Universidade Federal de Goiás
Departamento de Matemática
Regional - Catalão
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

# Modelagem por Meio de Funções Elementares

**Carlos Alberto Soares**

Catalão
2014

sistema de bibliotecas ufg

UFG

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:** **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

**2. Identificação da Tese ou Dissertação**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Autor (a): | Carlos Alberto Soares | | | | |
| E-mail: | Matcarlinhos101@gmail.com | | | | |
| Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [ x ]Sim [ ] Não | | | | | |
| Vínculo empregatício do autor | Secretária de Estado da Educação do Estado de Minas Gerais | | | | |
| Agência de fomento: | Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior | Sigla: | Capes | | |
| País: | | UF: | | CNPJ: | 0088934/0001-08 |
| Título: | Modelagem por meio de funções elementares | | | | |
| | | | | | |
| Palavras-chave: | Ensino básico da Matemática, função afim, função quadrática, aplicações financeiras. | | | | |
| Título em outra língua: | Modeling by Elementary Functions | | | | |
| | | | | | |
| Palavras- chave em outra língua | Basic Mathematics Teaching, affine function, quadratic function, financial investments | | | | |
| | | | | | |
| Área de concentração: | Matemática do Ensino Básico | | | | |
| Data defesa: | 06/08/2014 | | | | |
| Programa de Pós-Graduação: | PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática | | | | |
| Orientador (a): | Plinio Jose Oliveira | | | | |
| E-mail: | Plinio127@gmail.com | | | | |
| Co-orientador (a):* | | | | | |
| E-mail: | | | | | |

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento [ x ] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Carlos Alberto Soares

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 25 /08 /2014

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

**CARLOS ALBERTO SOARES**

# Modelagem por meio de Funções Elementares

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Professional em Matemática-PROFMAT, da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Área de concentração**: Matemática do Ensino Básico.

**Orientador:** Prof. Dr. Plínio José Oliveira

Catalão-GO
2014

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)**
**GPT/BSCAC/UFG**

S676m

Soares, Carlos Alberto.
Modelagem por meio de Funções Elementares [manuscrito] / Carlos Alberto Soares. - 2014.
xv, 79 f. : il., figs, tabs.

Orientador: Profª. Drª. Plínio José Oliveira
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,Regional Catalão, Departamento de Matematica, 2014.
Bibliografia.

1. Ensino básico de matemática. 2.Função quadrática. 3. Aplicações financeiras. I.Título.

CDU: 517.5

# Carlos Alberto Soares

# Modelagem por Meio de Funções Elementares

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Departamento de Matemática da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 06/08/2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

**Prof. Dr. Plínio José Oliveira**
Departamento de Matemática da Regional Catalão - UFG
Presidente da Banca

**Prof. Dr. Manoel Moraes Junqueira**
Departamento de Ma temática - Morrinhos

**Prof. Dr. Donald Mark Santee**
Departamento de Matemática da Regional Catalão - UFG

Todos os direitos reservados. È proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Carlos Alberto Soares graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia, e pós-graduado lato sensu pela Universidade Federal de Uberlândia, atualmente mestrando do curso PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática pela Universidade Federal de Goiás – Campus Catalão.

# Dedicatória

O Deus, refúgio e Fortaleza...

... aos meus pais, João Soares dos Santos e Maria da Conceição Soares, pela maneira que educaram me , mostrando-me virtudes da humildade, respeito e persistência ... Aos meus irmãos pelos companheirismos e ensinamentos....

... a meus amigos do Mestrado em especial a Cleiton Dias, Marcelo Simplício e Gilmar Nascimento que estiveram do meu lado, sempre me apoiando, confortando com incentivos e admiração ....

... a meus filhos Geovane Henrique e Lara Fernanda, para que esta conquista sirva de inspiração para eles....

... aos professores do mestrado, em especial a Plínio J. Oliveira, pela paciência e orientação.

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, que a todo o momento me dá forças e abre minhas portas.

A meu pai, que com muita luta investiu nos meus estudos, e com muita dificuldade sempre manteve a casa e ordem, esforçando ao máximo para que a busca de meu sonho e meus irmãos fossem realizadas.

A minha mãe... sei que me mantém em todas suas orações, que me ensinou a confiar em Deus e não desistir do meus sonhos, a sua dedicação comigo e meus irmãos, seja o exemplo para que eu use com meus filhos.

Aos meus amigos do mestrado pelo prazer da convivência e a amizade construída.

Aos professores Fernando Kennedy, Juliana Bernardes, Marcio Rocha, Paulo Roberto, Plínio José Oliveira, Porfírio Junior e Tiago Alves, pela importância na vida acadêmica.

A coordenadora do mestrado Elida, pelo suporte, orientação e apoio durante esta jornada.

A secretaria que sempre nos atendeu de forma simpática e atenciosa.

Aos agentes do campus e aos funcionários da cantina, que sempre nos atendeu forma educada e alegre.

A CAPES pelo suporte financeiro durante o mestrado

Em especial ao meu orientador o professor Plínio J. Oliveira pela paciência na orientação e incentivo que tornaram possível a conclusão deste trabalho.

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal propor uma abordagem diferenciada para o ensino das funções elementares no contexto do ensino médio, preocupando-se com a compreensão dos conceitos, definições e caracterizações das funções elementares. A proposta didático-pedagógica apresenta a modelagem matemática a partir de simuladores referentes a vários temas do cotidiano retirados da internet, o qual estimulam os alunos a "enxergarem" as funções escondidas, e melhorar o ensino aprendizagem. Com o intuito de tornar a matemática mais interessante para o aluno, faz se necessário vivenciar aplicações na prática, simulando situações reais da natureza e confrontando os cálculos com resultados teóricos, para se ter a certeza que os conceitos e definições das funções se tornaram um conhecimento sólido.

**Palavra-chave:** Ensino básico da Matemática, função afim, função quadrática, aplicações financeiras.

# Abstract

This work aims to propose a different approach for teaching elementary functions in high school context, worrying about concepts understanding, definitions elementary functions characterizations. The didactic-pedagogic proposal presents a mathematical modeling from different regarding daily themes simulators from internet, which encourage students “to see”, hidden functions, and improve learning and teaching. In order to do math more interesting for student, it’s necessary to experience the practical applications, simulating real nature situations and confronting results with theoretical calculations, to do sure those concepts and functions definitions have become a solid knowledge.



**Word–Key:** Basic Mathematics Teaching, affine function, quadratic function, financial investments

# Lista de Figuras

Figura 4.1.1 Taxa de alcoolemia em função do tempo ..... 34
Figura 4.1.2 Tela do Geogebra com caixa de diálogo ..... 35
Figura 4.1.3 Tela do Geogebra com o gráfico Ta(g/l) x t(h).....35
Figura 4.2.1 Tela do simulador de lançamento de projétil .....37
Figura 4.2.2 Tela do simulador de lançamento oblíquo .....38
Figura 4.2.3 Componentes da velocidade .....39
Figura 3.2.4 Concavidade das parábolas .....42
Figura 4.2.5 lançamento obliquo sem resistência do ar .....45
Figura 4.2.6 Gráfico do lançamento do projétil..... .....46
Figura 4.2.7 Gráfico do lançamento de projétil com vértices e raízes.....47
Figura 4.2.8 Gráfico componente vertical pela componente horizontal do movimento.....48
Figura 4.2.9 Gráfico da componente vertical pelo tempo.....48
Figura 4.2.10 Trajetória da partícula partindo da origem .....50
Figura 4.2.11 Decomposição das forças de arrasto, peso e velocidade .....52
Figura 4.2.12 componente vertical pelo tempo .....57
Figura 4.2.13 O alcance do projétil no eixo horizontal pela vertical .....57
Figura 4.2.14 Componente horizontal pelo tempo .....57
Figura 4.2.15: Sequência de comandos para construção dos gráficos do exemplo1 .....58
Figura 4.2.16: Os gráficos referentes aos comandos da Fig.(4.2.15).....58
Figura 4.2.15 Trajetória Y(m) pelo t(s) para vários coeficientes de arrasto .....59
Figura 4.2.16Trajetória X(m) pelo t(s) para vários coeficientes de arrasto .....59
Figura 4.2.17 Trajetória Y(m) pelo X(m) para vários coeficientes de arrasto.....59
Figura 4.2.18 Janela do Editor FreeMat com os comandos.....61
Figura 4.2.19 Janela de resolução dos polinômios do exemplo 3.....61
Figura 4.2.20 Trajetória Y(m) pelo t(s) para o exemplo 3 .....62
Figura 4.2.21 Trajetória X(m) pelo t(s) para o exemplo 3.....62
Figura 4.2.22 Trajetória Y(m) pelo X(m) para o exemplo 3 .....62
Figura 4.2.23 Trajetória da partícula partindo da origem.....63
Figura 4.2.24 A solução do polinômio do 4º grau.....68
Figura 4.2.25 Trajetória X(m) pelo t(s) para o exemplo 4.....69
Figura 4.2.26 Trajetória Y(m) pelo t(s) para o exemplo 4 .....69
Figura 4.2.27 Trajetória Y(m) pelo X(m) para o exemplo 4 .....69

Figura 4.2.28 Trajetória  Y(m) pelo t(s) para o exemplo 5 para k = 0,00001.....70
Figura 4.2.29Trajetória  Y(m) pelo t(s) para o exemplo 5 para k= 0,008 .....70
Figura 4.3.1 Gráfico do fator em relação a taxa.....74

# Tabelas

Tabela 4.1.1 Taxa de alcoolemia e tempo de eliminação no organismo.....30
Tabela 4.1.2 Decrescimento da $T_a$ (g/l) em função do tempo.....31
Tabela 4.2.1 Alcance horizontal e vertical em relação ao tempo.....38
Tabela 4.2.2 Diferença de dois termos consecutivos.....39
Tabela 4.3.1Autor Montante de séries uniformes.....73

# Listas de abreviaturas e símbolos

CNT - Conselho Nacional de Transito

FFCLUSP - Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo

UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas

UNESCO - Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura

OEA - Organização dos Estados Americanos.

PUC-RJ - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

IMECC- Instituto de Matemática, Estatística e Computação Cientifica.

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

PA - Progressão Aritmética

$T_a$ - Taxa de alcoolemia

PCN's - Nos Parâmetros Curriculares Nacionais

BB - Banco do Brasil

# Sumário


I - Introdução ..... 17

II - Fundamentação Teórica ..... 19

III - PCN's – $PCN_+$ ..... 23

IV- Modelagem Por Meio de Funções Elementares ..... 26

4.1. Modelagem Por Função Afim ..... 28

4.1.1. Concentração de Álcool no Sangue ..... 28

4.1.2. Alcoolemia ..... 28

4.1.3. Desenvolvimento Matemático do problema ..... 29

4.1.3. Função Afim ..... 32

4.1.4. Teorema Fundamental da Proporcionalidade: ..... 32

4.1.5. Teorema: Caracterização da Função Afim ..... 33

4.1.6. Gráfico da Função Afim ..... 34

4.2. Modelagem Por Função Quadrática ..... 36

4.2.1. Lançamento Oblíquo sem resistência do ar ..... 36

4.2.2. Desenvolvimento do Modelo Matemático ..... 37

4.2.3. Função Quadrática ..... 41

4.2.4. Teorema da Caracterização da função Quadrática ..... 42

4.3. Lançamento oblíquo com resistência do Ar ..... 48

4.3.1 Força de Arrasto ..... 49

4.3.2. Desenvolvimento Matemático do problema ..... 50

4.3.2.1. Movimento de translação do projétil supondo a resistência do ar proporcional a da velocidade $(F = k.v)$ ..... 50

4.3.2.2. Componente do Movimento Horizontal ..... 50

4.3.2.3. Componente do Movimento na Vertical ..... 52

4.3.2.4. Movimento de translação do projétil supondo a resistência do ar proporcional ao quadrado da velocidade $(F = k.v^2)$ ..... 63

4.3.2.5. Movimento Horizontal ..... 63

4.3.2.6. Movimento componente vertical ..... 64

4. Modelagem Por Função Exponencial ..... 71

4.4.1 Aplicações futuras ..... 71

4.4.2. Desenvolvimento do Modelo ..... 71

4.3.2. Definição Função Exponencial ..... 74

4.3.3 Função do Tipo Exponencial .....75
V Conclusão .....77
Referência Bibliográfica: .....78

# CAPÍTULO I

## I - Introdução

Este trabalho tem objetivo de desenvolver a ideia de que a Matemática pode ser utilizada para resolver situação-problema que estão em nosso cotidiano, o qual será abordado nesta dissertação. Estudaremos problemas tais como concentração de álcool no sangue, lançamento oblíquo, aplicações financeiras futuras, empréstimos etc. Neste trabalho procura-se obter a função matemática que modela esses problemas, buscando meios para que o aluno aprenda matemática de uma forma prazerosa, lúdica, em sala de aula, através de dados colhidos de fonte fornecida, levando-o a promover a construção dos conceitos matemáticos.

Ensinar matemática de modo que o aluno aprenda de forma efetiva é um desafio de todos profissionais da educação. Trazer para sala de aula novas metodologias que possam atrair a atenção do aluno, levando-o a compreender os conceitos, definições e despertando o interesse e prazer pelo conhecimento da matemática que é a motivação deste trabalho que tem compromisso com a melhoria da qualidade do ensino aprendizagem.

Assim, veio a necessidade de inovar, ou seja, instituir uma nova metodologia de ensino de matemática menos alienada e mais comprometida com as realidades dos indivíduos e da sociedade, com isso buscando através de modelos matemáticos desenvolvido a partir de um tema social, econômico, histórico, trabalhados interdisciplinaridade com as outras áreas do conhecimento, levando a formar um cidadão com conhecimento sólido, capaz de tomar decisões, explicar e entender os conceitos matemáticos e outros, participando do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças.

O capítulo II apresenta aspectos teóricos e a importância de desenvolver uma proposta de ensino utilizando a Modelagem Matemática na Perspectiva Sócia-Crítica como uma alternativa de ensino.

No capítulo III, foi feita a abordagem dos PCNs no ensino de matemática através da modelagem e as justificativas para a sua utilização em sala de aula, com intuito de desenvolver um melhor ensino aprendizagem.

No capítulo IV é feita a escolha de um tema do cotidiano, no qual faz se uso de simuladores hipotéticos encontrados na internet ou aplicativos fornecidos gratuitamente, a seguir faz–se a delimitação do problema, a coleta dos dados e, finalmente o desenvolvimento matemático da atividade para assim, explicar a função matemática que foi resultado deste simulador hipotético.

No capítulo V é a conclusão do trabalho realizado e subsequentemente apresenta-se algumas considerações acerca do mesmo.

# CAPÍTULO II

## II - Fundamentação Teórica

O termo ‘modelagem matemática’ neste trabalho é entendido como processo para descrever, formular, modelar e resolver uma situação problema de alguma área do conhecimento. Há vestígio que o termo modelagem matemática passou a ser usado entre 1958 a 1965 nos EUA em trabalhos realizados pelo School Mathematics Study Group (SMSG)

Na década de 60, discussões sobre modelagem na educação matemática no âmbito internacional, foi proposto pelo movimento “ utilitarista”, aplicação prática do conhecimento para a ciência e a sociedade, sendo assim, primordial para a formação de novos grupos de pesquisadores que tinham como meta ensinar matemática de modo que seja útil, envolvendo o estudante com situações do cotidiano, a fim de desenvolver a habilidade para aplicação dos recursos matemáticos para modelagem de problemas.

Segundo BIEMBENGUT (2009), sob a influência desse movimento a modelagem matemática, na educação matemática tem como referência alguns pesquisadores, que foram fundamentais para a consolidação da modelagem na Educação Matemática no Brasil, são eles:, Ubiratan D’ Ambrósio, Aristides C. Barreto, Rodney C. Bassanezi e outros que no final da década de 70 e inicio da década de 80, iniciaram um movimento pela difusão da modelagem matemática, e pela conquista de novos adeptos, e assim emergir a linha de pesquisa de modelagem no ensino brasileiro.

Esses pesquisadores estimularam de forma considerável a implantação da modelagem no ensino brasileiro. Suas propostas, como uso da modelagem ou construção de modelos em suas práticas de sala de aula, de como se faz um modelo matemático e como se ensina matemática ao mesmo tempo, permitiram vir á tona área de pesquisa de modelagem matemática no ensino brasileiro. E, ao longo do tempo muito trabalhos vêm sendo desenvolvidos em cima destas propostas iniciais.

Atualmente, não há um relato preciso de quantos educadores utilizam essas idéias e propostas em sala de aula, mesmo assim ainda há muitos educadores que acreditam e sabem utilizá-las crendo na possibilidade de ter um ensino melhor.

O que existe no momento e se tem relato são: os trabalhos publicados que estão em bibliotecas ou em acervos públicos, alguns encontros ocasionais como os congressos e os cursos de capacitação.

Mediante a importância da introdução de Modelagem Matemática no ensino, é necessário escrever sobre os precussores dessa linha de pesquisa, para fundamentação teórica desse trabalho.

Ubiratan D'Ambrosio nasceu em São Paulo, no ano de 1932. Licenciado e Bacharel em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo – FFCLUSP, doutor pela Escola de Engenharia de São Carlos/SP e foi Pesquisador Associado para a Brown University, em Rhode Island, Estados Unidos na década de 60.

Na década de 70 ao retornar ao Brasil, para trabalhar na UNICAMP, implantou propostas de educação matemática, semelhantes as ocorridas nos Estados Unidos e Europa com o apoio da UNESCO e da OEA. Entre elas destaca a criação do 1º Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática na UNICAMP. Esse mestrado teve ingresso nos anos de 1975 a 1978 com o mesmo molde do modelo proposto na Universidade de Roskilde na Dinamarca, ou seja, um modelo não linear dando a origem a trabalhos em modelagem e Etnomatemática. Com isso o professor Ubiratan D' Ambrósio se configura como mais importante precursor do movimento da Modelagem Matemática no cenário brasileiro.

Segundo BIEMBENGUT (2009), Aristides C. Barreto em 1960 quando cursava engenharia adquiriu conhecimento sobre modelagem matemática. Na década de 70, quando passou a ser professor na PUC-RIO, procurou a utilizar-se de modelos como estratégia de ensino nas disciplinas que ministrava como Fundamentos da Matemática, Prática de Ensino e Cálculo Diferencial Integral. Mas em 1976, trabalhando com seus alunos de engenharia desenvolveu vários modelos em áreas específicas como Ecologia, Biologia, dentre outras.

Esses trabalhos com seus alunos levaram-no a crer que a modelagem no ensino tornava os estudantes mais motivados e interessados, estimulando-os a criatividade e o espírito crítico.

Na década de 80, Barreto passou a interpretar e produzir textos literários em prosa e verso, com destaque em letras de música. Alguns de seus trabalhos foram publicados através de artigos e apresentados em eventos. Devido a repercussão desses trabalhos, o professor D' Ambrosio, convidou-o para ser palestrante na UNICAMP, o qual Rodney C. Bassanezi teve o primeiro contato com o tema modelagem matemática.

Nesse mesmo período, Rodney Carlos Bassanezi coordenava um Curso, promovido pela IMECC-UNICAMP, para 30 professores de Cálculo Diferencial Integral, de diversas

Instituições de Educação Superior da região sul do Brasil com duração de uma semana. Nesse curso foi proposto aos participantes que apresentassem um problema que envolvesse cálculo diferencial e integral para solução. Constatou-se que os problemas apresentados se encontravam nos livros textos, sem criatividade. Assim Bassanezi aproveitou o momento para propor a modelagem matemática, de forma peculiar, para resolução de problemas de biologia aplicados ao calculo diferencial integral.

Nesta mesma época a convite da Universidade Estadual de Guarapuava-PR, os professores da UNICAMP, para ministrar um curso pós-graduação, o qual Bassanezzi era o coordenador. Ele aproveita este curso para propor aos participantes algo inovador, fazer uma visita às empresas da cidade, para ter contato com questões do cotidiano, e levantar problemas de interesse dessas empresas, tais como a fabricação de papel, suinocultura, dentre outras, para serem analisados afim de dar uma solução aos mesmos.

A partir desse trabalho de campo, estimulou a realização do 1º curso de Pós Graduação em Modelagem Matemática, e resultando, a realização de dezenas de outros cursos de pós-graduação e formação continuada em diversas instituições de educação pelo Brasil, tais como secretarias estaduais, municipais e federais sob a sua coordenação.

Nesse trabalho aborda-se um estudo sobre a Modelagem Matemática através de funções elementares e suas contribuições para a formação do aluno, as quais se fazem necessário por meio da interação dos alunos com os modelos matemáticos, a fim de promover aprendizagem e ao mesmo tempo proporcionando um interesse pela matemática.

Um dos problemas de ensinar matemática é a falta de interesse dos alunos. Nesse sentido propõe-se que este trabalho permita desenvolver métodos e alternativas de ensino que possam despertar o interesse dos alunos pelas aulas de Matemática.

Segundo Wurman, a aprendizagem está relacionada ao interesse. "O interesse permeia qualquer esforço e vem antes da aprendizagem". (SCHRAMM, 1991, p.146)

Nessa linha de raciocínio, o grau de interesse que se tem sobre algum assunto, faz a aprendizagem, ou seja, conhecimento adquirido, ficar armazenado na memória por um período curto, médio ou longo. Na perspectiva de almejar um ensino aprendizagem com excelência e de forma prazerosa, os autores Almeida e Dias apoiados em D'Ambrósio, afirmam que

> "[...] o ciclo de aquisição do conhecimento é deflagrado a partir de fatos da realidade. Deste modo, a construção do conhecimento matemático pode ser mais eficiente se emergir de fenômenos que tem origem na realidade. Assim, a exploração, no ensino, de situações de vida real, em que a matemática se aplica, torna-a mais dinâmica e interessante e proporciona maior eficiência no processo de ensino e aprendizagem." (ALMEIDA, 2003 p. 21).

No esforço de desenvolver uma nova metodologia de ensinar funções elementares por meio de Modelagem Matemática tornando-a mais interessante e didaticamente eficazes devido a sua aplicabilidade em diversos ramos das ciências tais como crescimento populacional, crescimento de bactérias, radioatividade e outros.

Nesse contexto de mudanças e desafios, o objetivo principal desse estudo é o uso de vários aplicativos de simulação para contextualização do ensino das funções elementares (afim, quadrática, exponencial entre outras) presente nos problemas de modelagem do cotidiano vivenciado pelo aluno, propiciando um ambiente de aprendizagem no qual os alunos procuram investigar situações problemas oriundos de outras áreas do conhecimento como biologia, geografia e outras, de forma a dar soluções para os mesmos, com isso fazendo-os agentes da situação.

Desse modo, propor atividades de modelagem por meio de funções elementares é uma proposta que procura estabelecer uma nova rota para estimular o espírito crítico e reflexivo dos alunos, devido a todo o momento estarem envolvidos em situações que conduza à procura de argumentos, que possam fundamentar conceitos e definições.

# CAPÍTULO III

## III - PCN's – PCN+

Nos *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN's) para o ensino médio, em seu volume Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias defendem que o ensino da matemática e seus aspectos associados à tecnologia sejam trabalhados em sentido universal, ou seja, um o aprendizado que deve buscar algo além de uma formação técnica ou profissionalizante, procurando construir um cidadão que tenha uma cultura geral o qual consiga interpretar o mundo a sua volta em diferentes meios (social, profissional, natural, etc.).

Com base nos PCN's, é proposta uma nova estratégia de ensino que busca uma forma combinada para desenvolver conhecimentos práticos e contextualizados, e mais, procurando desenvolver no aluno conhecimentos mais amplos e abstratos. Assim, o aprendizado será efetivamente útil à vida e ao trabalho das pessoas, onde as informações, os conhecimentos e as competências e habilidades desenvolvidas por eles sirvam para perceber, interpretar e atuar em situações da vida cotidiana.

A procura de um conhecimento mais amplo encontrou nos PCN's a seguinte proposição:

> "Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico." (PCN's, 1998, p.6)

Seguindo esse norte, o aluno seja capaz de aprender continuamente, para isso, precisa-se desenvolver uma atitude interdisciplinar para almejar o aprendizado pretendido. Assim, se destaca o papel da matemática no ensino médio, e o seu poder de universalidade de quantificação e expressão, quando aplicado em outras ciências. Assim evidência nas outras áreas do conhecimento a dependência da matemática para elaborar formulações mais gerais e abstratas em seus campos de conhecimento particular.

Nessa linha de raciocínio a matemática assume seu papel interdisciplinar como ciência, tendo uma maior representação de confiabilidade nos processos de validação de resultados e a extraordinária capacidade de modelar as mais diferentes situações,

interpretando resultados e procurando tomar as mais sabias decisões. Por esse motivo o aluno deve aprender matemática, pois ela representa um fator importante na formação dele como cidadão responsável e participativo na sociedade. Contudo, a necessidade de que o ensino da matemática esteja voltado para o desenvolvimento de certas habilidades nos estudantes, como por exemplo, resolução de problemas, a tomada de decisões, capacidade de fazer inferências, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, e de trabalhar cooperativamente. Nesse sentido a matemática designa um fator importante na sociedade, dessa forma seu ensino tem passado por transformações. Segundo Almeida em sua afirmação:

> "Não é mais suficiente o aluno aprender matemática e saber utilizá-la para resolver problemas cotidianos. Além desses saberes, é necessário que o aluno seja capaz de interpretar e agir numa situação social e política estruturada pela matemática." (ALMEIDA, 2003, p 64)

Os PCN's mostram que os professores podem fazer para que o ensino da Matemática possa resultar em aprendizagem real e significativa para os alunos. Para isso, é necessário que o professor possibilite momentos em que eles possam:

> "[...] analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade; [...] desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo." (PCN's, 1999, p. 42).

Nessa perspectiva a modelagem matemática não pode ser utilizada apenas para justificar o conteúdo que está sendo ensinado, mas sim deve valorizar a razão, formação do cidadão como um todo.

Com Base nos PCN's, a modelagem matemática surge da necessidade do homem em compreender os fenômenos que o cercam para interferir ou não em seu processo de construção. São previsões de tendências e aproximações da realidade. A professora Maria Salett Biembengutet (1999), parte da premissa:

> "A criação de modelos para interpretar os fenômenos naturais e sociais é inerente ao ser humano. A própria noção de modelo está presente em quase todas as áreas: Arte, Moda, Arquitetura, História, Economia, Geografia, Literatura, Matemática. Aliás, a história da Ciência é testemunha disso!". (Ibidem, p. 11)

Em relação aos $PCN_+$ o estudo das funções tem um papel formidável para a formação geral do aluno, pois ela permite ao discente adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, essencial para demonstrar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. O intuito do estudo das diferentes funções é primordial que sejam bem trabalhadas as definições,

conceitos, propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações.

Entretanto, nos $PCN_+$ faz uma crítica do modo como é trabalhada as funções no ensino médio, tradicionalmente dá uma ênfase muito grande para o estudo de conjuntos e suas operações e partir daí procura definir função como particulares relações. Todo esse percurso até definir o conceito de função se torna longo e desgastante. Dessa forma, o ensino das funções pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente.

No mesmo $PCN_+$, deixa como sugestão que osproblemas de aplicação não devem ser deixados para depois que as leis de formação das funções fossem totalmente definidas, mas deve ser motivo e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas.

# CAPÍTULO IV

## IV- Modelagem Por Meio de Funções Elementares

Utilizando a Modelagem Matemática por meio de funções como estratégia de ensino, apresentamos a seguir uma proposta para o ensino de Função Afim, Quadrática, exponencial e Logaritmo, conteúdo trabalhado na 1ª série de Ensino Médio da Educação Básica.

Esta proposta foi elaborada considerando que os alunos do ensino médio ainda não conhecem a caracterização das funções citadas acima. Então, o objetivo é proporcionar aos alunos uma forma de estudar matemática partindo de problemas práticos oriundos do cotidiano da sociedade como alcoolismo, aplicações financeiras, e outros.

Para o desenvolvimento de um modelo matemático por meio de funções elementares, é fundamental definir as etapas a serem executadas:

### I- Escolha do tema

É a primeira etapa para a construção do modelo matemático, pois através dele o processo de desenvolvimento torna-se mais interessante e dinâmico, consequentemente proporcionará maior eficiência ao processo de ensino aprendizagem. Como a aprendizagem está ligada ao interesse, ou seja, sem interesse não há aprendizagem, logo um tema bem escolhido faz-se necessário para despertar a curiosidade.

### II- Situação problema

O problema proposto tem que ser objetivo e claro para ser compreendido por todos os envolvidos ao longo da resolução, pois a qualidade do resultado pretendido dependerá exame inicial de detalhes. É interessante ressaltar que ao longo do processo de interpretação do problema poderão ocorrer questionamentos e suposições que enriquecerá a resolução, em consequência, um resultado final melhor.

## III- Desenvolvimento do modelo matemático

Usando um simulador hipotético retirado da internet, que fornece o resultado dessa situação problema, monta-se uma tabela de dados fornecido pelo simulador, o qual é feita análise dos dados obtidos, usando técnicas e ferramentas de matemática já conhecidos até construir o modelo matemático que descreva essa situação problema, que será uma função elementar escondida por traz desse simulador.

## IV- Caracterização da função que foi modelada

Nessa etapa será feita a definição da função escondida por traz do simulador, consequentemente, enunciaremos o teorema da caracterização dessa função e sua demonstração. Sendo assim, o aluno vai conhecendo e dominando o vocabulário próprio da matemática, para que possa aplicá-la a diferentes contextos e situações de acordo com a necessidade, com isso utilizando-a de forma adequada. Desse modo, os alunos serão capazes de estabelecer suas próprias conjecturas levando-os a adquirirem habilidades e competências para efetivar generalizações. Segundo os parâmetros curriculares nacionais:

> "Contudo, a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas". (PCN's, 1998, p.40)

## V- Análise Gráfica

Para concluir o modelo matemático, torna-se necessária uma avaliação para verificar em que nível ele se aproxima da situação-problema representada, para isto é necessário verificar a adequabilidade, análise dos resultados obtidos na solução, que tem implicação no que está sendo investigado e sua relevância. A análise gráfica do problema é uma importante ferramenta de validação. Segundo Bassanezi "a validação é a ação de verificar o quanto o modelo se aproxima da situação real".

## 4.1. Modelagem Por Função Afim

### 4.1.1. Concentração de Álcool no Sangue

"**Concentração de Álcool no Sangue"**, é um tema bem interessante apesar de o álcool ser uma droga psicotrópica que atua no sistema nervoso central, podendo causar dependência e mudanças de comportamento, ela possui uma grande aceitação social e seu consumo é estimulado pelas propagandas e promoções de eventos.

Esse tema propicia um envolvimento dos professores de outras áreas como de biologia, química através de debates, palestras com alunos sobre a dependência, composição das bebidas de forma geral, doenças causadas pelo consumo de álcool em excesso e o grande número de acidentes de trânsito provocando mortes ou mutilando jovens e adultos. Essas discussões promovem a reflexão acerca das consequências do consumo do álcool, nesse momento os professores de português e sociologia podem prover um teatro com os alunos sobre as consequências apresentando dados estatísticos como forma de prevenção.

O objetivo central dessa proposta sugerida no tema acima é a elaboração de um modelo matemático que descreva a concentração de álcool no sangue (taxa de alcoolemia), depois de ingerido alguma quantidade de álcool (nesse caso ficaremos restrito a trabalhar com a cerveja em lata de 340 Ml com 3,5% de teor alcoólico) e sua eliminação do organismo com o passar das horas.

### 4.1.2. Alcoolemia

Realizando uma pesquisa descobrimos que o nível de álcool no sangue chama-se taxa de alcoolemia e pode ser calculado com a seguinte fórmula:

$$\boldsymbol{T_a} = \frac{\boldsymbol{Q_a}}{\boldsymbol{m.\mu}} = \frac{quantidade\ de\ alcool\ ingerido\ (g)}{massa\ corporal(kg).coeficiente\ (\frac{l}{kg})} \tag{4.1}$$

Onde,

$$\boldsymbol{Q_a} = \boldsymbol{volume}.(\boldsymbol{i}).(\boldsymbol{0,79}) \tag{4.2}$$

- $\boldsymbol{Q_a}$ - Quantidade de álcool ingerida em gramas
- $\boldsymbol{T_a}$ - Taxa de alcoolemia (unidade g/l)

$\boldsymbol{Q_a}$ é calculado multiplicando a o volume ingerido em ml pela densidade do álcool (tabelado 0,79 kg/l ou 0,79 g/ml) e por i (taxa do teor alcoólico).

- O coeficiente $\boldsymbol{\mu}$ na fórmula é dado por:

  **0,53 -** mulheres em jejum

  **0,60 -** homens em jejum

  **1,10 -** homens ou mulheres que ingeriram álcool durante a refeição
- **m -** massa da pessoa em quilogramas.
- **i -** taxa do teor alcoólico ( Fornecido na embalagem do produto)

FONTE: Programa álcool e drogas sem distorção do Hospital Albert Einstein

**Exemplo 1:**

Qual a taxa de alcoolemia de um homem de 70 Kg que bebe em jejum uma lata de cerveja de 340 ml com 3,5% do volume de teor alcoólico?

**Solução:**

Calculando a quantidade de álcool ingerida

$$\mathrm{Q_a} = 340\mathrm{ml} \cdot 0{,}035 \cdot 0{,}79\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{ml}} \Rightarrow \mathrm{Q_a} = 9{,}401\ \mathrm{g} \qquad (4.3)$$

Calculando a taxa de alcoolemia

$$\mathrm{T_a} = \frac{\mathrm{Q_a}}{\mathrm{m.\mu}} = \frac{9{,}401\mathrm{g}}{70\ \mathrm{kg}\cdot 0{,}6\ \mathrm{l/kg}} \Rightarrow \mathrm{T_a} = \frac{9{,}401\ \mathrm{g}}{42\ \mathrm{ml}} = 0{,}223\,\mathrm{g/l} \qquad (4.4)$$

Caso a pessoa tivesse consumida a bebida durante a refeição, a taxa de alcoolemia seria calculada assim:

$$\mathrm{T_a} = \frac{9{,}401\ \mathrm{g}}{70\mathrm{kg}\cdot 1{,}1\ \mathrm{l/kg}} \Rightarrow \mathrm{T_a} = \frac{9{,}401\mathrm{g}}{77\ \mathrm{l}} = 0{,}122\ \ \mathrm{g/l} \qquad (4.5)$$

## 4.1.3. Desenvolvimento Matemático do problema

**Situação Problema1**: Em uma roda de amigos bebendo cerveja em lata de 340 ml e teor alcoólico de 3,5%. Após uma pessoa ingerir seis latas de cerveja qual é o função matemática que representa o decaimento da taxa de alcoolemia no sangue? E depois de quanto tempo uma pessoa que ingeriu as seis latas de cerveja pode dirigir sem infringir as leis nacionais de trânsito?

Para a elaboração do modelo matemático pretendido, fez-se uso do simulador hipotético do portal terra, HTTP://www.terra.com.br/saude/infograficos, o qual calcula a $\boldsymbol{T_a}$ e a taxa de eliminação do álcool no organismo com o passar do tempo após uma pessoa que

parou de beber. Portanto, o simulador utilizado não faz menção em que condições foram tomadas as latas de cerveja. Com isso, para facilitar o entendimento suponhamos que as pessoas bebem pausadamente, em uma roda de amigos em condições normais.

Embora a função que calcula o decaimento da taxa de alcoolemia no sangue é do tipo exponencial $(y = b.a^x)$, usando os dados do simulador observa-se que foi realizado o procedimento linear e não exponencial, pois sabe-se que é possível transformar uma relação tipo potência em uma relação linear aplicando o logaritmo.

Utilizando o simulador a Tab.(4.1.1) é construída:

Tabela 4.1.1 Taxa de alcoolemia e tempo de eliminação no organismo

| Quantidade de latas de 340 ml n | Taxa de alcoolemia $T_a$ (g/l) | Tempo para eliminar todo álcool t(h) |
|---|---|---|
| **1** | 0,23 | 2,30 |
| **2** | 0,45 | 4,50 |
| **3** | 0,67 | 6,70 |
| **4** | 0,89 | 8,90 |
| **5** | 1,11 | 11,10 |
| **6** | 1,33 | 13,30 |

Fonte: simulador www.terra.com.br/saude/infograficos

Dessa forma, podemos calcular a taxa de alcoolemia no sangue usando as Eq.(4.1) e Eq.(4.2) e depois compará-los com os resultados apresentados na Tab.(4.1.1).

**Exemplo2:**

Qual é a taxa de alcoolemia no sangue quando uma pessoa de 70 kg ingere duas latas de cervejas de 340 ml cada e com teor alcoólico 3,5%

**Solução:**

$Q_a = volume.(i).(0{,}79)$

$\mathrm{Q_a} = 2.340\mathrm{ml} \cdot 0{,}035 \cdot 0{,}79\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{ml}} \Rightarrow \mathrm{Q_a} = 18{,}402\mathrm{g}$

Calculando a taxa de alcoolemia

$\mathrm{T_a} = \frac{\mathrm{Q_a}}{\mathrm{m.\mu}} = \frac{18{,}402\mathrm{g}}{70\mathrm{kg}\cdot 0{,}6\ \mathrm{l/kg}} \Rightarrow \mathrm{T_a} = \frac{18{,}402\mathrm{g}}{42\mathrm{l}} = 0{,}45\ \mathrm{g/l}$

Observa-se que os dados obtidos no simulador são os mesmos.

Por fim, os dados indicando a concentração de álcool no sangue após o consumo das seis latas escrevendo a Tab.(4.1.1) invertida mostraremos o decrescimento da $T_a$ (g/l) com o passar das horas é conforme a Tab.(4.1.2).

Tabela 4.1.2 Decrescimento da $T_a$ (g/l) em função do tempo

| t(h) | $T_a$ (g/l) |
|---|---|
| **0** | **1,3** |
| **2,30** | **1,11** |
| **4,50** | **0,89** |
| **6,70** | **0,67** |
| **8,90** | **0,45** |
| **11,1** | **0,23** |
| **13,30** | **0,00** |

Fonte: simulador www.terra.com.br/saude/infograficos

A partir dos dados obtidos na Tab.(4.1.2) percebe-se que a variação da $T_a$ (g/l) entre os intervalos de tempo correspondentes são proporcionais.

$$\frac{1{,}11-1{,}33}{2{,}30-0}=\frac{0{,}89-1{,}11}{4{,}50-2{,}30}=\frac{0{,}23-0{,}67}{11{,}1-2{,}30}=-0{,}1 \tag{4.6}$$

Onde $-0{,}1$ é constante de proporcionalidade,

Para obter um modelo matemático que representa a concentração de álcool no sangue, é feita a dedução da função de acordo com os cálculos abaixo:

$$f(0)=1{,}33 \tag{4.7}$$

$$f(2{,}30)=1{,}33+(-0{,}1).2{,}30=1{,}11 \tag{4.8}$$

$$f(4{,}50)=1{,}33+(-0{,}1)\cdot 4{,}50=0{,}88 \tag{4.9}$$

$$f(6{,}70)=1{,}33+(-0{,}1)\cdot 6{,}70=0{,}67 \tag{4.10}$$

Generalizando temos,

$$f(t)=13{,}30-0{,}1\cdot t \tag{4.11}$$

A Eq.(4.11 ) é a Função Matemática que modela esse simulador. Esse tipo de função é denominado função afim.

De acordo CNT (Conselho Nacional de Transito) a Lei seca estabelece o parâmetro de 0,3 mg/l [miligramas de álcool por litro de ar] ou 6 dg/l [ decigramas de álcool por litro de sangue] somente por ser uma recomendação do Inmetro como margem de segurança do etilômetro.

Na prática, está previsto no art. 306 do Código de Trânsito Brasileiro, se o indivíduo fizer o teste e a concentração for maior do que 0,6 g/l será considerado crime de trânsito. Assim basta fazer $f(t)=0{,}6$ substituindo na Eq.(4.11) temos,

$0{,}6 = 1{,}33 - 0{,}1 \cdot t \Rightarrow 0{,}1\text{t} = 1{,}33 - 0{,}6$

$\text{t} = 7{,}3$ h ou 7h 18min

Portanto, após 7h e 18 min a pessoa poderá dirigir sem infringir a lei de trânsito.

## 4.1.3. Função Afim

**Definição:**

Uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, recebe o nome de função afim quando a cada $x\epsilon\ \mathbb{R}$ estiver associado o elemento $\{ ax + b\}$ com $a \neq 0$, isto é:

$$f : \Re \to \Re$$
$$x \to ax + b, a \neq 0$$

È necessário fazer a caracterização da função afim para que o aluno não tenha nenhuma dúvida, mostrando que independente do contexto ou da situação problema ele saiba que a função a ser usada é a função afim.

È interessante definir o teorema fundamental da proporcionalidade para ser usado na demonstração do Teorema da caracterização da função afim.

## 4.1.4. Teorema Fundamental da Proporcionalidade:

Seja $f$ de $\Re$ em $\Re$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(nx) = n.f(x)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \Re$.

(2) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = a.x$, para todo $x \in \Re$.

(3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para quaisquer $x, y \in \Re$.

**Demonstração:**

Inicialmente vamos provaras implicações (1) $\Rightarrow$(2), (2) $\Rightarrow$(3) e (3) $\Rightarrow$(1). (1) $\Rightarrow$(2): Provemos inicialmente, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, temos por hipótese (1) que $f(rx) = r.f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim podemos ter $n.(rx) = f(n.r.x) \Rightarrow n.f(r.x) = f(n\frac{m}{n}x) \Rightarrow n.f(r.x) = f(m.x) \Rightarrow n.f(r.x) = m.f(x) \Rightarrow f(r.x) = \frac{m}{n}.f(x)$.

Seja $a = f(1)$, Como $f(0) = f(0.0) = 0.f(0)$, a monotocidade de $f$ nos dá $a = f(1) > f(0) = 0$, assim temos que $a$ é positivo, e mais temos que $f(r) = f(1.r) \Rightarrow f(r) = r.f(1) \Rightarrow f(r) = r.a$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Vamos mostrar que $f(x) = a.x$, para todo $x \in \Re$.

Suponha por absurdo, que exista algum número real $x$ necessariamente irracional tal que $f(x) \neq a.x$. Admitindo que $f(x) < a.x \Rightarrow \frac{f(x)}{a} < x$, agora tomemos um número racional $r = \frac{m}{n}$, tal que $f(x) < a.x. \frac{f(x)}{a} < r < x \Rightarrow f(x) < a.r < a.x \Rightarrow f(x) < f(r) < a.x$, absurdo pois $f$ é uma função crescente e como tomamos $r < x$ deveríamos ter chegado que $f(r) < f(x)$.Portando aprova de (1) ⇒ (2) está pronta.

(2) ⇒(3) Muito trivial pois temos por hipótese que $a = f(1)$, tem-se $f(x) = a.x$. então, $f(x + y) = a(x + y) \Rightarrow f(x + y) = ax + ay \Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y)$. Portanto aprova de (2) ⇒ (3) está pronta.

(3) ⇒(1) Por hipótese temos que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , escrevendo $x + y = n.p$, com $n \in \mathbb{Z}$, temos, $f(x + y) = f(n.p) = f\left(\overbrace{p + p + \cdots + p}^{n\ vezes}\right) = f(P) + \ldots f(p) = n.f(p)$. Portando aprova de (3) ⇒ (1) está pronta. □

## 4.1.5. Teorema: Caracterização da Função Afim

Seja $f$ de ℝem ℝ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x + \mathrm{h}) - f(x) = \varphi(h)$ depender só de h, mas não de $x$, então $f$ é uma função afim.

**Demonstração:**

Vamos supor que f seja crescente, então $\varphi$ de ℝem ℝ, também é crescente, com $\varphi(0) = 0$, para $h, k \in \mathbb{R}$ temos:

$\varphi(h + k) = f(x + h + k) - f(x)$

$\varphi(h + k) = f((x + k) + h) - f(x)$

$\varphi(h + k) = f((x + k) + h) - f(x + k) + f(x + k) - f(x)$

$\varphi(h + k) = \varphi(h) + \varphi(k)$

Logo, pelo teorema Fundamental da proporcionalidade, pondo $a = \varphi(1)$, tem-se que $\varphi(h) = a.h$ para todo $h \in \mathbb{R}$ , assim temos que $f(x + \mathrm{h}) - f(x) = a.h$, chamando

$f(0) = b$ obtemos que $f(0 + h) - b = a.h$, assim temos $f(h) = a.h + b$ ou seja temos $f(x) = a.x + b$, todo $x \in \mathbb{R}$.

Aplicando o teorema da caracterização da função afim na Tab.(4.2.2), fazendo os cálculos abaixo temos:

$$f(6{,}70) - f(2{,}30) = 0{,}67 - 1{,}11 = -0{,}44 \quad (4.12)$$

Mas reescrevendo a Eq.(4.14), temos:

$$f(2{,}30 + 4{,}40) - f(2{,}30) \quad (4.13)$$

Mas pelo Teorema (4.1.5), temos que:

$$f(2{,}30 + 4{,}40) - f(2{,}30) = \emptyset(4{,}40) \quad (4.14)$$

Mas pelo Teorema (4.1.4), temos $\emptyset(h) = -0{,}1.h$

$$\emptyset(h) = \emptyset(4{,}40) = -0{,}1.(4{,}40) = -0{,}44 \quad (4.15)$$

A Eq.(4.1.2) e a Eq.(4.1.5) obtiveram o mesmo resultado, mostrando que o decréscimo só depende do h.

## 4.1.6. Gráfico da Função Afim

A análise gráfica é uma importante ferramenta de validação do modelo construído, sendo de grande importância para consolidar conceitos, definições, relacionando-o com a geometria.

Com objetivo de solidificar os conceitos e definições da função afim e promovendo o interesse dos alunos pela matemática, o uso de software matemático se torna uma importante ferramenta de ensino, pois possibilita trabalhar conteúdos relacionados a cálculo, geometria, álgebra, e construção de gráficos de funções.

O gráfico abaixo da Eq.(4.1.10) representa a função escondida por traz do simulador Terra.

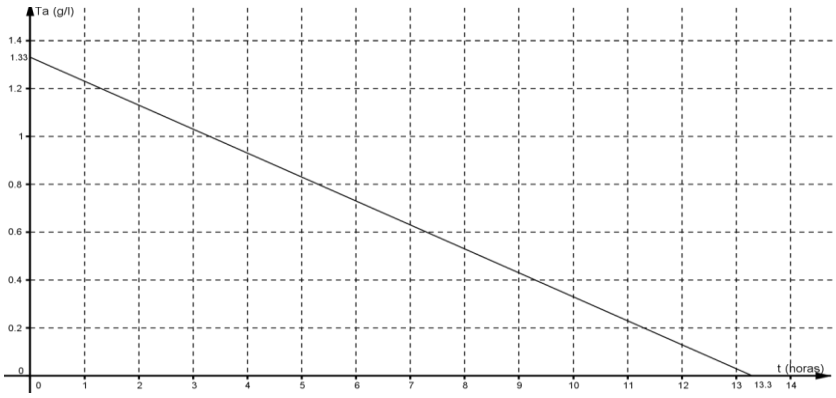



Figura 4.1.1: Taxa de alcoolemia em função do tempo

Os softwares matemáticos mais conhecidos são: Matlab, FreeMat, Octave e Geogebra e entre outros que são ferramentas de fácil manuseio.

O gráfico da Fig.(4.1.1), foi feito com uso do software Geogebra que se encontra nos laboratórios das escolas públicas do Brasil.

Logo, abaixo se tem as etapas da construção da Fig.(4.1.1).

O Geogebra depois de aberto apresenta na parte inferior um campo de entrada de texto, onde é possível escrever coordenadas, as equações e as funções.

Digita-se no campo de entrada o seguinte comando $T_a(t) = Se$, abrirá uma caixa de diálogo conforme Fig.(4.1.2) abaixo:

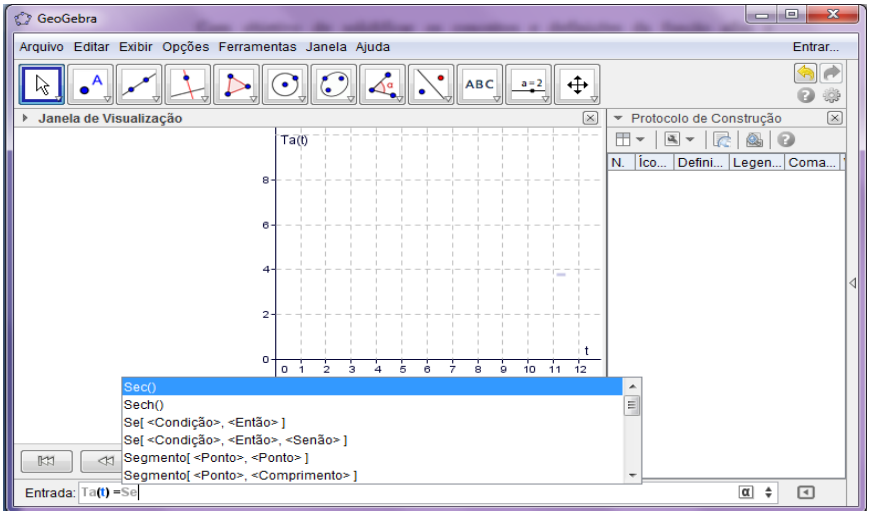



Figura 4.1.2: Tela do Geogebra com caixa de diálogo

Em seguida seleciona a função Se [<Condição>, <Então>], e digita-se dentro dos colchetes a seguinte instrução 0<=t<=13.3, -0.1*t 1.33, e click enter, aparecerá o gráfico da função na Fig.(4.1.3) abaixo.

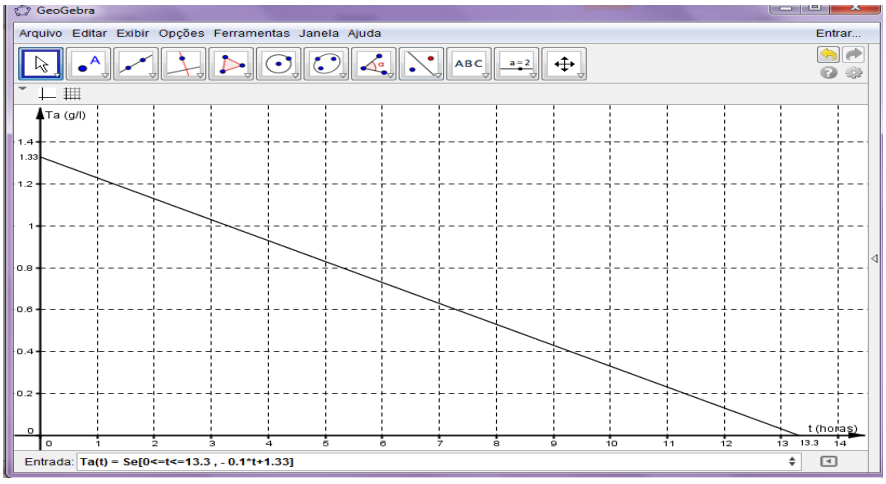



Figura 4.1.3: Tela do Geogebra com o gráfico Ta(g/l) x t(h)

É adequado, falar de intervalos reais, mostrando que a condição $t \in [0, 13.3]$ é o domínio da função, pois não faz sentido o gráfico passar nos negativos, já que não existe um tempo negativo para o consumo de álcool e nem tempo superior 13,3.

Entretanto, o contra domínio da função é o conjunto dos reais e a imagem da função representada pela reta pertencente ao intervalo $[0, 1.33]$. É importante explanar sobre crescimento e decrescimento da função, que o coeficiente angular é a variação da **Ta** pelo tempo onde é representada pela tangente do ângulo formado pela reta com o eixo horizontal e outros mais.

Dessa forma, pressupõe que os conceitos se tornam bem claros para os alunos, pois tiveram a oportunidade de vivenciar um espaço em que se faz matemática, a partir de uma situação problema proposta desenvolvendo o modelo matemático, o qual envolve os processos de visualização, interpretação, argumentação, experimentação e demonstração, aproximando-se de um ensino mais significativo para os mesmos.

## 4.2. Modelagem Por Função Quadrática

### 4.2.1. Lançamento Oblíquo sem resistência do ar

O "lançamento oblíquo" faz parte do conteúdo ministrado na física no 1º ano do ensino médio, o qual os alunos têm grande dificuldade de assimilação, por ser trabalhado apenas com aplicações de fórmulas já fornecidas, não fazendo uma relação com a função quadrática e suas propriedades.

Baseado nisso, propõe um trabalho interdisciplinar entre os professores de matemática e física para consolidar a aprendizagem desejada. Propondo situações problemas reais, o qual se aplica a função quadrática como esportes de precisão (Basquete, vôlei e outros), nas forças armadas (com armamentos envolvendo lançamento de projétil).

A partir de uma situação problema o qual envolva o lançamento oblíquo, constroem um modelo matemático por função quadrática, definindo os conceitos e as propriedades ao longo da resolução. Mediante a isso, ocorrerá a consolidação da aprendizagem, propiciando condições para quando os alunos depararem com um problema de física ou de outra área tenham competência e habilidades para interpretá-lo, e resolvê-lo.

**Situação problema 2**: Em um local onde o efeito do ar é desprezível e g = 10 m/s$^2$ um projétil é atirado de uma altura $h_0$, com uma velocidade inicial de $v_0$ e um ângulo de lançamento $\theta$ com a plataforma de apoio. Determine:

a) Desenvolva o modelo matemático que determina a função horária do alcance horizontal e vertical em relação ao solo, usando o simulador hipotético da internet?

b) E a equação que determina a altura máxima atingida no lançamento do projétil e o seu tempo de voo;

c) Reescreva a situação problema em forma de exemplo com os dados usados no simulador e determine

   a) A função horária do lançamento oblíquo?
   b) A altura máxima atingida?
   c) O tempo gasto para atingir a altura máxima;
   d) O tempo de voo do projétil até atingir o solo.
   e) Faça os gráficos no software geogebra para verificar os itens b, c e d.

## 4.2.2. Desenvolvimento do Modelo Matemático

Para realizar a coleta de dados faz-se necessário uso de dois simuladores hipotéticos de lançamento oblíquo, um que o vetor vare toda curva do gráfico, que se faz necessário para a coleta dos dados (http://sourceforge.net/projects/projectilecalc/postdownload?source=dlp) e outro simulador mais ilustrativo que dá mais ênfase no ângulo de lançamento, resistência do ar (http://phet.colorado.edu/sims) , assim com esses dois simuladores serão muito importantes para veracidade dos dados coletados e a consolidação da fórmula obtida.

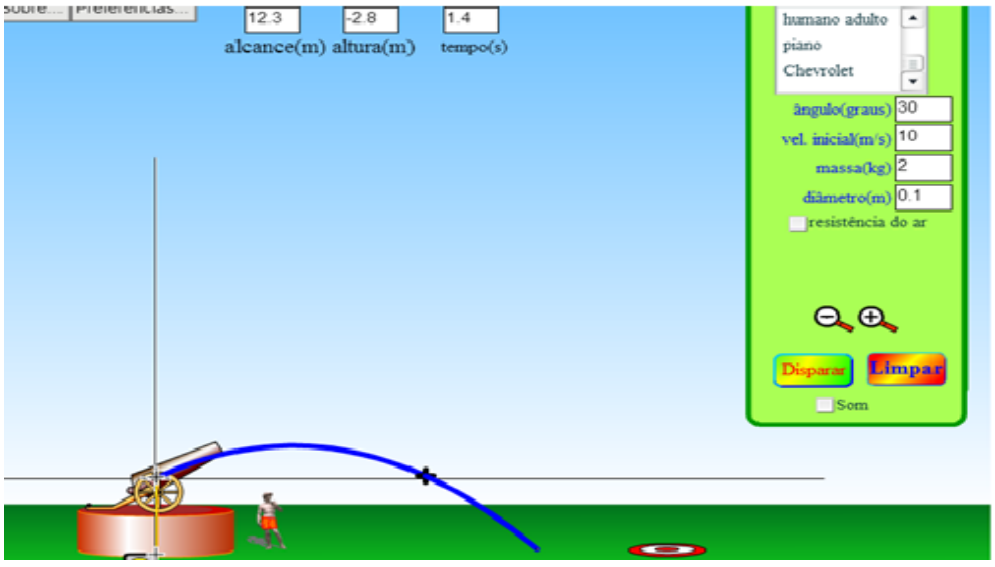



Figura 4.2.1 Tela do simulador de lançamento de projétil
Fonte: http://phet.colorado.edu

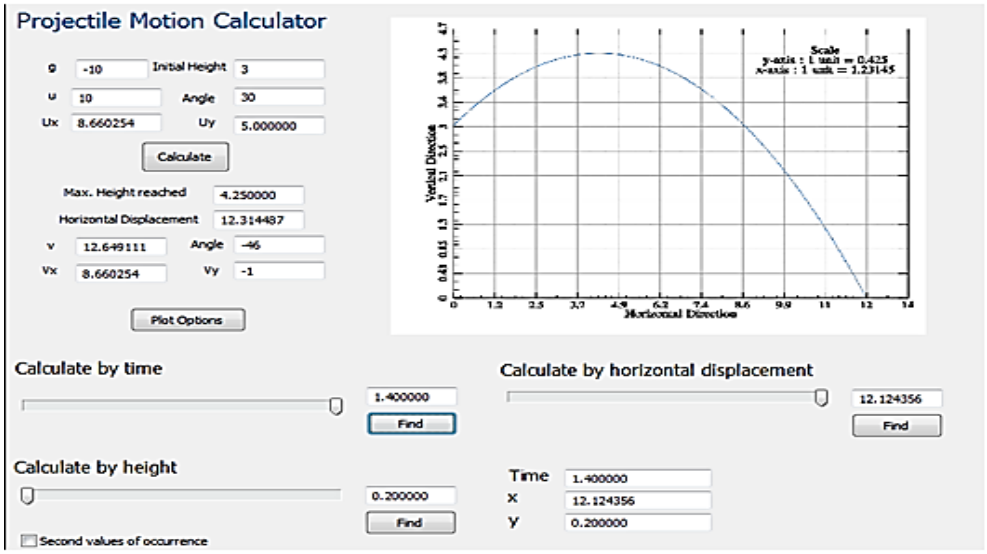



Figura 4.2.2 Tela do simulador de lançamento oblíquo
Fonte: http://sourceforge.net

Iniciando o lançamento com uma velocidade inicial $v_0$ de 10 m/s, uma altura inicial $h_0$ de 3m e um ângulo $\theta$ de $30^0$. Substituindo esses dados no simulador, construímos a seguinte tabela.

Tabela 4.2.1 Alcance horizontal e vertical em relação ao tempo

| Tempo (s) | Y(m) | X(m) |
|---|---|---|
| 0,0 | 3,0 | 0,0 |
| 0,1 | 3,45 | 0,865 |
| 0,2 | 3,80 | 1,730 |
| 0,3 | 4,05 | 2,595 |
| 0,4 | 4,20 | 3,460 |
| 0,5 | 4,25 | 4,325 |
| 0,6 | 4,20 | 5,190 |

Fonte: Fonte: simulador http://www.sourceforge.net

Construindo uma nova tabela, onde a coluna $\Delta Y(m) = Y(m+1) - Y(m)$ representa a variação da componente vertical e a coluna $\Delta X(m) = X(m+1) - X(m)$ representa a variação da componente horizontal.

Tabela 4.2.2 Diferença de dois termos consecutivos

| $\mathbf{Y(m)}$ | $\mathbf{\Delta Y(m) = Y(m+1) - Y(m)}$ | $\mathbf{X(m)}$ | $\mathbf{\Delta X(m) = X(m+1) - X(m)}$ |
|---|---|---|---|
| 3,00 | | 0,000 | |
| 3,45 | 0,45 | 0,865 | 0,865 |
| 3,80 | 0,35 | 1,730 | 0,865 |
| 4,05 | 0,25 | 2,595 | 0,865 |
| 4,20 | 0,15 | 3,460 | 0,865 |
| 4,25 | 0,05 | 4,325 | 0,865 |
| 4,20 | -0,05 | 5,190 | 0,865 |

Fonte: simulador http://www.sourceforge.net

O X(m) representado na terceira coluna da tabela da Tab.(4.2.2) é uma PA de razão 0,865 para intervalo de um décimo de segundo ou 8,65 para intervalo de 1s, então pode ser escrita como uma função afim como visto na seção (4.1):

$$X(t) = X_0 + 8{,}65.t. \tag{4.16}$$

No plano em que se dá o movimento, tomemos um sistema de coordenadas cuja origem é o ponto de partida do projétil e o eixo OY é a vertical que passa por esse ponto e OX é a horizontal que passa por esse ponto.

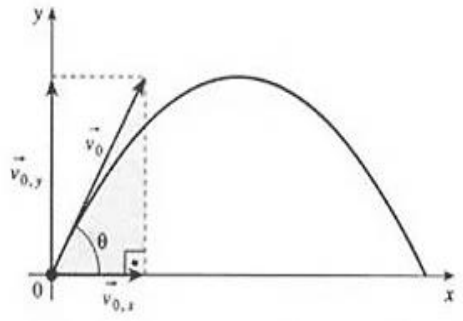



Figura 4.2.3: Componentes da velocidade da origem.

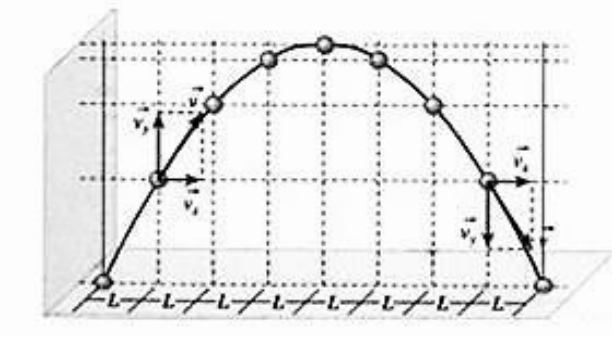


Figura 4.2.4: Componentes da velocidade ao longo da trajetória.

A velocidade inicial do projétil é o vetor $v_0 = (v_{0x}, v_{0y})$, cuja primeira coordenada $v_{0x}$ fornece a velocidade da componente horizontal do movimento (deslocamento da sombra, ou projeção do projétil sobre o eixo horizontal OX) , assim podemos escrever

$$v_{0x} = v_0 cos\theta \tag{4.17}$$

A segunda coordenada $v_{0y}$ fornece a velocidade da componente vertical do movimento ( a projeção do projétil sobre o eixo vertical OY), assim podemos escrever

$$v_{0y} = v_0 sen\theta \tag{4.18}$$

Substituindo os valores da velocidade inicial e do ângulo de lançamento usados no simulador na Eq.(4.2.2) temos:

$$v_{0x} = v_0 cos\phi = 10.cos30^0 = 10.0{,}865 = 8{,}65 \tag{4.19}$$

Substituindo o resultado da Eq.(4.2.3) na Eq.(4.2.1), obtemos:

$$X(t) = X_0 + v_0 cos\phi.t. \tag{4.20}$$

A Eq.(4.20) é a Equação horária da componente do movimento na horizontal

A sequência $(3; 3{,}45; 3{,}80; 4{,}05; 4{,}20; 4{,}25; 4,20)$ formada na primeira a coluna da Tab.(4.2.2) não é uma PA, porém se examinarmos as diferença entre os termos consecutivos desta última sequencia, ou seja, forma-se a segunda coluna da Tab.(4.2.2) onde temos a sequência $0{,}45; 0{,}35; 0{,}25\ 0{,}15\ 0{,}05; -0{,}05$ , que é uma progressão aritmética.

Isto não é uma coincidência, é uma propriedade exclusiva das funções quadráticas, que veremos na proposição a seguir.

**Proposição1:**

Uma sequência é uma progressão aritmética de segunda ordem se, e somente se, seu termo geral é dado por um polinômio do segundo grau, ou seja, podemos escrever a sequência com seu termo geral igual $Y(m) = c + b.m + a.m^2$.

Como $\Delta Y(m)$ da Tab.(4.2.2) é uma PA não constante, então $Y(m)$ é uma PA de 2ª ordem, pela proposição 1, $Y(m) = c + b.m + a.m^2$

$$Y(0{,}1) = c + b.(0{,}1) + a.(0{,}1)^2 = 3{,}45 \tag{4.21}$$

$$Y(0{,}2) = c + b.(0{,}2) + a.(0{,}2)^2 = 3{,}80 \tag{4.22}$$

$$Y(0{,}3) = c + b.(0{,}3) + a.(0{,}3)^2 = 4{,}05 \tag{4.23}$$

Subtraindo a Eq.(4.22) da Eq.(4.21) e a Eq.(4.23) da Eq.(4.22) obtemos as equações abaixo:

$$b.(0{,}1) + a.0{,}03 = 0{,}35 \tag{4.24}$$

$$b.(0{,}1) + a.0{,}05 = 0{,}25 \tag{4.25}$$

Subtraindo a Eq.(4.25) da Eq.(4.24), obtemos:

$$0{,}02a. = -0{,}10 \tag{4.26}$$

$$a = \frac{0{,}10}{0{,}02} = -5 \tag{4.27}$$

Substituindo o resultado da Eq.(4.27) na Eq.(4.24) temos:

$$b.(0{,}1) - 5(0{,}03) = 0{,}35 \quad (4.28)$$

$$b.(0{,}1) = 0{,}35 + 0{,}15 \quad (4.29)$$

$$b = \frac{0{,}50}{0{,}10} = 5 \quad (4.30)$$

E por fim substituindo os resultados da Eq.(4.30) e Eq.(4.27) na Eq.(4.21) obtemos:

$$c = 3 \quad (4.31)$$

Portanto o polinômio de 2º grau obtido foi:

$$Y(m) = 3 + 5.m - 5.m^2 \quad (4.32)$$

A Eq.(4.32) é a função quadrática escondida por traz desse simulador hipotético. Fazendo uma comparação com os dados iniciais da situação problema, verifica-se que a Eq.(4.30) e Eq.(4.17) são iguais

$$b = v_y = v.sen30^0 = 10.\frac{1}{2} = 5\text{m/s} \quad (4.33)$$

Verifica-se também que a Eq.(4.27) é igual à metade do valor da aceleração da gravidade,

$$-a = \frac{-g}{2} = \frac{-10}{2} = -5\ m/s^2 \quad (4.34)$$

A altura inicial usada no simulador é a constante c da Eq.(4.31), assim podemos escrever a função horária do lançamento de projétil na vertical.

$$Y(t) = Y_0 + v.sen\emptyset.t - \frac{g}{2}.t^2 \quad (4.35)$$

O sinal menos da aceleração da gravidade $(-g)$ se deve ao sentido da gravidade ser oposto à orientação do eixo vertical OY).

A Eq.(4.35) é a função que modela essa situação problema, conhecida como função quadrática.

## 4.2.3. Função Quadrática

**Definição:**

Uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, recebe o nome de função quadrática quando a cada $x\epsilon\ \mathbb{R}$ estiver associado o elemento $\{ ax^2 + bx + c\}$ com $a \neq 0$, isto é:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$$

O gráfico é uma parábola, o qual a concavidade voltada para cima para $a > 0$ e concavidade voltada para baixo para $a < 0$, conforme Fig.(4.2.4)

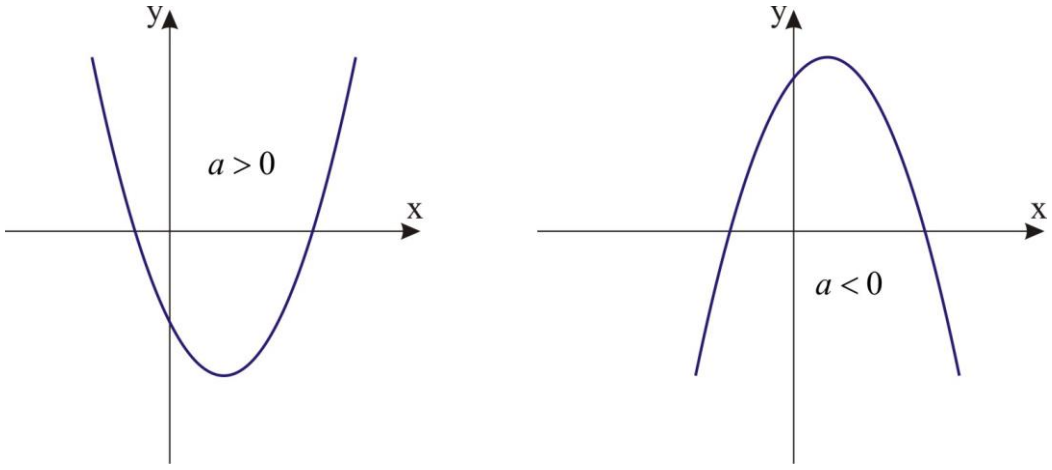



Figura 4.2.5: Concavidade das parábolas

## 4.2.4. Teorema da Caracterização da função Quadrática

Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que transforma toda progressão aritmética não constante $x_1, x_2 \ldots, x_n$ numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada $y = f(x_1),\ y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n), \ldots$ se, e só se $f$ é uma função quadrática.

**Demonstração:**

$(\Rightarrow)$

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que goza da propriedade de transformar toda progressão aritmética numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada (sem perda de domínio). Reescrevendo $f(x) = g(x) - g(0)$. Então $g$ tem as mesmas propriedades de $f$ e mais a propriedade de que $g(0) = 0$.

Considerando a seguinte progressão aritmética $1, 2, 3, 4, \ldots$ temos por hipótese que os valores de $g(1), g(2), g(3) \ldots g(n) \ldots$ formam uma progressão aritmética de 2ª ordem não degenerada. Pela proposição1 podemos escrever a sequências com seu termo geral igual $g(n) = b.n + a.n^2$, com $a, b,$ números reais. Observe que deveríamos ter $g(n) = b.n + a.n^2 + c$, porem $g(0) = 0$.

Agora, fixemos arbitrariamente um número $r \in \mathbb{N}$ e consideremos a progressão aritmética $\frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \frac{3}{r}, \frac{4}{r}$ de modo análogo existem constantes reais $a', b'$ tais que $g\left(\frac{n}{r}\right) = a'.(n)^2 + b'(n), \forall n \in \mathbb{N}$. Assim temos que:

$$a.n^2 + b.n = g(n) = g(n\tfrac{r}{r})$$

$$a.n^2 + b.n = a'.(nr)^2 + b'(nr)$$

$a.n^2 + b.n = (a'.r^2).n^2 + (b'.r)n$

Assim, as funções quadráticas são iguais para $\forall n \in \mathbb{N}$, então temos:

$a = a'.r \Leftrightarrow a' = \frac{a}{r^2}$ e $b = b'.r \Leftrightarrow b' = \frac{b}{r}$

Logo, para quaisquer números naturais $n$ *e* $r$ temos que:

$g\left(\frac{n}{r}\right) = \frac{a}{r^2}.(n)^2 + \frac{b}{r}.(n)$

$g\left(\frac{n}{r}\right) = a.\left(\frac{n}{r}\right)^2 + b.(\frac{n}{r})$

As funções contínuas $g(x)$ e $a.x^2 + b.x$ são tais que $g(p) = b.p + a.p^2$ para todo racional $p = \frac{n}{r}$, segue-se que $g(x) = a.x^2 + b.x$ para todo $x$ real . De modo análogo para uma progressão aritmética $-1, -2, -3$ .... , concluiríamos que $g(x) = a.x^2 + b.x$, para todo $x \leq 0$. Assim pondo $f(0) = C$, temos $f(x) = g(x) + C$.

Logo $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ para todo $x \in \Re$.

($\Leftarrow$)

Sejam $(a_n)$ uma progressão aritmética de 1ª ordem, com $k_n = k_{n-1} + r = k_1 + (n-1).r$ e $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ , de modo a mostrar que $f(k_1), f(k_2), f(k_3)$, ... é uma PA de 2ª ordem, mostraremos que as diferenças sucessivas abaixo formam uma PA de 1ª ordem:

$d_1 = f(k_2) - f(k_1)$

$d_2 = f(k_3) - f(k_2)$

$d_3 = f(k_4) - f(k_3)$

...

$d_n = f(k_{n+1}) - f(k_n)$

$d_{n+1} = f(k_{n+2}) - f(k_{n+1})$

...

Assim fazendo os cálculos de $f(k_n), f(k_{n+1}), f(k_{n+2})$ para depois calcularmos $d_n$ e $d_{n+1}$.

$f(k_n) = a(k_1 + (n-1).r)^2 + b.((k_1 + (n-1).r) + c$

$f(k_n) = a(k_1)^2 + a((k_1(n-1).2r) + a.((n-1).r)^2 + b.((k_1 + (n-1).r) + c$

$f(k_n) = a(k_1)^2 + 2a.k_1.n.r - 2a.k_1.r + a.n^2.r^2 - 2.a.n.r^2 + .a.r^2 + b.k_1 + b.nr - b.r + c$

$f(k_{n+1}) = a(k_1 + n.r)^2 + b.((k_1 + n.r) + c$

$f(k_{n+1}) = a(k_1)^2 + 2a.k_1.n.r + a.n^2.r^2 + b.k_1 + b.nr + c$

Agora podemos calcular o $d_n$

$d_n = f(k_{n+1}) - f(k_n) = 2a.k_1.r + 2.a.n.r^2 - a.r^2 + b.r$

$f(k_{n+2}) = a(k_1 + (n+1).r)^2 + b.((k_1 + (n+1).r) + c$

$f(k_{n+2}) = a(k_1)^2 + 2a.k_1.n.r + 2a.k_1.r + a.n^2.r^2 + 2.a.n.r^2 + .a.r^2 + b.k_1 + b.nr + b.r + c$

$d_{n+1} = f(k_{n+2}) - f(k_{n+1}) = +2a.k_1.r + 2.a.n.r^2 + a.r^2 + b.r$

$d_{n+1} - d_n = 2a.k_1.r + 2.a.n.r^2 + a.r^2 + b.r - (2a.k_1.r + 2.a.n.r^2 - a.r^2 + b.r)$

$d_{n+1} - d_n = 2.a.r^2$, assim teremos a sequência $(d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots)$ uma progressão aritmética de 1ª ordem de razão $2.a.r^2$. □

Para descobrir a altura máxima atingida pelo projétil, vamos reescrever o trinômio de 2º grau representado pela Eq.(4.35) da seguinte forma:

$$Y(t) = Y_0 + v.sen\emptyset.t - \frac{g}{2}.t^2$$

Colocando o coeficiente " $\frac{g}{2}$ " de Eq.(4.35 ) em evidência obtemos:

$$Y(t) = -\frac{g}{2}\left[-\frac{Y_0}{\frac{g}{2}} - \frac{v.sen\emptyset}{\frac{g}{2}}.t + t^2\right] \quad (4.36)$$

Fazendo alguns ajustes na Eq.(4.36), obtemos;

$$Y(t) = -\frac{g}{2}\left[-\frac{2.Y_0}{g} - \frac{2.v.sen\emptyset.t}{g} + t^2\right] \quad (4.37)$$

Completando o quadrado na Eq.(4.37) obtemos,

$$Y(t) = -\frac{g}{2}\left[-\frac{2.Y_0}{g} - (\frac{v.sen\emptyset}{g})^2 + (\frac{v.sen\emptyset}{g})^2 - \frac{2.v.sen\emptyset.t}{g} + t^2\right] \quad (4.38)$$

$$Y(t) = -\frac{g}{2}\left[-\frac{2.Y_0}{g} - (\frac{v.sen\emptyset}{g})^2 + (t - \frac{v.sen\emptyset}{g})^2\right] \quad (4.39)$$

$$Y(t) = -\frac{g}{2}\left[-\frac{2.Y_0}{g} - \frac{v^2.sen\emptyset^2}{g^2} + (t - \frac{b}{2.a})^2\right] \quad (4.40)$$

$$Y(t) = -\frac{g}{2}\left[(t - \frac{v.sen\emptyset}{g})^2\right] + Y_0 + \frac{v^2.sen\emptyset^2}{2.g} \quad (4.41)$$

Esta maneira de escrever o trinômio do 2º grau (chamada a forma canônica) tem algumas consequências.

Como $-\frac{g}{2} < 0$, para $Y(m)$ atingir o máximo a parcela $(t - \frac{v.sen\emptyset}{g})^2 \leq 0$, tem que ser satisfeita, mas por outro lado, a parcela nunca é negativa, logo

$$t - \frac{v.sen\emptyset}{g} = 0 \quad (4.42)$$

$$t = \frac{v.sen\emptyset}{g} \quad (4.43)$$

A Eq.(4.43) é tempo que o projétil leva para atingir a altura máxima, Por conseguinte a altura máxima pode ser representada pela seguinte equação :

$$Y_{max} = Y_0 + \frac{v^2.sen\emptyset^2}{2.g} \quad (4.44)$$

Agora para obtermos o tempo de voo do projétil, precisamos da condição $y(t) = 0$ (quando o projétil retorna ao solo), substituindo na Eq.(4.35),

$$0 = Y_0 + v.sen\emptyset.t - \frac{g}{2}.t^2 \quad (4.45)$$

Resolvendo a equação de 2º grau, temos

$$\Delta = (v.sen\emptyset)^2 - 4.(-\frac{g}{2}).(Y_0) \quad (4.46)$$

$$\Delta = (v.sen\emptyset)^2 + 2.(g).(Y_0) \quad (4.47)$$

$$t = \frac{-v.sen\emptyset \pm \sqrt{(v.sen\emptyset)^2 + 2.(g).(Y_0)}}{2.(-\frac{g}{2})} \quad (4.48)$$

$$t = \frac{v.sen\emptyset \pm \sqrt{(v.sen\emptyset)^2 + 2.(g).(Y_0)}}{g} \quad (4.49)$$

$$t = \frac{v.sen\emptyset + \sqrt{(v.sen\emptyset)^2 + 2.(g).(Y_0)}}{g} \quad (4.50)$$

A Eq.(4.43) é a equação que calcula o tempo de que projétil leva para retornar ao solo, lançado de uma altura inicial qualquer.

Caso o projétil tenha saindo da origem $Y_0 = 0$ e substituindo na Eq.(4.36) temos:

$$t = \frac{2v.sen\emptyset}{g} \quad (4.51)$$

Ou seja, o dobro do tempo de subida do projétil representada na Eq.(4.43)

**Exemplo3:**

Usando os dados do simulador iniciando o lançamento de 3 m altura com uma velocidade inicial de 10 m/s e um ângulo de $30^0$. Verifique se o tempo de subida, a altura máxima e o alcance do projétil coincidem com os dados coletados usando as fórmulas. Depois faça os gráficos movimentos.

Solução

Pela Eq.(4.43) o tempo de subida do projétil é:

$$t = \frac{v_0.sen\emptyset}{g} = \frac{10.\frac{1}{2}}{10} = \frac{1}{2}s \quad (4.52)$$

Substituindo o resultado da Eq.(4.52) na Eq.(4.35), obtemos a altura máxima atingida pelo projétil:

$$Y\left(\frac{1}{2}\right) = Y_0 + \frac{(v.sen\emptyset)^2}{2.g} = 3 + \frac{(10.\frac{1}{2})^2}{2.10} = \frac{25}{20} \Rightarrow Y\left(\frac{1}{2}\right) = 4{,}25 \quad (4.53)$$

Substituindo os dados do problema na Eq.(4.49) calculamos o tempo de voo do projétil:

$$t = \frac{v.sen\emptyset+\sqrt{(v.sen\emptyset)^2+2.(\ g).(Y_0)}}{g} = \frac{10.0{,}5+\sqrt{(10.0{,}5)^2+2.10.3}}{10} \cong 1{,}42s \qquad (4.54)$$

Substituindo o resultado da Eq.(4.54) na Eq.(4.20) obtemos o alcance máximo do projétil

$$X(t) = X(0) + v_0 cos\phi.\, t \Rightarrow\ x(1{,}42) = 0 + 10.0{,}865.1{,}42 \qquad (4.55)$$

$$X(1{,}42) \cong\ 12{,}2\ m \qquad (4.56)$$

Observe que todos os valores coincidem com os dados da Fig.(4.2.2)

A construção dos gráficos, com o uso de softwares matemáticos, passa ser um importante instrumento para prática de ensino aprendizagem, pois através dele o aluno poderá aprimorar os conceitos e definições sobre função quadrática. Vamos utilizar o mesmo software que usamos na modelagem da função afim ( Geogebra).

Com a tela do Geogebra aberta digita na caixa de entrada a Eq.(4.35) com os dados do problema e click enter.

$$Y(t) = Y_0 +\ v.sen\emptyset.\, t - \frac{g}{2}.\, t^2$$

$$Y(t) = 3 +\ 10.sen(30°).\, t - \frac{10}{2}.\, t^2$$

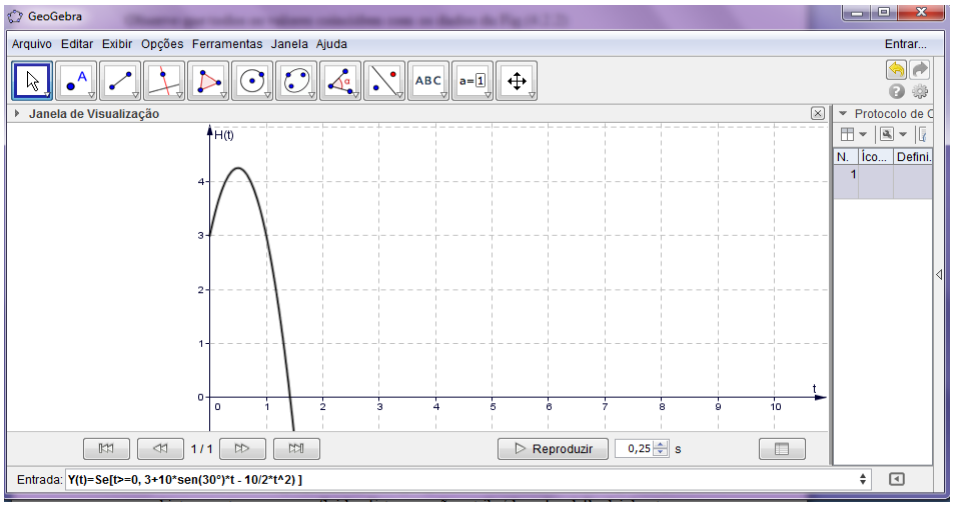



Figura 4.2.6: Gráfico do lançamento do projétil

Marca-se o ponto A no vértice da parábola e o ponto B na intersecção da parábola com o eixo x. Veja a Fig.(4.2.7) abaixo:

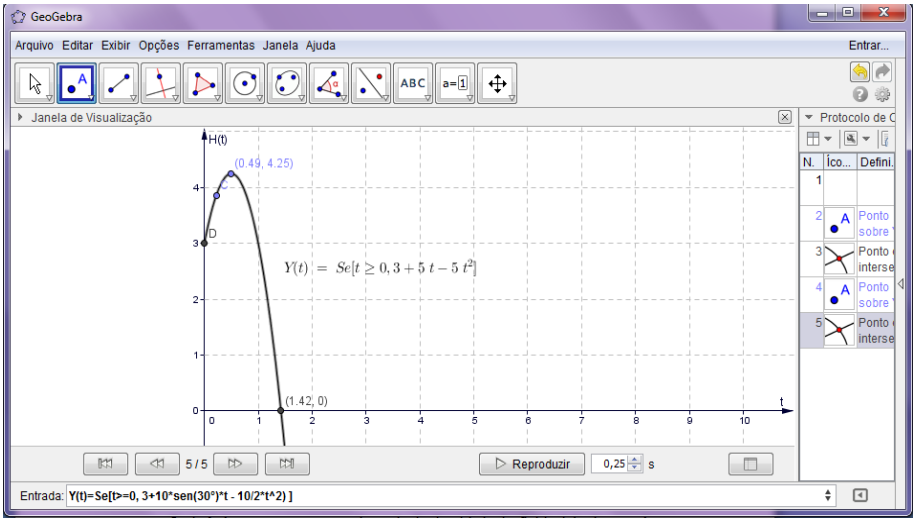



Figura 4.2.7: Gráfico do lançamento de projétil com pontos assinalados.

Pelo gráfico a altura máxima realmente é 4,25 m e o tempo de voo do projétil é 1,42s. È importante explorar todos os conceitos de domínio, contradomínio, máximo da função e por fim crescimento de decrescimento da mesma. Pode marcar outros pontos na parábola para mostrar o teorema da caracterização da função quadrática.

O mais interessante é a construção do gráfico com o deslocamento vertical em relação ao deslocamento horizontal. (sugestão isole tempo na Eq.(4.20)).

$$X(t) = X(0) + v_0 cos\theta . t \Rightarrow t = \frac{X(t)}{v_0 cos\theta}, \tag{4.57}$$

Onde $X(0) = 0$, O móvel partindo da origem conforme enunciado. Agora substitua a Eq.(4.57) na Eq.(4.35) escrita abaixo

$$Y(t) = Y_0 + v.sen\emptyset . t - \frac{g}{2} . t^2$$

Fazendo os cálculos obtemos a equação

$$Y(t) = Y_0 + tan\theta . X(t) - \frac{g}{2} . \left(\frac{X(t)}{v_0 cos\theta}\right)^2 \tag{4.58}$$

Considerando que a trajetória até atingir o solo a função Y(t) tem seu domínio pertencente ao intervalo [0, 1.42] e para a função Y(x) tem seu domínio pertencente ao intervalo [0, 12.31] Substituindo os dados do problema na Eq.(4.2.51), e digitando caixa de entrada do Geogebra, obtemos a Fig.(4.2.8) (para componente vertical em relação a componente horizontal) e a Fig.(4.2.9) (para a componente vertical pelo tempo) com essas condições.

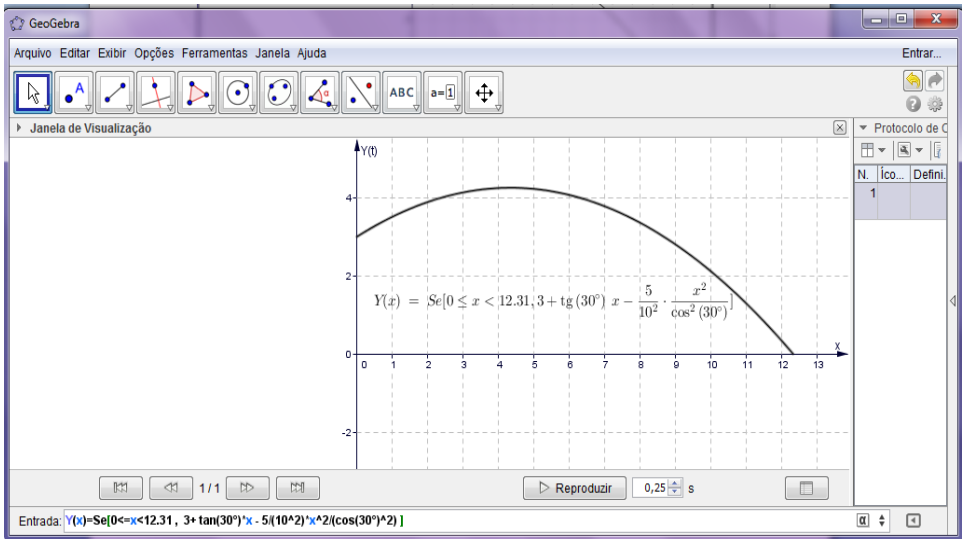



Figura 4.2.8: Componente vertical pela Componente horizontal do movimento

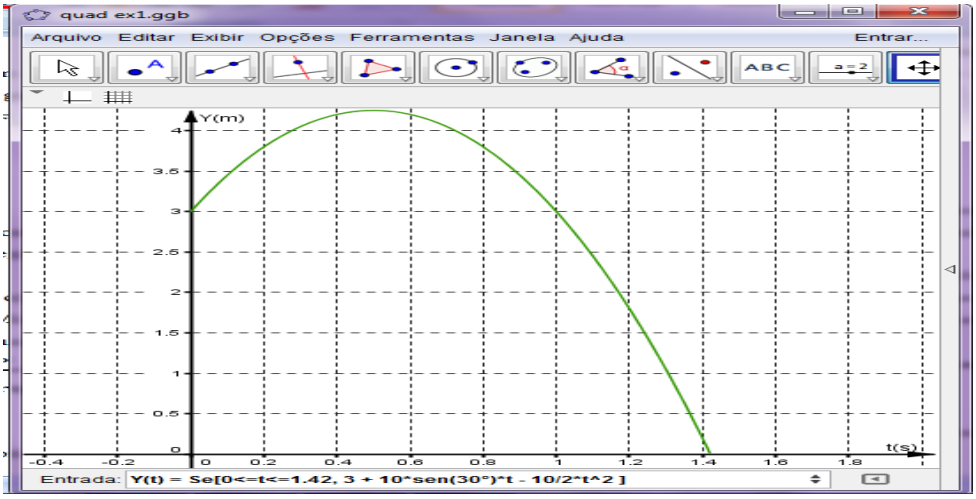



Figura 4.2.9: Gráfico da componente vertical pelo tempo

Portanto, a análise gráfica feita acima, foi importante para avaliar e verificar a adequabilidade dos resultados obtidos na solução analítica do problema.

## 4.3. Lançamento oblíquo com resistência do Ar

Embora o lançamento oblíquo com a resistência do ar não é trabalhado no ensino médio das escolas públicas e particulares do Brasil, entretanto é ministrada nos primeiros períodos das universidades e cursos tecnólogos.

Muitas vezes não conseguiremos desenvolver um modelo matemático que represente de maneira exata um problema real em toda complexidade. Todavia, pode-se tentar uma

formulação aproximada, empregando algumas variáveis que são essenciais na formulação do modelo matemático.

As equações diferenciais ordinárias são importantes para a prática na resolução dos problemas de fenômenos físicos, pois nos informam como a variação de uma grandeza afeta outras grandezas relacionadas, o que nos oferece uma compreensão quantitativa e qualitativa de tais fenômenos físicos. A segunda lei de Newton $\vec{F} = m.\vec{a}$, na verdade é uma equação diferencial de segunda ordem, escrita da seguinte forma $\vec{F}(\vec{r}, t) = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

### 4.3.1 Força de Arrasto

O arrasto de um objeto em deslocação no ar depende da sua massa, da velocidade, da viscosidade e compressibilidade do ar, da forma e da dimensão do corpo, e ainda da sua inclinação face ao fluxo. Em geral é bastante complexo determinar a dependência em relação à forma do corpo, à inclinação, à viscosidade do ar e à sua compressibilidade.

Pode-se usar a equação do arrasto que permite determinar a força a que é sujeito um objeto ao atravessar um fluido. Esta equação, atribuída a Lord Rayleigh, tem a seguinte expressão:

$$F_d = -C_x.\frac{\rho.v}{2}.A \tag{4.59}$$

- $F_d$ é a força do arrasto.
- $C_x$ é o coeficiente de arrasto (adimensional)
- $\rho$ é a massa específica do ar ($kg/m^3$)
- v é a velocidade do objeto,
- $A$ é a área de referência (geralmente dada por $A = \frac{\pi.d^2}{4}$ $[m^2]$).
- d é o diâmetro máximo.

Que pode ser simplificada do seguinte modo:

$$F_d = -k.v, \text{ Onde } k = \frac{c_x.\rho.A}{2} \tag{4.60}$$

A Eq.(4.60) é chamada força de arrasto linear em v. (Tem maioria das aplicações para casos aproximados de corpos muitos pequenos que se movimentam com baixas velocidades).

$$F_d = -k.v^2, \quad \text{Onde } k = \frac{c_x.\rho.A}{2.v} \tag{4.61}$$

A Eq.(4.61) é chamada força de arrasto quadrática em v. (Tem maioria das aplicações para problemas trata-se de corpos grandes como avião, paraquedista em queda no ar, projétil de arma de fogo e outros que se movimentam a altas velocidades).

Onde $k$ é uma constante que depende da densidade do fluido ($\rho$), da sua área frontal ($A$), e do coeficiente de arrasto ($-C_x$) que depende da forma do objeto. O sinal negativo indica que a força de atrito é sempre contra o movimento.

Então temos dois casos para analisar: 1º caso (Movimento de translação do projétil supondo a resistência do ar proporcional a da velocidade $F_r = kv$) e 2º caso (Movimento de translação do projétil supondo a resistência do ar proporcional ao quadrado da velocidade $F_r = kv^2$).

**Situação problema 3**: Em um local onde o efeito do ar não é desprezível e a gravidade é dada por g = 10 m/s$^2$ um projétil é atirado de uma altura $h_0$, com uma velocidade inicial de $v_0$ e um ângulo de lançamento $\theta$ com a plataforma de apoio. Escreva o modelo matemático que representa a função horária do alcance horizontal e vertical em relação ao solo.

## 4.3.2. Desenvolvimento Matemático do problema

### 4.3.2.1. Movimento de translação do projétil supondo a resistência do ar proporcional a da velocidade $(F = k.v)$

O movimento oblíquo se dá em duas dimensões, ou seja, um movimento na horizontal e outro movimento na vertical, conforme o diagrama abaixo,

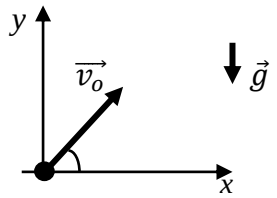



Figura 4.2.10 Trajetória da partícula partindo da origem

Onde $v_{0x} = v_0.cos\theta$ e $v_{0y} = v_0.sen\theta$ são as velocidades iniciais, respectivamente na direção x e y e $\theta$ o ângulo formado entre a velocidade inicial $v_0$ e eixo horizontal x.

### 4.3.2.2. Componente do Movimento Horizontal

$\vec{F_r} = -k.\vec{v_x}$ (1ª lei de Newton), (4.62)

$m.a = -k.v_x$ (4.63)

$m.\frac{dv_x(t)}{dt} = -k.v_x$ (4.64)

$\frac{dv_x(t)}{v_x(t)} = -\frac{kdt}{m}$ (4.65)

$$\ln(v_x(t)) = -\frac{k}{m}.t + c \tag{4.66}$$

No instante t = 0, obtemos a constante c:

$$\ln(v_x(0)) = c \tag{4.67}$$

Substituindo Eq.(4.67) em Eq.(4.66) , temos:

$$\ln(v_x(t)) = -\frac{k}{m}.t + \ln(v_x(0)) \tag{4.68}$$

$$\ln\left(\frac{v_x(t)}{v_x(0)}\right) = -\frac{k}{m}.t \tag{4.69}$$

$$\frac{v_x(t)}{v_x(0)} = e^{-\frac{tk}{m}} \tag{4.70}$$

$$v_x(t) = v_x(0).e^{-\frac{tk}{m}} \tag{4.71}$$

Por outro lado sabemos que$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, assim temos:

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_x(0).e^{-\frac{tk}{m}} \tag{4.72}$$

Integrando ambos os membros temos:

$$\mathrm{dx(t)} = \mathrm{v_x(0).e^{-\frac{tk}{m}}.dt} \tag{4.73}$$

$$\mathrm{x(t)} = -\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{k}}\mathrm{v_x(0).e^{-\frac{tk}{m}}} + \mathrm{d} \tag{4.74}$$

Fazendo $\mathrm{t} = 0$, obtemos:

$$\mathrm{x(0)} = -\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{k}}\mathrm{v_x(0).\ e^{-\frac{0.k}{m}}} + \mathrm{d} \tag{4.75}$$

$$\mathrm{d} = \mathrm{x(0)} + \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{k}}.\mathrm{v_x(0)} \tag{4.76}$$

$$\mathrm{x(t)} = -\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{k}}\mathrm{v_x(0).e^{-\frac{tk}{m}}} + \mathrm{x(0)} + \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{k}}.\mathrm{v_x(0)} \tag{4.77}$$

$$\mathrm{x(t)} = \mathrm{x_0} + \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{k}}\mathrm{v_x(0).(1 - e^{-\frac{tk}{m}})} \tag{4.78}$$

Substituindo $\mathrm{v_0.cos\theta}$ por $\mathrm{v_x(0)}$na Eq.(4.78), obtemos:

$$\mathrm{x(t)} = \mathrm{x_0} + \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{k}}\mathrm{v_0.cos\theta.(1 - e^{-\frac{tk}{m}})} \tag{4.79}$$

Função horária para movimento horizontal partindo da posição $x_0$.

Mas supondo que $x_0 = 0$, e substituindo na Eq.(4.79) obtemos:

$$x(t) = \frac{m}{k}v_0.cos\theta.(1 - e^{-\frac{tk}{m}}) \tag{4.80}$$

A Eq.(4.80) representa a função horária para movimento horizontal partindo da origem

### 4.3.2.3. Componente do Movimento na Vertical

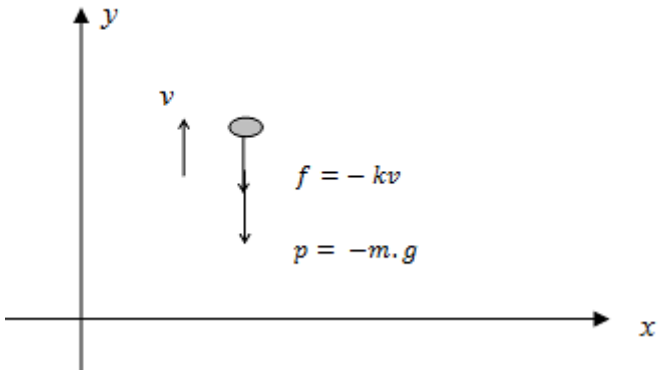



Figura 4.2.11 Decomposição das forças arrasto, peso e velocidade.

$\overrightarrow{F_r} = \overrightarrow{F_{res}} + \overrightarrow{P}$ (2ª lei de Newton) (4.81)

$m.a = -k.v_y - mg$ (4.82)

$m.\frac{dv_y(t)}{dt} = -mg - k.v_y$ (4.83)

$\frac{dv_y(t)}{-mg - k.v_y} = \frac{1}{m}dt$ (4.84)

Fazendo $u = -mg - k.v_y$, temos $\frac{du}{dv_y(t)} = -k. \Rightarrow \frac{du}{-k} = dv_y(t)$

Substituindo na Eq.(4.84) temos

$\int \frac{du}{-k.u} = \int \frac{1}{m}dt$ (4.85)

Integrando ambos os membros têm:

$\frac{-1}{k}\ln(-mg - k.v_y(t)) = \frac{1}{m}t + c$ (4.86)

Fazendo $t = 0$, obtemos:

$\frac{-1}{k}\ln(-mg - k.v_y(0)) = c$ (4.87)

Substituindo temos Eq.(4.2.75) em Eq.(4.2.74)

$\frac{-1}{k}\ln(-mg - k.v_y(t)) = \frac{1}{m}t - \frac{1}{k}\ln(mg - k.v_y(0))$ (4.88)

$\frac{-1}{k}.\ln\left(\frac{ln(-mg - k.v_y(t)}{-mg - k.v_y(0)}\right) = \frac{1}{m}t$ (4.89)

$\ln\left(\frac{-mg - k.v_y(t)}{-mg - k.v_y(0)}\right) = -\frac{kt}{m}$ (4.90)

$\frac{-mg - k.v_y(t)}{-mg - k.v_y(0)} = e^{-\frac{tk}{m}}$ (4.91)

$-mg - k.v_y(t) = \left[-mg - k.v_y(0)\right].e^{-\frac{tk}{m}}$ (4.92)

$k.v_y(t) = \left[mg + k.v_y(0)\right].e^{-\frac{tk}{m}} - mg$ (4.93)

$$v_y(t) = \left[\frac{mg+k.v_y(0)}{k}\right].e^{-\frac{tk}{m}} - \frac{mg}{k} \quad (4.94)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left[\frac{mg+k.v_y(0)}{k}\right]].e^{-\frac{tk}{m}} - \frac{mg}{k} \quad (4.95)$$

$$dy(t) = \left[\frac{mg+k.v_y(0)}{k}\right].e^{-\frac{tk}{m}}.dt - \frac{mg}{k}dt \quad (4.96)$$

Integrando ambos os membros

$$y(t) = -\left[\frac{mg+k.v_y(0)}{k}\right].\frac{m}{k}e^{-\frac{tk}{m}} + d - \frac{mg}{k}t \quad (4.97)$$

Fazendo $t = 0$, obtemos

$$y(0) = -\frac{mg}{k}.0 - \left[\frac{mg+k.v_y(0)}{k}\right].\frac{m}{k}e^{-\frac{0.k}{m}} + d \quad (4.98)$$

$$y(0) = -\left[\frac{mg+k.v_y(0)}{k}\right].\frac{m}{k} + d \quad (4.99)$$

$$d = y(0) + \left[\frac{mg+k.v_y(0)}{k}\right].\frac{m}{k} \quad (4.100)$$

Substituindo a Eq.(4.100) na Eq.(4.99), obtemos:

$$y(t) = -\frac{mg}{k}t - \left[\frac{mg+k.v_y(0)}{k}\right].\frac{m}{k}e^{-\frac{tk}{m}} + y(0) + \left[\frac{mg+k.v_y(0)}{k}\right].\frac{m}{k} \quad (4.101)$$

$$y(t) = y(0) - \frac{mg}{k}t + \left[\frac{mg+k.v_y(0)}{k}\right].\frac{m}{k}(1 - e^{-\frac{tk}{m}}) \quad (4.102)$$

$$y(t) = y(0) - \frac{mg}{k}t + \left[\frac{m^2g+k.mv_y(0)}{k^2}\right].(1 - e^{-\frac{tk}{m}}) \quad (4.103)$$

$$y(t) = y_0 - \frac{mg}{k}t + \left[\frac{m^2g+k.m.v_0.sen\theta}{k^2}\right].(1 - e^{-\frac{tk}{m}}) \quad (4.104)$$

A Eq.(4.104) é a função horária da componente do movimento vertical partindo da posição $y_0$.

Logo a partir da equação Eq.(4.104), fazendo $y_0 = 0$, teremos o tempo $t$ para o projétil para retornar ao solo.

$$0 = y_0 - \frac{mg}{k}t + \left[\frac{m^2g+k.m.v_0.sen\theta}{k^2}\right].(1 - e^{-\frac{tk}{m}}) \quad (4.105)$$

A solução analítica dessa equação não pode ser obtida diretamente. Vamos usar o método das perturbações (Isto é, um conjunto de técnicas que tem como objetivo encontrar a solução aproximada do problema cuja solução exata é desconhecida, comparando-o com outro problema cuja solução é conhecida e que em algum sentido está "próximo" do problema original ) para achar a equação que fornece o tempo de voo do projétil, faremos a expansão da série de Taylor no termo que contém a exponencial, isto é:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \quad (4.106)$$

$$e^{-\frac{tk}{m}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{tk}{m})^n}{n!} = 1 - \frac{\frac{tk}{m}}{1} + \frac{(\frac{tk}{m})^2}{2!} - \frac{(\frac{tk}{m})^3}{3!} \ \ldots \quad (4.107)$$

$$e^{-\frac{tk}{m}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{tk}{m})^n}{n!} = 1 - \frac{tk}{m} + \frac{t^2.k^2}{2.m^2} - \frac{t^3.k^3}{6.m^3} + \frac{t^4.k^4}{24.m^4} \ \ldots \quad (4.108)$$

Se considerarmos que k <1, e supondo-o pequeno, ou seja, da ordem $k \approx 10^{-2}$, assim $k^2 \approx 10^{-4}$, podemos desprezar os n termos a partir da ordem $k^5$, inclusive (na verdade, estamos truncando a série, a parte dos n termos desprezados não tem influencia significativa na solução). Substituindo na equação Eq.(4.108) na Eq.(4.105) temos:

$$0 = y_0 - \frac{m.g}{k}t + \left[\frac{m^2.g+k.m.v_0.sen\emptyset}{k^2}\right].(1 - \left(1 - \frac{t.k}{m} + \frac{t^2.k^2}{2.m^2} - \frac{t^3.k^3}{6.m^3} + \frac{t^4.k^4}{24.m^4}\right) \quad (4.109)$$

$$0 = y_0 - \frac{m.g}{k}t + \left[\frac{m^2.g+k.m.v_0.sen\emptyset}{k^2}\right].\left(\frac{t.k}{m} - \frac{t^2.k^2}{2.m^2} + \frac{t^3.k^3}{6.m^3} - \frac{t^4.k^4}{24.m^4}\right) \quad (4.110)$$

Fazendo a distributiva e cálculos de simplificação na Eq.(4.110), obtemos

$$0 = y_0 - \frac{m.g}{k}t + \left[\frac{m^2.g+k.m.v_0.sen\emptyset}{k^2}\right]\frac{tk}{m} + \left[\frac{m^2.g+k.m.v_0.sen\emptyset}{k^2}\right].\left(-\frac{t^2.k^2}{2.m^2} + \frac{t^3.k^3}{6.m^3} - \frac{t^4.k^4}{24.m^4}\right) \quad (4.111)$$

Simplificando temos

$$0 = y_0 - \frac{m.g.}{k}t + \frac{m.g}{k}t + v_0.sen\emptyset.t + \left[\frac{m^2.g+k.m.v_0.sen\emptyset}{k^2}\right].\left(-\frac{t^2.k^2}{2.m^2} + \frac{t^3.k^3}{6.m^3} - \frac{t^4.k^4}{24.m^4}\right)$$

$$0 = y_0 + v_0.sen\emptyset.t - \left[\frac{m.g+k.v_0.sen\emptyset}{2.m}\right]t^2 + \left[\frac{m.k.g+k^2.v_0.sn\emptyset}{6.m^2}\right]t^3 - \left[\frac{m.k^2.g+k^3.v_0.sen\emptyset}{24.m^3}\right]t^4 \quad (4.112)$$

A equação (4.112) é um polinômio de quarto grau, onde $v_y(0)$, $k$ , $g, m$ são constantes, logo podemos achar as soluções reais deste polinômio por softwares matemáticos como: FreeMat, Octave, e outros disponíveis gratuitamente.

Para achar um tempo de voo sem usar o software matemático, teremos que supor o projétil saindo da origem, ou seja, $y_0 = 0$, e também desprezando o termo de maior grau (acharemos o tempo de voo para um k que seja válido, com aproximação sem perda significativa para solução), assim teremos a equação.

$$0 = v_0.sen\emptyset.t - \left[\frac{m.g+k.v_0.sen\emptyset}{2.m}\right].t^2 + \left[\frac{m.k.g+k^2.v_0.sen\emptyset}{6.m^2}\right].t^3 \quad (4.113)$$

Multiplicando a equação por $\frac{1}{t}.\frac{6.m^2}{m.g+k.v_0.sen\emptyset}$ temos

$$k.t^2 - 3.m.t + \frac{6.m^2.v_0.sen\theta}{m.g+k.v_0.sen\theta} = 0 \quad (4.114)$$

$$k(t^2 - \frac{3m}{k}t) = \frac{-6.m^2.v_0.sen\theta}{g.m+ k.v_0.sen\theta} \quad (4.115)$$

Completando o quadrado no primeiro membro temos

$$(t - \frac{3.m}{2.k})^2 - (\frac{3m}{2k})^2 = \frac{-6.m^2.v_0.sen\theta}{k.g.m+ k^2.v_0.sen\theta)} \quad (4.116)$$

$$(t - \frac{3.m}{2.k})^2 - (\frac{3.m}{2.k})^2 = \frac{-6.m.v_0.sen\theta}{k.g(1+\frac{k.v_0.sen\theta}{g.m})} \quad (4.117)$$

$$(t-\frac{3.m}{2.k})^2=(\frac{3.m}{2.k})^2-\frac{6.m.v_0.sen\theta}{k.g}.(1+\frac{k.v_0.sen\theta}{g.m})^{-1} \quad (4.118)$$

Supondo que $\frac{k.v_0.sen\theta}{g.m}$ for muito pequeno ou seja próximo de zero temos que a expressão

$(\frac{3.m}{2.k})^2-\frac{6.m.v_0.sen\theta}{k.g}>0$ , ou seja, $\frac{6.m.v_0.sen\theta}{k.g}<\frac{9.m^2}{4.k^2}$

$8.v_0.k.sen\theta<3.m.g$

$$k<\frac{3.m.g}{8.v_0.sen\theta} \quad (4.119)$$

Segue que a série de Taylor para $\frac{1}{1+x}$ ( no intervalo de $]-1,\ \ 1[$) é:

$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.x^n$ ,para $|-x|<1$,isto é $|x|<1$ em resumo, podemos escrevê-la

$(1+x)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.x^n$ para $|x|<1$ .

Novamente iremos fazer outra perturbação usando a expansão da série de Taylor do

$(1+\frac{k.v_0.sen\theta}{g.m})^{-1}$ para $\left|\frac{k.v_0.sen\theta}{g.m}\right|<1$

$$(1+\frac{k.v_0.sen\theta}{gm})^{-1}=1-\frac{k.v_0.sen\theta}{gm}+\frac{k^2.{v_0}^2.(sen\theta)^2}{g^2m^2}-\cdots \quad (4.120)$$

Se considerarmos que k <1, e mais supondo o k pequeno da ordem $k\approx 10^{-2}$, assim $k^2\approx 10^{-4}$, podemos desprezar n os termos a partir da ordem $k^3$, assim vai substituir a Eq.(4.120) na Eq.(4.118), e fazendo o desenvolvimento temos:

$$(t-\frac{3.m}{2.k})^2-(\frac{3.m}{2.k})^2=\frac{-6.m.v_0.sen\theta}{k.g}.(1-\frac{k.v_0.sen\theta}{g.m}+\frac{k^2.{v_0}^2.(sen\theta)^2}{g^2.m^2}-\frac{k^3.{v_0}^3.(sen\theta)^3}{g^3.m^3})$$

$$(t-\frac{3.m}{2.k})^2-(\frac{3.m}{2.k})^2=\frac{-6.m.v_0.sen\theta}{k.g}+\frac{6.{v_0}^2.(sen\theta)^2}{g^2}-\frac{6k.{v_0}^3.(sen\theta)^3}{g^3.m}+\frac{6k^2.{v_0}^4.(sen\theta)^4}{g^4.m^2})$$

$$(t-\frac{3.m}{2.k})=\mp\sqrt{(\frac{3.m}{2.k})^2+\frac{-6.m.v_0.sen\theta}{k.g}+\frac{6.{v_0}^2.sen\theta^2}{g^2}-\frac{6.k.{v_0}^3.(sen\theta)^3}{g^3.m}+\frac{6.k^2.{v_0}^4.(sen\theta)^4}{g^4.m^2})}$$

$$t=\frac{3.m}{2.k}\mp\sqrt{(\frac{3.m}{2.k})^2+\frac{-6.m.v_0.sen\theta}{k.g}+\frac{6.{v_0}^2.(sen\theta)^2}{g^2}-\frac{6.k.{v_0}^3.(sen\theta)^3}{g^3.m}+\frac{6.k^2.{v_0}^4.(sen\theta)^4}{g^4.m^2})} \quad (4.121)$$

A Eq.(4.121) representa o tempo de voo do projétil até atingir o solo partindo da origem.

Agora precisa- se de verificar para que intervalo, de $k$, o método de perturbação usado é válido. Basta fazer $\frac{v_0.sen\theta}{g.m}k<1$

$\frac{v_0.sen\theta}{g.m}k<1$

$v_0.sen\theta.k\leq g.m$

$$k<\frac{g.m}{v_0.sen\theta} \quad (4.122)$$

Porém a Eq.(4.119) e menor que a Eq.(4.122), isto mostra que o valor de $k$ não pode ser maior ou igual a $\frac{3g.m}{8.v_0.sen\theta}$.

**Exemplo1:**

Um lançamento da origem, com velocidade inicial de 10 m/s e um ângulo de 30°de uma bola de golfe de 0,046 kg e coeficiente de arrasto 0,024 conforme simulador.

Dados: $v_{0x} = 10cos30° = 8{,}65\ m/s$ ;

$v_{0yx} = 10sen30° = 5m/s \quad g = 10m/s^2$

$y(t) = y_0 - \frac{m.g}{k}t + \left[\frac{m^2.g+k.m.v_0.sen\theta}{k^2}\right].(1 - e^{-\frac{t.k}{m}})$

O tempo necessário para partícula retornar ao solo, basta usar a Eq.(4.121),

$t = \frac{3.m}{2.k} \mp \sqrt{(\frac{3.m}{2.k})^2 + \frac{-6.m.v_0.sen\theta}{k.g} + \frac{6.{v_0}^2.(sen\theta)^2}{g^2} - \frac{6.k.{v_0}^3.(sen\theta)^3}{g^3.m} + \frac{6.k^2.{v_0}^4.(sen\theta)^4}{g^4.m^2}}$

$t \cong 2{,}875 \mp \sqrt{8{,}27 - 5{,}75 + 1{,}5 - 0{,}39 + 0{,}10}$

$t \cong 2{,}875 \mp \sqrt{3{,}73}$

$t \cong 2{,}875 - 1{,}93 \cong 0{,}94$

Tendo do valor do tempo de voo, basta substituir na Eq.(4.79).

$x(t) = \frac{m}{k}v_0.cos\phi.(1 - e^{-\frac{tk}{m}})$

Substituindo a Eq.(4.107) na Eq.(4.79)

$x(t) = \frac{m}{k}v_0.cos\phi\left(\frac{t.k}{m} - \frac{t^2.k^2}{2.m^2} + \frac{t^3.k^3}{6.m^3}\right)$

$x(t) = \frac{m}{k}v_0.cos\phi\left(\frac{k}{m}\left(t - \frac{t^2.k}{2.m} + \frac{t^3.k^2}{6.m^2}\right)\right)$

$x(0{,}94) = \frac{0{,}046}{0{,}024}.8{,}65.\left(\frac{0{,}024}{0{,}046}\left(0{,}94 - \frac{0{,}94^2.0{,}024}{2.0{,}046} + \frac{0{,}94^3.0{,}024^2}{6.0{,}046^2}\right)\right)$

$x(0{,}94) \cong 16{,}58(\ 0{,}52(0{,}94 - 0{,}23 + 0{,}038\ ) \cong 16{,}58.\left((0{,}52)(0{,}75)\right) \cong 6{,}46\ m$

Com o auxilio do software Geogebra e do software livre FreeMat a solução via gráfico do exemplo1 estão indicadas nas Fig.(4.2.12), Fig(4.2.13) e Fig.(4.2.14).

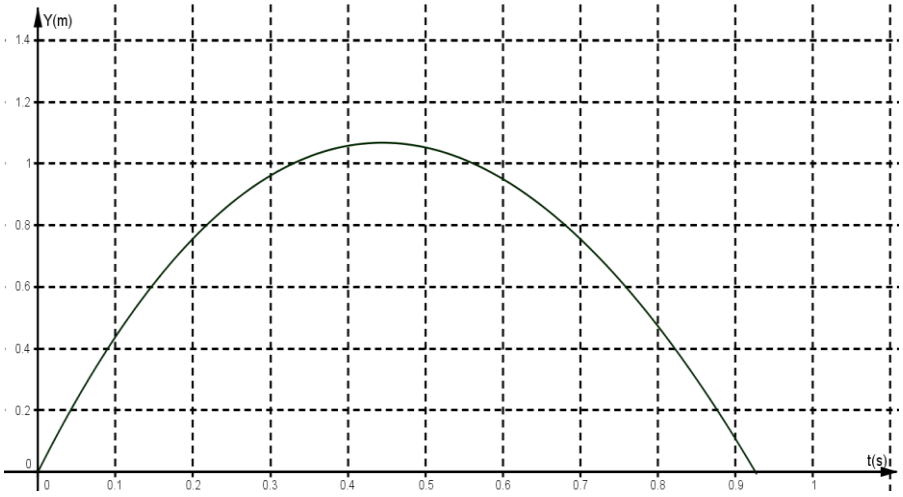



Figura 4.2.12 componente vertical pelo tempo

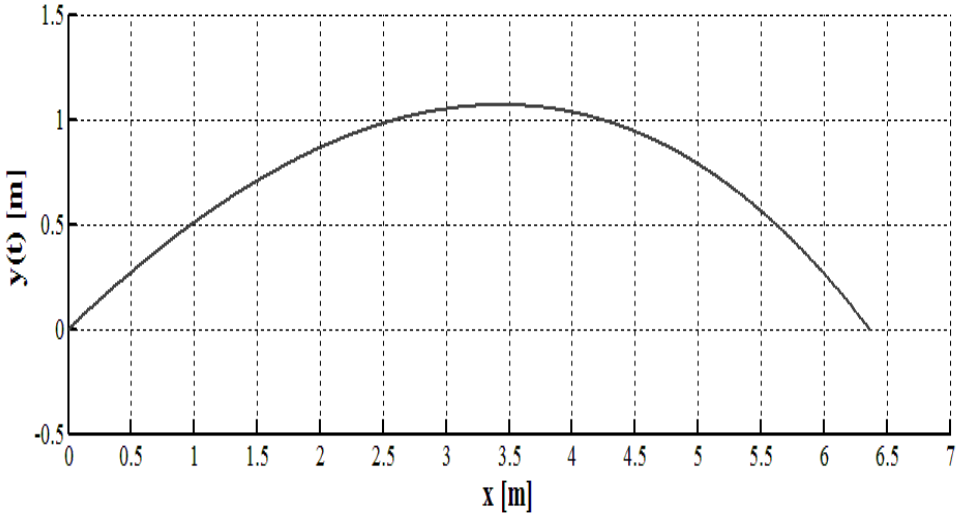
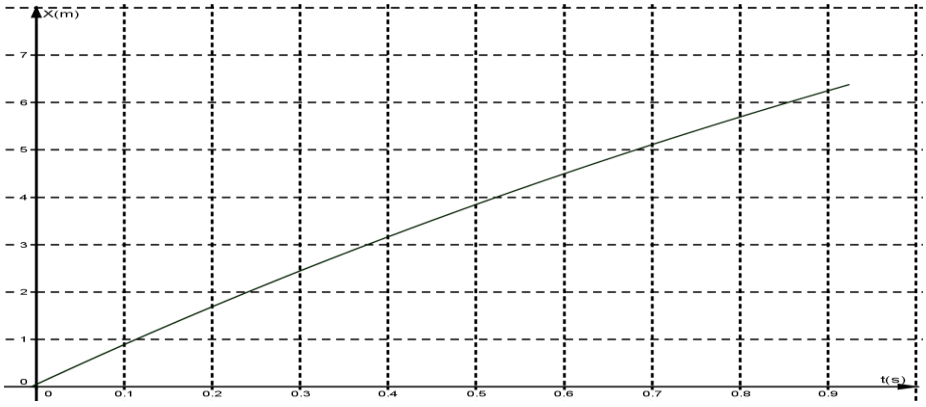



Figura 4.2.13 O alcance do projétil no eixo horizontal pela vertical




4.2.14 Componente horizontal pelo tempo

A Fig.(4.2.15) é o editor do software FreeMat, com os comandos dos gráficos acima, com comentários.

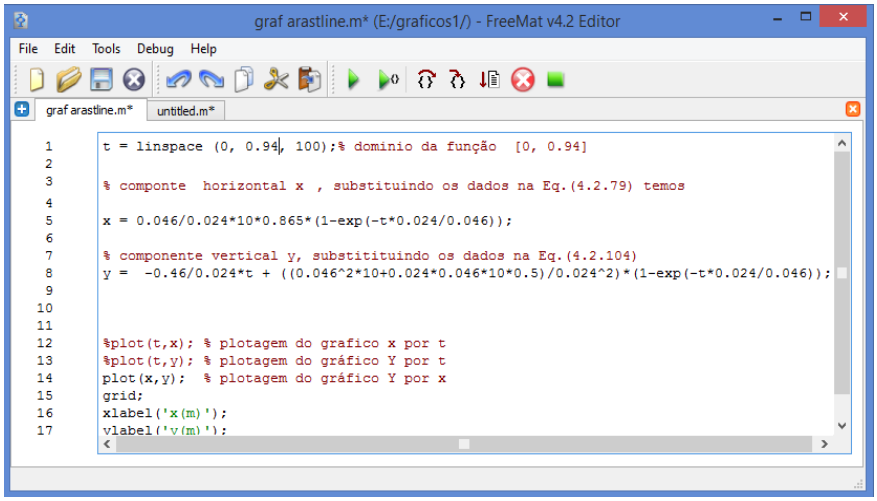



Figura 4.2.15: Sequência de comandos para construção dos gráficos do exemplo1

A Fig.(4.2.16) é a execução do software FreeMat, com os comandos da Fig.(4.2.15).

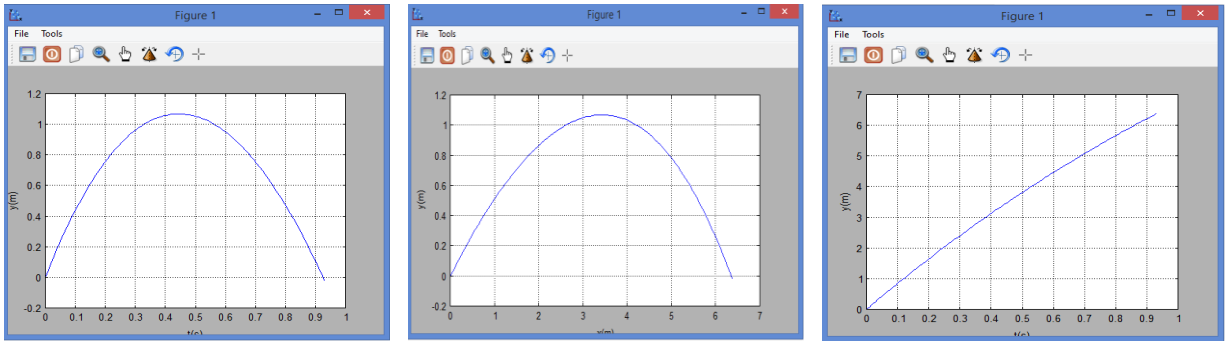



Figura 4.2.16: Os gráficos referentes aos comandos da Fig.(4.2.15)

**Exemplo2:**

Suponha o lançamento de uma bola de golfe de 0,046 kg da origem, com velocidade inicial de 30 m/s e um ângulo de 55°, usando coeficientes de arrastos $k_1 = 0$, $k_2 = 0{,}008$, $k_3 = 0{,}016$, $k_4 = 0{,}024$, $k_5 = 0{,}032$ e $k_6 = 0{,}0001$. Responda os itens abaixo

a) Faça os gráficos de todos os coeficientes acima abaixo usando software Geogebra ou FreeMat;

b) Para que valores o método feito acima funciona;

c) (Escolha um valor de k que funciona e verifique se coincide o gráfico do item a)

Solução:

a) Usando o software FreeMat do mesmo modo que fizemos no exemplo1, os gráficos ficaram assim plotados.

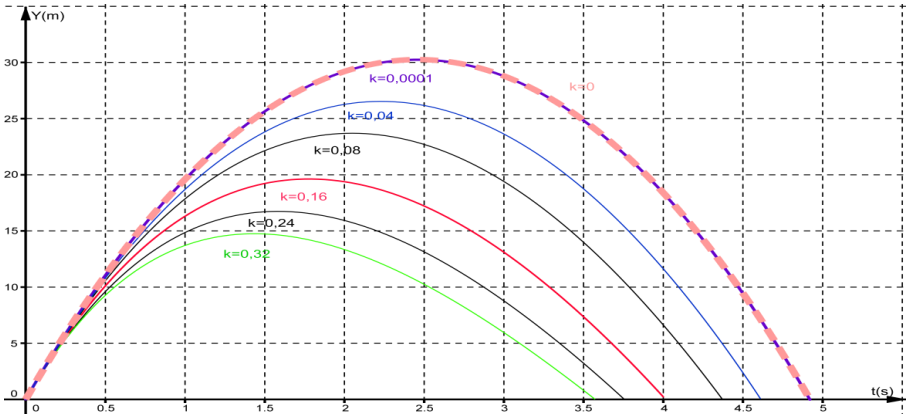



Figura 4.2.17 Trajetória Y(m) pelo t(s) para vários coeficientes de arrastos

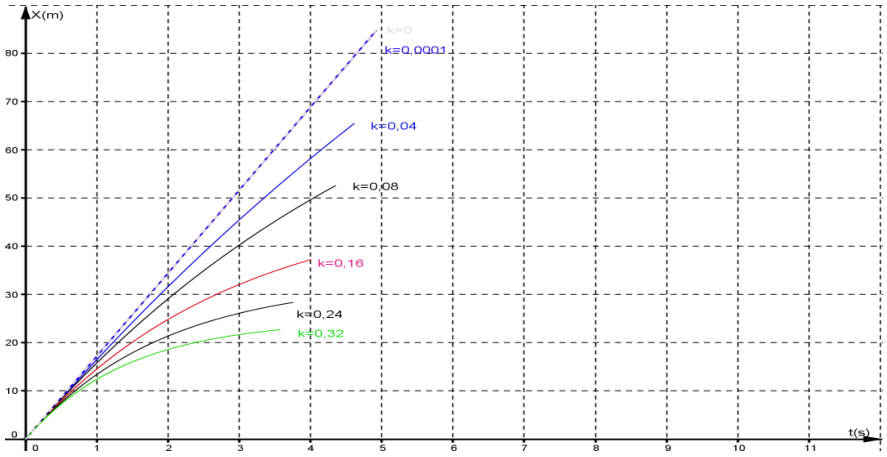



Figura 4.2.18 Trajetória X(m) pelo t(s) para vários coeficientes de arrastos.

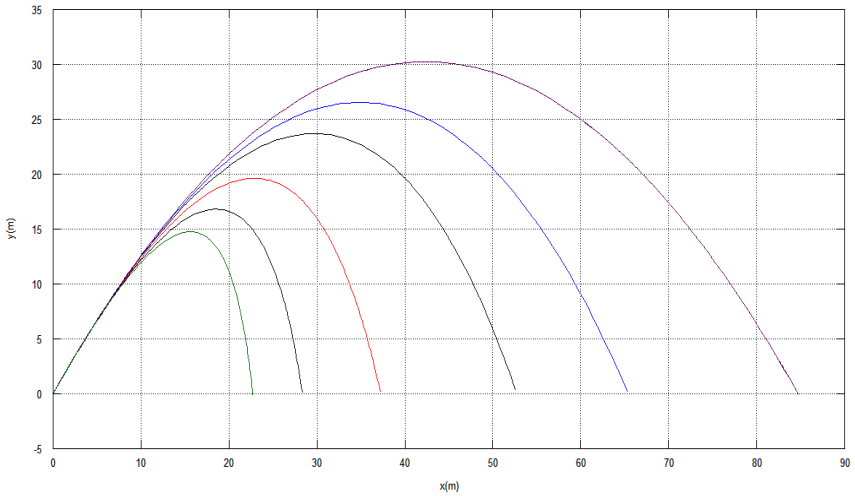



Figura 4.2.19 Trajetória Y(m) pelo X(m) para vários coeficientes de arrastos

b) Primeiramente vamos verificar para que k esse método funciona

$k < \frac{3.mg}{8.v_0.sen\emptyset} = \frac{3.0{,}046.10}{8.30.0.82} \Rightarrow\ k < 0.07$

Assim, vamos verificar para k = 0,008

$t \cong \frac{3m}{2k} \mp \sqrt{(\frac{3m}{2k})^2 - \frac{6.mv_0.sen\emptyset}{kg} + \frac{6{v_0}^2.sen\emptyset^2}{g^2} - \frac{6k..{v_0}^3.sen\emptyset^3}{g^3m} + \frac{6k^2..{v_0}^4.sen\emptyset^4}{g^4m^2}}$ ...

$t \cong 8{,}65 \mp \sqrt{74{,}8 - 84{,}8 + 36{,}3 - \ 15{,}5 + 6{,}6}$

$t \cong 8{,}65 \mp \sqrt{17{,}4}$

$t \cong 8{,}65 - 4{,}17 = 4{,}48\ s$

$x(t) = \ \frac{m}{k} v_0.cos\phi \left(\frac{k}{m}\left(t - \frac{t^2.k}{2.m} + \frac{t^3.k^2}{6.m^2}\right)\right)$

$x(4{,}5) = \ \frac{0{,}046}{0{,}008}.8{,}65.\left(\frac{0{,}008}{0{,}046}\left(4{,}5 - \frac{4{,}5^2.0{,}008}{2.0{,}046} + \frac{4{,}5^3.0{,}008^2}{6.0{,}046^2}\right)\right)$

$x(4{,}5) \cong 99(\ 0{,}17(4{,}5 - 1{,}76 + 0{,}46\ ) \cong 99.(0{,}81) \cong 54\ m$

Concluímos que a solução gráfica valida o método de pertubação. Os resultados são aproximadamente os mesmos.

**Exemplo3:**

O lançamento oblíquo feito da altura inicial de 1 m, com velocidade inicial de 40 m/s, massa 0,1 kg e um ângulo de 30°, usando coeficientes de arrastos $k_1 = 0$, $k_2 = 0{,}012$, $k_3 = 0{,}018$, $k_4 = 0{,}024$ e $k_5 = 0{,}000001$. Responda os itens abaixo:

a) Ache o tempo de voo, usando a Eq.(4.2.100) pelo software matemático FreeMat;
b) Faça os gráficos de todos os coeficientes acima abaixo usando software Geogebra ou FreeMat;
c) Compare os tempos usando $k_4 = 0{,}018$ partindo a bola da origem da Eq.(4.2.112) pelo software matemático e da Eq.(4.2.121) feita na calculadora.

Solução:

a) Usando o software para resolver a equação abaixo:

$0 = y_0 + v_0 sen\emptyset t - \left[\frac{mg + k.v_0.sen\emptyset}{2.m}\right]t^2 + \left[\frac{m.kg + k^2 v_0.sen\emptyset}{6.m^2}\right]t^3 - \left[\frac{m.k^2 g + k^3.v_0.sen\emptyset}{24.m^3}\right]t^4$

Para $k_1$ = 0, temos:

$0 = y_0 + \ v_0.sen\emptyset.t - \left[\frac{g}{2}\right].t^2 \ \Rightarrow 0 = 1 + 20.t - 5.t^2 \Rightarrow t_1 \cong 4{,}04\ ;\ \ t_2 \cong -0{,}04\ ,$

logo o tempo válido é 4,04s

Para $k_2$ = 0,012 temos:

$0 = 1 + 20.t - \ 6.2.t^2 + 0.248.t^3 - 0.0074.t^4 \Rightarrow t_1 \cong -0{,}05\ ;\ t_2 \cong 3.77\ \ ;\ \ t_3 \cong 14{,}9 + 22{,}5i$ e $t_4 = 14{,}9 - 22{,}5i$

Logo o tempo válido é 3,77s aproximadamente

Para $k_3$ = 0,018

$0 = 1 + 20.t - 6{,}8.t^2 + 0.4.t^3 - 0.018.t^4 \Rightarrow t_1 \cong -0{,}05\ ;\ t_2 \cong 3{,}64\ ;\ t_3 \cong 9{,}3 + 15i$ e $t_4 = 9.3 - 15i$

Logo o tempo válido é 3,64s aproximadamente

Para $k_4$= 0,024

$0 = 1 + 20.t - 7{,}4.t^2 + 0.59.t^3 - 0{,}035t^4 \Rightarrow t_1 \cong -0{,}049\ ;\ t_2 \cong 6{,}7 + 11i$

$t_3 \cong 6.7 - 11.i$ e $t_4$ =3,53

Logo o tempo válido é 3,53 s

Para $k_5$=0,000001

$0 = 1 + 20.t - 5{,}0.t^2 + 0.000017.t^3 - 0{,}000000004.t^4 \Rightarrow \quad 0 = 1 + 20.t - 5{,}0.t^2 \Rightarrow t_1 \cong 4{,}04\ ;\ t_2 \cong -0{,}04$ , logo o tempo válido é 4,04s

A Fig.(4.2.21) mostra os comandos acima no software FreeMat para solução dos polinômios acima.

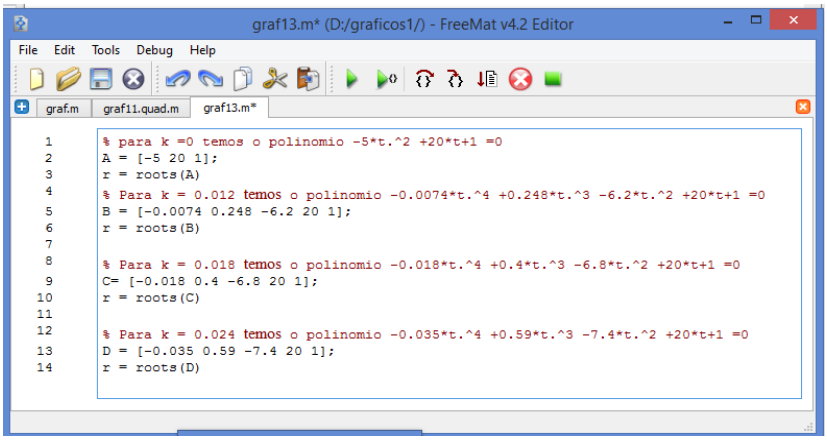



Figura 4.2.20 Janela do Editor FreeMat com os comandos.

A Fig.(4.2.21) abaixo mostra a solução dos polinômios da Fig.(4.2.20).

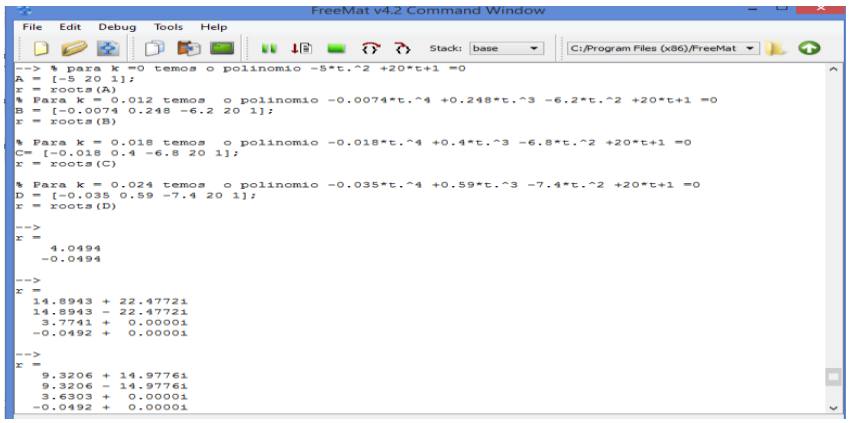



Figura 4.2.21 Janela de solução dos polinômios do exemplo 3

A solução gráfica é representada pelas Fig.(4.2.22), Fig.(4.2.23) e Fig.(4.2.24), para vários coeficientes de arrastos.

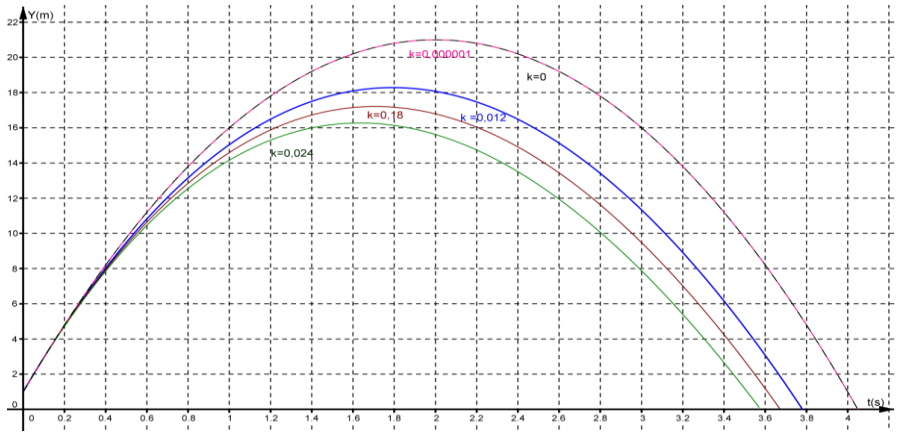



Figura 4.2.22Trajetória Y(m) pelo t(s) para o exemplo 3

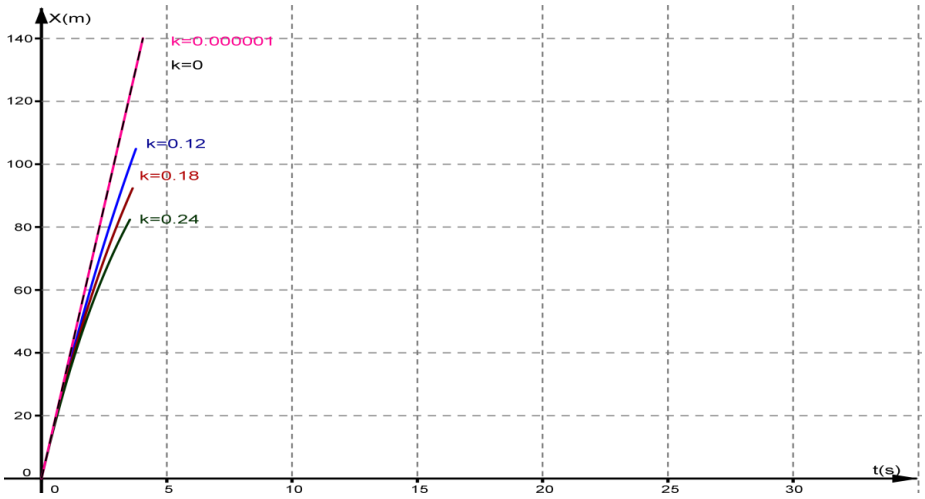



Figura 4.2.23 Trajetória X(m) pelo t(s) para o exemplo 3

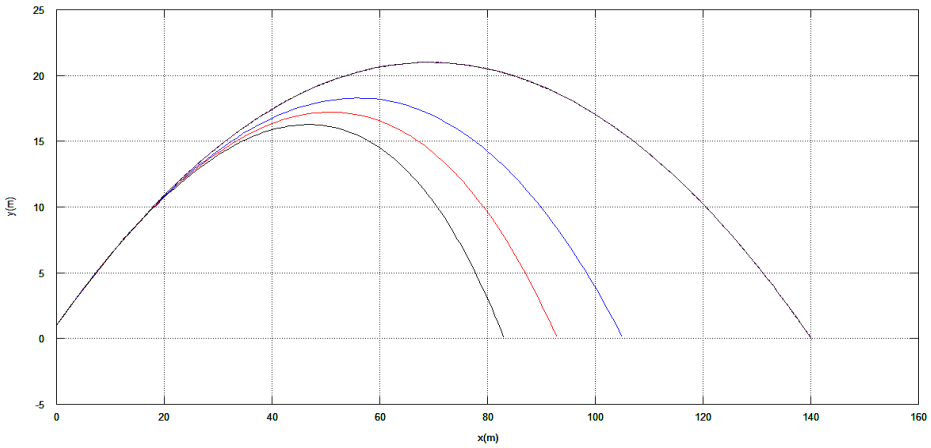



Figura 4.2.24 Trajetória Y(m) pelo X(m) para o exemplo 3.

c) Pelo software temos:

$$0 = y_0 + v_0.sen\emptyset.t - \left[\frac{m.g+k.v_0.sen\emptyset}{2.m}\right]t^2 + \left[\frac{m.k.g+k^2.v_0.sen\emptyset}{6.m^2}\right]t^3 - \left[\frac{m.k^2.g+k^3.v_0.sen\emptyset}{24.m^3}\right]t^4$$

Substituindo os dados do problema na equação acima temos o polinômio de 4º grau $0 = 0 + 20.t - 6{,}8.t^2 + 0.4.t^3 - 0.018.t^4 \Rightarrow t_1 \cong 0;\ t_2 \cong 3{,}6\ ;\ t_3 \cong 9{,}3 + 15i$ e $t_4 = 9.3 - 15i$. A Primeira raiz real positiva é $t_2 \cong 3{,}6$.

Pela Eq.(4.2.121), temos:

$$t = \frac{3.m}{2.k} \mp \sqrt{(\frac{3.m}{2.k})^2 + \frac{-6.m.v_0.sen\theta}{k.g} + \frac{6.{v_0}^2.(sen\theta)^2}{g^2} - \frac{6.k.{v_0}^3.(sen\theta)^3}{g^3.m} + \frac{6.k^2.{v_0}^4.(sen\theta)^4}{g^4.m^2}})$$

$t = 8.3 \mp\sqrt{69{,}4 - 66{,}7 + 24 - 8{,}64 + 3{,}11)} \Rightarrow t = 8{,}3 - 4{,}6 = 3{,}7$ é a primeira raiz positiva. Ou seja, pelas duas equações os valores são praticamente os mesmos, encontramos uma boa aproximação. Mas tome cuidado, pois a Eq.(4.121) só é válida para $k < \frac{3.m.g}{8.v_0.sen\emptyset}$ é bom verificar antes.

## 4.3.2.4. Movimento de translação do projétil supondo a resistência do ar proporcional ao quadrado da velocidade $\left(F = k.v^2\right)$

O movimento oblíquo se dá em duas dimensões, ou seja, um movimento na horizontal e outro movimento na vertical, conforme o diagrama indicado na Fig.(4.2.16) abaixo.

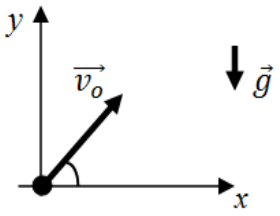



Figura 4.2.25 Trajetória da partícula partindo da origem

Onde $v_{0x} = v_0.cos\theta$ e $v_{0y} = v_0.sen\theta$ são as velocidades iniciais, respectivamente na direção x e y e $\theta$ o ângulo formado entre a velocidade inicial $v_0$ e eixo horizontal x.

## 4.3.2.5. Movimento Horizontal

$$\overrightarrow{F_r} = -k.{v_x}^2 \quad (1ª \text{ lei de Newton}), \tag{4.123}$$

$$m.a = -k.{v_x}^2 \tag{4.124}$$

$$m.\frac{dv_x(t)}{dt} = -k.{v_x}^2 \tag{4.125}$$

$$\frac{dv_x(t)}{{v_x}^2} = -\frac{k}{m}.dt \quad (4.126)$$

$$-\frac{1}{v_x} = -\frac{k}{m}t + c \Rightarrow \frac{1}{v_x} = \frac{k}{m}t - c \quad (4.127)$$

Fazendo $t = 0$, temos

$$c = -\frac{1}{v_x(0)} \quad (4.113)$$

Voltando a Eq.( 4.112 )

$$\frac{1}{v_x(t)} = \frac{k}{m}t + \frac{1}{v_x(0)} \Rightarrow \frac{1}{v_x(t)} = \frac{k.v_x(0).t+m}{m.v_x(0)} \Rightarrow v_x(t) = \frac{m.v_x(0)}{k.v_x(0).t+m} \quad (4.128)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m.v_x(0)}{k.v_x(0).t+m} \Rightarrow dx = \frac{m.v_x(0)}{k.v_x(0).t+m}.dt \quad (4.129)$$

Fazendo $u = k.v_x(0).t + m \Rightarrow du = k.v_x(0).dt \Rightarrow v_x(0).dt = \frac{du}{k}$ (4.130)

Substituindo a Eq.(4.130 ) na Eq.(4.129)

$$x(t) = \frac{m}{k}.\frac{du}{u} \Rightarrow x(t) = \frac{m}{u.k}.du \quad (4.131)$$

$$x(t) = \frac{m}{k}.lnu + c \Rightarrow x(t) = \frac{m}{k}.\ln(k.v_x(0).t + m) + c \quad (4.132)$$

Fazendo $t = 0$ , temos:

$$\Rightarrow x(0) = \frac{m}{k}.\ln(k.v_x(0).0 + m) + c \Rightarrow c = x(0) - \frac{m}{k}.\ln(m) \quad (4.133)$$

$$x(t) = x(0) - \frac{m}{k}.\ln(m) + \frac{m}{k}.\ln(k.v_x(0).t + m) \quad (4.134)$$

Assim temos a função da trajetória na horizontal, dada por:

$$x(t) = x(0) + \frac{m}{k}.\ln\left(\frac{k.t.v_x(0)+m}{m}\right) \quad (4.135)$$

Substituindo $v_0.cos\phi$ por $v_x(0)$

$$x(t) = x(0) + \frac{m}{k}.\ln\left(\frac{k.v_0.t.cos\phi+m}{m}\right) \quad (4.136)$$

## 4.3.2.6. Movimento componente vertical

$$\overrightarrow{F_r} = \overrightarrow{P} - k.v^2 \quad (2ª \text{ lei de Newton}) \quad (4.137)$$

$$m.a = -mg - k.{v_y}^2 \quad (4.138)$$

Dividindo toda expressa por $m$, obtemos:

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{k}{m}.{v_y}^2 \quad (4.139)$$

Colocando $g$ em evidencia obtemos:

$$\frac{dv}{dt} = -g\left(1 + \frac{k}{m.g}.{v_y}^2\right) \quad (4.140)$$

$$\frac{dv_y}{(1+\frac{k}{m.g}.{v_y}^2)} = -g.dt \tag{4.141}$$

$$\frac{dv_y}{1+\left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}\right)^2.{v_y}^2} = -gdt \tag{4.142}$$

Fazendo $u = \sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y \Rightarrow du = \sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y \Rightarrow dv_y = \frac{du}{\sqrt{\frac{k}{m.g}}}$ (4.143)

$$\frac{du}{\sqrt{\frac{k}{m.g}}.(1+u^2)} = -gdt \tag{4.144}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m.g}}}.arctg(u) = -g.t + c \tag{4.145}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m.g}}}.arctg\left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y\right) = -g.t + c \tag{4.146}$$

Fazendo $t = 0$ temos:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m.g}}}.arctg\left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right) \tag{4.147}$$

Substituindo Eq.(4.147) na Eq.(4.146) temos

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m.g}}}.arctg\left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y\right) = -g.t + \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m.g}}}.arctg\left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right) \tag{4.148}$$

Multiplicando Eq.(4.148) por $\sqrt{\frac{k}{m.g}}$, obtemos

$$arctg\left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y\right) = -\sqrt{\frac{k}{m.g}}.g.t+.arctg\left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right) \tag{4.149}$$

$$\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y = t.g\left(-\sqrt{\frac{k}{m.g}}.g.t+.arctg\left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right)\right) \tag{4.150}$$

$$v_y = \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m.g}}}.t.g\left(-\sqrt{\frac{k}{m.g}}.g.t+.arctg\left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right)\right) \tag{4.151}$$

$$dy(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m.g}}}.tg\left(-\sqrt{\frac{k}{m.g}}.g.t+.arctg\left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right)\right).dt \tag{4.152}$$

$$dy(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m.g}}}.\left(\frac{sen(-\sqrt{\frac{k}{m.g}}.g.t+.arctg\left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right)}{cos\left(-\sqrt{\frac{k}{m.g}}.g.t+.arctg\left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right)\right)}\right).dt \tag{4.153}$$

Integrando ambos os lados da igualdade e fazendo,

$$u = cos\left(-\sqrt{\frac{k}{m.g}}.g.t+.arctg\left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right)\right) \quad (4.154)$$

$$du = -sen(-\sqrt{\frac{k}{m.g}}.g.t+.arctg\left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right) - \sqrt{\frac{k}{m.g}}.gdt \quad (4.155)$$

$$\frac{du}{g.\sqrt{\frac{k}{m.g}}} = sen\left(-\sqrt{\frac{kg}{m}}.t + arctg\left(\frac{\sqrt{mg.k}.v_y(0)}{m.g}\right)\right)dt$$

(4.156)

Substituindo a Eq.(4.156) na Eq.(4.145), temos

$$dy(t) = \frac{1}{g.\sqrt{\frac{k}{m.g}}..\sqrt{\frac{k}{m.g}}.}.\frac{du}{u} \quad (4.157)$$

$$y(t) = \frac{1}{g.\frac{k}{m.g}}\ln(u)+d \quad (4.158)$$

$$y(t) = \frac{m}{k}.\ln\left(cos\left(-\sqrt{\frac{k}{m.g}}.g.t + arctg\left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right)\right)\right)+d \quad (4.159)$$

Fazendo $t = 0$, temos:

$$d = y(0) - \frac{m}{k}.\ln\left(\cos\left(arctg\left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right)\right)\right) \quad (4.160)$$

Substituindo a Eq.(4.160) na Eq.(4.159) e fazendo as operações obtemos

$$y(t) = y(0) + \frac{m}{k}.\ln\left(\frac{cos\left(-\sqrt{\frac{k}{m.g}}.g.t+arctg\left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right)\right)}{\cos\left(arctg\left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right)\right)}\right) \quad (4.161)$$

Usando a fórmula do cosseno de adição de arcos, obtemos:

$$y(t) = y(0) + \frac{m}{k}.\ln\left(\cos\left(\text{g.t}\sqrt{\frac{k}{m.g}}\right) + \frac{\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.g.t\right).\text{sen}\left(arctg\left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right)\right)}{\cos\left(arctg\left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right)\right)}\right) \quad (4.162)$$

$$y(t) = y(0) + \frac{m}{k}.\ln\left(\cos\left(\text{t}.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right) + \left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right).\text{sen}\left(t.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right)\right) \quad (4.163)$$

Substituindo $v_0.sen\phi$ por $v_y(0)$

$$y(t) = y(0) + \frac{m}{k}.\ln\left(\cos\left(\text{t}.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right) + \left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_0.sen\phi\right).\text{sen}\left(t.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right)\right) \quad (4.164)$$

A equação Eq.(4.164) trajetória da componente do movimento vertical.

Para descobrir o tempo de trajeto, basta fazer $y(t) = 0$ (o tempo necessário para o projétil retornar ao solo).

$$0 = y(0) + \frac{m}{k}.\ln\left(\cos\left(\mathrm{t}.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right) + \left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right).\mathrm{sen}\left(t.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right)\right) \tag{4.165}$$

$$\ln(1) = \ln(e^{y(0)}) + \ln\left(\cos\left(\mathrm{t}.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right) + \left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right).\mathrm{sen}\left(t.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right)\right)^{\frac{m}{k}} \tag{4.166}$$

$$\ln(1) = \ln(e^{y(0)}).\left(\cos\left(\mathrm{t}.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right) + \left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right).\mathrm{sen}\left(t.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right)\right)^{\frac{m}{k}} \tag{4.167}$$

$$1 = e^{y(0)}.\left(\cos\left(\mathrm{t}.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right) + \left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right).\mathrm{sen}\left(t.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right)\right)^{\frac{m}{k}} \tag{4.168}$$

$$\frac{1}{e^{y(0)}} = \left(\cos\left(\mathrm{t}.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right) + \left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right).\mathrm{sen}\left(t.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right)\right)^{\frac{m}{k}} \tag{4.169}$$

Essa equação não pode ser resolvida analiticamente, logo vamos usar o método da perturbação para descobrir o tempo de trajeto aproximado, com perda insignificante para a solução. Para isto vamos fazer a expansão da série de Taylor para o termo que contem a função seno e cosseno

$$\cos\left(\mathrm{t}.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right) = 1 - \frac{\left(\mathrm{t}.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right)^2}{2} + \frac{\left(\mathrm{t}.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right)^4}{24} - \frac{\left(\mathrm{t}.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right)^6}{720} + \cdots \tag{4.170}$$

$$\mathrm{sen}\left(\mathrm{t}.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right) = \mathrm{t}.\sqrt{\frac{k.g}{m}} - \frac{\left(\mathrm{t}.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right)^3}{6} + \frac{\left(\mathrm{t}.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right)^5}{120} - \cdots \tag{4.171}$$

Se considerarmos que k <1, e mais supondo pequeno da ordem $k \approx 10^{-2}\cdot$, assim $k^2 \approx 10^{-4}$, podemos desprezar n os termos a partir da ordem $k^3$, (ou seja, truncando a série, a parte de n termos desprezado não tem influencia significativa na solução) o termo de expoente maior que 5, e substituindo as Eq.(4.170) e Eq.(4.171) na Eq.(4.155) e fazendo os cálculos temos:

$$e^{-\frac{k}{m}y(0)} = 1 - \frac{\left(\mathrm{t}.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right)^2}{2} + \frac{\left(\mathrm{t}.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right)^4}{24} + \left(\sqrt{\frac{k}{m.g}}.v_y(0)\right).\left(\mathrm{t}.\sqrt{\frac{k.g}{m}} - \frac{\left(\mathrm{t}.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right)^3}{6} + \frac{\left(\mathrm{t}.\sqrt{\frac{k.g}{m}}\right)^5}{120}\right)$$

$$e^{-\frac{k}{m}y(0)} = 1 - \frac{k.g}{2.m}.t^2 + \mathrm{t}^4.\frac{k^2.g^2}{24.m^2} + \frac{k.}{m}.v_y(0).t - \frac{k^2.g}{6.m^2}.v_y(0).t^3 + \mathrm{t}^5.v_y(0)\frac{k^3.g^2}{120.m^3}$$

$$0 = -e^{-\frac{k}{m}y(0)} + 1 + \frac{k.}{m}.v_y(0).t - \frac{k.g}{2.m}.t^2 - \frac{k^2.g}{6.m^2}.v_y(0).t^3 + \mathrm{t}^4.\frac{k^2.g^2}{24.m^2} + \mathrm{t}^5.v_y(0)\frac{k^3.g^2}{120.m^3}$$

$$0 = \frac{m}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}y(0)}) + v_y(0).t - \frac{g}{2}.t^2 - \frac{k.g}{6.m}.v_y(0).t^3 + \mathrm{t}^4.\frac{k.g^2}{24.m} + \mathrm{t}^5.v_y(0)\frac{k^2.g^2}{120.m^2}$$

$$0 = y(0) - \frac{\mathrm{k}.y(0)^2}{2.\mathrm{m}} + \frac{\mathrm{k}^2.y(0)^3}{6.\mathrm{m}^2} + v_y(0).t - \frac{g.t^2}{2} - \frac{k.g.v_y(0).t^3}{6.m} + \frac{k.g^2.\mathrm{t}^4}{24.m} + \frac{v_y(0).k^2.g^2.\mathrm{t}^5}{120.m^2} \qquad (4.172)$$

Fazendo o k tendo para o zero, temos a equação $0 = y(0) - +v_y(0).t - \frac{g}{2}.t^2$. Isto é a equação do tempo de voo sem a resistência do ar ou seja mostra que o método usado acima está correto e mas a Eq.(4.2.172) é um polinômio de quinto grau, onde $v_y(0), k, g, m$ são constantes, logo podemos achar as soluções reais deste polinômio por software matemático FreMat.

Supondo o objeto partindo da origem, ou seja, $y(0) = 0$, temos:

$$v_y(0).\frac{k^2.g^2.t^5}{120.m^2} + \frac{k.g^2.t^4}{24.m} - v_y(0).\frac{k.g.t^3}{6.m} - \frac{g.t^2}{2} + v_y(0).t = 0 \qquad (4.173)$$

Multiplicando a Eq.(4.2.173) por $\frac{3}{t}$, obtemos:

$$v_y(0).\frac{k^2.g^2.t^4}{40.m^2} + \frac{k.g^2.t^3}{8.m} - v_y(0).\frac{k.g.t^3}{2.m} - \frac{3.g.t^1}{2} + 3.v_y(0) = 0 \qquad (4.174)$$

A Eq.(4.174) é a equação do tempo de voo do objeto partindo da origem.

**Exemplo4:**

Um lançamento da origem, com velocidade inicial de 60 m/s e um ângulo de 30°de uma bola de chumbo de 1,1 kg, coeficiente de arrasto 0,022 e usando g = 10 m/s$^2$. Determine: a) tempo de voo, b) Esboce os gráficos do tempo de voo e alcance máximo.

Solução:

a) Substituindo os valores do enunciado na Eq.(4.174) temos o seguinte polinômio:

$0{,}03.t^4 + 0{,}25.t^3 - 3.t^2 - 15.t + 90 = 0$

Usando o FreeMat, temos as seguintes raízes para este polinômio, conforme a Fig.(4.2.26)

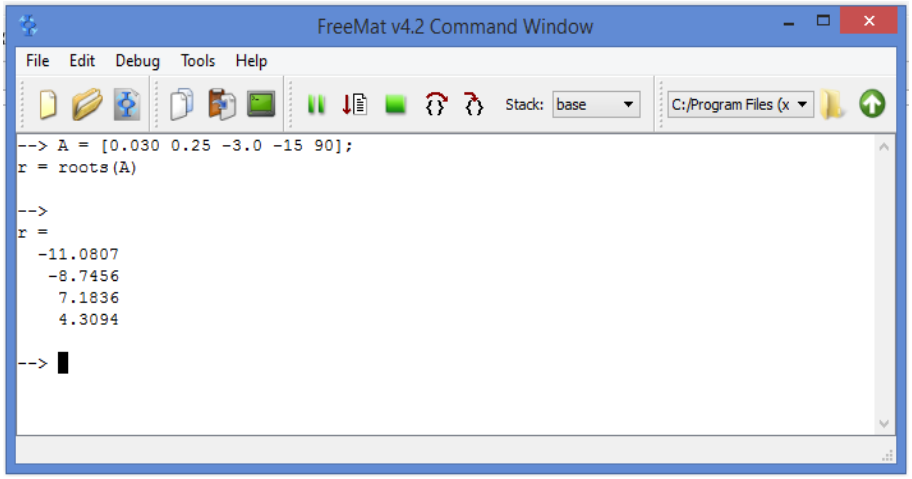



Figura 4.2.26 A solução do polinômio do 4º grau

Logo as raízes pelo FreeMat são, $t_1 = -11{,}1$ ; $t_2 = -8.7$ ; $t_3 = 7{,}1$ $e$ $t_4 = 4{,}3$. Logo $t_1$ $e$ $t_2$ são negativas podem ser descartadas. Mas a raiz procurada é $t_4 = 4{,}3$, pois é o primeiro tempo positivo.

b) Fazendo os gráficos por meio do software FreeMat com intervalo de tempo [0, 4.3], construímos as Fig.(4.2.27), Fig.(4.2.28) e a Fig.(4.2.29) nos mesmos moldes realizados no exemplo1.

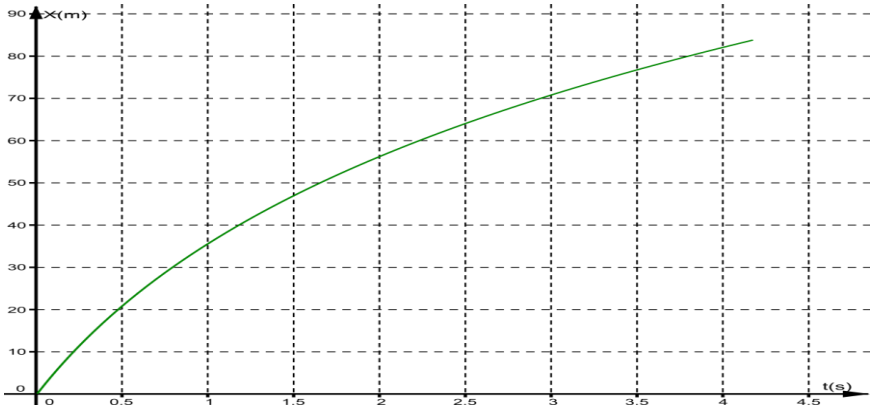



Figura 4.2.27 Trajetória X(m) pelo t(s) para o exemplo 4

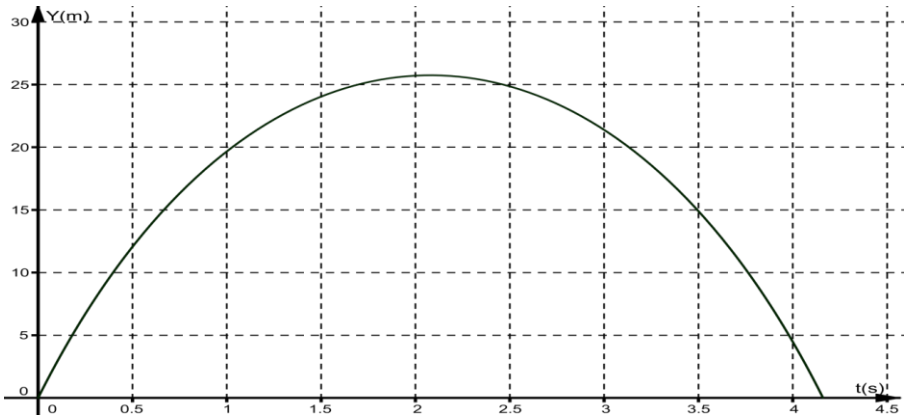



Figura 4.2.28 Trajetória Y(m) pelo t(s) para o exemplo 4

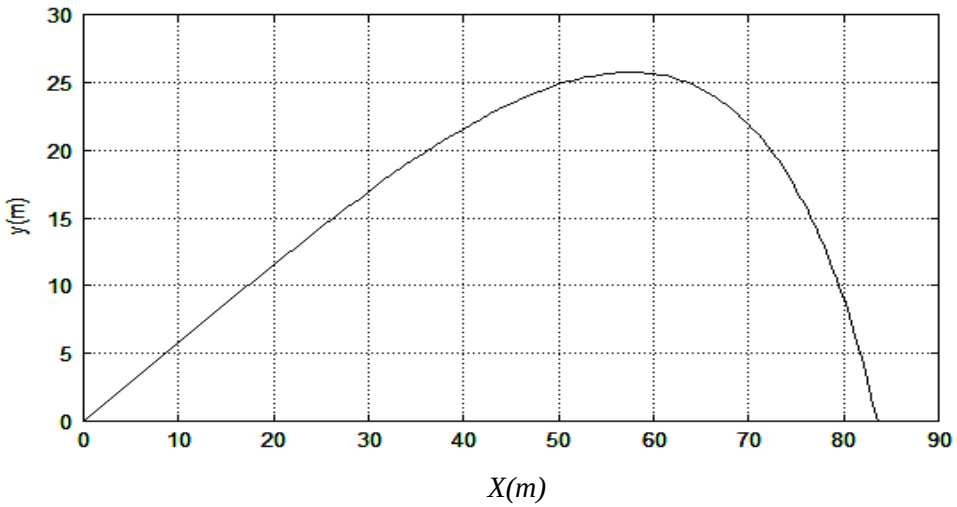



Figura 4.2.29 Trajetória Y(m) pelo X(m) para o exemplo 4

**Exemplo 5:**

Suponha o lançamento de uma bola de golfe de 0,18 kg de uma altura de 2 m, com velocidade inicial de 50 m/s e um ângulo de 60°, usando coeficientes de arrastos $k_1 = 0{,}00001$ e $k_2 = 0{,}008$. Faça os gráficos do arrasto linear, do arrasto quadrático e sem resistência do ar para cada coeficiente usando software Geogebra ou FreeMat.

**Solução:**

Substituindo os dados do problema na Eq.(4.2.136) para componente horizontal do movimento e na Eq.(4.2.164) para a componente vertical do movimento, e usando o software FreeMat da mesma forma do exemplo1, temos os seguintes gráficos abaixo:

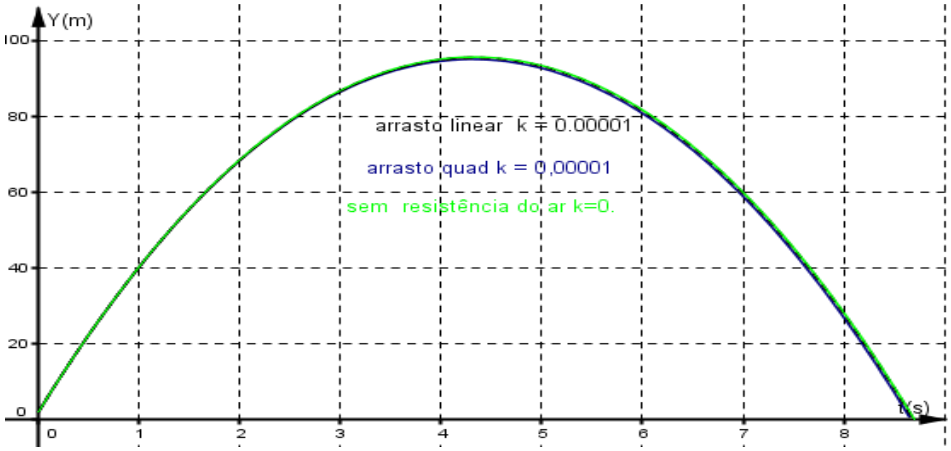



Figura 4.2.30 Trajetória Y(m) pelo t(s) para o exemplo 5 para k = 0,00001

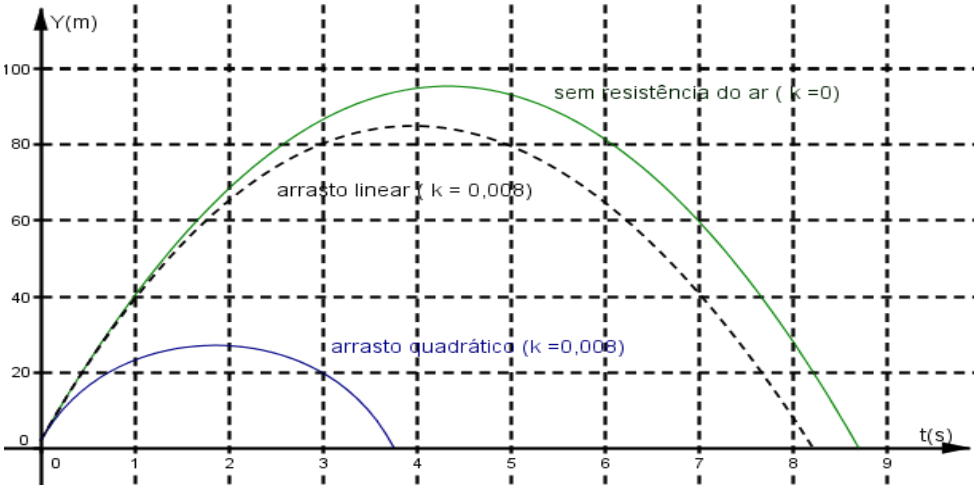



Figura 4.2.31 Trajetória Y(m) pelo t(s) para o exemplo 5 para k= 0,008

A análise gráfica é uma importante ferramenta de validação dos modelos construídos, sendo de grande importância para consolidar conceitos, definições, relacionando-o os dois tipos de arrastos e mostrando que quando o coeficiente de arrastos tende para zero, o gráfico dos três modelos coincidem conforme Fig.(4.2.30), ou seja, os modelos construídos estão corretos.

# 4. Modelagem Por Função Exponencial

## 4.4.1 Aplicações futuras

"**Aplicações futuras"**, é um assunto presente no dia a dia das pessoas, através de propagandas de títulos de capitalização, poupança da caixa, poupança ouro, consórcios entre outros, muitas pessoas compram ou aplicam nesses produtos sob a influencia da mídia.

Baseado em situação problema envolvendo aplicações futuras, faremos a modelagem do problema para descobrir a função escondida por traz do simulador e depois a caracterização da função exponencial, de modo que aluno compreenda e assimile os conceitos básicos da função exponencial, e quando deparar com um problema do cotidiano, consiga interpretá-lo e resolvê-lo usando este mesmo modelo matemático .

**Situação problema 5:** Uma correntista de uma agencia do Banco Brasil resolve fazer um investimento na aplicações futuras, no qual faz k depósitos mensais iguais a uma taxa fixa *i* determinada pelo banco durante uma período n escolhido pelo cliente. Descubra a função matemática por traz desse simulador.

## 4.4.2. Desenvolvimento do Modelo

Existem vários simuladores de varias instituições públicas e privadas no ramo financeiro. Assim nesta modelagem usaremos o simulador hipotético do BB http://www.bb.com.br/portalbb/jsp/home/inst/popupSimulador.jsp?codigoMenu=1092&codigoRet=9850&bread=13_1, do Banco do Brasil, o qual montou a tabela abaixo para a seguinte situação problema: Fazendo depósitos mensais de 200 reais a uma taxa de 1,5% ao mês para um período de 8 meses.

Tabela 4.3.1Autor Montante de séries uniformes

| n | Depósitos | Juros | Montante final do período |
|---|---|---|---|
| **1** | 200 | - | - |
| **2** | 200 | 3 | 403 |
| **2** | 200 | 6,045 | 609,045 |
| **4** | 200 | 9,14 | 818,18 |
| **5** | 200 | 12,27 | 1030,45 |
| **6** | 200 | 15,46 | 1245,91 |
| **7** | 200 | 18,69 | 1464,60 |
| **8** | 200 | 21,97 | 1686,57 |

Fonte: Simulador http://www.bb.com.br/portalbb/

Fazendo os cálculos temos o seguinte raciocínio

No final do primeiro mês:

$M(1) = 200.(1{,}015) = 203$

No final do segundo mês

$M(2) = (203 + 200).(1{,}015) = 409{,}045$

$M(2) = (203(1{,}015) + 200).(1{,}015) = 409{,}045 \Rightarrow$

$M(2) = 200.(1{,}015)^2 + 200.(1{,}015)$

Fazendo de modo análogo teremos para:

No final do terceiro mês:

$M(3) = 200.(1{,}015)^3 + 200.(1{,}015)^2 + 200.(1{,}015)$

E assim sucessivamente teremos par o n-1-ésimo termo a fórmula ,

$M(n) = 200.(1{,}015)^{n-1} + \cdots + 200.(1{,}015)^1 + 200$

Colocando em evidência o termo em comum temos,

$M(n) = 200.[(1{,}015)^{n-1} + (1{,}015)^{n-2} + \cdots + (1{,}015)^1 + 1]$

Assim essa parcela $[(1{,}015)^{n-1} + (1{,}015)^{n-2} + \cdots + (1{,}015)^1 + 1]$, forma soma de uma progressão geométrica de razão $1{,}015$, assim podemos substituir essa parcela pelo resultado obtido $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{1.(1{,}015^n-1)}{1{,}015-1} = \frac{1{,}015^n-1}{0{,}015}$, logo temos

$$M = 200.\left[\frac{1{,}015^n-1}{0{,}015}\right]$$

Dando um tratamento genérico, reescrevendo com variáveis temos:

- 200 - representa o deposito chamaremos de R
- 0,015 - representa a taxa chamaremos de i ( na forma unitária)
- Número de período - representado pela letra n

Assim temos,

$$M = R.\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \tag{4.175}$$

A Eq.(4.175) é fórmula escondida por traz do simulador. Essa função é conhecida como do tipo exponencial

Na matemática financeira $S_{n\neg i} = \left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$ é o fator capitalização para expressar o modelo básico de anuidade como sendo $M = R.\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$ ou $M = R.S_{n\neg i}$, para n parcelas iguais a R, periódicas a uma taxa de juros i, referida ao mesmo período dos temos.

Fazendo os gráficos do montante em relação ao período e do fator em relação a taxa,

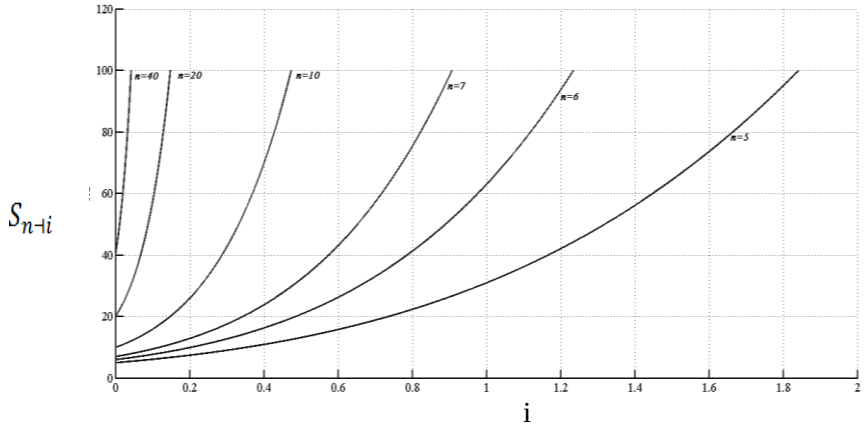



Figura 4.3.1: Gráfico do fator em relação a taxa

Observe que quando a taxa tende para 0 o fator converge para o período n

Demonstração:

$\lim_{i\to 0}\frac{(1+i)^n-1}{i}=\frac{\binom{n}{n}i^n+\binom{n}{n-1}.i^{n-1}+\binom{n}{n-2}.i^{n-2}+\cdots+\binom{n}{1}.i^1+\binom{n}{0}1-1}{i}$

$\lim_{i\to 0}\frac{\binom{n}{n}i^n+\binom{n}{n-1}.i^{n-1}+\binom{n}{n-2}.i^{n-2}+\cdots+\binom{n}{1}.i^1}{i}\Rightarrow$

Colocando $i$em evidência temos:

$\lim_{i\to 0}\frac{i.\left[\binom{n}{n}i^{n-1}+\binom{n}{n-1}.i^{n-2}+\binom{n}{n-2}.i^{n-3}+\cdots+\binom{n}{1}\right]}{i}\Rightarrow$

$\lim_{i\to 0}\binom{n}{n}i^{n-1}+\binom{n}{n-1}.i^{n-2}+\binom{n}{n-2}.i^{n-3}+\cdots+\binom{n}{2}.i+\binom{n}{1}\Rightarrow$

Substituindo $i=0$ temos

$\lim_{i\to 0}\binom{n}{1}=n$

Observe que quando a taxa tende para infinito o fator vai para o infinito.

Demonstração de modo análogo

Nesse momento é importante a introdução do conceito da função exponencial.

## 4.3.2. Definição Função Exponencial

Seja **a** um número real positivo e supondo diferente de 1, chamamos de função exponencial de base **a ,** toda função f de reais em reais, que associa cada x real a um número $\boldsymbol{a}^x$. Também representada por $\begin{matrix} f:\mathbb{R}\to & \mathbb{R} \\ x\to & \boldsymbol{a}^x \end{matrix}$ ou $\begin{matrix} f:\mathbb{R}\to & \mathbb{R} \\ f(x)= & \boldsymbol{a}^x, \end{matrix}$ de modo que goze das seguintes propriedades, para quaisquer $x,y\in\mathbb{R}$:

i) $a^x.a^y=a^{x+y}$ Isto é $f(x).f(y)=f(x+y)$

ii) $a^1=a$ Isto é $f(1)=a$

iii) $a^0=1$ Isto é $f(0)=1$

iv) $x<y\Rightarrow a^x<a^y$ Para $a>1$

$x<y\Rightarrow a^x>a^y$ Para $0<a<1$

v) $f$é $monotona\ injetiva$

vi) A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ definida por $f(x)=a^x$ ,$a>0\ e\ a\neq 1$ é sobrejetiva

vii) É ilimitada superiormente

A propriedade iii, nos mostra que a função exponencial corta o eixo y no ponto de ordenada 1

A propriedade iv, nos diz que a função exponencial é estritamente monótona, ou seja, é crescente para $a>1$ e decrescente para $0<a<1$.

A propriedade v é consequência da propriedade iv temos que a função exponencial é injetora:

Demonstração:

Seja$x_1 \neq x_2$, por exemplo, vamos supor$x_1 < x_2$ assim temos dois casos:

1) Se $a > 0$, temos $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

2) Se $0 < a < 1$ temos$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

É interessante mostrar que imagem da função exponencial é $\mathbb{R}^+$. Vamos mostrar do seguinte modo, se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e$f$ não é identicamente nula então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pois $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)$ pela propriedade i temos que $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right).f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$. Diante dessa afirmaçãonão faz sentido tomar o contra domínio da função exponencial em $\mathbb{R}$, é mais vantajoso tomar o contra domínio como $\mathbb{R}^+$, pois teremos a função $f$ sobrejetiva.

## 4.3.3 Função do Tipo Exponencial

Dizemos que uma função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = b.a^x$ , $a > 0\ e\ a \neq 1$ e $b > 0$, é do tipo exponencial

## 4.3.4 Teorema: Caracterização da função do tipo exponencial

Seja $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monotona injetiva tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}\right]$ dependa apenas de h, mas não de $x$. Então, se $b = g(0)$ e $a = \frac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x) = b.a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Vamos aplicar o teorema da caracterização na Tab.(4.3.1), para mostrar que o modelo matemático é do tipo exponencial

$\frac{M(x+1)-M(x)}{M(x)} = k$

$M(x+1) - M(x) = M(x).k$

Nesse caso temos sempre que pegar h =1 devido os depósitos serem mensais

Para x = 1 e h =1

$M(2) - M(1) = M(1).k$

$409{,}045 - 403 = 403.k \Rightarrow \ k = \frac{6{,}045}{403} = 0{,}015$

Para x = 2 e h = 1

$\frac{M(3)-M(2)}{M(2)} = k = 0{,}015$

$M(3) - 609{,}045 = 609{,}045.(0{,}015) \Rightarrow \ M(3) = 618{,}18$

Para x = 3 e h = 1

$\frac{M(4)-M(3)}{M(3)} = k = 0{,}015$

$M(4) - 818{,}18 = 818{,}18.(0{,}015) \Rightarrow \ M(3) = 818{,}18 + 12{,}27 = 830{,}45$

Para a resolução de problemas do tipo exponencial o aluno tem que ter em mente o teorema da caracterização, pois a partir dele será construída uma série de modelagem com aplicação em varias ciências...

**Exemplo1** (Problema retirado do exame de qualificação 2012-1 Profmat).

Um corpo está contido num ambiente de temperatura constante. Decorrido o tempo t (em minutos), seja D(t) a diferença entre a temperatura do corpo e do ambiente. Segundo a Lei do Resfriamento de Newton, D(t) é uma função decrescente de t, com a propriedade de que um decréscimo relativo.

$$\frac{D(t) - D(t+h)}{D(t)}$$

No intervalo de tempo [t, t+h] depende apenas da duração h desse intervalo (mas não do momento em que essa observação se iniciou). Isto posto, responda à seguinte pergunta:

Num certo dia, a temperatura ambiente era de 30º. A água, que fervia a 100º numa panela, cinco minutos depois de apagado o fogo ficou com a temperatura de 60º. Qual era a temperatura da água 15 minutos após apagado o fogo?

**Solução:**

Pela lei do Resfriamento de Newton a função $D(t)$ em que $t = 0$, e o momento em que o fogo foi apagado, cumpre as hipóteses do Teorema de Caracterização das funções do tipo exponencial. Logo existe uma constante a, com $o < a < 1$, tal que $D(t) = D_0.a^t$ onde $D_0 = D(0)$. Temos $D_0 = 100 - 30 = 70$. Então temos a função $D(t) = 70.a^t$ .O problema nos diz que $D(5) = 60 - 30 = 30$, daí vem $30 = 70.a^5 \Rightarrow \ a^5 = \frac{3}{7}$. Segue que $D(15) = 70.a^{15} = 70.(a^5)^3 \Rightarrow \ D(15) = 70.(\frac{3}{7})^3 \approx 5{,}5$. Portanto, 15 minutos após o fogo ser apagado, a temperatura da água é de aproximadamente 30+5,5 = 35,5 graus.

# CAPITULO V

# V Conclusão

Este trabalho final de curso do PROFMAT alcançou o objetivo proposto ao trabalhar modelagem por meio de funções elementares, desenvolvendo uma abordagem diferenciada para o ensino das funções no contexto do ensino médio, através de situações práticas com construções de modelos matemáticos e uso de software livre afim de compreensão dos conceitos, definições e caracterizações das funções elementares.

A realização dessa proposta teve seu foco na capacidade de gerar no aluno um maior interesse em relação ao aprendizado da matemática. Simuladores da internet sobre vários assuntos do cotidiano foram estudados no sentido de obter a função elementar que representa o modelo matemático permitindo que a construção do conhecimento ocorra de forma efetiva.

Não deixando de ressaltar que este trabalho é voltado para o ensino básico, mas oferece subsídios para que os professores e estudantes de graduação ampliem seus conhecimentos sobre o assunto, uma vez que ao longo deste trabalho fez - se uso do Cálculo Diferencial Integral.

# Referência Bibliográfica:

[1] BIEMBENGUT, Maria Salett. *Modelagem Matemática & Implicações no Ensino-Aprendizagem de Matemática*. Editora da FURB: Blumenau, 1999.

[2] ALMEIDA, L. M. W e BRITO, D.S. *Modelagem matemática na sala de aula: algumas implicações para o ens. e aprendizagem da mat*. In: **Anais...** do XI CIAEM, Blumenal, Rs, 2003.

[3] ALMEIDA, L. M. W. DIAS. *Modelagem Matemática na Licenciatura em Matemática: contribuições para o debate. In:* ***Anais...*** SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Santos - SP, 2003.

[4] BIEMBENGUT, M. S. *30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das Propostas primeiras às propostas atuais*. Alexandria - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 2, p. 7-32, 2009.

[5] IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de matemática elementar*, v.1: conjuntos, funções. Atual, São Paulo, 2004.

[6] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A matemática do ensino médio* - volume 2. SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[7] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Ensino Médio. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília, MEC/SEMT, 1999.

[8] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Ensino Médio. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília, MEC/SEMT, 1998.

[9] GeoGebra, *software de geometria dinâmica,* disponível em: < http://www.geogebra.at/> acesso em: 20/03/2014.

[10] LANÇAMENTO OBLÍQUO, *software de simulação do Lançamento Oblíquo,* disponível em: < http://phet.colorado.edu> acesso em 13/01/2014.

[11] CONCENRAÇÃO DE ALCOOL NO SANGUE, *software de simulação,* disponível em <HTTP://www.terra.com.br/saude/infograficos> acesso em 12/11/2013.

[12] LANÇAMENTO OBLÍQUO, *software de simulação do Lançamento Oblíquo,* disponível em: < http://www. http://sourceforge.net> acesso em 13/01/2014.

[13] APLICAÇÕES, *software de simulação de aplicações*, disponível em http://www.bb.com.br, acesso em 14/02/2014.

[14] SERWAY, RAYMOND A. *Princípios de Física. Pioneira Thomson Learning*, São Paulo 2004.

[15] NUSSENZVEIG, HERCH MOYSÉS. *Curso de Física Básica. Editora Blucher*, v.1, 4ª edição São Paulo, 2002.

[16]

SCHRAMM, WILBUR, PORTER, WILLIAM, WURMAN, Richard S. *Ansiedade de infor mação.* São Paulo: Cultura Editores Associados, 1991.