UNIVERSIDADE FEDERAL DE CATALÃO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

THIAGO ALBERTO DA SILVA

ENSINO DE TRIGONOMETRIA ATRAVÉS DO BRAÇO ARTICULADO

CATALÃO
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DETESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a titulo de divulgação da produção cientifica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[x] Dissertação [ ] Tese

2. Nome completo do autor

Thiago Alberto da Silva

3. Título do trabalho

Ensino de Trigonometria através do Braço Articulado

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período,a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista cientifica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **Fernando Kennedy Da Silva**, **Professor do Magistério Superior**, em 28/03/2022, às 13:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º doart. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **THIAGO ALBERTO DA SILVA**, **Discente**, em 28/03/2022, às 13:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543,de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2732897** eo código CRC **2728B133**.

THIAGO ALBERTO DA SILVA

O ENSINO DE TRIGONOMETRIA ATRAVÉS DO BRAÇO ARTICULADO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática, em Rede Nacional da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Universidade Federal de Catalão, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Ensino de Matemática.
Orientador: Prof.º Dr. Fernando Kennedy da Silva.

CATALÃO
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFCAT.

SILVA, Thiago Alberto da
O ENSINO DE TRIGONOMETRIA ATRAVÉS DO BRAÇO ARTICULADO / Thiago Alberto da SILVA. - 2022.
75, LXXV f.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Kennedy da Silva.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Catalão, Instituto de Matemática e Tecnologia, Catalão, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede - PROFMAT, Catalão, 2022.
Apêndice.
Inclui fotografias, lista de figuras.

1. Trigonometria. 2. Robótica. 3. Sequência Didática. 4. Ensino de Matemática. I. Silva, Fernando Kennedy da, orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **26** da sessão de Defesa de Dissertação de **Thiago Alberto da Silva**, que confere o título de Mestre(a) em **Matemática,** na área de concentração em **Ensino de Matemática.**

Aos **três dias do mês de março de dois mil e vinte e dois**, às **quatorze horas**, por Webconferência via sistema Google Meet (https://meet.google.com/tju-efbs-tnz), reuniram-se os componentes da banca examinadora, docentes **Dr. Fernando Kennedy da Silva (IMTec/RC/UFG - UFCAT em transição), orientador, Dra. Juliana Bernardes Borges da Cunha (IMTec/RC/UFG - UFCAT em transição), membro titular interno e Dr. Fagner Lemos de Santana (UFRN), membro titular externo** para, em sessão pública realizada na Sala Virtual do Google Meet, procederem a avaliação da Dissertação intitulada *"Ensino de Trigonometria através do Braço Articulado"*, de autoria de **Thiago Alberto da Silva**, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da "RC/UFG - UFCAT em transição". A sessão foi aberta pelo presidente, que fez a apresentação formal dos membros da banca. Em seguida, a palavra foi concedida à discente que procedeu com a apresentação em 43 (quarenta e três) minutos. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da Dissertação, que foi considerada **Aprovada**. Cumpridas as formalidades de pauta, a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, lavrou-se a presente ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo discente. **Três dias do mês de março de dois mil e vinte e dois.**

Obs.: "*Banca Examinadora de Qualificação/Defesa Pública de Dissertação/Tese realizada em conformidade com a Portaria da CAPES n. 36, de 19 de março de 2020, de acordo com seu segundo artigo:*

Art. 2o A suspensão de que trata esta Portaria não afasta a possibilidade de defesas de tese utilizando tecnologias de comunicação à distância, quando admissíveis pelo programa de pós-graduação stricto sensu, nos termos da regulamentação do Ministério da Educação."

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **FAGNER LEMOS DE SANTANA**, **Usuário Externo**, em 03/03/2022, às 15:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Fernando Kennedy Da Silva**, **Professor do Magistério Superior**, em 03/03/2022, às 15:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Juliana Bernardes Borges Da Cunha**, **Professor do Ensino Básico Técnico Tecnológico**, em 03/03/2022, às 15:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **THIAGO ALBERTO DA SILVA**, **Discente**, em 03/03/2022, às 15:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Dedico este trabalho a minha esposa Suzane e aos meus filhos Acsa e Pedro.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus a acima de todas as coisas por permitir que eu chegasse até aqui. Aos meus pais por todo o incentivo nos estudos, em especial à minha mãe Ivanilda a qual está envolvida numa cena que jamais irei esquecer, quando entre cochilos e ensinamentos me acompanhava até altas horas da noite me ajudando a fazer divisões elementares de números inteiros.

Sou grato à minha esposa Suzane por sempre acreditar em mim e não deixar-me desistir no caminho e por último agradeço à minha filha Acsa por ser uma filha amada e motivação para eu ter chegado até aqui juntamente com meu filho Pedro que está pra nascer.

Quero agradecer também aos meus colegas de curso pela convivência nesses anos que se passaram e pela comunhão. Agradeço também aos professores do programa PROFMAT que brilhantemente ajudaram-me a me qualificar nessa pós-graduação com os seus ensinamentos.

E por fim, agradeço ao meu orientador professor Dr. Fernando Kennedy da Silva pela ajuda e por aceitar colaborar com essa realização de vida, confiando a mim para a elaboração desse trabalho de final de curso.

RESUMO

Há muito tempo o ensino vem sendo questionado quanto à contextualização (por situações-problemas) e aplicações dos conteúdos de matemática ensinados. Este trabalho tem como objetivo oferecer uma proposta de sequência didática para o ensino de trigonometria, usando um braço articulado através da concepção instrucionista/construcionista. Uma proposta diferenciada, que concilie o conhecimento teórico da trigonometria com sua materialização (braço robótico). Propomos que o aluno possa, não apenas compreender as definições unicamente por vias teóricas e expositivas, mas também, a partir de processos concretos e palpáveis. Para tanto, utilizaremos réguas, transferidores e cartolina para produzir o braço robótico.

Palavras-chave: Trigonometria; Robótica, Sequência Didática; Ensino de Matemática.

ABSTRACT

For a long time, teaching has been questioned about the contextualization (by problem-situations) and applications of the contents of mathematics taught. This project aims to offer a proposal for a didactic sequence for teaching trigonometry using an articulated arm through an instructional/constructionist conception. A proposal at least different, that reconciles the theoretical knowledge of trigonometry with its materialization (robotic arm). We propose that the student can not only understand the definitions solely through theoretical and expository ways, but also from concrete and palpable processes. For that, we will use only rulers, protractors and cardboard to produce a robotic arm.

Keywords: Trigonometry; Robotics; Didactic Sequence; Math Teaching.

LISTAS DE FIGURAS, FOTOGRAFIAS

.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Essa pesquisa tem o intuito de estudar trigonometria usando braço robótico, onde os alunos em uma situação-problema se depararão com vários conceitos de trigonometria. Para isso, será proposta aos professores uma sequência didática onde terão os passos para seguir com uma situação-problema motivadora.

A ideia é ensinar trigonometria de uma forma diferente, com uma aplicação onde os alunos possam ver na prática esses conceitos e que de forma empírica eles possam se apropriar de algumas propriedades trigonométricas. Apesar do conceito de sequência didática estar associada ao instrucionismo, a proposta de ensino é baseada na interação professor/aluno e pela teoria construcionista observando alguns conceitos de robótica educacional.

A proposta é para alunos do 9º ano do ensino fundamental como parte da matriz curricular e observando as competências necessárias para essa fase educacional, conforme a BNCC (Base Nacional Comum Curricular). Esperamos que esse trabalho possa orientar os docentes a ter subsídios para ensinar esse conteúdo em sala de aula. Além disso, esperamos que os discentes venham absorver com clareza os conceitos de trigonometria.

Tendo em vista que o ensino da trigonometria não tem sua devida importância na educação matemática, por se tratar de um conteúdo extenso, pode haver a possibilidade de perguntas dos estudantes, tais como: qual a utilidade desse assunto? Onde vou aplicar isso na minha vida?
Pensando nisso, novas metodologias aliadas à inovação podem trazer uma nova concepção de aprendizagem, com o auxílio de uma sequência didática, proporcionando socialização.

A hipótese deste trabalho é que este traga junto de sua abordagem instrucionista/construcionista, um recurso moderno e motivador para o professor dos anos finais do ensino fundamental. Acreditamos que haverá bastante envolvimento por parte dos alunos, em querer entender como funcionam as engrenagens do kit, onde o professor fará uma associação entre o braço articulado e a trigonometria, apropriando-se do ensino que parte do concreto para o abstrato havendo uma interação por meio da construção do conhecimento.

1.1 OBJETIVO GERAL/PRIMÁRIO

Produzir uma sequência didática a fim de auxiliar professores e alunos no ensino de trigonometria por meio da robótica. Utilizando o kit de robótica educacional construiremos um braço articulado para que através dele ocorra um aprendizado, de maneira moderna e lúdica.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS/SECUNDÁRIOS

- Analisar a importância da compreensão, por parte dos alunos, da trigonometria no estudo da matemática no ensino fundamental.
- Analisar a importância do ensino de relações trigonométricas, na disciplina de matemática do ensino fundamental.
- Correlacionar triângulo retângulo com o círculo trigonométrico.
- Identificar os benefícios de construções de materiais concretos para o aprendizado e desenvolvimento cognitivo dos alunos.
- Levantar e analisar o papel e os benefícios que a robótica educacional tem apresentado no ensino da matemática na educação básica.
- Construir um braço articulado, modelando uma situação-problema por conceitos trigonométricos.
- Criar uma sequência didática, para professores do ensino fundamental, que auxilie no ensino da trigonometria, possuindo como objeto de estudo o braço articulado.

Alinhado com essa concepção, a proposta metodológica é pautada em uma sequência didática para o ensino de trigonometria, pois entendemos que essa maneira de ensinar traz muitos benefícios aos alunos, professores e ao ambiente escolar.

Para esta pesquisa é utilizada uma abordagem qualitativa, a qual segundo Minayo (2007), o objetivo é o de produzir informações aprofundadas e novas sobre determinado tema, onde o cientista é ao mesmo tempo o sujeito e o objeto de sua pesquisa. Pois mesmo conduzindo o seu desenvolvimento, seus resultados e desdobramentos são imprevisíveis. Conforme corrobora Rey (2005, p. 105) onde afirma que uma pesquisa desta natureza é "um processo aberto submetido a infinitos e imprevisíveis desdobramentos, cujo centro organizador é o modelo que o pesquisador desenvolve e em relação as quais as diferentes informações empíricas adquirem significados".

Como objetivo da pesquisa temos a exploratória, que segundo Gil (2002), é o de produzir maior familiarização com determinado tema, a fim de melhor compreendê-lo e explicitá-lo, produzindo uma assimilação concisa de determinado fato, se utilizando de levantamento bibliográfico e análise de exemplos que contribuam para sua compreensão.

Desta forma, quanto ao procedimento, a pesquisa pode ser classificada como uma revisão bibliográfica, com elaboração de uma proposta de sequência didática. Segundo

Vianna (2001), para proporcionar o avanço em um campo de conhecimento, é preciso primeiro conhecer o que já foi realizado por outros pesquisadores e quais foram suas fronteiras encontradas. Assim, a revisão bibliográfica é indispensável para obter uma ideia precisa sobre o estado atual dos conhecimentos sobre determinado tema, sobre suas lacunas e sobre a contribuição da investigação para o desenvolvimento do conhecimento (Lakatos e Marconi, 2010). Contribui ainda nas construções teóricas, nas comparações e na validação de resultados de trabalhos de conclusão de curso e de artigos científicos (Medeiros e Tomasi, 2008).

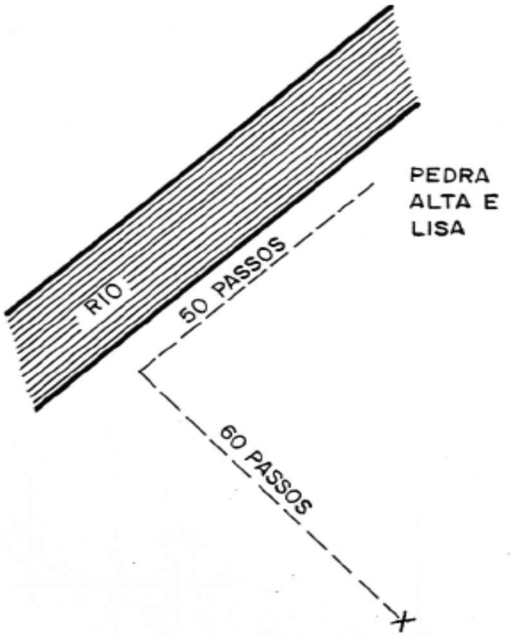
Portanto, como nosso foco é a elaboração de uma proposta de sequência didática, seguiremos os seguintes passos. Primeiramente, faremos um levantamento bibliográfico a respeito da importância do estudo da trigonometria e a robótica educacional. Após isto feito, iremos relacioná-las, demonstrando que o estudo de ambas pode ocorrer de forma simultânea ou que uma auxilia na compreensão da outra. Posteriormente, pesquisaremos sobre as teorias instrucionistas/construcionistas, e sobre a Robótica Educacional, que tem sua utilização no ensino da matemática como uma prática moderna destas teorias. Daremos então uma explicação do braço robótico e as equações da cinemática robótica. Por fim, será elaborada a proposta de uma sequência didática, onde constarão as instruções para a construção de um braço articulado, e as explicações didáticas e pedagógicas de como este braço pode ser o objeto de estudo para aprendizado de trigonometria.

2 TRIGONOMETRIA

2.1 SISTEMAS DE COORDENADAS NO PLANO

A noção de coordenadas se deu intuitivamente pelo homem há bastante tempo atrás por necessidades que eles tinham, por exemplo, para achar um tesouro escondido ou qualquer objeto enterrado, eram passadas informações bem rudimentares em um mapa, observando alguns pontos de referências conforme Carmo et all. (1992).

Figura 1 - Mapa



Fonte: CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria Números complexos**. Piratas ITA/IME, Rio de Janeiro, 1992.

Segundo Lima, et al. (2006), em um plano chamamos de sistema de coordenadas um par ordenado (x, y), onde x é chamado de abcissa e y de ordenada. Os elementos x e y desse par ordenado estão sobre dois eixos perpendiculares entre si com a mesma origem O e contidos no plano. OX e OY podem ser nomeados também de eixo das abcissas (OX) e eixo das ordenadas (OY). Desse modo indicamos o sistema de coordenadas no plano como OXY.

Ainda de acordo com os autores citados acima, considere agora um plano Л e o conjunto dos pares ordenados (x, y), sendo esse último representado por R^2. Escolhendo um sistema de coordenadas qualquer é possível fazer corresponder biunivocamente os pontos do plano com os elementos de R^2, isto é, a cada ponto do plano fica associado a um único par ordenado (x, y) no conjunto R² dos números reais e vice-versa. Esses números x e y são chamados de coordenadas do ponto P do plano relativamente a um sistema de coordenadas OXY.

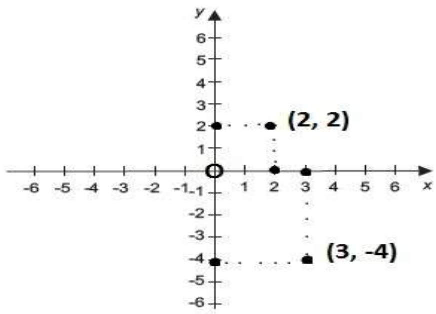
Por outro lado, Carmo et al. (1992) define coordenadas da seguinte forma:

> Uma representação análoga para os pontos de um plano P, obtém-se da maneira seguinte. Fixa-se em P um ponto O, chamado origem, e por O traçam-se duas retas x e y, perpendiculares, chamadas eixos coordenados. Sobre estas retas escolhem-se unidades de medir comprimentos (em geral iguais) e sentidos de percursos, como no caso anterior. Por cada ponto p do plano P, traçam-se paralelas a y e x, que intersectam as retas x e y nos pontos X e Y, respectivamente. Os números x e y, dados por x = m(OX) e y = m(OY), são chamados coordenadas de p no sistema xOy: é usual chamar x de abcissa, y de ordenada e o par (x,y) de coordenadas do ponto p [...]. (CARMO et. al 1992, p. 2)

Assim, as coordenadas do plano são definidas da seguinte forma: se P, um ponto do plano, estiver contido no eixo OX, então o par ordenando que corresponde a esse ponto é (x,0) e nesse caso x é a coordenada de P. Analogamente, se P está no eixo OY o par ordenado correspondente é (0,y) onde y é a coordenada de P.

Já por outro lado, se um ponto do plano, digamos Q, não está contido em nenhum dos eixos OX e OY faz-se necessário traçar uma reta paralela ao eixo OX intersectando OY no ponto da coordenada y e da mesma forma outra reta paralela a OY intersectando OX no ponto da coordenada x. Logo, o ponto Q pode ser representado pelo par ordenado (x, y) ∈ R², sendo x a abcissa e y a ordenada do ponto Q. Na figura abaixo temos um exemplo.

Figura 2 - Sistema de coordenadas OXY



Fonte: https://www.gabarite.com.br/dica-concurso/252-sistema-cartesiano-ortogonal-de-coordenadas

O sistema de coordenadas tem duas finalidades, a primeira é dar um significado geométrico a números, por exemplo, para funções de uma variável real a valores reais há uma clareza quando se olha para seu gráfico. Já a outra finalidade acontece ao contrário, onde se tem a figura geométrica e queremos resolver problemas relacionados a ela. É o que está presente na Geometria Analítica.

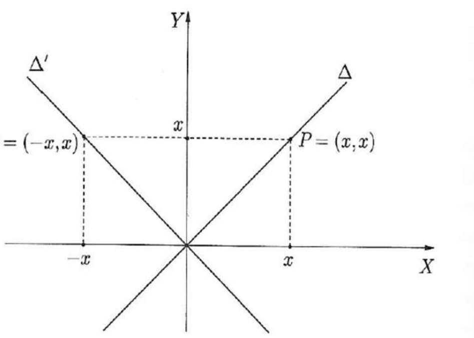
Dessa forma, em suma, quando nos referimos a um ponto P = (x, y) estamos querendo dizer que esse ponto do plano tem abcissa x e ordenada y, ou seja, quando se escolhe um sistema de coordenadas em um plano Л usamos a correspondência biunívoca Л→R^2 que faz corresponder cada ponto do plano ao seu par ordenado (x, y), observando que pontos dos planos e pares ordenados são coisas totalmente distintas.

Nesse sentido, Lima, et al. (2006) afirmam que:

> Os eixos ortogonais OX e OY decompõe o plano Л em quatros regiões, cada uma das quais se chama um *quadrante.* O primeiro quadrante é o conjunto dos pontos P = (x,y) tais que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. O segundo quadrante é formado pelos pontos P = (x,y) com $x \leq 0$ e $y \geq 0$. O terceiro, pelos pontos P = (x,y) com $x \leq 0$ e $y \leq 0$. Finalmente, os pontos P = (x,y) do quarto quadrante são aqueles em que $x \geq 0$ e $y \leq 0$. (LIMA, et al. 2006, p.8)

Nessa perspectiva, determinado o sistema de coordenadas OXY, os quadrantes 1 e 3 possuem ângulos retos com vértice na origem, além disso esses ângulos são opostos pelo vértice. Passando uma reta bissetriz a esses dois ângulos, digamos Δ, observamos que ela é comum a esses ângulos e pela Geometria Euclidiana Plana sabemos que Δ é equidistante dos lados dos ângulos retos formados pelos eixos OX e OY. Portanto coordenadas do primeiro e terceiro quadrantes são iguais, sendo elas positivas no primeiro e negativas no terceiro quadrante. Analogamente a bissetriz Δ´ é comum ao segundo e quarto quadrantes e conforme ilustra a figura abaixo.

Figura 3 - Retas bissetrizes



Fonte: LIMA, Elon lages.et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 3.6 ed. Rio de Janeiro: SBM 2006.

Dando continuidade nesse assunto, na trigonometria o Teorema de Pitágoras é uma ferramenta muito importante, no qual relaciona-se as três medidas de um triângulo retângulo.

Por isso, a próxima seção será dedicada a esse Teorema que é muito importante na Trigonometria bem como na Matemática no geral.

2.2 O TEOREMA DE PITÁGORAS

Conforme afirma Garbi (2006), Pitágoras foi um matemático grego muito influenciado por Tales de Mileto, outro matemático grego importante. Por causa da expansão Persa, Pitágoras teve que sair de sua região na Grécia e partiu para o Egito se instalando em Crotona, região do sul da Itália e por lá abriu uma escola que trazia estudos de Filosofia, Ciências Naturais e Matemática.

Essa escola, segundo Garbi (2006), angariou vários adeptos os quais eram chamados de pitagóricos, formando assim uma sociedade místico-religiosa com vários rituais estranhos, porém com belíssimos trabalhos que contribuíram para a história da civilização.

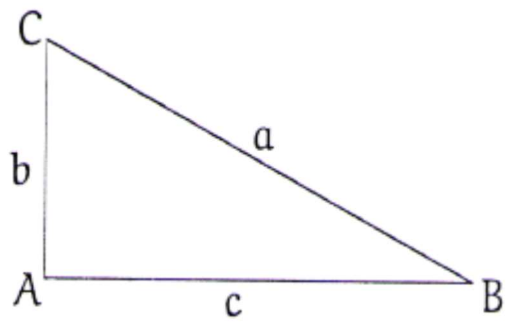
O famoso Teorema de Pitágoras diz o seguinte:

"Em qualquer triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos"

Ou seja, em um triângulo ABC reto em A com hipotenusa a e catetos b e c temos a seguinte sentença:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

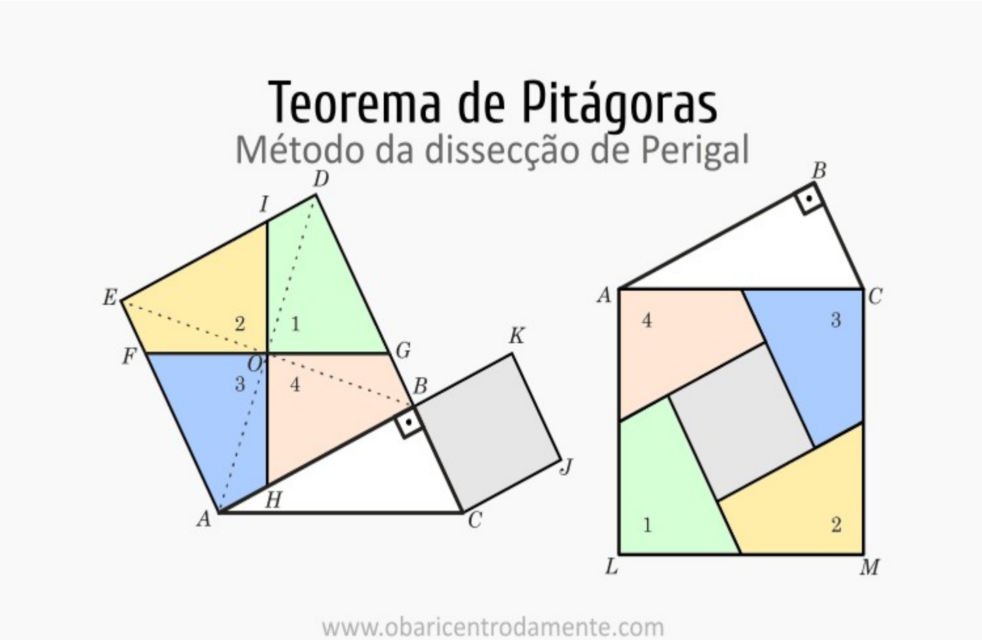
Figura 4 - Triângulo Retângulo ABC



Fonte: LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013, Coleção PROFMAT.

Vamos representar a demonstração de Perigal, que foi um jornaleiro de Londres, onde publicou sua demonstração construtiva em 1873 de acordo com Lima (2013):

Figura 5 – Método de Perigal



Fonte: https://www.obaricentrodamente.com

Perigal para provar esse teorema utilizou a seguinte ideia, ele constrói quadrados sobre os lados dos triângulos conforme a figura acima e corta o quadrado construído sobre o cateto maior por duas retas passando pelo seu centro, uma que é paralela a hipotenusa e outra que é perpendicular a essa mesma hipotenusa. Assim, o quadrado fica dividido em quatro pares congruentes e juntamente com o quadrado construído sobre o cateto menor preenchem o quadrado maior que foi construído sobre o lado da hipotenusa.

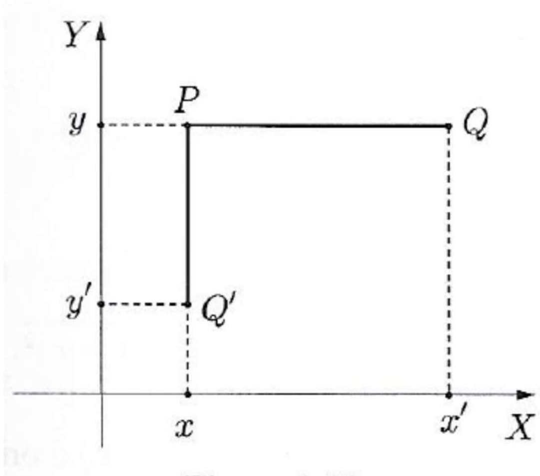
Para ser concreta e direta, escolhemos essa demonstração para este trabalho e para a sequência didática que iremos propor fazendo com que os alunos possam ver na prática a construção da demonstração.

Esse teorema teve ao longo da história muitas demonstrações usando variadas e engenhosas ferramentas matemáticas. Assim, "os pitagóricos consideravam que a matemática estava dividida em quatro áreas: **Geometria, Aritmética, Astronomia e Música". (GARBI, 2006, p. 30). Na visão do mesmo autor, os pitagóricos contribuíram não somente com o teorema de Pitágoras, mas com outras descobertas como, por exemplo, no campo da acústica sobre a produção de sons através da divisão de cordas por números inteiros.

2.3 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Para medir a distância de dois pontos no plano ainda continuaremos com a correspondência biunívoca com os pares de números reais, particularmente observando o conjunto R^2. Sejam então dois pontos no plano P e Q com suas respectivas coordenadas, $P = (x, y)$ e $Q = (x', y)$. Neste caso os pontos tem a mesma ordenada y e consequentemente a distância entre eles é dada por $d(P,Q) = | x' - x |$ que é igual a diferença entre suas projeções (dos pontos P e Q) no eixo OX. Por outro lado, dados $P = (x, y)$ e $Q' = (x , y')$ a distância entre esses dois pontos segue o mesmo raciocínio e é dada por $d(P,Q') = | y' - y |$ que é o menor caminho entre as projeções de P e Q´ no eixo OY.

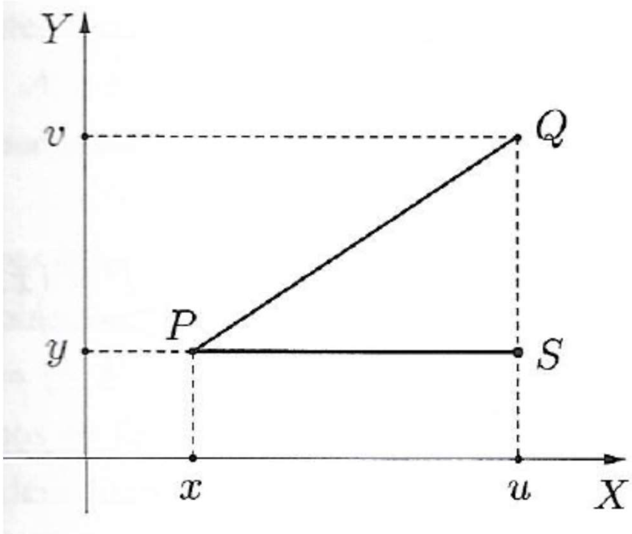
Figura 6 - Distância entre dois pontos com ordenadas ou abcissas iguais



Fonte: LIMA, Elon lages.et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 3.6 ed. Rio de Janeiro: SBM 2006.

Nesse aspecto, considere o caso em que os pontos $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$ tenham coordenadas diferentes e tome um ponto $S = (u , y)$. Dessa forma, o triângulo PSQ é retângulo e tem hipotenusa PQ. Além disso, como P e S tem a mesma ordenada bem como Q e S tem a mesma abcissa, então $d(P ,S) = | x – u |$ e $d(S, Q) = | y – u |$. Segue do Teorema de Pitágoras que $d(P, Q)^2 = d(P, S)^2 + d(S , Q)^2$, o que acarreta em $d(P, Q)^2 = (x – u)^2 + (y – v)^2$, logo $d(P, Q) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$. A distância do P à origem é $d(O,P) = \sqrt{x^2 + y^2}$ onde $O = (0, 0)$

Figura 7 – Distância entre dois pontos com coordenadas diferentes

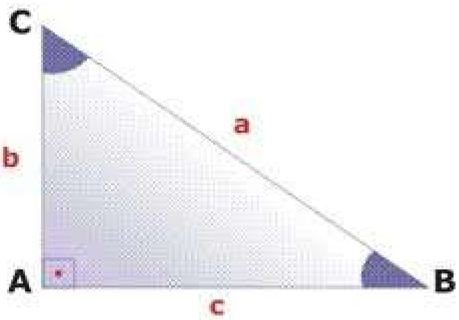


Fonte: LIMA, Elon lages.et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 3.6 ed. Rio de Janeiro: SBM 2006.

2.4 A TRIGONOMETRIA DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Sabe-se desde o Ensino Fundamental que em um triângulo retângulo *ABC*, reto em A e com a hipotenusa *a,* tem-se as seguintes definições:

Figura 8 - Triângulo Retângulo



Fonte: https://piedademessias.wordpress.com/author/piedademessias

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} = (cateto\ adjacente) \div (hipotenusa)$$

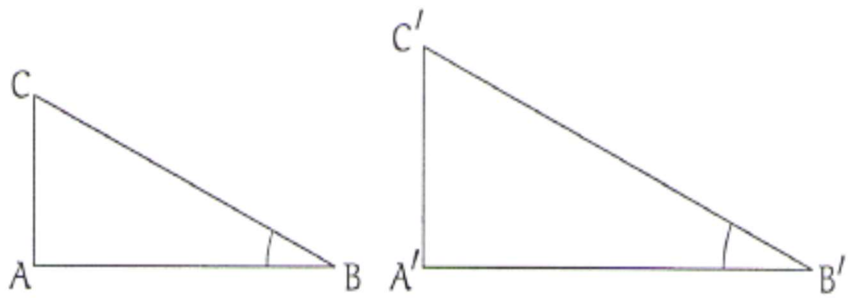
$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{a} = (cateto\ oposto) \div (hipotenusa)$$

E analogamente tem-se.

$$\cos\hat{C} = \frac{b}{a} \qquad e \qquad \text{sen}\,\hat{C} = \frac{c}{a}$$

Essas relações definem o cosseno e o seno de um ângulo agudo qualquer, já que todo ângulo agudo pode ser um dos ângulos de um triângulo retângulo. É fácil observar também que essas relações (cosseno e seno) dependem somente do ângulo e não dos tamanhos dos catetos. Pode-se notar isso através da semelhança de triângulos.

Figura 9: Triângulos Retângulos Semelhantes



Fonte: LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013, Coleção PROFMAT.

Nesse viés, Lima (2013, p.187) afirma que "Assim, a semelhança de triângulos é a base de sustentação da Trigonometria".

Além dessas relações trigonométricas, existe também, segundo Bucchi (1992), a tangente de um ângulo que é a razão entre o cateto oposto dividido pelo cateto adjacente deste ângulo, conforme as expressões abaixo, considerando o triângulo retângulo ABC mencionado anteriormente.

$$\text{tg}\ \hat{B} = \frac{b}{c} \quad e \quad \text{tg}\,\hat{C} = \frac{c}{b}$$

2.5 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

As funções trigonométricas desempenham um papel muito importante na matemática, seja em problemas do dia-a-dia, tais como em aplicação em tecnologia, seja em um assunto da matemática chamada Análise de acordo com Lima (2013).

Contudo, as funções foram descobertas quando na evolução da abstração da Matemática o homem necessitou de algumas ferramentas conforme afirma Lima (2013):

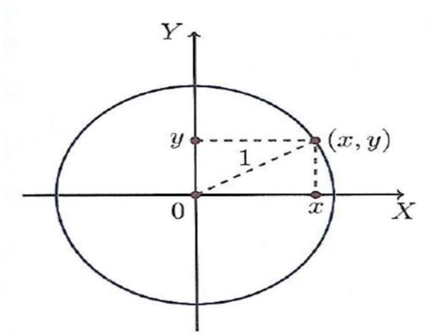
> Posteriormente, com a criação do Cálculo Infinitesimal, e do seu prolongamento que é a Análise Matemática, surgiu a necessidade de atribuir às noções de seno, cosseno e suas associadas tangente, cotangente, secante e cossecante, o status de função real de uma variável real. Assim, por exemplo, ao lado de cos Â, o cosseno do ângulo Â, tem-se também cos x, o cosseno do número real x, isto é, a função: R→R. Analogamente, têm-se as funções sen, tg, cotg, sec e cossec, completando as *funções trigonométricas*. (LIMA, 2013, p. 186).

Nesse propósito, Lima (2013) cita que as funções trigonométricas têm um outro papel muito importante, pois por elas serem periódicas podem ser modeladas à fenômenos naturais cíclicos, oscilatórios e/ou vibratórios, a exemplo da órbita dos planetas, acústica, batimentos cardíacos corrente elétrica etc.

2.6 A FUNÇÃO DE EULER E A MEDIDA DE ÂNGULOS

Antes de definir as funções seno e cosseno em seu livro, Lima (2013) correlaciona a relação fundamental $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$ com a circunferência de raio unitário e define tal como "Indicaremos com a notação C essa *circunferência unitária,* ou círculo *unitário*. Temos, portanto $C = \{(x, y) \in R^2 ; x^2 + y^2 = 1\}$" (LIMA, 2013, p. 30)

Figura 10 – Círculo Trigonométrico



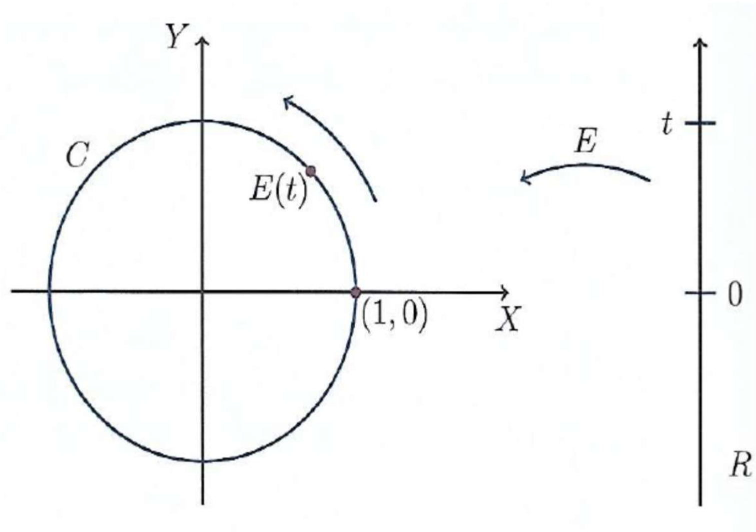
Fonte: LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013, Coleção PROFMAT.

Observando a figura acima vemos que se (x,y) pertence a circunferência, então x e y estão no intervalo [-1, 1]. Para definir as funções seno e cosseno temos que associar a todo número real t um ângulo e considerar o cosseno e seno desse ângulo como sendo o cosseno e o seno do número t. Há duas unidades a se adotar ao medir ângulos: os radianos e os graus como sustenta Lima (2013).

O autor citado acima ainda afirma que a maneira mais simples de definir as funções trigonométricas é pela função de Euler fazendo corresponder um número real t ao ponto E(t) = (x,y) da circunferência unitária conforme abaixo:

> - E(0) = (1,0).
> - Se t > 0, percorremos sobre a circunferência C, a partir do ponto (1,0), um caminho de *comprimento t*, sempre no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio comum, ou seja, o sentido que nos leva de (1,0) para (0,1) pelo caminho mais curto sobre C). O ponto final do caminho será chamado de E(t).
> - Se t < 0, E(t) será a extremidade final de um caminho sobre C, de comprimento |t|, que parte do ponto (1,0) e percorre C sempre no sentido negativo (isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio usual). (LIMA, 2013, p. 190).

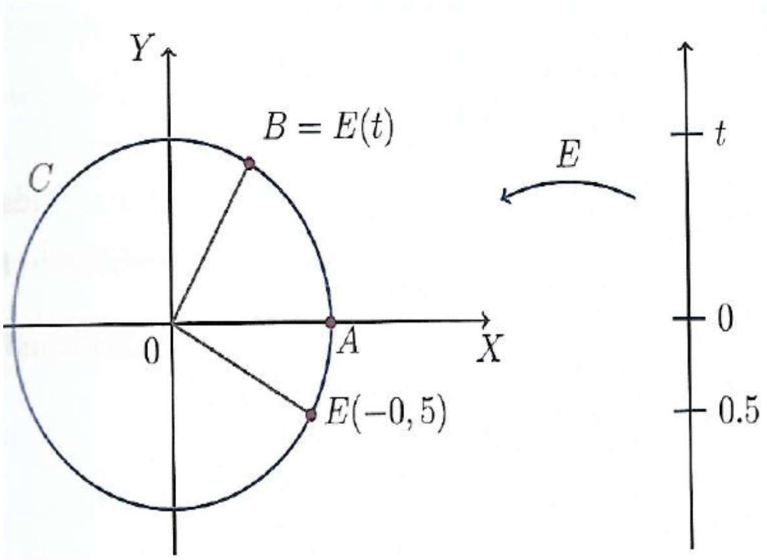
Figura 11 – Função de Euler



Fonte: LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013, Coleção PROFMAT.

Por esse raciocínio é trivial inferir que quando t percorre um intervalo L sua imagem E(t) também percorre na circunferência C um arco do mesmo comprimento de L, sendo assim como a circunferência tem comprimento 2π, então t percorre um intervalo de 2π, ou seja, E(t) dá uma volta completa sobre C e generalizando $E(t + 2k\pi) = E(t)$ onde t pertence aos números reais e z pertence ao conjunto dos números inteiros.

Figura 12 – Medida de ângulo



Fonte: LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013, Coleção PROFMAT.

Dessa maneira, conforme afirma Lima (2013), dado A = (1, 0) e O = (0,0) e t pertencentes aos reais e tomando B = E(t) o ângulo AÔB tem medida t radianos. Ainda segundo o Autor, AÔB tem medida de 1 radiano se, e somente se o arco AB que subtende esse ângulo tem comprimento igual a 1 também.

2.7 AS FUNÇÕES COSSENO E SENO

As funções cosseno e seno são definidas da seguinte forma: cos : $R \to R$ e sen $R \to R$ e para cada t pertencentes aos números reais temos a função de Euler

$$E(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

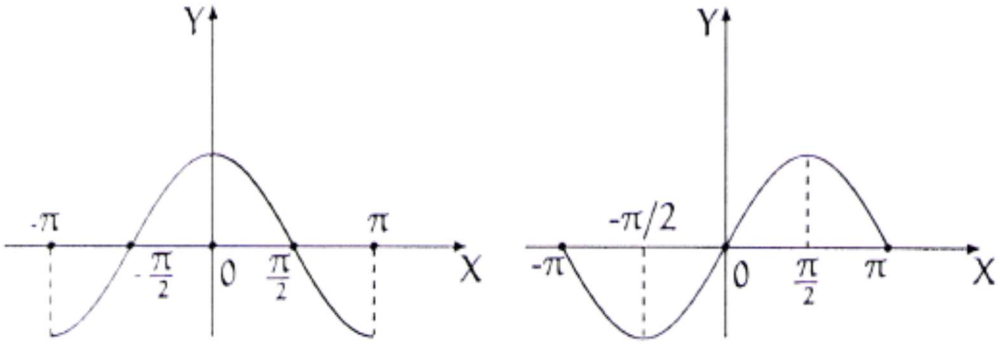
e

$$E(-t) = (\cos(-t), \operatorname{sen}(-t))$$

Porém, como já foi visto acima E(-t) é quando a imagem da função percorre a circunferência no sentido contrário ao usual, isto é, no sentido horário, como os ponteiros do relógio, e assim E(-t) = (x , - y) o que implica que cos (-t) = cos t e sen (-t) = - sen t para todo t pertencente aos reais. Com isso, podemos afirmar que a função cosseno é uma função par e a função seno é uma função ímpar.

Lembrando que uma função f: R→R é par é quando f(-t) = f (t) e a função é ímpar quando f(-t) = - f(t) para todo t pertencente aos números reais. A seguir estão os gráficos dessas funções, y = cos x e y = sen x.

Figura 13 – Gráficos das funções cosseno e seno



Fonte: LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013, Coleção PROFMAT.

2.8 AS FÓRMULAS DE ADIÇÃO

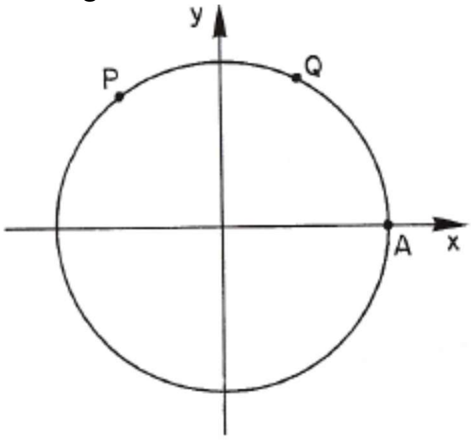
Nesta seção vamos apresentar as fórmulas para cosseno e seno da soma de arcos. Apesar de ter várias maneiras de demonstrá-las, aqui será abordada uma prova bem simples baseada no livro "Trigonometria Números complexos" dos autores Carmo et all. (1992).

Para isso, devemos lembrar que a distância entre dois pontos do plano (x_1 , y_1) (x_2 , y_2) é dada por $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Consideremos então no círculo unitário os pontos P e Q tais que $m\widehat{\text{AP}} = \text{a}$ e $m\widehat{\text{AQ}} = \text{b}$ Conforme a figura abaixo. Como P = (cos a, sen a) e Q = (cos b, sen b), a distância d entre os pontos P e Q é dada por

$$d^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (sen\ a - sen\ b)^2$$

Figura 14 – Círculo unitário



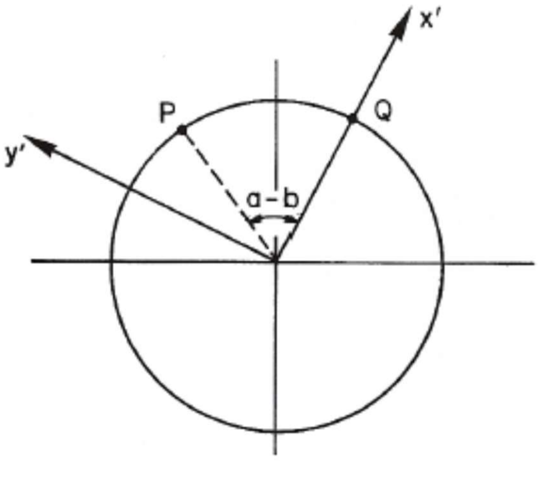
Fonte: CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria Números complexos**. Piratas ITA/IME, Rio de Janeiro, 1992

Desenvolvendo os quadrados e lembrando que $sen^2x + cos^2x = 1$ obtemos

$$d^2 = 2 - 2(\cos a \,.\cos b + sen\ a\ .sen\ b)$$

Mudemos agora nosso sistema de coordenadas girando os eixos de um ângulo b no sentido anti-horário em torno da origem.

Figura 15- Sistema de coordenadas girando os eixos



Fonte: CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria Números complexos**. Piratas ITA/IME, Rio de Janeiro, 1992

Neste novo sistema, o ponto Q tem coordenadas 1 e 0 e o ponto P tem coordenadas cos $(a - b)\ e\ sen\ (a - b)$. Calculando novamente a distância entre os pontos P e Q, obtemos

$d^2 = (1 - \cos(a - b))^2 + (0 - sen\ (a - b))^2$ ou $d^2 = 2 - 2\cos(a - b)$

Igualando valores de d^2, temos

$$\cos(a-b) = \cos a \,.\cos b + sen\ a\ .\ sen\ b. \qquad (1)$$

Outras três fórmulas decorrem facilmente da que acabamos de obter. Substituindo em (1) b por $-b$

$$\cos(a+b) = \cos a \,.\cos b - sen\ a\ .\ sen\ b. \qquad (2)$$

Aplicando a fórmula (1) para os arcos $\frac{\pi}{2} - a\ \ e\ b$ encontramos

$$\mathrm{sen}(a+b) = \mathrm{sen}\, a \,.\cos b + sen\ b\ .\ cos\ a.$$

E substituindo nesta última b por $-b$, obtemos

$$\mathrm{sen}(a-b) = \mathrm{sen}\, a \,.\cos b - sen\ b\ .\ cos\ a.$$

Dessas fórmulas, saem também de forma bem direta as fórmulas a seguir, basta fazer $b = a$:

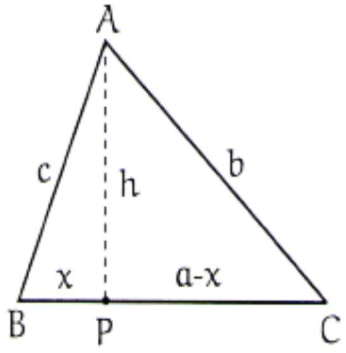
$$\cos 2\,a = \cos^2 a - \mathrm{sen}^2\, a \qquad\qquad \mathrm{sen}\, 2\,a = 2\mathrm{sen}\, a \cos a$$

2.9 LEI DOS COSSENOS E LEI DOS SENOS

Outros resultados importantes na matemática são as Leis dos Cossenos e dos Senos em um triângulo qualquer. De acordo com Lima (2013), dado um triângulo qualquer ABC com medidas a, b e c respectivamente dos lados BC, AC, AB com h = $\overline{AP}$, onde h é a altura baixada de A até o lado BC, temos duas possibilidades:

1ª) P pertence ao segmento BC.

Figura 16- P pertence a BC



Fonte: LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013, Coleção PROFMAT.

Nesse caso, pela relação trigonométrica cosseno, obtém-se que

$$x = \overline{BP} = c.\cos\hat{B}.$$

Agora aplicando o Teorema de Pitágoras nos dois triângulos, ABP e APC vêm que

$$c^2 = h^2 + x^2\,, \quad \text{e por outro lado}$$

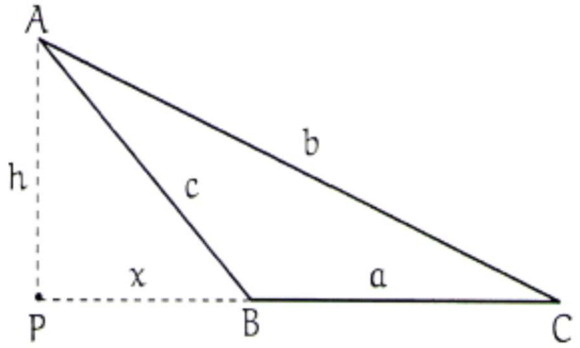
$$b^2 = h^2 + (a - x)^2 = h^2 + x^2 + a^2 - 2ax$$

Mas como $x = c.\cos\hat{B}$, então substituindo x e c² da primeira equação nessa expressão acima temos a seguinte igualdade.

$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.cos\hat{B}}.$$

2ª) P pertence ao prolongamento do segmento BC.

Figura 17- P Pertence ao prolongamento de BC



Fonte: LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013, Coleção PROFMAT.

Nesse segundo caso x será da seguinte forma:

$$x = \overline{BP} = c.\cos(\pi - \widehat{B}) = -c.\cos\hat{B}\,.$$

Observando que o ângulo $\hat{B}$ é acutângulo, isso é, maior que 90 graus o que nos diz que $cos\hat{B} < 0$ e assim, $-c.cos\hat{B}$ é positivo acarretando que x seja positivo de fato.

Desse modo, aplicando o Teorema de Pitágoras novamente nos triângulos APB e APC têm-se:

$$c^2 = h^2 + x^2\,, \quad \text{e por outro lado}$$

$$b^2 = h^2 + (a + x)^2 = h^2 + x^2 + a^2 + 2ax$$

Como $x = -c.\cos\hat{B}$, então de modo análogo ao primeiro caso, substituindo x e c² da primeira equação nessa expressão acima temos a seguinte igualdade

$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.cos\widehat{B}.}$$

Assim, podemos observar que o resultado é o mesmo para ambos os casos e essa igualdade é chamada de ***Lei dos Cossenos.*** Analogamente, temos também:

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2c.cos\widehat{A}.}$$

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.cos\widehat{C}.}$$

Uma curiosidade é que se $\hat{B}$ for reto, temos o Teorema de Pitágoras, que é um caso particular da Lei dos Cossenos.

Por outro lado, observando os triângulos mais uma vez, temos que no primeiro caso

$$sen\,\hat{B} = \frac{h}{c} \quad \Rightarrow \quad h = c.sen\,\hat{B}$$

Do mesmo modo, analisando o ângulo $\hat{C}$, temos

$$sen\,\hat{C} = \frac{h}{b} \quad \Rightarrow \quad h = b.sen\,\hat{C}$$

E por fim, $h = c.sen\,\hat{B} = b.sen\,\hat{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$

Já no segundo caso obtém-se $h = b.sen\,\hat{C}$ e $h = c.sen\,(\pi - \hat{B})$ e reescrevendo essa última igualdade, onde $sen\,(\pi - \hat{B}) = sen\,\hat{B}$, chegamos em $h = c.sen\,(\pi - \hat{B}) = c.sen\,\hat{B}$ como no primeiro caso e por conseguinte

$$\frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

Agora se fizermos o processo de baixar uma altura do vértice B em A, pelo mesmo raciocínio teremos a seguinte expressão

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

Contudo, em qualquer triângulo teremos a seguinte relação

$$\boldsymbol{\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}}$$

Isso quer dizer que em um triângulo qualquer, a razão entre um lado desse triângulo e o seno de seu ângulo oposto será sempre igual qualquer que seja o lado. Esta igualdade é a famosa ***Lei dos Senos.***

3 A CINEMÁTICA DO BRAÇO DO ROBÔ

3.1 ROBÔ INDUSTRIAL

Segundo Santos (2003), o ser humano tem se preocupado muito com robôs sendo o tema central nas discussões nos tempos em que estamos vivendo. Com o avanço da tecnologia e ciência, é notório observar que em vários segmentos da economia e serviços está acontecendo a automação, isto é, máquinas fazendo o papel que antes era o homem que fazia.

Os robôs começaram a ser usados por seres humanos como ferramentas capazes de fazer as atividades necessárias para um determinado fim, que limitava o serviço humano, de acordo com Rosário (2010):

> Décadas atrás, os robôs faziam parte apenas da ficção científica, fruto da imaginação do homem. No início dos anos 60 os primeiros robôs começaram a ser usados com o objetivo de substituir o homem em tarefas que ele não podia realizar por envolverem condições desagradáveis, tipicamente contendo altos níveis de calor, ruídos, gases, gases tóxicos, esforços físicos extremos, trabalhos tediosos e monótonos. (ROSÁRIO, 2010 p.25)

Diante disso, então o que vem a ser um robô? Para responder essa pergunta, Antunes (2015) afirma o seguinte: "Em 1920 Karel Čapek, romancista e jornalista tcheco criou uma obra de ficção científica intitulada "*Rosum Universal robots*" onde usou pela primeira vez a palavra *robota*, que em checo significa servidão ou trabalhador forçado." (Antunes, 2015 p. 3)

Assim, sob esta mesma perspectiva, para Muzakki et al.(2018), um robô é uma unidade de forma mecânica, física ou virtual que possui inteligência própria. Nessa época que vivemos de grandes avanços da tecnologia e ciência, o uso de robôs está ocupando praticamente todos os campos da econômia. Um exemplo é o uso de robô para soldar, fazendo o trabalho de um homem e bem mais rápido.

Nesse sentido, considerando a evolução da tecnologia e ciência pela história, o robô não é um produto acabado que foi pensado pelo homem e criado instataneamente tendo um *insight*, aquele é fruto de pesquisas desde os primórdios da humanidade e de fato o primeiro que surgiu na indústria e que foi o percursor pra mais robôs adentrarem no mercado industrial foi o de George Devol que desenvolveu em sua empresa em 1954, segundo Antunes (2015).

Nesta visão, pautado em Rosário (2010), a robótica industrial tem como principal motivo para seu crescimento as demandas das necessidades de automação das indústrias.

Cada vez mais a economia vem sendo alimentada por imposições da globalização por qualidade e otimização de tempo, por exemplo.

Desta forma, o uso de maquinários nas indústrisa está sendo frequente nessa nova era. Umas das vantagens dessa robotização de acordo com Rosário (2010) são a maior precisão e realização mais qualificada de um processo qualquer. Porém, cabe a discussão também das desvantagens de usar essa ferrameta tecnológica, citando uma, temos o desemprego, ou seja, a troca do serviço humano por máquinas.

Conforme o tempo vai passando as mudanças vêm surgindo e isso não tem como negar. Entretanto, no que diz a respeito à educação, faz necessário ter modificações alinhadas a essas transformações que o mundo vem obtendo de acodo com Muzakki et al.(2018). Assim, as discussões em educação sobre ensino-aprendizagem vêm ocorrendo há muito tempo no que se refere a transformações no ensino de modo que o aluno possa compreender o mundo a sua volta e entender que o que ele vê em sala de aula faz parte de sua vida de certa forma.

Desse modo, pensando em fazer diferente do conceito tradicionalista de que ensinar não é simplesmente transferir o conhecimento para o ouvinte de forma direta através de informações (FREIRE, 1996), essa pesquisa tem o principal objetivo de apresentar uma proposta metodológica sobre o ensino de trigonometria através de sequência didática envolvendo robótica educacional, tendo em vista que metodologias que contextualizem temáticas desenvolvidas em sala de aula são sempre bem-vindas ao universo educacional.

> A robótica educativa é uma forma de aplicação de tecnologia no processo de ensino e aprendizagem, de maneira que se torna possível uma ampliação significativa da gama de atividades desenvolvidas na escola e possibilita a interação entre diferenças áreas do conhecimento. (SILVA, 2014, p. 20)

Diante disso, em se tratando de robótica, pode-se dizer que a essência é a automação, isto é, o ser humano está evoluindo e com sua capacidade de raciocinar criando máquinas capazes de fazer tarefas específicas.

3.2 BRAÇO MANIPULÁVEL COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE 2- DOF

De acordo com Muzakki et al.(2018) o braço manipulável 2-DOF é o que determina qual espaço e qual a tarefa que um determinado robô irá fazer. Contudo, os autores ainda afirmam que quanto maior o grau de liberdade (DOF *–degrees of fredom*), mais funções o robô pode realizar bem como fazer tarefas mais complexas.

Por outro lado, segundo Rijo (2013) o grau de liberdade está associado às juntas de um robô, isto é, o número de grau de liberdade equivale ao número de variáveis de posição para a localização das partes desse mecanismo, conforme abaixo:

> Em robótica, geralmente se utilizam dois tipos básicos de junta para compor um par cinemático formado por dois elos adjacentes: junta de rotação ou junta prismática (translação). O número de graus de liberdade que um robô apresenta corresponde ao número de variáveis independentes de posição que precisam ser especificadas para se definir de forma inequívoca a localização de todas as partes do mecanismo. O robô industrial é, normalmente, uma combinação de elos e juntas em forma de cadeia cinemática aberta. Dessa forma, o número de juntas equivale ao número de graus de liberdade. (RIJO, 2013, p.7)

Portanto, basicamente pode-se inferir que o grau de liberdade de um braço manipulável é em suma as funções que um robô pode fazer, sendo estas o conjunto de atividades pensadas para que um robô possa cumprir tal objetivo. Deste modo, quanto mais grau de liberdade, mais função o robô terá, ou seja, para tarefas mais complexas o número de grau de liberdade será maior também.

Nesse mesmo raciocínio, também afirma o seguinte:

> Graus de liberdade (dregrees-of-freedim – DOF) é o número total de movimentos independentes que um dispositivo pode efetuar. Um cubo no espaço a 3 dimensões pode deslocar-se ao longo dos 3 eixos, e também rodar em torno de cada um deles, dando assim um total de 6 graus de liberdade para a sua movimentação. (SANTOS, 2003, p. 2-6).

Com isso, Muzakki et al.(2018) afirma que essa área de trabalho geralmente é delimitada por um plano utilizando um sistema de cordenadas cartesianas. Assim sendo, eles ainda argumentam que muitos robôs possuem motores que atuam somente em sistema de coordenadas planares.

Abaixo na figura 14 temos um exemplo de robô com 5 graus de liberdades fabricado por uma empresa suíça oferecendo ao mercado têxtil e de robótica recursos para várias situações.

Figura 18 – Robô Staübli RX 170 hsm

Fonte: ANTUNES, João P. M. Dias. Programação de robôs industriais em operações de maquinagem. 2015. FEUP- Dissertação de Mestrado do MIEM.

3.3 CINEMÁTICA DIRETA E INVERSA

A modelagem matemática que fixa um sistema de coordenadas no elo ou junta de um dispositivo robótico fazendo com que possamos descobrir sua posição no plano, bem como os ângulos que esse dispositivo faz, chamamos de cinemática. A cinemática segundo Craig (2005) é a ciência que estuda os movimentos de um corpo explicando a sua aceleração independentemente de forças alheias aplicadas a ele. Existem dois tipos de cinemáticas, a direta e a inversa conforme Muzakki et al.(2018):

> Existem dois tipos de cinemática, cinemática direta e cinemática inversa. Cinemática direta é o processo de cálculo da orientação e posição do efetuador final baseado nos cantos da junta. Enquanto cinemática inversa é o oposto, dada a posição de efetuador final, procurar quais ângulos devem ser alterados para que cada junta seja capaz de alcançar a posição final do efetuador final. (MUZAKKI et al. 2018, p.246)

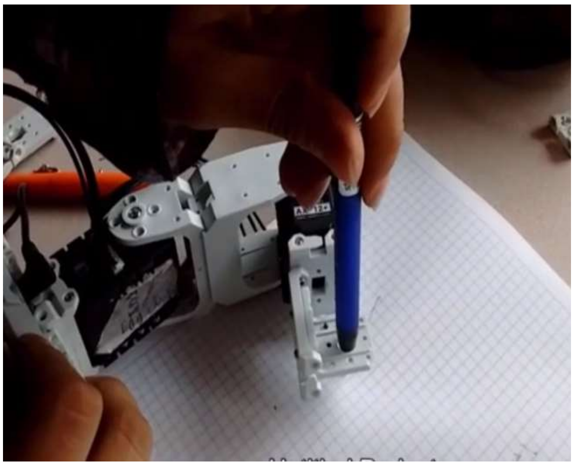
Neste trabalho, iremos confeccionar um produto educacional de braço robótico que irá trabalhar no plano, ou seja, não será em espaço tridimensional. Assim, o objetivo é abordadar o conteúdo de trigonometria, dando subsísidos ao professor de matemática para poder lecionar aulas diferentes do tradicional desse assunto.

3.3.1 CINEMÁTICA DIRETA

A cinemática direta estuda o caso em que queremos achar a posição final do braço robótico, mais precisamente a posição final do efetuador desse braço, sabendo a angulação das juntas. Assim, nessa situação, o braço robótico já realizou sua atividade conforme seu grau de liberdade e iremos calcular qual a posição dele no plano, de acordo com um sistema de coordenadas cartesianas.

Com isso, o braço robótico 2R consiste em um robô planar com duas juntas e consequentemente dois graus de liberdade (2- DOF). Os eixos de atuação dessas juntas são paralelos e perpendiculares ao plano em que esse robô está atuando e as juntas fazem dois ângulos com o plano entre si. Os valores das coordenadas da posição final do efetuador podem ser obtidos calculando a soma das projeções dos braços.

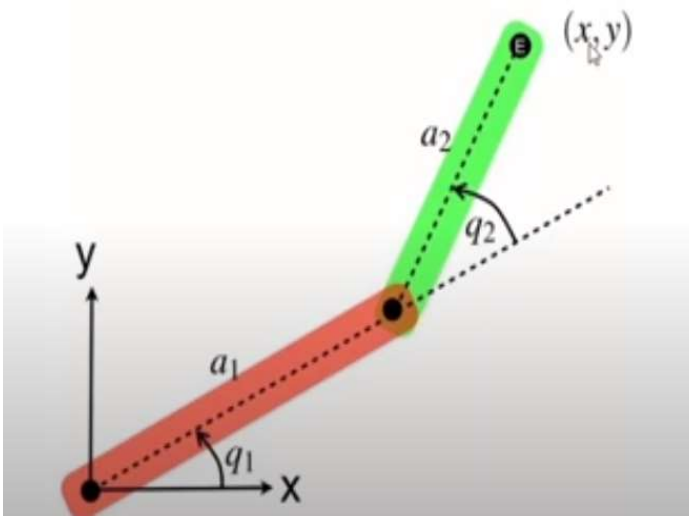
Figura 19 – Manipulador planar de dois links



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=1NmH-QnTvOg&feature=youtu.be

Outra maneira também é considerar um sistema de coordenadas cartesianas OXY, os ângulos das juntas q_1 e q_2, bem como os comprimentos dessas juntas a_1 e a_2 juntamente com a distância da origem desse sistema até a posição final do efetuador de acordo com a figura que segue.

Figura 20 – Manipulador planar de dois links



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=1NmH-QnTvOg&feature=youtu.be

3.3.2 CINEMÁTICA INVERSA

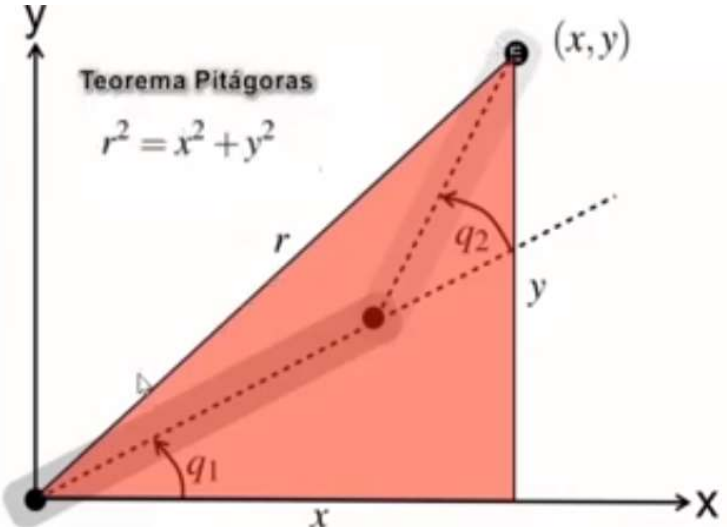
Já a cinemática inversa, se preocupa com os cálculos para descobrir quais ângulos as juntas vão fazer dado inicialmente a posição final do efetuador, isto é, é o processo oposto da cinemática direta. Nesse sentido, Santos (2003) assegura que se a cinemática direta ocupa dos cálculos das expressões diretas dos manipuladores, a inversa busca definir conjuntos de valores das juntas que são compatíveis com a posição do plano cartesiano.

Desse modo, de acordo com Melo (2015): "Primeiramente, devemos considerar a existência ou não de soluções para posição e orientações dadas. Esta análise é bem particular de cada manipulador, pois envolve um estudo detalhado de seu *workspace"*. (Melo 2015, p. 51).

Nesse mesmo viés, Melo (2015) afirma que as equações da cinemática inversa não são tão triviais como na cinemática direta.

> As soluções de forma fechada são aquelas que obtém como solução equações analíticas para os ângulos das juntas em função da posição e da orientação. Normalmente, dentro desta categoria pode ser identificados dois tipos de métodos bem similares: o algébrico e o geométrico, O primeiro manipula algebricamente as equações obtidas na análise da cinemática direta para chegar nas soluções, já a segunda faz intenso uso de técnicas de geometria planar para obter as soluções. Geralmente, as expressões envolvidas durantes ambos os procedimentos são do tipo transcendentais. Por Exemplo, muitas dessas expressões são funções de $\sin(\theta)\ e\ \cos(\theta)$ mas não como funções diretas de θ. (Melo, 2015, p. 52).

Figura 21 – Manipulador planar a dois DOF



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=1NmH-QnTvOg&feature=youtu.be

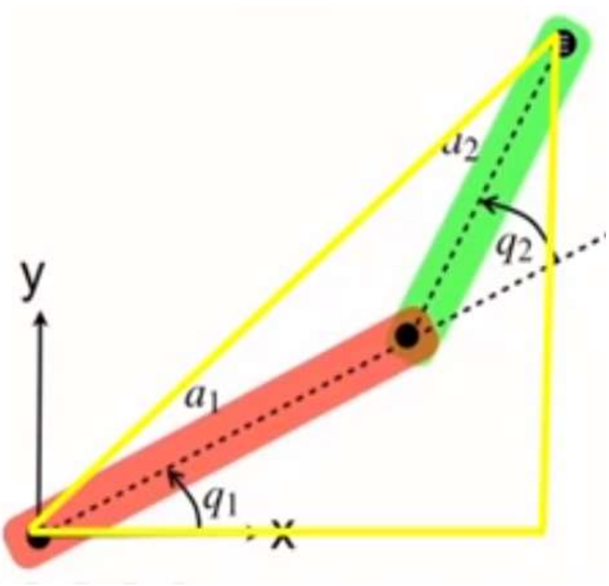
3.4 CÁLCULO DA CINEMÁTICA DIRETA E INVERSA DO BRAÇO ROBÓTICO 2 – DOF

Nesta seção vamos apresentar os cálculos da cinemática direta e inversa de um braço de robô com duas juntas, isto é, com grau de liberdade 2 (DOF). Para isso, usaremos os conceitos e resultados de trigonometria já mencionados anteriormente.

Com isso, de acordo com Melo (2015), a cinemática direta é encarregada de estudar a função T = $f(\theta)$, dados o vetor transposto das variáveis da junta $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$, que encontre a posição final do efetuador do braço de um robô de 2 DOF por meio de uma matriz homogênea T a qual é formada por uma submatriz de rotação R que orienta o efetuador juntamente com um vetor r que indica a posição.

Ainda conforme Melo (2015) e considerando a proposta desta pesquisa a qual é trabalhar conceitos básicos de trigonometria, vamos considerar apenas a posição. A orientação será fixada pra uma simplificação dos cálculos. Portanto, de acordo com a próxima figura chegamos à fórmula da cinemática direta para um braço de robô com 2 graus de liberdade somando as projeções das juntas nos eixos x e y.

Figura 22 – Coordenadas para um manipulador planar a 2 DOF



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=1NmH-QnTvOg&feature=youtu.be

Logo, considerando nesse modelo que os braços possuem comprimentos a_1 e a_2, em cada eixo x e y, temos as seguintes coordenadas:

$\cos q_1 = \frac{x_1}{a_1} \Rightarrow x_1 = a_1 \cos q_1$ e

$\cos(q_1 + q_2) = \frac{x_2}{a_2} \Rightarrow x_2 = a_2 \cos(q_1 + q_2)$

Consequentemente,

$x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1 + q_2)$

De modo análogo, podemos chegar à fórmula da coordenada y

$\text{sen}\, q_1 = \frac{y_1}{a_1} \Rightarrow y_1 = a_1 \text{ sen}\, q_1$ e

$\text{sen}(q_1 + q_2) = \frac{y_2}{a_2} \Rightarrow y_2 = a_2 \text{ sen}(q_1 + q_2)$

$\text{y} = y_1 + y_2 \Rightarrow \text{y} = a_1 \text{ sen}\, q_1 + a_2 \text{ sen}(q_1 + q_2)$

Assim, as fórmulas da cinemática direta de um braço de robô com 2 graus de liberdade e braços com comprimentos a_1 e a_2 são:

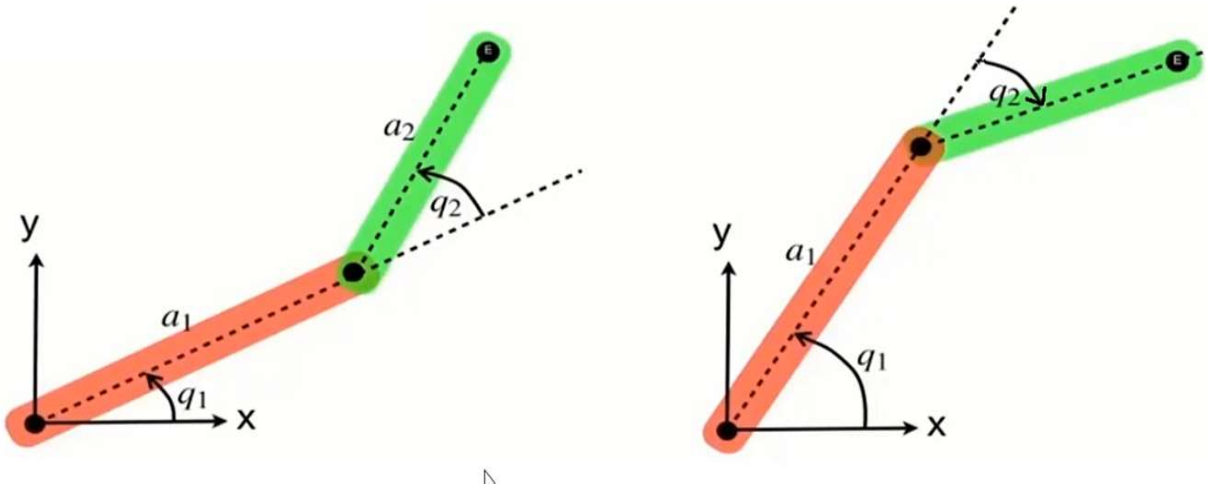
$$\boxed{\begin{aligned} x &= a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1 + q_2) \\ y &= a_1 \operatorname{sen} q_1 + a_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \end{aligned}}$$

Neste caso, observe que para achar a equação da cinemática direta faz-se uso das fórmulas de adição de cosseno e seno já demonstrada anteriormente. Assim, os alunos podem ter mais familiaridade com o conteúdo e já começar a enxergar a aplicação.

De outro modo, as equações da cinemática inversa são um pouco mais complexas e como o próprio nome sugere elas determinam o processo inverso, isto quer dizer que se tem a posição final do braço e queremos achar os ângulos que os braços fizeram nas duas juntas ainda considerando o braço com 2 DOF.

Nesse sentido, temos duas possiblidades quanto ao ângulo que o segundo braço faz com o prolongamento do primeiro, sendo uma delas no sentido anti-horário e a outra no sentido horário conforme a figura abaixo:

Figura 23 – Possibilidades do manipulador planar a 2 DOF

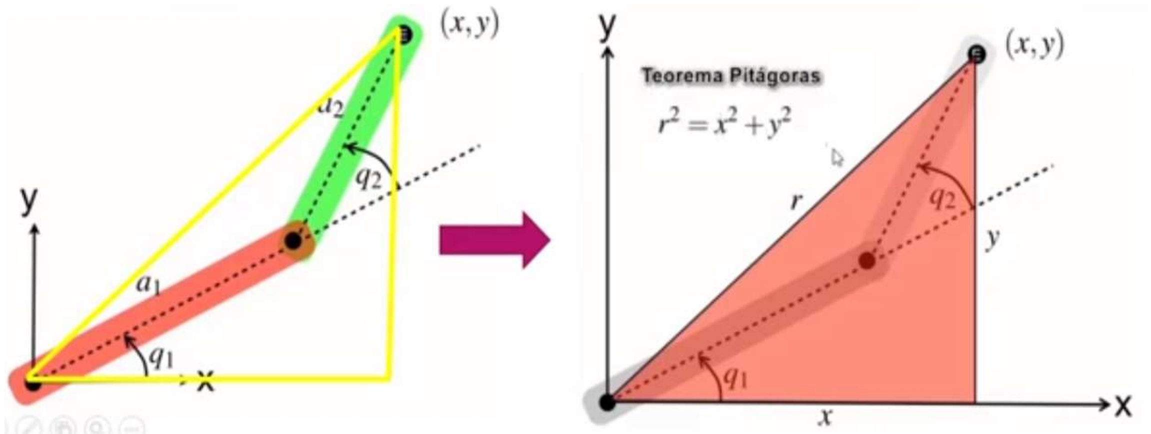


Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=1NmH-QnTvOg&feature=youtu.be

Desta maneira, será apresentado o cálculo da primeira possibilidade mencionada acima na figura 23, isto é, q_1 e q_2 são ângulos positivos.

Para isso, consideramos o triângulo na figura abaixo:

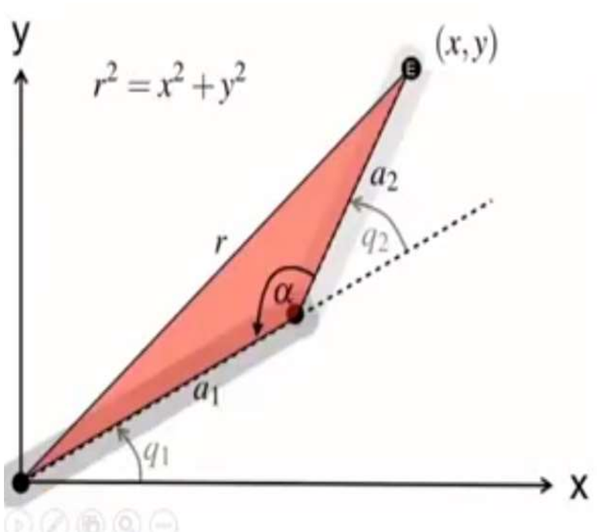
Figura 24 - Triângulo



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=1NmH-QnTvOg&feature=youtu.be

Observe que nesse triângulo de amarelo usando Pitágoras temos que $x^2 + y^2 = r^2$, faremos uso disso para achar o ângulo α a seguir.

Figura 25 – Determinação do ângulo α



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=1NmH-QnTvOg&feature=youtu.be

Aqui, podemos usar a Lei dos cossenos para achar o ângulo α, lembrando que $x^2 + y^2 = r^2$. Assim, temos

$$r^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 - 2a_1a_2cos\,\alpha$$

$$cos\ \alpha = \frac{{a_1}^2 + {a_2}^2 - r^2}{2a_1a_2}$$

$$cos\ \alpha = \frac{a_1^2 + a_2^2 - x^2 - y^2}{2a_1a_2}$$

Note que, na figura 24, $\alpha + q_2 = \pi$ e consequentemente, $q_2 = \pi - \alpha$.

Agora aplicando o cosseno a ambos os lados dessa expressão vem que

$$\cos q_2 = \cos(\ \pi - \alpha)$$

Fazendo uso de um resultado muito importante, $\cos(\ \pi \pm \alpha) = -\cos\alpha$, temos o seguinte:

$$\cos q_2 = \cos(\ \pi - \alpha) = -\cos\ \alpha$$

Daí,

$$cos\ q_2 = \frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - {a_2}^2}{2a_1a_2}$$

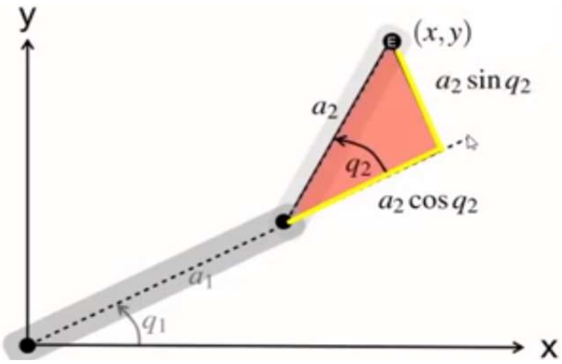
Agora, observando a relação fundamental da trigonometria, $\cos^2\theta_1 + \ \mathrm{sen}^2\,\theta_1 = 1$, vem que

$$\mathrm{sen}\,q_2 = \sqrt{1 - cos^2q_2} \qquad \text{e} \qquad tgq_2 = \frac{senq_2}{cos\ q_2} \Rightarrow tgq_2 = \frac{\sqrt{1-cos^2q_2}}{cos\ q_2}$$

Usando da função inversa de tangente, temos:

$$\boldsymbol{q_2 = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - cos^2q_2}}{cos\ q_2}\right) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - (\frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2})^2}}{\frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - {a_2}^2}{2a_1a_2}}\right)}$$

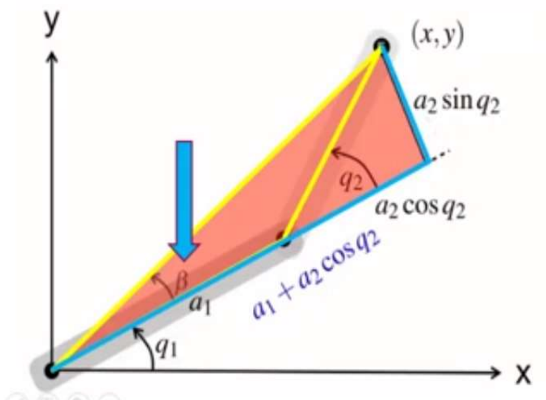
Figura 26 - Triângulo



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=1NmH-QnTvOg&feature=youtu.be

Observando a figura acima, notamos que as relações da trigonometria de seno e cosseno foram usadas, fazendo uso disso juntamente com as informações da figura abaixo, podemos calcular a tangente de β.

Figura 27 - Triângulo

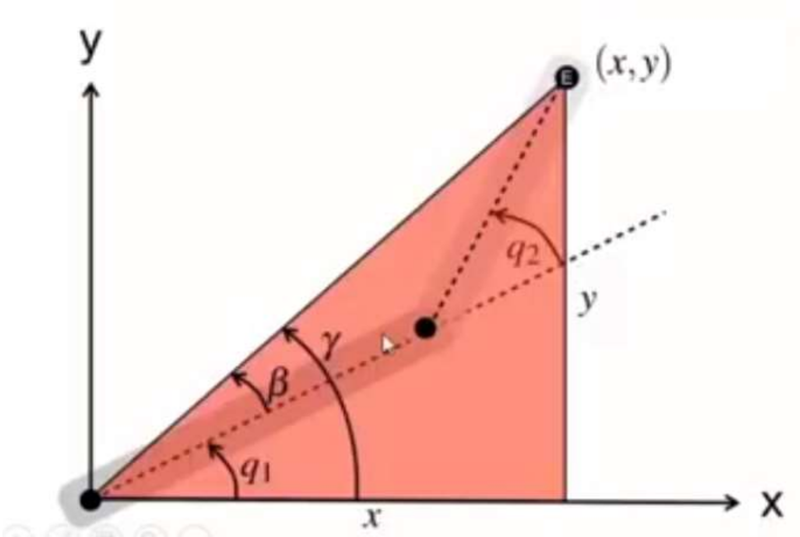


Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=1NmH-QnTvOg&feature=youtu.be

$$\tan\beta = \left(\frac{a_2 sen q_2}{a_1 + a_2 \cos q_2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \beta = tg^{-1} \frac{a_2 sen q_2}{a_1 + a_2 \cos q_2}$$

Vamos agora calcular γ conforme na figura abaixo, notando que $\gamma = q_1 + \beta$.

Figura 28 - Triângulo



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=1NmH-QnTvOg&feature=youtu.be

Aplicando a tangente de γ no triângulo maior em vermelho e observando que $\gamma = q_1 + \beta$

$$\gamma = \mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x} \quad \text{e} \quad q_1 = \gamma - \beta$$

Mas como vimos anteriormente,

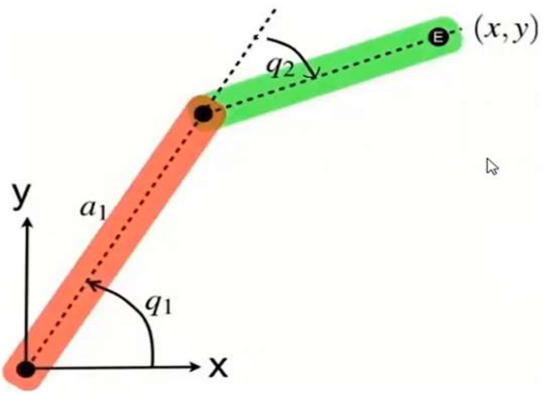
$$\beta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{a_2 senq_2}{a_1 + a_2 \cos q_2}$$

Logo, $q_1 = \gamma - \beta$

$$\boldsymbol{q_1 = \mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x} - \mathrm{tg}^{-1}\frac{a_2 senq_2}{a_1 + a_2 \cos q_2}}$$

Agora vamos demonstrar como fazer o cálculo da cinemática inversa quando a_2 faz um ângulo negativo com o prolongamento de a_1 , ou seja, q_2 está no sentido horário e o segundo braço a_2 faz um ângulo negativo com o prolongamento do braço a_1 conforme ilustrado na figura abaixo.

Figura 29 – Braço com o ângulo q_2 negativo



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=1NmH-QnTvOg&feature=youtu.be

Para encontramos o ângulo q_2 negativo, procedemos da mesma forma mostrado acima fazendo uso do resultado da Lei dos Cossenos, lembrando que q_2 está no sentido horário. Assim,

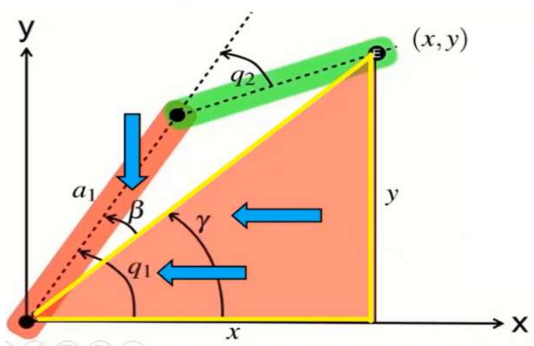
$$q_2 = -\cos^{-1}\frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - {a_2}^2}{2a_1a_2}$$

Portanto, note que o resultado para q_2 é o mesmo da situação anterior observando apenas o sinal negativo:

$$\boldsymbol{q_2 = -\mathbf{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - (\frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2})^2}}{\frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - {a_2}^2}{2a_1a_2}}\right)}$$

Observando a figura abaixo, temos as seguintes expressões para $q_1, \gamma\ e\ \beta$:

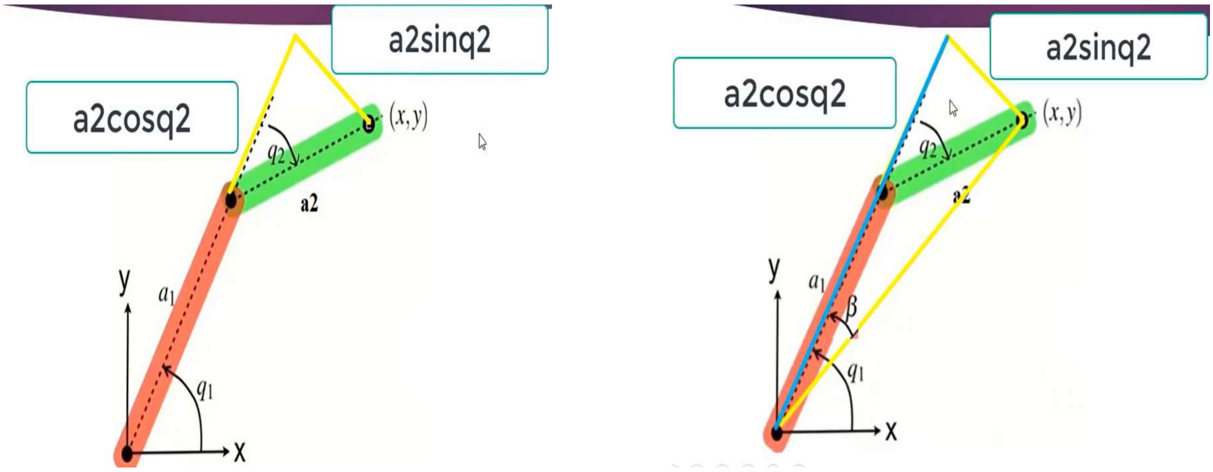
Figura 30 – Determinação de $q_1, \gamma\ e\ \beta$



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=1NmH-QnTvOg&feature=youtu.be

$$\gamma = \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x} \qquad e \qquad q_1 = \quad \gamma + \beta$$

Figura 31 – Triângulos



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=1NmH-QnTvOg&feature=youtu.be

Pelas figuras acima, podemos novamente usar os resultados das relações trigonométricas para encontrar os lados dos triângulos em amarelo na figura 31. Além disso, é possível também calcular o lado azul (hipotenusa) do triângulo a direita desta mesma figura bem como a tangente do ângulo β.

$$hipotenusa = a_1 + a_2 \cos q_2 \qquad \text{e} \qquad tg\, \beta = \frac{a_2 \operatorname{sen} q_2}{a_1 + a_2 \cos q_2} \Leftrightarrow \beta = \operatorname{tg}^{-1}\frac{a_2 \operatorname{sen} q_2}{a_1 + a_2 \cos q_2}$$

Logo, como $q_1 = \quad \gamma + \beta$, sendo $\gamma = \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x} \qquad e \quad \beta = \operatorname{tg}^{-1}\frac{a_2 \cos q_2}{a_1 + a_2 \cos q_2}$

Então,

$$\boldsymbol{q_1 = \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x} + \operatorname{tg}^{-1}\frac{a_2 \operatorname{sen} q_2}{a_1 + a_2 \cos q_2}}$$

Portanto, essas são as fórmulas da cinemática inversa para determinar os ângulos de um braço robótico planar digamos $q_1 \; e \; q_2$ composto por dois braços a_1 e a_2 e duas juntas dado que a posição do efetuador final já é sabida. Sendo as duas primeiras quando os ângulos são positivos e as duas últimas quando o segundo ângulo é negativo.

$$\boxed{\boldsymbol{q_2 = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-(\frac{x^2+y^2-a_1^2-a_2^2}{2a_1a_2})^2}}{\frac{x^2+y^2-a_1^2-{a_2}^2}{2a_1a_2}}\right)}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{q_1 = \mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x} - \mathrm{tg}^{-1}\frac{a_2 sen q_2}{a_1 + a_2 \cos q_2}}}$$

e

$$\boxed{\boldsymbol{q_2 = -\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-(\frac{x^2+y^2-a_1^2-a_2^2}{2a_1a_2})^2}}{\frac{x^2+y^2-a_1^2-{a_2}^2}{2a_1a_2}}\right)}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{q_1 = \mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x} + \mathrm{tg}^{-1}\frac{a_2 sen q_2}{a_1 + a_2 \cos q_2}}}$$

Nessas demonstrações, usamos a Lei dos cossenos, as relações trigonométricas como seno, cosseno, tangente, função inversa da tangente além de soma de ângulos bem como relação fundamental da trigonometria e o Teorema de Pitágoras, sendo assim uns bons exemplos de aplicabilidade da teoria as quais podem ser apresentadas aos alunos.

4 ABORDAGENS PEDAGÓGICAS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

No Brasil, a educação vem passando por vários momentos diferentes e conforme Saviani (2007), podemos considerar que os primeiros passos do ensino aqui no nosso país foram dados com a chegada dos jesuítas os quais foram os pioneiros a ensinar, por intermédio da catequização. Entretanto, esse ensino era de forma tradicional, isto é, predominava o autoritarismo do professor o qual era visto como o detentor do saber e o aluno tinha apenas que receber as informações e reproduzi-las fielmente. Esse processo também impactou a matemática e por volta de 1810 que aparece o primeiro matemático brasileiro publicando assuntos matemáticos na imprensa:

> Um bom exemplo dessa política real e o aparecimento de uma revista, *O Patriota*, fundada pelo matemático Manoel Ferreira de Araújo Guimarães, onde também se publicavam textos matemáticos. Araújo Guimarães havia publicado na Imprensa Régia, em 1810, o primeiro trabalho impresso no Brasil, denominado "A variação dos triângulos esféricos". È surpreendente o fato de uma imprensa emergente no Brasil ser capaz de lidar com textos matemáticos. (D'Ambrosio, 2011, p.47)

Assim, a matemática começava a ganhar espaço no Brasil com academias militares fundadas pela corte portuguesa que ofereciam cursos de Matemática, Física e Ciências Naturais. Dessa forma, a matemática era de caráter superior, com o intuito de preparar alunos para a carreira militar sendo que os primeiros livros matemáticos foram de artilharia. A educação brasileira no geral também teve vários avanços logo após a independência, são exemplos às criações das famosas faculdades de Direito em São Paulo e Olinda.

Desse modo, vale destacar várias publicações de matemática em escolas militares segundo D'Ambrósio (2011). Uma delas, foi inclusive a primeira tese de doutorado em matemática, com o título "*O modo de indagar novos astros sem auxílio das observações directas",* do autor Joaquim Gomes de Souza. Contudo, o ensino permanecia engessado, sem mudanças ou atualizações e pautado a quadro e giz de forma tradicionalista, sem estratégias diferentes, abordagens diferentes enfim, sem inovações.

Além disso, ainda conforme D'Ambrósio (2011) no início do sec. XX houve uma modernização da matemática em nosso país, nas escolas através de buscas de conceitos principalmente na Europa do que estava acontecendo no momento. Segundo o autor citado, após a Segunda Guerra Mundial houve um crescimento significante nas pesquisas matemáticas bem como a criação de universidades, escolas politécnicas e consequentemente também o aumento de pesquisadores mestres, doutores reforçando o fato de o ensino da matemática ser rigorosamente tradicional.

Fazendo um corte na história e pulando para os anos 60 e 70, Zorzan (2007) afirma que o ensino da matemática focou mais na abstração, dando mais importância na teoria ao invés da prática. Isso se deve a influência da "matemática moderna" que estava acontecendo não só no Brasil, mas em todo o mundo.

Logo, o ensino tradicionalista onde o professor é apenas transmissor da informação sem dar subsídios aos alunos à reflexão e críticas não é o que buscamos enquanto educadores e não é o ideal para os estudantes, segundo Bicudo (1999):

> Este ensino acentua a transmissão do saber já construído, estruturado pelo professor, a aprendizagem é vista como impressão, na mente dos alunos, informações apresentadas nas aulas. O trabalho didático escolhe um trajeto "simples" – transferir para o aprendiz os elementos extraídos do saber criado e sistematizado, ao longo da história das ciências, fruto do trabalho de pesquisadores. As aulas consistem sobretudo, em experiência sobre temas do programa; entende-se que basta o professor dominar a matéria que leciona pra ensinar bem (BICUCO, 1999, p. 156).

Nessa perspectiva, podemos afirmar que a educação sustentada no processo tradicional que não favorece a construção do saber, nem tão pouco contribui para a formação do indivíduo enquanto cidadão crítico, não acompanha as inovações tecnológicas. Quanto a isso, Borba; Silva e Gadanidis (2016) afirmam que a velocidade com que a tecnologia vem avançado não é a mesma quanto a distribuição e acessibilidade na sociedade, pois a cada dia surge algo melhor. Mas, essas inovações trazem oportunidades para o ensino de matemática.

De acordo com D'Ambrósio (2012), a partir da década de 70 com o surgimento da calculadora, com preço acessível a todos e também a evolução dos computadores as discussões em educação matemática começam a ganhar espaço. Portanto, algumas tendências metodológicas nasceram, como as etnomatemática, resolução de problemas, materiais manipuláveis, história da matemática, TIC's dentre outras.

Assim, é possível considerar também três perspectivas de ensino que são elas a construtivista, construcionista e por última a instrucionista onde a rigor essa pesquisa é mais caracterizada. Baseadas em reflexões de autores como Piaget, Vygotsky e Papert, essas concepções pedagógicas vêm para auxiliar no desenvolvimento de aprendizagem fazendo com que os alunos possam construir, criar e desenvolver saberes a partir deles mesmo em um processo cognitivo e através da socialização.

O construtivismo é a abordagem pedagógica em que fomenta aos alunos a construção do saber com o professor no papel de mediador, conforme Vilarinho (2020). Desse modo, segundo o autor, o professor deve ter uma organização pedagógica com competências e experiências que possibilite auxiliar os alunos na construção dos seus próprios saberes.

Logo, vale mencionar que o conhecimento não vem ao acaso ao estudante e nem tão pouco é passado para ele por meio da informação evasiva. De acordo com Vilarinho (2020):

> Depreende-se, introdutoriamente, que há uma presente necessidade de se reconhecer que as concepções ou hipóteses dos educandos combinam-se com as informações do meio, em uma interação em que predomina a atividade do sujeito cognoscente na construção do conhecimento. Isto é, o indivíduo não descobre o conhecimento espontaneamente e nem o conhecimento é transmitido mecanicamente pelo meio exterior ou pelo adulto. (VILARINHO, 2020, p.18)

Nesse mesmo ponto de vista, o construtivismo parte do pressuposto de que a escola também dê subsídios aos alunos no que diz respeito da aprendizagem, nesse sentido:

> A aprendizagem contribui para o desenvolvimento na medida em que aprender não é copiar ou reproduzir a realidade. Para a concepção construtivista, aprendemos quando somos capazes de elaborar uma representação pessoal sobre um objeto da realidade ou conteúdo que pretendemos aprender. (SOLÉ; COLL, 2001, p.19)

Essa perspectiva construtivista é sustentada na teoria de Piaget, onde o indivíduo interage com o meio e baseado nisso, Leão (1999) afirma que a interação do aluno com o ambiente traz à tona a construção, a destruição, a reconstrução do conhecimento vindo do próprio estudante, isto é, a aprendizagem parte do próprio sujeito sendo este o protagonista do processo ensino-aprendizagem e o professor apenas como um auxiliador.

Sobre esse mesmo ponto de vista, "Piaget vê o professor mais como espectador do desenvolvimento e favorecedor dos processos de descobrimento autônomo de conceitos do que como um agente que pode intervir na assimilação do conhecimento" (SILVA, 2014, p.14).

Já a visão construcionista, aponta que o sujeito constrói seu conhecimento de forma subjetiva, vindo do seu interior para o exterior e também de sua vivência, concepções essas que são aceitas tanto para Vygotsky como para Piaget, conforme Silva (2014).

Essa abordagem se baseia nas teorias de Papert e Piaget, onde o primeiro baseado nas teorias Piagetiana desenvolveu uma proposta de ensino a qual denominamos Contrucionismo de acordo com Vilarinho (2020).

Seymour Papert foi um professor sendo um dos primeiros a desenvolver a programação com o uso de computadores na educação de acordo com Silveira (2012). Ainda segundo o autor, Papert também criou o LOGO uma linguagem que faz parte da programação de computadores usada na aprendizagem da criança e posteriormente o famoso Lego - Logo que é um brinquedo tipo um robô infantil construídos com blocos legos.

Daí, Seymour construí essa concepção construcionista baseada em Piaget e Vigotsky de acordo com Silveira (2012):

> Papert, para elaborar sua concepção de Construcionismo, aprofundou-se na Teoria Construtivista de Piaget e Vigotsky, mas acabou se distanciando da Psicologia do Desenvolvimento, passando a alinhavar uma teoria mais voltada para a intervenção pedagógica. Dessa forma, como o próprio Papert definiu, o Construcionismo passa a ser uma “reconstrução pessoal do construtivismo”. (SILVEIRA, 2012, p.122)

Para Papert, o aluno é capaz de fazer uma ligação entre o abstrato e o concreto por meio da interação utilizando o computador. Assim, o aluno pode construir suas próprias intuições através desse ambiente conforme afirma Vilarinho (2020).

Por outro lado, a concepção instrucionista é o ensino voltado para o tradicional e que mais tem sido usado nas escolas sendo caracterizado por uma aprendizagem comportamentalista, assim como afirmam Silva, Kahil, Nicot (2015). E dessa maneira, decidimos optar por essa perspectiva como carro chefe para essa pesquisa proposta aos professores de matemática onde comtemplarão todas as outras concepções de ensinos citadas com os seus alunos.

Entretanto, por mais que o instrucionismo seja, como o próprio nome sugere, algo que é passado como informação ou passos a seguir, acreditamos que essa proposta visa comtemplar as várias concepções citadas aqui anteriormente.

Ainda conforme Silva, Kahil, Nicot (2015), a abordagem instrucionista é caracterizada pela transmissão de informações feita por um computador através de jogos e simulações para os alunos a fim de que eles possam executar alguma atividade. Aqui, iremos propor uma sequência didática instrucionista para os professores de Matemática trabalharem a trigonometria e indiretamente, estaremos sugerindo para os alunos instruções para realizar tal tarefa.

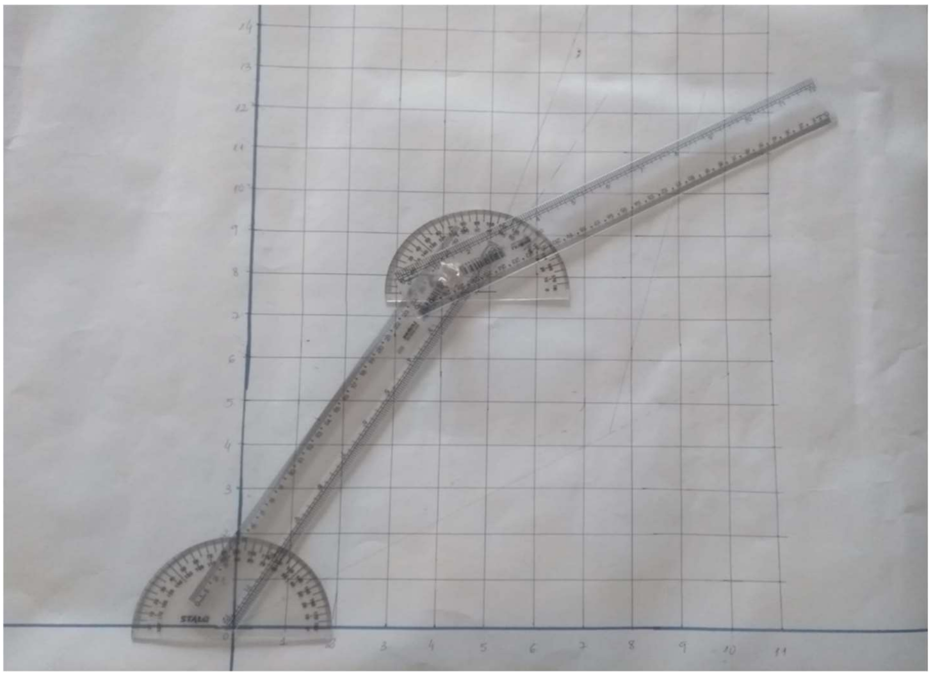
5 PRODUTO EDUCACIONAL

O nosso produto consiste em confeccionar um braço manipulável com 2- DOF rudimentar com réguas e trasnferidores além de uma cartolina quadriculada simulando um sistema de coordenadas cartesianas, conforme Muzakki et al.(2018).

Assim, a ideia é sugerir uma proposta didática ao professor para trabalhar conceitos de trigonometria aplicados a uma situção real e atualizada. Para isso, escolhemos o tema robótica que vem crescendo há muito tempo em todos os setores e segmentos econômicos. Desse modo, acreditamos que essa proposta poderá ser uma estratégia para sanar problemas de didáticas quanto ao ensino de trigonometria na sala de aula.

Para isso, o primeiro passo foi pegar uma cartolina e quadriculá-la como se fosse um sistema de coordenadas. Logo depois, confeccionamos o braço robótico constituido de duas réguas comuns de 30 cm, isto é, o braço terá uma junta, considerando que a outra junta incial será desprezada, pois é o angulo incial em que podemos apenas mover a primeira régua manualmente conforme a figura abaixo:

Figura 32 - Plotter



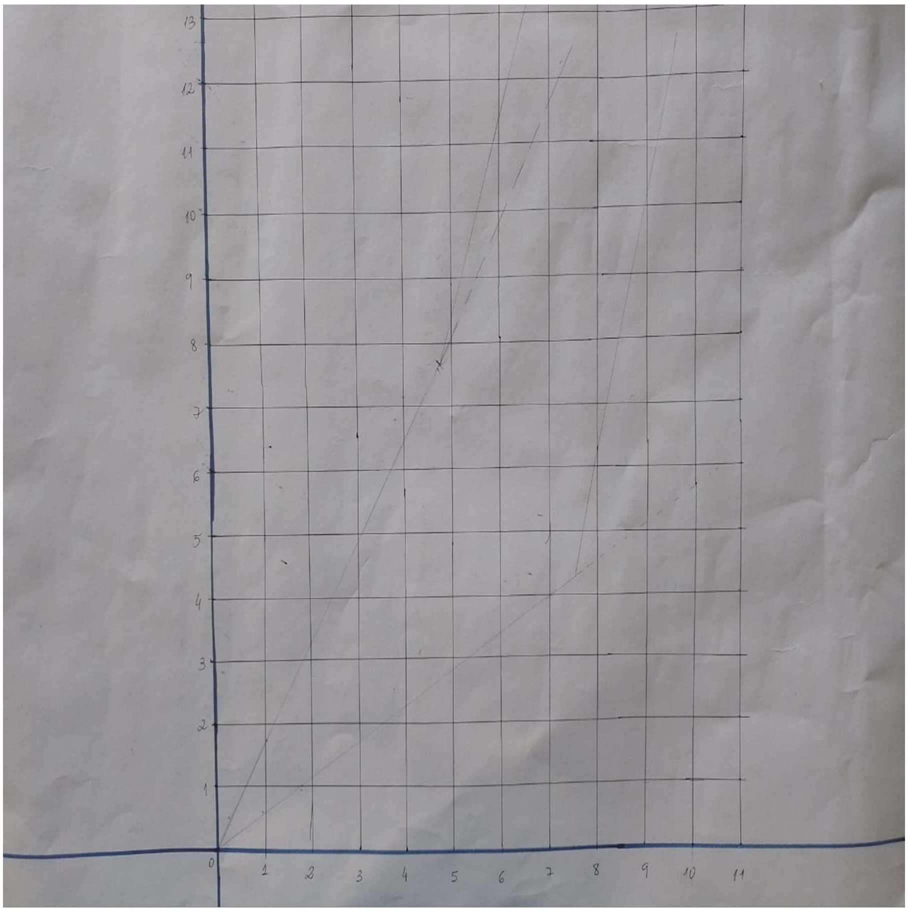
Fonte: Organizado pelo autor, 2021.

Dessa forma, vale mencionar que o produto utilizado neste trabalho, conhecido também como Plotter, foi fundamentado no artigo internacional "*Robots Arms Kinematics Learning using Pointe Plotter"*. Ele é bastante rudimentar e simples de fazer. Os materiais usados são: uma cartolina, duas réguas de 30 cm (se possível com um furo cada) e dois transferidores.

A ideia aqui é simular um braço robótico que os alunos possam confeccionar sem grandes problemas, porém fica a sugestão de criar um braço robótico com motor ou com peças LEGO®. Na cartolina iremos simular o campo de trabalho do braço, e como é pretendido trabalhar com o plano, a cartolina será o plano cartesiano e as réguas os braços, onde existirá somente uma junta que unirá as duas réguas.

O primeiro passo é construir na cartolina um sistema de coordenadas cartesianas de forma quadriculada para facilitar a atividade conforme a figura abaixo.

Figura 33 – Cartolina



Fonte: Organizado pelo autor, 2021.

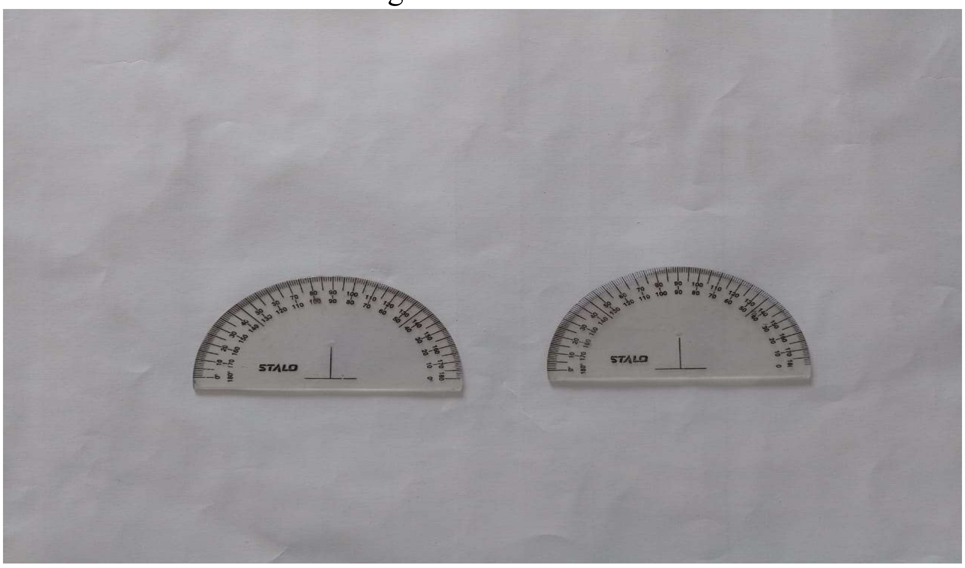
Em seguida, é só juntar as réguas que serão os braços robóticos. Para isso, a sugestão da figura abaixo foi usar de forma bem rustica um pedaço de papel para uni-las através de um orifício que as réguas continham, fazendo que elas se movimentem como se fosse uma junta mecânica.

Figura 34 - réguas

Fonte: Organizado pelo autor, 2021.

E por fim, vem os transferidores que usaremos para medir os ângulos. Os transferidores se localizam um na origem do sistema de coordenadas e o outro na junta da união das réguas, afim de medir os dois ângulos mostrados no modelo desse trabalho.

Figura 35 - Transferidores



Fonte: Organizado pelo autor, 2021.

Nesse sentido, esse produto abrange o sistema cartesiano no plano, medição de ângulos, cálculos algébricos e geométricos além da aplicação dos conceitos e resultados da trigonometria. Assim, acreditamos ser essa uma estratégia contextualizada para trabalhar a trigonometria na prática e de forma concreta.

O Plotter funciona da seguinte maneira, considerando primeiramente a cinemática direta iremos medir os ângulos que as réguas fazem com os transferidores tanto na origem como na junta dos dois braços (réguas). Para isso, o primeiro ângulo é medido levando em consideração a abertura que a primeira régua faz com o eixo OX, já o segundo ângulo é medido considerando o prolongamento do primeiro braço como se fosse um "eixo OX" alternativo com a abertura do segundo braço.

Feito isso, o próximo passo é descobrir qual a posição final da segunda régua no sistema cartesiano e isso pode ser calculando pela fórmula da cinemática direta de um braço robótico de grau de liberdade 2 conforme mencionado anteriormente.

$$\boldsymbol{x = a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1 + q_2)} \qquad\qquad \mathbf{y} = \boldsymbol{a_1}\ \mathbf{sen}\, \boldsymbol{q_1} + \boldsymbol{a_2}\ \mathbf{sen}(\boldsymbol{q_1} + \boldsymbol{q_2})$$

Já no caso do processo ao contrário, da cinemática inversa, iremos dispor os braços aleatoriamente ou propositalmente em alguma posição na cartolina e observar as coordenadas x e y do sistema cartesiano. Logo após, o objetivo é encontrar os ângulos positivos dos braços correspondentes a posição inicial do efetuador final. Desse modo, dados os comprimentos dos braços e as coordenadas do efetuador final do braço robótico é possível calcular os ângulos procurados pela fórmula da cinemática inversa de um braço robótico de grau 2.

$$\boxed{\boldsymbol{q_2} = \mathbf{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}\right)^2}}{\frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - {a_2}^2}{2a_1a_2}}\right)}$$

$$q_1 = \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x} - \operatorname{tg}^{-1}\frac{a_2 sen q_2}{a_1 + a_2 \cos q_2}$$

Portanto, a proposta dessa dissertação é aliar um produto de material manipulável com uma concepção pedagógica e para isso escolhemos a sequência didática com o objetivo de sustentar essa maneira diferente de ensinar trigonometria, fazendo com que professores de matemática possam ter um auxílio para preparar suas atividades relacionadas a esse tema.

Uma tendência pedagógica não citada na seção 4 e que é muito importante no processo ensino-aprendizagem é a sequência didática. Portanto, essa seção foi inteiramente dedicada a esse tema que é a estratégia que escolhemos para sugerir ao professor no que diz respeito a ensino da trigonometria.

A sequência didática surgiu no Brasil a partir da década de 90 com forte representação nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN'S) através da exposição de atividades sequenciadas. Foi a partir do documento oficial que o termo sequência didática passou a compor às pesquisas (MACHADO; CRISTOVÃO, 2006).

De acordo com Zabala (1998) a sequência didática é uma variável da prática educativa, isto é, segundo o autor o bom profissional precisa objetivar a competência no seu ofício, estudando, pesquisando e por consequência adquirindo experiência e conhecimento para uma docência eficaz. Para isso, ele afirma que é necessário que o professor tenha o controle e conhecimento de variáveis que o permitirão planejar o processo educativo e depois analisar, aplicar e avaliar.

Conforme afirma Libâneo (1994), o planejamento docente está ligado não só a previsão de atividades, mas também à pesquisa, reflexão e avaliação do que o professor está propondo. Para esse autor, o planejamento abrange três perspectivas entrelaçadas entre si: plano da escola, plano de ensino e plano de aulas.

Nesse contexto, o plano da escola aborda propostas pedagógicas e administrativas, trata-se do projeto político pedagógico, com uma organização didática que envolve o contexto social, político, econômico e cultural de uma comunidade escolar.

Já o plano de ensino é um roteiro que contempla um recorte nas unidades didáticas específicas, norteando o desenvolvimento metodológico das disciplinas atreladas aos objetivos das instituições de ensino.

Por outro lado, o plano de aula envolve ações específicas, é o plano de ensino detalhado, onde o professor vai planejar a aula sistematicamente para situações didáticas reais. É um guia flexível de diretrizes para atuação docente com o objetivo de orientar a prática.

Assim a sequência didática nada mais é, segundo Zabala (1998) um conjunto de atividades sequenciais, bem ordenadas e estruturadas para um determinado fim educacional onde o professor e o aluno conhecem o início e o fim. Para o autor, essa variável da prática educativa fomenta para o aluno a possibilidade de diversas formas de aprender e para o professor vários meios de absorver a maneira como eles constroem seu conhecimento.

Ainda mais, o autor afirma que "Também observamos que os diferentes conteúdos que apresentamos aos meninos e meninas exigem esforços de aprendizagem e ajudas específicas. Nem tudo se aprende do mesmo modo, no mesmo tempo nem com o mesmo trabalho". (ZABALA, 1998, p.84). Nesse sentido, a sequência didática é a ferramenta eficaz na escolha do planejamento do professor, pois ela fomenta a aprendizagem e o ensino também, além de ser interdisciplinar no que tange a conectar tema de uma disciplina à especificidade de outra, tornando-se assim o ensino mais genérico e não particular, conforme afirmam Peretti; Tonin da costa (2013).

Para que a sequência didática seja efetiva, é preciso que os alunos conheçam claramente o que é pra ser feito, os objetivos e aonde quer chegar. A sequência didática tem que ser bem detalhada com passos para o professor e alunos seguirem como se fosse uma receita, porém flexível, o professor deve ter a sensibilidade ao intermediar o processo de aprendizagem. Ainda no ponto de vista de Zabala (1998), a sequência didática é defendida por ele porque ela traz meios que fazem os alunos serem investigativos na construção do seu próprio conhecimento, fazendo com o que os mesmos se tornem cidadãos críticos, conscientes capazes de transformar a sociedade.

6 UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COMO PROPOSTA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

A ideia é ensinar trigonometria de uma forma diferente, com uma aplicação onde os alunos possam ver na prática esses conceitos e que de forma empírica eles possam se apropriar de algumas propriedades trigonométricas. Apesar do conceito de sequência didática estar associada ao instrucionismo, a proposta de ensino é baseada na interação professor/aluno pela teoria construtivista/construcionista observando alguns conceitos de robótica educacional.

A proposta é para alunos do 9º ano do ensino fundamental como parte da matriz curricular e observando as competências necessárias para essa fase educacional conforme a BNCC. Esperamos que esse trabalho possa orientar os docentes a ter subsídios para ensinar esse conteúdo em sala de aula. Além disso, esperamos que os discentes venham absorver com clareza os conceitos de trigonometria.

Para isso, vamos considerar a seguinte situação-problema, onde um robô industrial precisa desempenhar uma atividade onde terá que cortar uma chapa metálica. Neste caso, estamos apenas interessados no começo da furação, isto é, apenas a posição inicial do corte. No primeiro caso, são dadas as angulações dos braços desse robô e pede-se aonde o efetuador irá começar a furar a chapa (cinemática direta), tendo em vista que a chapa funciona como se fosse um plano.

Já em um segundo caso, o braço já se encontra na posição inicial de corte e queremos saber quais os ângulos que os braços terão que fazer para tal situação, é o que chamamos de cinemática inversa.

Essa proposta é uma maneira de propor algo diferente e contextualizado no ensino de trigonometria já que a robotização das fábricas é uma tendência que vem crescendo bastante no mercado econômico, sem dizer que para resolver esse problema é necessário fazer uso das relações trigonométricas observando suas aplicações.

SEQUÊNCIA: TRIGONOMETRIA

MODALIDADE/NIVEL DE ENSINO

- Ensino fundamental / 9º ano

ÁREA

- Matemática

UNIDADE TEMÁTICA

- Geometria

OBJETOS DE CONHECIMENTO

- Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais

HABILIDADES

- EF09MA13. Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
- EF09MA14 Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

CONTEÚDOS ABORDADOS

Cálculos de ângulos, relações métricas no triângulo retângulo, números reais.

DURAÇÃO DAS ATIVIDADES

8 a 10 aulas de 50 minutos, o professor pode personalizar de acordo com o andamento da turma.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS TRABALHADOS PELO PROFESSOR COM ALUNO

- Recomenda-se que já tenha trabalhado o sistema cartesiano de coordenadas, bem como o conjunto dos números reais e ângulos.

ESTRATÉGIAS DE ENSINO E RECURSOS EDUCACIONAIS

- Aulas expositivas
- Livro didático
- Caderno, lápis e borracha
- Cartolina, régua e transferidor
- Trabalho em grupo
- Resolução de exercícios
- Quadro e giz

DESCRIÇÃO DO DESENVOLVIMENTO SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

1ª etapa

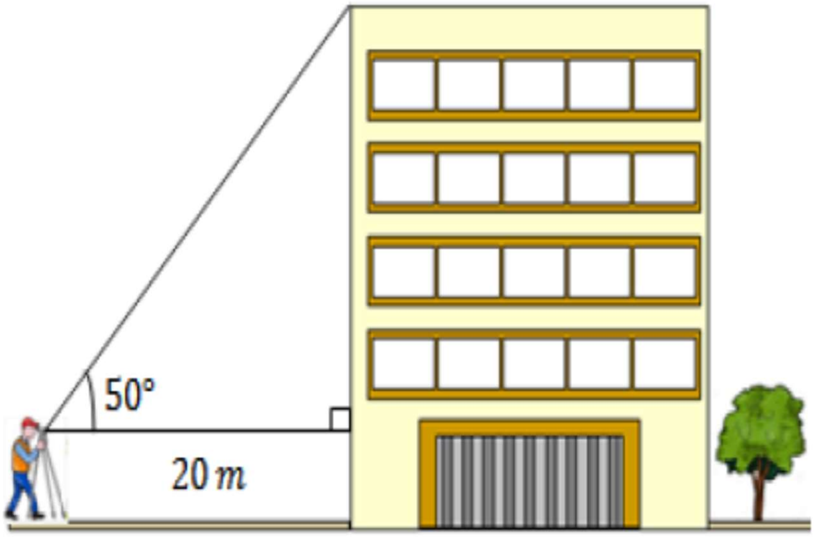
Nesta etapa inicial recomenda-se que o professor comece a aula se apresentado, dando boas-vindas aos alunos e organizando o espaço da sala de aula com todos os alunos devidamente acomodados em seus devidos lugares. Em seguida, o professor deve apresentar o tema Trigonometria e começar uma conversa informal com os alunos a respeito do tema, esse momento é importante para que se tenha um diagnóstico da turma sobre temas elementares e as noções que possuem sobre tal assunto. Isso poderá ser feito por meio de indagações, intermediação de discussões, mas sem adentrar com detalhes na temática proposta.

Vale ressaltar que nesse momento, o professor pode gastar tempo e caprichar em uma introdução interessante com exemplos contextualizados e principalmente aplicações no nosso dia a dia. Procure também se dedicar a história da trigonometria, destacar sua evolução e necessidade mostrando aos alunos como ela chegou até aqui.

Após esse momento introdutório, o professor apresentará o tema Trigonometria explicando sua raiz etimológica e posteriormente uma situação-problema qualquer instigando os alunos a como ter a solução, considerando democraticamente sem julgar as várias respostas que poderão surgir. Nesta hora é bom quebrar objeções e ter uma boa flexibilidade para não frustrar alguns alunos e correr o risco de perderem o interesse sobre o tema.

Abaixo uma sugestão de uma de situação-problema retirada da sala de atividades: brincando com a trigonometria do site clubes de Matemática da OBMEP.

Figura 36– Situação-problema do edifício



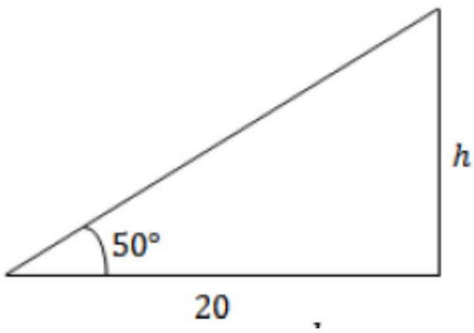
Fonte:http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-brincando-com-trigonometria

Uma pessoa com 1,75 m de altura, que se encontra a 20 m da base de um edifício vê o ponto mais alto dele sob um ângulo de 50°. Qual a altura aproximada do edifício?

Solução:

Seja h o comprimento, em metros, do segundo cateto do triângulo retângulo que aparece na figura.

Figura 37 – triângulo retângulo



Fonte:http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-brincando-com-trigonometria/

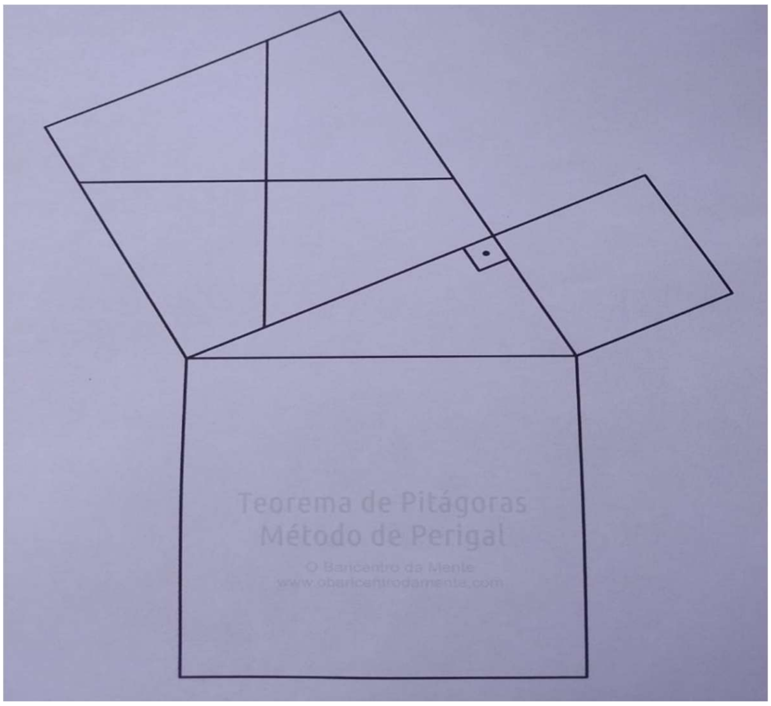
Assim, $\mathbf{tg}\,\mathbf{50}° = \frac{\boldsymbol{h}}{\mathbf{20}}$, donde $\boldsymbol{h} = \mathbf{20} \times \boldsymbol{tg}\mathbf{50}°$. Portanto, $\boldsymbol{h} \approx \mathbf{23,84}$ e, então, a altura do edifício é, aproximadamente, $\mathbf{25,6\ m}$.

Logo, considerando algumas respostas, ratificando outras o professor pode deixar em aberto a discussão e imediatamente já apresentar de forma expositiva as relações básicas da trigonometria, seno, cosseno e tangente com alguns exemplos e exercícios de fixação e só depois apresentar a solução acima dada.

2ª etapa

Aqui, a sugestão é começar apresentando a demonstração de Perigal do Teorema Pitágoras. O professor pode construir com os alunos essa prova do Teorema fazendo grupos ou individualmente.

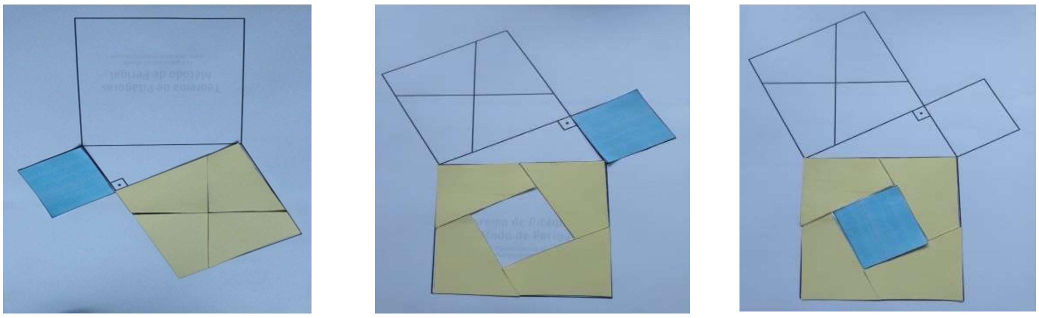
Figura 38 – Demonstração de Perigal



Fonte: https://www.obaricentrodamente.com/2018/11/teorema-de-pitagoras-metodo-de-perigal.html

A proposta é fazer com que os alunos recortem as partes do quadrado construído sobre o cateto maior e que pelas tentativas cheguem à conclusão, tentando montar esse “quebracabeça", de que essas partes juntamente com o quadrado construído sobre o cateto menor se encaixam no quadrado construído sobre a hipotenusa.

Figura 39 – Construção da demonstração de Perigal



Fonte: Organizado pelo autor, 2021.

Na figura acima, estão os passos para construir a demonstração. O conceito é deixar os alunos tentar montar as peças do quadrado em amarelo e azul dentro do quadrado maior. Neste momento, o professor pode ficar a vontade para mediar discuções e fazer algumas perguntas motivadoras, como:

1. Isso é possivel?
2. E se o triângulo tiver dois catetos com a mesma medida? Também é possivel?

Logo após, será apresentada a situação-problema envolvendo o corte de uma chapa metálica que será feito por um braço de robô industrial. Com isso, esta fase poderá consistir em mais de uma aula, pois será dedicada a confecção da atividade e poderá ter discussões e várias soluções dos alunos além de algumas investigações e indagações que serão feitas.

Neste passo, vamos confeccionar o "robô" com duas réguas de 30cm cada, dois transferidores e uma cartolina. O professor poderá optar por dividir os grupos e cada grupo confeccionar o seu ou simplesmente fazer um para a turma toda ou até mesmo já trazer pronto para sala de aula.

Situação-problema

João é um operador de máquina em uma fábrica de automóveis e precisa cortar uma chapa metálica com sua máquina robotizada. Porém a máquina, por alguma razão, perdeu a programação e João tem que programar a máquina novamente tendo que fazer os cálculos sugeridos pelo departamento de qualidade da fábrica para que não

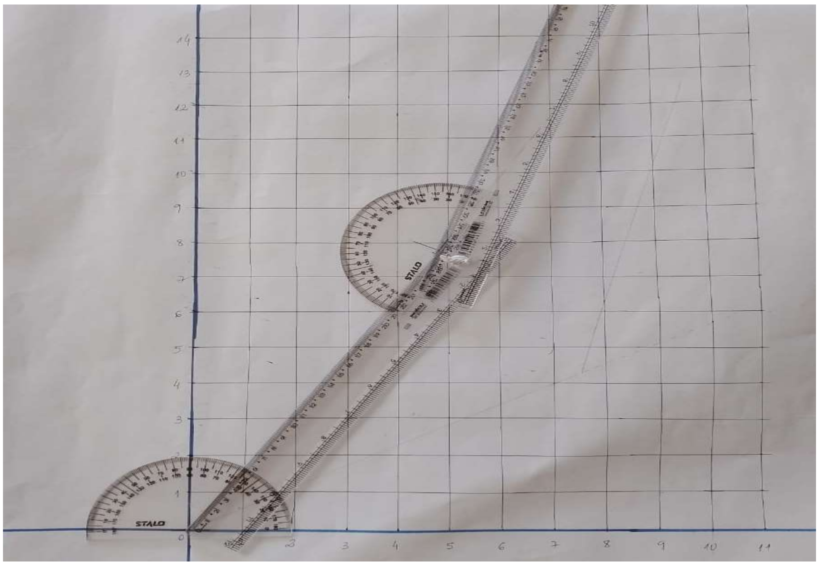
haja desperdício de material. Considerando que a chapa metálica é um plano cartesiano e que os braços são planares:

a) Quais as coordenadas (dimensões da chapa) que indicam a posição inicial do corte na chapa, sabendo que neste caso os braços medem 27 cm e 24 cm e os ângulos são de 60º e 11º?
b) Agora e se João já soubesse aonde a máquina tem que começar o corte, x = 9,66 cm e y = 12,50 cm com os dois braços medindo 26 cm, mas não soubesse os ângulos que os braços terão que fazer? Quais seriam esses ângulos?

Aqui, o professor pode desenhar a situação no quadro dando uma ideia do problema e só depois confeccionar ou exibir o plotter com a cartolina quadriculada como um sistema de coordenadas cartesianas.

De posse com o plotter, na letra “a”, temos o caso de cinemática direta, porém antes de mostrar a fórmula aos alunos é recomendado ao professor que trabalhe com os alunos os elementos de trigonometria aliados a geometria de forma elementar construindo juntos os raciocínios e considerando possibilidades de solucionar o problema, e só depois então, usar a fórmula da cinemática direta demonstrada anteriormente.

Figura 40 – Plotter

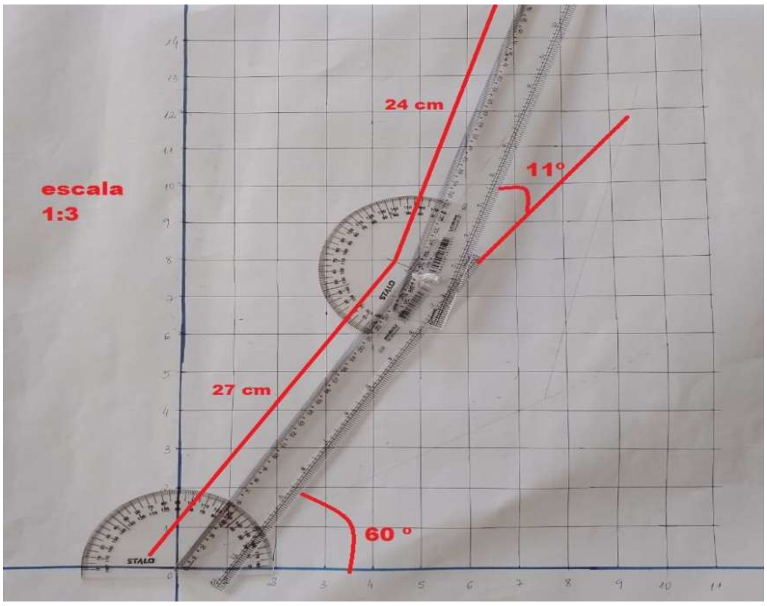


Fonte: Organizado pelo autor, 2021.

3ª etapa

Nesta 3ª etapa, vamos trabalhar diretamente com as fórmulas da Cinemática Direta e Inversa. O professor poderá demonstrá-las ou não, ficando a critério de cada um. Na figura abaixo, no caso da letra a no problema, temos um plotter com a escala de 1:3, isto é, a cada unidade do sistema cartesiano da cartolina equivale a 3 cm e como os braços que são as réguas tem 27 cm e 24 cm, então 27/3 = 9 cm 24/3 = 8 cm são as novas medidas dos braços de acordo com essa escala, ou seja, $a_1 = 9$ cm e $a_2 = 8\ cm$.

Figura 41 – Plotter



Fonte: Organizado pelo autor, 2021.

Assim, pela fórmula da cinemática direta temos,

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{a_1}\ \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta_1} + \boldsymbol{a_2}\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{\theta_1} + \boldsymbol{\theta_2}) \qquad \mathbf{y} = \boldsymbol{a_1}\,\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\theta_1} + \boldsymbol{a_2}\,\mathbf{sen}(\boldsymbol{\theta_1} + \boldsymbol{\theta_2})$$

$$x = 9 \times cos60° + 8 \times \cos 71° \qquad y = 9 \times sen60° + 8 \times \text{sen}\,71°$$

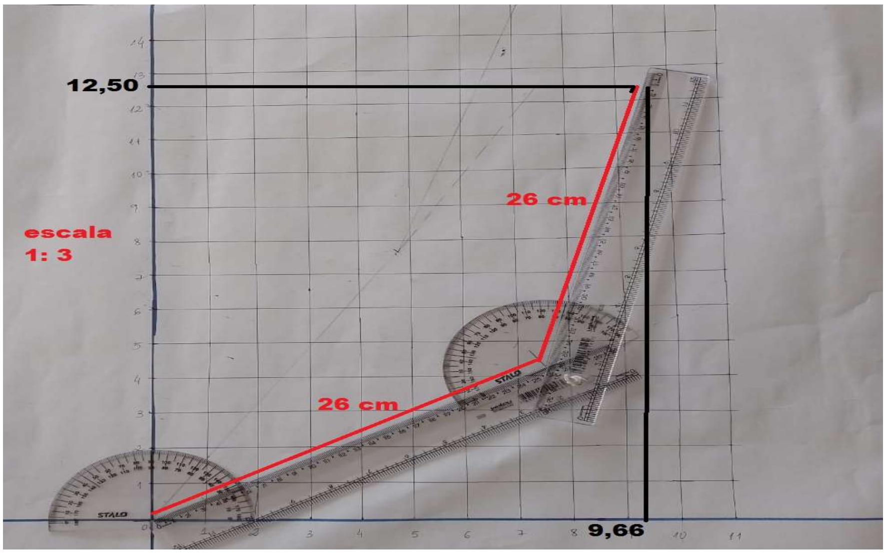
Resolvendo as expressões chegamos aos valores aproximados de x e y.

$$\boldsymbol{x \cong 7,10\ cm} \qquad \textbf{e} \qquad \boldsymbol{y\ \cong 15,26}\ \textbf{cm}$$

O professor poderá juntamente com os alunos confrontar os dados na prática, podendo ocorrer erros de aproximação ou não.

Já na letra “b”, temos o caso em que os braços medem 26 cm cada, isto é, 26/3 ≅ 8,66 cm e x = 9,66 cm e y = 12,5 cm conforme a figura abaixo.

Figura 42 – Plotter



Fonte: Organizado pelo autor, 2021.

Assim, usando a fórmula da cinemática inversa, temos:

$$q_2 = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\left(\frac{9{,}66^2+12{,}5^2-8{,}66^2-8{,}66^2}{2\times 8{,}66\times 8{,}66}\right)^2}}{\frac{9{,}66^2+1\ ,5^2-8{,}66^2-8{,}66^2}{2\times 8{,}66\times 8{,}66}}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{q_2 = 47{,}76°}$$

$$q_1 = \text{tg}^{-1}\frac{12{,}5}{9{,}66} - \text{tg}^{-1}\frac{8{,}66 sen 47{,}76°}{8{,}66+8{,}66\cos 47{,}76°} \Leftrightarrow \boldsymbol{q_1 = 26{,}43°}$$

4ª etapa

Esta é a seção onde será feita a avaliação observando a compreensão dos alunos e se são capazes de buscar soluções com as ferramentas dadas para algum tipo de problema de trigonometria. Assim, o professor pressupõe que os alunos já estão familiarizados com o conteúdo afim de aceitar novos desafios.

Com isso, a avaliação será dada como verificação de aprendizagem com uma lista de exercícios, por exemplo, ou prova escrita de múltipla escolha ou descritiva. A participação de grupo ou não, a interação com o grupo, individualmente e coletivamente também serão critérios avaliativos.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi uma grande conquista para nós no que diz respeito a propor algo novo didaticamente, além de contribuir para o ensino da trigonometria. Entretanto, mesmo não aplicando esta pesquisa para os alunos, acreditamos que ela possa contribuir para novas estratégias de ensino e auxiliar professores de matemática.

Como o objetivo da pesquisa é o de elaborar uma sequência didática para professores, não haverá, portanto, aplicação em sala de aula que faria necessária a coleta de dados. Desta forma não haverá também a análise de dados, mas apenas uma análise teórica, em relação à constatação, do funcionamento do braço robótico desenvolvido sob a modelagem de relações trigonométricas, feito por meio de demonstrações matemáticas.

Assim, desenvolver este trabalho foi um grande passo na nossa qualificação enquanto professores, pois podemos refletir sobre nossas práticas de ensino tentando fugir da zona de conforto, buscando se inovar a cada dia tornando o processo ensino-aprendizagem mais interessante para docentes e discentes.

Dessa forma, esperamos que essa proposta de ensino da trigonometria possa ser mais prazerosa e divertida aos alunos. Também almejamos que seja algo valioso no que tange a práticas de ensino de professores de matemática, oferecendo uma metodologia que não se restringe ao ensino vertical do professor ao aluno.

Com isso, ao final das atividades, poderão ter a oportunidade de reflexão do processo de ensino-aprendizagem e os alunos a autonomia no que diz respeito a enxergar o mundo real e criar possibilidades com uso de ferramentas matemáticas para um determinado fim aplicável cooperando para a formação do cidadão.

Para isso, fizemos uso do modelo de uma sequência didática para oferecer aos professores um caminho, um passo a passo das atividades a serem trabalhadas na turma. A ideia é recomendar uma estratégia de ensino de trigonometria de forma mais contextualizada, dinâmica e interativa, afim de que seja mais próxima da realidade dos alunos, aliando o cotidiano e aplicabilidade da trigonometria, considerando assim a necessidade de um olhar mais aguçado no ensino fundamental II.

Primeiramente foi feito um levantamento bibliográfico de trabalhos envolvendo sequência didática de trigonometria. Nessa fase buscamos analisar o que já tem sido produzido sobre a trigonometria através de sequências didáticas. Observamos que, nos bancos de artigos, dissertações e teses pesquisados, há produções relevantes que norteiam tal prática e que esta pesquisa em específico tem sua relevância social à medida que também contribui com um trabalho didático diferenciado que se distancia de práticas tradicionais de ensino.

Em um segundo momento, escolhido o tema trigonometria, a estratégia de ensino, optamos por escrever sobre o braço robótico envolvendo o ensino de trigonometria, já que a robotização e automação nos dias atuais vem crescendo bastante e é uma tendência mundial que vivenciamos nos nossos dias.

Contudo, foi feito um estudo mais detalhado sobre o braço robótico em especial o planar com dois graus de liberdade. Escolhemos esse tipo de braço para que possa facilitar a proposta além de proporcionar algo contextualizado nada complexo aos alunos.

Por fim, a escrita da pesquisa foi se desenvolvendo e criando forma para ser apresentada como uma ferramenta de ensino útil a professores de matemática e que possa contribuir com o ensino. Pensamos em oferecer uma proposta que auxilie professores no assunto de trigonometria aliada à tecnologia.

Não poderíamos deixar de falar do programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, o PROFMAT, que desde o começo em suas disciplinas e com as participações dos professores e alunos, fomentam os estudos e pesquisas colaborando para uma qualificação exemplar dos professores de matemática.

REFERÊNCIAS

ANTUNES, João P. M. Dias. Programação de robôs industriais em operações de maquinagem. 2015. FEUP- Dissertação de Mestrado do MIEM.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria euclidiana plana**. SBM, 2002. 5ª ed.

BICUDO, Maria aparecida Viggiani. **Pesquisa em Educação Matemática: concepções & perspectiva.** São Paulo, SP: UNESP, 1999.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia R. da; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**. Belo Horizonte, MG: Autêntica,2016.

BOYER, Carl Benjamim. **História da matemática**: tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

BUCCHI, Paulo. **Matemática, volume único**. São Paulo: Moderna, 1992.

CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria Números complexos**. Piratas ITA/IME, Rio de Janeiro, 1992

CRAIG, J. J. **Introduction to robotics**: mechanics and control. [S.l.]: Pearson/Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, USA: 2005.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: Da teoria à prática. 23ªed. Campinas, SP: Papirus, 2012.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan .**Uma história concisa da matemática no Brasil**. Petrópolis, RJ: Vozes 2011.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências**: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. São Paulo: Editora da Livraria da Física, 2006.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. [S.l.]: 4. edição. São Paulo: Atlas, 2002.

LAKATOS, E. Maria; MARCONI, M. de Andrade. **Fundamentos de metodologia científica**: técnicas de pesquisa. 7 ed. –São Paulo: Atlas, 2010.

LEÃO, D.M.M. **Paradigmas contemporâneos de educação**: escola tradicional e escola construtivista. Cadernos de Pesquisa, n. 107, p .187-206, julho, 1999.

LIBÂNEO, J. C**. Didática.** 1. ed. São Paulo: Cortez, 1994.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013, Coleção PROFMAT.
.
LIMA, Elon lages.et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 3.6 ed. Rio de Janeiro: SBM 2006.

MACHADO, A.R.; CRISTOVÃO, V.L.L. **A construção de modelos didáticos de gêneros**: aportes e questionamentos para o ensino de gêneros. Revista Linguagem em (Dis)curso, volume 6, número 3. set/dez., 2006.

MEDEIROS, J.B.; TOMASI, C. **Comunicação científica**: normas técnicas para redação científica. São Paulo:Atlas, 2008

MELO, Davyd Bandeira. Algoritmos **de aprendizagem para a aproximação da cinemática inversa de robôs manipuladores**: um estudo comparativo. Fortaleza 2015. Dissertação de mestrado

MINAYO, M. C. **O desafio do Conhecimento -Pesquisa Qualitativa em Saúde**. [S.l.]: 1.edição, São Paulo: Hucitec, 2007

MUZAKKI, Ahsan et al. **Robot Arm Kinematics Learning using Point Plotter.** ICOVET, 2018.

PERETTI, Lisiane; TONIN DA COSTA, Gisele Maria. **Sequência didática na matemática.** Revista de educação do EDEAU. Instituto de Desenvolvimento Educacional do Alto Uruguai. Vol. 8 – nº17 – Janeiro/Junho, 2013.

REY, Fernando. González. **Pesquisa Qualitativa e Subjetividade**: os processos de construção da informação. [Tradução Marcel Aristides Ferrada Silva]. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005

RIJO, M. G. de Quevedo. **Desenvolvimento da base e controle do grau de liberdade rotacional de um robô cilíndrico com acionamento pneumático**. Porto alegre, 2013. Dissertação de mestrado.

ROSÁRIO, João Mauricio. **Robótica industrial I**: modelagem, utilização e programação. São Paulo: Baraúna, 2010

SANTOS, Vítor M. F. **Robótica Industrial**. Universidade de Aveiro, 2003.

SAVIANI, Dermeval. **História da idéias pedagógicas no Brasil**. Campinas, SP: Autores Associados, 2007.

SILVA, Abrahão de Almeida. **O ENSINO DE FUNÇÕES LINEARES:** uma abordagem Construtivista/Construcionista por meio do kit LEGO® Mindstorms**.** 2014. Dissertação de mestrado – PROFMAT

SILVA, Wender da Silva; KALHIL, Josefina Barrera; NICOT, Yuri Expósito. **Uma análise comparativa das abordagens metodológicas que podem sustentar a utilização das**

tecnologias no processo de ensino e aprendizagem de ciências. Revista REMAC, Cuiabá-MT, n.03, dezembro 2015.

SILVEIRA, José de Anchieta. **Construcionismo e inovação pedagógica**: uma visão crítica das concepções de Papert sobre o uso da tecnologia computacional na aprendizagem da criança. Revista Themis v. 10 (2012) e-ISSN: 2525-5096.

SOLÉ, Isabel; COLL, César. Os professores e a concepção construtivista. In: COLL, César et all. **O construtivismo na sala de aula**. 6 ed, São Paulo: Ática, 2001.

VIANNA, Ilca Oliveira. **Metodologia do trabalho científico**: um enfoque didático da produção científica. São Paulo: EPU, 2001.

VILARINHO, Elmo de Abreu. **O ensino da função linear e do torque através de interações de engrenagens**.2020. Dissertação de mestrado – PROFMAT

ZABALA Antoni. **A prática educativa como ensinar**. Porto Alegre Artmed, 1998.

ZORZAN, Adriana Salete Loss. Ensino-aprendizagem: algumas tendências na educação matemática. Revista de Ciências Humanas, v.8, n.10, 2007.

https://www.edocente.com.br/blog/escola/sequencia-didatica-para-educacao-basica/ . Acesso em: 22 nov. 2021

http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-brincando-com-trigonometria/ Acesso em: 22 nov. 2021

https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/506/o/caderno_atividades_2021_vfinal_vol_2.pdf Acesso em: 20 nov. 2021

https://sites.google.com/site/matematicosbio01/eudoxo-de-cnido Acesso em: 25 nov. 2021

https://www.netmundi.org/filosofia/2017/pitagoras-o-numero-e-o-principio-de-tudo/

Acesso em: 25 nov. 2021

https://www.obaricentrodamente.com/2018/11/teorema-de-pitagoras-metodo-de-perigal.html Acesso em: 02 dez. 2021

https://piedademessias.wordpress.com/author/piedademessias/ Acesso em: 23 nov. 2021

https://www.youtube.com/watch?v=1NmH-QnTvOg&feature=youtu.be Acesso em: 20 nov. 2021

https://www.gabarite.com.br/dica-concurso/252-sistema-cartesiano-ortogonal-de-coordenadas. Acesso em: 20 nov. 2021

APÊNDICE A – TRIGONOMETRIA, UMA BREVE HISTÓRIA

A palavra Trigonometria origina-se do grego, Tri, gonos e metron que significam três, ângulos e medida, isto é, medidas de três ângulos. É um ramo muito importante da matemática, fazendo parte da geometria plana que estuda as relações de comprimento e ângulos de um triângulo.

Nesse sentido, O termo trigonometria se deve a relação de triângulo e medidas, isto é, segundo Boyer (1974), "trigonometria" é a medida de partes de um triângulo, termo esse que não era usado na época, mas por outro lado, o conceito de medidas de ângulos em triângulos, cordas, medidas de terras, lados de polígonos e razões entre lados de triângulos já eram conhecidos por babilônios e egípcios.

Assim como outros assuntos da matemática, conforme o autor citado, a trigonometria não foi obra do acaso ou de um homem em específico, da mesma forma que sabemos o porquê geralmente dos conceitos elementares matemáticos (contagem de números naturais, medidas de terra, adição...) serem criados por necessidades humanas, com a trigonometria o processo foi o mesmo.

Ainda segundo Boyer (1974), o termo "trigonometria" não aparece na sua essência, porém os gregos já usavam a ideia de cordas e ângulos por necessidades como, por exemplo, o provável cálculo de Eudoxo usando razões e medidas de ângulos para achar o tamanho da Terra.

Figura 43- Eudoxo de Cnido

Fonte: https://sites.google.com/site/matematicosbio01/eudoxo-de-cnido

Nessa mesma direção, para Lima (2013) a trigonometria iniciou-se na crença de que os planetas giravam em torno da Terra de forma circular, surgindo assim a ideia de relacionar comprimento da corda de uma circunferência com o ângulo central que essa corda se referia.

Nesse sentido, Barbosa (2002) também traz o conceito de trigonometria, bem como um dos primeiros a tratar o termo trigonometria afundo, para esse autor:

> A trigonometria iniciou-se como o estudo das aplicações, a problemas práticos, das relações entre os lados de um triângulo. Na Grécia, associava-se a um dado ângulo a corda correspondente ao arco que ele determinava em um círculo centrado no seu vértice. No entanto, os escritores gregos do quarto século chamam a Hiparco, que viveu no segundo século a.C, de originador da ciência da trigonometria. Ele teve a reputação de ter calculado uma tabela de cordas que constitui um livro com doze volumes. (BARBOSA, 2002, p.143)

Nessa perspectiva, na Grécia mais precisamente em Samos, nasceu Pitágoras, aquele que também contribuiu para a trigonometria e geometria além de outros assuntos como música e filosofia conforme Garbi (2006). Talvez seu nome esteja no teorema mais conhecido na matemática, o **"Teorema de Pitágoras",** uma obra prima desse matemático que marcou a história. Desse modo, esse matemático com sua escola que era uma espécie de sociedade nos deixara vários legados, entre eles o de enxergar de modo abstrato a matemática, os pitagóricos foram os primeiros a fazerem isso.

Figura 44- Pitágoras de Samos

Fonte: https://www.netmundi.org/filosofia/2017/pitagoras-o-numero-e-o-principio-de-tudo/