  e  $a_i^* = a_i$ ,  $X_i^* = \{s \in X \mid 0 \leq s \leq L - c_i\}$  e  $Y_i^* = \{t \in Y \mid 0 \leq t \leq C - l_i\}$ ;
- se  $o = 3$ , então  $l_i^* = a_i$ ,  $c_i^* = c_i$  e  $a_i^* = l_i$ ,  $X_i^* = \{s \in X \mid 0 \leq s \leq L - a_i\}$  e  $Y_i^* = \{t \in Y \mid 0 \leq t \leq C - c_i\}$ ;
- se  $o = 4$ , então  $l_i^* = c_i$ ,  $c_i^* = a_i$  e  $a_i^* = l_i$ ,  $X_i^* = \{s \in X \mid 0 \leq s \leq L - c_i\}$  e  $Y_i^* = \{t \in Y \mid 0 \leq t \leq C - a_i\}$ ;
- se  $o = 5$ , então  $l_i^* = a_i$ ,  $c_i^* = l_i$  e  $a_i^* = c_i$ ,  $X_i^* = \{s \in X \mid 0 \leq s \leq L - a_i\}$  e  $Y_i^* = \{t \in Y \mid 0 \leq t \leq C - l_i\}$ ;
- se  $o = 6$ , então  $l_i^* = l_i$ ,  $c_i^* = a_i$  e  $a_i^* = c_i$ ,  $X_i^* = \{s \in X \mid 0 \leq s \leq L - l_i\}$  e  $Y_i^* = \{t \in Y \mid 0 \leq t \leq C - a_i\}$ .

$$\sum_{o=1}^6 \sum_{t \in Y_i^*} \beta_{iost} = \sum_{u \in Z_i^*} \gamma_{iosu}, \quad \forall i \in U, \quad \forall s \in X_r, \quad (4.49)$$

em que:

- se  $o = 1$ , então  $Y_i^* = \{t \in Y \mid 0 \leq t \leq C - c_i\}$  e  $Z_i^* = \{u \in Z \mid 0 \leq u \leq A - a_i\}$
- se  $o = 2$ , então  $Y_i^* = \{t \in Y \mid 0 \leq t \leq C - l_i\}$  e  $Z_i^* = \{u \in Z \mid 0 \leq u \leq A - a_i\}$
- se  $o = 3$ , então  $Y_i^* = \{t \in Y \mid 0 \leq t \leq C - c_i\}$  e  $Z_i^* = \{u \in Z \mid 0 \leq u \leq A - l_i\}$
- se  $o = 4$ , então  $Y_i^* = \{t \in Y \mid 0 \leq t \leq C - a_i\}$  e  $Z_i^* = \{u \in Z \mid 0 \leq u \leq A - l_i\}$
- se  $o = 5$ , então  $Y_i^* = \{t \in Y \mid 0 \leq t \leq C - l_i\}$  e  $Z_i^* = \{u \in Z \mid 0 \leq u \leq A - c_i\}$
- se  $o = 6$ , então  $Y_i^* = \{t \in Y \mid 0 \leq t \leq C - a_i\}$  e  $Z_i^* = \{u \in Z \mid 0 \leq u \leq A - c_i\}$

$$\sum_{o=1}^6 \sum_{s \in X_i^*} \beta_{iost} = \sum_{u \in Z_i^*} \delta_{iotu}, \quad \forall i \in U, \quad \forall t \in Y_r \quad (4.50)$$

em que:

- se  $o = 1$ , então  $X_i^* = \{s \in X \mid 0 \leq s \leq L - l_i\}$  e  $Z_i^* = \{u \in Z \mid 0 \leq u \leq A - a_i\}$
- se  $o = 2$ , então  $X_i^* = \{s \in X \mid 0 \leq s \leq L - c_i\}$  e  $Z_i^* = \{u \in Z \mid 0 \leq u \leq A - a_i\}$
- se  $o = 3$ , então  $X_i^* = \{s \in X \mid 0 \leq s \leq L - a_i\}$  e  $Z_i^* = \{u \in Z \mid 0 \leq u \leq A - l_i\}$
- se  $o = 4$ , então  $X_i^* = \{s \in X \mid 0 \leq s \leq L - c_i\}$  e  $Z_i^* = \{u \in Z \mid 0 \leq u \leq A - l_i\}$
- se  $o = 5$ , então  $X_i^* = \{s \in X \mid 0 \leq s \leq L - a_i\}$  e  $Z_i^* = \{u \in Z \mid 0 \leq u \leq A - c_i\}$
- se  $o = 6$ , então  $X_i^* = \{s \in X \mid 0 \leq s \leq L - l_i\}$  e  $Z_i^* = \{u \in Z \mid 0 \leq u \leq A - c_i\}$

$$\sum_{o=1}^6 \sum_{s \in X_i^*} \gamma_{iosu} = \sum_{t \in Y_i^*} \delta_{iotu}, \quad \forall i \in U, \quad \forall u \in Z_r \quad (4.51)$$

$$\sum_{o=1}^6 \sum_{p \in X_i^*} \sum_{q \in Y_i^*} \beta_{ipq} = 1, \quad \forall i \in U \quad (4.52)$$

em que:

- se  $o = 1$ , então  $X_i^* = \{s \in X \mid 0 \leq s \leq L - l_i\}$  e  $Y_i^* = \{t \in Y \mid 0 \leq t \leq C - c_i\}$
- se  $o = 2$ , então  $X_i^* = \{s \in X \mid 0 \leq s \leq L - c_i\}$  e  $Y_i^* = \{t \in Y \mid 0 \leq t \leq C - l_i\}$
- se  $o = 3$ , então  $X_i^* = \{s \in X \mid 0 \leq s \leq L - a_i\}$  e  $Y_i^* = \{t \in Y \mid 0 \leq t \leq C - c_i\}$
- se  $o = 4$ , então  $X_i^* = \{s \in X \mid 0 \leq s \leq L - c_i\}$  e  $Y_i^* = \{t \in Y \mid 0 \leq t \leq C - a_i\}$
- se  $o = 5$ , então  $X_i^* = \{s \in X \mid 0 \leq s \leq L - a_i\}$  e  $Y_i^* = \{t \in Y \mid 0 \leq t \leq C - l_i\}$

- se  $o = 6$ , então  $X_i^* = \{s \in X \mid 0 \leq s \leq L - l_i\}$  e  $Y_i^* = \{t \in Y \mid 0 \leq t \leq C - a_i\}$

$$\beta_{iopq} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in U, \quad o = 1, \dots, 6, \quad p \in X_r, \quad q \in Y_r \quad (4.53)$$

$$\gamma_{iopr} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in U, \quad o = 1, \dots, 6, \quad p \in X_r, \quad r \in Z_r \quad (4.54)$$

$$\delta_{ioqr} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in U, \quad o = 1, \dots, 6, \quad q \in Y_r, \quad r \in Z_r \quad (4.55)$$

### 4.13.2 Múltiplas orientações para o modelo de PR

Para considerar múltiplas orientações para os itens no modelo de PR é necessário adaptar as restrições de não sobreposição (3.27) para que as múltiplas possibilidades de se orientar os itens sejam consideradas nas restrições.

As restrições de sobreposição, para o caso com orientação fixa, estabelecem que, para cada dois itens  $i$  e  $j$ , em ao menos um dos três eixos ( $x$ ,  $y$  ou  $z$ ), o fim de um dos itens deve acontecer em uma coordenada anterior ao início do outro. Quando se considera mais de uma orientação permitida para os itens, isso não muda. Além disso, o ponto de referência com que o item é empacotado continua sendo o canto inferior traseiro esquerdo independente da orientação que o item se encontra e, o eixo  $x$  continua sendo associado com a largura  $L$  do contêiner, o eixo  $y$  com o comprimento  $C$  e o eixo  $z$  com a altura  $A$ . O que muda então, quando um item é rotacionado, é que a direção dos itens com relação a orientação geral do contêiner muda. Assim, se um item, para ser empacotado, precisa ter sua base rotacionada, sua largura fica agora na direção  $y$ , ao passo que seu comprimento passa a estar associado à direção  $x$ . Sua altura, no entanto, permanece na mesma direção do eixo  $z$  para este caso.

Diante disso, as novas restrições de não sobreposição precisam refletir o parâmetro ( $l_i$ ,  $c_i$  ou  $a_i$ ), que deve ser associado a cada variável de decisão ( $X_i$ ,  $Y_i$  ou  $Z_i$ ) em cada possível orientação que o item possa assumir. Para isso, considera-se a variável de decisão auxiliar  $B_{io}$ , que assume 1 se o item  $i$  está na orientação  $o$  e 0 caso contrário, em que  $i \in U$  e  $o = 1, 2, \dots, 6$ . Uma vez definidas as variáveis  $B_{io}$ , definem-se as restrições auxiliares (4.56) para garantir que cada item só pode ser empacotado em uma única orientação.

$$\sum_{o=1}^6 B_{io} = 1, \quad \forall i \in U \quad (4.56)$$

As restrições de não sobreposição são definidas em (4.57) e impõem que se o item  $i$  está em uma orientação  $o$ , os parâmetros ( $l_i$ ,  $c_i$  e  $a_i$ ) associados às variáveis de decisão  $X_i$ ,

$Y_i$  e  $Z_i$  estarão de acordo com o que é exigido pela orientação em que o item  $i$  se encontra. O mesmo é válido para o item  $j$ .

$$\begin{aligned}
X_i + l_i B_{i1} + c_i B_{i2} + a_i B_{i3} + c_i B_{i4} + a_i B_{i5} + l_i B_{i6} &\leq X_j \vee \\
X_j + l_j B_{j1} + c_j B_{j2} + a_j B_{j3} + c_j B_{j4} + a_j B_{j5} + l_j B_{j6} &\leq X_i \vee \\
Y_i + c_i B_{i1} + l_i B_{i2} + c_i B_{i3} + a_i B_{i4} + l_i B_{i5} + a_i B_{i6} &\leq Y_j \vee \\
Y_j + c_j B_{j1} + l_j B_{j2} + c_j B_{j3} + a_j B_{j4} + l_j B_{j5} + a_j B_{j6} &\leq Y_i \vee \\
Z_i + a_i B_{i1} + a_i B_{i2} + l_i B_{i3} + l_i B_{i4} + c_i B_{i5} + c_i B_{i6} &\leq Z_j \vee \\
Z_j + a_j B_{j1} + a_j B_{j2} + l_j B_{j3} + l_j B_{j4} + c_j B_{j5} + c_j B_{j6} &\leq Z_i, \quad \forall i, j \in U
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Além das restrições de não sobreposição, é necessário adaptar o domínio das variáveis de decisão  $X_i$ ,  $Y_i$  e  $Z_i$  conforme a orientação do item, pois, dependendo da orientação de um item com relação a um dos eixos, pode-se ter mais ou menos pontos possíveis para posicionar os itens ou a mesma quantidade em comparação com o caso com uma única orientação. Assim, o novo domínio das variáveis de decisão passa a ser definido conforme é mostrado em (4.58), (4.59) e (4.60).

$$X_i \leq L - (l_i B_{i1} + c_i B_{i2} + a_i B_{i3} + c_i B_{i4} + a_i B_{i5} + l_i B_{i6}), \quad \forall i \in U \tag{4.58}$$

$$Y_i \leq C - (c_i B_{i1} + l_i B_{i2} + c_i B_{i3} + a_i B_{i4} + l_i B_{i5} + a_i B_{i6}), \quad \forall i \in U \tag{4.59}$$

$$Z_i \leq A - (a_i B_{i1} + a_i B_{i2} + l_i B_{i3} + l_i B_{i4} + c_i B_{i5} + c_i B_{i6}), \quad \forall i \in U \tag{4.60}$$

## Capítulo 5

---

# EXPERIMENTOS E RESULTADOS

---

Para alcançar os objetivos pretendidos com esta pesquisa, codificou-se a abordagem e as restrições práticas, apresentadas, respectivamente, nos Capítulos 3 e 4, em linguagem C++. Em seguida, realizaram-se experimentos com instâncias da literatura. Para resolver os modelos que compõem as abordagens, utilizou-se o pacote comercial de otimização IBM ILOG CPLEX Optimization Studio na versão 12.8. O computador usado nos experimentos possui processador Intel Core i5-3570 de 3,40 Ghz, 8 GB de memória RAM e sistema operacional Linux Ubuntu 16.04 LTS. Ao todo foram realizados 19 experimentos, a saber:

- **Experimento 1:** as instâncias do PCUC foram resolvidas sem considerar restrições práticas, utilizando a abordagem proposta, contudo, sem considerar o corte (3.29) e as restrições de redução de simetrias (3.3) para o modelo do 1PM. O corte considerado neste experimento se refere a inequação (3.28), a qual considera variáveis associadas a todos os itens do subconjunto  $U$  selecionado ao resolver o 1PM;
- **Experimento 2:** as instâncias do PCUC foram resolvidas sem considerar restrições práticas, utilizando a abordagem proposta com o corte (3.29) e as restrições para redução de simetrias (3.3), contudo, sem considerar a relaxação para o 3PEO apresentada em (3.17)-(3.26);
- **Experimento 3:** as instâncias do PCUC foram resolvidas sem considerar restrições práticas, utilizando a abordagem com o corte (3.29) e as restrições para redução de simetrias (3.3), isto é, o modelo para o 1PM, a relaxação para o 3PEO em (3.17)-(3.26), o modelo de PR para o 3PEO em (3.27).
- **Experimento 4:** dada a abordagem proposta no Capítulo 3, as instâncias do PCUC foram resolvidas considerando a restrição de carregamento completo (4.1);
- **Experimento 5:** dada a abordagem proposta no Capítulo 3, as instâncias do PCUC foram resolvidas considerando a restrição de grafo de conflitos (4.2);

- **Experimento 6:** dada a abordagem proposta no Capítulo 3, as instâncias do PCUC foram resolvidas considerando a restrição de prioridade (4.3);
- **Experimento 7:** dada a abordagem proposta no Capítulo 3, as instâncias do PCUC foram resolvidas considerando a restrição de limite de peso (4.10);
- **Experimento 8:** dada a abordagem proposta no Capítulo 3, as instâncias do PCUC foram resolvidas considerando as restrições de estabilidade vertical (4.11), (4.12) e (4.13);
- **Experimento 9:** dada a abordagem proposta no Capítulo 3, as instâncias do PCUC foram resolvidas considerando as restrições de estabilidade vertical (as mesmas utilizadas no Experimento 8) e as restrições estabilidade horizontal (4.14), (4.15), (4.16), (4.17), (4.18) e (4.19);
- **Experimento 10:** dada a abordagem proposta no Capítulo 3, as instâncias do PCUC foram resolvidas considerando as restrições de fragilidade por quantidade de itens acima, definidas em (4.20), (4.21), (4.22);
- **Experimento 11:** dada a abordagem proposta no Capítulo 3, as instâncias do PCUC foram resolvidas considerando as restrições de fragilidade por pressão (4.23), (4.24) e (4.25);
- **Experimento 12:** dada a abordagem proposta no Capítulo 3, as instâncias do PCUC foram resolvidas considerando a restrição de ordem de entrega (4.26);
- **Experimento 13:** dada a abordagem proposta no Capítulo 3, as instâncias do PCUC foram resolvidas considerando as restrição de balanceamento de carga (4.28) e (4.29) para o eixo  $x$  e restrições análogas para os eixos  $y$  e  $z$ ;
- **Experimento 14:** dada a abordagem proposta no Capítulo 3, as instâncias do PCUC foram resolvidas considerando as restrições de corte guilhotinado em 3 estágios (4.30) e (4.31);
- **Experimento 15:** dada a abordagem proposta no Capítulo 3, as instâncias do PCUC foram resolvidas considerando as restrições de corte guilhotinado em 4 estágios (4.32)-(4.36);
- **Experimento 16:** dada a abordagem proposta no Capítulo 3, as instâncias do PCUC foram resolvidas considerando as restrições de carregamento manual (4.38) e (4.39);
- **Experimento 17:** dada a abordagem proposta no Capítulo 3, as instâncias do PCUC foram resolvidas considerando a restrição de separação (4.40);
- **Experimento 18:** dada a abordagem proposta no Capítulo 3, as instâncias do PCUC foram resolvidas considerando a restrição de agrupamento (4.42);

- **Experimento 19:** dada a abordagem proposta no Capítulo 3, as instâncias do PCUC foram resolvidas considerando múltiplas orientações para os instâncias, considerando todas as restrições e adaptações discutidas na Seção 4.13.

A abordagem utilizada nos Experimentos 4 a 19 refere-se a mesma abordagem utilizada no Experimento 3, mudando apenas a restrição prática considerada em cada experimento. A fim de facilitar a compreensão dos experimentos que foram realizados, apresenta-se a Tabela 5.1, que traz todas as etapas, detalhes e restrições consideradas ou não em cada experimento. Assim, se a etapa, restrição ou detalhe é considerado na abordagem utilizada no experimento, o respectivo campo da Tabela é marcado com um “X”. Caso não seja, o campo é marcado com um traço.

Tabela 5.1 – Etapas consideradas nos experimentos realizados.

Exp	Etapas consideradas					
	PI para o 1PM	rel-3PEO	PR para o 3PEO	Restrições para simetrias	Corte	Restrições práticas
1	X	X	X	-	-	-
2	X	-	X	X	X	-
3	X	X	X	X	X	-
4	X	X	X	X	X	Carregamento completo
5	X	X	X	X	X	Grafo de conflitos
6	X	X	X	X	X	Prioridade
7	X	X	X	X	X	Limite de peso
8	X	X	X	X	X	Estabilidade vertical
9	X	X	X	X	X	Estabilidade vertical e horizontal
10	X	X	X	X	X	Fragilidade (quantidade de caixas acima)
11	X	X	X	X	X	Fragilidade (pressão)
12	X	X	X	X	X	Ordem de entrega
13	X	X	X	X	X	Balanceamento de carga
14	X	X	X	X	X	Corte guilhotinado (3 estágios)
15	X	X	X	X	X	Corte guilhotinado (4 estágios)
16	X	X	X	X	X	Carregamento manual
17	X	X	X	X	X	Separação
18	X	X	X	X	X	Agrupamento
19	X	X	X	X	X	Orientação

Fonte – a autora.

Um total de 80 instâncias foi utilizado em cada um dos experimentos. Nas instâncias, os dados sobre quantidade de itens, dimensões do contêiner e dos itens, número  $b_i$  de cópias ou réplicas de cada item, bem como a pressão suportada pelos itens foram obtidos de instâncias geradas e também resolvidas por [Junqueira, Morabito e Yamashita \(2012\)](#) para o PCUC. Foram acrescentadas nas instâncias informações sobre os clientes para os quais os itens devem ser entregues, prioridade, quantidade de caixas que podem ser empacotadas acima de cada caixa, itens conflitantes entre si, limite de peso suportado pelo contêiner, peso para os itens, comprimento do braço do trabalhador no caso de carregamento manual, a distância máxima permitida para itens do mesmo grupo e a distância mínima para itens de grupos distintos. As instâncias utilizadas estão divididas em 8 classes, em que cada classe se diferencia por apresentar uma combinação diferente entre quantidade de itens e tamanho do recipiente. As classes são detalhadas na Tabela 5.2 com relação à quantidade de itens

e volume de recipiente. Os contêineres presentes nas instâncias são todos cúbicos. Além disso, considerou-se o tempo limite de 3.600 segundos para a resolução de cada instância.

Tabela 5.2 – Informações sobre as classes de instâncias.

Classe	Quantidade de tipos de itens	Volume do recipiente
1	5	$10^3$
2	5	$20^3$
3	5	$30^3$
4	5	$50^3$
5	5	$100^3$
6	10	$10^3$
7	10	$20^3$
8	10	$30^3$

Fonte – a autora.

Para todas as instâncias, onde necessário, considerou-se três clientes. No experimento envolvendo a restrição de fragilidade, considerou-se que 30% dos itens são frágeis. Nas restrições de fragilidade por pressão, o peso de cada item foi tomado, da mesma forma que em [Junqueira, Morabito e Yamashita \(2012\)](#), como sendo o volume de cada caixa. No experimento envolvendo a restrição de prioridade, considerou-se que os itens do cliente 1 são mais importantes do que os itens do cliente 2 e, assim, por diante. Nos experimentos de estabilidade vertical e horizontal, considerou-se  $\alpha = 1$ ,  $\lambda = 1$  e  $\mu = 1$ , impondo que os itens tenham suas bases e faces laterais esquerda e traseira completamente apoiadas por outros itens ou pelo piso/paredes do contêiner. Para o grafo de conflitos, considerou-se, com base em [Queiroz et al. \(2017\)](#), a quantidade de conflitos igual a 17% de  $\frac{m(m-1)}{2}$ . Nos experimentos com a restrição de balanceamento de carga, considerou-se os intervalos  $[0, L]$ ,  $[0, 4C; 0, 6C]$  e  $[0; 0, 9A]$  para a localização do centro de massa do carregamento, sendo definidos com base no estudo realizado por [Ramos, Silva e Oliveira \(2018\)](#), no qual foi proposto balancear a carga levando em consideração os eixos do caminhão.

Nos experimentos com a restrição de limite de peso, considerou-se o peso máximo suportado pelo contêiner de 24.000 kg para as instâncias com volume de contêiner igual a  $10^3$  (classes 1 e 6), 30.000 Kg para as instâncias com contêineres de volume  $20^3$  (classes 2 e 7) e 45.000 kg para instâncias com contêineres de volume iguais a  $30^3$ ,  $50^3$  e  $100^3$  (classes 3, 4, 5 e 8). Ainda com relação a restrição de limite de peso, considerou-se pesos aleatórios para os itens sendo gerados entre 10% e 50% do peso máximo suportado pelo contêiner. Para a restrição de carregamento manual, considerou-se o comprimento do braço do trabalhador como sendo igual a 1 e a altura máxima em que os itens podem começar a ser empacotados igual a 60% da altura do contêiner, isto é,  $A_{max} = 0,6A$ . No experimento com a restrição de separação, considerou-se  $\beta = 1$ , indicando que a distância entre itens de grupos diferentes deve ser igual a 1 nos três eixos. No experimento com a restrição de agrupamento,

considerou-se o parâmetro de agrupamento  $\nu = 0,5$ . No experimento com a restrição de orientação, considerou-se as 6 orientações possíveis, isto é, as caixas podem ser rotacionadas em torno de todos os eixos.

Por fim, busca-se com esses experimentos analisar questões relacionadas ao volume carregado, ao tempo requerido para resolver as instâncias e também à quantidade de cortes inseridos durante o processo de resolução, que representa a quantidade de soluções encontradas para o 1PM, avaliadas através da resolução dos modelos rel-3PEO e de PR, e descartadas por não serem viáveis para o PCUC. Assim, nas próximas seções, apresentam-se os resultados alcançados e a discussão acerca deles e em torno das questões objetivadas com a realização dos experimentos.

## 5.1 Resultados para os Experimentos 1, 2 e 3

Até desenvolver a abordagem apresentada para o PCUC no Capítulo 3 (abordagem do Experimento 3), trabalhou-se com duas outras variações dessa mesma abordagem. Uma delas (a abordagem para o Experimento 1) consistiu em considerar os três modelos discutidos aqui, isto é, o modelo para o 1PM, a relaxação e o modelo de PR para o 3PEO, contudo, sem as restrições (3.3) para redução de simetrias e sem o corte (3.29) proposto como alternativa para o corte (3.28). A outra variação (a abordagem para o Experimento 2) consistiu em resolver o problema sem a relaxação para o 3PEO, apenas com o modelo para o 1PM e com o modelo de PR para o 3PEO, com o corte (3.29) e as restrições para a redução de simetrias (3.3).

Na Tabela 5.3 há os resultados sobre as quantidades de instâncias para as quais foi possível encontrar uma solução ótima e para as quais foi possível obter somente um limitante superior da solução ótima em cada experimento. Além disso, tem-se também o tempo médio, em segundos, gasto em cada experimento.

Tabela 5.3 – Comparação média entre as abordagens nos Experimentos 1, 2 e 3.

Variações	Número de Instâncias		Tempo médio (s)
	Solução Ótima	Limitante Superior	
Experimento 1	24 (30%)	56 (70%)	2951,31
Experimento 2	26 (33%)	54 (68%)	2475,77
Experimento 3	55 (69%)	25 (31%)	1336,39

Fonte – a autora.

Os resultados indicam que, dentre as variações investigadas da abordagem, a que considera a relaxação para o 3PEO, as restrições (3.3) para redução de simetrias e o corte

(3.29) (que é a abordagem do Experimento 3) apresentou o melhor desempenho com relação a tempo computacional e quantidade de instâncias para as quais foi possível encontrar solução ótima. Em números, a abordagem proposta conseguiu resolver 129,17% mais instâncias do que a abordagem para o Experimento 1, sem as restrições para a redução de simetria e o corte, e 111,54% a mais instâncias do que a abordagem para o Experimento 2, com as restrições de simetria e o corte, porém, sem a relaxação para o 3PEO. Os resultados também mostraram que tal abordagem foi 102,44% e 85,26% mais rápida do que abordagem dos Experimentos 1 e 2, respectivamente.

Uma outra comparação a ser feita é com relação ao valor da função objetivo alcançado nos três experimentos. As Tabelas 5.4 e 5.5 trazem, para cada instância, na coluna “V.F.O”, o último valor encontrado para a função objetivo, na coluna “Tipo”, se esse valor representa uma solução do tipo ótima (OT) ou limitante superior (UB) e o tempo, em segundos, gasto para resolver a instância utilizando. A Tabela 5.4 traz os resultados para as instâncias com 10 tipos de itens e a Tabela 5.5 traz os resultados para as instâncias com 5 tipos de itens.

Tabela 5.4 – Resultados para os Experimentos 1, 2 e 3 com 10 tipos itens.

Instância	Experimento 1			Experimento 2			Experimento 3		
	Solução		Tempo (s)	Solução		Tempo (s)	Solução		Tempo (s)
	Tipo	V. F. O.		Tipo	V. F. O.		Tipo	V. F. O.	
N10m10b2d2-01	UB	1000	3600,00	UB	1000	3600,00	UB	1000	3600,00
N10m10b2d2-02	UB	1000	3600,00	UB	1000	3600,00	OT	1000	525,00
N10m10b2d2-03	UB	808	3600,00	UB	848	3600,00	OT	630	960,84
N10m10b2d2-04	OT	1000	16,94	UB	1000	3600,00	UB	1000	3600,00
N10m10b2d2-05	OT	1000	1,15	UB	1000	3600,00	UB	1000	3600,00
N10m10b2d2-06	UB	1000	3600,00	UB	1000	3600,00	UB	1000	3600,00
N10m10b2d2-07	UB	1000	3600,00	UB	1000	3600,00	UB	1000	3600,00
N10m10b2d2-08	UB	1000	3600,00	UB	1000	3600,00	UB	1000	3600,00
N10m10b2d2-09	UB	1000	3600,00	UB	1000	3600,00	OT	1000	49,63
N10m10b2d2-10	UB	1000	3600,00	UB	1000	3600,00	OT	1000	740,90
N20m10b2d2-01	UB	7999	3600,00	UB	7299	3600,00	UB	7155	3600,00
N20m10b2d2-02	UB	8000	3600,00	UB	8000	3600,00	UB	7971	3600,00
N20m10b2d2-03	UB	8000	3600,00	UB	7996	3600,00	UB	7968	3600,00
N20m10b2d2-04	UB	8000	3600,00	UB	8000	3600,00	UB	7970	3600,00
N20m10b2d2-05	UB	8000	3600,00	UB	8000	3600,00	UB	7986	3600,00
N20m10b2d2-06	UB	8000	3600,00	UB	7986	3600,00	UB	7922	3600,00
N20m10b2d2-07	UB	8000	3600,00	UB	7988	3600,00	UB	7834	3600,00
N20m10b2d2-08	UB	8000	3600,00	UB	7997	3600,00	UB	7735	3600,00
N20m10b2d2-09	UB	8000	3600,00	UB	7997	3600,00	UB	7983	3600,00
N20m10b2d2-10	UB	8000	3600,00	UB	8000	3600,00	UB	7916	3600,00
N30m10b2d2-01	UB	26997	3600,00	UB	25474	3600,00	UB	25351	3600,00
N30m10b2d2-02	UB	26998	3600,00	UB	27000	3600,00	UB	26934	3600,00
N30m10b2d2-03	UB	26998	3600,00	UB	26682	3600,00	UB	26672	3600,00
N30m10b2d2-04	UB	27000	3600,00	UB	26986	3600,00	OT	22318	3247,62
N30m10b2d2-05	UB	26996	3600,00	UB	26340	3600,00	OT	25260	1227,51
N30m10b2d2-06	UB	26568	3600,00	UB	18917	3600,00	OT	18917	2086,35
N30m10b2d2-07	UB	27000	3600,00	UB	27000	3600,00	UB	26956	3600,00
N30m10b2d2-08	UB	27000	3600,00	UB	26972	3600,00	UB	26376	3600,00
N30m10b2d2-09	UB	26996	3600,00	UB	24654	3600,00	UB	23850	3600,00
N30m10b2d2-10	UB	27000	3600,00	UB	26908	3600,00	UB	26901	3600,00

Fonte – a autora

Nas tabelas, os valores cujo o tempo de resolução é inferior a 3.600 segundos indicam uma solução ótima e valores cujo o tempo é igual a 3.600 segundos são considerados

como um limitante superior para o valor da solução ótima. Observa-se também que muitas instâncias para as quais o tempo limite de 3.600 segundos foi atingido, não conseguindo alcançar a solução ótima utilizando a abordagem dos Experimentos 1 e 2, foram resolvidas em tempos menores do que 3.600 segundos utilizando a abordagem do Experimento 3.

Tabela 5.5 – Resultados para os Experimentos 1, 2 e 3 para instâncias com 5 tipos itens.

Instância	Experimento 1			Experimento 2			Experimento 3		
	Solução		Tempo (s)	Solução		Tempo (s)	Solução		Tempo (s)
	Tipo	V. F. O.		Tipo	V. F. O.		Tipo	V. F. O.	
N10m05b2d2-01	OT	776	2447,43	OT	776	26,91	OT	776	4,94
N10m05b2d2-02	UB	1000	3600,00	UB	1000	3600,00	UB	1000	3600,00
N10m05b2d2-03	UB	998	3600,00	UB	998	3600,00	OT	950	4,53
N10m05b2d2-04	UB	942	3600,00	OT	916	692,42	OT	916	4,08
N10m05b2d2-05	UB	996	3600,00	UB	996	3600,00	OT	918	1711,41
N10m05b2d2-06	UB	1000	3600,00	UB	1000	3600,00	OT	1000	78,54
N10m05b2d2-07	UB	1000	3600,00	UB	1000	3600,00	OT	992	2907,87
N10m05b2d2-08	OT	772	84,10	UB	826	3600,00	OT	772	7,84
N10m05b2d2-09	UB	996	3600,00	UB	996	3600,00	OT	960	61,28
N10m05b2d2-10	UB	1000	3600,00	UB	1000	3600,00	OT	850	169,93
N20m05b2d2-01	UB	8000	3600,00	UB	8000	3600,00	OT	7013	2661,36
N20m05b2d2-02	UB	7953	3600,00	UB	7550	3600,00	OT	6528	39,24
N20m05b2d2-03	UB	7983	3600,00	UB	7920	3600,00	OT	6960	6,82
N20m05b2d2-04	UB	6444	3600,00	UB	7608	3600,00	OT	6216	4,40
N20m05b2d2-05	OT	4855	2,88	OT	4855	0,72	OT	4855	0,83
N20m05b2d2-06	OT	6011	552,00	OT	6011	5,21	OT	6011	9,25
N20m05b2d2-07	UB	5878	3600,00	UB	6382	3600,00	OT	5754	10,98
N20m05b2d2-08	UB	7998	3600,00	UB	7984	3600,00	OT	7288	40,93
N20m05b2d2-09	OT	6212	669,66	UB	7276	3600,00	OT	6212	2,78
N20m05b2d2-10	UB	5998	3600,00	OT	5998	369,49	OT	5998	6,20
N30m05b2d2-01	UB	22312	3600,00	OT	18010	315,38	OT	18010	25,70
N30m05b2d2-02	UB	17490	3600,00	UB	19352	3600,00	OT	17490	3,22
N30m05b2d2-03	OT	17544	2836,49	OT	17544	9,69	OT	17544	3,51
N30m05b2d2-04	UB	26880	3600,00	UB	26880	3600,00	OT	20568	91,50
N30m05b2d2-05	OT	20119	96,46	OT	20119	2,86	OT	20119	2,27
N30m05b2d2-06	OT	14388	0,17	OT	14388	0,16	OT	14388	0,14
N30m05b2d2-07	OT	14616	1466,84	OT	14616	7,62	OT	14616	3,31
N30m05b2d2-08	OT	11590	0,21	OT	11590	0,19	OT	11590	0,17
N30m05b2d2-09	OT	14417	0,57	OT	14417	0,39	OT	14417	0,27
N30m05b2d2-10	OT	15679	2,27	OT	15679	0,44	OT	15679	0,46
N50m05b2d2-01	OT	81092	333,95	OT	81092	77,15	OT	81092	4,81
N50m05b2d2-02	OT	86440	108,44	OT	86440	3,72	OT	86440	3,21
N50m05b2d2-03	OT	85461	3092,54	OT	85461	433,12	OT	85461	7,01
N50m05b2d2-04	UB	112116	3600,00	UB	117222	3600,00	OT	73338	32,97
N50m05b2d2-05	UB	124944	3600,00	UB	124944	3600,00	OT	103248	52,68
N50m05b2d2-06	UB	124537	3600,00	UB	108514	3600,00	OT	88466	36,10
N50m05b2d2-07	UB	124998	3600,00	UB	124992	3600,00	UB	120738	3600,00
N50m05b2d2-08	UB	124980	3600,00	UB	124332	3600,00	OT	94734	11,61
N50m05b2d2-09	OT	92850	69,36	OT	92850	3,71	OT	92850	4,76
N50m05b2d2-10	OT	64348	1277,73	OT	64348	4,29	OT	64348	3,25
N100m05b2d2-01	OT	487036	1,69	OT	487036	0,62	OT	487036	0,67
N100m05b2d2-02	UB	737802	3600,00	UB	756948	3600,00	OT	718422	7,18
N100m05b2d2-03	UB	849573	3600,00	OT	707316	463,60	OT	707316	17,91
N100m05b2d2-04	UB	540774	3600,00	OT	531520	6,84	OT	531520	3,38
N100m05b2d2-05	UB	931276	3600,00	OT	740510	1219,35	OT	740510	7,79
N100m05b2d2-06	OT	671674	10,58	OT	671674	2,59	OT	671674	0,43
N100m05b2d2-07	OT	673895	2,68	OT	673895	0,76	OT	673895	0,64
N100m05b2d2-08	OT	729040	51,30	OT	729040	1,49	OT	729040	0,97
N100m05b2d2-09	OT	714327	1708,15	OT	714327	12,54	OT	714327	7,57
N100m05b2d2-10	UB	998272	3600,00	UB	943110	3600,00	OT	850368	6,50

Fonte – a autora.

## 5.2 Resultados com as Restrições Práticas

O objetivo desta seção é apresentar os resultados obtidos com os experimentos realizados e discuti-los com relação aos aspectos otimalidade, cortes inseridos, volume carregado e tempo de resolução, além de analisar o impacto da inserção das restrições práticas no volume carregado e no tempo requerido para resolver as instâncias. Como os experimentos discutidos na Seção 5.1 mostraram que a abordagem tal como foi proposta no Capítulo 3, com a rel-3PEO, as restrições de redução de simetria e o corte, apresentou resultados melhores, considerou-se tal versão da abordagem para resolver as instâncias com restrições práticas. Logo, todas as comparações entre o caso sem restrições práticas e os casos que levam, individualmente, a consideração de cada uma das restrições mencionadas no Capítulo 4 são feitas com relação a esta versão.

Diante disso, apresenta-se, nas Tabelas 5.6 e 5.7, para cada classe de instância, a média simples para os valores de função de objetivo (que dizem respeito ao volume empacotado) para as instâncias da respectiva classe, os percentuais de volume ocupado, os cortes inseridos e o tempo gasto para resolver as instâncias. Os resultados individuais obtidos para cada instância de cada classe e em cada experimento estão apresentados no Apêndice A. A intenção em se apresentar a média por classes é facilitar a análise do impacto da inserção das restrições práticas com relação ao volume empacotado, uma vez que há grupos com valores de volume do contêiner diferentes entre si.

Para calcular a média de cada classe com relação ao valor de função objetivo e ao percentual de volume ocupado, considerou-se apenas as instâncias para as quais foi possível encontrar a solução ótima dentro do limite de tempo estabelecido, uma vez que, quando não se conhece a solução ótima para uma instância, não se pode afirmar que os itens associados ao valor de função objetivo (que é um limitante superior) podem ser empacotados no contêiner. Contudo, para o cálculo da média com relação ao número de cortes e ao tempo de resolução, considerou-se os resultados obtidos para todas as instâncias de cada classe, pois se os tempos iguais a 3.600 segundos são retirados por não se ter garantia da otimalidade da solução, o resultado para a média será, provavelmente, um tempo médio relativamente baixo, o que poderia indicar que o método está rápido, quando, na verdade, há casos em que ele pode demorar bastante para chegar na solução, ultrapassando o tempo limite. O mesmo ocorre com a quantidade de cortes inseridos.

### 5.2.1 Otimalidade

A abordagem proposta só finaliza quando encontra a solução ótima da respectiva instância, ou quando atinge o tempo limite imposto de 3.600 segundos. Isso faz com a abordagem retorne, caso o tempo limite seja atingido, o último valor assumido pela função objetivo, que é tido como limitante superior. Neste caso, todos os subconjuntos encontrados

Tabela 5.6 – Média dos resultados com restrições práticas por grupos de instâncias (Parte 1)

Experimento	Instâncias	V.F.O.	Volume Ocupado (%)	Número de Cortes		Tempo (s)
				2PM	3PEO	
3 - Sem restrições práticas	Classe 1	903,78	90,38	267	0	855,04
	Classe 2	6283,50	78,54	460	0	460,20
	Classe 3	16442,10	60,90	229	0	13,06
	Classe 4	85553,00	68,44	620	0	375,64
	Classe 5	682410,80	68,24	149	0	5,30
	Classe 6	815,00	81,50	1245	0	2387,64
	Classe 7	0,00	0,00	2367	0	3600,00
	Classe 8	22165,00	82,09	3433	0	3176,15
4 - Carregamento completo	Classe 1	740,00	74,00	2	0	368,93
	Classe 2	4629,00	57,86	2	0	0,13
	Classe 3	11251,80	41,67	3	0	0,03
	Classe 4	53946,30	43,16	3	0	0,20
	Classe 5	334663,10	33,47	4	0	0,08
	Classe 6	379,90	37,99	1	0	2,53
	Classe 7	1562,10	19,53	2	0	0,80
	Classe 8	2935,70	10,87	2	0	0,55
5 - Grafo de conflitos	Classe 1	755,11	75,51	69	0	675,79
	Classe 2	5930,20	74,13	102	0	209,59
	Classe 3	15256,40	56,51	51	0	1,82
	Classe 4	84563,10	67,65	276	0	145,76
	Classe 5	652214,70	65,22	41	0	1,29
	Classe 6	1000,00	100,00	713	0	2624,33
	Classe 7	6823,22	85,29	1644	0	939,12
	Classe 8	21762,78	80,60	1926	0	1056,82
6 - Prioridade	Classe 1	739,78	73,98	12	0	361,60
	Classe 2	5486,40	68,58	8	0	0,76
	Classe 3	13317,30	49,32	10	0	0,15
	Classe 4	64476,70	51,58	16	0	2,76
	Classe 5	468496,80	46,85	10	0	0,24
	Classe 6	907,40	90,74	280	0	1773,07
	Classe 7	6215,70	77,70	84	0	35,33
	Classe 8	17018,10	63,03	48	0	10,25
7 - Limite de peso	Classe 1	358,00	35,80	0	0	0,48
	Classe 2	3464,20	43,30	3	0	0,61
	Classe 3	13544,50	50,16	8	0	0,97
	Classe 4	51200,40	40,96	3	0	0,57
	Classe 5	476092,90	47,61	7	0	0,84
	Classe 6	529,20	52,92	4	0	5,22
	Classe 7	4507,70	56,35	65	0	53,24
	Classe 8	14887,90	55,14	17	0	5,14
8 - Estabilidade vertical	Classe 1	861,50	86,15	277	1	2497,85
	Classe 2	5836,67	72,96	474	2	1576,50
	Classe 3	15717,11	58,21	243	1	364,02
	Classe 4	82215,22	65,77	636	4	518,84
	Classe 5	597134,50	59,71	202	12	170,97
	Classe 6	815,00	81,50	1249	0	15941,42
	Classe 7	0,00	0,00	2387	0	3600,00
	Classe 8	21166,00	78,39	3582	3	3271,83
9 - Estabilidade vertical e horizontal	Classe 1	912,00	91,20	294	3	2661,40
	Classe 2	4942,00	61,78	534	20	1868,28
	Classe 3	18264,22	67,65	269	9	370,37
	Classe 4	71635,29	57,31	646	12	1418,10
	Classe 5	465185,33	46,52	230	42	453,27
	Classe 6	815,00	81,50	1234	0	3004,92
	Classe 7	0,00	0,00	2359	0	3600,00
	Classe 8	20338,00	75,33	3621	12	3335,36
10 - Fragilidade (quantidade de caixas acima)	Classe 1	841,80	84,18	298	1	2047,18
	Classe 2	5978,00	74,73	495	4	443,40
	Classe 3	16280,50	60,30	233	0	12,76
	Classe 4	84473,44	67,58	628	2	382,26
	Classe 5	618931,70	61,89	181	6	90,61
	Classe 6	1000,00	100,00	1461	0	3246,42
	Classe 7	0,00	0,00	2394	0	3600,00
	Classe 8	22099,67	81,85	3474	0	3178,60

Fonte – a autora.

Tabela 5.7 – Média dos resultados com restrições práticas por grupos de instâncias (Parte 2)

Experimento	Instâncias	V.F.O.	Volume Ocupado (%)	Número de Cortes		Tempo (s)
				2PM	3PEO	
11 - Fragilidade (pressão)	Classe 1	816,00	81,60	288	4	3010,97
	Classe 2	5537,57	69,22	502	6	1393,62
	Classe 3	16202,20	60,01	232	1	14,77
	Classe 4	82959,00	66,37	597	1	1094,46
	Classe 5	633121,00	63,31	178	5	25,65
	Classe 6	0,00	0,00	1681	0	3600,00
	Classe 7	0,00	0,00	2205	0	3600,00
	Classe 8	18339,00	67,92	3487	2	3511,78
12 - Ordem de entrega	Classe 1	883,14	88,31	272	0	1113,08
	Classe 2	6154,67	76,93	477	1	665,39
	Classe 3	16435,40	60,87	229	0	14,53
	Classe 4	83558,00	66,85	598	1	378,54
	Classe 5	656145,10	65,61	163	1	7,74
	Classe 6	907,50	90,75	1141	0	2367,93
	Classe 7	0,00	0,00	2198	0	3600,00
	Classe 8	22003,00	81,49	3302	0	3268,61
13 - Balanceamento de carga	Classe 1	556,67	55,67	373	47	2697,35
	Classe 2	4145,67	51,82	647	109	1554,54
	Classe 3	11621,00	43,04	290	27	392,74
	Classe 4	56158,17	44,93	664	37	1481,54
	Classe 5	435859,22	43,59	263	46	655,16
	Classe 6	0,00	0,00	1217	1	3600,00
	Classe 7	0,00	0,00	2198	0	3600,00
	Classe 8	0,00	0,00	3673	9	3600,00
14 - Corte guilhotinado (3 estágios)	Classe 1	710,00	71,00	320	21	2565,22
	Classe 2	5695,25	71,19	552	15	994,38
	Classe 3	15246,10	56,47	258	4	20,14
	Classe 4	71715,14	57,37	621	9	1094,51
	Classe 5	606310,10	60,63	191	10	149,95
	Classe 6	1000,00	100,00	1360	1	3271,55
	Classe 7	0,00	0,00	2200	0	3600,00
	Classe 8	0,00	0,00	3628	4	3600,00
15 - Corte guilhotinado (4 estágios)	Classe 1	735,00	73,50	290	3	2923,26
	Classe 2	5897,33	73,72	494	4	1450,04
	Classe 3	15351,20	56,86	248	2	20,04
	Classe 4	70858,00	56,69	611	9	1091,41
	Classe 5	609885,90	60,99	182	7	21,47
	Classe 6	788,00	78,80	1176	0	3140,35
	Classe 7	0,00	0,00	2219	0	3600,00
	Classe 8	0,00	0,00	3678	7	3574,04
16 - Carregamento manual	Grupo 1	607,00	60,70	243	0	2398,85
	Grupo 2	5984,17	74,80	477	1	1449,05
	Grupo 3	16319,67	60,44	229	0	373,19
	Grupo 4	73204,63	58,56	592	0	1090,27
	Grupo 5	662055,90	66,21	163	1	53,74
	Grupo 6	630,00	63,00	1140	0	3358,04
	Grupo 7	0,00	0,00	2218	0	3600,00
	Grupo 8	26901,00	99,63	3448	1	3475,96
17 - Separação	Classe 1	686,00	68,60	374	28	2530,85
	Classe 2	5568,60	69,61	550	15	2079,01
	Classe 3	15412,20	57,08	256	3	96,72
	Classe 4	79206,75	63,37	608	2	732,60
	Classe 5	664271,40	66,43	166	2	8,21
	Classe 6	630,00	63,00	1140	0	3357,39
	Classe 7	0,00	0,00	2220	0	3600,00
	Classe 8	21880,50	81,04	3346	1	3272,28
18 - Agrupamento	Classe 1	889,14	88,91	267	0	1107,64
	Classe 2	6225,90	77,82	464	1	404,82
	Classe 3	16353,30	60,57	240	0	14,56
	Classe 4	84881,00	67,90	621	0	375,68
	Classe 5	671537,80	67,15	154	1	5,66
	Classe 6	876,67	87,67	1243	0	2680,10
	Classe 7	0,00	0,00	2355	0	3600,00
	Classe 8	20617,50	76,36	3427	0	3420,62
19 - Orientação	Classe 1	880,00	88,00	8	0	3283,11
	Classe 2	7108,50	88,86	39	0	2251,24
	Classe 3	19566,57	72,47	58	0	1209,23
	Classe 4	98941,50	79,15	34	0	2988,52
	Classe 5	605769,50	60,58	44	0	1874,17
	Classe 6	1000,00	100,00	1	0	3289,97
	Classe 7	0,00	0,00	46	0	3600,00
	Classe 8	0,00	0,00	224	0	3600,00

Fonte – a autora.

nas iterações anteriores não representam soluções factíveis para o PCUC, porque foram descartados, ora pela resolução da rel-3PEO, ora pela resolução do modelo de PR para o 3PEO. Assim, com vistas a mostrar como os resultados estão com relação a otimalidade da solução, apresenta-se, na Tabela 5.8, a porcentagem de instâncias com solução ótima e a porcentagem de instâncias para as quais a abordagem conseguiu retornar somente um valor considerado um limitante superior.

A análise da Tabela 5.8 mostra que, para os casos em que se considerou as restrições de carregamento completo, grafo de conflitos, prioridade e limite de peso, encontrou-se solução ótima para uma quantidade maior de instâncias do que se encontrou para os casos sem restrições práticas e com as demais restrições. Isso acontece porque as restrições de carregamento completo, grafo de conflitos, prioridade e limite de peso limitam o número de combinações de itens para o 1PM e também o número de itens em cada combinação, com isso, a rel-3PEO e o modelo de PR para o 3PEO conseguem ser resolvidos mais rapidamente. No caso sem restrições práticas e com as demais restrições, tais números são maiores, o que contribui para que seja mais difícil resolver o problema dentro do tempo limite estabelecido.

Tabela 5.8 – Porcentagem de instâncias com solução ótima e limitante superior.

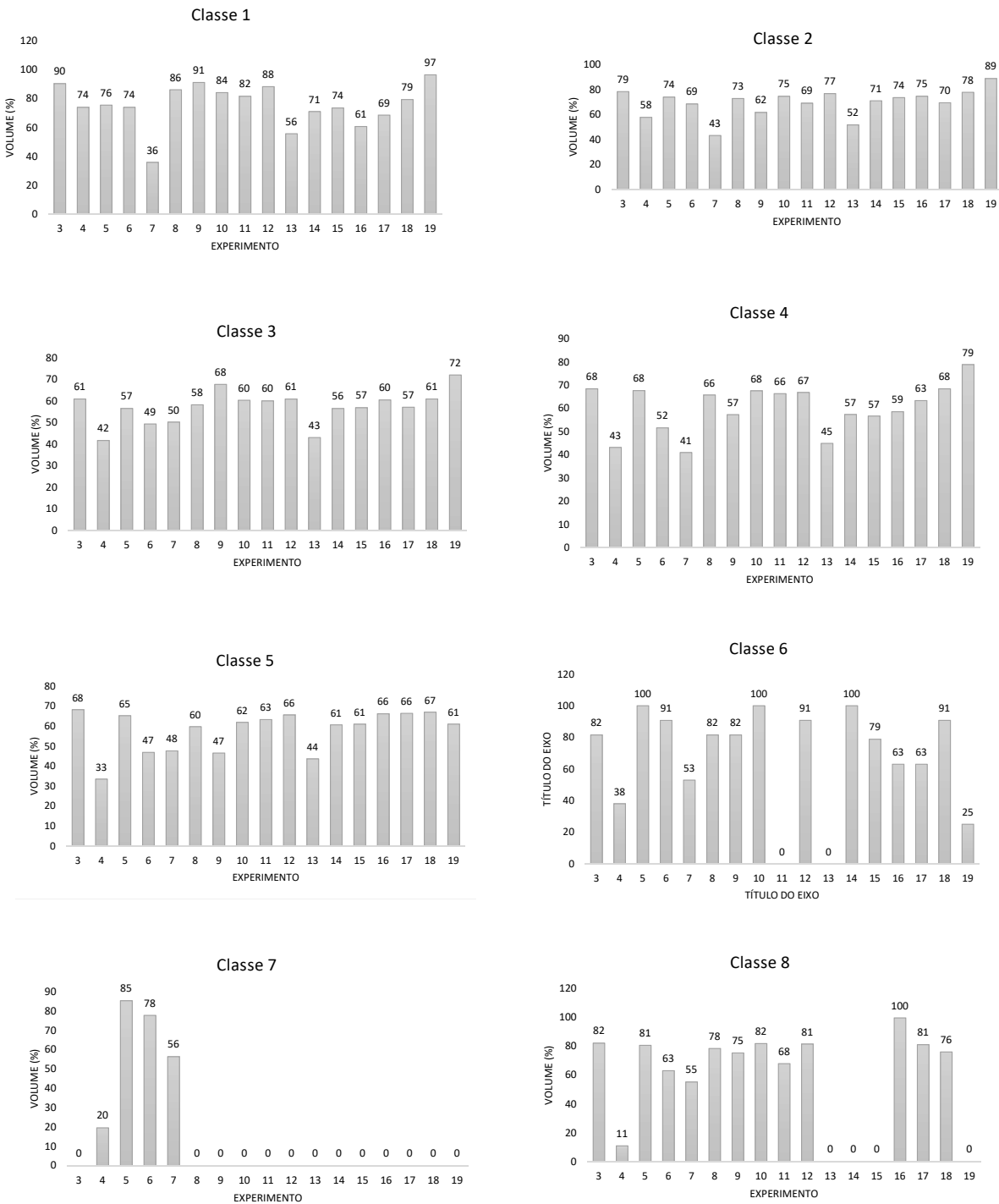
Experimento	Quantidade de Instâncias (%)	
	Solução Ótima	Limitante Superior
Sem restrições práticas	69	31
Com carregamento completo	99	1
Com grafo de conflitos	87	13
Com prioridade	94	6
Com limite de peso	100	0
Com estabilidade vertical	52	48
Com estabilidade vertical e horizontal	46	54
Com fragilidade por quantidade de itens acima	59	41
Com fragilidade por pressão	46	54
Com ordem de entrega	64	36
Com balanceamento de carga	41	59
Com corte guilhotinado de 3 estágios	49	51
Com corte guilhotinado de 4 estágios	47	53
Com carregamento manual	52	48
Separação	49	51
Agrupamento	64	36
Orientação	25	75

Fonte – a autora.

### 5.2.2 Volume empacotado

Na Figura 5.1 encontra-se o volume empacotado, em porcentagem, para todas as classes para os Experimentos de 3 a 19, que são os experimentos sem e com restrições práticas realizados com a abordagem proposta.

Figura 5.1 – Volume médio empacotado no contêiner em cada experimento para cada classe de instância.



Fonte – a autora.

Um primeiro ponto a ser observado nos gráficos da Figura 5.1 é que, nas classes de 1 a 8, o volume médio associado a alguns experimentos envolvendo restrições práticas é maior do que o volume do Experimento 3, que é sem restrições práticas. Isso ocorreu porque nessas classes não foi possível encontrar uma solução ótima para todas as instâncias, na maioria dos experimentos, de forma que a quantidade de instâncias ótimas em uma mesma classe

não coincidiu em boa parte desses experimentos. Como o cálculo da média dos volumes levou em consideração somente as soluções ótimas de cada classe e sendo que essa quantidade varia (não é a mesma) para todas as classes nos diferentes experimentos, a tendência é que ocorra essa diferença de volume.

Nota-se que para a Classe 5 foi possível encontrar solução ótima para todas as instâncias em todos os experimentos de 3 a 19. Logo, a análise para mensurar o impacto com relação ao volume empacotado, considera somente os resultados sobre esta classe, dada a Tabela 5.9 que traz um *ranking* para as restrições práticas no que diz respeito a perda de volume empacotado com relação ao volume do contêiner e com relação ao caso sem restrições práticas. Assim, a restrição para a qual houve maior perda de volume foi a de carregamento completo, com uma perda média de 67% com relação ao volume do contêiner e 35% com relação ao caso sem restrições práticas. Por outro lado, a inserção da agrupamento provocou as menores perdas de volume, sendo a perda média igual a 1%.

Tabela 5.9 – *Ranking* das restrições em relação a perda de volume para a Classe 5.

Posição	Restrição	Exp.	Vol. médio (%)	Perda média com relação ao volume do contêiner (%)	Perda média com relação ao caso sem restrições práticas (%)*
1	Carregamento completo	4	33	67	35
2	Balanceamento de carga	13	44	56	25
3	Prioridade	6	47	53	21
4	Estabilidade vertical e horizontal	9	47	53	22
5	Limite de peso	7	48	52	21
6	Estabilidade vertical e horizontal	8	60	40	9
7	Corte guilhotinado (3 estágios)	14	61	39	8
8	Corte guilhotinado (4 estágios)	15	61	39	7
9	Fragilidade (quantidade de itens acima)	10	62	38	6
10	Fragilidade (pressão)	11	63	37	5
11	Grafo de conflitos	5	65	35	3
12	Ordem de entrega	12	66	34	3
13	Carregamento manual	16	66	34	2
14	Orientação	19	61	39	7
15	Separação	17	66	34	2
16	Agrupamento	18	67	33	1

\*Caso sem restrições práticas: média de 68% do volume do contêiner utilizado.

Fonte – a autora.

### 5.2.3 Tempo de resolução

A Tabela 5.10 apresenta o tempo médio de resolução, em segundos, alcançado em cada experimento. Com base nela é possível perceber que as restrições de carregamento completo, grafo de conflitos, prioridade e limite de peso, que são restrições consideradas no 1PM, provocaram redução no tempo médio de resolução. Já as demais restrições, que são consideradas justamente no modelo de PR para o 3PEO provocaram aumento no tempo médio. O motivo para a redução no tempo pelas primeiras restrições mencionadas é devido ao fato de limitarem o número de combinações de itens e o número de itens em cada combinação.

A Tabela 5.10 traz ainda os aumentos e as reduções observadas no tempo médio de resolução dado a inserção das restrições práticas na abordagem. A última coluna dessa tabela

traz, para cada restrição, o aumento ou a redução observada, em porcentagem. Dentre todas as restrições, o experimento com a restrição de estabilidade vertical trouxe o maior aumento no tempo de resolução quando comparado com o caso sem nenhuma restrição prática. Por outro lado, a maior redução é observada quando a restrição de prioridade é considerada.

Tabela 5.10 – Tempo médio gasto em cada experimento.

Experimento	Tempo médio (s)	Aumento ou redução (%)
Sem restrições práticas	1336,39	-
Com carregamento completo	46,66	-96,51
Com grafo de conflitos	698,40	-47,74
Com prioridade	8,56	-99,36
Limite de Peso	8,38	-99,37
Com estabilidade vertical	3492,68	161,35
Com estabilidade vertical e horizontal	2250,86	68,43
Com fragilidade (quantidade de itens acima)	1599,63	19,70
Com fragilidade (pressão)	2031,41	52,01
Com ordem de entrega	1426,98	6,78
Com balanceamento de carga	2197,67	64,45
Com corte guilhotinado (3 estágios)	1911,97	43,07
Com corte guilhotinado (4 estágios)	1977,58	47,98
Com carregamento manual	2127,36	59,19
Separação	1959,63	46,64
Agrupamento	1451,13	8,59
Orientação	2749,01	105,70

Fonte – a autora.

#### 5.2.4 Teste estatístico

A fim de analisar se há diferença significativa entre os tempos requeridos para resolver as instâncias utilizando a abordagem sem restrições práticas e com cada uma das restrições, realizou-se o Teste dos Postos Sinalizados de *Wilcoxon*. A ideia é verificar se as diferenças observadas no tempo ao inserir cada uma das restrições práticas são de fato significativas do ponto de vista estatístico e também para verificar se existe diferença significativa nos tempos obtidos ao resolver a abordagem com e sem a relaxação para 3PEO, o corte e as restrições de redução de simetrias.

O teste foi realizado para duas amostras de dados por vez. A primeira amostra consistiu, em todos os casos, nos tempos obtidos para resolver as 80 instâncias no Experimento 3 e, a segunda amostra, o tempo obtido em cada um dos demais experimentos. Por exemplo, para verificar se há diferença significativa nos tempos obtidos ao inserir a restrição de carregamento completo quando comparados com os tempos obtidos ao resolver as instâncias sem esta restrição, foram utilizados os resultados do Experimento 3, que é o caso sem restrições práticas, e os resultados do Experimento 4, que é o experimento com a restrição de carregamento completo. O mesmo é feito para as demais restrições e também para os experimentos em que se buscou investigar o desempenho da abordagem na presença e na ausência da relaxação para o 3PEO e das restrições para redução de simetrias e o corte pro-

posto.

O teste dos Postos Sinalizados de *Wilcoxon* foi escolhido porque os dados não possuem distribuição normal e são originados do mesmo conjunto de instâncias, isto é, são dados emparelhados, possuindo, desta forma, as características requeridas pelo teste. A normalidade foi investigada pelo teste de *Shapiro Wilk*, que mostrou, de fato, que os dados não possuem distribuição normal. Em todos os testes, fez-se a comparação com referência ao Experimento 3, que é a abordagem proposta sem restrições práticas. Os testes foram realizados utilizando o *software* de estatística R.

Os p-valores mostrados na Tabela 5.11, para um nível de significância de 95%, para todos os testes são menores do que 0,05 (5%). Logo, tem-se que, para esses casos, a hipótese nula de que os dados não possuem diferença significativa é refutada, sendo aceita a hipótese alternativa, isto é, de que há diferença significativa nos tempos de resolução entre os experimentos.

Tabela 5.11 – Resultados dos testes estatísticos considerando o Experimento 3 como referência.

Teste	<i>p</i> -valor
1 - Experimento 3 e Experimento 1	$8,20 \times 10^{-9}$
2 - Experimento 3 e Experimento 2	$9,08 \times 10^{-10}$
3 - Experimento 3 e Experimento 4 (carregamento)	$1,15 \times 10^{-14}$
4 - Experimento 3 e Experimento 5 (grafo de conflitos)	$2,64 \times 10^{-10}$
5 - Experimento 3 e Experimento 6 (prioridade)	$7,28 \times 10^{-12}$
6 - Experimento 3 e Experimento 7 (limite de peso)	$3,51 \times 10^{-14}$
7 - Experimento 3 e Experimento 8 (estabilidade vertical)	$1,10 \times 10^{-8}$
8 - Experimento 3 e Experimento 9 (estabilidade vertical e horizontal)	$1,37 \times 10^{-10}$
9 - Experimento 3 e Experimento 10 (fragilidade pela quantidade de caixas)	$1,43 \times 10^{-4}$
10 - Experimento 3 e Experimento 11 (fragilidade pela pressão admissível)	$1,24 \times 10^{-10}$
11 - Experimento 3 e Experimento 12 (ordem de entrega)	$5,93 \times 10^{-7}$
12 - Experimento 3 e Experimento 13 (balanceamento de carga)	$1,11 \times 10^{-10}$
13 - Experimento 3 e Experimento 14 (corte guilhotinado - 3 estágios)	$7,35 \times 10^{-10}$
14 - Experimento 3 e Experimento 15 (corte guilhotinado -4 estágios)	$2,26 \times 10^{-10}$
15 - Experimento 3 e Experimento 16 (carregamento manual)	$8,39 \times 10^{-13}$
16 - Experimento 3 e Experimento 17 (separação)	$6,98 \times 10^{-10}$
17 - Experimento 3 e Experimento 18 (agrupamento)	$1,25 \times 10^{-8}$
18 - Experimento 3 e Experimento 19 (orientação)	$3,55 \times 10^{-10}$

Fonte – a autora.

### 5.3 Exemplo de Soluções

A instância escolhida para apresentar soluções obtidas sem e mediante a consideração, na abordagem, de cada uma das restrições abordadas no trabalho é a instância N100m05b2d2-02 da Classe 5. As instâncias da Classe 5 possuem, todas elas, cinco tipos de itens e recipiente com largura, comprimento e altura iguais a 100 e volume  $100^3$ . As informações básicas sobre os itens contidos na instância, bem como detalhes relacionados a consideração das restrições práticas, como itens conflitantes, clientes e peso são apresentadas na Tabela 5.12.

Tabela 5.12 – Dados da instância da Classe 5 usada para mostrar as soluções.

Item (Tipo)	$v_i$	$l_i$	$c_i$	$a_i$	$b_i$	Cliente	Prioridade	Peso	$f_i$	$\eta_i$
Item do tipo 1	171570	43	57	70	1	1	1	15482	0	92
Item do tipo 2	164610	59	45	62	1	2	2	16661	4	67
Item do tipo 3	170430	57	65	46	2	3	3	6364	1	44
Item do tipo 4	45198	27	27	62	4	1	1	22441	4	163
Item do tipo 5	57798	38	39	39	7	2	2	12755	4	62
<b>Pares de itens conflitantes:</b> (2, 5) e (1, 3).										

$v_i$ : valor e volume do item do tipo  $i$ .

$l_i, c_i, a_i$ : largura, comprimento, altura do item do tipo  $i$ .

$b_i$ : quantidade de cópias do item do tipo  $i$ .

$f_i$ : quantidade de caixas que podem ser empacotadas acima de cada item do tipo  $i$ .

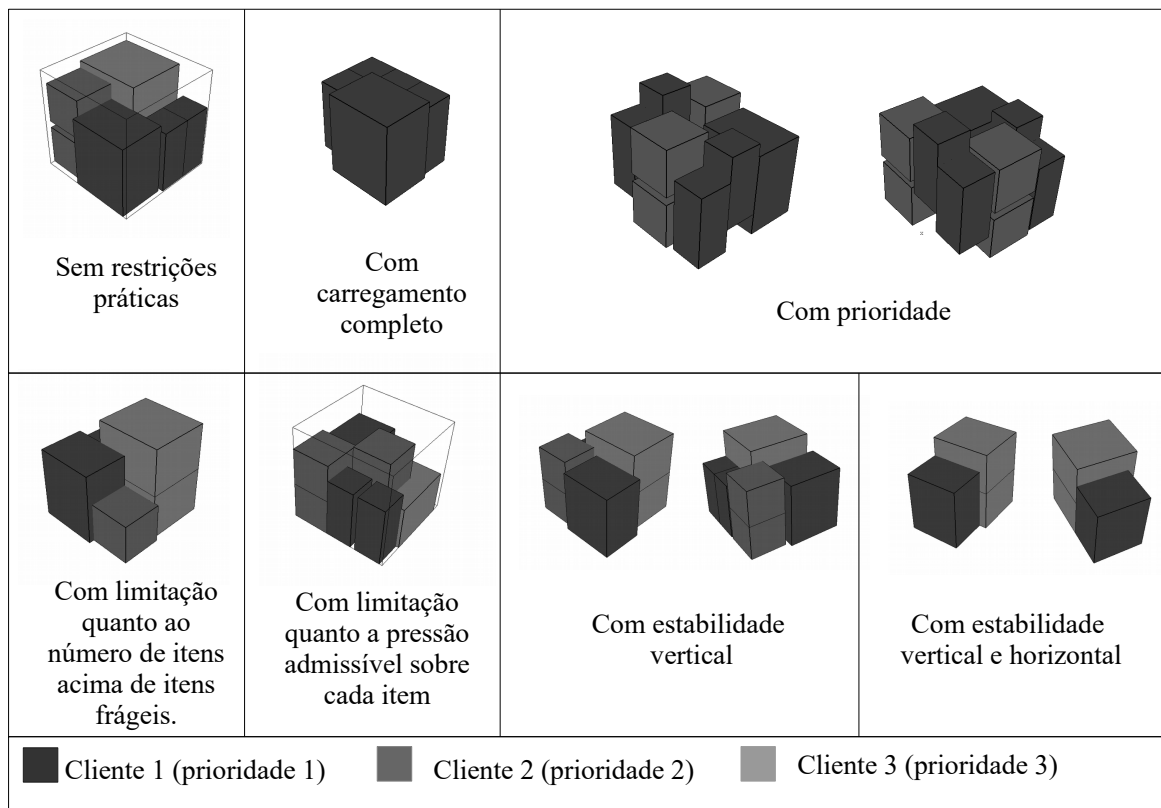
$\eta_i$ : pressão máxima permitida sobre cada item do tipo  $i$ .

As soluções (isto é, empacotamentos) para os casos sem restrições práticas, com carregamento completo, prioridade, fragilidade por número de caixas acima, fragilidade por pressão, estabilidade vertical, e estabilidade vertical e horizontal são mostrados na Figura 5.2. Como pode ser visto nessa figura, o empacotamento resultante para o carregamento completo dos itens de um mesmo cliente contém todos os itens do cliente 1. Por outro lado, os itens dos demais clientes não são levados, pois não sobra espaço no contêiner para o empacotamento completo de todos os itens desses clientes.

Observa-se na Tabela 5.12 que há cinco itens de prioridade 1, que são justamente os itens do cliente 1 (tipos 1 e 4, como no caso de carregamento completo). Pela Figura 5.2, nota-se que todos os cinco itens de prioridade 1 são levados. Quanto aos itens de prioridade 2, estes não foram todos levados, sendo levada a maior quantidade possível de itens dessa prioridade e não sendo levado nenhum item de prioridade 3.

Com relação à fragilidade, na versão que considera limitação quanto ao número de caixas que podem vir acima de itens frágeis, observa-se na Tabela 5.12 que há na instância dois tipos de itens frágeis, isto é, os itens do tipo 1 e do tipo 3. Os itens do tipo 1 não permitem nenhum item empacotado sobre eles e os itens do tipo 3 permitem apenas um item. Pela Figura 5.2, nota-se apenas um item do tipo 1 sendo levado, situado mais à frente no empacotamento. A altura desse item equivale a 70% da altura do contêiner. Acima dele, não

Figura 5.2 – Soluções para a instância da Classe 5 descrita na Tabela 5.12, para os casos sem restrições práticas, com carregamento completo, prioridade, fragilidade e estabilidade vertical e horizontal.



Fonte – a autora.

há nenhum item empacotado, estando, portanto, o empacotamento, para o referido item do tipo 1, coerente com o que impõe a restrição de fragilidade. Além disso, foram carregados dois itens do tipo 3, que são os itens em cinza mais claro. Esses itens permitem no máximo um item acima deles. Observa-se, portanto, que sobre um deles há um item (do mesmo tipo, inclusive) e sobre o outro, o que está mais acima, não há nenhum item.

Com relação à fragilidade por pressão, observa-se, na Figura 5.2, que os itens que possuem caixas empacotadas acima são um item do tipo 5 e um item do tipo 3. Para saber se a pressão exercida pelos itens que estão empacotados acima sobre cada item que está empacotado embaixo respeita a pressão máxima admissível, basta dividir os volumes dos itens que estão acima pelos valores de suas áreas e comparar com devido valor  $\eta_i$  mostrado na Tabela 5.12. Com relação ao item do tipo 5, a pressão exercida sobre ele, devido a outro item do mesmo tipo, é 39. A pressão máxima suportada pelo item do tipo 5 que está embaixo é 62. Com relação ao item do tipo 3, a pressão exercida sobre ele também é igual a 39. A pressão máxima suportada por ele é 44.

Com relação à estabilidade vertical convém observar que a solução apresentada na

Figura 5.2 possui as bases dos itens completamente apoiadas pelo topo de outros itens ou pelo chão do contêiner, satisfazendo a condição de suporte completo. O empacotamento obtido para o caso em que se considera estabilidade vertical e horizontal mostra que além das bases, as faces traseiras e esquerda estão completamente apoiadas pelas faces de outras caixas ou pelas paredes do contêiner. Na figura as paredes do contêiner estão em contato direto com as faces traseiras e esquerda das caixas. Por fim, verifica-se que menos caixas foram empacotadas quando as restrições de estabilidade horizontal foram consideradas junto com as restrições de estabilidade vertical comparado ao caso com apenas estabilidade vertical.

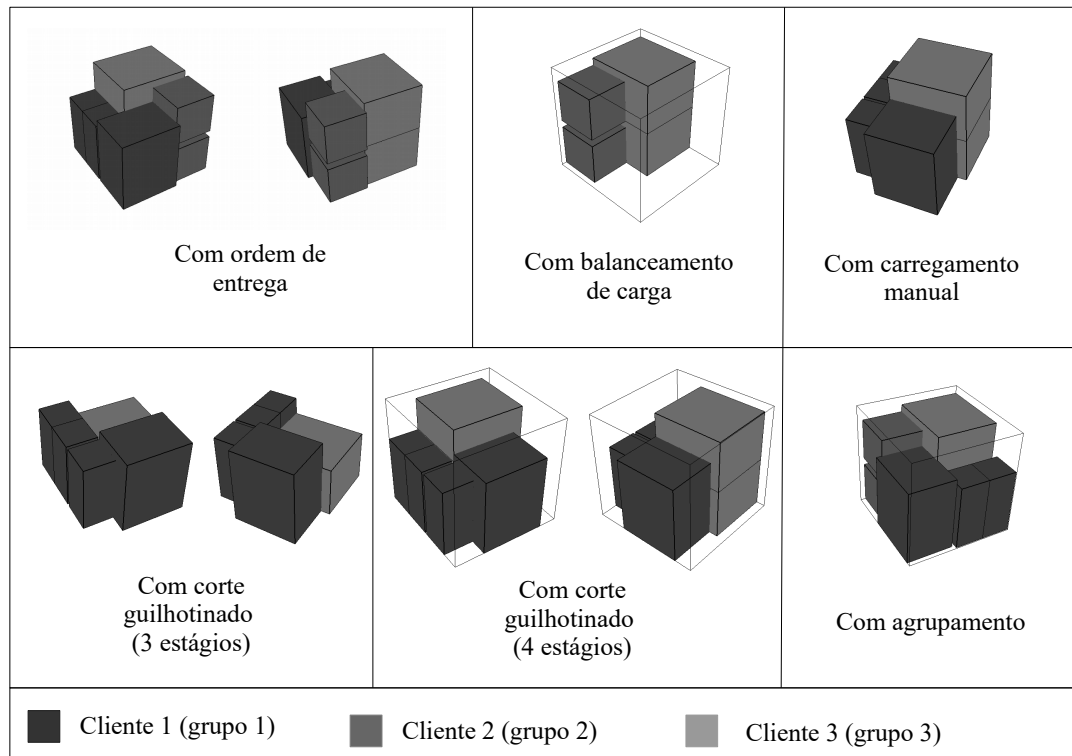
As soluções obtidas para a instância descrita na Tabela 5.12, para os casos com ordem de entrega, balanceamento de carga, carregamento manual, corte guilhotinado e agrupamento, são mostradas na Figura 5.3. No caso de ordem de entrega, apresenta-se as soluções com vista pela frente e por trás. Percebe-se que, neste caso, os itens do cliente 1, devem ser entregues primeiro, sendo empacotados mais à frente e que os itens dos demais clientes são empacotados mais ao fundo. Além disso, nenhum item que deve ser entregue depois (isto é, de ordem maior) é posicionado à frente de quaisquer itens que devem ser entregues primeiro, portanto, não ocasionando situações de remanejamento da carga.

Para a solução contemplando o balanceamento de carga na Figura 5.3, tem-se que os itens ficaram mais a esquerda e ao fundo do contêiner, de forma que o centro de gravidade do empacotamento respeitasse a região estabelecida pelos intervalos  $[X_{start}, X_{end}]$ ,  $[Y_{start}, Y_{end}]$  e  $[Z_{start}, Z_{end}]$ . Neste ponto, convém destacar que os intervalos foram definidos para que a carga fique balanceada com relação aos eixos de um caminhão.

A solução apresentada na Figura 5.3 para o carregamento manual mostra que os itens podem ser alcançados pelo braço da pessoa encarregada de fazer o descarregamento, ou seja, não há itens deslocados para o fundo do contêiner de tal forma que o braço do trabalhador não consiga alcançar. Já a solução para o caso de agrupamento mostra os itens relativamente próximos uns dos outros, conforme os grupos especificados na Tabela 5.12. No caso das restrições de corte guilhotinado, a solução obtida pode ser separada conforme o caso de 4 estágios, sendo que um item a mais foi empacotado quando se compara com o caso de 3 estágios de corte. Isso foi possível porque no quarto estágio de corte, o corte perpendicular à altura sobre os blocos gerados após o terceiro estágio permite o empilhamento de itens. Assim, mais um item do tipo 3 foi empacotado, sendo empilhado acima de outro item do mesmo tipo.

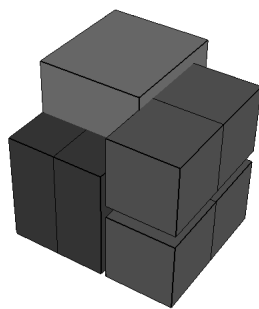
A solução para a restrição de grafo de conflitos é ilustrada na Figura 5.4. No que diz respeito a isso, os itens do tipo 2 e 5 possuem conflitos ente si, bem como dos tipos 1 e 3. Conforme a solução obtida, somente um tipo de item de cada par conflitante é levado no contêiner.

Figura 5.3 – Soluções para a instância da Classe 5 descrita na Tabela 5.12, para ordem de entrega, balanceamento de carga, carregamento manual, corte guilhotinado e agrupamento.



Fonte – a autora.

Figura 5.4 – Solução para a instância da Classe 5 descrita na Tabela 5.12, para a restrição de grafo de conflitos.



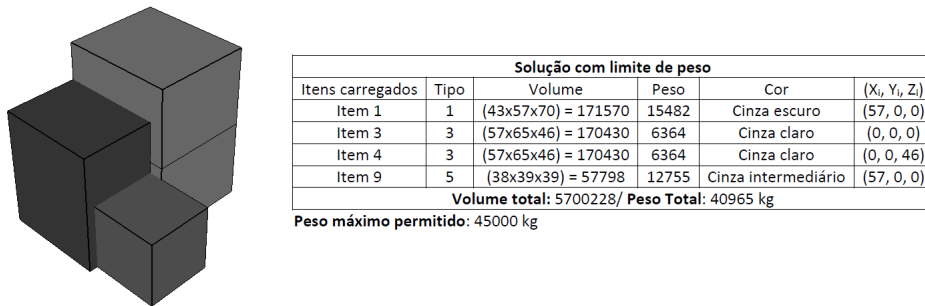
Solução com grafo de conflitos				
Itens carregados	Tipo	$(l_i \times c_i \times a_i) = \text{volume}$	Cor	$(X_i, Y_i, Z_i)$
Item 3	3	$(57 \times 65 \times 46) = 170430$	Cinza claro	(0, 27, 0)
Item 4	3	$(57 \times 65 \times 46) = 170430$	Cinza claro	(0, 27, 46)
Item 5	4	$(27 \times 27 \times 62) = 45198$	Cinza escuro	(0, 0, 0)
Item 6	4	$(27 \times 27 \times 62) = 45198$	Cinza escuro	(27, 0, 0)
Item 9	5	$(38 \times 39 \times 39) = 57798$	Cinza intermediário	(57, 0, 0)
Item 10	5	$(38 \times 39 \times 39) = 57798$	Cinza intermediário	(57, 39, 46)
Item 11	5	$(38 \times 39 \times 39) = 57798$	Cinza intermediário	(57, 39, 0)
Item 12	5	$(38 \times 39 \times 39) = 57798$	Cinza intermediário	(57, 39, 46)

Tipos de itens conflitantes: 5 e 2; 3 e 1

Fonte – a autora.

A solução para a restrição de limite de peso é mostrada na Figura 5.5. Apresentam-se também informações sobre o empacotamento, mostrando que o peso máximo suportado pelo contêiner não está sendo excedido.

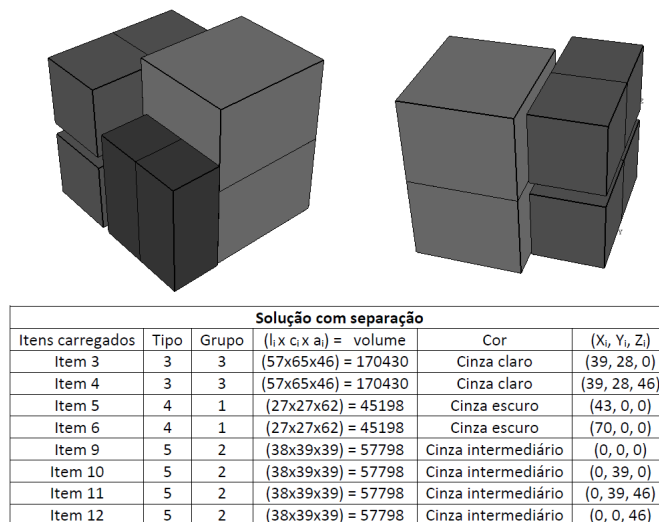
Figura 5.5 – Solução para a instância da Classe 5 descrita na Tabela 5.12, para a restrição de limite de peso.



Fonte – a autora.

A solução que respeita a restrição de separação é apresentado na Figura 5.6. Nota-se que, para itens de grupos diferentes, a distância de uma unidade entre eles está sendo respeitada.

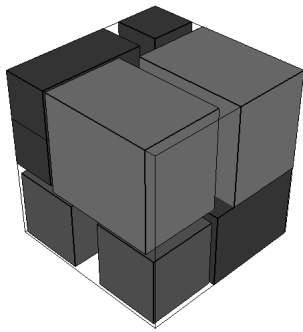
Figura 5.6 – Solução para a instância da Classe 5 descrita na Tabela 5.12, para a restrição de separação.



Fonte – a autora.

A solução para a instância da Classe 5 descrita na Tabela 5.12 no caso em que se considerou a rotação dos itens é mostrada na Figura 5.7. Quanto a solução gerada para a instância, observa-se que mais itens são levados quando múltiplas orientações são permitidas. O volume empacotado também é maior, sendo de 80,88%, em comparação aos 71,84% do caso em que não se permite a rotação dos itens, havendo um ganho de 9,04%.

Figura 5.7 – Solução para a instância da Classe 5 descrita na Tabela 5.12, para o caso com múltiplas orientações.



Item	Tipo	Solução		
		$l_i \times e_i \times a_i$	Posição	Orientação
Item 1	1	43x57x70	(1, 30, 0)	4
Item 3	3	57x65x46	(0, 35, 43)	3
Item 4	3	57x65x46	(57, 29, 43)	3
Item 5	4	27x27x62	(0, 0, 38)	3
Item 6	4	27x27x62	(0, 0, 0)	5
Item 7	4	27x27x62	(38, 0, 73)	3
Item 8	4	27x27x62	(38, 0, 46)	5
Item 9	5	38x39x39	(60, 60, 1)	5
Item 10	5	38x39x39	(62, 3, 2)	1

Fonte – a autora.



## Capítulo 6

---

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

Neste trabalho desenvolveu-se uma abordagem exata para resolver o Problema de Carregamento em um único Contêiner (PCUC), que é um problema de empacotamento tridimensional. A abordagem resolve o problema em duas etapas (ou níveis). O objetivo da primeira etapa é selecionar um subconjunto de itens de valor máximo e que respeita o volume do contêiner, ou seja, resolver o 1PM. Esse subconjunto é ótimo para a versão unidimensional do problema, que não considera restrições geométricas relacionadas ao posicionamento dos itens no recipiente. No entanto, pode acontecer, pela falta dessas restrições geométricas, desse subconjunto não ser viável para o problema original (isto é, para o PCUC) por não existir nenhuma combinação de pontos que permita colocá-los dentro do contêiner sem gerar sobreposição. Logo, na segunda etapa, o objetivo é verificar se o subconjunto de itens cabe sem sobreposição dentro do contêiner. Caso o subconjunto não possa ser empacotado, um novo subconjunto precisa ser selecionado com a condição de ser diferente dos subconjuntos anteriores já testados. A abordagem finaliza quando um subconjunto de máximo valor e que seja viável para o empacotamento seja encontrado.

Na abordagem proposta, a etapa de verificação da viabilidade de se empacotar o subconjunto é realizada em duas subetapas. Primeiro, resolve-se uma relaxação de programação inteira para o 3PEO até um subconjunto que atenda todas as restrições da relaxação ser encontrado. Encontrando tal subconjunto, ele é entregue a um modelo de programação por restrições, que consiste em um modelo não relaxado para o 3PEO. O objetivo da relaxação para o 3PEO é provar de forma rápida que não existem maneiras viáveis de posicionar os itens do subconjunto dentro do contêiner. O objetivo com o modelo de programação por restrições para o 3PEO é provar de fato que o subconjunto aprovado pela relaxação é viável para o PCUC, já que, na relaxação, as condições de não sobreposição são relaxadas, podendo acontecer de um subconjunto viável para relaxação não ser viável para o modelo de programação por restrições e, conseqüentemente, não ser viável para o PCUC. A abordagem também considerou restrições para a redução de simetrias na etapa de seleção dos subconjuntos, em que as simetrias são enxergadas como subconjuntos com quantidades iguais de

itens de cada tipo. Em outras palavras, as simetrias dizem respeito a subconjuntos iguais e acontecem pelo fato de itens do mesmo tipo serem identificados por índices diferentes nas variáveis de decisão do modelo para o 1PM. Assim, um subconjunto pode ser diferente em termos dos seus índices, mas iguais com relação à quantidade de itens que se está carregando de cada tipo.

Além das restrições de simetria, a abordagem considerou um corte para evitar que subconjuntos iguais aos que já foram selecionados e descartados pela resolução do 3PEO (iguais em termos de índices, convém salientar) sejam selecionados quando o 1PM é resolvido novamente. Assim, dada a inserção das restrições de redução de simetria, tornou-se necessário reformular o corte. Testes em que se comparou a atuação da abordagem sem e com as restrições de simetria, o corte e a relaxação para o 3PEO foram realizados. Tais testes mostraram que as modificações efetuadas em relação a esses três aspectos trouxeram benefícios para a abordagem no que diz respeito ao tempo computacional, melhorando o tempo em 102,44%, e com relação à quantidade de instâncias resolvidas de forma ótima, melhorando em 129,17%. Dos três aspectos, a relaxação para o 3PEO foi o que mais contribuiu para com a melhoria do tempo e do número de instâncias resolvidas na otimalidade. Um teste foi realizado para verificar o desempenho da abordagem com as restrições de redução de simetria e o corte proposto, mas sem a relaxação para o 3PEO. Nesse teste, o aumento no número de instâncias resolvidas na otimalidade foi de 8,33%, sendo um aumento pequeno quando comparado com o aumento alcançado quando se considerou a relaxação atuando com as restrições de redução de simetria e o corte. O mesmo foi verificado para o tempo de resolução, que diminuiu em 16,11% utilizando a abordagem sem a relaxação e com as restrições de simetria e o corte.

Além da abordagem, mostrou-se como modelar restrições práticas associadas ao PCUC. Essas restrições são para garantir o carregamento completo de itens de um mesmo cliente (carregamento completo), que itens conflitantes não sejam empacotados juntos no contêiner (grafo de conflitos), o carregamento de itens de alta prioridade (prioridade), que o peso do carregamento não vai exceder o peso máximo suportado pelo contêiner (limite de peso), a estabilidade vertical e horizontal da carga (estabilidade de carga), que caixas frágeis não sejam danificadas por excesso de outras caixas colocadas acima delas (fragilidade), que os itens dos clientes que são visitados antes na rota de entrega consigam ser retirados do contêiner sem ser bloqueados pelo itens que devem ser entregues depois (ordem de entrega), que o centro de massa do carregamento se encontre em um região segura dentro do contêiner para evitar o tombamento da carga (balanceamento de carga), que o empacotamento possa ser separado por meio de cortes guilhotinados, mudando o estágio de corte até no máximo 4 vezes (corte guilhotinado), que os itens consigam ser alcançados e manuseados quando carregados ou descarregados manualmente, a separação e o agrupamento de certos grupos de itens dentro contêiner e que os itens possam ser rotacionados ao serem empacotados.

A abordagem e as restrições foram codificadas em linguagem C++. Os modelos que a compõe foram resolvidos pelo pacote IBM ILOG CPLEX, em que 80 instâncias foram resolvidas para 19 experimentos diferentes. Primeiro, resolveu-se as instâncias sem considerar restrições práticas comparando variações da abordagem proposta com relação ao número de instâncias resolvidas na otimalidade e tempo de resolução, mostrando que a abordagem proposta tem o melhor desempenho geral. Além disso, buscou-se verificar o impacto da inserção das restrições práticas no que diz respeito ao volume empacotado e ao tempo de resolução.

Sem considerar nenhuma restrição prática, a abordagem conseguiu resolver 69% das instâncias na otimalidade dentro do tempo limite imposto, e para as demais 31% das instâncias, a abordagem alcançou um limitante superior para a solução ótima. Ao considerar as restrições de carregamento completo, grafo de conflitos, prioridade e limite de peso, houve um aumento no número de instâncias com solução ótima e diminuição no tempo, contudo houve perda de volume empacotado. Ao considerar as demais restrições práticas, a quantidade de instâncias para as quais foi possível obter solução ótima diminuiu, o tempo de resolução aumentou para todos os casos, sendo que o maior aumento ocorreu quando se considerou as restrições de estabilidade vertical, além de ocorrer perda de volume empacotado. Com base na média, o menor tempo ocorreu quando se considerou as restrições de prioridade e o maior quando se considerou as restrições de estabilidade vertical. As maiores perdas de volume empacotado ocorreram ao considerar as restrições de carregamento completo e balanceamento de carga.

Diante disso, este trabalho traz como contribuições a apresentação da relaxação para o 3PEO, as restrições para a redução de simetria juntamente com o corte empregado na abordagem, a integração de modelos de programação inteira e programação por restrições, e a apresentação de formulações matemáticas para 13 aspectos práticos, apontados por [Bischoff e Ratcliff \(1995\)](#) e [Bortfeldt e Wäscher \(2013\)](#) como aspectos essenciais a serem levados em consideração quando se trabalha com a resolução de problemas de carregamento em contêineres. Com relação a esta última contribuição, a respeito das restrições práticas, cabe ressaltar que ela se configura como a principal contribuição que este trabalho traz, visto que há poucos trabalhos na literatura que mostram como considerar esses aspectos em modelos matemáticos.

Com relação à proposta de trabalhos futuros, notou-se que o tempo médio de resolução foi alto com o uso da abordagem proposta e das restrições, com exceção para o carregamento completo, prioridade, grafo de conflitos e limite de peso. Isso se deve, em grande parte, à natureza dos métodos presentes no IBM ILOG CPLEX, que são algoritmos exatos. Contudo, o CPLEX oferece mecanismos para que o usuário interaja com o processo de busca, como é o caso das *callbacks*. Assim, deseja-se investigar e propor estratégias para interagir com o pacote de otimização a fim de melhor resolver os modelos aqui apresentados.

Outro ponto que convém mencionar é que o PCUC com/sem restrições práticas também pode ser resolvido por outros métodos, como heurísticas ou métodos híbridos, que misturam heurísticas e métodos exatos. O *local branching* é um exemplo que combina busca local e o método exato *branch-and-bound*. Logo, investigar outras estratégias para resolver esses modelos também se configura como opção de trabalho futuro. Também, interessa-se em estudar outras formas de modelar as restrições práticas, observando casos específicos que possam surgir nos contextos reais e que ainda não foram cobertos na literatura.

---

## REFERÊNCIAS

---

AKEB, H.; HIFI, M.; MOUNIR, M. E. O. A. Local branching-based algorithms for the disjunctively constrained knapsack problem. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 60, n. 4, p. 811–820, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 39, 42 e 46.

ALONSO, M. T. *et al.* A reactive grasp algorithm for the container loading problem with load-bearing constraints. *European Journal of Industrial Engineering*, Inderscience Publishers, v. 8, n. 5, p. 669–694, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 46.

AMOSSEN, R. R.; PISINGER, D. Multi-dimensional bin packing problems with guillotine constraints. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 37, n. 11, p. 1999–2006, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 42, 43 e 46.

ARAÚJO, L. J. P. de; PINHEIRO, P. Combining heuristics backtracking and genetic algorithm to solve the container loading problem with weight distribution. In: SPRINGER. *Soft Computing Models in Industrial and Environmental Applications, 5th International Workshop (SOCO 2010)*. [S.l.], 2010. p. 95–102. Citado 3 vezes nas páginas 33, 38 e 46.

ARAÚJO, O. C. B. d.; ARMENTANO, V. A. A multi-start random constructive heuristic for the container loading problem. *Pesquisa Operacional*, SciELO Brasil, v. 27, n. 2, p. 311–331, 2007. Citado na página 38.

ARAYA, I.; RIFF, M.-C. A beam search approach to the container loading problem. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 43, p. 100–107, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 35, 38 e 46.

ARENALES, M. *et al.* *Pesquisa Operacional*. Rio de Janeiro: Campus, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 23, 36, 51 e 52.

BALDACCI, R.; BOSCHETTI, M. A. A cutting-plane approach for the two-dimensional orthogonal non-guillotine cutting problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 183, n. 3, p. 1136–1149, 2007. Citado na página 25.

BALDI, M. M.; PERBOLI, G.; TADEI, R. The three-dimensional knapsack problem with balancing constraints. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 218, n. 19, p. 9802–9818, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 46.

BELFIORE, P.; FÁVERO, L. P. *Pesquisa Operacional para cursos de Engenharia*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2013. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 52.

- BISCHOFF, E. Three-dimensional packing of items with limited load bearing strength. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 168, n. 3, p. 952–966, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 38, 40 e 46.
- BISCHOFF, E. E.; RATCLIFF, M. Issues in the development of approaches to container loading. *Omega*, Elsevier, v. 23, n. 4, p. 377–390, 1995. Citado 8 vezes nas páginas 21, 26, 31, 38, 59, 61, 77 e 113.
- BORTFELDT, A. A hybrid algorithm for the capacitated vehicle routing problem with three-dimensional loading constraints. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 39, n. 9, p. 2248–2257, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 33, 35, 38, 41, 45 e 46.
- BORTFELDT, A.; GEHRING, H. A hybrid genetic algorithm for the container loading problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 131, n. 1, p. 143–161, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 38.
- BORTFELDT, A.; GEHRING, H.; MACK, D. A parallel tabu search algorithm for solving the container loading problem. *Parallel Computing*, Elsevier, v. 29, n. 5, p. 641–662, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 38.
- BORTFELDT, A. *et al.* Hybrid algorithms for the vehicle routing problem with clustered backhauls and 3d loading constraints. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 243, n. 1, p. 82–96, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 38, 41 e 46.
- BORTFELDT, A.; WÄSCHER, G. Constraints in container loading—a state-of-the-art review. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 229, n. 1, p. 1–20, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 21, 27 e 113.
- BRUNS, F.; KNUST, S.; SHAKHLEVICH, N. V. Complexity results for storage loading problems with stacking constraints. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 249, n. 3, p. 1074–1081, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 38, 40 e 46.
- CARDOSO, R. N. *et al.* Automated planning integrated with linear programming applied in the container loading problem. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 46, n. 24, p. 153–158, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 38.
- CESCHIA, S.; SCHAERF, A.; STÜTZLE, T. Local search techniques for a routing-packing problem. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 66, n. 4, p. 1138–1149, 2013. Citado 6 vezes nas páginas 31, 37, 38, 40, 41 e 46.
- CHEN, C.; LEE, S.-M.; SHEN, Q. An analytical model for the container loading problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 80, n. 1, p. 68–76, 1995. Citado na página 38.
- CHIEN, C.-F.; DENG, J.-F. A container packing support system for determining and visualizing container packing patterns. *Decision Support Systems*, Elsevier, v. 37, n. 1, p. 23–34, 2004. Citado na página 38.
- CHIEN, C.-F. *et al.* An efficient computational procedure for determining the container-loading pattern. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 56, n. 3, p. 965–978, 2009. Citado na página 38.

CHIEN, C.-F.; WU, W.-T. A recursive computational procedure for container loading. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 35, n. 1-2, p. 319–322, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 38, 42 e 46.

CHRISTENSEN, S. G.; ROUSØE, D. M. Container loading with multi-drop constraints. *International Transactions in Operational Research*, Wiley Online Library, v. 16, n. 6, p. 727–743, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 35, 38, 41, 45 e 46.

COLIN, E. C. *Pesquisa Operacional - 170 Aplicações Em Estratégia, Finanças, Logística, Produção*. Rio de Janeiro: LTC, 2007. Citado na página 34.

DALFOVO, M. S.; LANA, M. S.; SILVEIRA, A. Métodos quantitativos e qualitativos: um resgate teórico. *Revista Interdisciplinar Científica Aplicada*, v. 2, n. 4, p. 1–13, 2008. Citado na página 28.

DAVIES, A. P.; BISCHOFF, E. E. Weight distribution considerations in container loading. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 114, n. 3, p. 509–527, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 46.

EGBLAD, J.; PISINGER, D. Heuristic approaches for the two-and three-dimensional knapsack packing problem. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 36, n. 4, p. 1026–1049, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 35, 38, 42, 43 e 46.

ELEY, M. Solving container loading problems by block arrangement. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 141, n. 2, p. 393–409, 2002. Citado 6 vezes nas páginas 26, 31, 32, 38, 45 e 46.

\_\_\_\_\_. A bottleneck assignment approach to the multiple container loading problem. *OR Spectrum*, Springer, v. 25, n. 1, p. 45–60, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 38, 39 e 46.

EPSTEIN, L.; LEVIN, A.; STEE, R. van. Two-dimensional packing with conflicts. *Acta Informatica*, Springer, v. 45, n. 3, p. 155–175, 2008. Citado na página 46.

FANSLAU, T.; BORTFELDT, A. A tree search algorithm for solving the container loading problem. *INFORMS Journal on Computing*, INFORMS, v. 22, n. 2, p. 222–235, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 38, 42, 44 e 46.

FERNÁNDEZ, A. *et al.* A parallel multi-objective algorithm for two-dimensional bin packing with rotations and load balancing. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 40, n. 13, p. 5169–5180, 2013. Citado na página 46.

FORTE, S. H. A. C. *Manual de elaboração de tese, dissertação e monografia*. Fortaleza: [s.n.], 2004. Citado na página 27.

GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*. San Francisco: Freeman, 1979. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 26.

GEHRING, H.; BORTFELDT, A. A genetic algorithm for solving the container loading problem. *International Transactions in Operational Research*, Wiley Online Library, v. 4, n. 5-6, p. 401–418, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 33, 38, 45 e 46.

GEORGE, J. A.; ROBINSON, D. F. A heuristic for packing boxes into a container. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 7, n. 3, p. 147–156, 1980. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 38.

GHOMI, H. M.; AMOUR, B. G. S.; ABDUL-KADER, W. Three-dimensional container loading: A simulated annealing approach. *International Journal of Applied Engineering Research*, v. 12, n. 7, p. 1290, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 35, 36, 38 e 46.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2009. Citado na página 27.

GILMORE, P.; GOMORY, R. E. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations Research*, INFORMS, v. 13, n. 1, p. 94–120, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.

GLOVER, F. Future paths for integer programming and links to artificial intelligence. *Computers & operations research*, Elsevier, v. 13, n. 5, p. 533–549, 1986. Citado na página 34.

\_\_\_\_\_. Tabu search—part i. *ORSA Journal on computing*, INFORMS, v. 1, n. 3, p. 190–206, 1989. Citado na página 33.

GONÇALVES, J. F.; RESENDE, M. G. A parallel multi-population biased random-key genetic algorithm for a container loading problem. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 39, n. 2, p. 179–190, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 33, 38 e 46.

GONÇALVES, R. F.; QUEIROZ, T. A. The knapsack problem with three practical constraints. *Procedia Computer Science*, Elsevier, v. 29, p. 2192–2200, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 38, 39 e 46.

GONZALEZ, Y.; MIRANDA, G.; LEON, C. Multi-objective multi-level filling evolutionary algorithm for the 3d cutting stock problem. *Procedia Computer Science*, Elsevier, v. 96, p. 355–364, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 38, 42, 44 e 46.

HAESSLER, R. W.; TALBOT, F. B. Load planning for shipments of low density products. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 44, n. 2, p. 289–299, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 46.

HE, K.; HUANG, W. Solving the single-container loading problem by a fast heuristic method. *Optimization Methods & Software*, Taylor & Francis, v. 25, n. 2, p. 263–277, 2010. Citado na página 38.

HERZ, J. Recursive computational procedure for two-dimensional stock cutting. *IBM Journal of Research and Development*, IBM, v. 16, n. 5, p. 462–469, 1972. Citado na página 54.

HIFI, M. Approximate algorithms for the container loading problem. *International Transactions in Operational Research*, Wiley Online Library, v. 9, n. 6, p. 747–774, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 38, 42, 43 e 46.

\_\_\_\_\_. Exact algorithms for unconstrained three-dimensional cutting problems: a comparative study. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 31, n. 5, p. 657–674, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 35, 42, 43 e 46.

HIFI, M.; SALEH, S.; WU, L. A hybrid guided neighborhood search for the disjunctively constrained knapsack problem. *Cogent Engineering*, Taylor & Francis, v. 2, n. 1, p. 1068969, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 35, 38 e 46.

- HOKAMA, P.; MIYAZAWA, F. K.; XAVIER, E. C. A branch-and-cut approach for the vehicle routing problem with loading constraints. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 47, p. 1–13, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 37, 38 e 46.
- HUANG, Y.-H.; HWANG, E.; LU, H.-C. An effective placement method for the single container loading problem. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 97, p. 212–221, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 38.
- IBM. *What is column generation?* 2017. Disponível em: <[https://www.ibm.com/support/knowledgecenter/pt-br/SSSA5P\\_12.7.1/ilog.odms.cplex.help/CPLEX/UsrMan/topics/discr\\_optim/eg\\_col\\_gen/02\\_col\\_gen\\_defn.html](https://www.ibm.com/support/knowledgecenter/pt-br/SSSA5P_12.7.1/ilog.odms.cplex.help/CPLEX/UsrMan/topics/discr_optim/eg_col_gen/02_col_gen_defn.html)>. Acesso em 07 de julho de 2018. Citado na página 37.
- JAMRUS, T.; CHIEN, C.-F. Extended priority-based hybrid genetic algorithm for the less-than-container loading problem. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 96, p. 227–236, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 33, 38, 40 e 46.
- JOUNG, Y.-K.; NOH, S. D. Intelligent 3d packing using a grouping algorithm for automotive container engineering. *Journal of Computational Design and Engineering*, Elsevier, v. 1, n. 2, p. 140–151, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 46.
- JUNQUEIRA, L.; MORABITO, R. Heuristic algorithms for a three-dimensional loading capacitated vehicle routing problem in a carrier. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 88, p. 110–130, 2015. Citado 5 vezes nas páginas 37, 38, 41, 45 e 46.
- JUNQUEIRA, L.; MORABITO, R.; YAMASHITA, D. S. Three-dimensional container loading models with cargo stability and load bearing constraints. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 39, n. 1, p. 74–85, 2012. Citado 14 vezes nas páginas 25, 35, 36, 38, 40, 45, 46, 63, 64, 66, 67, 68, 91 e 92.
- JUNQUEIRA, L. *et al.* An optimization model for the vehicle routing problem with practical three-dimensional loading constraints. *International Transactions in Operational Research*, Wiley Online Library, v. 20, n. 5, p. 645–666, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 46.
- JUNQUEIRA, L.; QUEIROZ, T. A. Condições de equilíbrio e balanceamento em problemas de empacotamento: Levantamento e discussão. *XLVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Sobrapo, v. 1, p. 1–12, 2015. Citado na página 42.
- KALUZNY, B. L.; SHAW, R. H. A. D. Optimal aircraft load balancing. *International Transactions in Operational Research*, v. 16, n. 6, p. 767–787, 2009. Citado na página 71.
- KANG, M.; JANG, C.; YOON, K. Heuristics with a new block strategy for the single and multiple containers loading problems. *Journal of the Operational Research Society*, Taylor & Francis, v. 61, n. 1, p. 95–107, 2010. Citado na página 38.
- LE, X. T.; KNUST, S. Mip-based approaches for robust storage loading problems with stacking constraints. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 78, p. 138–153, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 38, 40, 45 e 46.
- LIU, J. *et al.* A novel hybrid tabu search approach to container loading. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 38, n. 4, p. 797–807, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 38.
- LIU, S. *et al.* A tree search algorithm for the container loading problem. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 75, p. 20–30, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 46.

- LOBATO, F. S. *Otimização Multi-objetivo para o Projeto de Sistemas de Engenharia*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil, 2008. Citado na página 33.
- LURKIN, V.; SCHYNS, M. The airline container loading problem with pickup and delivery. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 244, n. 3, p. 955–965, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 46.
- MACK, D.; BORTFELDT, A.; GEHRING, H. A parallel hybrid local search algorithm for the container loading problem. *International Transactions in Operational Research*, Wiley Online Library, v. 11, n. 5, p. 511–533, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 38.
- MAHVASH, B.; AWASTHI, A.; CHAUHAN, S. A column generation based heuristic for the capacitated vehicle routing problem with three-dimensional loading constraints. *IFAC-PapersOnLine*, Elsevier, v. 48, n. 3, p. 448–453, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 46.
- MÄNNEL, D.; BORTFELDT, A. Solving the pickup and delivery problem with three-dimensional loading constraints and reloading ban. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 264, n. 1, p. 119–137, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 46.
- MARTELLO, S.; PISINGER, D.; VIGO, D. The three-dimensional bin packing problem. *Operations Research*, INFORMS, v. 48, n. 2, p. 256–267, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 35, 38 e 46.
- MARTELLO, S. *et al.* Algorithm 864: General and robot-packable variants of the three-dimensional bin packing problem. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, ACM, v. 33, n. 1, p. 7, 2007. Citado na página 46.
- MARTÍNEZ, D. A.; ALVAREZ-VALDES, R.; PARREÑO, F. A grasp algorithm for the container loading problem with multi-drop constraints. *Pesquisa Operacional*, SciELO Brasil, v. 35, n. 1, p. 1–24, 2015. Citado 5 vezes nas páginas 38, 41, 44, 45 e 46.
- MESYAGUTOV, M.; SCHEITHAUER, G.; BELOV, G. New constraint programming approaches for 3d orthogonal packing. *Technische Universität Dresden, Dresden, Germany*, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 23, 24, 37, 53, 57 e 58.
- MIYAZAWA, F. K.; WAKABAYASHI, Y. Three-dimensional packings with rotations. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 36, n. 10, p. 2801–2815, 2009. Citado na página 46.
- MONGEAU, M.; BES, C. Optimization of aircraft container loading. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, IEEE, v. 39, n. 1, p. 140–150, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 38, 42 e 46.
- MORABITO, R.; ARENALES, M. An and/or-graph approach to the container loading problem. *International Transactions in Operational Research*, Elsevier, v. 1, n. 1, p. 59–73, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 46.
- MOURA, A.; OLIVEIRA, J. F. An integrated approach to the vehicle routing and container loading problems. *OR spectrum*, Springer, v. 31, n. 4, p. 775–800, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 37, 38 e 46.

- OLIVEIRA, L. A.; QUEIROZ, T. A.; LIMA, V. L. Comparação de métodos para a estabilidade vertical de carga no problema de carregamento de um Único contêiner. *Anais do XLVIII SBPO Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Sobrapo, v. 1, p. 3883–3894, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 46.
- PACE, S. *et al.* Distributing fibre boards: a practical application of the heterogeneous fleet vehicle routing problem with time windows and three-dimensional loading constraints. *Procedia Computer Science*, Elsevier, v. 51, p. 2257–2266, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 35, 38 e 46.
- PADBERG, M. Packing small boxes into a big box. *Mathematical Methods of Operations Research*, Springer, v. 52, n. 1, p. 1–21, 2000. Citado na página 38.
- PARREÑO, F. *et al.* A maximal-space algorithm for the container loading problem. *INFORMS Journal on Computing*, INFORMS, v. 20, n. 3, p. 412–422, 2008. Citado na página 38.
- PFERSCHY, U.; SCHAUER, J. The knapsack problem with conflict graphs. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, v. 13, n. 2, p. 233–249, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 46.
- PIMPAWAT, C.; CHAIYARATANA, N. Three-dimensional container loading using a cooperative co-evolutionary genetic algorithm. *Applied Artificial Intelligence*, Taylor & Francis, v. 18, n. 7, p. 581–601, 2004. Citado na página 38.
- PISINGER, D. Heuristics for the container loading problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 141, n. 2, p. 382–392, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 31, 32, 38 e 46.
- QUEIROZ, T. A. *et al.* Two-dimensional disjunctively constrained knapsack problem: Heuristic and exact approaches. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 105, p. 313–328, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 25, 39, 46 e 92.
- QUEIROZ, T. A.; MIYAZAWA, F. K. Two-dimensional strip packing problem with load balancing, load bearing and multi-drop constraints. *International Journal of Production Economics*, Elsevier, v. 145, n. 2, p. 511–530, 2013. Citado 7 vezes nas páginas 25, 40, 41, 42, 46, 69 e 71.
- \_\_\_\_\_. Order and static stability into the strip packing problem. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 223, n. 1, p. 137–154, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 46.
- QUEIROZ, T. A. *et al.* Algorithms for 3d guillotine cutting problems: Unbounded knapsack, cutting stock and strip packing. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 39, n. 2, p. 200–212, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 38, 42, 44 e 46.
- RAMOS, A. G. *et al.* Dynamic stability metrics for the container loading problem. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Elsevier, v. 60, p. 480–497, 2015. Citado na página 46.
- \_\_\_\_\_. A container loading algorithm with static mechanical equilibrium stability constraints. *Transportation Research Part B: Methodological*, Elsevier, v. 91, p. 565–581, 2016. Citado 7 vezes nas páginas 31, 32, 33, 38, 41, 46 e 63.
- RAMOS, A. G.; OLIVEIRA, J. F.; LOPES, M. P. A physical packing sequence algorithm for the container loading problem with static mechanical equilibrium conditions. *International Transactions in Operational Research*, Wiley Online Library, v. 23, n. 1-2, p. 215–238, 2016. Citado 5 vezes nas páginas 15, 44, 46, 78 e 79.

- RAMOS, A. G.; SILVA, E.; OLIVEIRA, J. F. A new load balance methodology for container loading problem in road transportation. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 266, n. 3, p. 1140–1152, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 38, 41, 42, 46 e 92.
- RATCLIFFE, M.; BISCHOFF, E. Allowing for weight considerations in container loading. *Operations-Research-Spektrum*, Springer, v. 20, n. 1, p. 65–71, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 46.
- REIL, S.; BORTFELDT, A.; MÖNCH, L. Heuristics for vehicle routing problems with backhauls, time windows, and 3d loading constraints. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 266, n. 3, p. 877–894, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.
- REN, J.; TIAN, Y.; SAWARAGI, T. A tree search method for the container loading problem with shipment priority. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 214, n. 3, p. 526–535, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 38, 40 e 46.
- RUAN, Q. *et al.* A hybrid approach for the vehicle routing problem with three-dimensional loading constraints. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 40, n. 6, p. 1579–1589, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 37, 38 e 46.
- RUSSELL, S. J.; NORVIG, P. *Artificial Intelligence: A modern approach*. 3. ed. New Jersey: Pearson Education, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 35.
- SALEM, M. B. *et al.* Optimization algorithms for the disjunctively constrained knapsack problem. *Soft Computing*, Springer, p. 1–19, 2016. Citado na página 46.
- SCHEITHAUER, G. Algorithms for the container loading problem. In: *Operations Research Proceedings 1991*. [S.l.]: Springer, 1992. p. 445–452. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 38.
- \_\_\_\_\_. Lp-based bounds for the container and multi-container loading problem. *International Transactions in Operational Research*, Wiley Online Library, v. 6, n. 2, p. 199–213, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- \_\_\_\_\_. *Introduction to Cutting and Packing Optimization: Problems, Modeling Approaches, Solution Methods*. [S.l.]: Springer, 2017. v. 263. Citado 3 vezes nas páginas 21, 52 e 57.
- SCHEITHAUER, G.; TERNO, J. The g4-heuristic for the pallet loading problem. *Journal of the Operational Research Society*, Springer, v. 47, n. 4, p. 511–522, 1996. Citado na página 54.
- SEVERINO, A. J. *Metodologia do Trabalho Científico*. 23. ed. São Paulo: Cortez, 2007. Citado na página 28.
- SHENG, L. *et al.* A heuristic algorithm for container loading of pallets with infill boxes. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 252, n. 3, p. 728–736, 2016. Citado na página 35.
- \_\_\_\_\_. Heuristic algorithm for the container loading problem with multiple constraints. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 108, p. 149–164, 2017. Citado 6 vezes nas páginas 31, 35, 38, 39, 40 e 46.
- SILVA, J. L. C.; SOMA, N.; MACULAN, N. A greedy search for the three-dimensional bin packing problem: the packing static stability case. *International Transactions in Operational Research*, Wiley Online Library, v. 10, n. 2, p. 141–153, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 38, 41 e 46.

- TAO, Y.; WANG, F. An effective tabu search approach with improved loading algorithms for the 3l-cvrp. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 55, p. 127–140, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 34, 38, 41 e 46.
- TAVARES, J. A. R. *Geração de configurações de sistemas industriais com o recurso à tecnologia das restrições e computação evolucionária*. Tese (Doutorado) — Tese de doutorado em Informática. Universidade do Minho, Braga, Portugal, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 58.
- TIAN, T. *et al.* The multiple container loading problem with preference. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 248, n. 1, p. 84–94, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 38, 40 e 46.
- TIPLER, P. A.; MOSCA, G. *Física para cientistas e engenheiros. Vol. 1: mecânica, oscilações e ondas, termodinâmica*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011. Citado na página 71.
- TRIVELLA, A.; PISINGER, D. The load-balanced multi-dimensional bin-packing problem. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 74, p. 152–164, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 46.
- VANCROONENBURG, W. *et al.* Automatic air cargo selection and weight balancing: a mixed integer programming approach. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, Elsevier, v. 65, p. 70–83, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 25, 40, 46 e 61.
- WANG, N.; LIM, A.; ZHU, W. A multi-round partial beam search approach for the single container loading problem with shipment priority. *International Journal of Production Economics*, Elsevier, v. 145, n. 2, p. 531–540, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 38, 40 e 46.
- WANG, Z.; LI, K. W.; LEVY, J. K. A heuristic for the container loading problem: A tertiary-tree-based dynamic space decomposition approach. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 191, n. 1, p. 86–99, 2008. Citado na página 38.
- WÄSCHER, G.; HAUSSNER, H.; SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 183, n. 3, p. 1109–1130, 2007. Citado na página 21.
- XIANG, Z.; DING-YOU, L. Bi-level hybrid local search approach for three-dimensional loading problem with balancing constraints. *Journal Of Central South University*, Journal Of Central South University Technology Editorial Office, Changsha, Hunan 410083, Peoples R China, v. 25, n. 4, p. 903–918, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 46.
- XUE, J.; LAI, K. Effective methods for a container packing operation. *Mathematical and Computer Modelling: An International Journal*, Elsevier, v. 25, n. 2, p. 75–84, 1997. Citado na página 38.
- YAMADA, T.; KATAOKA, S.; WATANABE, K. Heuristic and exact algorithms for the disjointly constrained knapsack problem. *Information Processing Society of Japan Journal*, v. 43, n. 9, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 39, 40 e 46.
- ZACHARIADIS, E. E.; TARANTILIS, C. D.; KIRANOUDIS, C. T. The vehicle routing problem with simultaneous pick-ups and deliveries and two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 251, n. 2, p. 369–386, 2016. Citado na página 46.

ZHANG, D.; PENG, Y.; LEUNG, S. C. A heuristic block-loading algorithm based on multi-layer search for the container loading problem. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 39, n. 10, p. 2267–2276, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 31, 38 e 46.

ZHANG, Z.; WEI, L.; LIM, A. An evolutionary local search for the capacitated vehicle routing problem minimizing fuel consumption under three-dimensional loading constraints. *Transportation Research Part B: Methodological*, Elsevier, v. 82, p. 20–35, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 46.

ZHENG, J.-N.; CHIEN, C.-F.; GEN, M. Multi-objective multi-population biased random-key genetic algorithm for the 3-d container loading problem. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 89, p. 80–87, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 38.

ZHU, W. *et al.* The six elements to block-building approaches for the single container loading problem. *Applied Intelligence*, Springer, v. 37, n. 3, p. 431–445, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 38.

## APÊNDICE A

# Tabelas com os Resultados de cada Experimento

Na Tabela [A.1](#), encontra-se a lista que indica qual tabela se encontram os resultados obtidos para cada experimento. Os resultados alcançados quando se considerou as restrições práticas na abordagem são mostrados nas tabelas [A.3](#), [A.4](#), [A.5](#), [A.6](#), [A.7](#), [A.8](#), [A.9](#), [A.10](#), [A.11](#), [A.12](#), [A.13](#), [A.14](#), [A.15](#), [A.16](#), [A.17](#) e [A.18](#).

A Tabela [A.2](#) mostra os resultados obtidos para a abordagem sem considerar nenhuma restrição prática. Nesta tabela são apresentados, nas duas primeiras colunas, o nome da instância e a classe a qual a instância pertence. No nome de cada instância, “N” está associado ao tamanho do recipiente e “m” está associado à quantidade de itens. Para cada abordagem e instância, apresenta-se o último valor assumido pela função objetivo e se abordagem conseguiu encontrar uma solução ótima (OT) ou limitante superior (UB) dentro do tempo limite (“Solução”), o número de cortes inseridos durante a resolução (“Cortes”) e o tempo gasto (“Tempo (s)”), em segundos, pela abordagem. Com relação aos cortes, apresenta-se quantos cortes são inseridos após a relaxação do 3PEO retornar que o subconjunto é inviável e a quantidade de cortes inseridos após a resolução do modelo de programação por restrições para o 3OPP retornar que o subconjunto é inviável. As demais tabelas seguem o mesmo formato.

Tabela A.1 – Lista das tabelas com os resultados para cada restrição prática.

Restrição	Tabela	Restrição	Tabela
Carregamento completo	<a href="#">A.3</a>	Ordem de entrega	<a href="#">A.11</a>
Grafo de conflitos	<a href="#">A.4</a>	Balanceamento de carga	<a href="#">A.12</a>
Prioridade	<a href="#">A.5</a>	Corte guilhotinado (3 estágios)	<a href="#">A.13</a>
Limite de peso	<a href="#">A.6</a>	Corte guilhotinado (4 estágios)	<a href="#">A.14</a>
Estabilidade vertical	<a href="#">A.7</a>	Carregamento manual	<a href="#">A.15</a>
Estabilidade vertical e horizontal	<a href="#">A.8</a>	Separação	<a href="#">A.16</a>
Fragilidade (itens acima)	<a href="#">A.9</a>	Agrupamento	<a href="#">A.17</a>
Fragilidade (pressão)	<a href="#">A.10</a>	Orientação	<a href="#">A.18</a>

Fonte – a autora.

Tabela A.2 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC sem restrições práticas.

Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)	Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)
	Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO			Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO	
N10m05b2d2-01	OT	776	95	0	4,94	N100m05b2d2-01	OT	487036	55	0	0,67
N10m05b2d2-02	UB	1000	11	0	3600,00	N100m05b2d2-02	OT	718422	144	0	7,18
N10m05b2d2-03	OT	950	52	0	4,53	N100m05b2d2-03	OT	707316	377	0	17,91
N10m05b2d2-04	OT	916	119	0	4,08	N100m05b2d2-04	OT	531520	137	0	3,38
N10m05b2d2-05	OT	918	1225	0	1711,41	N100m05b2d2-05	OT	740510	223	0	7,79
N10m05b2d2-06	OT	1000	9	0	78,54	N100m05b2d2-06	OT	671674	31	0	0,43
N10m05b2d2-07	OT	992	382	0	2907,87	N100m05b2d2-07	OT	673895	52	0	0,64
N10m05b2d2-08	OT	772	41	0	7,84	N100m05b2d2-08	OT	729040	55	0	0,97
N10m05b2d2-09	OT	960	289	0	61,28	N100m05b2d2-09	OT	714327	180	0	7,57
N10m05b2d2-10	OT	850	449	0	169,93	N100m05b2d2-10	OT	850368	235	0	6,50
N20m05b2d2-01	OT	7013	2800	0	2661,36	N10m10b2d2-01	UB	1000	4297	0	3600,00
N20m05b2d2-02	OT	6528	507	0	39,24	N10m10b2d2-02	OT	1000	6	0	525,00
N20m05b2d2-03	OT	6960	234	0	6,82	N10m10b2d2-03	OT	630	418	0	960,84
N20m05b2d2-04	OT	6216	61	0	4,40	N10m10b2d2-04	UB	1000	5	0	3600,00
N20m05b2d2-05	OT	4855	47	0	0,83	N10m10b2d2-05	UB	1000	40	0	3600,00
N20m05b2d2-06	OT	6011	152	0	9,25	N10m10b2d2-06	UB	1000	140	0	3600,00
N20m05b2d2-07	OT	5754	173	0	10,98	N10m10b2d2-07	UB	1000	1574	0	3600,00
N20m05b2d2-08	OT	7288	356	0	40,93	N10m10b2d2-08	UB	1000	5708	0	3600,00
N20m05b2d2-09	OT	6212	86	0	2,78	N10m10b2d2-09	OT	1000	50	0	49,63
N20m05b2d2-10	OT	5998	186	0	6,20	N10m10b2d2-10	OT	1000	214	0	740,90
N30m05b2d2-01	OT	18010	442	0	25,70	N20m10b2d2-01	UB	7155	5581	0	3600,00
N30m05b2d2-02	OT	17490	134	0	3,22	N20m10b2d2-02	UB	7971	1495	0	3600,00
N30m05b2d2-03	OT	17544	171	0	3,51	N20m10b2d2-03	UB	7968	1543	0	3600,00
N30m05b2d2-04	OT	20568	1131	0	91,50	N20m10b2d2-04	UB	7970	1525	0	3600,00
N30m05b2d2-05	OT	20119	125	0	2,27	N20m10b2d2-05	UB	7986	1229	0	3600,00
N30m05b2d2-06	OT	14388	22	0	0,14	N20m10b2d2-06	UB	7922	1932	0	3600,00
N30m05b2d2-07	OT	14616	152	0	3,31	N20m10b2d2-07	UB	7834	2684	0	3600,00
N30m05b2d2-08	OT	11590	30	0	0,17	N20m10b2d2-08	UB	7735	4319	0	3600,00
N30m05b2d2-09	OT	14417	37	0	0,27	N20m10b2d2-09	UB	7983	1263	0	3600,00
N30m05b2d2-10	OT	15679	43	0	0,46	N20m10b2d2-10	UB	7916	2099	0	3600,00
N50m05b2d2-01	OT	81092	138	0	4,81	N30m10b2d2-01	UB	25351	4187	0	3600,00
N50m05b2d2-02	OT	86440	107	0	3,21	N30m10b2d2-02	UB	26934	1164	0	3600,00
N50m05b2d2-03	OT	85461	151	0	7,01	N30m10b2d2-03	UB	26672	2126	0	3600,00
N50m05b2d2-04	OT	73338	489	0	32,97	N30m10b2d2-04	OT	22318	6326	0	3247,62
N50m05b2d2-05	OT	103248	529	0	52,68	N30m10b2d2-05	OT	25260	3197	0	1227,51
N50m05b2d2-06	OT	88466	723	0	36,10	N30m10b2d2-06	OT	18917	5758	0	2086,35
N50m05b2d2-07	UB	120738	3533	0	3600,00	N30m10b2d2-07	UB	26956	1149	0	3600,00
N50m05b2d2-08	OT	94734	322	0	11,61	N30m10b2d2-08	UB	26376	2385	0	3600,00
N50m05b2d2-09	OT	92850	84	0	4,76	N30m10b2d2-09	UB	23850	6578	0	3600,00
N50m05b2d2-10	OT	64348	127	0	3,25	N30m10b2d2-10	UB	26901	1461	0	3600,00

Fonte – a autora.

Tabela A.3 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de carregamento completo.

Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)	Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)
	Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO			Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO	
N10m05b2d2-01	OT	476	2	0	0,12	N100m05b2d2-01	OT	282808	4	0	0,05
N10m05b2d2-02	UB	924	0	0	3600,00	N100m05b2d2-02	OT	352362	4	0	0,18
N10m05b2d2-03	OT	912	1	0	0,31	N100m05b2d2-03	OT	242730	4	0	0,05
N10m05b2d2-04	OT	616	2	0	0,09	N100m05b2d2-04	OT	478764	3	0	0,04
N10m05b2d2-05	OT	738	1	0	0,69	N100m05b2d2-05	OT	208896	3	0	0,08
N10m05b2d2-06	OT	600	2	0	1,21	N100m05b2d2-06	OT	307840	4	0	0,07
N10m05b2d2-07	OT	636	2	0	84,98	N100m05b2d2-07	OT	567153	3	0	0,03
N10m05b2d2-08	OT	720	1	0	0,26	N100m05b2d2-08	OT	183150	5	0	0,05
N10m05b2d2-09	OT	888	1	0	1,51	N100m05b2d2-09	OT	343200	4	0	0,16
N10m05b2d2-10	OT	150	3	0	0,18	N100m05b2d2-10	OT	379728	2	0	0,07
N20m05b2d2-01	OT	5024	1	0	0,34	N10m10b2d2-01	OT	0*	2	0	1,89
N20m05b2d2-02	OT	3716	3	0	0,19	N10m10b2d2-02	OT	768	0	0	0,92
N20m05b2d2-03	OT	3441	1	0	0,02	N10m10b2d2-03	OT	0*	1	0	6,57
N20m05b2d2-04	OT	5028	2	0	0,27	N10m10b2d2-04	OT	564	1	0	3,61
N20m05b2d2-05	OT	4140	2	0	0,04	N10m10b2d2-05	OT	0*	1	0	2,42
N20m05b2d2-06	OT	5191	1	0	0,10	N10m10b2d2-06	OT	414	0	0	0,67
N20m05b2d2-07	OT	3582	3	0	0,15	N10m10b2d2-07	OT	750	0	0	1,07
N20m05b2d2-08	OT	6180	0	0	0,10	N10m10b2d2-08	OT	431	0	0	0,27
N20m05b2d2-09	OT	4550	2	0	0,06	N10m10b2d2-09	OT	872	1	0	6,83
N20m05b2d2-10	OT	5438	1	0	0,07	N10m10b2d2-10	OT	0*	0	0	1,08
N30m05b2d2-01	OT	13850	3	0	0,07	N20m10b2d2-01	OT	0*	2	0	0,10
N30m05b2d2-02	OT	9268	1	0	0,02	N20m10b2d2-02	OT	3856	2	0	2,55
N30m05b2d2-03	OT	14520	1	0	0,02	N20m10b2d2-03	OT	0*	2	0	1,19
N30m05b2d2-04	OT	9360	2	0	0,06	N20m10b2d2-04	OT	4354	1	0	0,77
N30m05b2d2-05	OT	13827	2	0	0,03	N20m10b2d2-05	OT	3824	1	0	0,83
N30m05b2d2-06	OT	10560	4	0	0,02	N20m10b2d2-06	OT	0*	2	0	0,59
N30m05b2d2-07	OT	3780	3	0	0,02	N20m10b2d2-07	OT	0*	2	0	0,40
N30m05b2d2-08	OT	8512	4	0	0,02	N20m10b2d2-08	OT	0*	2	0	0,53
N30m05b2d2-09	OT	14417	3	0	0,02	N20m10b2d2-09	OT	3587	1	0	0,37
N30m05b2d2-10	OT	14424	2	0	0,04	N20m10b2d2-10	OT	0*	1	0	0,61
N50m05b2d2-01	OT	43860	4	0	0,09	N30m10b2d2-01	OT	0*	2	0	0,15
N50m05b2d2-02	OT	40680	3	0	0,06	N30m10b2d2-02	OT	0*	2	0	1,76
N50m05b2d2-03	OT	56901	3	0	0,13	N30m10b2d2-03	OT	0*	2	0	0,47
N50m05b2d2-04	OT	66408	3	0	0,15	N30m10b2d2-04	OT	15092	1	0	0,18
N50m05b2d2-05	OT	68208	3	0	0,22	N30m10b2d2-05	OT	0*	1	0	0,06
N50m05b2d2-06	OT	42315	2	0	0,07	N30m10b2d2-06	OT	14265	1	0	0,06
N50m05b2d2-07	OT	61180	2	0	0,99	N30m10b2d2-07	OT	0*	2	0	1,99
N50m05b2d2-08	OT	36960	3	0	0,08	N30m10b2d2-08	OT	0*	2	0	0,20
N50m05b2d2-09	OT	65216	3	0	0,11	N30m10b2d2-09	OT	0*	2	0	0,18
N50m05b2d2-10	OT	57735	4	0	0,10	N30m10b2d2-10	OT	0*	1	0	0,45

\*Indica que não foi possível carregar nenhum item, pois não foi possível realizar o carregamento completo dos itens de nenhum cliente.

Fonte – a autora.

Tabela A.4 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de grafo de conflitos.

Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)	Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)
	Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO			Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO	
N10m05b2d2-01	OT	576	32	0	1,31	N100m05b2d2-01	OT	487036	24	0	0,29
N10m05b2d2-02	UB	988	99	0	3600,00	N100m05b2d2-02	OT	662448	30	0	1,44
N10m05b2d2-03	OT	944	0	0	0,36	N100m05b2d2-03	OT	661554	81	0	1,91
N10m05b2d2-04	OT	766	19	0	0,64	N100m05b2d2-04	OT	531520	58	0	0,92
N10m05b2d2-05	OT	918	234	0	318,41	N100m05b2d2-05	OT	730520	121	0	6,12
N10m05b2d2-06	OT	1000	2	0	81,82	N100m05b2d2-06	OT	665860	3	0	0,07
N10m05b2d2-07	OT	980	223	0	2078,41	N100m05b2d2-07	OT	596478	31	0	0,32
N10m05b2d2-08	OT	700	0	0	0,05	N100m05b2d2-08	OT	729040	2	0	0,10
N10m05b2d2-09	OT	912	12	0	1,14	N100m05b2d2-09	OT	607323	35	0	1,01
N10m05b2d2-10	OT	782	5	0	2,68	N100m05b2d2-10	OT	850368	24	0	0,74
N20m05b2d2-01	OT	7013	746	0	2079,98	N10m10b2d2-01	UB	984	2695	0	3600,00
N20m05b2d2-02	OT	6348	24	0	1,57	N10m10b2d2-02	UB	1000	85	0	3600,00
N20m05b2d2-03	OT	6960	37	0	1,49	N10m10b2d2-03	UB	998	712	0	3600,00
N20m05b2d2-04	OT	5176	3	0	0,22	N10m10b2d2-04	UB	1000	4	0	3600,00
N20m05b2d2-05	OT	4816	14	0	0,43	N10m10b2d2-05	OT	1000	41	0	58,79
N20m05b2d2-06	OT	4275	33	0	1,60	N10m10b2d2-06	UB	1000	179	0	3600,00
N20m05b2d2-07	OT	5664	72	0	4,15	N10m10b2d2-07	UB	999	622	0	3600,00
N20m05b2d2-08	OT	6840	56	0	5,47	N10m10b2d2-08	UB	989	1803	0	3600,00
N20m05b2d2-09	OT	6212	33	0	0,85	N10m10b2d2-09	OT	1000	2	0	8,20
N20m05b2d2-10	OT	5998	4	0	0,13	N10m10b2d2-10	OT	1000	982	0	976,32
N30m05b2d2-01	OT	16016	76	0	1,45	N20m10b2d2-01	OT	5423	666	0	44,97
N30m05b2d2-02	OT	17490	24	0	0,51	N20m10b2d2-02	OT	7135	1208	0	929,98
N30m05b2d2-03	OT	17544	63	0	1,06	N20m10b2d2-03	OT	7094	1503	0	708,42
N30m05b2d2-04	OT	19128	148	0	11,54	N20m10b2d2-04	UB	7444	4235	0	3600,00
N30m05b2d2-05	OT	18540	74	0	1,83	N20m10b2d2-05	OT	6906	1134	0	711,20
N30m05b2d2-06	OT	11220	10	0	0,06	N20m10b2d2-06	OT	6920	539	0	155,71
N30m05b2d2-07	OT	14616	85	0	1,55	N20m10b2d2-07	OT	6248	908	0	203,19
N30m05b2d2-08	OT	11590	11	0	0,06	N20m10b2d2-08	OT	7176	1214	0	335,07
N30m05b2d2-09	OT	14417	16	0	0,10	N20m10b2d2-09	OT	6967	2421	0	1066,02
N30m05b2d2-10	OT	12003	6	0	0,07	N20m10b2d2-10	OT	7540	2609	0	1636,62
N50m05b2d2-01	OT	71032	81	0	2,58	N30m10b2d2-01	OT	20012	1124	0	139,99
N50m05b2d2-02	OT	81140	10	0	0,20	N30m10b2d2-02	OT	24024	2946	0	2528,29
N50m05b2d2-03	OT	85461	3	0	0,15	N30m10b2d2-03	OT	20948	1871	0	372,74
N50m05b2d2-04	OT	70272	82	0	4,16	N30m10b2d2-04	OT	21798	488	0	50,26
N50m05b2d2-05	OT	103248	244	0	29,00	N30m10b2d2-05	OT	25260	201	0	12,13
N50m05b2d2-06	OT	88060	92	0	4,11	N30m10b2d2-06	OT	18501	343	0	20,95
N50m05b2d2-07	OT	106064	2111	0	1412,40	N30m10b2d2-07	UB	24478	4037	0	3600,00
N50m05b2d2-08	OT	94734	72	0	2,85	N30m10b2d2-08	OT	21660	1618	0	267,79
N50m05b2d2-09	OT	82980	28	0	1,52	N30m10b2d2-09	OT	21180	1982	0	332,56
N50m05b2d2-10	OT	62640	35	0	0,64	N30m10b2d2-10	OT	22482	4653	0	3243,54

Fonte – a autora.

Tabela A.5 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de prioridade.

Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)	Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)
	Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO			Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO	
N10m05b2d2-01	OT	776	8	0	0,36	N100m05b2d2-01	OT	314496	7	0	0,075652
N10m05b2d2-02	UB	960	1	0	3600,00	N100m05b2d2-02	OT	583554	9	0	0,42
N10m05b2d2-03	OT	650	9	0	0,39	N100m05b2d2-03	OT	435552	16	0	0,15
N10m05b2d2-04	OT	766	6	0	0,30	N100m05b2d2-04	OT	369028	5	0	0,04
N10m05b2d2-05	OT	768	10	0	2,47	N100m05b2d2-05	OT	466320	15	0	0,51
N10m05b2d2-06	OT	840	8	0	7,28	N100m05b2d2-06	OT	478440	4	0	0,10
N10m05b2d2-07	OT	946	1	0	1,11	N100m05b2d2-07	OT	385142	11	0	0,11
N10m05b2d2-08	OT	664	4	0	0,39	N100m05b2d2-08	OT	447120	9	0	0,11
N10m05b2d2-09	OT	888	0	0	1,22	N100m05b2d2-09	OT	540432	15	0	0,68
N10m05b2d2-10	OT	360	75	0	2,47	N100m05b2d2-10	OT	664884	9	0	0,23
N20m05b2d2-01	OT	4536	16	0	2,50	N10m10b2d2-01	OT	912	292	0	701,07
N20m05b2d2-02	OT	6416	6	0	0,53	N10m10b2d2-02	UB	1000	1	0	3600,00
N20m05b2d2-03	OT	6832	5	0	0,12	N10m10b2d2-03	OT	630	10	0	32,93
N20m05b2d2-04	OT	6056	8	0	1,05	N10m10b2d2-04	UB	1000	3	0	3600,00
N20m05b2d2-05	OT	4426	5	0	0,06	N10m10b2d2-05	OT	924	150	0	2359,69
N20m05b2d2-06	OT	4456	15	0	0,70	N10m10b2d2-06	OT	936	68	0	41,70
N20m05b2d2-07	OT	5404	4	0	0,31	N10m10b2d2-07	UB	888	1694	0	3600,00
N20m05b2d2-08	OT	6180	7	0	2,10	N10m10b2d2-08	OT	966	220	0	78,45
N20m05b2d2-09	OT	5120	4	0	0,10	N10m10b2d2-09	OT	872	6	0	116,83
N20m05b2d2-10	OT	5438	5	0	0,13	N10m10b2d2-10	UB	946	360	0	3600,00
N30m05b2d2-01	OT	15584	8	0	0,10	N20m10b2d2-01	OT	4849	66	0	2,58
N30m05b2d2-02	OT	14845	15	0	0,23	N20m10b2d2-02	OT	5540	25	0	13,73
N30m05b2d2-03	OT	10584	14	0	0,13	N20m10b2d2-03	OT	6674	85	0	30,40
N30m05b2d2-04	OT	19200	21	0	0,79	N20m10b2d2-04	OT	6458	48	0	22,48
N30m05b2d2-05	OT	17787	7	0	0,07	N20m10b2d2-05	OT	6064	166	0	83,80
N30m05b2d2-06	OT	10560	3	0	0,02	N20m10b2d2-06	OT	6920	29	0	7,50
N30m05b2d2-07	OT	7260	19	0	0,11	N20m10b2d2-07	OT	5624	61	0	9,85
N30m05b2d2-08	OT	8512	3	0	0,02	N20m10b2d2-08	OT	7176	106	0	36,96
N30m05b2d2-09	OT	14417	4	0	0,03	N20m10b2d2-09	OT	6260	153	0	60,82
N30m05b2d2-10	OT	14424	3	0	0,04	N20m10b2d2-10	OT	6592	101	0	85,16
N50m05b2d2-01	OT	73500	10	0	0,24	N30m10b2d2-01	OT	20738	58	0	4,79
N50m05b2d2-02	OT	57200	10	0	0,14	N30m10b2d2-02	OT	19570	58	0	28,94
N50m05b2d2-03	OT	54768	15	0	0,53	N30m10b2d2-03	OT	15888	54	0	8,50
N50m05b2d2-04	OT	70926	16	0	0,37	N30m10b2d2-04	OT	18480	50	0	4,81
N50m05b2d2-05	OT	86688	16	0	1,29	N30m10b2d2-05	OT	22200	10	0	0,43
N50m05b2d2-06	OT	79884	8	0	0,25	N30m10b2d2-06	OT	9954	29	0	0,64
N50m05b2d2-07	OT	65352	38	0	23,95	N30m10b2d2-07	OT	16944	72	0	27,41
N50m05b2d2-08	OT	40458	20	0	0,40	N30m10b2d2-08	OT	14328	26	0	2,19
N50m05b2d2-09	OT	58256	7	0	0,29	N30m10b2d2-09	OT	14960	18	0	0,92
N50m05b2d2-10	OT	57735	17	0	0,12	N30m10b2d2-10	OT	17119	103	0	23,84

Fonte – a autora.

Tabela A.6 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de limite de peso.

Instância	Solução		Peso		Cortes		Tempo (s)	Instância	Solução		Peso		Cortes		Tempo (s)
	Tipo	V.F.O.	Suportado	Carregado	rel-3PEO	3PEO			Tipo	V.F.O.	Suportado	Carregado	rel-3PEO	3PEO	
N10m05b2d2-01	OT	504	24000	20957	2	0	0,45	N100m05b2d2-01	OT	434060	45000	39091	15	0	1,37
N10m05b2d2-02	OT	195	24000	21879	0	0	0,87	N100m05b2d2-02	OT	570228	45000	40965	1	0	0,36
N10m05b2d2-03	OT	272	24000	21597	0	0	0,16	N100m05b2d2-03	OT	516462	45000	44970	11	0	1,60
N10m05b2d2-04	OT	488	24000	23362	0	0	0,10	N100m05b2d2-04	OT	425128	45000	43975	11	0	1,52
N10m05b2d2-05	OT	360	24000	20173	2	0	1,14	N100m05b2d2-05	OT	420576	45000	39083	2	0	0,29
N10m05b2d2-06	OT	360	24000	22522	0	0	0,54	N100m05b2d2-06	OT	401440	45000	44641	5	0	0,47
N10m05b2d2-07	OT	216	24000	23552	0	0	0,80	N100m05b2d2-07	OT	596478	45000	43935	10	0	1,47
N10m05b2d2-08	OT	294	24000	22599	0	0	0,25	N100m05b2d2-08	OT	466836	45000	38306	1	0	0,18
N10m05b2d2-09	OT	450	24000	22972	0	0	0,17	N100m05b2d2-09	OT	375651	45000	37882	0	0	0,11
N10m05b2d2-10	OT	441	24000	22400	0	0	0,31	N100m05b2d2-10	OT	554070	45000	44175	11	0	1,03
N20m05b2d2-01	OT	3360	30000	24920	0	0	0,60	N10m10b2d2-01	OT	588	24000	19277	17	0	21,51
N20m05b2d2-02	OT	2268	30000	27918	0	0	0,13	N10m10b2d2-02	OT	576	24000	21460	0	0	1,48
N20m05b2d2-03	OT	4340	30000	22704	21	0	2,26	N10m10b2d2-03	OT	448	24000	22498	0	0	1,21
N20m05b2d2-04	OT	3700	30000	29857	0	0	0,17	N10m10b2d2-04	OT	312	24000	23016	0	0	3,40
N20m05b2d2-05	OT	3552	30000	25459	3	0	0,50	N10m10b2d2-05	OT	1000	24000	21568	0	0	2,45
N20m05b2d2-06	OT	2988	30000	29987	0	0	0,14	N10m10b2d2-06	OT	396	24000	23115	0	0	1,60
N20m05b2d2-07	OT	2382	30000	27608	0	0	0,17	N10m10b2d2-07	OT	462	24000	21654	0	0	1,81
N20m05b2d2-08	OT	4560	30000	26777	2	0	1,80	N10m10b2d2-08	OT	458	24000	22718	16	0	9,74
N20m05b2d2-09	OT	2992	30000	26513	0	0	0,13	N10m10b2d2-09	OT	600	24000	20476	3	0	5,93
N20m05b2d2-10	OT	4500	30000	28166	1	0	0,19	N10m10b2d2-10	OT	452	24000	23029	1	0	3,07
N30m05b2d2-01	OT	14522	45000	43137	5	0	0,56	N20m10b2d2-01	OT	4184	30000	27873	0	0	0,27
N30m05b2d2-02	OT	12496	45000	35192	1	0	0,18	N20m10b2d2-02	OT	3011	30000	29612	0	0	0,97
N30m05b2d2-03	OT	14520	45000	27748	7	0	0,65	N20m10b2d2-03	OT	6884	30000	26856	335	0	367,72
N30m05b2d2-04	OT	13680	45000	42839	11	0	1,47	N20m10b2d2-04	OT	4688	30000	26913	27	0	18,06
N30m05b2d2-05	OT	13827	45000	32385	0	0	0,09	N20m10b2d2-05	OT	4422	30000	27140	0	0	0,82
N30m05b2d2-06	OT	14388	45000	36925	5	0	0,73	N20m10b2d2-06	OT	5056	30000	28904	1	0	0,95
N30m05b2d2-07	OT	13308	45000	35008	4	0	0,74	N20m10b2d2-07	OT	4278	30000	27957	16	0	5,12
N30m05b2d2-08	OT	11590	45000	29336	23	0	2,72	N20m10b2d2-08	OT	4663	30000	24731	212	0	99,78
N30m05b2d2-09	OT	12462	45000	34601	11	0	1,48	N20m10b2d2-09	OT	3583	30000	29248	1	0	1,02
N30m05b2d2-10	OT	14652	45000	44230	10	0	1,06	N20m10b2d2-10	OT	4308	30000	29221	58	0	37,69
N50m05b2d2-01	OT	58688	45000	42755	4	0	0,60	N30m10b2d2-01	OT	13121	45000	44176	23	0	5,35
N50m05b2d2-02	OT	40680	45000	35183	0	0	0,09	N30m10b2d2-02	OT	13362	45000	42516	1	0	2,06
N50m05b2d2-03	OT	44568	45000	43659	0	0	0,09	N30m10b2d2-03	OT	15546	45000	44784	0	0	0,29
N50m05b2d2-04	OT	61578	45000	41997	2	0	0,28	N30m10b2d2-04	OT	14998	45000	42530	29	0	7,88
N50m05b2d2-05	OT	38208	45000	41143	4	0	0,64	N30m10b2d2-05	OT	15172	45000	44903	3	0	0,48
N50m05b2d2-06	OT	55545	45000	41122	0	0	0,12	N30m10b2d2-06	OT	14184	45000	39237	10	0	1,43
N50m05b2d2-07	OT	34960	45000	39536	0	0	0,79	N30m10b2d2-07	OT	14028	45000	41497	12	0	10,49
N50m05b2d2-08	OT	63288	45000	42913	8	0	1,62	N30m10b2d2-08	OT	13825	45000	44724	3	0	0,78
N50m05b2d2-09	OT	56754	45000	44629	0	0	0,11	N30m10b2d2-09	OT	17642	45000	42904	92	0	21,48
N50m05b2d2-10	OT	57735	45000	28729	10	0	1,33	N30m10b2d2-10	OT	17001	45000	43458	1	0	1,18

Fonte – a autora.

Tabela A.7 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de estabilidade vertical.

Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)	Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)
	Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO			Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO	
N10m05b2d2-01	OT	776	95	1	6,32	N100m05b2d2-01	OT	465196	57	2	57,49
N10m05b2d2-02	UB	1000	11	0	3600,00	N100m05b2d2-02	OT	660624	185	3	10,10
N10m05b2d2-03	OT	950	52	0	5,54	N100m05b2d2-03	OT	503148	638	87	890,23
N10m05b2d2-04	UB	856	214	4	3600,00	N100m05b2d2-04	OT	531520	137	0	3,44
N10m05b2d2-05	UB	918	1225	0	3600,00	N100m05b2d2-05	OT	694280	256	7	565,43
N10m05b2d2-06	UB	1000	9	0	3600,00	N100m05b2d2-06	OT	619060	39	3	5,50
N10m05b2d2-07	UB	992	382	0	3600,00	N100m05b2d2-07	OT	484076	86	6	1,71
N10m05b2d2-08	OT	760	46	1	2980,19	N100m05b2d2-08	OT	555750	110	7	10,60
N10m05b2d2-09	OT	960	289	0	386,43	N100m05b2d2-09	OT	607323	277	9	132,91
N10m05b2d2-10	UB	850	449	0	3600,00	N100m05b2d2-10	OT	850368	235	0	32,27
N20m05b2d2-01	UB	7013	2800	0	3600,00	N10m10b2d2-01	UB	1000	4313	0	3600,00
N20m05b2d2-02	OT	6416	553	2	1257,90	N10m10b2d2-02	UB	1000	6	0	3600,00
N20m05b2d2-03	OT	6960	234	0	6,19	N10m10b2d2-03	OT	630	418	0	947,28
N20m05b2d2-04	UB	6216	61	0	3600,00	N10m10b2d2-04	UB	1000	5	0	3600,00
N20m05b2d2-05	OT	4442	51	2	1,12	N10m10b2d2-05	UB	1000	40	0	36000,00
N20m05b2d2-06	UB	6011	152	0	3600,00	N10m10b2d2-06	UB	1000	140	0	36000,00
N20m05b2d2-07	OT	5664	183	2	69,09	N10m10b2d2-07	UB	1000	1576	0	36000,00
N20m05b2d2-08	UB	7200	397	1	3600,00	N10m10b2d2-08	UB	1000	5731	0	36000,00
N20m05b2d2-09	OT	5540	120	11	24,91	N10m10b2d2-09	OT	1000	50	0	66,97
N20m05b2d2-10	OT	5998	186	0	5,83	N10m10b2d2-10	UB	1000	214	0	3600,00
N30m05b2d2-01	OT	18010	442	0	25,55	N20m10b2d2-01	UB	7146	5625	0	3600,00
N30m05b2d2-02	OT	17490	134	0	3,03	N20m10b2d2-02	UB	7971	1507	0	3600,00
N30m05b2d2-03	OT	17544	171	0	3,72	N20m10b2d2-03	UB	7966	1554	0	3600,00
N30m05b2d2-04	UB	19680	1245	2	3600,00	N20m10b2d2-04	UB	7970	1535	0	3600,00
N30m05b2d2-05	OT	17787	157	5	3,24	N20m10b2d2-05	UB	7986	1238	0	3600,00
N30m05b2d2-06	OT	14388	22	0	0,11	N20m10b2d2-06	UB	7920	1955	0	3600,00
N30m05b2d2-07	OT	14616	152	0	3,41	N20m10b2d2-07	UB	7832	2718	0	3600,00
N30m05b2d2-08	OT	11590	30	0	0,14	N20m10b2d2-08	UB	7733	4349	0	3600,00
N30m05b2d2-09	OT	14417	37	0	0,24	N20m10b2d2-09	UB	7983	1274	0	3600,00
N30m05b2d2-10	OT	15612	43	1	0,80	N20m10b2d2-10	UB	7914	2114	0	3600,00
N50m05b2d2-01	OT	65448	199	34	562,47	N30m10b2d2-01	UB	25324	4245	0	3600,00
N50m05b2d2-02	OT	81140	125	1	3,66	N30m10b2d2-02	UB	26933	1171	0	3600,00
N50m05b2d2-03	OT	85461	151	0	6,73	N30m10b2d2-03	UB	26668	2149	0	3600,00
N50m05b2d2-04	OT	73338	489	0	33,02	N30m10b2d2-04	UB	22026	6606	2	3600,00
N50m05b2d2-05	OT	103248	529	0	894,24	N30m10b2d2-05	OT	25260	3197	0	1199,47
N50m05b2d2-06	OT	88060	730	1	50,60	N30m10b2d2-06	OT	17072	6717	27	2718,86
N50m05b2d2-07	UB	120680	3568	0	3600,00	N30m10b2d2-07	UB	26956	1159	0	3600,00
N50m05b2d2-08	OT	94734	322	0	19,65	N30m10b2d2-08	UB	26369	2420	0	3600,00
N50m05b2d2-09	OT	84160	116	8	14,88	N30m10b2d2-09	UB	23792	6671	0	3600,00
N50m05b2d2-10	OT	64348	127	0	3,13	N30m10b2d2-10	UB	26899	1480	0	3600,00

Fonte – a autora.

Tabela A.8 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de estabilidade vertical e horizontal.

Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)	Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)
	Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO			Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO	
N10m05b2d2-01	OT	776	95	1	14,97	N100m05b2d2-01	OT	370040	64	11	2,06
N10m05b2d2-02	UB	1000	11	0	3600,00	N100m05b2d2-02	OT	512430	261	39	402,26
N10m05b2d2-03	UB	950	52	0	3600,00	N100m05b2d2-03	OT	304365	695	240	271,45
N10m05b2d2-04	UB	766	365	15	3600,00	N100m05b2d2-04	OT	384090	153	20	7,72
N10m05b2d2-05	UB	918	1225	0	3600,00	N100m05b2d2-05	OT	556970	325	47	157,52
N10m05b2d2-06	OT	1000	9	0	1130,15	N100m05b2d2-06	OT	495040	51	16	10,07
N10m05b2d2-07	UB	992	382	0	3600,00	N100m05b2d2-07	OT	477411	87	8	1,66
N10m05b2d2-08	UB	718	58	12	3600,00	N100m05b2d2-08	OT	545890	114	8	9,76
N10m05b2d2-09	OT	960	289	0	268,85	N100m05b2d2-09	OT	540432	316	30	70,22
N10m05b2d2-10	UB	850	449	0	3600,00	N100m05b2d2-10	UB	850368	235	0	3600,00
N20m05b2d2-01	UB	7013	2800	0	3600,00	N100m10b2d2-01	UB	1000	4263	0	3600,93
N20m05b2d2-02	UB	6068	689	20	3600,00	N100m10b2d2-02	UB	1000	6	0	3600,93
N20m05b2d2-03	OT	6960	234	0	10,23	N100m10b2d2-03	OT	630	418	0	971,55
N20m05b2d2-04	UB	6216	61	0	3600,00	N100m10b2d2-04	UB	1000	5	0	3600,00
N20m05b2d2-05	OT	3672	69	16	2,93	N100m10b2d2-05	UB	1000	40	0	3600,00
N20m05b2d2-06	UB	4966	311	22	3600,00	N100m10b2d2-06	UB	1000	140	0	3600,00
N20m05b2d2-07	OT	4964	248	23	604,63	N100m10b2d2-07	UB	1000	1574	0	3600,00
N20m05b2d2-08	UB	7024	482	6	3600,00	N100m10b2d2-08	UB	1000	5629	0	3600,00
N20m05b2d2-09	OT	4362	134	79	28,53	N100m10b2d2-09	OT	1000	50	0	277,65
N20m05b2d2-10	OT	4752	314	30	36,53	N100m10b2d2-10	UB	1000	214	0	3600,00
N30m05b2d2-01	OT	15900	557	25	77,54	N20m10b2d2-01	UB	7163	5540	0	3600,00
N30m05b2d2-02	OT	16166	151	3	8,48	N20m10b2d2-02	UB	7971	1496	0	3600,00
N30m05b2d2-03	OT	17544	171	0	3,55	N20m10b2d2-03	UB	7968	1540	0	3600,00
N30m05b2d2-04	UB	19128	1327	8	3600,00	N20m10b2d2-04	UB	7970	1525	0	3600,00
N30m05b2d2-05	OT	14220	178	36	6,79	N20m10b2d2-05	UB	7986	1226	0	3600,00
N30m05b2d2-06	OT	10692	28	4	0,26	N20m10b2d2-06	UB	7922	1931	0	3600,00
N30m05b2d2-07	OT	14616	152	0	3,27	N20m10b2d2-07	UB	7834	2681	0	3600,00
N30m05b2d2-08	OT	11590	30	0	0,17	N20m10b2d2-08	UB	7736	4299	0	3600,00
N30m05b2d2-09	OT	14417	37	0	0,29	N20m10b2d2-09	UB	7984	1252	0	3600,00
N30m05b2d2-10	OT	12732	56	11	3,30	N20m10b2d2-10	UB	7916	2096	0	3600,00
N50m05b2d2-01	OT	63032	205	45	25,00	N30m10b2d2-01	UB	25358	4171	0	3600,00
N50m05b2d2-02	OT	73940	146	9	5,35	N30m10b2d2-02	UB	26934	1165	0	3600,00
N50m05b2d2-03	OT	81496	178	2	63,73	N30m10b2d2-03	UB	26672	2123	0	3600,00
N50m05b2d2-04	OT	70272	527	4	3222,34	N30m10b2d2-04	UB	21980	6652	2	3600,00
N50m05b2d2-05	UB	103248	529	0	3600,00	N30m10b2d2-05	OT	25260	3197	0	1227,16
N50m05b2d2-06	OT	88060	730	1	36,46	N30m10b2d2-06	OT	15416	7322	115	3326,40
N50m05b2d2-07	UB	120748	3519	0	3600,00	N30m10b2d2-07	UB	26956	1149	0	3600,00
N50m05b2d2-08	UB	94734	322	0	3600,00	N30m10b2d2-08	UB	26377	2383	0	3600,00
N50m05b2d2-09	OT	66912	157	51	24,22	N30m10b2d2-09	UB	23846	6586	0	3600,00
N50m05b2d2-10	OT	57735	142	3	3,90	N30m10b2d2-10	UB	26901	1460	0	3600,00

Fonte – a autora.

Tabela A.9 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de fragilidade.

Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)	Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)
	Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO			Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO	
N10m05b2d2-01	OT	776	95	1	4,94	N100m05b2d2-01	OT	487036	55	0	0,63
N10m05b2d2-02	UB	1000	11	0	3600,00	N100m05b2d2-02	OT	660624	185	3	10,27
N10m05b2d2-03	UB	950	52	0	3600,00	N100m05b2d2-03	OT	607854	530	25	803,89
N10m05b2d2-04	OT	856	214	4	7,87	N100m05b2d2-04	OT	531520	137	0	3,43
N10m05b2d2-05	UB	918	1225	0	3600,00	N100m05b2d2-05	OT	740510	223	0	7,46
N10m05b2d2-06	UB	1000	9	0	3600,00	N100m05b2d2-06	OT	478660	51	18	4,43
N10m05b2d2-07	UB	992	382	0	3600,00	N100m05b2d2-07	OT	554828	76	4	1,19
N10m05b2d2-08	OT	772	41	0	7,80	N100m05b2d2-08	OT	604840	97	3	51,09
N10m05b2d2-09	OT	960	289	0	208,40	N100m05b2d2-09	OT	673077	218	2	10,27
N10m05b2d2-10	OT	845	462	2	200,57	N100m05b2d2-10	OT	850368	235	0	13,40
N20m05b2d2-01	UB	7013	2800	0	3600,00	N10m10b2d2-01	UB	1000	4315	0	3600,00
N20m05b2d2-02	OT	6416	553	2	70,92	N10m10b2d2-02	UB	1000	6	0	3600,00
N20m05b2d2-03	OT	6960	234	0	6,04	N10m10b2d2-03	UB	1000	2553	0	3600,00
N20m05b2d2-04	OT	6216	61	0	299,77	N10m10b2d2-04	UB	1000	5	0	3600,00
N20m05b2d2-05	OT	4855	47	0	0,80	N10m10b2d2-05	UB	1000	40	0	3600,00
N20m05b2d2-06	OT	5543	222	3	195,30	N10m10b2d2-06	UB	1000	140	0	3600,00
N20m05b2d2-07	OT	5664	183	2	38,74	N10m10b2d2-07	UB	1000	1574	0	3600,00
N20m05b2d2-08	OT	7068	462	3	205,03	N10m10b2d2-08	UB	1000	5711	0	3600,00
N20m05b2d2-09	OT	6212	86	0	2,64	N10m10b2d2-09	OT	1000	50	0	64,22
N20m05b2d2-10	OT	4868	298	26	14,73	N10m10b2d2-10	UB	1000	214	0	3600,00
N30m05b2d2-01	OT	17608	466	1	30,01	N20m10b2d2-01	UB	7135	5673	0	3600,00
N30m05b2d2-02	OT	17490	134	0	3,06	N20m10b2d2-02	UB	7971	1510	0	3600,00
N30m05b2d2-03	OT	17544	171	0	3,74	N20m10b2d2-03	UB	7966	1557	0	3600,00
N30m05b2d2-04	OT	20568	1131	0	83,92	N20m10b2d2-04	UB	7970	1537	0	3600,00
N30m05b2d2-05	OT	18953	140	1	2,45	N20m10b2d2-05	UB	7986	1238	0	3600,00
N30m05b2d2-06	OT	14388	22	0	0,11	N20m10b2d2-06	UB	7920	1954	0	3600,00
N30m05b2d2-07	OT	14568	152	1	3,49	N20m10b2d2-07	UB	7832	2718	0	3600,00
N30m05b2d2-08	OT	11590	30	0	0,14	N20m10b2d2-08	UB	7732	4355	0	3600,00
N30m05b2d2-09	OT	14417	37	0	0,25	N20m10b2d2-09	UB	7983	1277	0	3600,00
N30m05b2d2-10	OT	15679	43	0	0,41	N20m10b2d2-10	UB	7914	2120	0	3600,00
N50m05b2d2-01	OT	71376	179	16	13,29	N30m10b2d2-01	UB	25324	4240	0	3600,00
N50m05b2d2-02	OT	86440	107	0	3,05	N30m10b2d2-02	UB	26933	1170	0	3600,00
N50m05b2d2-03	OT	85461	151	0	6,77	N30m10b2d2-03	UB	26668	2148	0	3600,00
N50m05b2d2-04	OT	73338	489	0	33,18	N30m10b2d2-04	OT	22122	6514	1	3356,04
N50m05b2d2-05	OT	103248	529	0	115,37	N30m10b2d2-05	OT	25260	3197	0	1192,94
N50m05b2d2-06	OT	88466	723	0	32,09	N30m10b2d2-06	OT	18917	5758	0	2037,03
N50m05b2d2-07	UB	120680	3568	0	3600,00	N30m10b2d2-07	UB	26956	1158	0	3600,00
N50m05b2d2-08	OT	94734	322	0	11,02	N30m10b2d2-08	UB	26370	2418	0	3600,00
N50m05b2d2-09	OT	92850	84	0	4,71	N30m10b2d2-09	UB	23802	6656	0	3600,00
N50m05b2d2-10	OT	64348	127	0	3,16	N30m10b2d2-10	UB	26899	1478	0	3600,00

Fonte – a autora.

Tabela A.10 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de fragilidade por pressão.

Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)	Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)
	Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO			Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO	
N10m05b2d2-01	OT	776	95	1	7,00	N100m05b2d2-01	OT	487036	55	0	0,74
N10m05b2d2-02	UB	1000	11	0	3600,00	N100m05b2d2-02	OT	547992	252	23	29,43
N10m05b2d2-03	UB	878	141	23	3600,00	N100m05b2d2-03	OT	683232	416	3	103,71
N10m05b2d2-04	OT	856	213	3	1302,68	N100m05b2d2-04	OT	531520	137	0	3,63
N10m05b2d2-05	UB	918	1225	0	3600,00	N100m05b2d2-05	OT	686140	263	9	28,17
N10m05b2d2-06	UB	1000	9	0	3600,00	N100m05b2d2-06	OT	572260	44	7	3,68
N10m05b2d2-07	UB	992	382	0	3600,00	N100m05b2d2-07	OT	673895	52	0	0,71
N10m05b2d2-08	UB	736	51	6	3600,00	N100m05b2d2-08	OT	666940	75	1	21,75
N10m05b2d2-09	UB	960	289	0	3600,00	N100m05b2d2-09	OT	631827	252	5	14,78
N10m05b2d2-10	UB	845	462	2	3600,00	N100m05b2d2-10	OT	850368	235	0	49,89
N20m05b2d2-01	UB	7013	2800	0	3600,00	N10m10b2d2-01	UB	1000	3905	0	3600,00
N20m05b2d2-02	OT	6348	582	3	119,36	N10m10b2d2-02	UB	1000	6	0	3600,00
N20m05b2d2-03	UB	6960	234	0	3600,00	N10m10b2d2-03	UB	1000	2653	0	3600,00
N20m05b2d2-04	UB	6216	61	0	3600,00	N10m10b2d2-04	UB	1000	5	1	3600,00
N20m05b2d2-05	OT	3640	70	17	3,29	N10m10b2d2-05	UB	1000	40	0	3600,00
N20m05b2d2-06	OT	5521	225	4	2627,04	N10m10b2d2-06	UB	1000	140	0	3600,00
N20m05b2d2-07	OT	5754	173	0	13,28	N10m10b2d2-07	UB	1000	1505	0	3600,00
N20m05b2d2-08	OT	7068	462	3	305,81	N10m10b2d2-08	UB	1000	5154	0	3600,00
N20m05b2d2-09	OT	5564	119	10	49,63	N10m10b2d2-09	UB	1000	3190	2	3600,00
N20m05b2d2-10	OT	4868	298	26	17,83	N10m10b2d2-10	UB	1000	214	0	3600,00
N30m05b2d2-01	OT	18010	442	0	29,51	N20m10b2d2-01	UB	7233	5142	0	3600,00
N30m05b2d2-02	OT	17490	134	0	3,56	N20m10b2d2-02	UB	7972	1410	0	3600,00
N30m05b2d2-03	OT	17544	171	0	3,85	N20m10b2d2-03	UB	7968	1447	0	3600,00
N30m05b2d2-04	OT	20568	1131	0	101,95	N20m10b2d2-04	UB	7972	1428	0	3600,00
N30m05b2d2-05	OT	17787	157	5	3,95	N20m10b2d2-05	UB	7986	1153	0	3600,00
N30m05b2d2-06	OT	14388	22	0	0,13	N20m10b2d2-06	UB	7926	1824	0	3600,00
N30m05b2d2-07	OT	14616	152	0	3,56	N20m10b2d2-07	UB	7840	2555	0	3600,00
N30m05b2d2-08	OT	11590	30	0	0,20	N20m10b2d2-08	UB	7758	3962	0	3600,00
N30m05b2d2-09	OT	14417	37	0	0,28	N20m10b2d2-09	UB	7985	1192	0	3600,00
N30m05b2d2-10	OT	15612	43	1	0,66	N20m10b2d2-10	UB	7922	1941	0	3600,00
N50m05b2d2-01	OT	74332	169	10	23,86	N30m10b2d2-01	UB	25472	3920	0	3600,00
N50m05b2d2-02	OT	80928	125	2	4,56	N30m10b2d2-02	UB	26937	1089	0	3600,00
N50m05b2d2-03	OT	85461	151	0	7,94	N30m10b2d2-03	UB	26692	2008	0	3600,00
N50m05b2d2-04	UB	73338	489	0	3600,00	N30m10b2d2-04	UB	22426	6208	0	3600,00
N50m05b2d2-05	UB	103248	529	0	3600,00	N30m10b2d2-05	UB	24180	4888	10	3600,00
N50m05b2d2-06	OT	88060	730	1	63,50	N30m10b2d2-06	OT	18339	6159	7	2717,85
N50m05b2d2-07	UB	121082	3248	0	3600,00	N30m10b2d2-07	UB	26960	1080	0	3600,00
N50m05b2d2-08	OT	94734	322	0	35,59	N30m10b2d2-08	UB	26408	2252	0	3600,00
N50m05b2d2-09	OT	92850	84	0	5,58	N30m10b2d2-09	UB	24094	6096	0	3600,00
N50m05b2d2-10	OT	64348	127	0	3,58	N30m10b2d2-10	UB	26922	1165	0	3600,00

Fonte – a autora.

Tabela A.11 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de ordem de entrega.

Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)	Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)
	Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO			Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO	
N10m05b2d2-01	OT	776	95	0	5,47	N100m05b2d2-01	OT	487036	55	0	0,72
N10m05b2d2-02	UB	1000	11	0	3600,00	N100m05b2d2-02	OT	718422	144	0	8,41
N10m05b2d2-03	OT	950	52	0	5,01	N100m05b2d2-03	OT	664386	446	6	32,62
N10m05b2d2-04	OT	886	163	1	29,19	N100m05b2d2-04	OT	531520	137	0	3,71
N10m05b2d2-05	UB	918	1225	0	3600,00	N100m05b2d2-05	OT	722400	233	2	10,55
N10m05b2d2-06	OT	1000	9	0	11,71	N100m05b2d2-06	OT	671674	31	0	0,48
N10m05b2d2-07	UB	992	382	0	3600,00	N100m05b2d2-07	OT	596478	69	1	1,08
N10m05b2d2-08	OT	760	46	1	32,26	N100m05b2d2-08	OT	604840	97	3	3,33
N10m05b2d2-09	OT	960	289	0	56,68	N100m05b2d2-09	OT	714327	180	0	9,09
N10m05b2d2-10	OT	850	449	0	190,52	N100m05b2d2-10	OT	850368	235	0	7,40
N20m05b2d2-01	UB	7013	2800	0	3600,00	N10m10b2d2-01	UB	1000	3892	0	3600,00
N20m05b2d2-02	OT	6416	553	2	62,13	N10m10b2d2-02	OT	1000	6	0	174,70
N20m05b2d2-03	OT	6960	234	0	7,37	N10m10b2d2-03	OT	630	418	0	1181,28
N20m05b2d2-04	OT	6216	61	0	16,48	N10m10b2d2-04	UB	1000	5	0	3600,00
N20m05b2d2-05	OT	4855	47	0	0,91	N10m10b2d2-05	UB	1000	40	0	3600,00
N20m05b2d2-06	OT	6011	152	0	10,46	N10m10b2d2-06	UB	1000	140	0	3600,00
N20m05b2d2-07	OT	5664	183	2	21,73	N10m10b2d2-07	UB	1000	1505	0	3600,00
N20m05b2d2-08	OT	7060	465	5	2924,56	N10m10b2d2-08	UB	1000	5144	0	3600,00
N20m05b2d2-09	OT	6212	86	0	3,26	N10m10b2d2-09	OT	1000	50	0	55,99
N20m05b2d2-10	OT	5998	186	0	7,03	N10m10b2d2-10	OT	1000	214	0	667,31
N30m05b2d2-01	OT	18010	442	0	29,57	N20m10b2d2-01	UB	7236	5129	0	3600,00
N30m05b2d2-02	OT	17490	134	0	3,55	N20m10b2d2-02	UB	7972	1404	0	3600,00
N30m05b2d2-03	OT	17544	171	0	3,93	N20m10b2d2-03	UB	7968	1439	0	3600,00
N30m05b2d2-04	OT	20568	1131	0	100,98	N20m10b2d2-04	UB	7973	1424	0	3600,00
N30m05b2d2-05	OT	20119	125	0	2,45	N20m10b2d2-05	UB	7986	1148	0	3600,00
N30m05b2d2-06	OT	14388	22	0	0,14	N20m10b2d2-06	UB	7926	1817	0	3600,00
N30m05b2d2-07	OT	14616	152	0	3,61	N20m10b2d2-07	UB	7842	2546	0	3600,00
N30m05b2d2-08	OT	11590	30	0	0,17	N20m10b2d2-08	UB	7759	3951	0	3600,00
N30m05b2d2-09	OT	14417	37	0	0,31	N20m10b2d2-09	UB	7985	1189	0	3600,00
N30m05b2d2-10	OT	15612	43	1	0,57	N20m10b2d2-10	UB	7922	1935	0	3600,00
N50m05b2d2-01	OT	81092	138	0	5,51	N30m10b2d2-01	UB	25474	3909	0	3600,00
N50m05b2d2-02	OT	81140	125	1	4,37	N30m10b2d2-02	UB	26937	1085	0	3600,00
N50m05b2d2-03	OT	81496	178	2	11,65	N30m10b2d2-03	UB	26694	1999	0	3600,00
N50m05b2d2-04	OT	73338	489	0	38,06	N30m10b2d2-04	UB	22442	6189	0	3600,00
N50m05b2d2-05	OT	103248	529	0	60,33	N30m10b2d2-05	OT	25260	3197	0	1378,74
N50m05b2d2-06	OT	88466	723	0	39,54	N30m10b2d2-06	OT	18746	5874	2	2507,32
N50m05b2d2-07	UB	121122	3234	0	3600,00	N30m10b2d2-07	UB	26960	1075	0	3600,00
N50m05b2d2-08	OT	94734	322	0	13,55	N30m10b2d2-08	UB	26410	2247	0	3600,00
N50m05b2d2-09	OT	84160	116	8	8,84	N30m10b2d2-09	UB	24104	6075	0	3600,00
N50m05b2d2-10	OT	64348	127	0	3,59	N30m10b2d2-10	UB	26907	1367	0	3600,00

Fonte – a autora.

Tabela A.12 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de balanceamento de carga.

Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)	Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)
	Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO			Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO	
N10m05b2d2-01	OT	576	187	63	694,00	N100m05b2d2-01	OT	361476	65	12	1,05
N10m05b2d2-02	UB	1000	11	0	3600,00	N100m05b2d2-02	OT	456456	274	62	2608,21
N10m05b2d2-03	UB	840	205	52	3600,00	N100m05b2d2-03	OT	495072	643	91	269,78
N10m05b2d2-04	OT	574	606	143	904,79	N100m05b2d2-04	OT	319176	153	31	5,72
N10m05b2d2-05	UB	918	1225	0	3600,00	N100m05b2d2-05	OT	452980	343	89	24,66
N10m05b2d2-06	UB	1000	9	0	3600,00	N100m05b2d2-06	OT	454054	52	22	2,64
N10m05b2d2-07	UB	992	382	0	3600,00	N100m05b2d2-07	OT	448086	91	13	1,77
N10m05b2d2-08	OT	520	100	145	174,67	N100m05b2d2-08	OT	477282	128	19	8,02
N10m05b2d2-09	UB	912	545	61	3600,00	N100m05b2d2-09	OT	458151	341	75	29,74
N10m05b2d2-10	UB	845	462	2	3600,00	N100m05b2d2-10	UB	651034	538	42	3600,00
N20m05b2d2-01	UB	6988	2870	1	3600,00	N10m10b2d2-01	UB	1000	3865	0	3600,00
N20m05b2d2-02	OT	4402	1103	317	242,92	N10m10b2d2-02	UB	1000	6	0	3600,00
N20m05b2d2-03	UB	6960	234	0	3600,00	N10m10b2d2-03	UB	529	1210	11	3600,00
N20m05b2d2-04	UB	6216	61	0	3600,00	N10m10b2d2-04	UB	1000	5	0	3600,00
N20m05b2d2-05	OT	3568	71	19	2,06	N10m10b2d2-05	UB	1000	40	0	3600,00
N20m05b2d2-06	OT	4396	376	76	82,44	N10m10b2d2-06	UB	1000	140	0	3600,00
N20m05b2d2-07	UB	5052	245	15	3600,00	N10m10b2d2-07	UB	1000	1505	0	3600,00
N20m05b2d2-08	OT	4506	1026	483	694,61	N10m10b2d2-08	UB	1000	5134	0	3600,00
N20m05b2d2-09	OT	3936	135	106	93,08	N10m10b2d2-09	UB	1000	50	0	3600,00
N20m05b2d2-10	OT	4066	353	72	30,32	N10m10b2d2-10	UB	1000	214	0	3600,00
N30m05b2d2-01	OT	13700	614	101	64,37	N20m10b2d2-01	UB	7236	5129	0	3600,00
N30m05b2d2-02	OT	11127	173	30	128,28	N20m10b2d2-02	UB	7972	1406	0	3600,00
N30m05b2d2-03	OT	13936	217	11	122,30	N20m10b2d2-03	UB	7968	1441	0	3600,00
N30m05b2d2-04	UB	18240	1405	22	3600,00	N20m10b2d2-04	UB	7973	1418	0	3600,00
N30m05b2d2-05	OT	12657	179	49	6,26	N20m10b2d2-05	UB	7986	1147	0	3600,00
N30m05b2d2-06	OT	10692	28	4	0,21	N20m10b2d2-06	UB	7926	1820	0	3600,00
N30m05b2d2-07	OT	9072	160	34	4,49	N20m10b2d2-07	UB	7842	2548	0	3600,00
N30m05b2d2-08	OT	9198	31	3	0,21	N20m10b2d2-08	UB	7760	3940	0	3600,00
N30m05b2d2-09	OT	9555	45	10	0,48	N20m10b2d2-09	UB	7985	1191	0	3600,00
N30m05b2d2-10	OT	14652	48	3	0,76	N20m10b2d2-10	UB	7922	1937	0	3600,00
N50m05b2d2-01	OT	59096	213	60	42,08	N30m10b2d2-01	UB	25476	3906	0	3600,00
N50m05b2d2-02	OT	58260	168	37	7,55	N30m10b2d2-02	UB	26937	1086	0	3600,00
N50m05b2d2-03	OT	56933	320	86	244,16	N30m10b2d2-03	UB	26692	2003	0	3600,00
N50m05b2d2-04	UB	68976	539	10	3600,00	N30m10b2d2-04	UB	22450	6181	0	3600,00
N50m05b2d2-05	UB	102960	538	1	3600,00	N30m10b2d2-05	UB	23620	5674	16	3600,00
N50m05b2d2-06	OT	61600	985	86	100,78	N30m10b2d2-06	UB	16114	7138	72	3600,00
N50m05b2d2-07	UB	121122	3234	0	3600,00	N30m10b2d2-07	UB	26960	1077	0	3600,00
N50m05b2d2-08	UB	94734	322	0	3600,00	N30m10b2d2-08	UB	26410	2247	0	3600,00
N50m05b2d2-09	OT	62612	164	62	15,55	N30m10b2d2-09	UB	24116	6052	0	3600,00
N50m05b2d2-10	OT	38448	154	26	5,25	N30m10b2d2-10	UB	26907	1367	0	3600,00

Fonte – a autora.

Tabela A.13 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de corte guilhotinado para o caso com 3 estágios.

Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)	Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)
	Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO			Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO	
N10m05b2d2-01	OT	776	95	1	5,74	N100m05b2d2-01	OT	487036	55	0	0,73
N10m05b2d2-02	UB	1000	11	0	3600,00	N100m05b2d2-02	OT	477594	272	52	1410,50
N10m05b2d2-03	UB	788	280	108	3600,00	N100m05b2d2-03	OT	640302	481	14	37,78
N10m05b2d2-04	OT	762	373	21	362,31	N100m05b2d2-04	OT	528616	138	1	3,79
N10m05b2d2-05	UB	918	1225	0	3600,00	N100m05b2d2-05	OT	644680	287	18	22,62
N10m05b2d2-06	UB	1000	9	0	3600,00	N100m05b2d2-06	OT	619060	39	3	1,36
N10m05b2d2-07	UB	992	382	0	3600,00	N100m05b2d2-07	OT	596478	69	1	1,10
N10m05b2d2-08	OT	592	91	80	84,11	N100m05b2d2-08	OT	545890	114	8	3,47
N10m05b2d2-09	UB	960	289	0	3600,00	N100m05b2d2-09	OT	673077	218	2	11,05
N10m05b2d2-10	UB	850	449	0	3600,00	N100m05b2d2-10	OT	850368	235	0	7,11
N20m05b2d2-01	UB	7013	2800	0	3600,00	N10m10b2d2-01	UB	1000	3888	0	3600,00
N20m05b2d2-02	OT	5784	798	39	88,37	N10m10b2d2-02	OT	1000	6	0	315,48
N20m05b2d2-03	OT	6960	234	0	7,39	N10m10b2d2-03	UB	527	1251	11	3600,00
N20m05b2d2-04	UB	6216	61	0	3600,00	N10m10b2d2-04	UB	1000	5	0	3600,00
N20m05b2d2-05	OT	4816	47	1	0,94	N10m10b2d2-05	UB	1000	40	0	3600,00
N20m05b2d2-06	OT	4946	314	23	30,95	N10m10b2d2-06	UB	1000	140	0	3600,00
N20m05b2d2-07	OT	4866	254	28	1439,31	N10m10b2d2-07	UB	1000	1505	0	3600,00
N20m05b2d2-08	OT	6540	679	44	1162,27	N10m10b2d2-08	UB	1000	5143	0	3600,00
N20m05b2d2-09	OT	6212	86	0	3,04	N10m10b2d2-09	UB	1000	50	0	3600,00
N20m05b2d2-10	OT	5438	243	13	11,54	N10m10b2d2-10	UB	1000	1567	2	3600,00
N30m05b2d2-01	OT	16144	546	19	48,41	N20m10b2d2-01	UB	7235	5137	0	3600,00
N30m05b2d2-02	OT	14872	161	6	24,23	N20m10b2d2-02	UB	7972	1404	0	3600,00
N30m05b2d2-03	OT	17544	171	0	3,92	N20m10b2d2-03	UB	7968	1438	0	3600,00
N30m05b2d2-04	OT	19680	1245	2	115,65	N20m10b2d2-04	UB	7972	1425	0	3600,00
N30m05b2d2-05	OT	16916	166	12	4,41	N20m10b2d2-05	UB	7986	1148	0	3600,00
N30m05b2d2-06	OT	14388	22	0	0,14	N20m10b2d2-06	UB	7926	1819	0	3600,00
N30m05b2d2-07	OT	14616	152	0	3,60	N20m10b2d2-07	UB	7842	2550	0	3600,00
N30m05b2d2-08	OT	10164	31	1	0,20	N20m10b2d2-08	UB	7759	3954	0	3600,00
N30m05b2d2-09	OT	12525	42	1	0,36	N20m10b2d2-09	UB	7985	1189	0	3600,00
N30m05b2d2-10	OT	15612	43	1	0,50	N20m10b2d2-10	UB	7922	1938	0	3600,00
N50m05b2d2-01	OT	70120	184	20	11,89	N30m10b2d2-01	UB	25474	3914	0	3600,00
N50m05b2d2-02	OT	68220	156	20	6,33	N30m10b2d2-02	UB	26937	1084	0	3600,00
N50m05b2d2-03	OT	76096	225	6	14,41	N30m10b2d2-03	UB	26694	1999	0	3600,00
N50m05b2d2-04	OT	70272	527	4	56,76	N30m10b2d2-04	UB	22430	6202	0	3600,00
N50m05b2d2-05	UB	102960	538	1	3600,00	N30m10b2d2-05	UB	23636	5660	16	3600,00
N50m05b2d2-06	OT	88466	723	0	39,29	N30m10b2d2-06	UB	17210	6652	22	3600,00
N50m05b2d2-07	UB	121118	3239	0	3600,00	N30m10b2d2-07	UB	26960	1077	0	3600,00
N50m05b2d2-08	UB	94734	322	0	3600,00	N30m10b2d2-08	UB	26409	2249	0	3600,00
N50m05b2d2-09	OT	70532	154	33	12,32	N30m10b2d2-09	UB	24104	6078	0	3600,00
N50m05b2d2-10	OT	58300	140	2	4,16	N30m10b2d2-10	UB	26907	1368	0	3600,00

Fonte – a autora.

Tabela A.14 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de corte guilhotinado para o caso com 4 estágios.

Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)	Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)
	Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO			Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO	
N10m05b2d2-01	OT	576	187	63	694,00	N100m05b2d2-01	OT	361476	65	12	1,05
N10m05b2d2-02	UB	1000	11	0	3600,00	N100m05b2d2-02	OT	456456	274	62	2608,21
N10m05b2d2-03	UB	840	205	52	3600,00	N100m05b2d2-03	OT	495072	643	91	269,78
N10m05b2d2-04	OT	574	606	143	904,79	N100m05b2d2-04	OT	319176	153	31	5,72
N10m05b2d2-05	UB	918	1225	0	3600,00	N100m05b2d2-05	OT	452980	343	89	24,66
N10m05b2d2-06	UB	1000	9	0	3600,00	N100m05b2d2-06	OT	454054	52	22	2,64
N10m05b2d2-07	UB	992	382	0	3600,00	N100m05b2d2-07	OT	448086	91	13	1,77
N10m05b2d2-08	OT	520	100	145	174,67	N100m05b2d2-08	OT	477282	128	19	8,02
N10m05b2d2-09	UB	912	545	61	3600,00	N100m05b2d2-09	OT	458151	341	75	29,74
N10m05b2d2-10	UB	845	462	2	3600,00	N100m05b2d2-10	UB	651034	538	42	3600,00
N20m05b2d2-01	UB	6988	2870	1	3600,00	N10m10b2d2-01	UB	1000	3865	0	3600,00
N20m05b2d2-02	OT	4402	1103	317	242,92	N10m10b2d2-02	UB	1000	6	0	3600,00
N20m05b2d2-03	UB	6960	234	0	3600,00	N10m10b2d2-03	UB	529	1210	11	3600,00
N20m05b2d2-04	UB	6216	61	0	3600,00	N10m10b2d2-04	UB	1000	5	0	3600,00
N20m05b2d2-05	OT	3568	71	19	2,06	N10m10b2d2-05	UB	1000	40	0	3600,00
N20m05b2d2-06	OT	4396	376	76	82,44	N10m10b2d2-06	UB	1000	140	0	3600,00
N20m05b2d2-07	UB	5052	245	15	3600,00	N10m10b2d2-07	UB	1000	1505	0	3600,00
N20m05b2d2-08	OT	4506	1026	483	694,61	N10m10b2d2-08	UB	1000	5134	0	3600,00
N20m05b2d2-09	OT	3936	135	106	93,08	N10m10b2d2-09	UB	1000	50	0	3600,00
N20m05b2d2-10	OT	4066	353	72	30,32	N10m10b2d2-10	UB	1000	214	0	3600,00
N30m05b2d2-01	OT	13700	614	101	64,37	N20m10b2d2-01	UB	7236	5129	0	3600,00
N30m05b2d2-02	OT	11127	173	30	128,28	N20m10b2d2-02	UB	7972	1406	0	3600,00
N30m05b2d2-03	OT	13936	217	11	122,30	N20m10b2d2-03	UB	7968	1441	0	3600,00
N30m05b2d2-04	UB	18240	1405	22	3600,00	N20m10b2d2-04	UB	7973	1418	0	3600,00
N30m05b2d2-05	OT	12657	179	49	6,26	N20m10b2d2-05	UB	7986	1147	0	3600,00
N30m05b2d2-06	OT	10692	28	4	0,21	N20m10b2d2-06	UB	7926	1820	0	3600,00
N30m05b2d2-07	OT	9072	160	34	4,49	N20m10b2d2-07	UB	7842	2548	0	3600,00
N30m05b2d2-08	OT	9198	31	3	0,21	N20m10b2d2-08	UB	7760	3940	0	3600,00
N30m05b2d2-09	OT	9555	45	10	0,48	N20m10b2d2-09	UB	7985	1191	0	3600,00
N30m05b2d2-10	OT	14652	48	3	0,76	N20m10b2d2-10	UB	7922	1937	0	3600,00
N50m05b2d2-01	OT	59096	213	60	42,08	N30m10b2d2-01	UB	25476	3906	0	3600,00
N50m05b2d2-02	OT	58260	168	37	7,55	N30m10b2d2-02	UB	26937	1086	0	3600,00
N50m05b2d2-03	OT	56933	320	86	244,16	N30m10b2d2-03	UB	26692	2003	0	3600,00
N50m05b2d2-04	UB	68976	539	10	3600,00	N30m10b2d2-04	UB	22450	6181	0	3600,00
N50m05b2d2-05	UB	102960	538	1	3600,00	N30m10b2d2-05	UB	23620	5674	16	3600,00
N50m05b2d2-06	OT	61600	985	86	100,78	N30m10b2d2-06	UB	16114	7138	72	3600,00
N50m05b2d2-07	UB	121122	3234	0	3600,00	N30m10b2d2-07	UB	26960	1077	0	3600,00
N50m05b2d2-08	UB	94734	322	0	3600,00	N30m10b2d2-08	UB	26410	2247	0	3600,00
N50m05b2d2-09	OT	62612	164	62	15,55	N30m10b2d2-09	UB	24116	6052	0	3600,00
N50m05b2d2-10	OT	38448	154	26	5,25	N30m10b2d2-10	UB	26907	1367	0	3600,00

Fonte – a autora.

Tabela A.15 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de carregamento manual.

Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)	Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)
	Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO			Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO	
N10m05b2d2-01	OT	776	95	0	5,31	N100m05b2d2-01	OT	487036	55	0	0,67
N10m05b2d2-02	UB	548	2	0	3600,00	N100m05b2d2-02	OT	718422	144	0	7,72
N10m05b2d2-03	OT	950	52	0	4,88	N100m05b2d2-03	OT	694002	399	1	251,00
N10m05b2d2-04	OT	886	163	1	2190,08	N100m05b2d2-04	OT	531520	137	0	3,70
N10m05b2d2-05	UB	918	1225	0	3600,00	N100m05b2d2-05	OT	740510	223	0	8,21
N10m05b2d2-06	UB	480	16	0	3600,00	N100m05b2d2-06	OT	665860	32	1	241,20
N10m05b2d2-07	UB	992	382	0	3600,00	N100m05b2d2-07	OT	596478	69	1	1,85
N10m05b2d2-08	UB	772	41	0	3600,00	N100m05b2d2-08	OT	729040	55	0	1,02
N10m05b2d2-09	OT	180	4	0	0,16	N100m05b2d2-09	OT	607323	277	9	15,34
N10m05b2d2-10	UB	850	449	0	3600,00	N100m05b2d2-10	OT	850368	235	0	6,67
N20m05b2d2-01	UB	7013	2800	0	3600,00	N10m10b2d2-01	UB	1000	3884	0	3600,00
N20m05b2d2-02	UB	6143	664	11	3600,00	N10m10b2d2-02	UB	1000	6	0	3600,00
N20m05b2d2-03	OT	6960	234	0	6,55	N10m10b2d2-03	OT	630	418	0	1180,44
N20m05b2d2-04	OT	6216	61	0	21,58	N10m10b2d2-04	UB	1000	5	0	3600,00
N20m05b2d2-05	OT	4855	47	0	0,88	N10m10b2d2-05	UB	1000	40	0	3600,00
N20m05b2d2-06	UB	6011	152	0	3600,00	N10m10b2d2-06	UB	1000	140	0	3600,00
N20m05b2d2-07	OT	5664	183	2	52,04	N10m10b2d2-07	UB	1000	1505	0	3600,00
N20m05b2d2-08	UB	7288	356	0	3600,00	N10m10b2d2-08	UB	1000	5134	0	3600,00
N20m05b2d2-09	OT	6212	86	0	3,02	N10m10b2d2-09	UB	1000	50	0	3600,00
N20m05b2d2-10	OT	5998	186	0	6,47	N10m10b2d2-10	UB	1000	214	0	3600,00
N30m05b2d2-01	OT	18010	442	0	28,19	N20m10b2d2-01	UB	7217	5205	0	3600,00
N30m05b2d2-02	OT	17490	134	0	3,58	N20m10b2d2-02	UB	7972	1413	0	3600,00
N30m05b2d2-03	UB	17368	175	1	3600,00	N20m10b2d2-03	UB	7968	1449	0	3600,00
N30m05b2d2-04	OT	20568	1131	0	93,14	N20m10b2d2-04	UB	7972	1429	0	3600,00
N30m05b2d2-05	OT	20119	125	0	2,26	N20m10b2d2-05	UB	7986	1153	0	3600,00
N30m05b2d2-06	OT	14388	22	0	0,12	N20m10b2d2-06	UB	7926	1830	0	3600,00
N30m05b2d2-07	OT	14616	152	0	3,70	N20m10b2d2-07	UB	7840	2574	0	3600,00
N30m05b2d2-08	OT	11590	30	0	0,16	N20m10b2d2-08	UB	7757	3984	0	3600,00
N30m05b2d2-09	OT	14417	37	0	0,28	N20m10b2d2-09	UB	7985	1195	0	3600,00
N30m05b2d2-10	OT	15679	43	0	0,48	N20m10b2d2-10	UB	7922	1947	0	3600,00
N50m05b2d2-01	UB	81092	138	0	3600,00	N30m10b2d2-01	UB	25455	3955	0	3600,00
N50m05b2d2-02	OT	86440	107	0	3,32	N30m10b2d2-02	UB	26937	1087	0	3600,00
N50m05b2d2-03	OT	85461	151	0	7,35	N30m10b2d2-03	UB	26690	2015	0	3600,00
N50m05b2d2-04	OT	73338	489	0	36,34	N30m10b2d2-04	UB	22362	6272	0	3600,00
N50m05b2d2-05	UB	103248	529	0	3600,00	N30m10b2d2-05	UB	24722	4075	6	3600,00
N50m05b2d2-06	OT	88466	723	0	35,26	N30m10b2d2-06	OT	18901	5775	1	2359,62
N50m05b2d2-07	UB	121074	3252	0	3600,00	N30m10b2d2-07	UB	26960	1078	0	3600,00
N50m05b2d2-08	OT	94734	322	0	11,85	N30m10b2d2-08	UB	26404	2269	0	3600,00
N50m05b2d2-09	OT	92850	84	0	5,12	N30m10b2d2-09	UB	23850	6578	0	3600,00
N50m05b2d2-10	OT	64348	127	0	3,42	N30m10b2d2-10	UB	26907	1371	0	3600,00

Fonte – a autora.

Tabela A.16 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de separação.

Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)	Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)
	Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO			Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO	
N10m05b2d2-01	OT	620	176	39	57,76	N100m05b2d2-01	OT	487036	55	0	0,671162
N10m05b2d2-02	UB	1000	11	0	3600,00	N100m05b2d2-02	OT	662448	185	2	10,50
N10m05b2d2-03	UB	744	335	183	3600,00	N100m05b2d2-03	OT	664386	446	6	32,30
N10m05b2d2-04	OT	766	368	20	30,19	N100m05b2d2-04	OT	531520	137	0	3,71
N10m05b2d2-05	UB	918	1252	4	3600,00	N100m05b2d2-05	OT	658020	282	15	17,75
N10m05b2d2-06	UB	984	408	2	3600,00	N100m05b2d2-06	OT	671674	31	0	0,46
N10m05b2d2-07	UB	992	382	0	3600,00	N100m05b2d2-07	OT	673895	52	0	0,64
N10m05b2d2-08	OT	672	71	27	20,51	N100m05b2d2-08	OT	729040	55	0	1,01
N10m05b2d2-09	UB	960	289	0	3600,00	N100m05b2d2-09	OT	714327	180	0	8,30
N10m05b2d2-10	UB	850	449	0	3600,00	N100m05b2d2-10	OT	850368	235	0	6,80
N20m05b2d2-01	UB	7013	2800	0	3600,00	N10m10b2d2-01	UB	1000	3885	0	3600,00
N20m05b2d2-02	OT	5687	826	54	147,64	N10m10b2d2-02	UB	1000	6	0	3600,00
N20m05b2d2-03	UB	6960	234	0	3600,00	N10m10b2d2-03	OT	630	418	0	1173,90
N20m05b2d2-04	UB	6216	61	0	3600,00	N10m10b2d2-04	UB	1000	5	0	3600,00
N20m05b2d2-05	OT	4855	47	0	0,85	N10m10b2d2-05	UB	1000	40	0	3600,00
N20m05b2d2-06	OT	5091	293	17	2632,10	N10m10b2d2-06	UB	1000	140	0	3600,00
N20m05b2d2-07	UB	5052	245	15	3600,00	N10m10b2d2-07	UB	1000	1505	0	3600,00
N20m05b2d2-08	UB	6426	721	57	3600,00	N10m10b2d2-08	UB	1000	5140	0	3600,00
N20m05b2d2-09	OT	6212	86	0	2,88	N10m10b2d2-09	UB	1000	50	0	3600,00
N20m05b2d2-10	OT	5998	186	3	6,67	N10m10b2d2-10	UB	1000	214	0	3600,00
N30m05b2d2-01	OT	16200	545	17	46,43	N20m10b2d2-01	UB	7218	5204	0	3600,00
N30m05b2d2-02	OT	17490	134	0	3,32	N20m10b2d2-02	UB	7972	1415	0	3600,00
N30m05b2d2-03	OT	16224	192	2	799,64	N20m10b2d2-03	UB	7968	1451	0	3600,00
N30m05b2d2-04	OT	19680	1245	2	109,92	N20m10b2d2-04	UB	7972	1432	0	3600,00
N30m05b2d2-05	OT	18180	151	4	3,20	N20m10b2d2-05	UB	7986	1154	0	3600,00
N30m05b2d2-06	OT	11472	28	1	0,15	N20m10b2d2-06	UB	7926	1835	0	3600,00
N30m05b2d2-07	OT	14616	152	0	3,70	N20m10b2d2-07	UB	7840	2573	0	3600,00
N30m05b2d2-08	OT	10164	31	1	0,16	N20m10b2d2-08	UB	7757	3982	0	3600,00
N30m05b2d2-09	OT	14417	37	0	0,25	N20m10b2d2-09	UB	7985	1198	0	3600,00
N30m05b2d2-10	OT	15679	43	0	0,46	N20m10b2d2-10	UB	7922	1952	0	3600,00
N50m05b2d2-01	OT	76472	157	7	15,33	N30m10b2d2-01	UB	25452	3962	0	3600,00
N50m05b2d2-02	OT	81140	125	1	3,98	N30m10b2d2-02	UB	26937	1090	0	3600,00
N50m05b2d2-03	OT	75973	225	7	12,49	N30m10b2d2-03	UB	26690	2012	0	3600,00
N50m05b2d2-04	OT	73338	489	0	36,06	N30m10b2d2-04	UB	22376	6256	0	3600,00
N50m05b2d2-05	UB	103248	529	0	3600,00	N30m10b2d2-05	OT	25260	3197	0	1335,75
N50m05b2d2-06	OT	88466	723	0	35,25	N30m10b2d2-06	OT	18501	6046	5	2587,08
N50m05b2d2-07	UB	121072	3254	0	3600,00	N30m10b2d2-07	UB	26960	1083	0	3600,00
N50m05b2d2-08	OT	94734	322	0	11,75	N30m10b2d2-08	UB	26402	2274	0	3600,00
N50m05b2d2-09	OT	85796	110	5	7,17	N30m10b2d2-09	UB	24066	6158	0	3600,00
N50m05b2d2-10	OT	57735	142	3	3,98	N30m10b2d2-10	UB	26907	1377	0	3600,00

Fonte – a autora.

Tabela A.17 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de agrupamento.

Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)	Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)
	Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO			Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO	
N10m05b2d2-01	OT	776	95	0	4,99	N100m05b2d2-01	OT	487036	55	0	0,67
N10m05b2d2-02	UB	1000	11	0	3600,00	N100m05b2d2-02	OT	662448	185	2	9,78
N10m05b2d2-03	OT	950	52	0	4,57	N100m05b2d2-03	OT	707316	377	0	18,00
N10m05b2d2-04	OT	916	119	0	4,40	N100m05b2d2-04	OT	478764	147	4	3,79
N10m05b2d2-05	UB	918	1225	0	3600,00	N100m05b2d2-05	OT	740510	223	0	7,88
N10m05b2d2-06	OT	1000	9	0	18,74	N100m05b2d2-06	OT	671674	31	0	0,45
N10m05b2d2-07	UB	992	382	0	3600,00	N100m05b2d2-07	OT	673895	52	0	0,67
N10m05b2d2-08	OT	772	41	0	7,90	N100m05b2d2-08	OT	729040	55	0	1,00
N10m05b2d2-09	OT	960	289	0	65,85	N100m05b2d2-09	OT	714327	180	0	7,75
N10m05b2d2-10	OT	850	449	0	169,98	N100m05b2d2-10	OT	850368	235	0	6,57
N20m05b2d2-01	OT	7013	2800	0	2666,60	N10m10b2d2-01	UB	1000	4308	0	3600,00
N20m05b2d2-02	OT	6528	507	0	39,48	N10m10b2d2-02	OT	1000	6	0	3600,00
N20m05b2d2-03	OT	6960	234	0	6,91	N10m10b2d2-03	OT	630	418	0	958,89
N20m05b2d2-04	OT	6216	61	0	7,39	N10m10b2d2-04	UB	1000	5	0	3600,00
N20m05b2d2-05	OT	4855	47	0	0,84	N10m10b2d2-05	UB	1000	40	0	3600,00
N20m05b2d2-06	OT	6011	152	0	9,18	N10m10b2d2-06	UB	1000	140	0	3600,00
N20m05b2d2-07	OT	5668	181	1	1265,68	N10m10b2d2-07	UB	1000	1569	0	3600,00
N20m05b2d2-08	OT	7288	356	0	41,56	N10m10b2d2-08	UB	1000	5678	0	3600,00
N20m05b2d2-09	OT	5722	114	6	4,37	N10m10b2d2-09	OT	1000	50	0	51,49
N20m05b2d2-10	OT	5998	186	1	6,22	N10m10b2d2-10	OT	1000	214	0	590,60
N30m05b2d2-01	OT	18010	442	0	25,80	N20m10b2d2-01	UB	7162	5542	0	3600,00
N30m05b2d2-02	OT	17490	134	0	3,19	N20m10b2d2-02	UB	7971	1494	0	3600,00
N30m05b2d2-03	OT	17544	171	0	3,58	N20m10b2d2-03	UB	7968	1535	0	3600,00
N30m05b2d2-04	OT	19680	1245	2	106,38	N20m10b2d2-04	UB	7970	1520	0	3600,00
N30m05b2d2-05	OT	20119	125	0	2,32	N20m10b2d2-05	UB	7986	1226	0	3600,00
N30m05b2d2-06	OT	14388	22	0	0,13	N20m10b2d2-06	UB	7922	1928	0	3600,00
N30m05b2d2-07	OT	14616	152	0	3,24	N20m10b2d2-07	UB	7834	2676	0	3600,00
N30m05b2d2-08	OT	11590	30	0	0,18	N20m10b2d2-08	UB	7737	4283	0	3600,00
N30m05b2d2-09	OT	14417	37	0	0,27	N20m10b2d2-09	UB	7983	1260	0	3600,00
N30m05b2d2-10	OT	15679	43	0	0,46	N20m10b2d2-10	UB	7916	2090	0	3600,00
N50m05b2d2-01	OT	81092	138	0	4,68	N30m10b2d2-01	UB	25361	4160	0	3600,00
N50m05b2d2-02	OT	86440	107	0	3,25	N30m10b2d2-02	UB	26934	1163	0	3600,00
N50m05b2d2-03	OT	85461	151	0	6,91	N30m10b2d2-03	UB	26674	2121	0	3600,00
N50m05b2d2-04	OT	73338	489	0	33,12	N30m10b2d2-04	OT	22318	6326	0	3291,63
N50m05b2d2-05	OT	103248	529	0	52,96	N30m10b2d2-05	OT	25260	3197	0	3600,00
N50m05b2d2-06	OT	88466	723	0	35,68	N30m10b2d2-06	OT	18917	5758	0	2114,54
N50m05b2d2-07	UB	120740	3529	0	3600,00	N30m10b2d2-07	UB	26956	1148	0	3600,00
N50m05b2d2-08	OT	94734	322	0	11,64	N30m10b2d2-08	UB	26378	2381	0	3600,00
N50m05b2d2-09	OT	92850	84	0	4,76	N30m10b2d2-09	UB	23858	6561	0	3600,00
N50m05b2d2-10	OT	58300	140	2	3,84	N30m10b2d2-10	UB	26901	1457	0	3600,00

Fonte – a autora.

Tabela A.18 – Resultados obtidos para as instâncias considerando o PCUC com a restrição de orientação.

Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)	Instância	Solução		Cortes		Tempo (s)
	Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO			Tipo	V.F.O.	rel-3PEO	3PEO	
N10m05b2d2-01	OT	980	5	0	277,82	N100m05b2d2-01	OT	574268	39	0	2,256162
N10m05b2d2-02	UB	1000	0	0	3600,00	N100m05b2d2-02	OT	808818	84	0	20,74
N10m05b2d2-03	UB	998	2	0	3600,00	N100m05b2d2-03	OT	793476	230	0	24,72
N10m05b2d2-04	OT	946	62	0	41,53	N100m05b2d2-04	OT	581812	122	1	7,74
N10m05b2d2-05	UB	996	0	0	3600,00	N100m05b2d2-05	OT	853576	123	0	101,72
N10m05b2d2-06	OT	1000	0	0	2693,36	N100m05b2d2-06	OT	718474	23	0	2,12
N10m05b2d2-07	UB	1000	0	0	3600,00	N100m05b2d2-07	OT	740577	35	0	2,18
N10m05b2d2-08	OT	880	9	0	369,18	N100m05b2d2-08	OT	826218	27	0	3,23
N10m05b2d2-09	OT	984	84	0	874,51	N100m05b2d2-09	OT	799344	110	0	78,55
N10m05b2d2-10	OT	1000	0	0	3,96	N100m05b2d2-10	OT	869386	203	0	50,25
N20m05b2d2-01	UB	7668	929	0	3600,00	N10m10b2d2-01	OT	1000	0	0	20,99
N20m05b2d2-02	OT	7580	118	0	919,00	N10m10b2d2-02	OT	1000	0	0	399,10
N20m05b2d2-03	OT	7440	125	0	14,07	N10m10b2d2-03	UB	846	6	0	3600,00
N20m05b2d2-04	OT	6788	26	0	19,58	N10m10b2d2-04	UB	1000	0	0	3600,00
N20m05b2d2-05	OT	6763	6	0	20,42	N10m10b2d2-05	UB	1000	0	0	3600,00
N20m05b2d2-06	OT	7131	35	0	1265,57	N10m10b2d2-06	UB	1000	1	0	3600,00
N20m05b2d2-07	OT	6772	70	0	38,14	N10m10b2d2-07	UB	1000	0	0	3600,00
N20m05b2d2-08	OT	7596	199	0	995,31	N10m10b2d2-08	UB	1000	0	0	3600,00
N20m05b2d2-09	OT	6810	50	0	7,19	N10m10b2d2-09	UB	1000	3	0	3600,00
N20m05b2d2-10	OT	5998	186	0	31,62	N10m10b2d2-10	UB	1000	0	0	3600,00
N30m05b2d2-01	OT	23086	139	0	21,30	N20m10b2d2-01	UB	7562	3083	0	3600,00
N30m05b2d2-02	OT	21181	81	0	6,24	N20m10b2d2-02	UB	8000	9	0	3600,00
N30m05b2d2-03	OT	20760	114	0	10,96	N20m10b2d2-03	UB	7992	409	0	3600,00
N30m05b2d2-04	OT	23448	660	0	357,00	N20m10b2d2-04	UB	7996	207	0	3600,00
N30m05b2d2-05	OT	22860	74	0	4,93	N20m10b2d2-05	UB	8000	7	0	3600,00
N30m05b2d2-06	OT	14388	22	0	0,22	N20m10b2d2-06	UB	7992	239	0	3600,00
N30m05b2d2-07	OT	16768	129	0	6,75	N20m10b2d2-07	UB	7944	901	0	3600,00
N30m05b2d2-08	OT	14632	24	0	0,21	N20m10b2d2-08	UB	7990	184	0	3600,00
N30m05b2d2-09	OT	17387	23	0	0,69	N20m10b2d2-09	UB	8000	27	0	3600,00
N30m05b2d2-10	OT	17295	34	0	2,34	N20m10b2d2-10	UB	7980	538	0	3600,00
N50m05b2d2-01	OT	108200	21	0	8,70	N30m10b2d2-01	UB	26146	2277	0	3600,00
N50m05b2d2-02	OT	95436	74	0	7,79	N30m10b2d2-02	UB	26984	295	0	3600,00
N50m05b2d2-03	OT	108085	31	0	116,32	N30m10b2d2-03	UB	26798	1319	0	3600,00
N50m05b2d2-04	OT	94014	221	0	189,14	N30m10b2d2-04	UB	25780	1961	0	3600,00
N50m05b2d2-05	UB	114096	242	0	3600,00	N30m10b2d2-05	OT	25480	2813	0	2118,73
N50m05b2d2-06	OT	106036	393	0	85,48	N30m10b2d2-06	OT	23869	2319	0	2752,47
N50m05b2d2-07	UB	124304	590	0	3600,00	N30m10b2d2-07	UB	26986	376	0	3600,00
N50m05b2d2-08	OT	101502	251	0	72,94	N30m10b2d2-08	UB	26578	1624	0	3600,00
N50m05b2d2-09	OT	104932	40	0	16,15	N30m10b2d2-09	UB	25688	2937	0	3600,00
N50m05b2d2-10	OT	70396	110	1	118,97	N30m10b2d2-10	UB	26964	556	0	3600,00

Fonte – a autora.