



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E
TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



FABRÍCIO OLIVEIRA SILVA

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE A IDEIA DE NÚMERO

CATALÃO

2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese

2. Nome completo do autor

Fabício Oliveira Silva

3. Título do trabalho

Uma investigação sobre a ideia de número

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

- a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
- b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **FABRÍCIO OLIVEIRA SILVA, Discente**, em 21/12/2020, às 10:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcio Roberto Rocha Ribeiro, Professor do Magistério Superior**, em 21/12/2020, às 13:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1766588** e o código CRC **B7CBE08F**.

FABRÍCIO OLIVEIRA SILVA

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE A IDEIA DE NÚMERO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof.º Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro

CATALÃO
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Silva, Fabrício Oliveira
Uma Investigação Sobre a Ideia de Número [manuscrito] / Fabrício Oliveira Silva. - 2020.
71 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão, PROFMAT- Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RC), Catalão, 2020.
Bibliografia.

Inclui lista de figuras.

1. Matemática. 2. número. 3. filosofia. 4. lógica. I. Ribeiro, Márcio Roberto Rocha, orient. II. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 14 da sessão de Defesa de Dissertação de **Fabrizio Oliveira Silva**, que confere o título de Mestre em **Matemática**.

Aos **dezoito de dezembro de dois mil e vinte**, às **quatorze horas**, por Webconferência via sistema Google Meet (meet.google.com/dpq-wxyg-fqq), reuniram-se os componentes da banca examinadora, docentes **Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro (PROFMAT/IMTec - "RC/UFG - UFCAT em transição")**, orientador à distância pelo Google Meet, **Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior (PROFMAT/IMTec - "RC/UFG - UFCAT em transição")**, membro titular interno à distância pelo Google Meet e **Dr. Rogério Azevedo Rocha (Campus de Palmas/UFT)**, membro titular externo à distância pelo Google Meet para, em sessão pública realizada na Sala Virtual do Google Meet, procederem a avaliação da Dissertação intitulada "*Uma investigação sobre a ideia de número*", de autoria de **Fabrizio Oliveira Silva**, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da "RC/UFG - UFCAT em transição". A sessão foi aberta pelo presidente, que fez a apresentação formal dos membros da banca. Em seguida, a palavra foi concedida ao discente que procedeu com a apresentação. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da Dissertação, que foi considerada **Aprovada**. Cumpridas as formalidades de pauta, a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, lavrou-se a presente ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo discente. **Dezoito de dezembro de dois mil e vinte**.

Obs.: "*Banca Examinadora de Qualificação/Defesa Pública de Dissertação/Tese realizada em conformidade com a Portaria da CAPES n. 36, de 19 de março de 2020, de acordo com seu segundo artigo:*

Art. 2º A suspensão de que trata esta Portaria não afasta a possibilidade de defesas de tese utilizando tecnologias de comunicação à distância, quando admissíveis pelo programa de pós-graduação stricto sensu, nos termos da regulamentação do Ministério da Educação."

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Marcio Roberto Rocha Ribeiro, Professor do Magistério Superior**, em 18/12/2020, às 15:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **ROGÉRIO AZEVEDO ROCHA, Usuário Externo**, em 18/12/2020, às 15:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Porfírio Azevedo Dos Santos Junior, Professor do Magistério Superior**, em 18/12/2020, às 15:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **FABRÍCIO OLIVEIRA SILVA, Discente**, em 18/12/2020, às 16:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1715512** e o código CRC **F69AF668**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos vídeos do Vinicius do canal do you tube *Número Imaginário*, às palestras disponíveis do professor Walter Carnielli, sobre os Teoremas de Gödel; ao professor Régis Varão do canal Fantástico Mundo da Matemática.

Agradeço as orientações do professor Dr. Márcio Roberto pelo tempo gasto, as inúmeras lidas e sugestões para concluir esse projeto.

Ao professor Dr. Paulo Bergamaschi por suas correções metódicas da escrita desse projeto.

Ao professor Dr. Porfírio Azevedo por suas orientações e indicações na melhoria desse projeto.

Agradeço a minha companheira Silvaina Maria pelo apoio e suas dicas para estruturar esse trabalho.

Aos matemáticos Gottlob Frege e Bertrand Russell e outros estudiosos da Filosofia da Matemática.

Agradeço ao professor Wellington Tavares pelas traduções feitas do material em inglês e pela correção ortográfica desse trabalho.

RESUMO

Neste trabalho buscamos estimular reflexões acerca da indagação milenar a respeito do que são, de fato, os números. Procuramos mostrar como esta é uma questão historicamente controversa, que encontra compreensões diversificadas nos campos da filosofia, matemática e filosofia da matemática. Fizemos um percurso histórico da construção da ideia de número, desde o período paleolítico chegando até ao final do século dezenove quando os matemáticos reavaliaram os fundamentos da matemática e elevaram as ideias ao patamar das linguagens mais rigorosas envolvendo a lógica. Frege (1884) em sua obra *Os Fundamentos da Aritmética*, pretendeu explicar e justificar a real natureza da ideia de número sem apelar à geometria. Além dele, destacamos neste trabalho as belíssimas ideias e as importantes contribuições de Bertrand Russell, Hilbert, Dedekind e Peano na construção da ideia de número. A abordagem racional dos conceitos e a validação deles por métodos racionais sem utilizar experimentos sensoriais, são estudos tanto filosóficos quanto matemáticos e neste trabalho procuramos trazer um pouco de luz à estas ideias, reconhecendo a relevância de uma compreensão mais estruturada e mais aprofundada da ideia de número.

Palavras-chave: Matemática, número, filosofia e lógica.

ABSTRACT

In this assignment we aim to stimulate reflections about the millenary inquiry regarding what number really is. We aimed to show how historically controversial this question might be, which finds diversified comprehensions in the fields of philosophy, mathematics and the philosophy of mathematics. We came up with a historical pathway related to the construction of the idea of number, since the paleolithic period, reaching the end of the Nineteenth Century, when the mathematicians reevaluated the basics of mathematics and raised the ideas up to the level of the most rigorous languages involving logic. Frege (1884), in his book "The Fundamentals of Arithmetic", intended to explain and justify the real nature of the numbers idea, without appealing to geometry. Besides him, we have put a spotlight on the beautiful ideas as well as the important contributions of Bertrand Russell, Hilbert, Dedekind and Peano on the construction of the idea of number. The rational approach of the concepts and their validation through rational methods, without making use of sensorial experiments, are either philosophical and mathematics studies. In this assignment, we intended to bring some light to these ideas, acknowledging the relevance of a deeper and more structured comprehension of the idea of number.

Key Words: Mathematics, Number, Philosophy and Logic.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Osso de Ishango.	13
Figura 2. Contagem figurada de base 5	14
Figura 3. Sistema de numeração sexagesimal cuneiforme.	16
Figura 4. Correspondência entre duas bases.....	16
Figura 5. Correspondência entre a base decimal e a sexagesimal	17
Figura 6. Tablete YBC 7289 mostrando o valor da diagonal de um quadrado.	18
Figura 7. Resolução do Problema de completar quadrados.....	19
Figura 8. Papiro de Ahmes (Rhind).....	21
Figura 9. Sistema de numeração do antigo Egito	21
Figura 10. Estátua de Alexandre na cidade grega de Tessalônica	22
Figura 11. Números figurados dos pitagóricos.....	28
Figura 12. Tetractis.....	29
Figura 13. Reflexos imperfeitos da ideia de círculo.....	31
Figura 14. Sólidos platônicos.	32
Figura 15. Sistema de numeração jônico.....	35
Figura 16. Exemplo de sequência ordenada.	54
Figura 17. Soma de números figurados	62
Figura 18. Divisão de um número ímpar por 2.....	62
Figura 19. Solução por construção geométrica.	64

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	9
2 CONHECIMENTOS PRELIMINARES.....	13
2.1 Sumérios	15
2.2 Babilônios.....	18
2.3 Egípcios	20
2.4 Gregos.....	22
2.5 Empirismo no processo numérico	25
3 A FILOSOFIA E SUA IMPORTÂNCIA PARA A IDEIA DE NÚMERO	26
3.1 Pensadores da Grécia Antiga	27
3.1.1 Pitágoras e os pitagóricos	27
3.1.2 Sócrates.....	29
3.1.3 Platão	30
3.1.4 Aristóteles.....	33
3.2 Aritmética grega	34
3.3 Renascentismo	37
3.3.1 Leibniz	38
3.3.2 Mill	39
4 EMBASAMENTO LÓGICO DA IDEIA NUMÉRICA	40
4.1 Frege	41
4.2 Russell	48
4.3 Dedekind-Peano.....	51
4.4 Hilbert.....	55
4.5 Gödel	57
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	60
REFERÊNCIAS.....	67

1 INTRODUÇÃO

Na Teogonia do poeta grego Hesíodo (1995), é apresentada a origem dos deuses. No início à realidade era vazia, sem forma e escura, o Caos Primordial. Uma vontade superior traz luz e forma à realidade, conferindo ordem ao Caos. Essa ordem é o Cosmo. Na visão grega o Caos é a falta de ordem, o Cosmo é a ordem. O ser humano precisa dos números para trazer ordem ao Caos, apesar desse Caos não ser Primordial. Quando registramos nossos gastos periódicos, temos um panorama do dinheiro que temos e do que gastamos. Mas isso não se aplica apenas a finanças, se uma pessoa planta 2 sacos de grãos ele deve colher mais do que dois sacos. O processo de contagem está ligado ao controle de eventos, como gastos financeiros e distribuição de objetos. Os números que utilizamos diariamente servem para organizar e controlar fenômenos naturais. A prática numérica é tão enraizada em nossa consciência, que executamos contagem, ordenação e medição de forma automática.

Este trabalho é uma investigação sobre a natureza e a essência dos números naturais, uma pesquisa bibliográfica sobre a história dos números e a relação entre a Matemática e a Filosofia, norteada pela questão milenar a respeito do que é um número. Ela tem como objetivos: pesquisar quando os números começaram a ser apreciados pela humanidade; investigar a natureza e a essência dos números naturais; abordar a ideia elementar de número no processo de contagem e organização.

A motivação para abordagem do tema teve início a partir de observações a respeito de algumas ideias elementares estabelecidas e aceitas sobre o que é o número, como a que atesta o número como objeto que nos permite efetuar o processo de contagem, ressaltando que a palavra *objeto* possui um sentido mais amplo do que estamos acostumados em nosso cotidiano. Aqui ela pode ser tomada como *realidade percebida* ou *conceito pensado* (ABBAGNANO, 2007, p. 723). Também, ao responder indagações do tipo: quantos são? o número é tido como cardinal de alguma coleção, pois descreve a quantidade de elementos pertinentes a referida coleção. Contudo, o número pode ser encarado sob outra perspectiva, pois se numa corrida participam três alunos, o três é cardinal. Ao mencionar que o aluno Pedro chegou em terceiro lugar, o três é um ordinal, um conceito básico para localizar um termo numa sequência ordenada.

Normalmente utilizamos a ideia de número em registros de objetos e documentos pessoais, como: o número do celular, o número do Cadastro de Pessoa Física (CPF), o número

do Registro Geral (RG), o número do Cartão de Crédito, o número da Conta Bancária, o número do Código de Barras, etc. Esses objetos utilizam números, não por ser cardinal e nem por ser ordinal, pois o número do celular começa com o código de área regional e da operadora de origem, o CPF possui informações ocultas em sua sequência numérica, como todos os outros objetos descritos acima, ocultam informações em suas sequências numéricas. Não podemos considerar os números somente como objetos, necessários para efetuar contagens, pois eles são capazes de agregar informações.

Outra motivação essencial para este estudo foi a percepção da dificuldade que qualquer pessoa, inclusive colegas professores, encontra ao tentar responder à questão “*o que é o número?*” ou “*Qual seu entendimento sobre a ideia de número?*” Tivemos a curiosidade de apresentar estes questionamentos a algumas pessoas e algumas respostas foram:

Representação e organização de quantidades e medidas. Quantidades, quando são utilizados na forma cardinal, como: dois lápis, três copos. Quando falamos em Medidas associamos à unidades como: metros, quilômetros, gramas e litros. (PESSOA I).

Uma pergunta tão fácil, e tão difícil de ser respondida ao mesmo tempo.... Número, no meu ponto de vista é um objeto abstrato da matemática usado pra descrever as coisas, como uma medida por exemplo e ele provavelmente foi uma das maiores descobertas feitas pelo ser humano nesse processo de contagem vamos dizer assim. (PESSOA II).

É tudo aquilo que é usado pra indicar ou mostrar quantidade, medida, ordem ou seja facilitar o meio das pessoas entender do que é, e o quanto se trata de certa coisa! (PESSOA III).

A mesma pergunta foi feita a alguns professores que utilizam a matemática em suas aulas, como professores de Química, Física, Língua Portuguesa e Biologia. Algumas respostas desses professores foram:

São símbolos que norteiam o nosso cotidiano, como idade, data, peso, horário. Indicam quantidade. (PROFESSOR I).

Uma das classes gramaticais na morfologia que pode indicar quantidade medida ou ordem. (PROFESSOR II).

Os números são essenciais à vida, todas as nossas atividades envolvem quantificação, sem números tudo ficaria bagunçado e sem lógica. Os números conferem valores, facilita a vida e simplifica o raciocínio no dia a dia. Um mundo sem números seria estranhamente desorganizado. (PROFESSOR III).

Número, é a soma de todas as unidades dos elementos. (PROFESSOR IV).

Em relação a palavra número, o dicionário Novíssimo Aulete, traz: “Número (nú.me.ro) s. m. 1 Mat. Palavra ou símbolo usado para representar a quantidade ou a ordem das coisas numa série. 2 Quantidade determinada. 3 Conjunto de algarismos arábicos que identifica posicionamento serial” (AULETE, 2011).

Também tivemos a curiosidade de verificar alguns livros didáticos, utilizados na rede de ensino público no Brasil, para saber se eles trazem alguma definição ou ideia explícita do que venha a ser número. Percebemos que a maioria deles não explica ou define o que são números. As poucas bibliografias que encontramos alguma definição de número, enuncia que número é um objeto abstrato utilizado para contar, ordenar e medir. Na introdução do livro Matemática Discreta do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), o autor não define a ideia de número, mas se vale da cardinalidade e da propriedade de ordem em uma sequência para definir número.

A primeira experiência que a maior parte de nós tem com a Matemática é por meio do processo de contagem. É importante observar que aprender a contar tem duas etapas bem distintas, com graus de complexidade também distintos: Na primeira etapa, aprendemos a enunciar uma sequência de palavras (um, dois, três, ...) sem atribuir significado a elas; algum tempo depois, aprendemos a usar esta sequência para contar os elementos de um conjunto, ou seja, estabelecer uma correspondência entre os elementos do conjunto e estas palavras que chamamos de números. (MORGADO, 2015, p. 2).

A ideia de número, apresentada na maioria das bibliografias matemáticas consultadas, buscava compreender os números a partir de seus atributos de cardinalidade, ordem e medida. O contraste está no fato da matemática definir seus objetos de estudo, de forma direta, mas a definição de número toma em consideração seus atributos. Uma anedota de Ian Stewart descrita em Singh, demonstra o rigor que os matemáticos têm ao elaborar uma definição.

Um astrônomo, um físico e um matemático estavam passando férias na Escócia. Olhando pela janela do trem eles avistaram uma ovelha preta no meio de um campo. ‘Que interessante’, observou o astrônomo, ‘na Escócia as ovelhas são pretas.’ Ao passo que o físico respondeu: ‘Não, nada disso! Algumas ovelhas escocesas são pretas.’ O matemático olhou para cima em desespero disse: ‘Na Escócia existe pelo menos um campo, contendo pelo menos uma ovelha e pelo menos um lado dela é preto. (STEWART apud SINHG, 1999, p. 147).

Esta anedota mostra o rigor nas definições matemáticas. Quando dizemos que um polígono de quatro lados é um quadrado, então os lados são congruentes, paralelos e os ângulos internos são iguais. Se esse polígono não satisfizer qualquer uma dessas propriedades, ele não será um quadrado. Existem números que não cumprem algum dos atributos: cardinalidade, ordem ou medida. Os números complexos não possuem ordem, mas tem medida. Possuindo medida classificamos $(2 + 3i)$ como um número. Basta possuir um atributo numérico para ser

tido como número? Esse pergunta nos conduz a outra importante indagação: compreenderemos os números ou definiremos número abrindo mão desses atributos numéricos?

Todas estas indagações e as buscas de respostas a elas nos parecem tornar necessária uma pesquisa que objetive revelar como e quando os números começaram a ser apreciados pela humanidade durante sua jornada evolutiva e as relações que foram desenvolvidas a partir daí, no intuito de compreender o que vem a ser isto que denominamos número.

No segundo capítulo são abordos os conhecimentos preliminares, que consiste em um levantamento histórico sobre as motivações para a criação dos números e as representações desses números nas civilizações da antiguidade e compreender o caráter empírico desses números.

No terceiro capítulo é comentada as ideias dos estudiosos gregos a respeito dos números e da Matemática, também suas diferentes concepções sobre a essência numérica e os meios para entender essas ideias e suas relações com a realidade sensível. O status que o conhecimento matemático adquiriu como ciência racional.

No quarto capítulo é apresentado o projeto logicista de Frege, que teve a pretensão de derivar a Aritmética de termos lógicos, bem como as ideias de Russell e Whitehead sobre a classe numérica. Também são apresentados alguns estudos de Hilbert sobre sua concepção de aritmética finitária, além do impacto dos teoremas de Gödel e a axiomatização de Dedekind-Peano.

No quinto capítulo é abordada a ideia vigente sobre números, as interpretações numéricas, a diferenciação entre as ideias geométricas com as ideias aritméticas em relação à realidade física e uma síntese dos estudos e do conhecimento numérico utilizados pelos matemáticos, apresentando uma concepção da ideia de número.

2 CONHECIMENTOS PRELIMINARES

O Período Paleolítico compreende de três milhões de anos a doze mil anos antes da Era Comum. Achados arqueológicos desse período dão provas que os humanos efetuavam contagens e medições. Artefatos como o Osso de Ishango, na Figura 1, monumentos megalíticos como o Stonehenge, que possui propriedades numéricas, na funcionalidade como na técnica construtiva.

Figura 1. Osso de Ishango.



Fonte: Matemática é Fácil, (2016).

Para Eves (2004, p. 23), os homens necessitam de contar, como: as fases da lua, os períodos de secas e chuvas. O domínio dessa técnica é de vital importância para a sobrevivência em ambientes hostis. Os povos desse período eram nômades, viajavam orientados pelos astros celestes, uma capacidade de orientação espacial. Por mais primitivo que os agrupamentos humanos fossem no Paleolítico eles necessitavam da habilidade de contar. Uma contagem feita de forma primitiva, fortes indícios de que o relacionamento humano com os números começou nos primórdios de nossa espécie.

No Período Neolítico, de doze mil anos à cinco mil anos antes da Era Comum. Os seres humanos passam a ser sedentários. Essa mudança do modo de vida se deve à Revolução Agrícola, que garantiu o fornecimento de alimentos para o homem o ano todo. O cultivo era feito nas épocas chuvosas, as colheitas eram feitas no fim da estação das chuvas, ou era utilizado algum sistema de irrigação, estocando o excedente das colheitas para serem consumidos durante o período da entressafra. A agricultura é o ponto de virada no estilo de vida desses povos, de caçadores e coletores a domesticadores e cultivadores. A abundância de alimentos e a

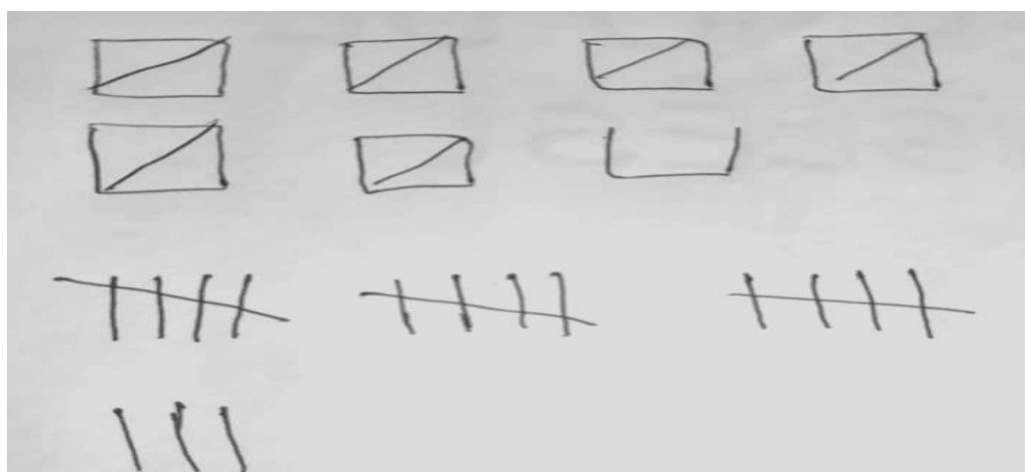
necessidade de cuidados que os campos de cultivo precisavam, mesmo nos períodos que não havia plantação, obrigou o ser humano a estabelecer morada definitiva na região de cultivo.

Todo o ambiente em torno dessas povoações era um cenário que necessitava dos números, para contar a fartura, a divisão da colheita, os animais do rebanho pastoreado. Segundo as palavras de Roque “não foi somente o inventário de animais em rebanhos a maior inspiração para a criação dos números, e sim o registro de quantidades de insumos relacionados à sobrevivência e a necessidade de organizar a sociedade” (ROQUE, 2012, p. 33-34).

A contagem é uma relação biunívoca entre objetos. Nessa época eram utilizados pequenos objetos como pedras, grãos e outros que eram relacionados com elementos de um rebanho, ou unidades de colheitas como jarros ou similares, esse processo perdurou por milênios. Achados arqueológicos dão fortes indícios que esses registros contábeis passaram a serem feitos por sinais em alguns objetos portáteis, como: ossos, peles, tabletes de argila e similares.

Ainda utilizamos formas primitivas para contar, usando padrões de cinco traços formando quadriláteros com uma diagonal, ou quatro riscos verticais paralelos cortado por um risco transversal, herança de um primitivo sistema de base cinco, derivado do uso dos dedos da mão. Esse tipo de contagem é apenas uma das formas de contar utilizando símbolos. Um método informal e rápido de quantificar, exposto na Figura 2.

Figura 2. Contagem figurada de base 5



Fonte: Próprio Autor.

Em Garbi (2007, p. 6), por volta do ano 3500 antes da Era Comum, na Mesopotâmia, o sistema simbólico de contagem evoluiu, até culminar em um sistema de numeração posicional.

A vantagem do sistema posicional é que com poucos símbolos combinados representamos muitas quantidades, por isso números diferentes são representados pelos mesmos signos em ordens diferentes, o número passa a ser um signo. Esses signos representavam quantidades concretas ou abstratas de objetos. As possibilidades de utilização desses símbolos, como prever quantidades futuras, organizar observações, calcular impostos e montar calendários.

Em Eves (2004, p. 58), temos que a Mesopotâmia é uma região no atual Iraque, cercada pelos rios Tigres e Eufrates, com terras férteis, um local ideal para plantação. Povos nômades estabeleceram povoações no Sul dessa região desde o VIII milênio antes da Era Comum. Essas povoações se organizaram em cidades como: Ur, Uruk e Nipur no IV milênio antes da Era Comum. Essas cidades necessitaram de serviços especializados, executados por classes de trabalhadores especializadas, como: escravos, pastores, agricultores, ourives, mineradores, artesãos, soldados, sacerdotes, escribas e administradores. A organização dessas cidades necessitava de registros. Esses registros foram um dos motivadores para a invenção da escrita em torno do ano 3500 antes da Era Comum, pelos sumérios.

2.1 Sumérios

A invenção da escrita pelos sumérios, deve-se à classe dos sacerdotes, uma classe altamente especializada que detinham conhecimentos astronômicos para fazer previsões e ritos, eles eram responsáveis pelas preces diárias e várias outras atividades. Os escribas eram sacerdotes que sabiam escrever, segundo Garbi.

A invenção da escrita em meados do quarto milênio antes Era Comum, deu grande impulso à matemática e deve ser ressaltado que os escribas, restrita a classe de funcionários que detinham o privilegiado conhecimento da arte de grafar, foram os primeiros a adquirir conhecimentos sobre os números, até porque era a eles que as pessoas certamente recorriam sempre que enfrentavam algum problema mais difícil. Por sua vez, foram os arquitetos e construtores primitivos os pioneiros na solução das questões básicas da Geometria. (GARBI, 2007, p. 10).

As cidades da Mesopotâmia eram constituídas de casas residenciais, prédios públicos, templos gigantescos e muros enormes cercando suas imediações. Essas construções demonstravam o domínio das técnicas construtivas, do gerenciamento de materiais e pessoas. Registros escritos eram a alma da administração urbana e mantenedora da estrutura estatal, através dos impostos cobrados dos cidadãos. Junto à escrita eles criaram o sistema de

numeração posicional, possibilitando que, com poucos signos representar inúmeras quantidades. Os sumérios utilizavam o sistema sexagesimal de numeração.

O sistema numérico dos sumérios é a combinação da base 10 e da base 6, diferente do nosso sistema em que utilizamos os símbolos {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} para representar qualquer valor, com diferentes combinações desses sinais. O número 12 e o número 21 são representados pelos mesmos símbolos no nosso sistema de numeração, mas, em ordens diferentes. No sistema sexagesimal são utilizados 60 símbolos, apresentado na Figura 3.

Figura 3. Sistema de numeração sexagesimal cuneiforme.

∩	1	∩∩	2	∩∩∩	3	∩∩∩∩	4
∩∩∩	5	∩∩∩∩	6	∩∩∩∩∩	7	∩∩∩∩∩∩	8
∩∩∩∩∩	9	<	10	<∩	11	<∩∩	12
<∩∩∩	13	<∩∩∩	14	<∩∩∩∩	15	<∩∩∩∩∩	16
<∩∩∩∩∩	17	<∩∩∩∩∩∩	18	<∩∩∩∩∩∩∩	19	<<	20
<<<	30	<<∩	40	<<∩∩	50	∩	60

Fonte: Tatiana Roque, (2012)

Para Roque (2012, p. 9), os símbolos numéricos dos mesopotâmicos são lidos da direita para a esquerda, a interpretação do valor dependia, às vezes do contexto, que esses símbolos eram apresentados, o símbolo para o número 1 é igual ao símbolo do número 60. Na Figura 4 são apresentados números na escrita das tábuas cuneiformes, sua escrita no nosso sistema decimal e sua representação numérica decimal.



Figura 4. Correspondência entre duas bases.

Cuneiforme	Leitura dos símbolos em nosso sistema	Valor decimal
∩ < ∩∩∩	1:15 = 1x60 + 15	75
∩ <<	1:40 = 1x60 + 40	100
<∩∩∩ << ∩∩∩	16:43 = 16x60 + 43	1003

Fonte: Tatiana Roque, (2012)

Vamos escrever os números 1 853 e 59 994 na base 60, similar ao apresentado na Figura 4. Dividimos o número por 60 com o quociente e o resto montamos a representação no sistema de base sexagesimal, como na Figura 5.

Figura 5. Correspondência entre a base decimal e a sexagesimal

Valor decimal	Leitura dos símbolos em nosso sistema	Cuneiforme
$1\ 853 = 30 \times 60 + 53$	30;53	
$59\ 994 = 16 \times 60^2 + 39 \times 60 + 54$	16;39;54	

Fonte: Próprio Autor.

O surgimento da escrita e do sistema posicional foi o ponto de virada na jornada humana, enquanto a primeira, marca o fim da pré-história, a segunda possibilitou o registro de qualquer quantidade com o uso de poucos símbolos. Nesse contexto, o número passou a ser um objeto abstrato. Todo o conhecimento sumério era pragmático, os números eram objetos abstratos, que descreviam quantidades reais. Construtores, arquitetos, comerciantes e escribas utilizavam esses números em seus cálculos.

O sistema posicional criado pelos sumérios se deve a necessidade de escrever valores trazendo mudanças na forma de tratar quantidades. Sendo necessário nomes descritivos para especificar contagens. Para Roque (2012, p.16), a escrita obrigou os homens a nomear valores. Os números são ferramentas criadas pela observação da natureza. A ideia numérica dos sumérios estava pautada na organização observada na natureza. Eles aplicavam os números em sistemas abstratos, seus sacerdotes conheciam a escrita e a Matemática. Essa classe de estudiosos relegaram os números como manifestações dos deuses.

As descrições numéricas encontrados em tabletas de argila dos sumérios foram sobre problemas práticos da sociedade. Como o número de homens num exército, as conquistas territoriais, o número de escravos, a cobrança de impostos entre outros. Pesquisadores da matemática antiga determinaram que a numeração suméria era uma ferramenta prática.

Em Garbi (2007, p.10), no final do terceiro milênio antes da Era Comum, a civilização suméria entrou em declínio devido as constantes lutas por territórios e contra invasões de povos nômades, como os acádios, amoritas entre outros. Em 1900 antes da Era Comum, essa

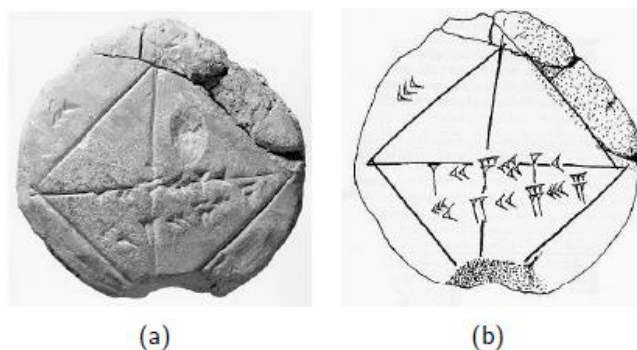
civilização perdeu o domínio do sul da Mesopotâmia, os babilônios assumiram o controle de toda a região e expandiram seus domínios aos povos vizinhos.

2.2 Babilônios

Eves (2004, p. 60), comenta que os babilônios se estabeleceram no norte da Mesopotâmia e dominaram a região de 1900 à 1600 antes da Era Comum. Nesse período, destacou-se o rei Hamurabi, que, por volta de 1750 antes da Era Comum, havia conquistado toda a Mesopotâmia, formando um império com capital na cidade da Babilônia. Hamurabi impôs a todos os povos dominados um sistema de leis escritas, baseadas no princípio de Talião (olho por olho, dente por dente, braço por braço, etc.). O Código de Hamurabi, como ficou conhecido é um dos mais antigos conjuntos de leis escritas da história.

Os babilônios utilizavam a base sexagesimal dos sumérios além da escrita cuneiforme, nesse período a civilização suméria não tinha tanta influência no sul da Mesopotâmia, sua cultura ainda persistia. Os babilônios utilizavam os números com os mesmos propósitos pragmáticos. Usavam algoritmos para efetuar cálculos similar a receitas culinárias, essas receitas continham soluções de equações lineares e quadráticas. As soluções das equações quadráticas utilizavam o método de completar quadrados. Os babilônios sabiam que a relação entre um círculo com o seu diâmetro é $3 \frac{1}{8}$, uma boa aproximação para o número pi. Conheciam e sabiam determinar o valor de $\sqrt{2}$ com 6 casas decimais na base sexagesimal, eles utilizavam as ternas pitagóricas, mais de mil anos antes de Pitágoras. Na Figura 6 temos um quadrado de lado 30, com o valor da diagonal representada em escrita cuneiforme.

Figura 6. Tablete YBC 7289 mostrando o valor da diagonal de um quadrado.



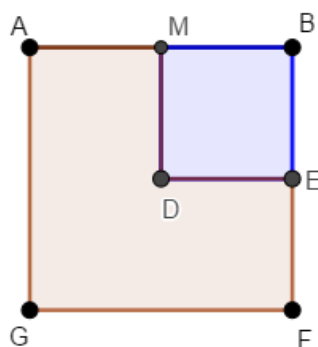
Fonte: Tatiana Roque, (2012).

Muitos livros de história da matemática misturam a matemática suméria com a babilônica, por terem similaridades entre o sistema sexagesimal e estarem na mesma região. As similaridades talvez se deem pela expansão territorial das conquistas babilônicas que assimilaram a cultura dos sumérios. Fazendo uso de processos matemáticos eles observaram as propriedades que os números têm, resolviam problemas práticos com abordagens abstratas, como o método de completar quadrados. Evidências dessas práticas foram encontradas em tabletes de argila, que eram exercícios escolares para alunos, futuros escribas, arquitetos e outros.

Eves (2004, p.79), comenta que os babilônios apresentavam problemas de caráter mais abstratos em comparação com os sumérios. Apesar da aparente superioridade de temas matemáticos encontrados em tabelas babilônicas. Essa civilização desenvolveu um sistema numérico avançado. Um exemplo de problema matemático dos babilônios é: “Adicionei a área e ao lado do quadrado: obtive 0,45. Qual o lado?” (ROQUE, 2012, p. 22). Um problema matemático babilônico.

Esse tipo de problema era resolvido pelo processo de completar quadrados. Lembrando que os babilônios utilizavam a base 60. Vale a ressalva que, como a metade de 1 na base decimal é 0,5; ($1/2 = 0,5$), a metade 1 na base sexagesimal é 0,30; ($1/2 = 0,30$). A solução desse problema está na base sexagesimal, assim: “(1). Tome 1; (2). Fracione 1 tomando a sua metade (= 0,30); (3). Multiplique 0,30 por 0,30 (= 0,15); (4). Some 0,15 a 0,45 (= 1); (5). 1 é a raiz quadrada de 1; (6). Subtraia 0,30 de 1 (= 0,30); (7). 0,30 é o lado do quadrado” (ROQUE, 2012, p. 22). A construção é resumida no seguinte conceito, tendo um quadrado, adicionando outros três quadrados obtemos um outro quadrado com o dobro do lado do quadrado anterior, como mostrado na Figura 7.

Figura 7. Resolução do Problema de completar quadrados.



Fonte. Próprio autor.

Observe o enunciado do problema “Adicionei a área e ao lado do quadrado: obtive 0,45. Qual o lado?”. Como o lado é desconhecido, o chamaremos de x a área de um quadrado de lado x é x^2 , logo adicionando a área ao lado do quadrado e obtenho 0,45, corresponde à equação $x^2 + x = 0,45$ na base sexagesimal. Os babilônicos lidavam com problemas de inúmeras naturezas numéricas, como os irracionais. Os números dos babilônicos tinham uma justificação religiosa e descritiva de quantidades e medidas.

O desenvolvimento matemático e os registros escritos não ficaram restritos apenas à região da Mesopotâmia, pois esses ocorreram na mesma época na China, na Índia e no norte da África com a civilização egípcia, sobre a qual comentaremos na próxima seção.

2.3 Egípcios

Eves (2004, p. 67), enuncia que a civilização egípcia surgiu no norte da África às margens do rio Nilo, no sexto milênio antes da Era comum. No quarto milênio apareceu um sistema de escrita bem desenvolvido e uma matemática pragmática. Registros escritos, datados da mesma época dos escritos babilônicos, porém diferente dos povos mesopotâmicos que faziam registros em tabletes de argila, os egípcios utilizavam papiros que degradam com o tempo. Alguns historiadores acham que a matemática egípcia é anterior a dos sumérios, mas faltam registros. Os pergaminhos de papiro mais antigos são o de Moscou, escrito em torno de 1850 antes da Era Comum e o de Ahmes (Rhind), escrito em torno de 1650 antes da Era Comum. Nesses pergaminhos estão expostos problemas diários, como divisão de pães, equações lineares, cálculo da área de quadrados e de círculos, volumes de pirâmides e de troncos de pirâmides.

Mastin (2010), apresenta um dos problemas expostos no papiro de Ahmes apresentado na Figura 8: “*Dividir 3 pães entre 5 pessoas?*” Para os egípcios, primeiro pegue dois pães e os divide em 3 partes que dá 6 pedaços de $1/3$; o outro pão, o divide em 5 partes; repartindo esses pedaços, cada pessoa ficará com $1/3 + 1/5$, porém sobra um pedaço de $1/3$, esse pedaço é dividido em 5 partes, assim temos $(1/3):5 = 1/15$. Logo cada pessoa recebe $1/3 + 1/5 + 1/15 = 9/15$, simplificando $3/5$. Atualmente resolvemos esse problema de forma direta, pois possuímos um sistema de numeração eficiente para contar. Tendo três pães, dividi-los com 5 pessoas, então cada pessoa recebe $3/5$ de pão. Os egípcios utilizavam procedimentos empíricos, suas soluções eram mais complexas que as nossas.

Figura 8. Papiro de Ahmes (Rhind)

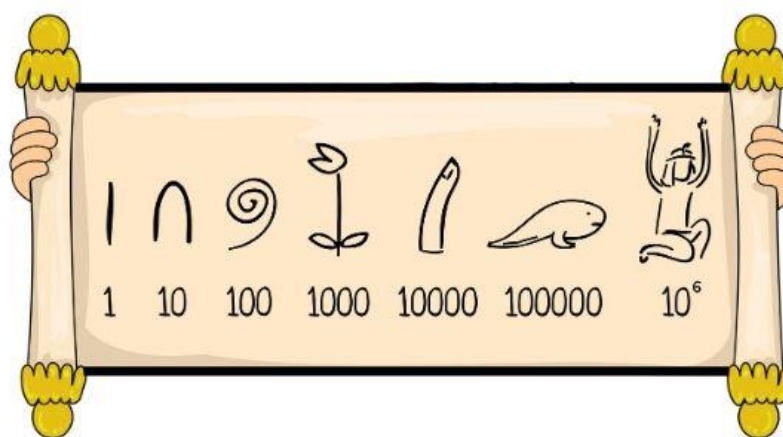


Fonte: Matemática é fácil, (2015).

Os agricultores egípcios cultivavam principalmente às margens do Nilo, após as cheias anuais. Havia pessoas especializadas que demarcavam os lotes para o cultivo, eram os marcadores de terras - os agrimensores, que os gregos chamavam de medidores de terra (geômetras). Os agrimensores eram funcionários do Estado, além de demarcar os lotes, registravam o tamanho do lote, para recolher o imposto devido após a colheita.

De acordo com Boyer (2012, p. 30), o sistema de numeração egípcio era decimal, apresentado na Figura 9. Os problemas matemáticos registrados nos papiros lidam com questões práticas do cotidiano do cidadão comum. Os egípcios construíram suas monumentais pirâmides com técnicas numéricas de sua época, seus números eram dádivas dos deuses para resolver problemas práticos.

Figura 9. Sistema de numeração do antigo Egito



Fonte: Mundo educação, (2020).

Os egípcios detinham um conhecimento avançado, suas pirâmides são provas da capacidade construtiva, administrativa necessária para concretizar um projeto colossal. Os procedimentos matemáticos dos egípcios influenciaram os povos gregos, que eram comerciantes marítimos e fundaram a cidade de Náucratis, um entreposto comercial no estuário do Nilo.

2.4 Gregos

Scott (2019, p. 5), enuncia que a civilização grega surgiu na Europa, no século XII, antes da Era Comum. Eles se estabeleceram na península do Peloponeso fundaram colônias na costa do mar Mediterrâneo, estendendo-se desde a ilha da Sicília até o Delta do Nilo. Essas colônias serviam como entrepostos comerciais nas rotas de navegação. Os gregos influenciaram e influenciam o modo de vida ocidental, sua cultura se espalhou pelos territórios próximos a região grega, graças as conquistas de Alexandre Magno no século IV antes da Era Comum. Esse período histórico ficou conhecido como Helenismo, a difusão do modo de vida grego baseado nos ideais de Alexandre Magno. Na Figura 10, a estátua alude a campanha de conquistas de Alexandre, nesse período houve a propagação do conhecimento grego, graças a cidade de Alexandria, no Egito, sob a dinastia fundada por Ptolomeu, general de Alexandre. A cidade de Alexandria possuiu a maior biblioteca do Mundo Antigo, e também foi o maior centro de pesquisas da época.

Figura 10. Estátua de Alexandre na cidade grega de Tessalônica.



Fonte: Google Imagem, (2020)

O conhecimento da Grécia Antiga se diferencia dos outros povos da antiguidade, talvez por esse saber ser muito estudado no ocidente e ser dotado de um racionalismo extremo. Os gregos conceberam os primeiros métodos de investigação científica. Eles valorizavam o racionalismo, como o homem contemporâneo. Por isso superestimamos a sua cultura e seu conhecimento, principalmente a Matemática e a Filosofia.

Homero um poeta grego do século VIII antes da Era Comum escreveu as obras *Ilíada* e *Odisseia*, a primeira narra a Guerra de Tróia e a segunda o retorno de Ulisses à sua terra depois de combater ao lado dos gregos no cerco à Tróia. A legitimidade de Homero é contestada, mas ele é o primeiro exemplar da explosão intelectual que iniciou nas ilhas gregas, na região conhecida como Jônia. Para Garbi:

Náucratis, ao colocar a Grécia em contato com uma civilização então mais adiantada, permitiu que os jônios observassem os conhecimentos básicos de Geometria, Aritmética e Astronomia que, não só no país dos faraós, mas também, na Mesopotâmia, haviam se acumulado ao longo de muitos séculos. Este foi um acontecimento crucial no nascimento da ciência e da filosofia grega. (GARBI, 2007, p. 19).

Como vemos em Boyer (2012, p. 55), no século VI antes da Era Comum, aparece Tales natural da cidade de Mileto, tido como um dos sete sábios, talvez o primeiro filósofo conhecido. A Filosofia é o ponto de virada do pensamento ocidental. Na época de Tales, essa prática não era chamada de Filosofia.

O que é Filosofia? Russell (2015, p. 11), traz a síntese que a filosofia é uma ferramenta crítica sobre a realidade do homem, e a busca incessante em compreender as leis que regem a ordem presente do Universo (Cosmo) e o lugar do ser humano nessa ordem. O ser humano é capaz de compreender essa ordem por meios racionais, Gaarder (2012, p. 39), toma que a Filosofia é uma ferramenta crítica sobre as crenças aceitas e as condutas do homem, essas ideias beiram a um estado de descrença na ordem divina. A Filosofia é a consequência direta do pensamento racional, mas não é um método empírico de análise, o que a evidência é a ênfase na argumentação racional.

Tal qual a compreendo, filosofia é algo que se encontra entre a teologia e a ciência. A exemplo da teologia, consiste ela em especulações sobre questões quanto às quais, até hoje, um conhecimento se mostrou inverificável; a exemplo da ciência, porém, recorre à razão humana em vez à autoridade, seja esta autoridade da tradição ou da revelação. Todo conhecimento definido, defendendo eu, pertence à ciência; todo dogma referente ao que está além do conhecimento definido pertence à teologia. Entre ambas, no entanto, existe uma terra de ninguém, uma terra exposta a ataques de ambos os lados. Essa terra de ninguém é a filosofia (RUSSELL, 2015, p. 13).

“*Para Tales a questão primordial não era o que sabemos, mas como sabemos*”. Essa frase de Aristóteles descreve o estudo e a influência de Tales na Matemática grega. Não sabemos quais os fatores que levaram Tales à revolucionária ideia que deu rumos definitivos ao pensamento matemático: suas verdades devem ser demonstradas por meios racionais. Fontes históricas da Geometria menciona que Tales demonstrou os seguintes teoremas:

1. Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo que é traçado; 2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais; 3. Ângulos opostos pelo vértice são iguais; 4. Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado de cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais; 5. Um ângulo inscrito em um semicírculo é reto. (EVES, 2004, p. 95).

Tales estudou Geometria e introduziu o processo demonstrativo nas afirmações matemáticas, de forma rudimentar porque as ferramentas que os matemáticos utilizam para efetuar demonstrações ainda não existiam. A demonstração foi o divisor de águas na Matemática, abrindo mão dos processos empíricos. A veracidade das proposições seria conhecida sem apelar à experiência prática. Uma proposição demonstrada é chamada de teorema, a prova argumentativa da veracidade de uma sentença. Tales transformou a Geometria de um conhecimento empírico e concreto em um conhecimento racional e abstrato.

Vários comentadores da Antiga Grécia, como Platão e Aristóteles dizem que Tales iniciou a tradição demonstrativa. Na época de Tales os gregos ainda não conheciam o que chamamos de Matemática, o que conheciam eram algumas técnicas de cálculos, por serem comerciantes, utilizavam dinheiro e procedimentos geométricos aprendidos com os egípcios. Eles chamaram esse conhecimento de *Geometria*, pela prática dos agrimensores do Faraó que utilizavam para demarcar os lotes de terras para o cultivo após as cheias do Nilo.

A Matemática como a conhecemos, nasce com os gregos. Mas afinal, *o que é matemática?* Precisamente, não sabemos o que é a matemática, podemos dizer que ela é a ciência que estuda métodos dedutivos, objetos abstratos e as relações existentes entre eles. A abstração está relacionada ao racionalismo e a Filosofia. Apesar de ter surgido pela observação de fenômenos naturais, e como esses acontecimentos são descritos e interpretados por ela, a Matemática é uma ciência não fundamentada em métodos empíricos.

Ao longo de sua história, a matemática e a filosofia têm-se influenciado mutuamente. O aparente contraste entre o indefinido fluxo das impressões sensoriais e as precisas atemporais verdades da matemática tem constituído uma das mais antigas perplexidades e dos mais renitentes problemas, não apenas da filosofia matemática, mas da filosofia em geral. Contudo avaliações filosóficas da matemática em sua relação com a ciência empírica e a lógica têm, por outro lado, sugerido problemas

matemáticos e até mesmo levado a novos rumos da própria matemática. (KÖRNER, 1985, p. 12).

A Matemática como a Filosofia desenvolvidas pelos antigos gregos têm em comum, não partilharem o método empírico, elas estão embasadas em experiências racionais. A Filosofia utiliza o raciocínio coerente para provar afirmações. A Matemática prova suas afirmações pelo raciocínio coerente. Ambas compartilham o raciocínio coerente que é a Lógica. Os gregos desenvolveram o pensamento lógico para executar suas investigações racionais.

Os gregos utilizavam um sistema matemático de numeração, usado por comerciantes e cidadãos comuns aplicados em problemas do cotidiano. A descrição racional da ideia numérica era praticada pelos filósofos. O cidadão comum grego, que conhecesse os números, os utilizaria para resolver problemas práticos como as outras civilizações anteriores.

2.5 Empirismo no processo numérico

As civilizações antigas criaram cidades, a escrita e o sistema de numeração posicional por motivos práticos. Apesar desses números serem derivados de métodos empíricos, eles abstraíram sobre a natureza desse conhecimento. Vemos muito dessas abstrações presentes em conceitos religiosos. Em Gêneses, Deus cria o mundo em 6 dias e descansa 1 dia. Cada animal tem dois gêneros, existem 12 signos zodiacais, 12 deuses no conselho do Olimpo, 12 tribos de Israel, 12 Apóstolos de Cristo. O tempo é demarcado em dia e noite, existem 2 astros celestes destacados o sol e a lua, a cada 12 ciclos de luação¹ temos um ano lunar.

Os números eram empíricos, de origem abstrata. O sol e a lua são pares de oposição, como a vida e a morte. Roque (2012, p. 90), enuncia que o conceito de número é abstrato, por abstrair da natureza particular de fenômenos naturais e associá-los a outros eventos. Essa associação se dá pelos números que são nomeados. As ideias numéricas dos povos antigos eram derivadas de processos empíricos associados a outros eventos baseados na experiência. Entender os números através da observação empírica é um processo natural de aprendizagem.

A visão sobre a *natureza do conhecimento* se deu pela refutação da realidade física praticada pelos filósofos. Uma passagem que descreve a visão filosófica sobre a realidade física está presente na Bíblia. “Quando Tomé diz: somente acredito vendo”. Se ele fosse um filósofo diria: “não acredito nem vendo”.

¹ Período entre duas luas novas consecutivas.

3 A FILOSOFIA E SUA IMPORTÂNCIA PARA A IDEIA DE NÚMERO

Eves (2004, p. 94), menciona que os estudiosos gregos foram os primeiros a estudar a Matemática utilizando conceitos e embasamentos abstratos. A veracidade de qualquer afirmação Matemática não deixaria margens às dúvidas, estas verdades serão provadas através do raciocínio rigoroso. Russell (2015, p. 13), a investigação racional no intuito de compreender a realidade perceptível é a Filosofia.

Discussões acerca da natureza matemática irá deparar com o platonismo e com o empirismo. O platonismo é uma corrente filosófica fundamentada nas ideias de Platão. Admitindo que os conceitos e objetos matemáticos existem num mundo Ideal, imutável e atemporal, nessa realidade os objetos matemáticos são perfeitos e incorruptíveis. O matemático é o agente que expressa a realidade Ideal em nossa realidade sensível. A principal característica da filosofia platônica aplicada à Matemática foi definir que todo conceito matemático é descoberto pelos pensadores, pois esses conceitos sempre existiram. O empirismo é fundamentado nas ideias de Aristóteles, em sua visão o conhecimento matemático é resultado da vontade humana, fruto da imaginação, da observação e da interação com a realidade física. Como invenção, não descobrimos conceitos matemáticos, nós os construímos.

Essas duas correntes filosóficas gregas originaram, a Filosofia da Matemática² Contemporânea. No final do século dezenove e início do século vinte, surgiram linhas de pensamento em Filosofia da Matemática, destacamos três influentes linhas de pensamentos sobre ela, que são: o intuicionismo, o logicismo e o formalismo. Segundo Japiassú e Marcondes (2008), o *intuicionismo* foi inspirada pelas ideias de Kronecker, para ele o conceito de número natural fora dado à intuição humana, por Deus. Na visão intuicionista os objetos matemáticos são construídos na mente humana, negavam o princípio do terceiro excluído³. Para o **logicismo** todas as sentenças matemáticas são redutíveis à lógica. No **formalismo**, as verdades matemáticas são puramente formais, conhecíveis através da manipulação simbólica.

A descrição Lógica da ideia de número é um interesse filosófico. Este interesse se estende à toda Matemática. As primeiras indagações sobre a natureza da matemática foram propostas pelos pensadores gregos, mostrando o interesse da Filosofia pelos fundamentos

² Filosofia da Matemática é o campo de estudo que analisa os fundamentos, estatutos e consequências das estruturas matemáticas, através das perspectivas da metafísica, da epistemologia, da lógica, da filosofia da linguagem e de demais áreas da filosofia.

³ O princípio do terceiro excluído enuncia que dada uma sentença, ela é verdadeira ou ela é falsa, não existe uma terceira opção.

matemáticos. Compreender a ideia de número de forma estritamente racional é uma abordagem filosófica.

3.1 Pensadores da Grécia Antiga

Hamlyn (1990, p. 10), comenta que Tales é reconhecido como o pai da Filosofia e da Matemática, mas em sua época essas duas matérias do conhecimento não tinham esses nomes. Esse reconhecimento vem da época de Platão e Aristóteles, não sabemos se foi Tales o iniciador do processo demonstrativo na matemática, por falta de documentos escritos. A influência do sábio de Mileto na Matemática é descrita em documentos de dois séculos após sua morte. O legado de Tales está presente nas primeiras demonstrações matemáticas, além do Teorema de Tales, uma das ferramentas Matemática essencial à Geometria e a Aritmética.

Consideramos que o desenvolvimento matemático rigoroso na Grécia começou no século VI antes da Era Comum, com Tales. Lembremos que os gregos tinham uma rede de comércio marítimo no Mar Mediterrâneo, excelentes construtores navais e comerciantes. O conhecimento numérico era utilizado na contabilidade de mercadorias e nos custos de viagens, um conhecimento prático da matemática.

Tales não desenvolveu uma Matemática no intuito de aplicá-la, como a praticada anteriormente. Ele concebe um conhecimento matemático com o propósito de elevar a consciência. Para os estudiosos gregos o conhecimento “se basta por si só”. A Matemática se torna uma Ciência de embasamento racional, estabelecendo regras para compreender objetos matemáticos. Qualquer outra forma de embasamento que não seja pelo raciocínio não é digna de ser tomada como verdadeira.

Comentadores gregos dizem que Tales foi por algum tempo mestre de Pitágoras de Samos. Este é creditado como o maior pesquisador matemático da antiguidade, fundador da escola pitagórica, uma sociedade religiosa da Antiga Grécia.

3.1.1 Pitágoras e os pitagóricos

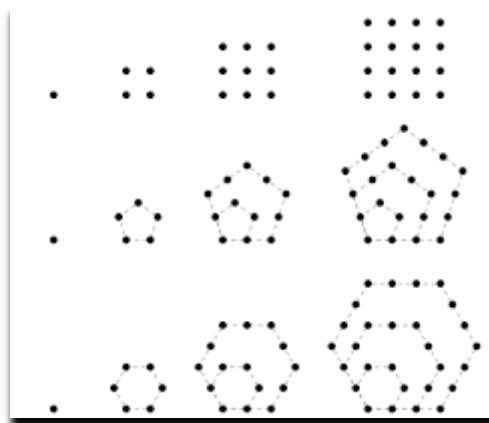
Hamlyn (1990, p. 12), enuncia que conhecemos Pitágoras de Samos na Matemática pelo famoso Teorema que leva o seu nome, mas sua influência matemática está além deste teorema. É creditado ao sábio de Samos a cunhagem dos nomes Filosofia (**amor a sabedoria**) e matemática (**o que é aprendido**). Pitágoras está envolto em obscuridade, existindo dúvidas

sobre a real existência desse personagem. Muito dessa obscuridade se deve ao fato de Pitágoras ser o fundador de uma irmandade na cidade de Crotona. Os membros eram chamados de pitagóricos, essa ordem era comunitária, suas descobertas matemáticas eram creditadas ao fundador da irmandade. Talvez o Teorema de Pitágoras tenha sido elaborado por algum pitagórico posterior à morte do fundador, por isso falaremos dos pitagóricos ao invés do sábio de Samos (ROQUE, 2012, p. 60-63).

Singh (1999, p. 33), descreve que a irmandade dos pitagóricos era um grupo fraterno e religioso, com regras precisas de convivência e de comportamento. Suas doutrinas eram confidenciais, somente os iniciados podiam tomar conhecimento desses estudos. Segundo alguns comentadores, como *Eudemo* e *Proclo*, Tales deu alguns passos em relacionar a Matemática com a Filosofia, mas foram os pitagóricos que melhor relacionou essas duas partes do conhecimento humano.

Aristóteles (2006, p. 56), comenta que na ótica pitagórica o número é o elemento básico da realidade, pois tudo que existe é radicado a números. Utilizando números figurados, que são pontos dispostos para formar linhas, triângulos, quadrados e outras formas apresentadas na Figura 11. Eles categorizaram esses números figurados em: pares, ímpares, perfeitos, triangulares, quadrados e outros, classificamos os números nas mesmas categorias na Aritmética. Esses estudos foram apresentados nos Livros⁴: V, VII, VIII e IX dos Elementos de Euclides.

Figura 11. Números figurados dos pitagóricos



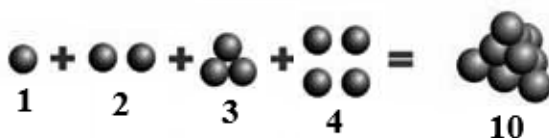
Fonte: Docplayer, (2020)

Os números figurados possibilitaram aos pitagóricos descobrirem propriedades aritméticas. Ao analisarmos esses números notamos uma relação direta entre as formas

⁴ Os capítulos da obra Os Elementos, são chamados de Livros. Euclides escreveu cada um deles de forma separada e depois foram reunidos em uma coleção que é Os Elementos.

geométricas com quantidades, os pitagóricos não diferenciavam formas e números. O tetractis a joia do seu sistema místico é a soma da unidade 1 com o linear 2, com o triangular 3 e com o quadrado 4 sendo essa soma 10, “a dezena é considerada uma coisa completa” (ARISTÓTELES, 2006, p. 26). O tetractis representa o Cosmo ordenado e completo.

Figura 12. Tetractis.



Fonte: matemelga, (2015).

Os números que os pitagóricos admiravam, não são os numerais posicionais que conhecemos, mas os números figurados que é a união de pontos e formas, seus números descrevem a realidade física, envolta em formas, como essas formas estão envoltas em números, a realidade é numérica.

Seus números figurados são descrições geométricas quantitativas. Para os pitagóricos, o número é a essência manifesta das formas, condição necessária e suficiente para entender a ideia numérica. As formas moleculares das substâncias químicas se configuram em padrões semelhantes aos números figurados, em essência a realidade sensível segue conforme a visão dos pitagóricos.

Os pitagóricos foram os *hippies* da antiguidade, seus membros estavam em sintonia com o Cosmo, o conhecimento é uma emanção desse conceito, sinônimo de ordem. Para os filósofos gregos o conhecimento em essência é proveniente exclusivamente do Cosmo, porém a concepção da origem do conhecimento mudou com o tempo. O filósofo que mais incitou o público sobre a origem e o sentido do conhecimento foi Sócrates, contestando a veracidade da natureza do conhecimento.

3.1.2 Sócrates

A veracidade do conhecimento começou a ser contestada por Sócrates, o mais famoso filósofo a utilizar um método que instigava os seus discípulos a avaliar se o conhecimento adquirido era verdadeiro ou delírios de um tolo ignorante. Sócrates dizia ser o mais ignorante

entre os homens, assim por reconhecer sua ignorância fazia dele o mais sábio dos tolos (RUSSELL, 2015, p. 92-100).

Para ele o conhecimento deveria ser analisado rigorosamente para que as falsas deduções não fossem aceitas como verdades. Sócrates propunha que o conhecimento tinha uma natureza contra intuitiva, como exposto nos Diálogos de Platão, no qual Sócrates pede ao escravo de Mênon para duplicar a área de um quadrado. Por intuição esse escravo duplica o lado desse quadrado, por meios didáticos Sócrates mostra que a dedução desse escravo é incorreta. Sócrates estava contestando a natureza das verdades aceitas pondo-as à prova. Ele não explicou a ideia de número e nem podemos garantir se ele conhecia ou se interessava pelos números. Sócrates não deixou nada escrito, o que sabemos sobre este são escritos de seus discípulos, como Platão, que foi um iniciado na irmandade pitagórica.

Algumas bibliografias sobre a Filosofia da Matemática citam que Sócrates a criou. Devemos duvidar de citações como essas, pois a Filosofia e a Matemática se desenvolveram juntas na Antiga Grécia. Outra dúvida é que o livro Mênon foi escrito por Platão, que era um matemático, nesse caso Platão seria o fundador da Filosofia da Matemática.

3.1.3 Platão

Hamlyn (1990, p. 34), cita que Platão foi discípulo de Sócrates, mas sua visão sobre o conhecimento era similar a dos filósofos pré-socráticos⁵, pois na concepção platônica o conhecimento é independente da experiência, porque o saber é proveniente de uma realidade eterna, atemporal e imutável, os sentidos humanos são incapazes de entender os objetos dessa realidade. Por isso os filósofos não podem basear seu conhecimento em experiências, mas somente no raciocínio.

A filosofia de Platão tem como base duas realidades, opostas entre si, uma delas é chamada de Mundo das Ideais, Mundo Ideal, Mundo Espiritual ou Mundo Transcendente. A segunda: Realidade Sensível, Mundo dos Sentidos ou Mundo Imanente. Como explicado por Silva.

Na filosofia de Platão a realidade - sentida ou apenas pensada – divide-se em dois níveis: um mundo transcende perfeito e imutável – o mundo do ser, atemporal e eterno – e outro imperfeito e corruptível – o mundo imanente do vir-a-ser, imerso no tempo e no torvelinho da transformação incessante, este em que nós vivemos. O mundo

⁵ Os filósofos pré-socráticos fazem parte do primeiro período da filosofia grega. Eles desenvolveram suas teorias do século VII ao V a.C., e recebem esse nome pois são os filósofos que antecederam Sócrates. Esses pensadores buscavam nos elementos da natureza as respostas sobre a origem do ser e do mundo

imamente nos é acessível por meio dos sentidos, o transcendente apenas pela razão ou pelo entendimento. Esse é refletido naquele como as nuvens do céu nas águas de um lago, apenas de modo imperfeito e aproximativo. (SILVA, 2007, p. 38).

O ser humano vive no Mundo Sensorial, tudo que existe nele são reflexos, cópias do Mundo Ideal. Na Figura 13 estão desenhados círculos, porém, todos os círculos são diferentes, mas os reconhecemos e os categorizamos como círculos, porque existe no Mundo Ideal um círculo perfeito, atemporal e incorruptível, e os círculos da figura são cópias imperfeitas desse ideal.

Figura 13. Reflexos imperfeitos da ideia de círculo.



Fonte: Próprio Autor.

Segundo Platão a ideia antecede o objeto, assim qualquer objeto ou juízo que se manifeste na mente humana é uma descoberta, uma vez que a ideia desse objeto sempre existiu na realidade Ideal. Na visão platônica o conhecimento não é construído pela experiência, mas descoberto pelo raciocínio, um conhecimento *a priori*.

A ideia de número surge naturalmente na realidade em que estamos inseridos, o próprio ser humano está saturado de noções quantitativas, como: um par de mãos, cinco dedos em cada mão, milhares de milhares de fios de cabelo. A questão quantitativa comunga com a filosofia platônica, exposto por Silva.

Segundo Platão, as Ideias matemáticas admitem instâncias também perfeitas, nesse caso os triângulos matemáticos e as várias instâncias do número 2. Sendo perfeitos, esses objetos não são acessíveis aos sentidos. Os exemplos puros de dualidade – como de resto todos os números ditos matemáticos ou monádicos (únicos) – são simplesmente coleções de duas mônadas indiferenciada. [...] há apenas uma Ideia de dois, mas vários números dois. (SILVA, 2007, p. 39-40).

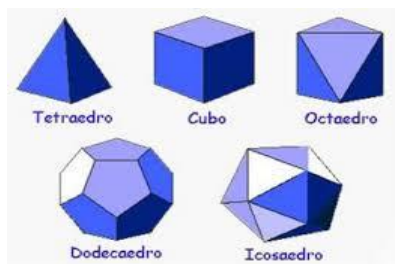
Na visão platônica os números existem perfeitos no Mundo Ideal, o ser humano somente compreenderá a ideia de número pelo raciocínio. Platão foi um dos primeiros a conceituar a ideia de número, sem recorrer a quantidades. Os pitagóricos também atuavam na mesma linha

de raciocínio, porém o sistema figurativo é um sistema empírico abstrato, enquanto as definições platônicas eram puramente abstratas. A natureza *a priori* do seu sistema filosófico explicava a natureza da ideia de número, pois essa ideia sempre existiu e nunca mudou, os números eram reflexos de ideias perfeitas, a compreensão é possível pelo raciocínio. No livro *A República*, Platão justifica o motivo de não explicar a ideia de número, como exposto a seguir.

Estou certo que sabes como as pessoas que ocupam com a Geometria, a Aritmética e outras disciplinas de mesmo gênero admitem o par e o ímpar, três espécies de ângulos e tudo quando se lhe assemelha no terreno especial de seus estudos; e, uma vez apresentadas essas hipóteses como conhecidas de todos, não se sentem na obrigação de justificá-las nem perante eles mesmos, nem perante os outros, por considerarem-nas evidentes para todo o mundo. Partindo desse ponto, prosseguem em sua exposição até chegarem, com a máxima coerência, à conclusão que tinham em mira desde o começo. (PLATÃO, 2000, p. 315).

Platão foi um iniciado na irmandade pitagórica, ele adotou a mística dessa irmandade em suas ideias matemáticas. Os sólidos platônicos foram formas descobertas pelos pitagóricos, mostrados na Figura 14. Platão fundou uma instituição de ensino na cidade de Atenas, para ensinar Filosofia e Matemática. Essa instituição foi chamada de *Academia*, em sua entrada estava escrito “Que não entre ignorantes em Geometria”. Essa instituição formou renomados estudiosos, como: Eudoxo, Euclides e Aristóteles.

Figura 14. Sólidos platônicos.



Fonte: Escola Kids, s/d

A relevância de Platão à Matemática se dá por sua Filosofia, não temos conhecimento dos estudos matemáticos platônico, mas conhecemos suas ideias matemáticas. Platão propôs uma Filosofia da Matemática, determinou que o conhecimento matemático é descoberto e não criado. Os estudos dos alunos da Academia trouxeram novas abordagens sobre a natureza do conhecimento matemático, mas o maior opositor à visão Matemática platônica foi Aristóteles, um de seus discípulos.

3.1.4 Aristóteles

Aristóteles (2006, p. 43), admite que as ideias matemáticas são apenas abstrações, uma ficção útil, não existindo separadas de objetos empíricos. Podemos até conceber essas ideias separadas do concreto por uma necessidade de conceber, mas as ideias não existem sem os objetos ou independente do ser matemático. Ele concebe a Matemática como estudo de certos objetos sobre certos aspectos. Uma bola como aspecto de uma esfera e dois livros como uma abstração de um par de objetos. Para ele a Matemática é pragmática, as formas fictícias podem ser admitidas, mas essas são derivadas das formas reais, a própria noção de esfera perfeita é uma ideia derivada de qualquer corpo de forma esférica. “É verdadeiro declarar, que objetos matemáticos existem, e sob a forma que os matemáticos a descrevem. E tal como é verdadeiro dizer, a título geral, das ciências que tratam de um assunto particular” (ARISTÓTELES, 2006, p. 320).

Para Aristóteles o objeto antecede o conceito, todas as ideias são reflexos de objetos concretos ou abstratos. As ideias são provenientes da experiência, o ser humano é o criador de seus objetos de conhecimento, esse tipo de definição é conhecida como *a posteriori* ou empírica. O pragmatismo matemático de Aristóteles era diferente do praticado pelos mesopotâmicos e egípcios, pois ele tomava as formas concretas e construía formas abstratas mais complexas, como tomar um pentágono e abstrair um gigagono (polígono de um milhão de lados), não somos capazes de construir esse polígono de forma concreta, ele existe como abstração.

As obras bibliográficas de Aristóteles abrangem todos os campos do conhecimento do mundo antigo. No livro *Organon* são apresentados “os opostos contraditórios” Aristóteles (2016, p. 91), que originou os três princípios fundamentais da Lógica: “*Princípio da identidade* - algo somente é igual a si próprio; *Princípio da não contradição* - algo não pode ser e não ser ao mesmo tempo; *Princípio do terceiro excluído* - algo é verdadeiro ou é falso” (ZEGARELLI, 2013, p. 16). O *Organon* lança as bases das ciências dedutivas com a utilização de estruturas axiomáticas. Euclides, na obra *Os Elementos*, segue os moldes do pensamento aristotélico, tomando definições primitivas verdadeiras e através delas, prova verdades mais complexas e gerais. Definições primitivas são os *axiomas*, verdades complexas provadas através de axiomas são os teoremas. O método empírico defendido por Aristóteles, lhe permitiu deduzir princípios científicos, mas ele não experimentou suas deduções, principalmente as deduções sobre a

Mecânica. Seus princípios da Mecânica foram tidos como verdadeiros até à Revolução Científica nos séculos XVII e XVIII, não sobrevivendo à experimentação.

Para Aristóteles o conhecimento é construído pela experiência de forma empírica, sua convicção é o extremo oposto da convicção de seu mestre Platão com a crença no conhecimento de natureza *a priori*. Os estudiosos gregos estavam imersos na batalha do sensorial versus o racional. Similar a Platão reconhecemos a relevância de Aristóteles por sua Filosofia em todos os ramos científicos com relação aos estudiosos gregos.

A visão aristotélica se consolidou na Geometria de Euclides. A Aritmética não foi definida por nenhuma definição primitiva, pois qualquer noção utilizada na Aritmética estava enunciada na Geometria. Os filósofos matemáticos tomavam os números como segmentos, eles não diferenciavam formas de números, mas existia uma estrutura Aritmética.

3.2 Aritmética grega

Roque (2012, p. 106), a noção de números para os gregos é bastante diferente da utilizada atualmente, eles não admitiam números negativos, e nem irracionais. O número para os gregos é denominado de *arithmos*, são os números naturais, com duas exceções, não existia o número zero e o número *um*. O número *um* é a unidade e a unidade não é *arithmos*, em razão de que todos os *arithmos* são agregados de unidades. A moderna Aritmética ainda tem um tratamento diferenciado para o número *um*. O número *um* não é primo, não é sucessor de nenhum número natural, no processo para determinar o máximo divisor comum de dois números, utilizando o algoritmo de Euclides quando sobra o número *um* temos que esses dois números são primos entre si. Exposto no Livro VII dos Elementos nas definições I, II e III. “A unidade é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dito **uma**. E número é a quantidade composto de unidades. Um número é uma parte de um número, o menor do maior, quando meça exatamente o maior” (EUCLIDES, 2009, p. 269).

A mesma exposição é feita por Aristóteles na Metafísica.

O *um* não é qualquer substância independente. E isso é plausível, porque o *um* indica uma medida de alguma pluralidade, e o número denota uma pluralidade medida e uma pluralidade de medidas. Daí também não se considerar, com razão, que o *um* seja um número, pois a medida não é medidas, mas a medida e o *um* são pontos de partida. (ARISTÓTELES 2006, p. 347).

No algoritmo de Euclides, um procedimento fundamental para determinar o máximo divisor comum exposto no Livro VII dos Elementos, nas proposições 1 e 2.

Proposição 1. Sendo expostos dois números desiguais, e sendo sempre subtraído de novo o menor do maior, caso o que restou nunca meça exatamente o antes dele mesmo, até que reste uma unidade, os números do princípio serão primos entre si.
Proposição 2. Sendo dado dois números não primos entre si, achar a maior medida comum deles. (EUCLIDES, 2009, p.270-271).

Os processos apresentados acima são utilizados na Aritmética para quaisquer números naturais, porém os gregos utilizavam somente segmentos, sem numerais. A ideia de unidade atesta que os gregos conceituavam os *arithmos* sem recorrer a quantidades, pois a unidade de alguma coisa pode ser dividida pela metade, a mesma convicção é encontrada nas obras de Aristóteles, visto que para ele os números existem graças a experiências concretas de contagens, mas os *arithmos* eram abstrações.

Os números que utilizamos como medidas, os gregos chamavam de grandezas que são: o tamanho de um segmento, a superfície e o espaço de um sólido. Grandezas de mesma espécie quando comparadas eles chamavam de razão, como exposto na definição três do Livro V de Euclides “uma razão é um tipo de relação que diz respeito ao tamanho de duas grandezas do mesmo tipo” (EUCLIDES, 2009, p. 205).

Além do arithmos e das grandezas existia um procedimento numérico utilizado por cidadãos comuns. O “*povo comum*” conheciam os processos de adição, subtração, divisão e multiplicação, que são as operações básicas, utilizadas no cotidiano. Os gregos chamavam essas operações de *logística*, fazendo uso de um sistema posicional decimal chamado de sistema de numeração jônico, os símbolos eram o seu próprio alfabeto, acrescidos de 3 letras fenícias. Contendo vinte e sete sinais: nove para as unidades, nove para as dezenas e nove para as centenas, conforme a Figura 15.

Figura 15. Sistema de numeração jônico.

Unidades			Dezenas			Centenas		
α	alfa	1	ι	iota	10	ρ	rô	100
β	beta	2	κ	capa	20	σ	sigma	200
γ	gama	3	λ	lambda	30	τ	tau	300
δ	delta	4	μ	mi	40	υ	ípsilon	400
ϵ	épsilon	5	ν	ni	50	φ	fi	500
ζ	zeta	6	ξ	csi	60	χ	chi	600
η	eta	7	\omicron	ômicron	70	ψ	psi	700
θ	teta	8	π	pi	80	ω	omega	800
		9	ϱ	qoppa	90	λ	sampi	900

Fonte: conjunto numéricos, (2017).

Para representar o número 847, os gregos o decompunham em $800+40+7$ que no sistema jônico são os símbolos $\omega\mu\zeta$ (ômega, mi, zeta). Para representar os milhares utilizavam um (´) antes da letra, por exemplo, para escrever o número 2023, decompomos ele em $2000+20+3$ em jônico fica $\beta\kappa\gamma$ (beta, capa, gama).

A ideia de número na Grécia Antiga era bem desenvolvida, seus números eram segmentos de retas. Problemas numéricos abordados pelos estudiosos gregos eram resolvidos por procedimentos geométricos. Os problemas insolúveis dessa época se devem ao fato de a solução ser feita apenas com régua e compasso, porém eles construíam curvas mecânicas que não observava o uso restrito de régua e compasso, como as cônicas.

Para os estudiosos gregos a essência dos números era a Geometria. Os numerais jônicos ficaram para o povo comum, que não se interessavam por questões filosóficas. A dicotomia referente aos números serem *a priori* ou *a posteriori* não foram respondidas pelos filósofos gregos.

Roque (2012, p. 82) cita que no final do século IV antes da Era Comum foram compilados os procedimentos matemáticos conhecidos que os gregos tinham no livro Os Elementos por Euclides. Suspostamente ele os copilou para ensinar Matemática na cidade de Alexandria. Sobre Euclides temos poucas informações, aparentemente ele estudou na Academia de Platão. Sua obra Os Elementos segue o estilo de lógica-dedutiva da visão aristotélica, essa técnica forneceu novos métodos de demonstrar proposições matemáticas. Euclides copilou os conhecimentos dos pitagóricos, os estudos de Eudoxo, Hipócrates de Quios e de outros. Os problemas euclidianos influenciaram todos os matemáticos posteriores, e até hoje são ensinados os problemas de 2300 anos atrás. Garbi (2007, p. 78), comenta que Euclides se tornou sinônimo de rigor, todos os ramos do conhecimento seguiram os princípios lógicos-dedutivos encontrados nos Elementos.

Euclides e Aristóteles influenciaram todos os novos estudiosos. Descobrimos novos campos matemáticos com a aplicação desses estudos, como nas obras de Arquimedes, Erastóstenes, Heron, Apolônio e outros. A biblioteca de Alexandria foi o centro propagador do conhecimento do mundo grego. Alexandria formou grandes pensadores com obras influentes, como o astrônomo Claudio Ptolomeu, e alguns matemáticos, como Diofanto, Teon e Hipatia. Porém o mundo grego sempre esteve imerso no rigor geométrico, todos os estudos se embasavam na Geometria. O último matemático influente da cultura grega foi Pappus de Alexandria do século IV da Era Comum.

Scott (2019, p. 47-55), comenta que o Helenismo entrou em declínio no século II antes da Era Comum, com a expansão do território romano. Grandes pensadores da cultura grega sobreviveram a esse declínio e influenciaram outras culturas, como o cristianismo os quais escreveram seus livros em grego. Alexandria ainda era um centro de formação de pensadores científicos.

Com a oficialização do cristianismo no império romano, início do século IV da Era Comum e também o início da Idade Média, sepultou a cultura helênica, o ideal da filosofia que os gregos haviam criado foram direcionados a religião. Os novos filósofos cristãos estudavam temas teológicos, deixando temas matemáticos em segundo plano.

Na Idade Média, os pensadores europeus deram pouca importância a pesquisas matemáticas, e o pouco que se estudou vinha das obras de Euclides e Ptolomeu. Qualquer indagação sobre a ideia de número que algum pensador europeu da Idade Média tivesse, justificar-se-ia pela vontade do Criador Supremo do Universo.

Garbi (2007, p. 136), comenta que no século XI, a cultura árabe introduziu o sistema posicional de numeração decimal. Esse sistema tinha um símbolo para a posição vazia considerado um numeral. Até a introdução desse sistema de numerais, nenhum sistema de numeração havia introduzido um símbolo específico para ocupar uma posição vazia. Um sistema de numeração dinâmico capaz de representar qualquer valor numérico simples, grande, astronômico ou infinitésimo. O dinamismo desse sistema numérico se deve ao fato de os mesmos numerais representarem unidades, dezenas e centenas. O único critério é observar a posição do numeral. Tal sistema de numeração é chamado de Sistema de Algarismos indo-árabicos, desenvolvido pelos hindus assimilados pelos árabes. Os matemáticos árabes conheciam um sistema numérico dinâmico, mas eles seguiam a tradição geométrica dos antigos gregos na solução de problemas.

3.3 Renascentismo

Eves (2004, p. 288), comenta que no século XVI, a Europa resgatou os ideais da cultura grega. A Filosofia aborda temas humanista em contraponto com os temas teológicos. Pensadores dessa época motivados pelos estudos científicos gregos deram início a Revolução Científica. Atacando questões referentes a Mecânica, como queda-livre, órbita dos astros e novas abordagens geométricas. Os estudiosos mais influentes desse período foram: Nicolau Copérnico com o sistema heliocêntrico, Galileu Galilei com objetos em queda-livre e

aperfeiçoador do telescópio, Johannes Kepler com as órbitas elípticas, René Descartes e Pierre de Fermat com a Geometria Analítica, Isaac Newton com descrições geométricas deduziu as leis fundamentais da Mecânica.

A ideia de número foi pouco abordada pelos estudiosos da Revolução Científica. Eles estavam trabalhando com medidas ou grandezas que são descritas em termos geométricos, a obra mais influente da Ciência escrita no século XVII por Isaac Newton, *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, todas as leis da Mecânicas são demonstradas por abordagens geométricas. O Cálculo Diferencial e Integral de Newton e Leibniz está todo conceituado pela Geometria. Dos poucos matemáticos desse período que pesquisaram a ideia de número destacamos Leibniz motivado pelo sistema de numeração binário que estabeleceu alguma justificativa para a ideia numérica.

3.3.1 Leibniz

Wilhelm Gottfried Leibniz, acreditava que os números são *a priori* existem latentes na mente humana. Número é um dos aspectos de Deus, o Criador é atemporal e imutável, os números compartilham da mesma natureza divina, esses se fazem presentes em nós por nossa imagem e semelhança à Deus (KÖRNER, 1985, p. 25).

Deus, por sua parte imprimiu os números na natureza, eles regem o mundo ordenando-o e tornando-o inteligível. A natureza obedece a leis numéricas e princípios metafísicos, esses princípios dão uma luz sobre os desígnios do Criador ao mundo. Existe uma comunhão entre o espírito e a natureza que a faz em princípio conhecível. O ser humano tem a capacidade para reconhecer e descrever esse conhecimento, na medida das possibilidades do seu intelecto.

Há um paralelo entre a visão de Leibniz, com a visão pitagórica e a visão platônica. Diferentemente dos antigos gregos, na visão de Leibniz os números são entidades psicológicas, aprendemos suas propriedades pelo raciocínio. Como os números são criações de Deus, tentar compreendê-los é o mesmo que entender os desígnios do Criador, os números são objetos de fé, por isso são *a priori*. Essa visão matemática é compartilhada pelo intuicionismo.

A visão de Leibniz comunga com as ideias de Platão, suas justificativas estão embasadas na religião. Abordagens como essas seriam dadas por estudiosos na Idade Média e pelos contemporâneos de Leibniz, pois nessa época poucos contestariam explicações como essas. A ideia de número que Leibniz apresentou ficou conhecida como conceituação psicológica no

século XIX. Na década de 1820, Mill apresenta suas ideias sobre os números em contraponto as ideias de Leibniz.

3.3.2 Mill

O filósofo *John Stuart Mill* rejeitava a existência dos números como entidades latentes em nossa consciência, despertada pelo desenvolvimento do intelecto. Para ele toda a Matemática é desenvolvida pela observação de fenômenos naturais, através deles deduzimos as verdades básicas do conhecimento matemático. Tomando a Geometria como exemplo, suas fundamentações são alicerçadas em observações e delas são intuídas leis fundamentais, como a noção comum de linha, porque jamais será observado uma linha sem largura no mundo físico, mas todas as construções são idealizações de possibilidades. Shapiro (2016, p. 140), cita que Mill acreditava que existia a falsa ideia que entidades numéricas não são relações derivadas de observações empíricas, tal ideia é falsa, pois toda ideia de número é definida para contar ou organizar. Números são criações superestimadas pelos estudiosos, mas são criações do ser humano.

Todos os números são números de algo: não há tais coisas como números em abstrato. *Dez* deve significar dez corpos, ou dez sons, ou dez pulsações. Mas embora os números devam ser números de algo, eles podem ser números de qualquer coisa. Portanto, as proposições relativas a números têm a peculiaridade notável de serem proposições relativas a coisas quaisquer, todos os objetos, todas as existências de qualquer tipo, conhecidas pela experiência. (MILL apud SHAPIRO, 2016, p. 143).

Mill não abordou muito do universo da matemática, suas ideias são perceptíveis na Aritmética, influenciado pelos estudos de Aristóteles. No século XIX, principalmente a Inglaterra que Mill morava era o país mais industrializado, graças a uma economia estável e a aplicação da matemática nas áreas da química, da física, da engenharia e da economia. O ambiente ao redor dele vivenciava a aplicação matemática, sua formação em economia foram fortes motivadores para estudar a natureza da ideia de número e conceituá-la como empírica.

4 EMBASAMENTO LÓGICO DA IDEIA NUMÉRICA

A Revolução Industrial estabeleceu a Ciência como fonte de verdades embasadas em números, a manifestação da utopia dos pitagóricos. Na segunda metade do século dezanove houve duas notáveis correntes de estudos matemáticos com o intuito de explicar a natureza da ideia de número: o psicologismo e o empirismo. Körner (1985, p. 89), expõe o psicologismo como regras normativas da lógica baseadas nas leis empíricas da psicologia, seguindo as ideias de Leibniz e o empirismo baseado nos ideais de Aristóteles, defendidas por Mill.

A Virada Linguística da filosofia no século XIX, acarretou mudanças nas estruturas da linguagem e da Lógica. Esse movimento concebeu a linguagem como instrumento de interação social, somada à constatação do caráter contextual e suas interações nas ciências exatas e nas ciências sociais. Esse movimento pode ser definido como uma mudança na concepção da relação entre a linguagem e a realidade. A primeira passa a ser vista como autônoma, isto é, possui funcionamento próprio em relação à realidade, que por sua vez, já não é mais acessível em si mesma, mas apenas através do uso da linguagem.

[...] a linguagem nunca é um conjunto de ‘formas’ vazias esperando para serem preenchidas com um “conteúdo” factual e conceitual ou para serem conectadas a referentes pré-existências no mundo, mas está ela própria no mundo como uma ‘coisa’ entre outras [...] (WHITE, 1994, p. 27).

A aritmetização da Análise Matemática libertou o Cálculo das definições geométricas e dos infinitésimos. Cauchy formalizou o conceito de limites de funções dando uma definição precisa e excluindo o uso da Geometria, de números infinitesimais ou de velocidades definindo-o como uma variável dependente.

[...] a completa aritmetização da análise só se tornou possível quando, como Hankel previra, os matemáticos compreenderam que os números reais devem ser encarados como ‘estruturas intelectuais’ e não como grandezas intuitivamente dadas, legadas pela geometria de Euclides. (BOYER, 2012, p. 393).

Os matemáticos no século XIX estabeleceram novos fundamentos para o Cálculo Diferencial e Integral, que lida com valores contínuos estudados pela Análise. No final da década de 1870, Frege começa a investigar as estruturas da Aritmética, abandonando qualquer rigor geométrico. Para Frege, definindo rigorosamente os números naturais teríamos subsídios necessários e suficientes para a compreensão de todos os outros tipos de números.

4.1 Frege

Friedrich Ludwig Gottlob Frege, professor da universidade de Jena, inspirado pela Virada linguística da filosofia e pela aritmetização da Análise, pretendia derivar a Aritmética da Lógica, de forma mais precisa para Frege os termos aritméticos seriam formulados como termos lógicos, esse estudo ficou conhecido como *logicismo*. Suas pretensões necessitavam de uma nova estrutura lógica. Precisando de uma linguagem mais formal e novas abordagens das operações lógicas, Frege escreveu o *Begriffsschrift* (Conceitografia), em suas palavras,

Tentei reduzir o conceito de sucessão em uma sequência à noção de consequência lógica para daí poder estabelecer o conceito de número. Para evitar que nessa tentativa se intrometesse inadvertidamente algo de intuitivo, cabia tudo reduzir a uma cadeia inferencial, carente de qualquer lacuna. Mas ao tentar realizar essa exigência da forma a mais rigorosa possível, deparei-me com o obstáculo da insuficiência da linguagem [corrente]: além de todas as dificuldades inerentes ao manuseio das expressões, à medida que as relações se tornavam mais complexas, tanto menos apto me encontrava para atingir a exatidão exigida. Tal dificuldade levou-me a conceber a presente Conceitografia. (FREGE, 2018, p. 17).

Observando a inadequação do silogismo na Lógica aristotélica que é a relação entre três proposições, em que as duas primeiras se juntam e são capazes de deduzir a terceira, as duas primeiras são premissas e a terceira é a conclusão. Um dos silogismos mais conhecido, apresentado por Morais Filho explica sua estrutura:

Um silogismo é um tipo de argumento lógico-dedutivo da forma **H é M. S é H. Logo S é M.** Por exemplo: ‘Todos os homens são mortais’. ‘Ora, Sócrates é um homem’. ‘Logo, Sócrates é mortal’. Um silogismo é formado por três elementos básicos: 1. ‘**H é M**’, que contém uma afirmação geral e é chamada *premissa maior*; Exemplo: *Todos os homens são mortais*. 2. ‘**S é H**’, que contém uma afirmação particular derivada e é chamada *premissa menor* ou *termo médio*; Exemplo: *Ora, Sócrates é um homem*. 3. ‘**S é M**’, que deve ser coerente com as premissas anteriores e é chamada *conclusão*; Exemplo: *Logo, Sócrates é mortal*. Cada premissa tem um elemento comum com a conclusão, e ambas um termo em comum. (MORAIS FILHO, 2007, p. 46).

Cada proposição é uma oração afirmativa com sujeito e predicado, todo silogismo segue esse modelo, duas proposições que se ligam e deduzem a conclusão. O silogismo de Aristóteles tomava em consideração *predicado-atributo* e descartava de suas deduções *predicado-relação*. O predicado é o que se diz do sujeito, no silogismo acima, “*todo ... é mortal*”, ser mortal é um atributo, “*... é um homem*”, ser homem é outro atributo. Podemos rescrever esse silogismo da seguinte forma: *Todo ser vivo é mortal. Meu cachorro é um ser vivo. Logo meu cachorro é mortal.*

O silogismo aristotélico tomava o atributo e descartava a relação, Frege entendeu que o maior significado está na parte descartada, pois o atributo é universal, ele se relaciona a inúmeros objetos, essa é a parte que contém a matemática, como exposto por Silva.

Desde sempre entendeu que a forma lógica de qualquer asserção é do tipo S é P , em que ' S ' denota sujeito e ' P ' o predicado. '*Sócrates é mortal*' e '*Todos os homens são mortais*' eram ambas vistas como atribuições do predicado '*é mortal*' aos sujeitos, respectivamente, '*Sócrates*' e '*Todo homem*'. Essa análise torna difícil, se não impossível, um tratamento adequado das asserções gerais, isto é, as asserções envolvendo as expressões (quantificadores) '*todo*' e '*existe*'. Frege mudou isso. Certamente em virtude de sua formação matemática, ele preferia analisar asserções em termos de função – uma noção matemática – e objeto. '*Sócrates é mortal*' era visto por ele como o '*preenchimento*' do termo funcional ' *x é mortal*', em que a variável ' x ' apenas marca uma posição vaga, pelo nome '*Sócrates*'. Para Frege, a expressão ' x é mortal' denota uma função, entendida como uma entidade objetivamente dada, e a asserção obtida pelo preenchimento dessa expressão pelo nome '*Sócrates*' - denotando esse objeto Sócrates – denota, por sua vez, um dos dois valores de verdade, o Verdadeiro e o Falso (o Verdadeiro neste caso), que ele via como dois objetos lógicos. (SILVA, 2007, p. 118).

Frege expressa seu incômodo com a fato de os matemáticos não chegarem a um acordo em relação à natureza dos números. “Não constituirá então uma vergonha para a Ciência estar tão pouco elucidada acerca do seu objeto mais próximo, o qual deveria, aparentemente, ser tão simples? Menos provável ainda é que se seja capaz de dizer o que o número é” (FREGE, 1992, p. 30). Na obra *Os Fundamentos da Aritmética*, de 1884, Frege propõe que a Aritmética deveria ser entendida como um ramo da Lógica. Pois com as operações aritméticas chegamos na conclusão das sentenças apenas analisando seus termos, exemplo: $(2 + 7) = 9$. O silogismo opera da mesma forma, a conclusão está inserida nas premissas bastando analisar as sentenças para deduzir a conclusão. Frege define o conhecimento aritmético de juízo analítico. Como a compreensão da Aritmética não depende da experiência, deduz que esse conhecimento é *a priori*.

Aquilo de que se trata, então, é de encontrar uma demonstração para proposição em causa e de a seguir em sentido inverso ao da dedução até se alcançarem as verdades primitivas. Se seguindo esse caminho, se deparar apenas com leis lógicas gerais e definições, então está-se em presença de uma verdade *analítica*, tendo, porém, que não se perder de vista o pressuposto de que também as proposições sobre as quais se apoia a fiabilidade de uma definição tem que ser tomadas em consideração. Mas, se não for possível levar a cabo a demonstração sem fazer uso de verdades que não são de natureza lógica geral, isto é, de verdades que digam respeito a uma área específica da Ciência, então a proposição é *sintética*. Para que uma verdade seja considerada *a posteriori* exige-se que não seja possível demonstrá-la sem recorrer a fatos, ou seja, as verdades indemonstráveis e sem caráter de generalidade contendo asserções acerca de objetos determinados. Se, ao contrário, for possível efetuar a demonstração recorrendo exclusivamente a leis gerais, que não permitam nem exijam elas próprias qualquer demonstração, então a verdade é *a priori*. (FREGE, 1992, p.39).

Para Alcoforado (2009), o programa logicista em Frege se restringia à Aritmética. Nos *Fundamentos da Aritmética* aparece a preocupação com a possibilidade de demonstrar as verdades aritméticas sem lacunas no percurso demonstrativo. A demonstrabilidade das proposições seria garantida através de uma compreensão refinada dos *conceitos* envolvidos, sobretudo os mais simples, que podem vir a servir de base para generalizações e para o entendimento dos conceitos mais complexos.

Naturalmente que não entendo por propriedades que podem ser atribuídas a um conceito as características que compõem o conceito. Estas são propriedades das coisas que caem sob o conceito e não propriedades do conceito. Deste modo, 'retângulo' não é uma propriedade do conceito 'triângulo retângulo'; no entanto, a proposição que afirma não existir qualquer triângulo retângulo, retilíneo e equilátero exprime uma propriedade do conceito 'triângulo retângulo, retilíneo e equilátero'; a este conceito atribui-se o número zero. (FREGE, 1992, p. 78).

Frege determina que número não é propriedade das coisas exteriores e não é subjetivo. O número é um objeto lógico, objetivo que é atribuído a conceitos. Assim o número *um* é atributo comum a todos objetos que cai sobre o conceito de unidade. Como os conceitos se relacionam de forma lógica, a equinumerosidade entre objetos é a correspondência biunívoca entre objetos que caem sobre determinado conceito. Em uma mesa de banquete todas as cadeiras estão ocupadas e todos os comensais estão sentados, então existe uma correspondência entre os comensais com as cadeiras, pois existe uma cadeira para cada comensal e também um comensal para cada cadeira. Assim é estabelecida uma relação de equinumerosidade entre a coleção de comensais com a coleção de cadeiras.

Ambos objetos caem sobre o atributo de conceito por terem a mesma cardinalidade, ou a relação de 1 para 1, Frege utilizou a cardinalidade sem valer da ideia de número natural. Essa ideia o levou ao *Princípio de Hume*, que enuncia: para quaisquer conceitos **F**, **G**, o número de **F** é idêntico ao número de **G** se, e somente se, **F** e **G** são equinumerosos, a notação utilizada por Frege para este princípio é $NxFx = NxGx \Leftrightarrow F \approx G$, em que \approx denota relação biunívoca entre **F** e **G** e x é um objeto que cai sobre o conceito. No ponto de vista de Frege cada objeto que cai sob **F** estabelece uma relação biunívoca com um objeto que cai sob **G**. Esse Princípio enunciado por Frege é um operador de cardinalidade. Todas as proposições derivadas desse Princípio são conhecidas como *Teoremas de Frege*.

Frege constrói via o Princípio de Hume a sequência dos números naturais começando pelo número zero. O *zero*, para Frege é o número que convém ao conceito: diferente de si próprio, já que nada cai sob o conceito "diferente de si próprio". Esse conceito contraria o

*princípio da identidade*⁶. Como zero coisas cai sobre esse conceito, assim fica que o número zero é qualquer conceito diferente de si próprio. Ao fazer uso da identidade ($= \mathbf{0}$), existe um objeto que cai sobre esse conceito, o próprio *zero*. Para definir os outros números foi preciso utilizar a noção de série.

Para definir os demais números Frege precisou da noção de seguir em uma série. No parágrafo 76 do livro *Os Fundamentos da Aritmética*, Frege define a relação que dois membros vizinhos da série de números naturais mantêm entre si. “Há um conceito F e um objeto x que cai sob ele tais que o número que convém a F é n e o número que convém ao conceito “cai sob F mas não igual a x ” é m ” que significa o mesmo que “ n segue na série natural dos números imediatamente após m ” (FREGE, 1992, p. 93).

Neste caso, voltando a definição de seguir em uma série, o conceito F seria “igual a 0”, o objeto x e o número m seriam o próprio 0. É possível definir o n que resta como o número 1, podendo construir a seguinte proposição: “1 é o número que convém ao conceito ‘igual a 0’”, ou ainda “1 segue na série natural dos números imediatamente após o 0”. Frege observa que em ambas as definições, do número 0 e do 1, a legitimidade objetiva não requer nenhum fato físico, empírico ou psicológico. (COURY, 2015, p. 78).

Frege constrói o conceito de número a partir do zero. Definindo o conceito ao qual o número zero convém, então os demais números são construídos a partir da existência do zero, assim: $\mathbf{0}$ o número que convém ao conceito *diferente de si próprio*; $\mathbf{1}$ o número que convém ao conceito *igual a 0*; $\mathbf{2}$ o número que convém ao conceito *igual a 0, ou igual a 1*; $\mathbf{3}$ o número que convém ao conceito *igual a 0, ou igual a 1, ou igual a 2*. Assim prosseguindo. Esse tipo de abordagem é chamada de recursão, a proposição é satisfeita pelo elemento mínimo e pelos elementos sucessivos da sequência dos números naturais. Assim um conceito n é satisfeito por $(n + 1)$ identidades, por isso Frege determinou que há potencialmente infinitos números naturais.

Qual a definição de número natural? Em Shapiro (2016, p. 163), para qualquer conceito F , se F é satisfeito pelo número zero e se para cada objeto d , da proposição de que d cai sob F . Segue que cada sucessor de d cai sob F , então n cai sob F . pode ser resumido como: n é um número natural se, somente se n cai sob cada conceito que é satisfeito por *zero* e fechado para a relação de sucessão. Hoje conhecemos essa proposição como princípio de indução, segundo essa visão número é uma série bem ordenada de sucessões de conceitos.

⁶ Para o princípio da identidade, qualquer coisa é igual a si própria.

O desenvolvimento do projeto logicista de Frege depende do *Princípio de Hume*. Todavia o *Princípio de Hume* é incapaz de determinar se o número dois é idêntico a um conjunto arbitrário, ou a *Júlio César* (problema de Júlio César). Silva (2007, p. 131), comenta que a falta de um princípio de identidade para os números, implicou na questão: sendo os números objetos lógicos que existem apenas no contexto da Lógica, o que são exatamente esses objetos lógicos?

A solução para o problema de César foi a extensão de um conceito, que é o universo dos objetos que caem no referido conceito. Então, dado um conceito D a extensão de D (*ext D*) são todos objetos que caem sobre esse conceito. O número que pertence ao conceito D é a extensão do conceito equinumeroso com o conceito D . Um conceito será um número se existir uma relação biunívoca para o conceito D que seja equinumérico com D , por isso, Júlio César não é um número, por não ser uma extensão de um conceito numérico.

A extensão de um conceito é a classe (coleção) de todos os objetos a que o conceito se aplica. Por exemplo, a extensão de 'cadeira' é a classe de todas as cadeiras. Frege definiu os números naturais em termos de conceitos e as suas extensões: O número que pertence ao conceito P é a extensão do conceito equinumerosos com o conceito P . O número dois, por exemplo, é a extensão (ou coleção) que contém todos os conceitos que são satisfeitos exatamente por dois objetos. (SHAPIRO, 2016, p. 164).

A extensão de um conceito é a coleção de todos os objetos que detém o atributo relacionado ao conceito, essa coleção é uma classe, segundo Halmos “uma classe pode ser identificada com a condição, ou melhor, com a *extensão* de uma condição”. (HALMOS, 2001, p. 18). Contudo, essa lei conduz a contradição: *há uma classe definida por este conceito, que recai no conceito da sua definição apenas no caso de não reair*. Essa falha foi descoberta por Bertrand Russell.

Frege não definiu o que são objetos lógicos chegando ao ponto de não diferenciar atributo de conceito por meio de suas definições lógicas. Um problema que o projeto de Frege deparou foi: o número 6 é $(2+4)$ ou é o número do conceito ser igual a cinco? Como existem seis objetos que caem sobre esse conceito: *Ser igual a zero, ou ser igual a um, ou ser igual a dois, ou ser igual a três, ou ser igual a quatro, ou ser igual a cinco*. A dúvida é: seis seria um conceito lógico ou um atributo lógico, inicialmente essa diferença poderia ser irrelevante, pois dado um conceito K a extensão de K não é apenas uma coleção de objetos, e sim uma coleção com os mesmos atributos.

Tome o conceito: luas do planeta Marte, esse planeta tem duas luas Fobos e Deimos, assim há dois objetos que caem sobre esse conceito. Lembremos que dois é o atributo do conceito luas de Marte. Pelo princípio da extensão de um conceito, todos os objetos possuidores

do atributo dois fazem parte de uma coleção, a questão é: dois seria um atributo ou um conceito? Frege não percebeu que a separação entre essas duas definições não estava bem definida. Em 1893 ele apresenta a obra, *Grundgesetze der Arithmetik* (Leis Básicas da Aritmética), onde é desenvolvido rigorosamente a ideia de conceitos e suas extensões, apresentado em Shapiro (2016, p. 167), a Lei Básica V que enuncia: *as extensões de dois conceitos são idênticas se, e só se, esses conceitos se aplicam as mesmas coisas*. Russell descobriu uma sentença indecidível utilizando essa lei, ele comunicou esse fato em uma carta a Frege.

Querido Colega,

Há um ano e meio conheci suas Leis Básicas da Aritmética, mas só agora foi capaz de encontrar tempo para um estudo mais aprofundado, que tenho a intenção de dedicar aos seus inscitos. Estou em total acordo com todos os principais pontos levantados por você, principalmente no que concerne a sua rejeição a qualquer elemento psicológico na lógica e no valor que você emprega a uma noção conceitual para os fundamentos da matemática e da lógica formal, nos quais, por coincidência, encontrei dificuldade em um único ponto: você afirma que a função também poderia constituir o elemento indefinido. Isso costumava ser o que eu acreditava, mas agora essa visão me parece duvidosa, devido a seguinte contradição: Deixe "w" ser o fundamento de ser um fundamento que não pode ser fundamentado em si mesmo. Pode "w" ser fundamentado em si mesmo? Qualquer que seja a resposta, parece ser contraditória. Nós devemos, portanto, concluir que "w" não é um fundamento. Do mesmo modo, não há categoria (como um todo) daquelas categorias que, como todos, não são membros de si mesmas. Por isso eu concluo que, diante de algumas circunstâncias, um conjunto definível não forma um todo. (RUSSELL Apud COURY, 2015, p. 122 - 123).⁷

A sentença indecidível: “Sendo w uma classe e x um elemento que pertence a ela, tal que x não pertence a x, então w pertence a w é igual a w não pertencer a w”. A falha encontrada por Russell, demonstrou que a extensão de um conceito não poderia ser enunciada de forma tão arbitrária, sendo necessário um maior rigor para definir a extensão de um conceito.

As descobertas de Russell desiludiram Frege completamente, ele abandonou suas pesquisas, deixando seu trabalho inacabado. Seu projeto logicista apresentou uma nova estrutura lógica, pois essa permanecia imutável desde Aristóteles. Transformando operações lógicas em operações aritméticas, esse sistema lógico ficou conhecido por *aritmética da*

⁷ Dear Colleague,

I have known your Basic Laws of Arithmetic for a year and a half, but only now have been able to find the time for the thorough study I intend to devote to your writings. I found myself in full accord with you on all main points, especially in your rejection of any psychological element in logic and in the value you attach to a conceptual notation for the foundations of mathematics and of formal logic, which, incidentally, “I have encountered a difficulty only on one point. You assert (p.17) that a function could also constitute the indefinite element. This is what I used to believe, but this view now seems to me dubious because of the following contradiction: Let w be the predicate of being a predicate which cannot be predicated of itself. Can w be predicated of itself? From either answer follows its contradictory. We must therefore conclude that w is not a predicate. Likewise, there is no class (as a whole) of those classes which, as wholes, are not members of themselves. From this I conclude that under certain circumstances a definable set does not form a whole”.

lógica, sendo a base da computação eletrônica. Sua Conceitografia foi precursora da linguagem analítica, além de admitir uma linguagem mais rigorosa e formal para o seu projeto logicista.

Frege apresenta no parágrafo 45 de *Os Fundamentos da Aritmética*, a ideia de número.

Número não é abstraído de coisas do mesmo modo que são a cor, o peso ou a dureza, ou seja, não é no mesmo sentido em que estas o são, uma propriedade das coisas. Permanece ainda em aberto a questão de saber acerca do que é que se está a dizer alguma coisa quando se pronuncia uma asserção numérica. O número não é algo físico nem, tão-pouco, subjetivo; ele não consiste de tudo numa representação. O número não se forma através do acréscimo de uma coisa a coisas anteriores; e não é o fato de se atribuir uma nova denominação às coisas após cada acréscimo que vem modificar o que quer que seja a este respeito. As expressões '*pluralidade*', '*conjunto*' e '*multiplicidade*' são, dado o seu caráter indeterminado, inapropriado para servirem para a elucidação do que é número. (FREGE, 1992, p.74).

Frege passou do ideal geométrico para o ideal aritmético para fundamentar a Aritmética. Procurando construir e explicar a Aritmética pela Lógica, seu estudo rendeu a publicação de três obras: *Conceitografia* (1879), *Os Fundamentos da Aritmética* (1884) e *As Leis Básicas da Aritmética* (1893 e 1902). Em *Conceitografia*, Frege apresenta uma linguagem necessária para expressar e demonstrar as verdades científicas, mantendo assim o ideal lógico desde o início de seu projeto.

Os Fundamentos da Aritmética, apresenta o ideal da redutibilidade da Aritmética à Lógica. Nesta obra, Frege apresenta número como um objeto lógico construído através de noções puramente lógicas, como a extensão de conceito.

As Leis Básicas da Aritmética apresentam um sistema axiomático para a Aritmética. Russell identifica um paradoxo nesse sistema. O paradoxo compromete o sistema axiomático construído nas *Leis Básicas*. A lei V possibilitou construir a propriedade *classe que não pertence a si mesmo* e o objeto *classe das classes que não pertencem a si mesmo*, gerando uma contradição. Por exibir uma propriedade legítima a qual nenhum conjunto poderia ser associado. Essa falha desmoronou a edificação do projeto de Frege.

A falha no projeto de Frege estava presente desde o início, o Princípio de Hume não é de caráter lógico. Em Silva (2007, p.130), ao definir que o número 0 é o conceito de ser diferente de si próprio mostra a natureza não lógica desse princípio. Os outros entraves foram consequências posteriores dele.

4.2 Russell

Bertrand Arthur William Russell foi um logicista prosseguidor do projeto de Frege ao lado de seu amigo *Alfred North Whitehead*. Juntos eles escreveram *Principia Mathematica*, seus estudos tinham por intuito reduzir toda a Matemática à Lógica. O passo inicial foi continuar com o trabalho de Frege e suas pesquisas na Aritmética. A definição de número apresentada na Introdução à Filosofia Matemática, traz o seguinte:

Muitos filósofos, quando tentam definir número, estão na verdade empenhados em definir pluralidade, o que é uma coisa inteiramente diferente. Número é o que é característico dos números, como homem é o que é característico dos homens. Uma pluralidade não é um caso de número, mas de algum número particular. Um trio de homens, por exemplo, é um caso do número 3, e o número 3 é um caso de número; mas o trio não é um caso de número. Esse ponto pode parecer elementar e quase nem merece menção; no entanto, provou-se demasiado sutil para os filósofos, com poucas exceções. [...] Um número é algo que caracteriza certas coleções, a saber, aquelas que têm aquele número. (RUSSELL, 2007, p. 28).

Existem semelhanças entre a definição de número de Frege com a definição de Russell, mas a definição desse último é o princípio da extensão, pois ele está falando de caracterizar coleções, não necessariamente de objetos nas palavras de Russell.

Em vez de falar de uma ‘coleção’, falaremos em geral de uma ‘classe’ ou por vezes de um ‘conjunto’. Outras palavras usadas em matemática para a mesma coisa são ‘agregado’ e ‘múltiplo’. Teremos muito a dizer mais tarde sobre classes. [...] Uma classe ou coleção pode ser definida de duas maneiras, podemos enumerar seus membros, ou podemos mencionar uma propriedade definidora. (RUSSELL, 2007, p. 29).

Uma classe é definida por extensão ou é definida por intensão, sendo a definição intencional lógica, pois uma extensão pode ser reduzida à intensão, a recíproca não é verdadeira. Para Russell e Whitehead, a ideia de número como *uma classe de classes com os mesmos números de membros*, ou de forma mais precisa número caracteriza uma classe, intencionalmente a definimos de forma que seus membros se relacionem biunivocamente com a classe numérica.

As classes de Russell foram construídas a partir de adaptações das ideias de Frege. Ao definir classe, Russell teve o cuidado de evitar os caminhos que levaram ao paradoxo que ele obteve. A solução foi a Teoria dos Tipos, que define o indivíduo como um objeto que não é uma classe. Os indivíduos são do tipo 0, a classe de indivíduos é do tipo 1, as classes de classes do tipo 2 e assim prosseguindo. Nesse sentido o que afirmamos de um objeto não se estende à classe de classes desse objeto. A sentença: *a classe dos homens é um homem* não faz sentido,

pois o que é dito dos indivíduos não poderá ser dito de classes e vice e versa. Existe uma hierarquia de tipos e quando essa hierarquia é observada o Paradoxo de Russell desaparece. Sua teoria dos tipos evitava as definições *impredicativas*, que, segundo Abbagnano, “a definição do membro de uma classe que referencia à totalidade dos membros da classe e que, portanto, contém um círculo vicioso” (ABBAGNANO, 2007, p. 547). Frege aceitava esse tipo de definição, pois classe de classes que não contém a si mesma é uma definição impredicativa.

Russell definiu a ideia de número, mas ele não explicou o tipo de número, pois o número associado a uma classe são números cardinais, a cardinalidade está relacionada a contagem então é necessário determinar os números naturais sem valer de cardinalidade, assim ele utiliza a expressão números indutivos.

Usaremos a expressão ‘números indutivos’ para designar o mesmo conjunto de que falamos até agora como ‘números naturais’. A expressão ‘números indutivos’ é preferível por servir de lembrete de que a definição desse conjunto de números é obtida a partir da indução matemática. (RUSSELL, 2007, p. 46).

Para Shapiro (2016, p. 171), Russell definiu os números naturais da seguinte forma: **zero** é a classe de todas as classes com tantos membros quanto a classe de objetos que não são idênticos a si mesmo. **Um** é a classe de todas as classes com tantos membros quanto a classe das classes nulas. **Dois** é a classe de todas as classes com tantos membros quanto as classes cujos membros são *zero* e *um*. **Três** é a classe de todas as classes com tantos membros quanto as classes cujos membros são *zero*, *um* e *dois* e assim por diante. Temos a mesma equinumerosidade sem valer do conceito de número, por isso define-se **C** como a *classe de todas as classes que são equinumerosas com C*.

Cada número natural passa a ser definido como uma classe de classes de indivíduos. O problema é que a série dos números naturais é infinita, ela somente pode ser definida se houver uma quantidade infinita de objetos no universo. Russell resolve esse impasse introduzindo o chamado *Axioma da Infinitude*, segundo o qual: existe um número infinito de objetos no universo, ou seja, sempre que tivermos um número δ (delta) de objetos encontraremos outro objeto e possuiremos uma quantidade $(\delta + 1)$ de objetos. Silva menciona que “um axioma lógico não deve ter nada a ver com quantos objetos existem, uma vez que é válido, independentemente da quantidade de objetos” (SILVA, 2007, p. 136). Sendo necessário infinitos objetos para definir a série dos naturais, a conceituação de Russell e Whitehead não era lógica, mas empírica.

O processo de indução matemática consiste em uma sucessão de termos numéricos, como o 1 ser sucessor do 0; o 2 sucessor do 1 e assim por diante. O processo de sucessão segue uma ordem, caracterizando os números indutivos como uma série ordenada. Russell determinou os números indutivos através de finitos passos de sucessão, entretanto, os números naturais são infinitos, sendo preciso garantir a existência de infinitos números ordinais ou indutivos.

O problema que Russell e Whitehead depararam se deve a questões sobre o infinito real, diferente de Frege que utilizou definições impredicativas capazes de garantir a infinidade de objetos lógicos. Como classe é o resultado da extensão de um conceito não há garantia da existência de um conceito satisfeito por algum atributo infinito. Esse impasse foi resolvido através do Axioma da Infinitude, o qual afirma que há infinitos indivíduos. Esse axioma possibilitou à Russell determinar que os números ordinais são infinitos, conseqüentemente, como os números indutivos têm suas propriedades satisfeitas pelo zero e seus sucessores, trouxe garantias de que existem infinitos números naturais, conforme podemos consultar nas palavras de Russell.

Por nossa definição geral de números cardinais, o número de termos na classe dos números indutivos deve ser “todas as classes similares à classe dos números indutivos”, isto é, esse conjunto de classes é o número dos números indutivos segundo nossas definições. É fácil ver agora que esse número (cardinal) não é um dos números indutivos. Se n for um número indutivo, o número de números de 0 a n (ambos incluídos) será $n + 1$; portanto, o número total de números indutivos será maior do que n , não importando qual dos números indutivos numa série em ordem de magnitude, essa série não terá nenhum último termo; mas se n for um número indutivo, toda série cujo campo tiver n termos terá um último termo. (RUSSELL, 2007, p. 102).

O Axioma da Infinitude é hipotético, pelas palavras de Russell “[...] existem coleções infinitas no mundo [...] Embora haja aparentemente várias maneiras pelas quais poderíamos esperar provar esse Axioma, há razões para temer que sejam todas falaciosas” (RUSSELL, 2007, p. 101). As questões relativas ao infinito trouxeram inúmeros problemas para o projeto logicista de Russell. A solução foi aceitar novos axiomas hipotéticos, como o Axioma da Redutibilidade, possibilitando ignorar a Teoria dos Tipos estabelecida no início de seu projeto, os axiomas hipotéticos eram hipóteses empíricas. Os entraves no desenrolar do projeto de Russell limitou o prosseguimento desse projeto. O interesse por questões filosóficas, linguísticas e o contato com os estudos de Peano levaram Russell ao abandono de seu projeto logicista, como Frege havia feito antes. Mas diferente de Frege, Russell não acreditava em objetos lógicos, para ele a lógica é uma teoria das formas lógicas e não de objetos lógicos.

Podemos dizer então que os símbolos para classes são meras conveniências, não representando objetos chamados 'classes', e que as classes são de fato, como as descrições, ficções lógicas, ou (como dizemos) 'símbolos incompletos'. (RUSSELL 2007, p. 216).

Russell tentou concretizar a utopia de Frege, com ideias diferentes. Uma das primeiras ações foi não aceitar definições impredicativas elaborando a Teoria dos Tipos, com a intenção de abolir paradoxos. Essas ações não foram efetivas ao lidar com o infinito real, ele teve que admitir hipótese empíricas como axiomas lógicos. O projeto logicista de Russell não foi tão bem-sucedido como de Frege, não lhe dando a mesma influência na lógica matemática em comparação aos estudos fregeano. Aparentemente ele foi um dos primeiros matemáticos a notar que essas inconsistências lógicas aparecem nas estruturas matemáticas.

Contudo, foi o matemático italiano Giuseppe Peano que, de forma independente, talvez tenha melhor estruturado as ideias desenvolvidas por Frege e Russell. Ele apresentou um sistema axiomático reconhecidamente estruturado e eficiente para evidenciar formalmente a ideia de número.

4.3 Dedekind-Peano

No ano 1889, o matemático italiano Giuseppe Peano publicou o livro *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*, no qual ele resume as características estruturais dos números naturais em uma lista de axiomas lógicos e simbólicos. Peano admite ter copiado Dedekind, por isso esses axiomas são denominados de Axiomas de Dedekind-Peano. Também vemos similaridades dele com Frege, mas ambos chegaram a mesma conclusão de forma independente.

Richard Dedekind elaborou definições mais rigorosas para os números reais, crente que a Aritmética se fundamenta nas *leis do pensamento*, exposto na sua obra *Was sind und was sollen die Zahlen? (O que são e o que significam os números?)*, publicada em 1888, com a intenção de encontrar um fundamento último da Aritmética em sua capacidade de relacionar objetos. Ao postular que a Aritmética se fundamenta em leis do pensamento, ele a coloca sob uma perspectiva lógica, similar ao seu contemporâneo Frege. Dedekind era opositor ao empirismo nas proposições aritméticas para ele o termo *axioma* é sinônimo de hipótese.

Se considerando um sistema N (de números naturais) simplesmente infinito, ordenados por uma aplicação φ (função), faz-se totalmente abstração da constituição particular dos elementos, que apenas retém o que os diferencia e que apenas se prende às relações que estabelece entre as aplicações φ que define a ordem, vamos nomear

estes elementos números naturais ou números ordinais ou simplesmente números, e o elemento fundamental 1 é chamado o número fundamental da sequência de N números. Dada esta liberação de elementos de outros conteúdos (abstração), estamos autorizados a dizer que os números são uma livre criação do espírito humano. (DEDEKIND, 1901, p. 33).

Na perspectiva de Dedekind, os números não são objetos e nem são nomes de objetos, eles tratam de relações dentro de uma série de um conjunto. Todas as operações com os números são definidas obedecendo as relações estabelecidas na série, no sistema, no conjunto. Deste modo medir significa comparar com uma estrutura matemática. Ou seja, comparar um campo de objetos com uma estrutura matemática. Neste sentido, evidenciamos no pensamento de Dedekind, uma perspectiva relacional-estruturalista. Sua visão se baseia em axiomas aritméticos que são regras construtivas.

A visão de Dedekind se consolidou com o trabalho de Peano, que estabeleceu um sistema axiomático para introduzir a ideia de número, pois os axiomas de Peano são regras construtivas. Para Russell foi Peano quem reduziu a matemática pura tradicional à Teoria dos números naturais.

Tendo reduzido toda a matemática pura e tradicional à teoria dos números naturais, o passo seguinte em análise lógica foi reduzir essa teoria ela própria ao menor conjunto de premissas e termos indefinidos de que era possível derivá-la. Esse trabalho foi levado a cabo por Peano. Ele mostrou que toda a teoria dos números naturais podia ser derivada de três ideias primitivas e cinco proposições primitivas (axiomas) além daquelas da lógica pura. Essas três ideias e cinco proposições tornaram-se dessa maneira, por assim dizer, refém de toda matemática pura tradicional. Se elas pudessem ser definidas e provadas em termos de outras, toda a matemática pura também poderia sê-lo. Seu 'peso' lógico, se podemos usar esse termo, é igual ao de toda a série de ciências que foram deduzidas da teoria dos números naturais; a verdade dessa série toda é assegurada se a verdade das cinco proposições primitivas estiver garantida, contando, é claro, que não haja nada errôneo no aparato puramente lógico que também está aí envolvido. O trabalho de análise matemática é extraordinariamente facilitado por esse trabalho de Peano. (RUSSELL, 2007, p. 21).

Para iniciar uma teoria é necessário aceitar alguns termos sem os definir, está é a forma de produzir ciência e não apenas ciência matemática. De fato, pois para se definir um termo é necessário fazer referência a outro termo anteriormente definido, este por sua vez fará referência a outro anterior, e assim por diante. Um fator que nos levaria a um processo de regressão infinita o que impediria iniciar qualquer teoria. Em matemática os objetos introduzidos sem definição são ditos *termos primitivos* ou *ideias primitivas*. De maneira análoga, para iniciar uma teoria é necessário aceitar algumas afirmações sem prová-las, estas afirmações são os *axiomas*.

Morgado (2015, p. 3), apresenta que Peano construiu seu sistema de axiomas tomando três termos primitivos, que são: *um*, *número natural* e *sucessor* e cinco proposições primitivas, ou *axiomas*:

i) Um é um número natural.

ii) Se n é um número natural, então o sucessor de n também é um número natural.

iii) Um não é sucessor de nenhum número natural.

iv) Se há dois números naturais n e m com o mesmo sucessor, então n e m são o mesmo número natural.

v) Se um pertence a um conjunto, e dado um número natural qualquer, o sucessor desse número também pertence a esse conjunto, então todos os números naturais pertencem a esse conjunto.

Ao estipular que número é uma ideia primitiva, Peano está afirmando que não há uma explicação para número, portanto, não podemos dizer o que é número. Para Russell, os estudos de Peano, trouxeram enormes avanços para a Aritmética, porém em dois aspectos parece ter falhado:

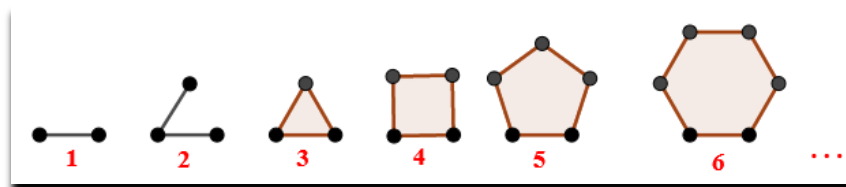
De dois pontos de vista, porém, ele é incapaz de fornecer uma base adequada para a aritmética. Em primeiro lugar, não nos capacita a saber se há algum conjunto de termos que verifique os axiomas de Peano; não há sequer a mais leve sugestão de alguma maneira de se descobrir se conjuntos desse tipo existem. Em segundo lugar, como já foi observado, queremos que nossos números sejam tais que possam ser usados para contar objetos comuns, e isso requer que nossos números possuam um significado definido, não que meramente possuam certas propriedades formais. Esse significado é definido pela teoria lógica da aritmética. (RUSSELL, 2007, p. 27).

Os axiomas de Dedekind-Peano não dizem respeito a equinumerosidade. Para Britto (2013, p. 26), esses axiomas organizam os números naturais como uma sequência linear simples, de forma que temos, como corolário do teorema geral, um teorema de recursão para os números naturais.

A axiomatização padrão dos números naturais foi elaborada por Peano. Como esse sistema axiomático sobreviveu aos teoremas da incompletude de Gödel? Os teoremas da incompletude garantem que é impossível desenvolver toda a Aritmética em um sistema simultaneamente completo e consistente. Estes teoremas são abordados na seção 4.5 deste texto. Britto (2013, p. 28), cita que Dedekind-Peano axiomatizou partes consideráveis da Aritmética, que antes dos resultados de Gödel havia uma forte crença que eles eram a axiomatização de toda a Aritmética. Peano conceitua o conjunto dos números naturais, mas ele não conceitua o que é um número natural. Os postulados de Peano não caracterizam apenas os números naturais,

essa axiomática satisfaz qualquer sequência biunívoca com os naturais. Um exemplo tirado de Silva (2005, p. 12), a sequência apresentada na Figura 16, em que um segmento corresponde a 1, dois segmentos a 2, três segmentos a 3, assim prossegue.

Figura 16. Exemplo de sequência ordenada.



Fonte: Feita pelo Autor.

Uma sequência construída pelos axiomas de Peano é uma sequência indutiva ou recursiva. Esta é satisfeita por um termo mínimo, mas não tem um termo máximo. A desigualdade de Bernoulli⁸, também utilizada na Matemática Financeira para provar que o regime de juros compostos cresce mais rápido do que o regime de juros simples é um exemplo de sequência recursiva, cujo regimes de juros não trabalham com valores discretos. O logicismo e o formalismo utilizam sequências indutivas em seus conceitos, pesquisadores classificaram Peano como logicista, nas palavras de Kennedy,

Devido ao fato de Bertrand Russell ter adotado grande parte do Simbolismo Lógico de Peano, e por Russell sempre ter uma alta consideração pelo grande matemático italiano, e porque Russell manteve fortemente a tese logicista, muitos matemáticos falantes da Língua Inglesa foram levados a classificar Peano como um logicista, ou pelo menos, um precursor da Escola Logicista. Aqui foi feita uma tentativa de negar isso, mostrando que o interesse principal de Peano estava na axiomática, e que ele nunca usou a lógica matemática desenvolvida por ele mesmo para reduzir os conceitos matemáticos a conceitos lógicos, e que, ao invés disso, ele negou a validade de tal redução. (KENNEDY, 2002, p. 6)⁹.

Peano é creditado como logicista, diferente de Frege, Russell e de Dedekind. Seus estudos comungam em paralelo com Mill, pois os números naturais é uma sequência enumerativa, com caráter construtivo e embasamentos indutivos. Seu assistente Pessoal Ugo Cassina cita o seguinte sobre Peano.

⁸ A desigualdade de Bernoulli é a expressão: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, onde $x > -1$ é um número real e n é natural.

⁹ Because Bertrand Russell adopted much of the logical symbolism of Peano, because Russell always had a high regard for the great Italian mathematician, and because Russell held the logicist thesis so strongly, many English-speaking mathematicians have been led to classify Peano as a logicist, or at least as a forerunner of the logicist school. An attempt is made here to deny this by showing that Peano's primary interest was in axiomatics, that he never used the mathematical logic developed by him for the reduction of mathematical concepts to logical concepts, and that, instead, he denied the validity of such a reduction.

Peano nunca mergulhou numa tese logicista de redução da Matemática à Lógica. Seja na Matemática ou na Lógica, Peano nunca trabalhou com puro simbolismo; ou seja, ele sempre exigiu que os símbolos primitivos introduzidos representassem ideias intuitivas para serem explicadas com a linguagem ordinária (CASSINA, 1933, p. 334).

A ideia de número cardinal, na visão de Dedekind, é descrita com axiomas, as ideias que temos sobre axiomas vem de Euclides em que axioma é sinônimo de descrição. Porém, para Dedekind, axiomas são sinônimos de construção. Esse ponto de vista é compartilhado por Peano, seus axiomas descrevem a construção indutiva do conjunto dos números naturais, não somente isso, pois seus axiomas descrevem qualquer série recursiva. Os axiomas de Dedekind-Peano não explicam a ideia de número, mas dão as regras de construção para classe dos números naturais.

As duas seções seguintes, que finalizam este capítulo, não trazem novas compreensões sobre a ideia de número, mas são representativas tanto para compreender o desfecho histórico deste rico período da matemática quanto para clarear a influência eufórica que o formalismo proporcionou aos matemáticos da época, expressa no vigoroso empenho de David Hilbert em implementar uma visão grandiosa: construir uma estrutura matemática livre de dúvidas e totalmente consistente. Um sonho monumental que o matemático Kurt Gödel, anos depois, revelou ser inatingível.

4.4 Hilbert

Boyer (2012, p. 409), comenta a relevância do matemático alemão David Hilbert, seu nome se destaca em várias áreas da Matemática pura e aplicada. Hilbert observou que a axiomatização da Geometria, proposta por Euclides, não era completa. Ele notou que Euclides lançava mão de verdades intuitivas que não estavam definidas em seus axiomas e que os métodos de derivação eram métodos de construções empíricas subjetivas e não métodos lógicos de demonstração. O sistema axiomático-dedutivo de Euclides não abria mão do concurso da intuição, mas, precisamente a percepção visual no processo dedutivo, por isso o método euclidiano não é formal. A formalização consiste em abstração dos sentidos, assim a axiomática de Euclides não era em rigor, um sistema lógico e muito menos lógico formal. Haja visto que não se constituía como um sistema simbólico de uma linguagem explicitamente dada e manipulada segundo regras explicitamente definidas.

Barker (1969, p. 126), menciona que Hilbert emprega o termo *existência* como sinônimo de *não-contraditório*. Os matemáticos têm a completa liberdade de elaborar uma teoria Matemática, bastando provar a consistência (ausência de contradição) dessa teoria Matemática, para torná-la lícita em toda a sua fundamentação. Pelo fato das linguagens formais e os sistemas dedutivos serem formulados com clareza e rigor, a pretensão de Hilbert era construir um sistema simbólico sintético¹⁰, regido por alguns axiomas. Essa área de estudo matemático ficou conhecida como formalismo. Os esforços de Hilbert ficaram conhecidos como *metamatemática*, o estudo da própria matemática usando métodos matemáticos, ou teoria das demonstrações. Seu interesse pela metamatemática se deve às geometrias não euclidianas ¹¹e pelas tentativas de definir estruturas consistentes que as tornassem verdadeiras.

Hilbert pretendia formalizar toda a Geometria e colocá-la sobre bases puramente formais. A eliminação da intuição nos procedimentos dedutivos abria a possibilidade para a constituição de sistemas que demonstravam mais do que se queria saber, nos sistemas consistentes tudo poderia ser demonstrado.

Em 1921 ele inicia o Programa de Hilbert começando pela Aritmética. Ele pretendia reduzir a Matemática a um número finito de axiomas consistentes, assim qualquer proposição matemática poderia ser provada dentro desse sistema. Esse ideal é chamado de *completude*. Para Silva “*Completude* é a propriedade que garante que qualquer asserção expressa na linguagem do sistema, ela, ou sua negação, são demonstráveis, (mas não ambas)” (SILVA, 2007, p. 188). Na visão de Hilbert na matemática não existe *ignorabimus* (não sabemos), seu intuito era conhecer e demonstrar a veracidade, ou a negação das sentenças matemáticas.

Shapiro (2016, p. 229), explica que a pretensão do programa de Hilbert era fornecer demonstrações finitárias da consistência das teorias matemáticas formalizadas por completo. Assim, qualquer problema matemático insolúvel era devido à falta de uma demonstração para essa questão, o formalismo e a metamatemática dariam fim aos problemas insolúveis. Podemos resumir o trabalho de Hilbert nos seguintes aspectos, elaborar um sistema simbólico e regras para relacioná-los com um mínimo possível de proposições. Com a simbologia e os axiomas,

¹⁰ Relativo a ou que envolve síntese. Originário ou resultante de uma síntese.

¹¹ A geometria não euclidiana é uma geometria baseada num sistema axiomático distinto da geometria euclidiana. Modificando o axioma das paralelas, que postula que por um ponto exterior a uma reta passa exatamente uma reta paralela à inicial, obtêm-se as geometrias elíptica. Na geometria elíptica não há nenhuma reta paralela à inicial, enquanto que na geometria hiperbólica existe uma infinidade de retas paralelas à inicial que passam no mesmo ponto.

os matemáticos compreenderiam todas as sentenças matemáticas e a formalizaria, nas palavras de Hilbert.

Existe, todavia, um caminho completamente satisfatório para escapar aos paradoxos sem trair a nossa Ciência. As considerações que nos leva à descoberta desse caminho e os objetivos que pretendemos alcançar são os seguintes: 1) Investigaremos aquelas maneiras de formação de conceitos e aqueles modos de raciocínio que se revelam frutíferos. E vamos acarinhar, sustentar e torna-los úteis. Sempre que exista a mais pequena promessa de sucesso. *Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós.* 2) É necessário restabelecer, sem exceção, a mesma segurança de raciocínio que se encontra na teoria elementar dos números, a qual ninguém questiona e na qual somente por desleixo nosso podem aparecer contradições. (HILBERT apud SHAPIRO, 2016, p. 229).

Silva (2007, p. 198), menciona que para Hilbert a aritmética formal é uma sequência do tipo ω (ômega). Uma sequência- ω é qualquer sequência linear discreta de pontos¹², com primeiro, mas sem último termo, onde cada ponto tem um sucessor único imediato. Cada sucessor dessa sequência é injetivo, podemos alcançar qualquer termo da sequência partindo do primeiro através de um número finito de passos. Os axiomas da aritmética formal são caracterizados em uma linguagem formal.

O formalismo de Hilbert foi um movimento que pretendia através de uma linguagem formal e logicamente estruturada resolver todos os problemas matemáticos e dar demonstrações consistentes. Na visão de Hilbert os paradoxos eram desleixos na elaboração de conceitos, a frase gravada em sua lapide foi: *Wir Müssen Wissen, Wir Werden Wissen*, (Nós devemos saber, Nós saberemos) explica a visão formalista que ele tinha para a Matemática. A utopia de Hilbert foi destruída em 1931 por Gödel, mas na época ele não percebeu isso.

4.5 Gödel

Kurt Friedrich Gödel, lógico-matemático austríaco demonstrou por meio de dois teoremas, a existência de limitações para o conhecimento matemático. Essas demonstrações impactaram no formalismo de Hilbert que acreditava ser possível compreender toda a Matemática utilizando o formalismo.

O primeiro Teorema da incompletude enuncia que: ***Toda axiomática consistente da aritmética é incompleta.*** Para Costa, esse teorema garante “que existem proposições aritméticas tais que nem elas, nem suas negações, são demonstráveis na axiomática da Aritmética que se

¹² Dizer **pontos** é simplesmente uma forma de dizer **quaisquer coisas**. Poderíamos dizer também **vazios** ou **posições**.

adotar. Essas proposições são chamadas de indecidíveis na axiomática considerada” (COSTA, 2008, p. 56).

Uma sentença indecidível apresentada em Morais Filho (2007, p. 40). Um prisioneiro condenado à morte recebeu a seguinte proposta: Diante de um grupo de sábios ele irá dizer uma afirmação, se ela for *verdadeira* ele será decapitado, caso ela seja *falsa*, ele será queimado. O prisioneiro diz: “Eu serei queimado”. Como ele foi executado? Esse prisioneiro não foi executado, pois se sua afirmação for verdadeira, ele será decapitado. Porém o decapitando, sua afirmativa é falsa, então ele deve ser queimado. Mas se o queimar, ele terá dito a verdade então ele deve ser decapitado e assim prossegue.

O segundo Teorema da incompletude enuncia que: *A consistência de qualquer axiomática consistente da aritmética não pode ser demonstrada nessa axiomática*. Para Costa, esse teorema garante “que a prova de ausência de contradição de uma axiomática da aritmética não pode ser realizada apenas com os recursos dessa axiomática” (COSTA, 2008, p. 57). É impossível formalizar uma prova de consistência de qualquer axiomática da aritmética, tendo por base somente essa axiomática.

Os teoremas da incompletude enunciam que nada por si só, se explica, há sempre mais verdades a serem provadas. Esses teoremas se aplicam a qualquer objeto sujeito às leis da Lógica. Os teoremas da incompletude dão provas de que não podemos derivar a Aritmética da Lógica, nas palavras de Nagel.

O artigo de Gödel mostrou que tal pressuposição (axiomatização de toda matemática) é insustentável. Ele colocou os matemáticos diante da espantosa melancólica conclusão de que o método axiomático tem certas limitações inerentes que eliminam a possibilidade de que mesmo a aritmética comum dos inteiros possa ser plenamente axiomatizada. Mais ainda ele provou que é impossível estabelecer a consistência lógica interna de uma amplíssima classe de sistemas dedutivos, a menos que adotemos princípios de raciocínio tão complexo que sua consistência interna fica tão aberta a dúvidas quanto a dos próprios sistemas. À luz destas conclusões, é inatingível qualquer sistematização final de numerosas áreas importantes da matemática e é impossível dar garantia absolutamente impecável de que muitos ramos significativos do pensamento matemático estejam inteiramente livres de contradição interna. (NAGEL, 1973, p. 15-16).

Os teoremas da incompletude possuem algumas particularidades como as apresentadas na palestra do professor Walter Carnielle, “a ideia de demonstrar que algo, não pode ser demonstrado é fascinante, e em raras ocasiões os cientistas têm oportunidade de encontrar fenômenos matemáticos desse tipo”. (CARNIELLE, 2018, 2:25).

Em um congresso de matemáticos no dia 7 de setembro de 1930, na cidade de Königsberg, foram apresentados os teoremas da incompletude, nesses teoremas estão anunciados que ‘pode-se de fato, exibir sentenças verdadeiras, mas que são indemonstráveis no sistema formal da matemática’. Dizem que dos matemáticos presentes na palestra apenas Johann Von Neumann compreendeu o impacto e ele teria dito “*os matemáticos acabam de ser expulso do paraíso...*”. (CARNIELLE, 2018).

Os teoremas da incompletude, demonstram que os paradoxos conhecidos desde a Grécia Antiga estão presentes nas estruturas matemáticas e pior não é desleixo na definição, mas um conceito presente em definições embasadas na Lógica. O problema da parada de Turing, o axioma da escolha, a hipótese do continuum e o Princípio da Incerteza de Heisenberg são sentenças indecidíveis.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A ideia vigente de número se apoia majoritariamente em um contexto aritmético onde o termo número não é definido, mas está sujeito às regras e afirmações que os caracterizam, neste sentido eles admitem uma identidade própria. Por esse ponto de vista, 26071925 é um número natural onde podemos afirmar que: $26071925 = 25 \times 1042877$. Dizemos que este número possui algumas propriedades aritméticas, como ser múltiplo de 25. Por outro lado, quando o mesmo número é denotado na forma 26.07.1925, ele perde a conotação aritmética, e passa a admitir outro significado atribuído à notação que remete à uma data específica do calendário gregoriano, deixando de ser compreendido como um número natural com propriedades aritméticas. Esta é a data de falecimento de Frege, uma sequência numérica de natureza informativa. Portanto, os números também abrangem um importante contexto informativo. É o caso também da sequência numérica do seu CPF à qual é atribuída a ideia de identificação e registro. De fato, o cadastro de pessoa física utiliza de um número com 11 dígitos para identificar cada cidadão brasileiro com uma série de informações. Assim, estes números são vistos como códigos aos quais são atribuídos significados diversos.

Em termos matemáticos, nem todo conjunto numérico pode ser ordenado, é o caso do conjunto dos números complexos, conforme atesta Lima (2012, p. 197). Esse trabalho se ateu aos números naturais. Dado qualquer número natural, ou combinações de números naturais a eles podem ser atribuídas uma ordenação. O logicismo e o formalismo não abriram mão da propriedade de ordem e os axiomas de Peano constroem uma sequência ordenada de números naturais.

Retomando a questão do capítulo 1 “Basta possuir um atributo numérico para ser tido como número?” a resposta nos parece ser claramente negativa, uma vez que o alfabeto não é um conjunto numérico apesar de ter o atributo de ser ordenado.

A questão é que os números podem admitir alguns atributos como cardinalidade, ordenação e medida, mas estes não determinam o que é um número. Uma tabela de software de planilhas não tendo “limites de colunas”, como o Excel, em que as colunas são ordenadas em uma sequência da forma: $\{A, B, C, D, \dots, Z, AA, AB, \dots, ZY, ZZ, AAA, \dots\}$, podemos notar que essa sequência pode ser utilizada para enumerá-la, pois ela é ordenada, e pelos axiomas de Peano podemos relacionar essa sequência com os números naturais.

Os números nem sempre representam algo, o ensino aprendizagem da Aritmética desenvolve o cálculo mental. A BNCC (Base Nacional Comum Curricular) estabelece que “a

escola precisa preparar o estudante para entender como a Matemática é aplicada em diferentes situações. Na aula, o contexto pode ser puramente matemático, ou seja, não é necessário que a questão apresentada seja referente a um fato cotidiano” (NOVA ESCOLA, 2020, nº 32). A Matemática lida com os números em âmbito geral, pois qualquer outra ciência explica o contexto que os números estão inseridos. A expressão aritmética $4+5$, não enuncia necessariamente quantidades, a solução 9 , não precisa representar necessariamente a quantidade de um objeto. Se essa soma fosse aplicada a qualquer ciência, como, soma de dois escalares, esses seriam números de algo, exemplo: 4 m/s mais 5 m/s , resulta em 9 m/s . As operações aritméticas têm por finalidade exercitar nossa cognição, as aplicações são consequências desses estudos. “No que respeita a matemática, tudo o que importa é que as regras sejam seguidas. O significado é meramente heurístico, não é mais do que uma ajuda psicológica. A matemática não precisa, de todo, de ter conteúdo algum” (SHAPIRO, 2016, p. 211).

Agora voltamos a refletir sobre a segunda questão do capítulo 1: “Compreenderemos os números ou definiremos número abrindo mão desses atributos numéricos?” A Aritmética trabalha com os números apenas manipulando os signos numéricos, mas a noção de ordem está sempre presente em processos aritméticos, é o caso da operação de subtração onde a ordem dos fatores pode alterar o resultado. Somos treinados a operar com símbolos, mas um conjunto de símbolos e de relações entre eles, origina uma linguagem própria dentro desse sistema simbólico. A aprendizagem dessa linguagem ocorre por meio de exercícios, descritos por essa linguagem. Podemos representar qualquer número como combinações entre algarismos. Combinações essas que são partes da linguagem. A ideia de número está sujeita ao contexto aritmético, pois a Aritmética é a própria simbologia. “A linguagem da matemática pode ter algum tipo de significado, mas, então, este significado é irrelevante para à prática da matemática. No que respeita ao matemático praticante, os símbolos da linguagem matemática podem também não ter sentido”. (SHAPIRO, 2016, p. 209).

Euclides inicia o Livro I, com as seguintes definições: “**Ponto** é aquilo de que nada é parte; E **linha** é comprimento sem largura; **Superfície** é aquilo que tem somente comprimento e largura” (EUCLIDES, 2009, p. 97). Empiricamente ponto é uma superfície mínima, linha tem largura, isto porque qualquer construção geométrica derivada dessas definições é possível somente pelo intelecto. Concretamente não existem pontos, linhas e nem superfícies. A Geometria é abstrata, na realidade física representamos esses objetos mentais, como reflexos imperfeitos das formas abstratas. A superfície de um lago possui largura, comprimento e altura,

pois existe ondulações na água, por isso a superfície de um lago não é perfeitamente plana. As formas geométricas, como descritas por Euclides, apenas existem como abstração, na realidade física elas são imperfeitas.

A aritmética lida com os números discretos, relacionando dois desses números por uma operação de adição, tipo $6+3$ resulta em 9. Podemos utilizar os números figurados dos pitagóricos, uma forma concreta de representar valores conforme a Figura 17.

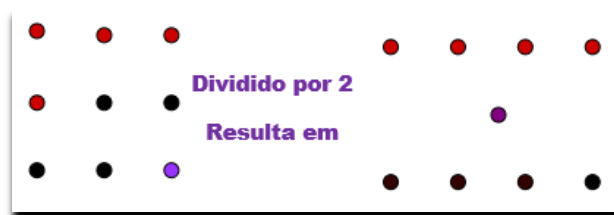
Figura 17. Soma de números figurados



Fonte: Próprio autor.

Uma operação aritmética executada por meios abstratos é igual uma operação aritmética executada na realidade física. Talvez a dedução de que qualquer construção aritmética abstrata se manifesta perfeitamente na realidade física seja verdadeira em todos os casos. Um número que é dividido por 2 e deixa resto 1 é um número ímpar. Rigorosamente, todo número ímpar m é da forma $m = 2n + 1$, para algum número inteiro n . Representando da forma $m = n + 1 + n$, observando o segundo membro da expressão veremos que um número ímpar possuindo n termos à esquerda, n termos à direita e um termo mediano. Assim $9 = 2 \cdot 4 + 1$, representado da forma $9 = 4 + 1 + 4$. Utilizando quantidades concretas temos o mesmo resultado, conforme a Figura 18. As propriedades aritméticas são iguais na realidade abstrata e na realidade física. Esse é um diferencial entre a Geometria e a Aritmética, já que uma não discorre sobre objetos da realidade física mas a outra descreve de forma abstrata conceitos físicos.

Figura 18. Divisão de um número ímpar por 2.



Fonte: Próprio autor.

Um problema adaptado de Tahan (1999). Três amigos almoçaram num restaurante, a conta deu R\$ 30,00. Cada um deu R\$ 10,00. O garçom levou o dinheiro até o caixa e o dono do restaurante cobrou R\$ 25,00. Devolvendo 5 moedas de R\$ 1,00 ao garçom como troco. O garçom, embolsou R\$ 2,00 e deu R\$ 1,00 para cada um dos amigos. Como cada amigo pagou R\$ 9,00 os três juntos pagaram R\$ 27,00, o garçom pegou R\$ 2,00 para ele, temos R\$ $27,00+2,00 = R\$ 29,00$. Onde foi parar o outro R\$ 1,00?

Esta estória é usada como argumento da falha nas operações aritméticas. Não há falha na operação aritmética, mas sim uma indução proposital que visa induzir ao erro, deliberada por parte de quem elaborou o problema. De fato, quando o problema aponta: “Como cada amigo pagou R\$ 9,00 os três juntos pagaram R\$ 27,00”, está correto, contudo, o erro deliberado e proposital está em induzir o leitor a adicionar aos R\$ 27,00 o valor R\$ 2,00 que o garçom teria tomado para si. Note que estes R\$ 2,00 são parte integrante do gasto dos três amigos e já foram contabilizados nos R\$ 27,00 pagos. Logo, não há sentido algum em adicioná-lo (novamente) ao gasto total que foi R\$ 27,00, sendo R\$ 25,00 cobrado pelo dono do restaurante e R\$ 2,00 tomados pelo garçom.

Em Barker encontramos:

[...] a teoria dos números é ampla e continuamente empregada, tanto na ciência como na vida comum. Parece plausível, portanto, admitir que exista alguma importante interpretação capaz de tornar essa teoria verdadeira. O modo mais direto, embora não seja o único, de explicar por que a teoria dos números encontra aplicações uteis na ciência e na vida prática seria mostrar que a teoria admite alguma interpretação particularmente importante, interpretação que transforma as suas leis em verdades de grande valor quando utilizados como premissas de raciocínios científicos ou de raciocínios comuns. (BARKER, 1969, p. 92).

A noção de ponto na visão de Euclides existe como ideal na mente. Através de algumas definições primitivas são construídas ideias mais complexas. A veracidade dessas ideias deverá ser provada utilizando apenas o raciocínio coerente. O apreço por descrições racionais na investigação matemática é o início da prática demonstrativa. A Filosofia se caracteriza pela investigação racional da realidade. A matemática demonstrativa nasceu da prática filosófica, essa é a relação entre o desenvolvimento da matemática demonstrativa com o pensamento filosófico.

A construção e a compreensão epistemológica¹³ é um processo pessoal. A mente humana assimila informações de diferentes formas em diferentes contextos por diferentes

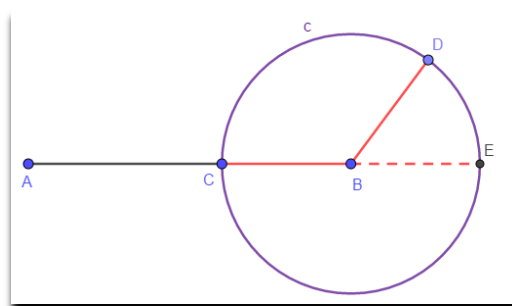
¹³ Referente a epistemologia, área da filosofia que estuda a fonte do conhecimento.

peças. O conhecimento matemático grego é construído na mente conferindo-lhe caráter pessoal. A transferência desse conhecimento se dá pela utilização de uma linguagem rigorosa e Lógica. Aristóteles (2016, p. 117), cita que seu objeto de estudo sobre demonstração pertence a ciência demonstrativa, Abbagnano enuncia que “Aristóteles define, sem dar nome a disciplina que se prepara para investigar como ciência da demonstração e do saber demonstrativo” (ABBAGNANO, 2007, p. 624). A lógica aristotélica é definida como a ciência do saber demonstrativo. A matemática é uma ciência demonstrativa. A demonstração é a essência da matemática, o processo demonstrativo é compreendido e repassado através da linguagem lógica.

Os números surgiram como ferramentas quantitativas, para auxiliar o ser humano no domínio e na descrição da realidade física. A representação posicional numérica foi uma revolução motivada pelas relações humanas dentro das primeiras cidades construídas aproximadamente 6 000 anos atrás. Os números surgiram de forma empírica, também eram vistos como objetos místicos por esses povos. O conceito de primogênito é um conceito de ordem, advinda da ideia de entidade primordial da existência, os povos antigos viam os números além do processo quantitativo. Os gregos foram os primeiros a dar uma noção de número abrindo mão de noções quantitativas. O número é algum múltiplo da unidade representado por um segmento. Em Wagner (1993, p. 46), é apresentado o seguinte problema: construa dois segmentos de medidas $(a + b)$ e $(a - b)$, dados a e b .

Na Figura 19 é exposta a solução geométrica desse problema. Para construir esses segmentos é necessário que $a > b$. Tome segmento $AB = a$ e o segmento $BD = b$. Em B trace uma circunferência de raio BD , assim o segmento $AE = a + b$ e $AC = a - b$. Conforme o problema proposto.

Figura 19. Solução por construção geométrica.



Fonte: Próprio autor.

Essa construção geométrica justifica a relação de ordem apresentada por Valdir Vilmar: “Sejam m e n números naturais. Diz-se que m é menor ou igual a n se existir um número natural d tal que $n = m + d$ ” (SILVA, 2005, p. 26). Como $m \leq n$ então vale a relação $d = n - m$, para $0 \leq d$. Da Figura 19, tome $AE = n$ e $CE = m$, assim falta $AC = d$ ser adicionado ao diâmetro, para ter medida igual à do segmento AE . Descrições geométricas são lógicas, a partir do momento que associamos descrições aritméticas com as geométricas é estabelecida uma relação lógica que justifica a veracidade aritmética pela validade das construções geométricas.

Qual a relevância desse trabalho para os professores da educação básica? Nitidamente por mais contrastante que essas ideias apontem, todas estão corretas dentro de um contexto. Começamos a associar números a quantidades e depois aos símbolos. Os números são domínios da Aritmética, que determina as regras operatórias entre símbolos.

Existem várias definições para os objetos numéricos, essa abundância de definições faz com que uma única ideia seja insatisfatória. A ideia que temos de número é mais uma ideia heurística, do que uma ideia geral, nesse caso falaremos dos mesmos aspectos de cardinalidade, ordinalidade e medida, mas isso se deve a forma de como aprendemos os processos numéricos. Em Abbagnano encontramos uma definição que explica o conceito de número:

Construímos uma série de signos (sinais gráficos) passíveis de reprodução, que deve possuir as seguintes propriedades: *a*) a série tem um primeiro termo; *b*) a série possui uma regra de construção enunciável de modo finito tal que: *a*) está sempre determinado univocamente qual termo da série vem imediatamente à direita de um termo já assinalado; cada termo da série é diferente de todos os termos que o precedem à esquerda. (DINGLER apud ABBAGNANO, 2007, p. 720).

Assim podemos supor que: não existe um objeto chamado número. A validade de um sistema numérico depende da coerência de cada sistema fundamentado por axiomas. Abbagnano (2007, p. 720), encontramos que o conceito de número não está ligado a uma determinada interpretação. Mas é determinado por diferentes interpretações. A possibilidade de diferentes interpretações caracteriza a noção de número em qualquer sistema. A compreensão numérica está sujeita ao contexto interpretativo.

O conceito de número é um conceito psicológico como defendido por Leibniz, pois está sujeito a interpretação. Todas essas ideias trouxeram novos avanços intelectuais e tecnológicos. Nas palavras de Voltaire: “O estudo da metafísica consiste em procurar, num quarto escuro, um gato preto que não está lá”.

Embora não haja uma noção única e unânime sobre o que é número, a compreensão da ideia de número está relacionado aos diversos métodos para validar e organizar o conhecimento,

desde as antigas civilizações até a atualidade. Os métodos de definições, teoremas e demonstrações na construção efetiva desse conhecimento, faz uso permanente da imaginação, de raciocínios indutivos plausíveis, de conjecturas, de tentativas, de verificações empíricas, enfim, recorre-se a uma variedade complexa de outros procedimentos para sua aplicação.

Este trabalho evidencia com clareza a dificuldade que a matemática como ciência encontrou e ainda encontra para definir um objeto tão fundamental em sua existência, o número. O que a princípio pareceria simples se revelou um grandioso problema que até os dias atuais não encontra solução. O receio e incômodo expressados por Frege como “uma vergonha para a ciência”, tem sido objeto de estudos e discussões que perpassam os anos.

Uma conclusão possível e bastante plausível, a qual este trabalho nos remete, é a de que nenhuma definição de número jamais encontrou consenso entre os matemáticos, justamente porque este tal objeto, denominado número, não pode vir a ser apreendido, captado ou assimilado, completamente, em sua totalidade, por nenhuma sequência de palavras, por mais significativas e mais próximas da ideia de número que elas possam se aproximar. Neste sentido, a construção axiomática apresentada por Peano acaba sendo uma possibilidade mais concreta para uma resposta sensata à questão: Afinal, o que é um número? De fato, pois Peano diria que número não é nada que se possa definir, ele é um objeto que precisamos aceitar sem definição. Sendo assim, não nos é permitido saber o que é número. Isto, por outro lado, abre uma infinidade de possibilidades para representarmos um número via modelos de um sistema axiomático, que é uma representação particular dos termos e relações primitivos de um sistema axiomático por outros objetos e relações que conhecemos de modo que a representação satisfaça os axiomas estipulados. É o que fazemos, ainda que inconscientemente, quando atribuímos a um número o preço dos objetos de consumo. Quando dizemos que uma bicicleta custa R\$ 300,00 estamos atribuindo ao objeto não definido número 300, uma interpretação deste como preço do objeto real bicicleta.

Finalizamos esse trabalho com as palavras de Johann Von Neumann: “Na Matemática não compreendemos as coisas, apenas nos habituamos a elas”.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. 1901-1990. **Dicionário de filosofia**/ Nicola Abbagnano; tradução da 1ª edição brasileira coordenada e revista por Alfredo Bossi; revisão da tradução e tradução de novos textos Ivone Castilho Benedetti – 5ª ed. – São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ALCOFORADO, P. **Lógica e Filosofia da Linguagem**. 2ª ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2009.

ARISTOTELES (384-322 a. C.) **Metafísica**/ Aristóteles- Tradução, textos adicionais e notas Edson Bini- Bauru, SP: Edipro, 2006.

ARISTOTELES (384-322 a. C.) **Organon, Da interpretação, Analíticos anteriores Analíticos posteriores, Tópicos, Refutações sofísticas/Aristóteles**; tradução, textos adicionais e notas Edson Bini. - São Paulo: Edipro, 3. Ed., 2016.

AULETE. C. 1823-1878. **Novíssimo Aulete dicionário de língua portuguesa**/ Caldas Aulete; [organizador Paulo Geiger]. -Rio de Janeiro: Lexikon 2011.

BARKER, S. **Filosofia da Matemática**/ Stephen F. Barker; tradução, Leonidas Hegenberg e Octanny Silveira. 1ª Ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1969.

BOYER, C. B. **História da matemática**/ Carl B. Boyer, Uta C. Merzbach; [tradução de Helena Castro]. São Paulo: Blucher, 2012.

BRITTO, A. **O teorema de Frege**: uma reavaliação do seu projeto logicista; Dissertação (Mestrado em Filosofia) - Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

CARNIELLE, W. 1 Vídeo (95 minutos). **Os teoremas da incompletude de Gödel**. Publicado pelo canal CEPID CeMEAI, 2018. Disponível em:

< https://www.youtube.com/watch?v=s_4Rq141_-A&t=144s>. Acesso em: 16 jul 2020.

CASSINA, U. **Su la logica matematica** di G. Peano, 1933. In: KENNEDY, Hubert. Twelves articles on Giuseppe Peano. San Francisco:Peremptory Publications ebook, 2002.

COSTA, N. (Newton Carneiro Afonso da Costa), 1929- **Introdução aos fundamentos da matemática**/ Newton Carneiro Afonso da Costa. – 4. Ed. São Paulo: Hucitec, 2008.

COURY, A. **Frege e as Leis da Aritmética**: do ideal da fundamentação ao paradoxo/Aline Germano Fonseca Coury. 2015. Tese (Mestrado em educação) – Universidade de São Carlos, São Carlos, 2015.

DEDEKIND, R. 1901. **Essay on the Theory of Numbers**. Trad. W. W. Beman. Chigago: The Open Court Publishing Company.

EUCLIDES, **Os Elementos**/Euclides; tradução e introdução de Irineu Bicudo. - São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**/ Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues. - Campinas, SP: Editora Unicamp, 2004.

FREGE, G. **Os Fundamentos da Aritmética**: Uma investigação lógico-matemática acerca do conceito de número. Tradução: Antônio Zilhão. S.l. Imprensa Nacional-Casa da Moeda, 1992.

FREGE, G. **Conceitografia**: uma linguagem formular do pensamento puro decalcada sobre a aritmética/ Gottlob Frege. Introdução, tradução e notas de Paulo Alcoforado, Alessandro Duarte e Guilherme Wyllie – Seropédica, RJ: PPGFIL-UFRRJ, 2018.

GAARDER, J. **O mundo de Sofia**: romance da história da filosofia / Jostein Gaarder; tradução do norueguês Leonardo Pinto Silva. — 1ª- ed. — São Paulo: Companhia das Letras, 2012.

GARBI, G. **A Rainha das Ciências**: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática / Gilberto Geraldo Garbi. – 2. ed rev. e ampl. – São Paulo: Editora Livraria Física, 2007.

HALMOS, P. **Teoria ingênua dos conjuntos**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2001.

HAMLIN, D. **Uma História da Filosofia Ocidental** / David Walter Hamlyn. Trad.: Ruy Jungmann. – Rio de Janeiro: Editor Jorge Zahar, 1990.

HESÍODO. **Teogonia a origem dos deuses**. Tradução: Jaa Torrano. São Paulo: Iluminuras, 1995.

JAPIASSÚ, H; MARCONDES, D. **Dicionário Básico de Filosofia**/ Hilton Japiassú e Danilo Marcondes. – Rio de Janeiro: Zahar, 2008.

KENNEDY, H. **Twelve articles on Giuseppe Peano**. San Francisco: Perrempory Publications ebook, 2002.

KÖRNER, S. **Uma introdução à filosofia da matemática**/ Stephan Körner: tradução Alberto Oliva. - Rio de Janeiro: Zahar, 1985.

LIMA, E. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Elon Lages Lima. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MASTIN, L. **Egyptian Mathematics**. 2010. Disponível em:
<<https://www.storyofmathematics.com/egyptian.html>>. Acesso em: 05 nov. 2020.

MORAIS FILHO, D. C. – **Um convite à matemática**: fundamentos lógicos, com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades/ Daniel Cordeiro de Moraes Filho; 2.ed rev. ampl- Campina Grande, EDUFCG, 2007.

MORGADO, A. **Matemática Discreta**/ Augusto César Morgado; Paulo Cezar Pinto Carvalho. Capa de Pablo Diego Regino. – Rio de Janeiro: SBM, 2015.

NAGEL, E. **Prova de Gödel**/ Ernest Nagel e James Newman: tradução de Gita K. Guinsburg. São Paulo, perspectiva. Ed. da Universidade de São Paulo, 1973.

NOVA ESCOLA. **Novos temas e reorganização das áreas são as principais novidades em Matemática**, c 2020. Disponível em:

<<https://novaescola.org.br/bncc/conteudo/32/novos-temas-e-reorganizacao-das-areas-sao-as-principais-novidades-em-matematica/>>. Acesso em: 09 de out. de 2020.

PLATÃO, 427-347 a.C. **A República**/ Platão tradução de Carlos Alberto Nunes - 3 ed. - Belém: EDUFPA, 2000.

PLATÃO, **Diálogos**: Teeteto Crátilo/ Platão. Tradução direto do grego: Carlos Alberto Nunes. – 3ª edição. Belém, PA: Editora universitária UFPA, 2001.

ROQUE, T. **História da matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas/ Tatiana Roque - Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, T. **Tópicos de História da matemática**/ Tatiana Roque e João Bosco Pitombeiras Carvalho. - Rio de Janeiro: SBM, 2012.

RUSSELL, B. **Introdução à Filosofia Matemática**/ Bertrand Russell; tradução: Maria Luiza X. de A. Borges; revisão técnica, Samuel Jurkiewicz. Rio de Janeiro: Zahar, 2007.

RUSSELL, B. **História da Filosofia Ocidental**- Livro 1: A filosofia antiga/ Bertrand Russell; tradução: Hugo Langone – 2. Ed – Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2015.

SCOTT, P. **Grécia Antiga a História Completa** – Desde a Idade das trevas grega até o fim da antiguidade. Peter Scott. Ed. Book Brothers, 2019.

SHAPIRO, S. 1951- **Filosofia da Matemática**. - (O saber da filosofia; 42) - 70. Ed. Lisboa: O saber da filosofia 2016.

SILVA, V. **Números**: Construção e propriedades / Valdir Vilmar da Silva. – Goiânia: Ed. Da UFG, 2005.

SILVA, J. **Filosofias da matemática**/ Jairo José da Silva- São Paulo: Editora UNESP, 2007.

SINGH, S. **O Último Teorema de Fermat**: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos / Simon Singh; tradução de Jorge Luiz Calife. – 6ª tiragem – Rio de Janeiro: Record, 1999.

TAHAN, M. **O homem que calculava**/ Malba Tahan. – Rio de Janeiro: Record, 1999.

WAGNER, E. **Construções Geométricas**/ Eduardo Wagner e José Paulo Q. Carneiro. Rio de Janeiro: SBM, 1993.

WHITE, H. **Teoria literária e escrita da história**. Estudos Históricos, Rio de Janeiro, 1994.

ZEGARELLI, M. **Lógica para leigos** / Mark Zegarelli. – Rio de Janeiro: Alta Books, 2013.